

**ČESKÉ VYSOKÉ
UČENÍ TECHNICKÉ
V PRAZE**

**FAKULTA
STROJNÍ**



**DIPLOMOVÁ
PRÁCE**

**NÁVRH ZPŮSOBU ZAVEDENÍ ZBYTKOVÉHO
NAPĚTÍ DO MKP MODELU TEPNY**

2017

**Bc. VÁCLAV
BENEŠ**

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Beneš** Jméno: **Václav** Osobní číslo: **397011**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávající katedra/ústav: **Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**
Studijní program: **Strojní inženýrství**
Studijní obor: **Biomechanika a lékařské přístroje**

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

Návrh způsobu zavedení zbytkového napětí do MKP modelu tepny

Název diplomové práce anglicky:

Residual stress incorporation into FEM model of arterial wall

Pokyny pro vypracování:

- (1) Stručně popište mechanické vlastnosti cév
- (2) Vysvětlete funkci zbytkových napětí v cévách
- (3) Popište metody používané k zahrnutí zbytkového napětí do výpočetních modelů cévní stěny
- (4) Pomocí MKP proveďte zkušební výpočty stavu napjatosti a deformace cévy se zahrnutým obvodovým zbytkovým napětím

Seznam doporučené literatury:

- (1) Holzapfel G. (2002) Nonlinear solid mechanics. John Wiley and Sons, Chichester
- (2) Biomechanical modelling at the molecular, cellular and tissue levels. Ed.: Holzapfel G., Ogden R., CISM Course and lectures vol. 508. Springer, Wien

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:


doc. Ing. Lukáš Horný Ph.D., ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky FS


Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

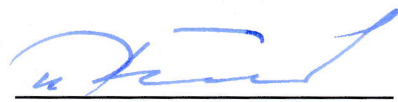
Datum zadání diplomové práce: **28.04.2017**

Termín odevzdání diplomové práce: **18.08.2017**

Platnost zadání diplomové práce: _____


Podpis vedoucí(ho) práce

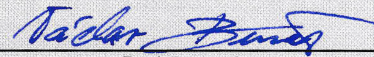

Podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry


Podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

AP. 4. 2017
Datum převzetí zadání


Podpis studenta

Anotační list

Jméno autora:	Bc. Václav Beneš
Název Diplomové práce:	Návrh způsobu zavedení zbytkového napětí do MKP modelu tepny
Anglický název:	Residual stress incorporation into FEM model of arterial wall
Akademický rok:	2016/2017
Obor studia	Biomechanika a lékařské přístroje
Ústav/odbor:	Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky Odbor biomechaniky
Vedoucí diplomové práce:	doc. Ing. Lukáš Horný, Ph.D.
Bibliografické údaje:	Počet stran: 130 Počet obrázků: 109 Počet tabulek: 3 Počet příloh: 1x CD
Klíčová slova:	zbytkové napětí, tepna, MKP, aorta, Abaqus, model
Keywords:	residual stress, artery, FEM, aorta, Abaqus, model
Abstrakt:	Práce se zabývá způsoby zavedení zbytkového napětí do MKP modelu tepny. A poté inflačně extenzním MKP modelem tepny s vnitřním předpětím. Jednotlivé výsledky MKP výpočtu jsou srovnány s analytickým modelem pro ověření jejich správnosti.
Abstract:	This thesis deals with residual stress incorporation into FEM model of arterial wall. Next with inflation and extension of arterial tube with residual stress. The results are then compared with analytic model to verify their correctness.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze literaturu uvedenou v příloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č.121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne 18.8.2017

.....

podpis

Poděkování

Chtěl bych poděkovat vedoucímu mé diplomové práce, panu doc. Ing. Lukáši Hornému, Ph.D. za vedení této diplomové práce, jeho podnětné rady a připomínky při jejím vypracování. Dále panu Ing. Petru Tichému, Ph.D. za všechny konzultace týkající se MKP výpočtů.

Chtěl bych také poděkovat svým rodičům za podporu a trpělivost, se kterou mě podporovali v průběhu celého studia a tvorbě této diplomové práce.

Obsah

Zadání	3
Anotační list	3
Prohlášení	4
Poděkování	5
Seznam použitých symbolů	11
Konvence značení	14
1 Úvod	15
1.1 Cíle práce	15
2 Oběhová soustava	16
2.1 Krev	16
2.2 Srdce	17
2.3 Cévy	18
2.3.1 Tepny	18
2.3.2 Vlasečnice	18
2.3.3 Žíly	18
3 Stavba tepenné stěny	19
3.1 Tunica intima	19
3.2 Tunica media	20
3.3 Tunica externa	20
4 Mechanické vlastnosti tepen	20
4.1 Nelineární chování	21
4.2 Anisotropie	22
4.3 Viskoelasticita	22
4.4 Nestlačitelnost	22
4.5 Další faktory ovlivňující mechanické vlastnosti cév	23

5	Fyziologické předpětí tepen	23
5.1	Axiální předpětí	23
5.2	Obvodové předpětí	25
5.2.1	Výhody obvodového předpětí	26
6	Kinematika deformací	28
6.1	Deformační gradient	29
6.2	Napětí	31
7	Konstitutivní model	32
7.1	Hyperelasticita	32
7.2	Anisotropní materiál	33
7.2.1	Isotropie	33
7.2.2	Anisotropie	34
7.2.2.1	Jeden preferovaný směr	34
7.2.2.2	Invariant I_4 a jeho geometrická interpretace . . .	35
7.2.2.3	Dva preferované směry	36
7.3	Model zohledňující strukturu materiálu	37
7.3.1	Model rozptylu vláken	37
7.3.2	Dva preferované směry	39
8	Analytický výpočtový model	40
8.1	Inflace a extenze uzavřené válcové trubice	41
8.1.1	Materiálový model	41
8.1.2	Kinematika deformace	41
8.1.3	Rovnice rovnováhy pro silnostěnnou trubici	42
8.2	Postup inflace a extenze uzavřené nádoby	43
8.2.1	Stanovení strečů	43
8.2.2	Stanovení napětí po tloušťce stěny	45
8.3	Inflace a extenze otevřené válcové trubice se zbytkovým napětím .	46
8.3.1	Materiálový model	47
8.3.2	Kinematika deformace	47

8.3.3	Silnostěnná nádoba	49
8.3.4	Rovnice rovnováhy	49
8.4	Postup otevřená nádoba s vnitřním předpětím	49
8.4.1	Zavírání proužku	50
8.4.2	Inflace a extenze otevřené válcové trubice s vnitřním před- pětím	52
9	Metoda Konečných prvků	54
9.1	Princip fungování výpočetní metody MKP	54
9.2	Lagrangeův variační princip	54
9.2.1	Řešení úlohy teorie pružnosti	56
9.2.2	Obecné vlastnosti matice tuhosti K	56
9.2.3	Kinematické okrajové podmínky	56
9.3	Abaqus	57
9.4	Model inflace a extenze válcové trubice	57
9.4.1	Geometrie součásti	57
9.4.2	Materiál součásti	58
9.4.3	Tvorba sestavy	60
9.4.4	Zatěžovací kroky	61
9.4.5	Nastavení zatížení	61
9.4.6	Síť	62
9.4.7	Zápis materiálové orientace v input souboru	62
9.4.8	Job	63
9.5	Modelování inflace a extenze válcové trubice s vnitřním předpětím v rámci jedné úlohy	63
9.5.1	Geometrie součásti	63
9.5.2	Materiál součásti	66
9.5.3	Tvorba sestavy	66
9.5.4	Zatěžovací kroky	67
9.5.5	Nastavení zatížení	68
9.5.6	Síť	68

9.5.7	Materiálová orientace	68
9.5.8	Job	68
9.6	Možnosti zatížení pro vnesení předpětí	69
9.6.1	Počáteční okrajové podmínky	69
9.6.2	Zatížení momentem	70
9.6.3	Silové působení - Dvojice sil	71
9.6.4	Kinematicky - posunem jedné hrany na rovinu XZ	73
9.6.5	Kinematicky - Posuvem do tvaru půlkruhu	75
9.6.6	Kinematicky - rotací o úhel	76
9.7	Inflace a extenze trubice s předpětím	77
9.7.1	Axiální protažení - Step-2	77
9.7.2	Tlakování - Step-3	80
9.8	Stabilizace úlohy na čelní a zadní straně proužku	81
9.9	Načtení předpětí pomocí předdefinovaného pole	81
9.9.1	Založení nového Modelu	83
9.9.2	Načtení geometrie z *.odb souboru	83
9.9.3	Materiál součásti	84
9.9.4	Sestava	84
9.9.5	Vytvoření zatěžovacích kroků	84
9.9.6	Nastavení zatížení	85
9.9.7	Zanesení předdefinovaného pole	87
9.9.8	Síť	88
9.9.9	Materiálová orientace	88
9.9.10	Job	88
10	Vyhodnocení výsledků MKP výpočtů	88
10.1	Transformace kartézských souřadnic na válcové	88
10.2	Výsledky z inflačně extenzního výpočtu uzavřené trubice	89
10.2.1	Export dat z modelu	90
10.2.2	Porovnání s analytickým modelem	91
10.3	Výsledky vnášení předpětí uzavíráním rozevřeného proužku	91

10.3.1	Vnesení předpětí působením momentu	92
10.3.2	Vnesení předpětí silovým působením dvojice sil	95
10.3.3	Výsledky vnesení předpětí jednoduchým ohybem	98
10.3.4	Výsledky vnesení předpětí ohybem do tvaru kruhu	100
10.3.5	Výsledky vnesení předpětí rotací o úhel	102
10.4	Výsledky inflace a extenze trubice s vnitřním předpětím	105
10.4.1	Předpětí vneseno kinematicky do tvaru oválu	105
10.4.2	Předpětí vneseno kinematicky do tvaru kruhu	110
10.4.3	Dlouhá trubice se stabilizací na čelní a zadní straně	114
10.5	Výsledky inflačně extenzního testu proužku s předpětím pomocí předdefinovaného pole	116
11	Zhodnocení MKP postupů	119
11.1	Úlohy realizované pomocí tří zatěžovacích kroků	119
11.2	Úloha pomocí předdefinovaného pole	120
12	Závěr	121
	Seznam literatury	123
	Seznam obrázků	126

Seznam použitých symbolů

Latinka

\mathbf{b}	levý Cauchy-Greenův tenzor deformace
\mathbf{C}	pravý Cauchy-Greenův tenzor deformace
c_0	materiálová konstanta pro hustotu deformační energie (počáteční modul pružnosti ve smyku) [kPa]
\mathbf{E}	Green-Lagrangerův tenzor deformace
$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$	pravoúhlé kartézské bázevé vektory
\mathbf{F}	deformační gradient
\mathbf{F}_1	deformační gradient pro kinematiku uzavírání tepenného proužku
\mathbf{F}_2	deformační gradient pro kinematiku inflace a extenze válcové trubice
\mathbf{F}_3 ..	deformační gradient pro kinematiku uzavření tepenného proužku a následnou inflaci a extenzi
F_{RED}	předepínací síla [mN]
\mathbf{H}	tenzor spojený s počtem vláken
\mathbf{I}	jednotkový tenzor 2.řádu
I_1, I_2, I_3	hlavní invarianty tenzorů \mathbf{b} a \mathbf{C}
I_4, I_5, I_6, I_7, I_8	4. - 8. invariant tenzoru \mathbf{C}
\bar{I}_4, \bar{I}_5	invarianty uvažující průměrnou hodnotu směru vláken
J	Jacobián
K_4, K_6	4. a 6. invariant
k_1	materiálová konstanta pro hustotu deformační energie [kPa]
k_2	materiálová konstanta pro hustotu deformační energie [-]
\mathbf{M}, \mathbf{M}'	jednotkové vektory ve směru preferovaných vláken
\mathbf{m}, \mathbf{m}'	jednotkové vektory ve směru preferovaných vláken pro zdeformovanou konfiguraci
$\bar{\mathbf{M}}, \bar{\mathbf{M}}'$	jednotkové vektory udávající průměrnou hodnotu směru vláken
\mathbf{N}	jednotkový normálový vektor
\mathbf{n}	normálový vektor
\mathbf{P}	1. Piola-Kirchhoffův tenzor napětí
P	systolický tlak [kPa]

\mathbf{Q}	ortogonální transformace
\mathbf{R}	ortogonální tenzor transformace
R_i, R, R_o	vnitřní, střední a vnější poloměr tepny [mm]
r_i, r, r_o	vnitřní, střední a vnější poloměr tepny po inflaci a extenzi [mm]
\mathbf{t}	vektor napětí
\mathbf{U}	levostranný tenzor deformace
$\ln \mathbf{U}$	Henckyho tenzor deformace
$\mathbf{u}^{(i)}$	vlastní vektor tenzoru \mathbf{U}
\mathbf{V}	pravostranný tenzor deformace
$\mathbf{v}^{(i)}$	vlastní vektor tenzoru \mathbf{V}
W	hustota deformační energie
\hat{W}	hustota deformační energie pro silnostěnnou nádobu
\mathbf{X}	polohový vektor v referenční konfiguraci
\mathbf{x}	polohový vektor ve zdeformované konfiguraci

Řecká abeceda

α	úhel rozevření prstýnku tepny [°]
β ($\beta_1 = \beta_2$)	úhel mezi vektorem \mathbf{M} (\mathbf{M}') a příslušnou osou [rad]
ϕ	úhel mezi průvodičem a bázovým vektorem \mathbf{e}_1 [rad]
θ	úhel mezi průvodičem a bázovým vektorem \mathbf{e}_2 [rad]
κ	stupeň anisotropie
λ	poměrná změna délek (streč) [-]
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	hlavní protažení [-]
$\lambda_{rR}, \lambda_{\theta\Theta}, \lambda_{zZ}$	protážení v radiálním, obvodovém a axiálním směru [-]
μ	materiálová konstanta pro hustotu deformační energie (počáteční modul pružnosti ve smyku) [kPa]
ω	jednotková sféra
ρ	funkce hustoty orientace vláken
ρ_i, ρ, ρ_o	vnitřní, střední a vnější poloměr rozevřeného proužku tepenné stěny [mm]
$\boldsymbol{\sigma}$	Cauchyho tenzor napětí [MPa]

$\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}$ radiální, obvodové a axiální napětí [MPa]
 ζ délka rozevřeného proužku [mm]

Konvence značení

V bakalářské práci je přijatá následující konvence značení:

Skalární veličiny jsou značeny kurzívou např.: tlak $\dots P$

Tenzory jsou značeny tučně např.: deformační gradient $\dots \mathbf{F}$

Vektory jsou značeny tučnou kurzívou např.: síla $\dots \mathbf{F}$

1 Úvod

Z onemocnění kardiovaskulárního systému se stává civilizační choroba, která ohrožuje stále širší spektrum populace. Díky biomechanice je možné zachránit velké množství pacientů za pomoci umělých chlopenních náhrad, nebo pomocí stentů pro aterosklerotické případy zkornatělých tepen, či tepenných aneurysmat.

Aby bylo možné tyto výrobky vyvíjet, je nutné znát mechanické vlastnosti kardiovaskulárního systému pro správné nastavení experimentálních simulací. Mnohé experimenty jsou nyní realizovány počítačovými simulacemi pomocí metody konečných prvků.

Protože jsou lidské tepny ve fyziologickém stavu zatíženy předpětím v axiálním i obvodovém směru, které výrazně ovlivňuje jejich chování při inflačně extenzním testu, je nutné toto předpětí zahrnout i do výpočtových modelů.

Hlavním cílem této diplomové práce je navrhnout postup pro zanesení obvodového předpětí do MKP modelu tepny, které přispěje k dalšímu přiblížení se reálnému stavu tepen ve fyziologických podmínkách při jejich modelování.

V první části se bude diplomová práce věnovat popisu kardiovaskulárního systému, jeho mechanickým vlastnostem a funkci a vlivu předpětí cév. Druhá část bude zaměřená na tvorbu analytického modelu, který bude sloužit pro ověření výsledků MKP výpočtu. Ve třetí části bude popsán postup vytvoření MKP úlohy se zahrnutým obvodovým předpětím a vyhodnocení výsledků.

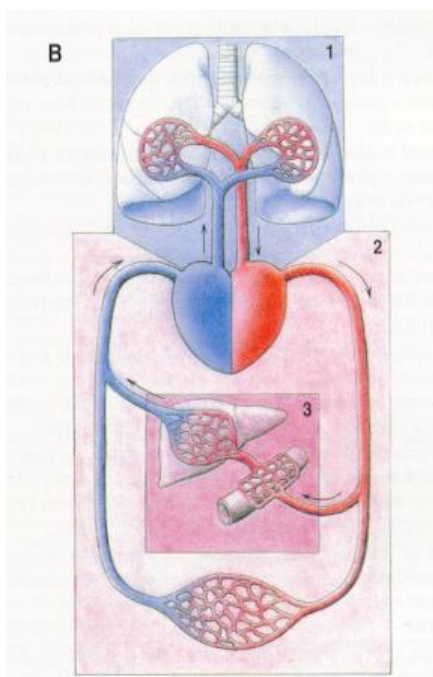
1.1 Cíle práce

Cílem této diplomové práce je popsat mechanické vlastnosti cév. Vysvětlit funkci zbytkových napětí v cévách. Dále popsat metody používané k zahrnutí zbytkového napětí do výpočetních modelů cévní stěny. A následně za pomoci MKP provést zkušební výpočty stavu napjatosti a deformace cévy se zahrnutým zbytkovým obvodovým napětím.

2 Oběhová soustava

Oběhová, neboli cévní soustava je systém trubic, který slouží k rozvodu krve po organismu. Krev je tekutina proudící v cévách, která ke tkáním transportuje kyslík a odvádí zplodiny metabolismu ve formě oxidu uhličitého. Krev také transportuje obranné látky, živiny a hormony k cílovým orgánům.

Na obrázku (1), můžeme vidět schématické vyobrazení oběhové soustavy, na kterém je vidět velký a malý oběh. [1]



Obrázek 1: Schéma oběhové soustavy [1]

2.1 Krev

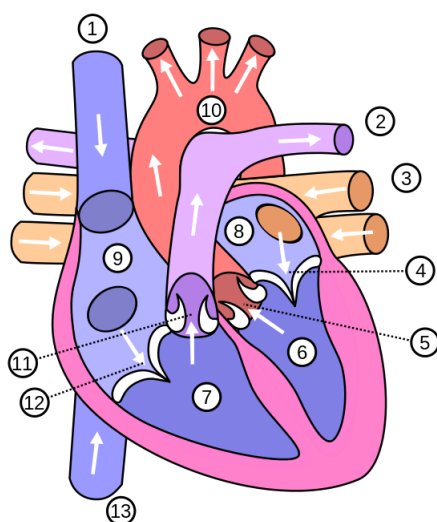
Krev je neprůhledná tekutina, která se skládá ze dvou základních složek:

Krevní plasmy, což je průhledná nažloutlá tekutina, která obsahuje velké množství vody (cca 92%). Dále obsahuje bílkoviny, soli a další látky v nepatrných množstvích.[1]

A krevních buněk, tedy červených krvinek, které se starají o přenos kyslíku a odvodu oxidu uhličitého. Bílých krvinek, které jsou schopné pohlcovat cizí částice a jsou tak důležitým prvkem imunitního systému. A krevních destiček, které se shlukují v poraněném místě cévní stěny, kde vytvoří primární zátku.[1]

2.2 Srdce

Srdce je dutý svalový orgán, který svými rytmickými stahy zajišťuje pohyb krve v cévním systému. Na Obrázku (2) můžeme vidět jeho řez a: Pravou komoru (7), levou komoru (6), pravou síň (9), levou síň (8), aortu (10), plicnici (2), spodní (13) a horní dutou žílu (1). Mezi pravou síní a pravou komorou je trojcípá chlopeň (12). Mezi levou síní a levou komorou je dvojcípá chlopeň (4). Mezi komorami a tepnami jsou chlopně poloměsíčné (5, 11). [1, 2]



Obrázek 2: Řez srdcem [2]

Srdeční cyklus zahrnuje elektrické, mechanické a biochemické děje, které se opakují s každým jeho úderem. Cyklus se dělí na dvě části. Systolu, což je stah síní a komor spojený s vypuzením krve. A diastolu, která je uvolnění síní a komor a jejich plnění krví. [1]

V průběhu srdečního stahu jsou chlopně uzavřeny a to až do momentu kdy tlak v komoře přesáhne tlak v tepně. V ten moment se chlopně postupně otevřou a dojde k vypuzení krve do tepen. Když tlak v tepnách překročí tlak v komoře dojde k uzavření chlopní a nastává fáze uvolnění srdečního svalu. [1]

Během ochabování dochází v komorách k poklesu tlaku, to vede k otevření cípatých chlopní a komory se plní krví. V levé komoře, která vypuzuje krev do aorty a tedy velkého krevního oběhu se tlak pohybuje v relativním rozsahu 0 až 16 kPa.

V pravé komoře, která vypuzuje krev do plicnice a tedy malého krevního oběhu se tlak pohybuje od 0 do 3 kPa. [1]

2.3 Cévy

Cévy jsou trubice, které rozvádí krev po organismu. Základní rozdělení cév je na tepny, které vedou tlakovou krev směrem od srdce. A žíly, které přivádí krev z organismu zpátky k srdci. [1]

2.3.1 Tepny

Tepny, neboli arterie vedou krev směrem od srdce. Tepenné stěny jsou silné a pružné, aby byly schopné odolávat pulsovým nárazům krve vypuzované ze srdce. Při stahu srdce vzniká tlaková vlna, která způsobuje roztahování tepenné stěny a je hmatatelná jako puls. [1, 3]

Směrem od srdce klesá jejich průměr a vzhledem k nižšímu tlaku, který na ně působí i tloušťka jejich stěny. Podlé těchto parametrů můžeme tepny dále rozdělit na: [3]

- Velké tepny s vnitřním průměrem okolo 8 mm a tloušťkou stěny 1 - 2 mm (aorta může mít vnitřní průměr až 26 mm).
- Malé tepny s vnitřním průměrem okolo 3 mm a tloušťkou stěny 0,1 - 1 mm.
- Tepénky s vnitřním průměrem okolo 0,1 mm a tloušťkou stěny 0,02 - 0,1 mm.

2.3.2 Vlasečnice

Vlasečnice jsou malé cévy, které vytváří spojenci mezi tepénkami a žilkami. Stěna vlasečnice je tvořená pouze jednou vrstvou endotelových buněk. Přes tuto stěnu probíhá výměna plynů a látek mezi krví a tkáněmi. Vlasečnice se spojují v postkapiláry a ty následně v žilky a malé žíly. [1, 3]

2.3.3 Žíly

Žíly, které vedou krev z organismu zpátky směrem k srdci mají tenčí stěnu než tepny stejného průměru. V žilách není krev pod tlakem jako v tepnách a stěny tak nemusí být tak silné. Žíly máme povrchové a hluboké. Povrchové žíly probíhají v podkožním vazivu a mají spojky do hlubokých žil, které většinou doprovázejí tepny.[1]

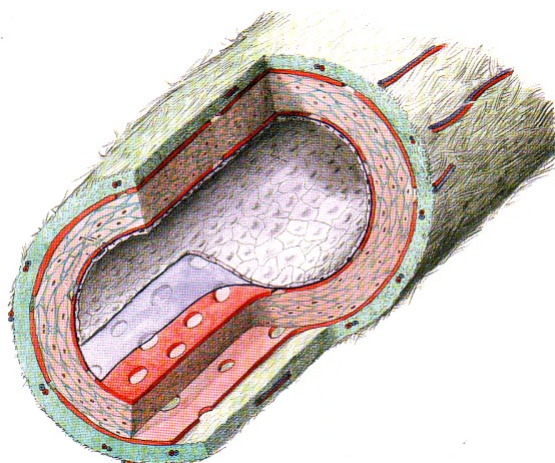
V žilách se vyskytují tzv. žilní chlopně, což jsou endotelem kryté výběžky intimy. Žilní chlopně mají poloměsíčitou formu s jednou až třemi kapsami a jsou orientovány tak, že umožňují průtok krve pouze jedním směrem. [1]

Stejně jako tepny i žíly můžeme rozdělit na: [3]

- Velké žíly s vnitřním průměrem 10 - 30 mm a tloušťkou stěny 0,5 - 1,5 mm.
- Malé žíly s vnitřním průměrem 1 - 9 mm a tloušťkou stěny 0,1 - 0,5 mm.
- Žilky s vnitřním průměrem 0,02 - 1 mm a tloušťkou stěny 0,002 - 0,1 mm.

3 Stavba tepenné stěny

Tepenná stěna se skládá ze tří vrstev a to: Tunicy intimy, tunicy medie a tunicy externy, viz obrázek (3).



Obrázek 3: Řez cévní stěnou [1]

3.1 Tunica intima

Vnitřní vrstva tunica intima je složena z jedné vrstvy plochých endotelových buněk, které zajišťují nesmáčivost povrchu. Poškození vnitřní endotelové vystýlky může způsobit mnoho kardiovaskulárních chorob, například arteosklerózu, kdy se pod endotelovou vrstvou začne hromadit vazivo a tuk. Endotelová vrstva je podložena sítí elastických a kolagenních vláken, nebo elastickými blankami, které se označují jako membrana elastica interna. [1, 3]

3.2 Tunica media

Uprostřed je vrstva tunica media, která je nejsilnější z vrstev tepenné stěny. Je složena z buněk hladké svaloviny mezi kterými jsou pak sítě z kolagenních a elastinových vláken. Obsah kolagenních vláken v této vrstvě je 30% vláken typu I a 70% vláken typu III. V závislosti na velikosti tepny se ve vrstvě mění poměr svalové a elastinové složky. Ty společně s kolagenem vytvářejí šroubovici s velice malým stoupáním, které způsobuje téměř prstencové uspořádání. Toto uspořádání umožňuje tepnám snášet velké namáhání v obvodovém směru. [1, 3]

V závislosti na velikosti tepny se mění poměr svalové a elastinové složky a můžeme tak rozlišovat tepny:[1, 3]

- Pružného typu, které díky své elasticitě umožňují rychlý tok krve směrem k periférii.
- Svalově pružného typu
- Svalového typu, které díky svalovině regulují přívod krve do orgánů.

3.3 Tunica externa

Tunica externa je povrch tepny z fibrilárního vaziva s kolagenními i elastickými vlákny, která se na povrchu cévy síťovitě překřížují a přecházejí do vaziva v nejbližším okolí cévy, čímž je pružně zafixována k okolí. Kolagenní vlákna zde vytváří dvě šroubovice, které jsou tvořeny převážně kolagenem typu I. Tyto šroubovice přispívají ke stabilitě a pevnosti tepenné stěny. Tunica externa je od svalové vrstvy oddělená tenkou elastickou vrstvičkou zvanou membrana elastica externa. [1]

4 Mechanické vlastnosti tepen

Aby bylo možné modelovat chování cév ať už pro inovace medicínských postupů, vývoj stentů, nebo terapeutické postupy, je nutné znát jejich mechanické vlastnosti. [3]

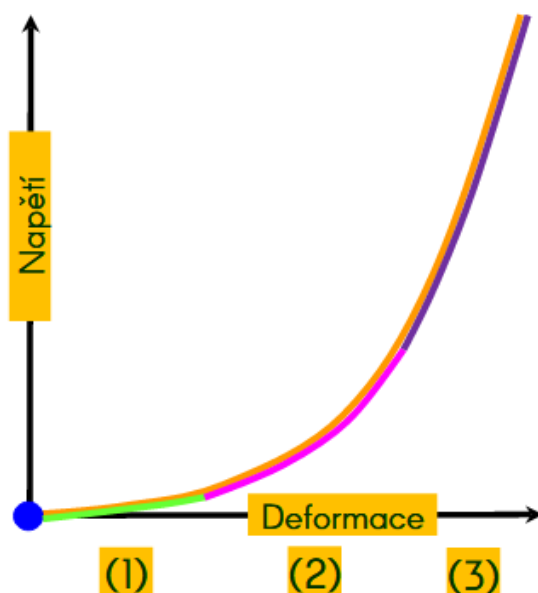
Mechanickou odezvu ovlivňuje především množství kolagenu, elastinu a hladkého svalstva.[3]

Na zatěžování může reagovat cévní stěna aktivně a pasivně. Aktivní mechanická odpověď je dána činností hladké svaloviny, která se smršťuje, nebo uvolňuje. Pasivní je dána deformací při zatížení vnějšími silami, která změní uspořádání kolagenních a elastických vláken.[3]

Při zatěžování vykazují cévy nelineární, viskoelastické a anisotropní chování. Vzhledem k vysokému obsahu vody jsou cévní stěny považovány za nestlačitelné. [3]

4.1 Nelineární chování

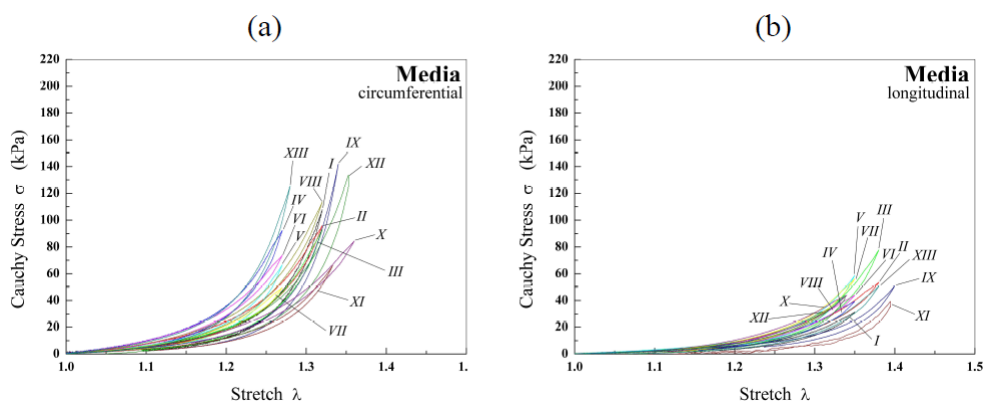
V průběhu zatěžování vykazují stěny cév nelineární chování. To můžeme vidět na obrázku (4), na kterém je znázorněná závislost mezi napětím a deformací. Tato závislost je dána tím, že vlákna kolagenu jsou nerovnoměrně zvlněná a tak v první fázi zatěžování dochází k jejich narovnávaní a zatížení je přenášeno pouze vlákny elastinu (fáze I.). Poté v momentě kdy jsou již některá vlákna kolagenu natažená se cévní stěna vypevňuje (fáze II.) a v poslední fázi už zatížení přenáší převážně vlákna kolagenu (fáze III.). [4]



Obrázek 4: Nelineární chování v průběhu mechanické zkoušky [4]

4.2 Anisotropie

Cévní stěna vykazuje anisotropní vlastnosti, to znamená, že v různých směrech má různé mechanické vlastnosti. Pokud budeme cévní stěnu zatěžovat při jednoosé tahové zkoušce a to v axiálním směru a druhý vzorek ve směru obvodovém, získáme jiné hodnoty napětí a deformace. To můžeme vidět na obrázku (5). [4]



Obrázek 5: Anisotropní chování cévní stěny [8]

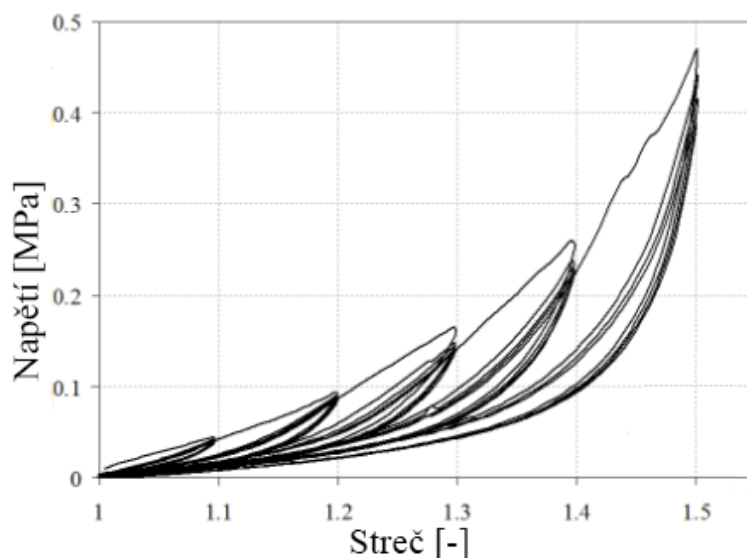
4.3 Viskoelasticita

V průběhu zatěžování vykazují cévní stěny projevy viskoelasticity:[3]

- Projevuje se relaxace, tedy poklesnutí napětí při konstantní deformaci.
- Projevuje se creep, tedy nárůst deformace při konstantním napětí.
- Projevuje se hystereze při cyklickém zatěžování. Plocha hysterezní smyčky se zmenšuje a může i vymizet, nebo se v průběhu cyklů ustálit, viz obrázek (6).
- Projevuje se závislost na rychlosti zatěžování, zvyšující se rychlost zatěžování vede ke strmější závislosti napětí a deformace.
- Projevuje se závislost na historii deformace.

4.4 Nestlačitelnost

Protože všechny měkké tkáně lidského těla obsahují velké množství vody, považujeme je za nestlačitelné. To znamená, že v průběhu deformace se nemění jejich objem. Navíc uvažování materiálu jako nestlačitelného vede ke zjednodušení v rámci matematického modelování.[3]



Obrázek 6: Hysterezní chování cévní stěny v průběhu zatěžování [4]

4.5 Další faktory ovlivňující mechanické vlastnosti cév

- Teplota - Protože s klesající teplotou roste modul pružnosti a klesá schopnost snášet vyšší deformace, tak cévy při nízkých teplotách křehnou. Naopak při vyšších teplotách se měkké tkáně smršťují.[3]
- Věk - Protože s rostoucím věkem klesá elasticita cév, věk také zvyšuje riziko onemocnění, které také může ovlivnit mechanické vlastnosti.[3]

5 Fyziologické předpětí tepen

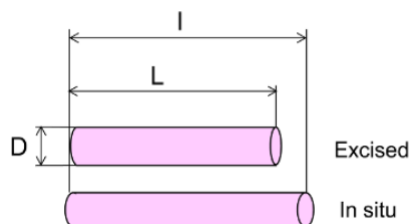
Tepny jsou v lidském těle ve fyziologickém stavu předepnuty a to jak v axiálním tak v obvodovém směru. Tato předpětí jsou pro tepenné stěny vhodné z pohledu namáhání.

5.1 Axiální předpětí

Ve fyziologickém stavu jsou tepny v lidském organismu předepnuty. Aorta pracuje kolem počátečního stavu napjatosti, při kterém je deformace stěny mezi 40% - 0%. Kolem tohoto stavu kolísá deformace v obvodovém směru $\pm 3\%$ a v podélném směru $\pm 1\%$. Počáteční stav je ovšem velmi obtížné určit. U mladších osob se tepny smršťují

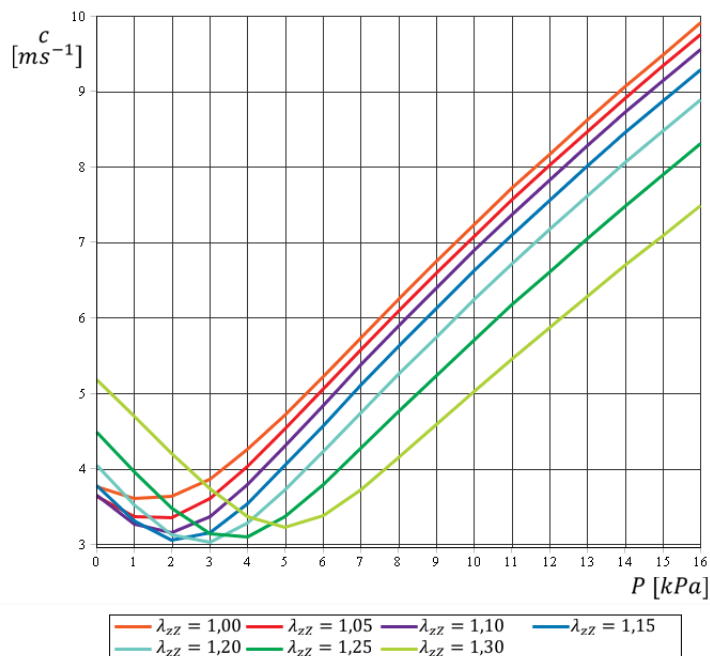
více než u osob starších. Například břišní aorta se v případě mladšího člověka smrští o 30%, v případě staršího pouze o 15%. U osob starších 50 let je zkrácení více než třikrát menší okolo 7% až 9%. Pokud jsou vzorky zasaženy arteosklerózou k jejich zkrácení nemusí vůbec dojít.[3, 6]

Čím více je tepna předeprnutá, tím menší je výsledný obvodový streč v průběhu tla-



Obrázek 7: Schéma zkrácení tepny vlivem axiálního předpětí [4]

kování. Tím pádem tepny, které jsou více axiálně předeprnuty lépe snášejí tlakové namáhání. Axiální předpětí také vede k tomu, že v průběhu tlakování již nedochází k dalšímu axiálnímu protahování, ale pouze k poklesu axiálního streče. Axiální předpětí také vede ke snížení rychlosti propagace pulsní vlny, viz obrázek (8).[3]



Obrázek 8: Závislost rychlosti pulsní vlny na tlaku a axiálním předpětí [7]

Na obrázku (8) můžeme vidět závislost rychlosti průběhu pulsni vlny v závislosti na velikosti axiálního předpětí (barevně) a tlaku P . Je vidět, že pro vyšší tlaky je výhodné vyšší axiální předpětí, které sníží rychlost pulsni vlny šířící se aortou.

5.2 Obvodové předpětí

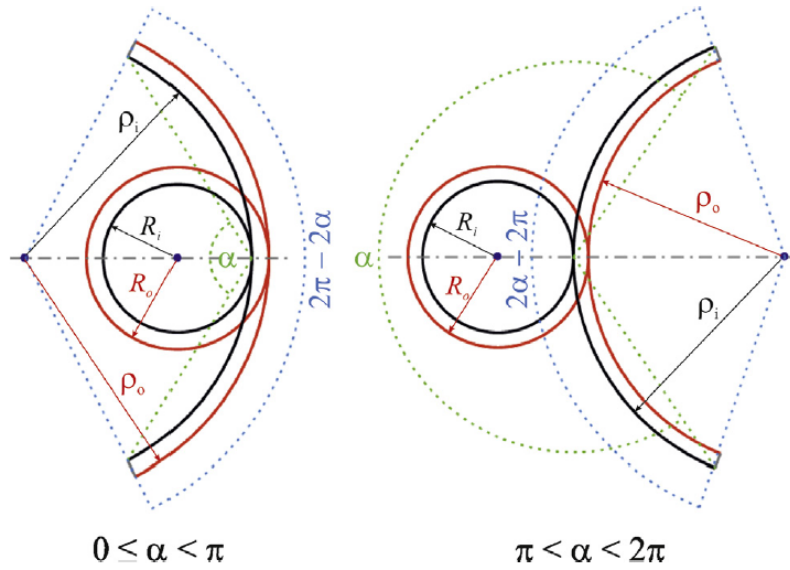
Zbytkové obvodové napětí se projevuje tak, že pokud z vyjmuté tepny odřízneme válcový proužek (prstýnek), který nařízíme, dojde k jeho rozevření. Rozevření naříznutého prstýnku je projevem zbytkového napětí ve stěně. Protože vnitřní předpětí je malé, aby k rozevření prstýnku vůbec došlo, musí být minimalizováno tření mezi prstýnkem a podložkou a to například vrstvičkou fyziologického roztoku, viz obrázek (9). [3, 5]



Obrázek 9: Projev obvodového předpětí ve stěně tepny [5]

Důkaz, že tento jev není způsobený aktivitou hladkého svalstva, které je v tepenné stěně přítomné je potvrzen namočením prstýnku do roztoku se svalovým relaxantem papaverinem (látka která způsobuje ochablost svalů). Velikost rozevření vzorku podrobeného účinku papaverinu bylo stejné jako u vzorku na kterém papaverin použit nebyl.[3]

Velikost vnitřního předpětí lze měřit úhlem rozevření naříznutého prstýnku. Vnitřní předpětí může být malé, po naříznutí dojde pouze k malému rozevření, nebo může být i velké a to tak, že k rozevření prstýnku dojde v takové míře, že se převrátí na druhou stranu, viz obrázek (10). Na obrázku (10) je modelová (idealizovaná)

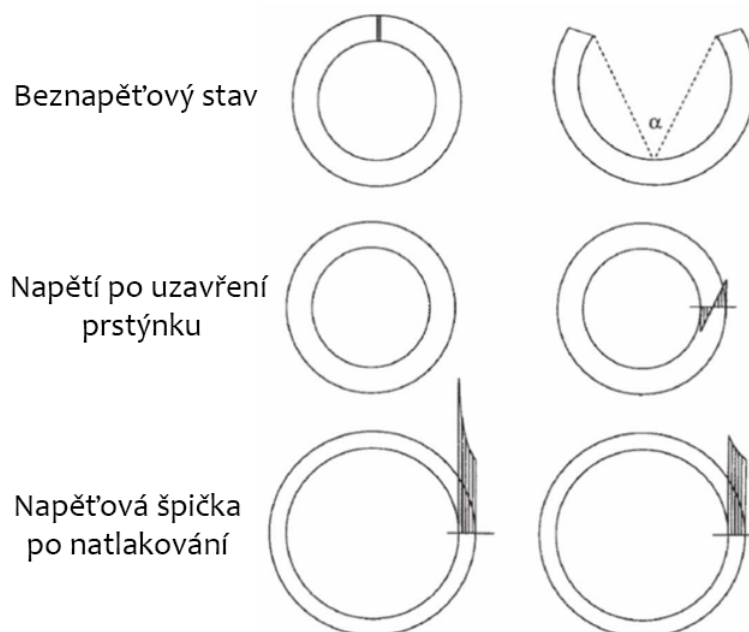


Obrázek 10: Schéma rozevření prstýnku vlivem obvodového předpětí [5]

představa používaná pro měření úhlu rozevření, kde odříznutý proužek (prstýnek) tepny je idealizovaný do tvaru mezikruží. Rozevřený proužek je poté idealizovaný do tvaru mezikruhové výseče. [5]

5.2.1 Výhody obvodového předpětí

Obvodové předpětí je pro tepennou stěnu výhodné, protože snižuje její zatížení v průběhu tlakování. Pokud vyjdeme z beznapěťového stavu, který reprezentuje rozevřený prstýnek a budeme ho uzavírat. Tak po uzavření získáme na jeho vnitřním poloměru vlákna, která jsou tlačena a na vnějším poloměru vlákna, která jsou tažena. Pokud tuto konfiguraci se zbytkovým napětím zatížíme vnitřním tlakem, tak dojde ke snížení napěťové špičky na vnitřním poloměru trubice, viz obrázek (11). Na obrázku můžeme vidět porovnání tlakování trubice s obvodovým předpětím a bez něj.[3, 5]



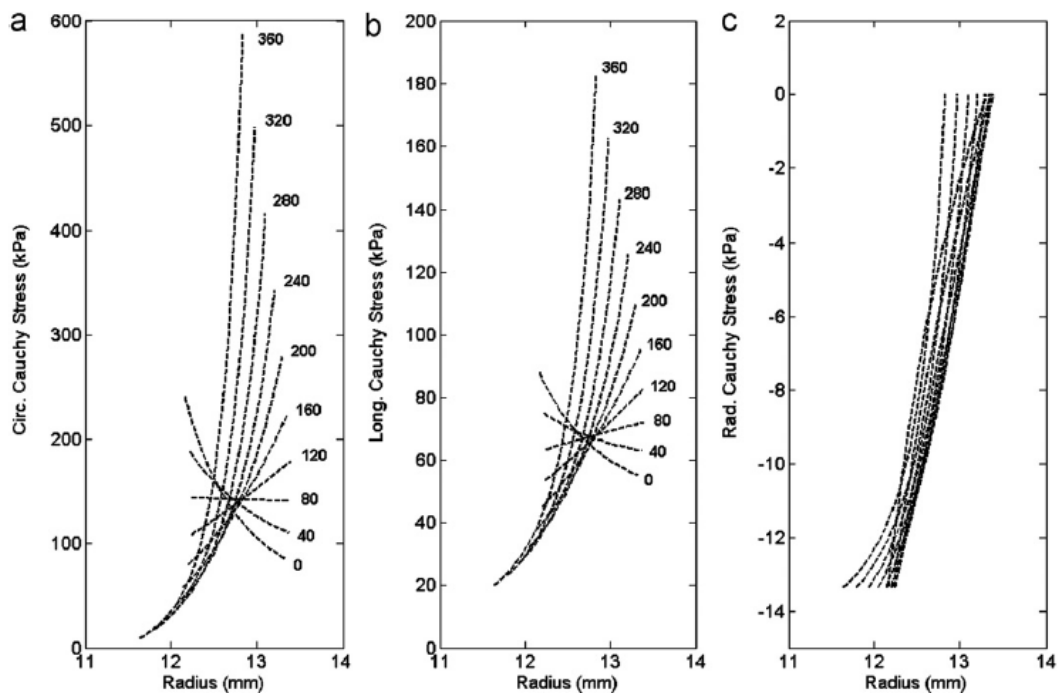
Obrázek 11: Porovnání tlakování tepny s obvodovým předpětím a bez něj [5]

Ve vědecké práci [9] se M.R. Labrosse věnoval vlivu obvodového předpětí v aortě a to jak ve vzestupné, tak hrudní i břišní části. Ve své práci pracoval s celkem 24 vzorky aorty subjektů ve věku 38 - 77 let. A vyhodnocoval vliv obvodového předpětí na základě velikosti úhlu rozevření na napětí ve stěně aorty. Statistické vyhodnocení vlivu úhlu rozevření na napětí ve stěně při tlaku 13,3 kPa, můžeme vidět na obrázku (12). [9]

Na obrázku (12) na grafu *a* je rozložení obvodového napětí po tloušťce stěny, na grafu *b* je axiální napětí a na grafu *c* je radiální napětí. Můžeme vidět, že velikost předpětí má největší vliv právě na obvodové napětí $\sigma_{\theta\theta}$ a axiální napětí σ_{zz} . Radiální napětí σ_{rr} musí splňovat následující okrajové podmínky (1) a (2) a předpětí na něj nemá velký vliv.

$$\sigma_{rr}(r_i) = -P \quad (1)$$

$$\sigma_{rr}(r_o) = 0 \quad (2)$$



Obrázek 12: Závislost rozložení napětí na úhlu rozevření [9]

6 Kinematika deformací

V průběhu deformace dochází v tělese ke tvarovým a objemovým změnám. Protože cévní stěnu považujeme za nestlačitelnou z důvodu velkého obsahu vody, budeme uvažovat pouze tvarovou změnu. Deformacemi nazýváme kvantitativní změny rozměrů, které jsou způsobeny tímto pohybem.

Protože tepnu budeme uvažovat v idealizovaném válcovém tvaru, budeme používat válcový souřadnicový systém. [10]

Zobrazení $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{x}$ vyjadřuje deformaci (jakožto kinematiku pohybu), která transformuje těleso z referenční konfigurace do průběžné. [10]

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \quad (3)$$

Lagrangeovský popis vyjadřuje souřadnice po deformaci pomocí souřadnic před deformací, viz rovnice (3). [10, 11]

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}), \quad x_1 = x_1(X_1, X_2, X_3), \quad x_2 = x_2(X_1, X_2, X_3), \quad x_3 = x_3(X_1, X_2, X_3) \quad (4)$$

Naopak Eulerovský popis vyjadřuje změny vzhledem k průběžné konfiguraci, viz rovnice (5). [10, 11]

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}), \quad X_1 = X_1(x_1, x_2, x_3), \quad X_2 = X_2(x_1, x_2, x_3), \quad X_3 = X_3(x_1, x_2, x_3) \quad (5)$$

6.1 Deformační gradient

Deformační gradient značený \mathbf{F} je veličina, která vystihuje lokální důsledky a vlastnosti pohybu tělesa, kterou můžeme zapsat následující rovnicí (6). [10]

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \quad (6)$$

Na obrázku (13) můžeme vidět situaci nezdeformované a zdeformované konfigurace, kde deformační gradient převádí referenční nezdeformovaný vektor na vektor zdeformovaný. [10]

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \cdot d\mathbf{X} \quad (7)$$

Jednotlivé složky deformačního gradientu poté píšeme v následujícím tvaru (8). [10]

$$F_{iI} = \frac{\partial x_i}{\partial X_I} \quad (8)$$

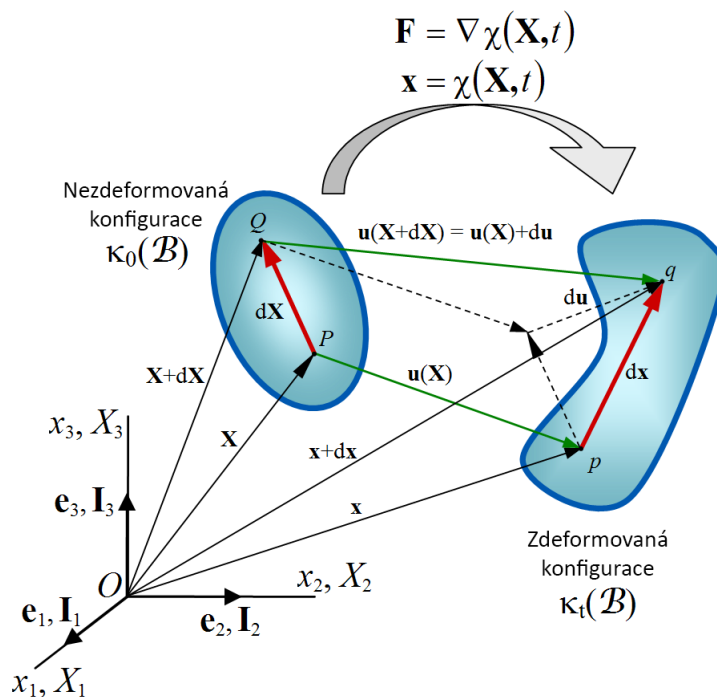
V rovnici (8) za indexy dosazujeme následující $i = a, b, c$ a $I = A, B, C$. A přijímáme konvenci, že podle opakujících se indexů sčítáme. Deformační gradient \mathbf{F} je možné rozložit na tenzor rotace \mathbf{R} a pravostranný tenzor deformace \mathbf{U} a levostranný tenzor deformace \mathbf{V} . To nám pak udává tvz. streče (protažení) a rotaci elementu jako tuhého celku [11]

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad (9)$$

Tenzory \mathbf{U} a \mathbf{V} jsou symetrické a pozitivně definitní. Zatímco tenzor \mathbf{U} vyjadřuje změnu tvaru a objemu před rotací tělesa, tenzor \mathbf{V} tuto změnu popisuje až po ní. Za pomoci spektrálního rozkladu si můžeme tenzory \mathbf{U} a \mathbf{V} vyjádřit jako (10) a (11).

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{u}^{(i)} \otimes \mathbf{u}^{(i)} \quad (10)$$

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{v}^{(i)} \otimes \mathbf{v}^{(i)} \quad (11)$$



Obrázek 13: Deformační gradient [10]

Pomocí jakobiánu si vyjádříme objem zdeformovaného tělesa, který musí být vždy kladný.

$$J = \det \mathbf{F} > 0 \quad (12)$$

Protože se předpokládá platnost vztahů (10) a (11) a nebudeme uvažovat rotaci tělesa, platí

$$J = \det \mathbf{F} = \det \mathbf{U} = \det \mathbf{V} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \quad (13)$$

Za pomoci deformačního gradientu \mathbf{F} můžeme vyjádřit i míry deformace mezi které patří Pravý Cauchyho Greenův tenzor deformace \mathbf{C}

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \equiv \mathbf{U}^2 \quad (14)$$

a levý Cauchy Greenův tenzor deformace

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T \quad (15)$$

Poté vztah mezi Lagrangeovským tenzorem deformace \mathbf{E} a pravým Cauchyovým tenzorem deformace je

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (16)$$

kde \mathbf{I} vyjadřuje jednotkový tenzor 2. řádu.

Hlavní invarianty potom

$$I_1 = \text{tr}(\mathbf{b}), \quad I_2 = \frac{1}{2}[I_1^2 - \text{tr}(\mathbf{b}^2)], \quad I_3 = \det \mathbf{b} \equiv (\det \mathbf{F})^2 \quad (17)$$

kde tr je stopa tenzoru.

Protože materiál považujeme za nestlačitelný budeme mít rovnici jacobíanu (13) v následujícím tvaru

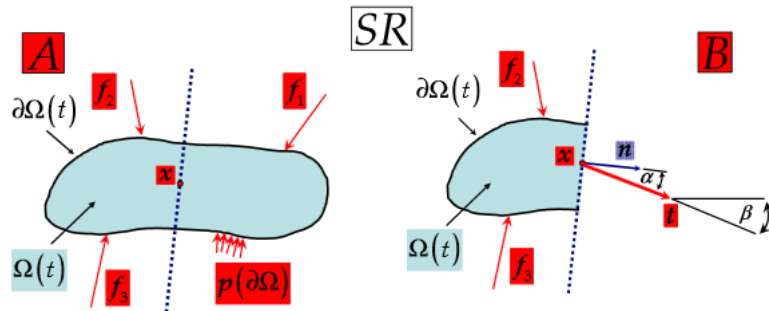
$$J = \det \mathbf{F} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1, \quad I_3 = 1 \quad (18)$$

Henckyho tenzor deformace potom ve tvaru [10, 11]

$$\ln \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \ln \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ln \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \ln \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (19)$$

6.2 Napětí

Budeme uvažovat těleso v nezdeformovaném stavu, které pomocí myšlené roviny procházející bodem \mathbf{x} rozdělíme na dvě části, viz obrázek (14).[10, 11] Odříznu-



Obrázek 14: Napětí v tělese [10]

tím části tělesa vznikne plocha dA s jednotkovým normálovým vektorem \mathbf{N} . Pokud těleso vystavíme vnějšímu silovému působení dojde k přeměně plochy dA na plochu da s normálovým vektorem \mathbf{n} , viz obrázek (15). [10, 11, 12]

Síla, která působí na plochu da může být vyjádřena ve formě $\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n} da$, kde $\boldsymbol{\sigma}$ je Cauchyho tenzor napětí, který vyjadřuje napětí ve zdeformovaném stavu, a je v ná-



Obrázek 15: Transformace $\mathbf{N}dA$ z referenční konfigurace na $\mathbf{n}da$ v konfiguraci referenční [12]

sledujícím tvaru:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (20)$$

Napěťový vektor potom máme ve tvaru: [10, 11, 12]

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad (21)$$

7 Konstitutivní model

Konstitutivní teorie je formulace vzájemných závislostí mezi veličinami, které popisují stav materiálu, nebo prostředí.

Využijeme Greenův přístup, který využívá hustotu deformační energie pro popis napětí.

7.1 Hyperelasticita

Uvažujeme elastický materiál, který má materiálové vlastnosti charakterizovány pomocí funkce deformační energie $W = W(\mathbf{F})$. Ta je pro případ homogenního materiálu závislá pouze na deformačním gradientu. Deformační energie je zdefinována vzhledem k jednotce referenčního objemu. [5, 12]

Rovnice pro Cauchyho tenzor napětí je ve tvaru:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T - p \mathbf{I}, \quad \det \mathbf{F} = 1 \quad (22)$$

Kde \mathbf{I} je jednotkový tenzor 2.řádu a p je Lagrangerův multiplikátor, který pro nestlačitelný materiál vyjadřuje hodnotu hydrostatický tlak. Představuje tedy reakci materiálu na nemožnost měnit svůj objem v průběhu deformace. Protože se z důvodu nestlačitelnosti na objemových složkách nekoná práce vnitřních sil a není možné odpovídající složky napětí určit přímo z W , je zaveden Lagrangerův multiplikátor, který je určený na základě okrajových podmínek. [5, 12]

7.2 Anisotropní materiál

Cévní stěnu budeme modelovat pomocí anisotropního materiálového modelu se dvěma směry výztužných vláken a jejich uvažovaným rozptylem. Abychom se dostali až k tomuto materiálovému popisu, budeme postupovat od isotropního materiálu, jednoho směru vláken až k anisotropnímu materiálu se dvěma směry vláken.

7.2.1 Isotropie

Začneme tím, že budeme uvažovat isotropní elastický materiál, který bude reprezentovaný pomocí množiny vlastních ortogonálních transformací \mathbf{Q} (rotace) při platnosti symetrie transformací. [13].

Ortogonální transformace je popsána vztahem

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{I}, \quad \det \mathbf{Q} = +1 \quad (23)$$

kde \mathbf{Q} reprezentuje rotaci souřadnicového systému, když $\det \mathbf{Q} = 1$ (vlastní rotace) a \mathbf{I} je jednotková matice.

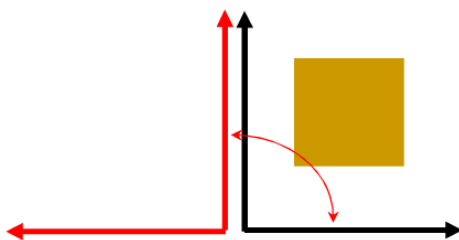
Symetrii transformací si představíme tak, že rotací o 90° převede souřadnice čtverce tak, že rozdíly souřadnic vrcholů mají v černé i červené soustavě stejné absolutní hodnoty a tak se čtverec jeví opět jako čtverec, viz obrázek (16). Složení dvou symetrií je opět symetrie (grupa symetrií).[13]

Isotropní elastický materiál pro který platí výše uvedené rovnice si popíšeme rovnicí (24).

$$W(\mathbf{F}\mathbf{Q}) = W(\mathbf{F}) \quad (24)$$

Isotropní hyperelasticita je potom ve tvaru

$$W(\mathbf{C}) = W(\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T) \quad (25)$$



Obrázek 16: Rotace souřadného systému [13]

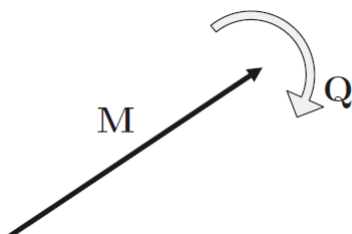
kde \mathbf{Q} je kombinace všech nezávislých rotací spojených s isotropií a \mathbf{C} je pravý cauchy greenův tenzor deformace. [13, 12]

Na výše uvedené rovnici můžeme vidět, že W je isotropní funkce \mathbf{C} . Ze spektrálního rozkladu (10 a 11) potom vyplývá, že W závisí na \mathbf{C} na základě jeho invariantů, tedy hlavních strečů $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. A je tedy možné vyjádřit závislost $W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ [12]

7.2.2 Anisotropie

Anisotropní materiál je takový, ve kterém rovnice $W(\mathbf{C}) = W(\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T)$ neplatí pro všechna \mathbf{Q} ($\det\mathbf{Q} = 1$). Anisotropní skalární funkce $W(\mathbf{C})$ jedné tenzorové proměnné lze transformovat na problém isotropní funkce více tenzorových proměnných. [5]

7.2.2.1 Jeden preferovaný směr Při isotropii máme v materiálu právě jeden preferovaný směr výtuzných vláken, který nám udává jednotkový vektor \mathbf{M} . [12]



Obrázek 17: Vektor \mathbf{M} [12]

Jak můžeme vidět na obrázku (17), odezva materiálu na mechanické zatížení není závislá na rotaci \mathbf{Q} okolo \mathbf{M} ani na změně jeho směru. Potom tedy platí rovnice

(26). [12]

$$\mathbf{Q}\mathbf{M} = \pm\mathbf{M} \quad (26)$$

Pro všechny ortogonální \mathbf{Q} splňující podmínku (26), musí deformační energie splňovat podmínku. [12]

$$W(\mathbf{F}\mathbf{Q}) = W(\mathbf{F}) \quad (27)$$

Na deformační energii W může být nahlíženo taky jako na isotropní funkci dvou symetrických tenzorů \mathbf{C} a $\mathbf{M} \otimes \mathbf{M}$. [12]

$$W(\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{M} \otimes \mathbf{M}) = W(\mathbf{C}, \mathbf{M} \otimes \mathbf{M}) \quad (28)$$

Pro všechna ortogonální \mathbf{Q} kde \mathbf{C} je pravý Cauchy greenův tenzor deformace definovaný rovnicí (14).

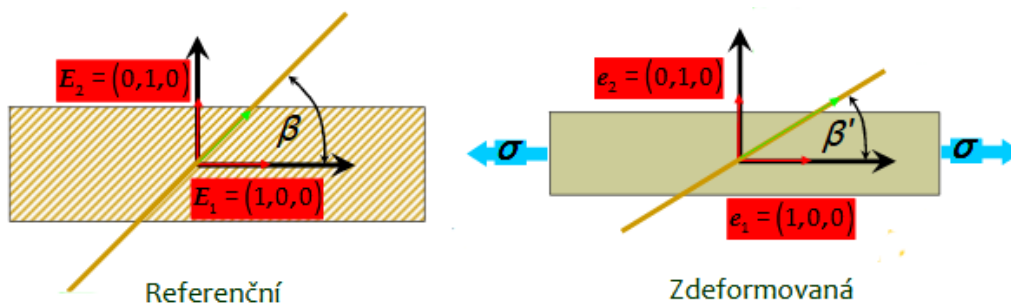
Díky symetrii se sníží závislost deformační energie W na pěti invariantech, I_1, I_2, I_3 , které byly zdefinovány v (17) a dva další invarianty značené I_4 a I_5 , které jsou závislé na \mathbf{M} . [12]

$$I_4 = \mathbf{M}(\mathbf{C}\mathbf{M}), \quad I_5 = \mathbf{M}(\mathbf{C}^2\mathbf{M}) \quad (29)$$

7.2.2.2 Invariant I_4 a jeho geometrická interpretace Invariant I_4 vyjadřuje kvadrát streče, který materiál podstoupil ve směru \mathbf{M} . [13]

$$I_4 = \mathbf{C} : \mathbf{M} = \mathbf{M} \cdot (\mathbf{C}\mathbf{M}) = \mathbf{M} \cdot (\mathbf{F}^T \mathbf{F}\mathbf{M}) = (\mathbf{M}\mathbf{F}^T) \cdot (\mathbf{F}\mathbf{M}) = \mathbf{F}\mathbf{M} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} = \lambda_f^2 \quad (30)$$

kde $:$ je dvojtečkový součin a \cdot skalární součin, $\mathbf{m} = \mathbf{F}\mathbf{M}$, protože deformační gradient \mathbf{F} převádí jednotkový referenční vektor \mathbf{M} na zdeformovaný \mathbf{m} . [13] Složky vektoru



Obrázek 18: Geometrická interpretace invariantu I_4 [5]

\mathbf{M} v referenční konfiguraci

$$\mathbf{M} = (\cos \beta, \sin \beta, 0) \quad (31)$$

Kde β je úhel mezi vektorem \mathbf{M} a osou trubice jak můžeme vidět na obrázku (18).

Po deformaci přejde vektor \mathbf{M} na vektor \mathbf{m}

$$\mathbf{m} = \mathbf{F}\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot \cos \beta \\ \lambda_2 \cdot \sin \beta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (32)$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ jsou hlavní streče.

Pravý Cauchy - Greenův tenzor deformace je pak ve tvaru (33)

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} \quad (33)$$

Na základě rovnic (29),(31) a (33), budou invarianty I_4 a I_5 ve tvaru.

$$I_4 = \lambda_1^2 \cos^2 \beta + \lambda_2^2 \sin^2 \beta \quad (34)$$

$$I_5 = \lambda_1^4 \cos^2 \beta + \lambda_2^4 \sin^2 \beta \quad (35)$$

7.2.2.3 Dva preferované směry Ovažujeme situaci ve které máme dva směry orientace v referenční konfiguraci. Jednotkové vektory si označíme \mathbf{M} a \mathbf{M}' , které ve zdeformované konfiguraci přejdou v \mathbf{m} a \mathbf{m}' . [12]

Podobně jako transversálně isotropní materiál můžeme materiál se dvěma směry charakterizovat pomocí deformační energie závislé na \mathbf{C} a strukturálních tenzorech $\mathbf{M} \otimes \mathbf{M}$ respektive $\mathbf{M}' \otimes \mathbf{M}'$. Potom můžeme psát: [12]

$$W(\mathbf{C}, \mathbf{M} \otimes \mathbf{M}, \mathbf{M}' \otimes \mathbf{M}') \quad (36)$$

Materiálová symetrie vyžaduje, aby W záviselo na invariantech I_1 až I_5 a dále na třech dalších invariantech I_6, I_7 a I_8 , které jsou definované následovně. [12]

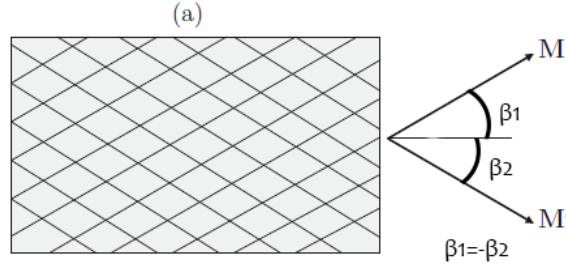
$$I_6 = \mathbf{M}' \cdot (\mathbf{C}\mathbf{M}'), I_7 = \mathbf{M}' \cdot (\mathbf{C}^2\mathbf{M}'), I_8 = \mathbf{M} \cdot (\mathbf{C}\mathbf{M}') \quad (37)$$

Na obrázku (19) máme vyobrazené směry vláken β_1 a β_2 , které jsou vyosené od osy trubice o úhle β , potom tedy $|\beta_1| = |\beta_2| = \beta$. [12] Invarianty potom můžeme definovat ve tvaru: [12]

$$I_4 = I_6 = \mathbf{M}' \cdot (\mathbf{C}\mathbf{M}') = \lambda_1^2 \cdot \cos^2 \beta + \lambda_2^2 \cdot \sin^2 \beta \quad (38)$$

$$I_5 = I_7 = \mathbf{M}' \cdot (\mathbf{C}^2\mathbf{M}') = \lambda_1^4 \cdot \cos^2 \beta + \lambda_2^4 \cdot \sin^2 \beta \quad (39)$$

$$I_8 = \mathbf{M} \cdot (\mathbf{C}\mathbf{M}') = \lambda_1^2 \cdot \cos^2 \beta - \lambda_2^2 \cdot \sin^2 \beta \quad (40)$$



Obrázek 19: Schématické zobrazení dvou směrů preferovaných vláken I_4 [12]

7.3 Model zohledňující strukturu materiálu

Pro tepennou stěnu, která má dva směry výztužných vláken, jejichž směry jsou reprezentovány jednotkovými vektory \mathbf{M} a \mathbf{M}' je deformační energie funkcí invariantů I_1, I_4, I_6 . Každý z invariantů I_4 a I_6 je spojený s jedním preferovaným směrem vláken a invariant I_1 reflektuje přítomnost izotropní matrix, kterým jsou vlákna obklopená. Všechny tyto informace jsou obsažené v Holzapflově modelu, který reflektuje dvě vrstvy tepenné stěny a to medii a adventicii, kde pro každou má separátní funkci deformační energie. Ty jsou stejné, ale pro každou z vrstev se vyplní jiné hodnoty konstant a orientace vláken. [12]

$$W = \frac{1}{2}\mu(I_1 - 3) + \frac{k_1}{2k_2} \sum_{i=1,4} \{ \exp [k_2(I_i - 1)^2] - 1 \} \quad (41)$$

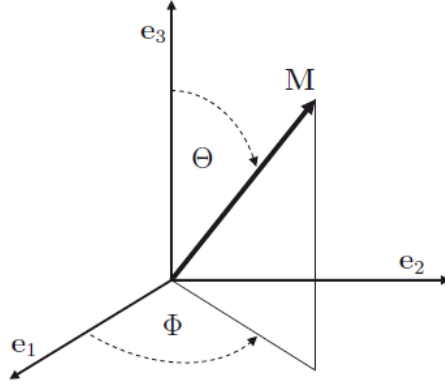
kde μ , k_1 a k_2 jsou pozitivní materiálové konstanty, k_2 je bezrozměrná a μ a k_1 mají rozměr napětí. μ představuje počáteční modul pružnosti ve smyku v referenční konfiguraci. [12]

7.3.1 Model rozptylu vláken

V materiálu uvažujeme obecný směr vlákna \mathbf{M} vyjádřený ve sférických souřadnicích, konkrétně úhlech Θ a Φ v referenční konfiguraci, tak jak je vidět na obrázku (20), která je v následujícím vztahu vzhledem ke kartézskému souřadnému systému s bázovými vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ [12]

$$\mathbf{M}(\Theta, \Phi) = \sin \Theta \cos \Phi \mathbf{e}_1 + \sin \Theta \sin \Phi \mathbf{e}_2 + \cos \Theta \mathbf{e}_3 \quad (42)$$

Klíčovým předpokladem modelu je, že v referenční konfiguraci jsou vlákna rozptý-



Obrázek 20: Sférické souřadnice [12]

lena na základě funkce hustoty orientace vláken, kterou zznačíme jako

$$\rho = \rho(\mathbf{M}) \quad (43)$$

Dále platí, že

$$\rho(-\mathbf{M}) \equiv \rho(\mathbf{M}) \quad (44)$$

Hustota orientace vláken je normalizovaná a přejde do tvaru

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \rho(\mathbf{M}) d\omega = 1 \quad (45)$$

kde ω je jednotková sféra a $d\omega = \sin \Theta d\Theta d\Phi$. Potom $\rho(d\mathbf{M})d\omega$ reprezentuje normalizovaný počet vláken v rámci prostorového úhlu $d\omega$. [12]

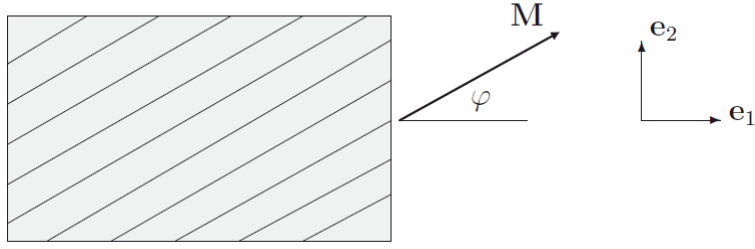
Dále zadefinujeme tenzor \mathbf{H}

$$\mathbf{H} = \kappa \mathbf{I} + (1 - 3\kappa) \overline{\mathbf{M}} \otimes \overline{\mathbf{M}} \quad (46)$$

Kde \mathbf{I} je jednotkový tenzor, $\overline{\mathbf{M}}$ je jednotkový vektor značící průměrnou hodnotu směru vláken, která je v tomto případě rovna $\overline{\mathbf{M}} = \mathbf{e}_3$. [12]

Tato forma \mathbf{H} platí pro transversálně isotropní rozložení vláken a je reprezentovaná jedním parametrem κ , která je jednotkou vláknového rozptylu. κ může nabývat dvou extrémů a to $\kappa = 0$ a $\kappa = \frac{1}{3}$. Pro $\kappa = 0$ se rovnice (46) zjednoduší na $\mathbf{H} = \overline{\mathbf{M}} \otimes \overline{\mathbf{M}}$, to značí, že všechna vlákna jsou srovnaná a není žádná disperze.

Pro $\kappa = \frac{1}{3}$ se rovnice (46) změní na tvar $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{I}}{3}$ a distribuce vláken je isotropní, jsou tedy rovnoměrně rozložené do všech směrů.



Obrázek 21: Schéma výztužných vláken v jednom směru [12]

Na základě tenzoru \mathbf{H} , stejně jako na původním tenzoru $\mathbf{M} \otimes \mathbf{M}$, můžeme vytvořit dva invarianty K_1 a K_5 definované

$$K_4 \equiv tr(\mathbf{CH}) = \kappa tr(\mathbf{C}) + (1 - 3\kappa)\overline{\mathbf{M}} \cdot (\mathbf{C}\overline{\mathbf{M}}) \quad (47)$$

$$K_5 \equiv tr(\mathbf{C}^2\mathbf{H}) = \kappa tr(\mathbf{C}^2) + (1 - 3\kappa)\overline{\mathbf{M}} \cdot (\mathbf{C}^2\overline{\mathbf{M}}) \quad (48)$$

kde $tr(\mathbf{C}) = I_1$ a $tr(\mathbf{C}^2) = I_1^2 - 2I_2$, pokud se jedná o isotropní invarianty. Dále zavádíme značení pro invarianty \overline{I}_4 a \overline{I}_6 ve tvaru

$$\overline{I}_4 = \overline{\mathbf{M}} \cdot (\mathbf{C}\overline{\mathbf{M}}) \quad (49)$$

$$\overline{I}_5 = \overline{\mathbf{M}} \cdot (\mathbf{C}^2\overline{\mathbf{M}}) \quad (50)$$

V případě, že dochází k rozptylu, jak bylo zadefinováno výše, potom můžeme invariant K_4 zadefinovat jako

$$K_4 = tr(\mathbf{CH}) = \kappa I_1 + (1 - 3\kappa)\overline{I}_4 \quad (51)$$

Deformační energie se tak změní na $W(I_1, I_2, \overline{I}_4, \overline{I}_5) = \overline{W}(I_1, I_2, K_4, K_5)$ na redukovanou formu $W(I_1, \overline{I}_4) = \overline{W}(I_1, K_4)$ [12]

7.3.2 Dva preferované směry

Podobná úprava jako pro materiál s jedním preferovaným směrem vláken, jde udělat i pro materiál se dvěma směry. V jeho případě dostáváme invarianty $\overline{I}_6, \overline{I}_7$ a \overline{I}_8 ve tvaru

$$\overline{I}_6 = \overline{\mathbf{M}}' \cdot (\mathbf{C}\overline{\mathbf{M}}') \quad (52)$$

$$\overline{I}_7 = \overline{\mathbf{M}}' \cdot (\mathbf{C}^2\overline{\mathbf{M}}') \quad (53)$$

$$\overline{I}_8 = \overline{\mathbf{M}} \cdot (\mathbf{C}\overline{\mathbf{M}}') \quad (54)$$

a funkci deformační energie ve tvaru

$$W(I_1, \bar{I}_4, \bar{I}_6) = \bar{W}(I_1, K_4, K_6) \quad (55)$$

kde $K_6 = \kappa' I_1 + (1 - 3\kappa') I_6$ kde κ' je rozptyl druhého směru vláken pokud je odlišný od toho prvního. [12]

Jak už bylo naznačeno výše tak funkce deformační energie se skládá ze dvou částí, jedna popisuje isotropní matrix a druhého anisotropní charakter spjatý s preferovanými směry vláken.

Rozložení funkce deformační energie může být zapsán v následujícím tvaru

$$W = W_{iso} + W_{aniso} \quad (56)$$

Isotropní část byla převzatá z NeoHookovské formy, tedy

$$W_{iso} = \frac{1}{2} \mu (I_1 - 3) \quad (57)$$

kde $\mu > 0$ je opět modul pružnosti v referenční konfiguraci.

Anisotropní část formulace funkce deformační energie potom reprezentuje rozptyl vláken

$$W_{aniso} = \frac{k_1}{2k_2} \sum_{i=4,6} \{ \exp [k_2 (K_i - 1)^2] - 1 \} \quad (58)$$

kde invariant K obsahuje $\kappa' = \kappa$ pokud obě skupiny rozptylujících vláken mají stejné elastické vlastnosti. Stejně jako v (41) $k_1 > 0$ je konstanta s rozměrem napětí a $k_2 > 0$ je bezrozměrná konstanta. Stejně jako v (41) je anisotropní příspěvek aktivní pouze tehdy $I_4 > 1$, nebo $I_6 > 1$. [12]

8 Analytický výpočtový model

V této části diplomové práce se budeme věnovat tvorbě analytického výpočtového modelu, který nám bude sloužit k porovnání a zhodnocení výsledků z MKP výpočtu. Analytické modely vytvoříme celkem dva, první, který bude simulovat inflaci a extenzi uzavřené válcové nádoby bez vnitřního předpětí, a druhý který bude simulovat inflaci a extenzi otevřené válcové nádoby s vnitřním předpětím.

8.1 Inlace a extenze uzavřené válcové trubice

Tento základní model bez uvažování vnitřních předpětí bude sloužit k ověření správného nastavení materiálu a materiálové orientace v MKP výpočtu.

8.1.1 Materiálový model

Budeme používat stejný materiálový model jako v MKP výpočtu. Tedy Gasserův materiálový model (v MKP programu Abaqus značený jako *Holzapfel*), který uvažuje i rozptyl materiálových vláken. Za jednotlivé konstanty dosadíme následující hodnoty vypsané v tabulce (1), které odpovídají muži ve stáří 38 let, které jsme získali z práce M.R. Labrosse, [9].

R_i [mm]	R_o [mm]	μ [kPa]	k_1 [kPa]	k_2 [-]	β [°]	α [°]	P [kPa]
5.3	6.52	15.9	78.49	4.991	41.41	117	16

Tabulka 1: Hodnoty jednotlivých parametrů

8.1.2 Kinematika deformace

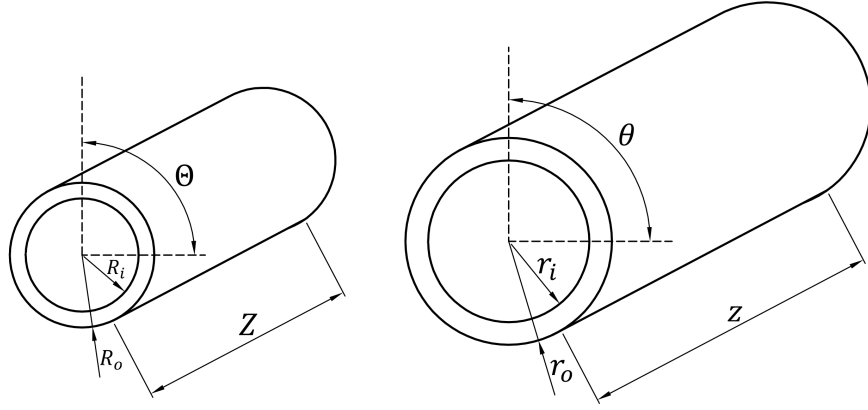
Kinematiku deformace si popíšeme pomocí deformačního gradientu \mathbf{F} a lidskou tepnu si budeme idealizovat do podoby válcové trubice, která bude mít před deformací následující rozměry:

- R_i - nezdeformovaný vnitřní poloměr
- R_o - nezdeformovaný vnější poloměr
- Z - nezdeformovaná délka trubice

V průběhu tlakování nebude docházet ke zkosům trubice a válec tak opět přejde ve válec viz obrázek (22) a zdeformované rozměry budeme značit:

- r_i - zdeformovaný vnitřní poloměr
- r_o - zdeformovaný vnější poloměr
- z - zdeformovaná délka trubice

Protože si lidskou tepnu idealizujeme do tvaru válcové trubice, budeme nadále pracovat ve válcových souřadnicích obrázek (22), které jsou vzhledem ke kartézskému



Obrázek 22: Přechod válce ve válec

souřadnému systému popsány následujícími rovnicemi (59) a (60).

$$(X_1, X_2, X_3) = (R \cdot \cos(\Theta), R \cdot \sin(\Theta), Z) \quad (59)$$

$$(R, \Theta, Z) = \left(\sqrt{X_1^2 + X_2^2}, \arctan 2(X_1, X_2), Z \right) \quad (60)$$

Kde funkce $\arctan 2(X_1, X_2)$ je definovaná ve tvaru:

$$\arctan 2(X_1, X_2) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{X_2}{X_1}\right), & \text{je-li } (X_1 > 0) \wedge (X_2 > 0), \\ \arctan\left(\frac{X_2}{X_1}\right) + \pi, & \text{je-li } (X_1 < 0), \\ \arctan\left(\frac{X_2}{X_1}\right) + 2\pi, & \text{je-li } (X_1 > 0) \wedge (X_2 < 0) \end{cases} \quad (61)$$

Deformační gradient \mathbf{F} máme ve tvaru (62).

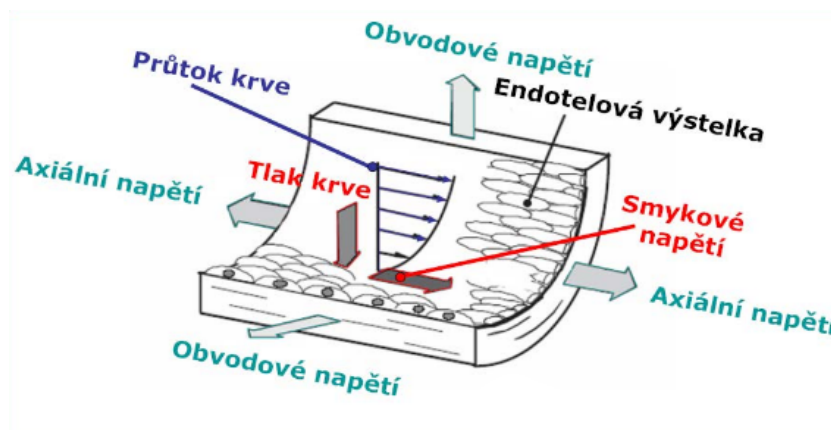
$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda_{rR} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\theta\Theta} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{zZ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial R} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{R} \frac{\partial \theta}{\partial \Theta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{pmatrix} \quad (62)$$

8.1.3 Rovnice rovnováhy pro silnostěnnou trubici

Protože se stavové veličiny (napětí a deformace) mění po tloušťce stěny v závislosti na rádiu, budeme cévu modelovat jako silnostěnnou válcovou nádobu. Abychom tyto hodnoty určili budeme integrovat po tloušťce stěny. Rovnice rovnováhy pro silnostěnnou uzavřenou nádobu máme ve tvaru:

$$P = \int_{r_i}^{r_o} \lambda_{\theta\Theta} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{\theta\Theta}} \frac{dr}{r} \quad (63)$$

$$F_{RED} = \pi \int_{r_i}^{r_o} \left(2\lambda_{zZ} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{zZ}} - \lambda_{\theta\Theta} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{\theta\Theta}} \right) r dr \quad (64)$$



Obrázek 23: Zatížení tepenné stěny [5]

Kde

$$\hat{W} = W \left(\lambda_{rR} = \frac{1}{\lambda_{\theta\Theta} \lambda_{zZ}}, \lambda_{\theta\Theta}, \lambda_{zZ} \right) \quad (65)$$

jejich kompletní odvození můžeme najít v prezentaci Biomechanika II [5].

8.2 Postup inflace a extenze uzavřené nádoby

Analytický model byl napsán v programu Maple2016 a byl rozdělen do dvou základních kroků, v prvním kroku jsme vypočítali hodnoty axiálního a obvodového streče v průběhu tlakování. Ve druhém kroku jsme pak tyto hodnoty použili ke stanovení hodnot napětí při natlakování.

8.2.1 Stanovení strečů

Ke stanovení strečů jsme dospěli následujícími kroky:

- Nejdříve jsme pomocí příkazu *with* zavolali knihovny, které budou potřeba k provedení výpočtu a zobrazení výsledků do grafů. Konkrétně: *LinearAlgebra*, *Statistics*, *Optimization*, *stats*, *plots* a *ColorTools[GetPalette]("HTML")*, která nám umožní větší spektrum barev.
- Zdefinujeme vzorec pro hustotu deformační energie
- A výrazy pro jeho jednotlivé invarianty
- Vyjádříme si hodnotu λ_{rR} z podmínky nestačitelnosti ve tvaru

$$\lambda_{rR} = \frac{1}{\lambda_{\theta\Theta} \lambda_{zZ}} \quad (66)$$

- Vyjádříme si hodnoty derivace hustoty deformační energie podle strečů v obvodovém a axiálním směru. To provedeme pomocí příkazu *diff*.

$$W_t = \text{diff}(W, \lambda_{\theta\Theta}) \quad (67)$$

$$W_z = \text{diff}(W, \lambda_{zZ}) \quad (68)$$

- Vyjádříme si rovnici pro zdeformovaný poloměr trubice

$$R = \sqrt{R_i^2 + \lambda_{zZ} \cdot (r^2 - r_i^2)} \quad (69)$$

kde R je obecný poloměr po deformaci, R_i je vnitřní poloměr po deformaci, r je obecný poloměr před deformací a r_i je vnitřní poloměr před deformací.

- Dále si vyjádříme jednotlivé integrandy, které potom budeme dosazovat do numerické integrace. Ty vycházejí z podmínek rovnováhy (63) a (64). Budeme je značit *intP* a *intF*, použijeme k tomu příkaz *eval*, kde první člen je výraz rovnice rovnováhy a druhý je výraz pro obvodový streč $\lambda_{\theta\Theta}$ za který bude dosazeno do rovnic rovnováhy.

$$\text{intP} = \text{eval}\left(\lambda_{\theta\Theta} \cdot \frac{W_t}{r}, \lambda_{\theta\Theta} = \frac{r}{R}\right) \quad (70)$$

$$\text{intF} = \text{eval}\left(2 \cdot \lambda_{zZ} \cdot W_z - \lambda_{\theta\Theta} \cdot W_t, \lambda_{\theta\Theta} = \frac{r}{R}\right) \quad (71)$$

- Dále zadefinujeme hodnotu pro vnější nezdeformovaný poloměr.

$$r_o = \sqrt{r_i^2 + \frac{R_o^2 - R_i^2}{\lambda_{zZ}}} \quad (72)$$

- Dále si zadefinujeme velikost integračního kroku, který budeme značit *dr*. Velikost kroku určuje přesnost výpočtu.

$$dr = \frac{r_o - r_i}{n} \quad (73)$$

kde n je počet dílků, na které nadělíme tloušťku stěny. My jsme počítali s hodnotou $n = 100$, která byla již dostatečně přesná.

- Tento krok je poslední pro tuto část, nyní stanovíme hodnoty strečů $\lambda_{\theta\Theta}$ a λ_{zZ} . Nejdříve zadefinujeme hodnoty konstant vnitřního a vnějšího poloměru, dále pak hodnoty materiálových parametrů z tabulky (1). Dále je nutné zadefinovat vlastnosti jednotlivých proměnných, tedy vnitřní poloměr, axiální streč, tlak a sílu si zadefinujeme jako vektory o m prvcích. Použijeme k tomu příkaz *Vector(m)*.

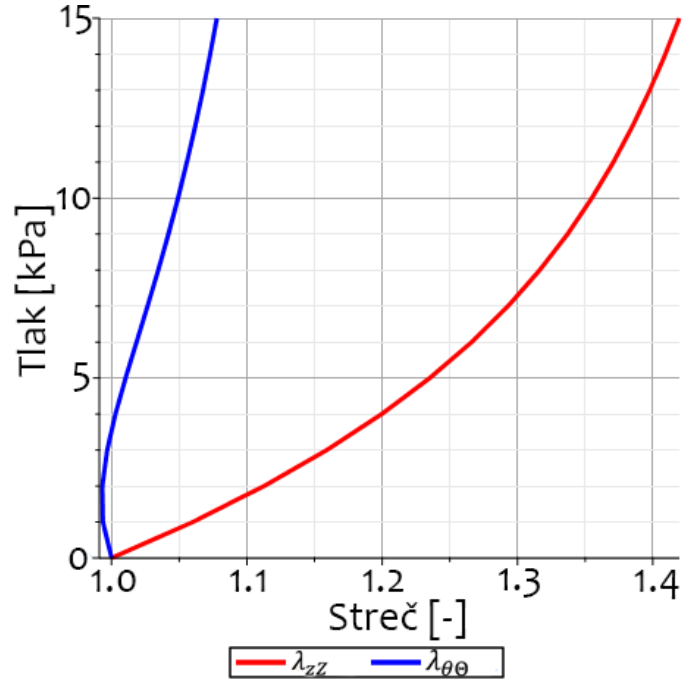
- Dále si vytvoříme dva *for* cykly, jeden pro proměnnou i a druhý pro j . Cyklus pro

- j bude probíhat od 1 do hodnoty 16, což je hodnota systolického tlaku. Cyklus pro i bude probíhat také od hodnoty 1 do hodnoty 100, což je počet integračních kroků.
- V rámci i cyklu si necháme vyčíslit jednotlivé hodnoty po tloušťce stěny pro sílu a tlak. Opět použijeme funkci *eval*, kde první člen bude příslušný integrand a dosazovat budeme hodnotu poloměru r .
 - V rámci j cyklu posčítáme jednotlivé přírůstky. A provedli jsme optimalizaci, abychom získali odhad hodnot r_i a λ_{zZ} , přes vázané extrém. Použili jsme k tomu příkaz *Optimization[NLPSolve]*, za hodnotu $F[j]$ jsme pro všechny hodnoty j vložili hodnotu 0. Hodnotu zdeformovaného poloměru jsme hledali v rozsahu od počátečního poloměru až do jeho 1,7 násobku a hodnotu λ_{zZ} v rozsahu od 0,85 do 1,6. Hledání probíhalo od počátečního bodu, který jsme si zavolali příkazem *initialpoint* a to pro průměr od hodnoty nezdeformovaného poloměru, a hodnotu axiálního streče $\lambda_{zZ} = 1$. Metoda hledání byla zvolena *sqp*, která byla zavolána pomocí příkazu *method=*.
 - Z výsledků optimalizace jsme si nechali vypsát hodnoty průměrů a axiálního streče.
 - Z hodnot průměrů si vypočítáme hodnoty obvodového streče $\lambda_{\theta\theta}$, použijeme k tomu opět *for* cyklus, který si zdefinujeme písmenem k .
 - A přepočítáme hodnoty tlaku z hodnot průměrů a axiálního streče. Tento krok byl poslední v rámci *for* cyklu j .
 - Zbývá už jen vykreslit hodnoty axiálního a obvodového streče v závislosti na tlaku do grafu. K vykreslení jsme použili příkaz *plot*, viz obrázek (24).

8.2.2 Stanovení napětí po tloušťce stěny

V tomto kroku si vypočítáme hodnoty napětí po tloušťce stěny na základě hodnot vypočtených v předchozím kroku.

- Opět si zdefinujeme vlastnosti proměnných, které si opět vyjádříme jako vektory.
- Určíme si hodnoty integrandu dP , který budeme používat v dalších krocích. Necháme si ho vyčíslit pomocí funkce *eval* na základě *IntP*, a budeme do ní dosazovat hodnoty λ_{zZ} a průměru z předchozího kroku pro hodnotu tlaku 16 [kPa].
- Vytvoříme si *for* cyklus pro hodnotu i od 1 s krokem 1 do n , což je počet hodnot po tloušťce stěny. V rámci *for* cyklu si stanovíme hodnoty napětí, začneme radiálním napětím



Obrázek 24: Axiální a obvodový streč v průběhu tlakování

σ_{rr} , které je zápornou hodnotou tlaku v daném místě stěny. Zbylé dvě napětí $\sigma_{\theta\theta}$ a σ_{zz} si vyčíslíme za pomoci příkazu *eval* do kterých dosadíme následující vzorce:

$$\sigma_{rr}(r) = - \int_r^{r_o(r_i)} \lambda_{\theta\Theta} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{\theta\Theta}} \frac{dt}{t} \quad (74)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda_{\theta\Theta} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{\theta\Theta}} + \sigma_{rr} \quad (75)$$

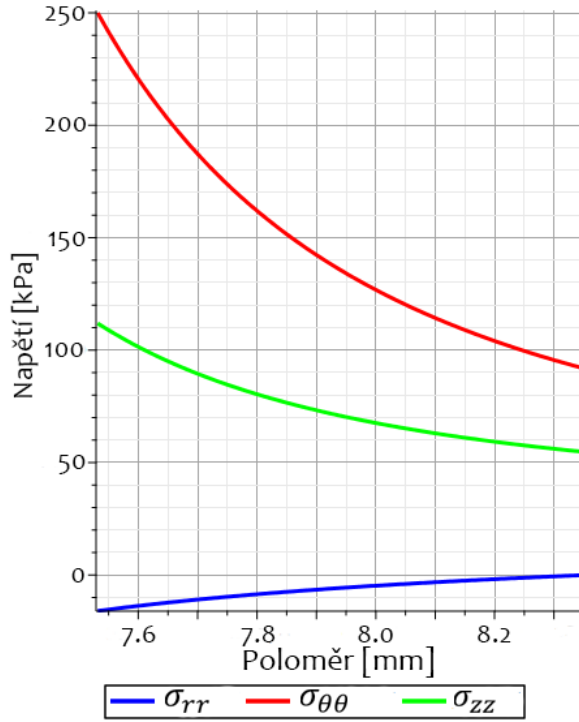
$$\sigma_{zz} = \lambda_{zZ} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{zZ}} + \sigma_{rr} \quad (76)$$

Do rovnic budeme dosazovat hodnoty obvodových strečů $\lambda_{\theta\Theta}$, axiálního streče λ_{zZ} a zdeformovaného poloměru r_i pro hodnoty tlaku $P = 16$ [kPa], které jsme získali v předchozím kroku výpočtu.

- Napětí si necháme vykreslit do grafu, opět za pomoci příkazu *plot*, viz obrázek (25).

8.3 Inlace a extenze otevřené válcové trubice se zbytkovým napětím

V této části si popíšeme tvorbu analytického modelu, do kterého jsme zanesli zbytkové napětí uzavřením rozevřeného proužku. I tento výpočet bude sloužit k ověření



Obrázek 25: Napětí po tloušťce stěny po natlakování na 16 kPa

správnosti MKP simulace.

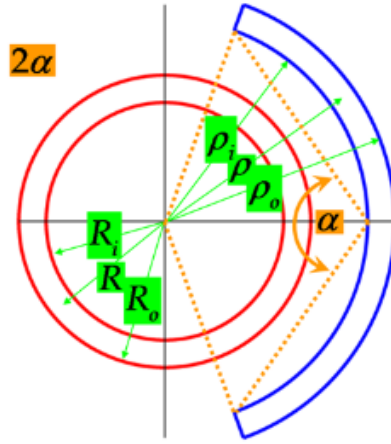
8.3.1 Materiálový model

Budeme používat stejný model jako v MKP simulaci, který jsme popsali včetně konstant a v sekci 8.1.1.

8.3.2 Kinematika deformace

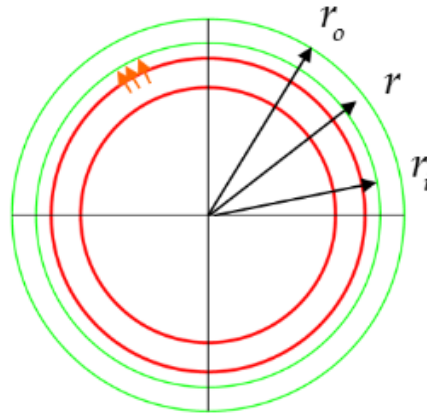
Kinematiku deformace si popíšeme pomocí dvou deformačních gradientů, kdy první reflektuje kinematiku uzavírání prstýnku, viz obrázek (26). Kde přecházíme od souřadnic zapsaných řeckými písmeny ρ pro poloměr, θ pro úhel a ζ pro axiální souřadnici na souřadnice zapsaných velkými písmeny. Deformační gradient který popisuje zavírání proužku si budeme značit \mathbf{F}_1 a protože nebudeme uvažovat zksoy bude ve tvaru (77).

$$\mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R(\rho)}{\rho} \frac{\pi}{\pi - \alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix} \quad (77)$$



Obrázek 26: Kinematika zavírání proužku [5]

Druhý deformační gradient, který budeme značit \mathbf{F}_2 bude popisovat nafouknutí a axiální natažení uzavřeného proužku, viz obrázek (27). Budeme přecházet od sou-



Obrázek 27: Kinematika zavírání proužku [5]

řadnic psaných velkými písmeny pro nenafouknutý válec k souřadnicím, které jsou psané malými písmeny a popisují nafouknutý válec. Opět během této kinematiky neuvažujeme žádné zkosení a zůstanou nám tak prvky pouze na hlavní diagonále. Deformační gradient \mathbf{F}_2 pak máme ve tvaru (78).

$$\mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial r(R)}{\partial R} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r(R)}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{rR} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\theta\Theta} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{zZ} \end{pmatrix} \quad (78)$$

Výsledná kinematika, která obsahuje oba dva kroky jak zavření proužku \mathbf{F}_1 tak nafouknutí a protažení \mathbf{F}_2 vznikne jejich vynásobením (79)

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_2 \mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_{rR} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\theta\Theta} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{zZ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{R\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\Theta\phi} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{Z\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{r\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\theta\phi} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{z\zeta} \end{pmatrix} \quad (79)$$

Výsledná kinematika \mathbf{F} potom ve tvaru (80)

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r(\rho)}{\partial \rho} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{\pi-\alpha} \frac{r}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda\delta \end{pmatrix} \quad (80)$$

8.3.3 Silnostěnná nádoba

Nádobu budeme opět modelovat jako silnostěnnou, viz kapitola 8.1.3.

8.3.4 Rovnice rovnováhy

Inflaci a extenzi válcové trubice s vnitřním předpětím budeme modelovat jako otevřenou nádobu a to z důvodu, že v MKP modelu bychom kinematiku zavírání proužku těžko vytvářeli se dnem. Bude proto jednodušší v analytickém modelu nádobu uvažovat jako otevřenou, tedy bez tlakové síly, která by působila na její dno.

Rovnice potom máme ve tvaru (81),(82)

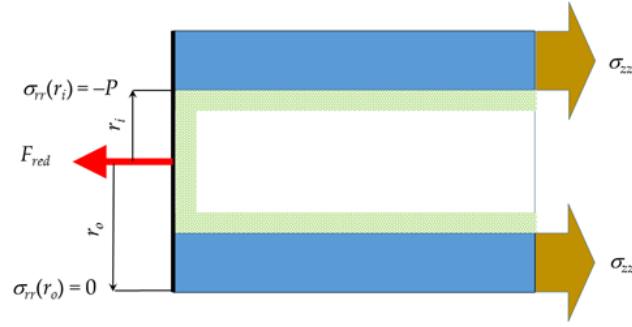
$$P = \int_{r_i}^{r_o} \lambda_{\theta\Theta} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{\theta\Theta}} \frac{dr}{r} \quad (81)$$

$$F_{RED} = \pi \int_{r_i}^{r_o} \left(2\lambda_{zZ} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{zZ}} - \lambda_{\theta\Theta} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{\theta\Theta}} \right) r dr + P \cdot \pi \cdot r_i^2 \quad (82)$$

V rovnici (82) slouží poslední člen $P \cdot \pi \cdot r_i^2$ k vynulování síly tlaku, která působí na dno nádoby. Nádoba se tak bude chovat jako otevřená, viz obrázek (28). Kompletní odvození rovnic rovnováhy je v [5].

8.4 Postup otevřená nádoba s vnitřním předpětím

Model opět napíšeme v programu Maple 2016 a bude také rozdělen do dvou základních kroků. V prvním kroku si stanovíme napětí a streče po tloušťce stěny,



Obrázek 28: Schéma tlakové nádoby [5]

keré vyniknout uzavřením proužku. V druhém kroku poté budeme tuto konfiguraci tlakovat. Obě varianty slouží k porovnání a ověření správnosti MKP modelu.

8.4.1 Zavírání proužku

- Opět začneme zavoláním knihoven, které budeme potřebovat k provedení výpočtu. Knihovny se volají příkazem *with* a jedná se o knihovny: *LinearAlgebra*, *Statistics*, *Optimization*, *stats*, *plots* a *ColorTools[GetPalette]("HTML")*.
- Zdefinujeme vzorec pro hustotu deformační energie.
- A rovnice jeho invariantů.
- Dále si vyjádříme streč v radiálním směru z podmínky nestlačitelnosti.
- Následně si zdefinujeme derivace deformační energie podle obvodového a axiálního streče.
- Dosadíme hodnotu obvodového streče z deformačního gradientu

$$\lambda_{\Theta\phi} = \frac{\pi R}{(\pi - \alpha)\rho} \quad (83)$$

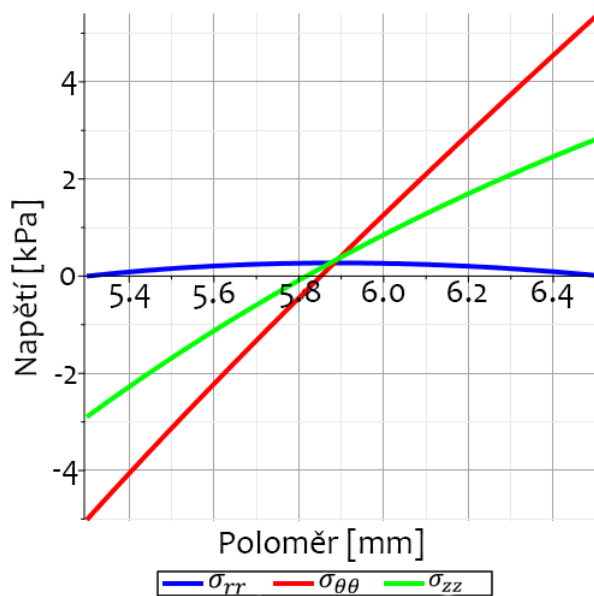
- Vložíme si výraz pro ρ

$$\rho = \sqrt{\frac{\pi \lambda_{Z\zeta} (R^2 - R_i^2)}{\pi - \alpha} + \rho_i^2} \quad (84)$$

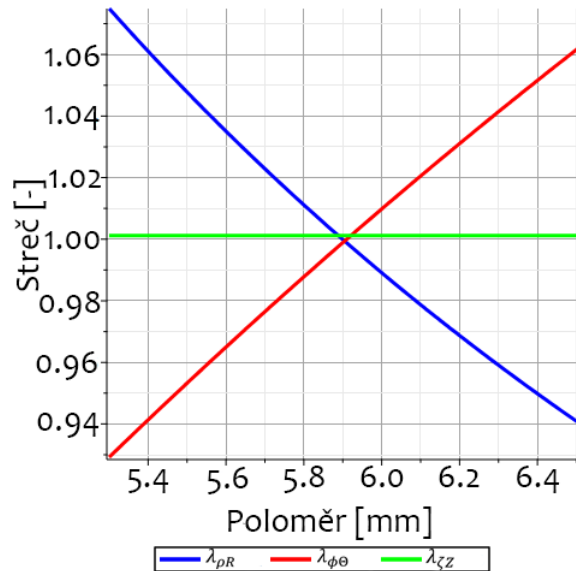
- Poté si na základě rovnic rovnováhy vytvoříme dva integrandy.
- Nyni si zdefinujeme materiálové konstanty. Protože budeme opět provádět numerickou integraci, rozdělíme si stěnu po tloušťce na n dílků. V našem případě jsme stěnu nadělili na 100 dílků, tato varianta už byla dostatečně přesná. Pro hodnoty tlaku a síly jsme pomocí příkazu *add* počítali jednotlivé hodnoty, které vznikly numerickou integrací, kterou jsme vyčíslovali po tloušťce stěny pro tlak i sílu pomocí

příkazu *eval*.

- Rovnice které nyní máme uložené pro tlak i sílu, necháme řešit pro případ kdy jsou rovny 0, protože během zavírání proužku na stěnu nepůsobí žádný vnitřní tlak P , ani předepínací síla F . Použijeme k tomu příkaz *fsolve* a řešení rovnic budeme hledat pro hodnoty axiálního streče $\lambda_{z\zeta}$ a vnitřního poloměru R_i , kterým je potřeba nastavit rozumné meze ve kterých bude program hledat řešení.
- Jakmile známe hodnoty axiálního streče a vnitřního poloměru, dopočítáme hodnotu vnějšího poloměru na základě podmínky nestlačitelnosti.
- Teď už známe všechny hodnoty, abychom si na základě konstitutivních rovnic mohli vypočítat hodnoty napětí po tloušťce stěny. A následně i hodnoty strečů v jednotlivých směrech.
- Výsledné hodnoty napětí a strečů si vykreslíme do grafů za pomoci funkce *plot*, viz obrázky (29) a (30).



Obrázek 29: Napětí po tloušťce stěny vzniklé zavřením proužku



Obrázek 30: Streče vzniklé zavřením proužku

8.4.2 Inlace a extenze otevřené válcové trubice s vnitřním předpětím

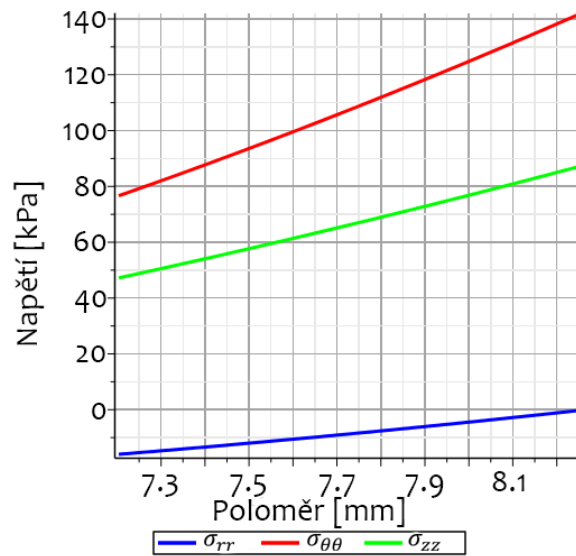
- Pokud tvoříme v jednom souboru použijeme příkaz *restart*, který nám vymaže paměť.
- Dále postupujeme stejně jako v předchozím kroku. Tedy příkazem *with* si zavoláme potřebné knihovny. Zdefinujeme si rovnici pro hustotu deformační energie a vzorce pro její jednotlivé invarianty. A streč v radiálním směru z podmínky nestlačitelnosti.
- Poté si vytvoříme výrazy pro derivace deformační energie podle strečů v obvodovém a axiálním směru.
- Zapišeme hodnoty pro streč v obvodovém směru a pro ρ stejně jako v 8.4.1.
- Vytvoříme si dva integrandy na základě rovnic rovnováhy.
- Zdefinujeme vzorec pro velikost vnějšího poloměru nafouknuté trubice

$$r_o = \sqrt{\frac{\lambda_{z\zeta}(\pi - \alpha)(-\rho_i^2 + \rho_o^2)}{\pi} + r_i^2} \quad (85)$$

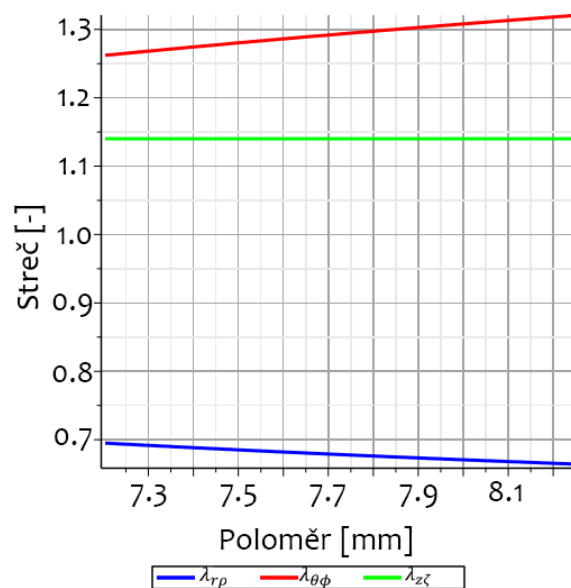
- Dále si zapišeme materiálové konstanty a výchozí geometrii. Cévní stěnu si po tloušťce nadělíme na 100 dílků.
- Následně opět pomocí příkazů *add* a *eval* si necháme vyčíslit rovnice pro tlak P a sílu F po tloušťce stěny na základě vytvořených integrandů v numerické integraci.
- Ty si pak necháme vyřešit pomocí příkazu *fsolve* pro hodnotu tlaku $P = 16$ [kPa] a předepínací sílu $F_{RED} = 3475$ [mN], která nám vytvoří axiální streč 114%. Vý-

sledné hodnoty pro axiální streč budeme hledat v rozpětí mezi 0,7 až 1,2 a hodnoty zdeformovaného poloměru v rozmezí od 0,5 počáteční hodnoty do jejího dvojnásobku.

- Jakmile známe hodnoty axiálního streče a vnitřního zdeformovaného poloměru, můžeme si vypočítat hodnotu vnějšího zdeformovaného poloměru r_o .
- Poté si vyčíslíme hodnoty jednotlivých napětí a strečů a ty si necháme vykreslit do grafů, viz obrázky (31) a (32).



Obrázek 31: Napětí po tloušťce stěny po nafouknutí zavřeného proužku



Obrázek 32: Streče po nafouknutí zavřeného proužku

9 Metoda Konečných prvků

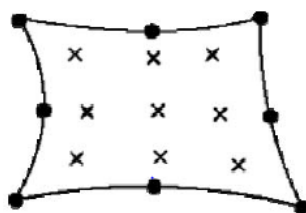
V této kapitole si popíšeme princip fungování výpočtů metody konečných prvků (zkráceně MKP) a postup tvorby MKP modelů pro tuto diplomovou práci.

9.1 Princip fungování výpočetní metody MKP

Výpočetní metoda konečných prvků zkráceně MKP je numerická metoda, který slouží k řešení úloh pružnosti a pevnosti, elektromagnetismu, vedení tepla a dalších. Používá se především pro tvarově složité úlohy, nebo takové které jsou časově náročné a nebylo by je tak možné řešit klasickými analytickými metodami. Formulace úloh pomocí metody MKP je známá přibližně od začátku 2. poloviny 20. století. Plně využitelná je však až od doby nástupu výkonné výpočetní techniky, díky které je možné řešit složité výpočetní úlohy v rozumném časovém horizontu. [15, 16]

V metodě MKP se kontinuum diskretizuje na malé spojité podoblasti - tzv. elementy. Každý element je jednoznačně určen svými uzlovými body, ze kterých jsou interpolovány jednotlivé posuvy do tzv. integračních bodů. Pro ty jsou počítány a ukládány výstupy z jednotlivých kroků výpočtu. Výsledkem MKP výpočtu je interpolované pole posuvů, které minimalizuje celkovou potenciální energii. [15, 16]

Na obrázku (33), je vidět element typu *CPE8PH*, na kterém jsou tečkami zobrazené jednotlivé uzlové body a křížky jednotlivé integrační body.



Obrázek 33: Příklad 2-D elementu CPE8PH [19]

9.2 Lagrangeův variační princip

Metoda konečných prvků je založena na Lagrangeově variačním principu. Ten říká, že těleso je v rovnováze, pokud je jeho celková potenciální energie minimální. Diskretizujeme-

li libovolnou oblast na konečný počet infinitesimálních elementů, bude celková potenciální energie Π této oblasti bude rovna součtu potenciálních energií Π^e všech elementů:

$$\Pi = \sum_{e=1}^{N_e} \Pi^e \quad (86)$$

kde N_e udává počet elementů.

Celkovou potenciální energie tělesa je vyjádřena jako součet deformační energie \mathbf{U} a potenciálu akčních vnějších sil \mathbf{W} (objemových \mathbf{W}^B a plošných \mathbf{W}^S):

$$\Pi(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = \mathbf{U}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) + \mathbf{W}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = \mathbf{U}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) + \mathbf{W}^B(\mathbf{u}(\mathbf{x})) + \mathbf{W}^S(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \quad (87)$$

Rovnici (87) lze rozepsat na:

$$\Pi(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\epsilon} \, dV - \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{f}^B \, dV - \int_{\Gamma_{\Omega}} \mathbf{u}^T \mathbf{f}^S \, dS \quad (88)$$

$$\Pi(u(x)) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \, dV - \int_{\Omega} f_i^B u_i \, dV - \int_{\Gamma_{\Omega}} f_i^S u_i \, dS \quad (89)$$

Člen $\Pi(\mathbf{u}(\mathbf{x}))$ představuje z matematického hlediska funkcionál (zobrazení z množiny funkcí do množiny reálných čísel). Minimalizací a maximalizací funkcionálu se obecně v matematice zabývá odvětví analýzy - Variační počet. Budeme-li minimalizovat (derivovat) rovnici (86), získáme již zmíněný *Lagrangeův variační princip*:

$$\frac{d\Pi}{du} = 0 \quad (90)$$

Ve vztahu pro výpočet celkové potenciální energie v integrálním tvaru (rovnice 88) bylo použito následující členy:

- Vektor posuvů: $\mathbf{u}^T = [u_x, u_y, u_z]$
- Vektor přetvoření: $\boldsymbol{\epsilon}^T = [\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}]$
- Vektor napětí: $\boldsymbol{\sigma}^T = [\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}]$
- Vektor objemových sil: $\mathbf{f}^B = [f_x^B, f_y^B, f_z^B]^T$
- Vektor plošných sil: $\mathbf{f}^S = [f_x^S, f_y^S, f_z^S]^T$

9.2.1 Řešení úlohy teorie pružnosti

Celkovou potenciální energii Π lze bez změny na obecnosti pro diskretizovaný MKP model zapsat ve tvaru

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{\Delta}^T \underline{\mathbf{K}} \mathbf{\Delta} - \mathbf{\Delta}^T \mathbf{F} \quad (91)$$

V rovnici (91) představuje první člen celkovou deformační energii tělesa a druhý člen práci vnějších sil.

$$\mathbf{F} = \underline{\mathbf{K}} \mathbf{U} \quad (92)$$

kde $\underline{\mathbf{K}}$ vyjadřuje globální matici tuhosti, $\mathbf{\Delta}$ vektor globálních uzlových posuvů a \mathbf{F} globální vektor vnějších uzlových sil.

Řešením úlohy pružnosti je kinematický přípustný posuv Π , který minimalizuje funkcionál Π . Derivací funkcionálu Π dle vektoru globálních posuvů lze z rovnice (91) odvodit:

$$\underline{\mathbf{K}} \mathbf{\Delta} = \mathbf{F} \quad (93)$$

Rovnice (93) představuje rovnici rovnováhy kontinua v MKP.

9.2.2 Obecné vlastnosti matice tuhosti \mathbf{K}

Pokud nebudou předepsány kinematické okrajové podmínky, které zamezí pohybu tělesa jako celku je matice $\underline{\mathbf{K}}$ obecně singulární (její determinant je nulový). To vede k nejednoznačnosti řešení úlohy, které odráží prostorovou neurčitost polohy tělesa.

Pokud není tato podmínka splněna, výpočet se zhroutí právě kvůli singularitě $\underline{\mathbf{K}}$.

Matice $\underline{\mathbf{K}}$ je navíc symetrická a pozitivně definitní.

9.2.3 Kinematické okrajové podmínky

Okrajové podmínky předepisují hodnoty složek posuvů a geometrickou vazbu diskretizovaného tělesa s okolím. Obecně se dají rozlišit dva typy kinematických okrajových podmínek:

- **Homogenní**, které předepisují nulový posuv.
- **Nehomogenní**, které předepisují vynucený posuv.

9.3 Abaqus

K modelování a provedení simulace pomocí MKP výpočtu byl používán program Abaqus FEA společnosti Dassault Systèmes (verze 6.14 a 2016). Program Abaqus se skládá z pěti základních programů pro MKP výpočty. Pro nasimulování úlohy zadané v této diplomové práci budou dostačovat dva následující:

- **Abaqus CAE** "Complete Abaqus Environment", tato část programu Abaqus je grafické prostředí, které slouží k "preprocessingu" tedy vytvoření modelu, nastavení jeho materiálových vlastností, zatěžovacích kroků, zatížení, vytvoření meshe (rozdělení na jednotlivé dílky) a nastavení parametrů úlohy. Z tohoto nastavení následně vygeneruje input soubor, který je poté načten do solveru, kde probíhá MKP výpočet. Po jeho dokončení je do této části programu načten výsledné databáze - souboru (*.odb) k "postprocessingu" tedy k vizualizaci výsledků ve formě zdeformovaného tvaru, barevných map, animací a grafů. [17]

- **Abaqus Standard**, tato část programu slouží k provedení výpočtu. Jeho parametry jsou načteny z Input souboru a vlastní výpočet poté běží na pozadí. Výpočetní čas je závislý na složitosti úlohy a výkonu počítače. Výpočet tak může zabrat pár minut až několik dní. Výsledky výpočtu jsou uloženy ve formě posuvů a napětí do souboru odb, ze kterého jsou načteny k "postprocessingu". Velikost odb souboru závisí na složitosti úlohy a množství uložených výsledků. [17]

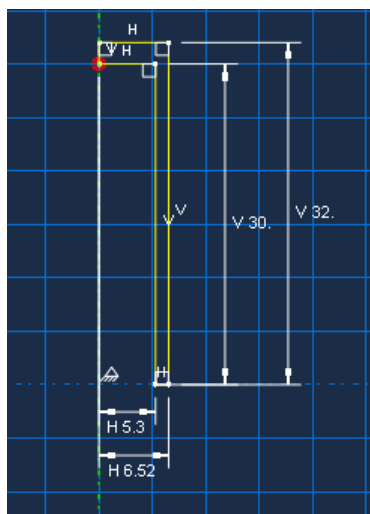
9.4 Model inflace a extenze válcové trubice

V této části budou popsány jednotlivé kroky vytváření úlohy na, které bude ověřena správnost nastavení materiálu a materiálové orientace. Úloha byla tvořena v Abaqusu/CAE verze 6.14.

9.4.1 Geometrie součásti

Modul Part Zde vytvoříme část válce, která bude mít shodnou geometrii s analytickým modelem. Protože je geometrie válce symetrická, vytvoříme pouze jednu polovinu, tím dosáhneme snížení počtu elementů a složitosti úlohy. Geometrii budeme modelovat jako *3D Deformable Solid* a část válec vytvoříme rotací *Revolution*. Otevře se prostor s vyznačenou osou rotace, kde vytvoříme geometrii součásti. Za-

dávat můžeme pomocí *Line* rovnou přesné souřadnice jednotlivých rohů, nebo tvar součásti pouze přibližně "naklikat" a pak přesné rozměry upravit kótováním. Když



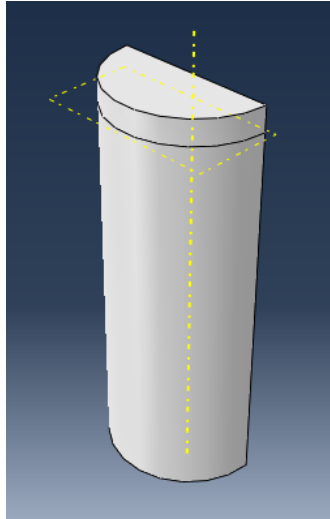
Obrázek 34: Vytváření geometrie válce

je geometrie hotová, necháme vytvořit součást rotací o 180° . Tím nám vznikne polovina válce se dnem. Protože máme trubici se dnem tak, aby nedošlo k jeho deformaci bude potřeba mu zadat jiné materiálové vlastnosti. Aby to bylo možné musíme válec se dnem rozdělit na dvě části - válec a samotné dno. Na vnitřní straně dna si tak vytvoříme rovinu pomocí příkazu *Create Datum Plane: 3 points* a vybereme 3 body, které leží na vnitřní straně dna. Potom pomocí příkazu *Partition Cell: Use Datum Place* rozdělíme součást na dvě části. Vybereme část kterou chceme nadělit a pak vytvořenou rovinu na vnitřní stěně dna. Získáme tak část válce rozdělenou na dvě části.

Program Abaqus umožňuje i import geometrie součásti ze souborů IGES a STEP. Ovšem při načítání geometrie ze souboru dojde k drobné chybě a načtená geometrie není přesná.

9.4.2 Materiál součásti

Module Property Zde zadefinujeme materiálové vlastnosti jednotlivých částí válce. Nejdříve zadefinujeme materiály pomocí příkazu *Create Material*. Začneme zadefinováním materiálu tepenné stěny, ta bude mít hyperelastické mechanické vlastnosti *Mechanical* \rightarrow *Elastic* \rightarrow *Hyperelastic*. Tady zvolíme anisotropní materiál *Anisotro-*



Obrázek 35: Součást rozdělená na dvě části - válec a dno

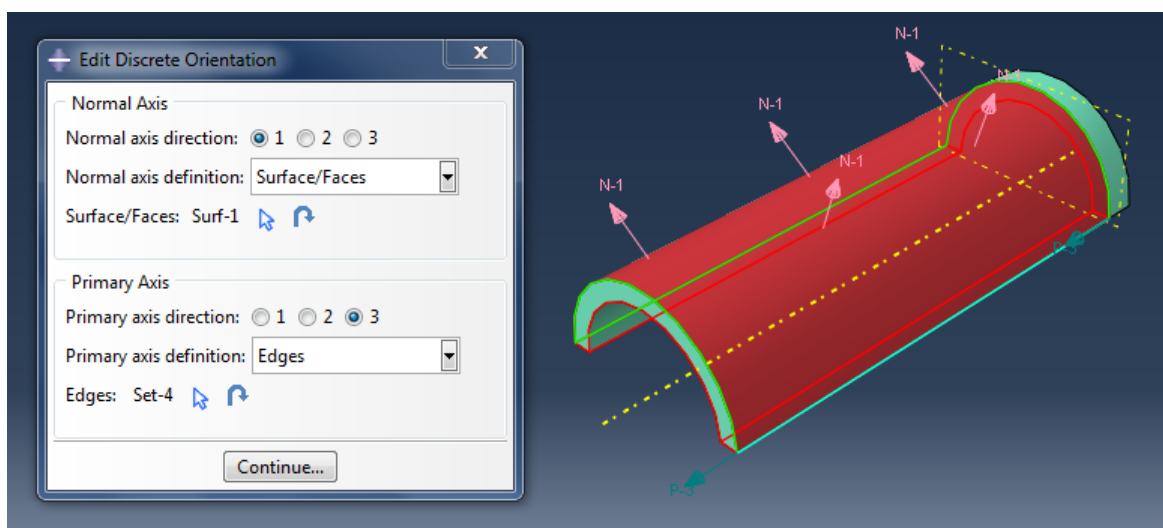
C10 [MPa]	D [-]	k1 [MPa]	k2 [-]	kappa [-]
0.00795	0	0.07849	4.991	0.1875

Tabulka 2: Materiálové hodnoty zadávané do programu Abaqus

pic podle modelu *Holzapfel* se dvěma směry vláken *Number of local directions = 2*. Vzhledem k tomu, že Abaqus bude pracovat s materiálovým modelem, který je zadaný pomocí hustoty deformační energie, je nutné zkontrolovat jak vypadá jeho rovnice v programu Abaqus. Tu najdeme v manuálu v sekci 22.5.3 Anisotropic hyperelastic behaviour [20]. V manuálu vidíme, že na rozdíl od rovnice (41) není první člen μ (v abaqusu *C10*) dělen dvěma, takže budeme muset zadávat jeho poloviční hodnotu. Dále parametr D je nestlačitelnost, k_1 a k_2 jsou materiálové konstanty a κ je rozptyl vláken. Do abaqusu tak vyplníme následující hodnoty: Jako druhý materiál si vytvoříme běžnou konstrukční ocel. Takže *Mechanical* \rightarrow *Elasticity* \rightarrow *Elastic* a zadefinujeme Youngův modul pružnosti oceli 210000 [MPa] a Poissonovo číslo 0.3. Dále vytvoříme dvě sekce *Section* a každé přiřadíme příslušný materiál. Sekce vytvoříme příkazem *Create Section* a budou *Solid Homogenous*. Následně přiřadíme sekce jednotlivým částím tepny. To uděláme příkazem *Assign Section* v okně vybereme část tepny, které budeme přiřazovat materiálové vlastnosti a poté kterou sekci této části přiřadíme.

Materiálová orientace

Protože v tepenné stěně jsou orientována kolagenní vlákna a zvolili jsme pro výpočet materiál, který tuto orientaci uvažuje, musíme jí zadefinovat. To uděláme příkazem *Assign material orientation* a zvolíme ve které části chceme tyto směry definovat. Pokračujeme na *Use Default Orientation or Other Method* jako metodu zvolíme *Discrete* a kliknutím na symbol tužky zadefinujeme souřadné systémy. *Normal Axis* osu 1 si zaneseme jako normálu k povrchu válce a *Primary Axis* bude ve směru osy válce. *Additional Rotation Direction* zvolíme kolem osy 1 (*Axis1*), a zaškrtneme



Obrázek 36: Zadávání materiálové orientace

None, protože natočení vláken zadáme po vytvoření meshe přímo do input souboru. *Stacking direction* volíme *Element isoparametric direction 1*.

Pokud bychom modelovali pouze situaci inflace a extenze válcové trubice je nejlepší zadávat materiálovou orientaci pomocí válcového souřadného systému. Vzhledem k tomu, že v rozevřeném proužku tepny abaqus nerozezná válcovou součást, je nutné použít metodu *Discrete* a určit materiálovou orientaci ručně.

9.4.3 Tvorba sestavy

Module Assembly I přes to, že v naší úloze máme pouze jednu součást musíme jí umístit do sestavy. Uděláme to příkazem *Create Instance*

9.4.4 Zatěžovací kroky

Module Step Nyní vytvoříme parametry zatěžovacího kroku. Klikneme na *Create Step*, první krok *Step-1* vložíme tak, aby následoval po kroku *Initial*, který slouží k zadefinování okrajových podmínek. Krok *Step-1* vytvoříme jako *Static, General*, bude nelineární a tak zaškrtneme možnost *Nonlinear* "On". Budeme také využívat automatické stabilizace úlohy *Automatic stabilization* a to *Specify dissipated energy fraction*, kterou nastavíme na hodnotu 0.001 a *Use adaptive stabilization with max. ratio of stabilization to strain energy* nastavíme na hodnotu 0.05. V záložce *Incrementation* zadáme maximální počet incrementů na 2000, velikost počátečního incrementu na 0.005, minimální na $1E - 07$ a maximální na 0.1.

V tomto kroku také zadefinujeme jak často a jaké hodnoty má Abaqus ukládat do výsledného souboru. V levém sloupci najdeme položku *Field Output Request* a v ní záložku *F-Output-1* na kterou klikneme pravým tlačítkem a zvolíme *Edit*. Proměnné, které nás budou zajímat necháme na *Preselected defaults*, ale upravíme frekvenci jejich ukládání, protože je nepotřebujeme znát v každém incrementu. Budeme si je ukládat po 10% výpočtu. To nám jednak zvýší rychlost výpočtu, protože program nebude muset po každém incrementu zapisovat celou sadu hodnot do odb databáze. Plus se tím sníží její velikost. Možnost *Frequency* tak změníme na *Every x units of time* a nastavíme hodnotu 0.1 a dále zvolíme, že nás tyto časy zajímají pouze přibližně. V možnosti *Timing* tak volíme *Output at approximate times*. Stejně nastavíme i *History Output Request*.

9.4.5 Nastavení zatížení

Module Load

Nyní nastavíme okrajové podmínky a zatížení součásti. Začneme okrajovými podmínkami příkazem *Create Boundary Condition*, které budeme definovat pro Step *Initial* a nastavíme je pomocí symetrií *Symmetry/Antisymmetry/Encastre*. Na spodních stranách zadefinujeme symetrii tak, aby plocha měla normálu v ose *Z* globálního souřadného systému (v našem případě). Na otevřené straně válce zadefinujeme také symetrii, ale pro plochu s normálou v ose *Y* globálního souřadného systému (v našem případě).

Dále zadefinujeme zatížení příkazem *Create Load*, který vložíme do *Step-1* a bude *Mechanical* typu *Pressure*. Vybereme plochy na které má tlakové zatížení působit, tedy vnitřní plochu tepny a dno. Tepnu budeme tlakovat na hodnotu 0.016 MPa tedy systolický tlak.

9.4.6 Síť

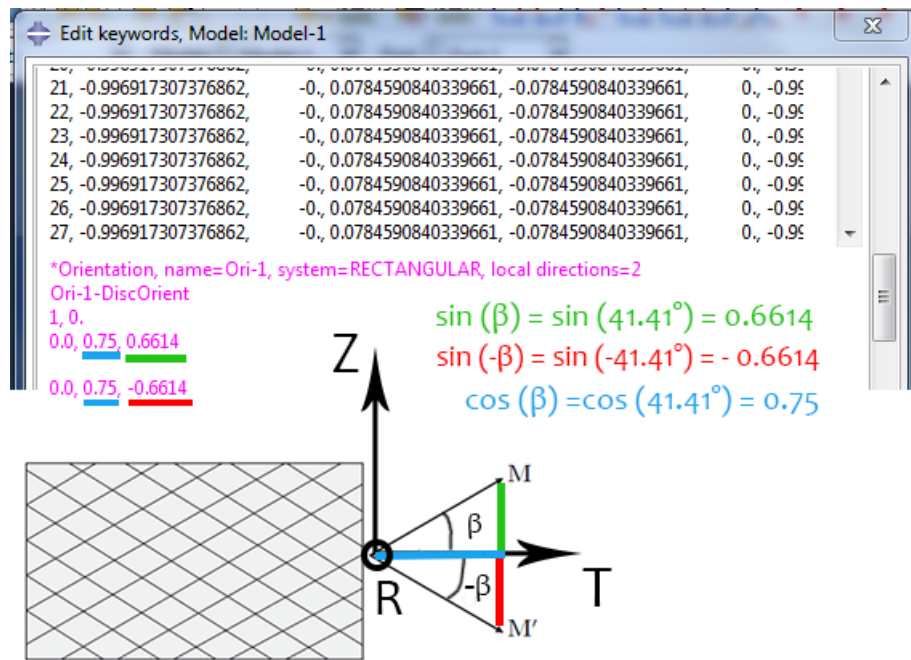
Module Mesh V této části si tepnu nadělíme na jednotlivé uzlové body a zvolíme typ použitých elementů sítě. Nejdříve v horní liště přepneme z *Assembly* na *Part*. A uvidíme vymodelovanou část válcové trubice, kde jsou podle materiálu barevně odlišeny jednotlivé sekce. Dále si přepneme typ zobrazení na drátový model *Render Model: Wireframe*, uvidíme tak všechny hrany. Budeme pokračovat příkazem *Seed Edges*, kde přiřadíme jednotlivým hranám počet uzlových bodů, na které je chceme mít nadělené. Nejdříve v okně vybereme, které hrany budeme dělit (společně vybíráme ty, které jsou stejné). *Method* bude *By number, Bias - None, Number of elements* dle délky jednotlivých hran. V záložce *Constraints* pak zaškrtneme možnost *Do not allow the number of elements to change*.

Dále budeme přiřazovat typ elementu, ten má značný vliv na přesnost a náročnost úlohy. Příkazem *Assign element type* vybereme, které části válce chceme přiřadit elementy a v okně volíme quadratické elementy *Geometric order - Quadratic* a hybridní formulaci s plnou integrací, tedy zaškrtneme možnost *Hybrid formulation* a vypneme možnost *Reduced integration*. Zvolený typ elementů tak bude *C3D20H*.

Dnu válce taky přiřadíme Quadratické elementy, ale nepotřebujeme hybridní formulaci a ponecháme redukovanou integraci. Zvolený typ elementů tak bude *C3D20HR*. Poté klikneme na příkaz *Mesh part* a potvrdíme *Yes* a vidíme nasíťovaný válec.

9.4.7 Zápis materiálové orientace v input souboru

Nyní když máme vytvořený mesh, zadefinujeme materiálovou orientaci do input souboru. To uděláme z záložce *Model* → *Edit Keywords* → *Model-1* kde pod sloupce s čísly, kde je zapsaná orientace souřadných systému pro jednotlivé elementy zapíšeme natočení souřadného systému, viz obrázek (37).



Obrázek 37: Zadávání materiálové orientace přímo do Input souboru

9.4.8 Job

Module Job Module Job je posledním krokem přípravy úlohy, příkazem *Create Job* vytvoříme úlohu, kterou následně spustíme. V tomto kroku se dá volit, kam bude Abaqus ukládat průběžná data, kolik operační paměti a processorů mu dáme k dispozici atd. Úlohu pak spouštíme v *Job Manager* tlačítkem *Submit*. V případě, že úlohu nahráváme na výpočetní server použijeme tlačítko *Write Input*, které nám vygeneruje Input soubor, který spustíme na serveru.

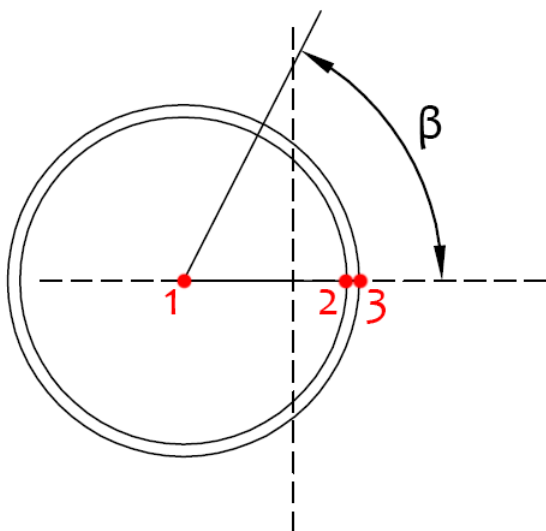
9.5 Modelování inflace a extenze válcové trubice s vnitřním předpětím v rámci jedné úlohy

V této části diplomové práce bude popsán postup k inflaci a extenzi části válcové trubice s vnitřním předpětím.

9.5.1 Geometrie součásti

Module Part V tomto kroku vytvoříme geometrii rozevřeného proužku. Začneme příkazem *Create Part* a budeme tvořit *3D Deformable solid*, protože proužek není ro-

tačně symetrický, jeho geometrii vytvoříme vysunutím *Extrusion*. Approximate size zvolíme 50. Přerušovanou čarou máme vyznačené osy souřadného systému. Zvolíme variantu *Create connected lines* a začneme kreslit geometrii rozevřeného proužku. Budeme vycházet z obrázku (38) a pro jednotlivé červeně vyznačené body budeme zadávat hodnoty souřadnic z tabulky (3). Následně vytvoříme dvě kružnice pří-



Obrázek 38: Schéma tvorby geometrie rozevřeného proužku

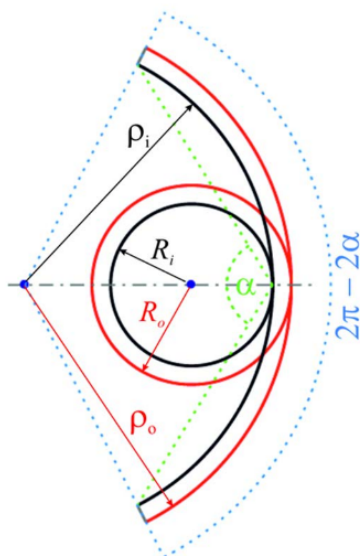
	1	2	3	β
Obecně	$x = R_i - \rho_i, y = 0$	$x = R_i, y = 0$	$x = R_o, y = 0$	viz rovnice 94
V této DP	$x = -10.9, y = 0$	$x = 5.3, y = 0$	$x = 6.52, y = 0$	63°

Tabulka 3: Souřadnice jednotlivých bodů geometrie proužku

kazem *Create Circle: Center and Perimeter* se středem v bodě 1, první bude mít poloměr do bodu 2 a druhá do bodu 3. Pak si vytvoříme konstrukční pomocnou čáru pod úhlem β . Ten získáme na základě vzorce (94), který jsme si odvodili na základě obrázku (39).

$$\beta = \frac{2\pi - 2\alpha}{2} \quad (94)$$

Kde α je úhel rozevření v radiánech a β je úhel, který budeme používat při tvorbě geometrie proužku a je také v radiánech. Konstrukční čáru vytvoříme příkazem *Create Construction: Line at an Angle* na kterou se dostaneme delším podržením

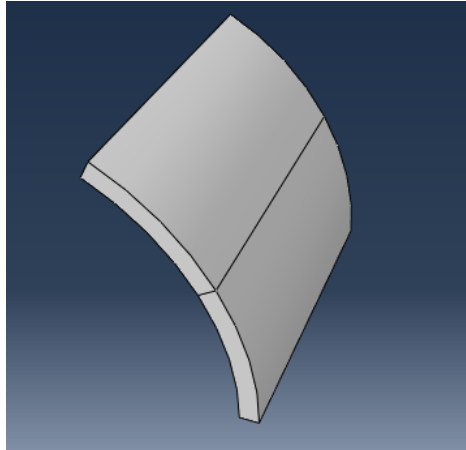


Obrázek 39: Schéma geometrie proužku

příkazu *Create construction: Oblique Line Thru 2 points*. Nastavíme úhel β (nyní už ve stupních) a umístíme konstrukční čáru tak, aby procházela středem kružnic, tedy bodem 1.

Nyní smažeme ty části konstrukce, které nebudeme potřebovat. Začneme tím, že si rozdělíme kružnici pomocí příkazu *Split* na který se dostaneme delším podržením příkazu *Auto-Trim*. Vybereme první křivku, kterou chceme dělit a následně druhou křivku podle, které bude první křivka rozdělená. Takto si nadělíme obě kružnice podle konstrukční čáry. Poté pomocí příkazu *Delete* (Guma na tužce) smažeme nepotřebné části, tedy větší části kružnic, čáry mezi body 1 a 2 a i konstrukční čáru. Zůstane nám tak otevřená geometrie rozevřeného proužku, kterou na horní části uzavřeme čarou příkazem *Create Lines: Connector* a body vybereme kliknutím myši v okně. Tím máme geometrii rozevřeného proužku hotovou. Klikneme na tlačítko *Done* a zadáme hloubku vysunutí v našem případě 20 [mm].

Nyní když máme vytvořenou součást rozevřeného proužku tepny, rozdělíme si jí na dvě poloviny pomocí příkazu *Partition Cell: Define Cutting Plane*. Zvolíme možnost *3 Points*, vybereme prostřední body tří oblouků a potvrdíme *Create Partition*. Získáme tak proužek tepny rozdělený na dvě poloviny viz obrázek (40). Tento postup tvorby geometrie nám zajistí, že po uzavření proužku do tvaru půlkruhu, bude sou-



Obrázek 40: Rozevřený proužek tepenné stěny

řadný systém programu abaqus v ose tohoto půlkruhu. To nám usnadní definování zatížení některých úloh.

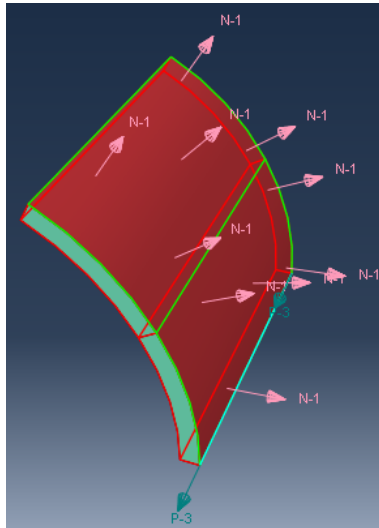
9.5.2 Materiál součásti

Module Property Materiál součásti zadefinujeme stejně jako v Úloze inflace a ex-tenze válcové trubice viz kapitola 9.4.2. Vytvoříme sekci *Create Section*, kterou vytvoříme jako *Solid Homogenous* a přiřadíme jí vytvořený materiál. Poté pokračujeme příkazem *Assign Section* a vytvořenou sekci přiřadíme k oběma částem proužku.

Nyní v proužku zadefinujeme materiálovou orientaci příkazem *Assign Material Orientation*, vybereme obě dvě části proužku a opět pomocí *Use Default Orientation or Other Method* zvolíme definování orientace *Discrete* a pomocí ikonky tužky se dostaneme k vlastnímu definování. Normálová osa *Normal Axis* bude ve směru osy 1 a bude normálou k vnějšímu povrchu proužku, který vybereme kliknutím na obě dvě plochy. Primární osa *Primary Axis* bude ve směru osy 3 a vybereme spodní hranu proužku. Získáme tak zadefinované dvě osy, viz obrázek (41). Dáme *Continue* a zvolíme, že přídatnou rotaci provedeme v ose 1, *Additional Rotation Direction* volba *Axis 1*. *Additional Rotation* volíme *None* a *Stacking direction* zaškrtneme možnost *Element isoparametric direction 1*.

9.5.3 Tvorba sestavy

Proužek tepny si vložíme do sestavy viz sekce 9.4.3.



Obrázek 41: Nastavení materiálové orientace na proužku tepenné stěny

9.5.4 Zatěžovací kroky

Module Step Teď si vytvoříme 3 kroky, v prvním proužek budeme zavírat do půlkruhového tvaru, ve druhém vytvoříme axiální protažení a ve třetím kroku budeme proužek tlakovat.

Step-1 bude následovat po kroku *Initial* a bude *Static, General*, zapneme *Nlgeom* a *Automatic stabilization* stejně jako v sekci 9.4.4. V záložce *Incrementation* zadáme *Maximum number of increments* na 2000. Počáteční velikost incrementu nastavíme na 0.01, minimální na $1E - 07$ a maximální na 0.1. A potvrdíme *OK*.

Step-2 bude následovat po kroku *Step-1*, opět bude *Static, General*, možnost nelineární geometrie už máme zadanou z předešlého kroku a *Automatic stabilization* nastavíme stejně jako v předešlém kroku. Protože tento krok bude sloužit k axiálnímu protažení, necháme maximální počet incrementů na hodnotě 100. Počáteční velikost incrementu zadáme 0.05, minimální $1E - 07$ a maximální 0.1. A potvrdíme *OK*

Step-3 bude následovat po kroku *Step-2*, opět ho zadáme jako *Static, General, Nlgeom* a *Automatic Stabilization* přepíšeme z předchozího kroku. Protože tlakování je na výpočet náročné maximální počet incrementů nastavíme na 2000. Velikost počátečního elementu pro tento krok zvolíme menší a to 0.0025, minimální ponecháme na $1E - 07$ a maximální na 0.1. A potvrdíme *OK*.

Dále si zadefinujeme *Field Output Request*. V horní liště se přepneme do *Step-1*, aby se nám nastavení přeneslo i do dalších dvou kroků. Nastavení provedeme stejně jako v sekci 9.4.4.

9.5.5 Nastavení zatížení

Jednotlivým možnostem zatížení se budeme věnovat v samostatné kapitole.

9.5.6 Síť

Module Mesh Nyní si nadělíme proužek na jednotlivé elementy. Přepneme tedy na horní liště z *Assembly* na *Part*. Přepneme si na drátové zobrazení modelu *Render Model: Wireframe* a pak pomocí příkazu *Seed Edges*, začneme dělit jednotlivé hrany. Po tloušťce stěny si proužek nadělíme na 15 uzlových bodů, jednotlivé části oblouků potom každý na 20 uzlových bodů a na délku si proužek rozdělíme na 30 uzlových bodů. Počet elementů budeme opět zadávat *By Number* a v záložce *Constraints* zaškrtneme možnost *Do not allow the number of elements to change*.

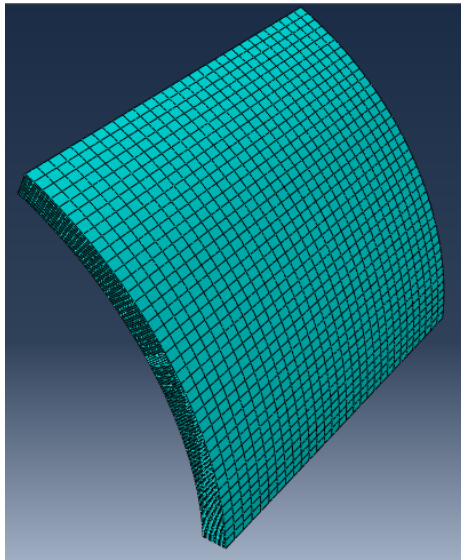
Příkazem *Assign Element Type* přidělíme proužku typ elementů. Myší vybereme obě části proužku (s pomocí klávesy Shift). Typ elementů bude *Quadratic*, protože materiál považujeme za nestlačitelný zaškrtneme možnost *Hybrid formulation* a budeme chtít plnou integraci, takže vypneme možnost *Reduced integration*. A potvrdíme *OK*. Pak už jen necháme vytvořit mesh na součásti příkazem *Mesh Part* a potvrdíme *Yes*.

9.5.7 Materiálová orientace

Nyní když máme vytvořený mesh, můžeme do *Input* souboru zapsat přesnou materiálovou orientaci. Zadávání opět přes horní nabídku *Model* → *Edit Keywords* → *Model-1*. Zadáváme stejně jako v sekci 9.4.7.

9.5.8 Job

A nastavíme parametry výpočtové úlohy viz sekce 9.4.8.



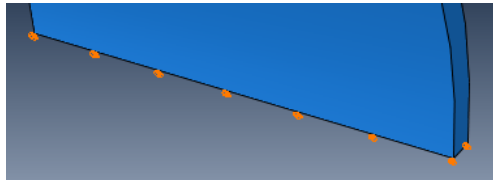
Obrázek 42: Rozevřený proužek se zobrazeným meshem

9.6 Možnosti zatížení pro vnesení předpětí

Pokud chceme vyvolat deformaci, můžeme v programu Abaqus volit dva základní druhy zatížení a to silovým působením, nebo předepsaným kinematickým posuvem. Protože všechny MKP výpočty jsou založeny na stanovení pole posuvů, bude zatížení předepsaným kinematickým posuvem vždycky výhodnější z pohledu složitosti výpočtu. Bohužel ne vždy je možné znát kinematický posuv dopředu. I v této diplomové práci je vnesení předpětí modelováno jak silovým působením tak kinematickým posuvem.

9.6.1 Počáteční okrajové podmínky

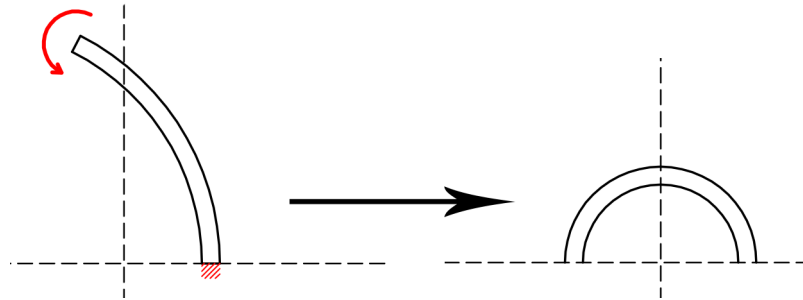
Nyní si ukážeme jak nastavit počáteční okrajovou podmínku, která bude pro všechny následující úlohy stejná. V **Module Load** klikneme na příkaz *Create Boundary Condition* budeme jí definovat pro Step *Initial* bude *Mechanical* a bude zadaná pomocí *Displacement/Rotation* a vybereme spodní stranu proužku. Následně vybereme $U1$ a $U2$ tím bude spodní strana vetknutá ve směru X a Y , potvrdíme tlačítkem *OK*. To že máme spodní stěnu vetknutou budou značit malé oranžové trojúhelníky, viz obrázek (43).



Obrázek 43: Zobrazení vetknutí v programu Abaqus

9.6.2 Zatížení momentem

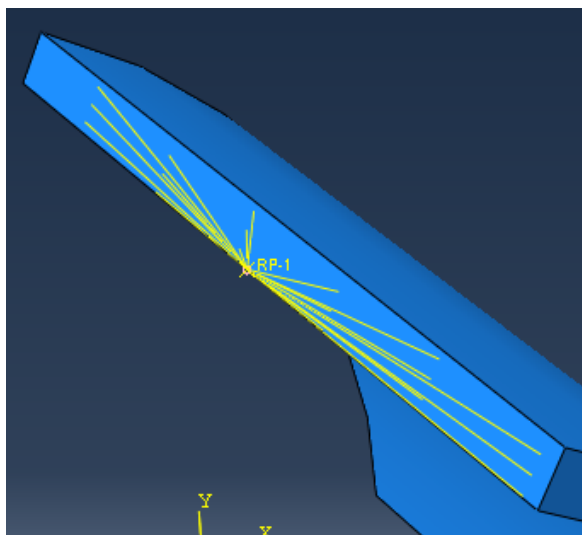
Na obrázku (44), máme vyobrazenou předpokládanou deformaci proužku při zatížení momentem.



Obrázek 44: Schéma předpokládané deformace proužku při zatížení momentem

Protože použité elementy *C3D20H* nemají požadované stupně volnosti, aby mohly být rovnou zatíženy momentem, musíme se vrátit do **Module Interaction**. Zde zdefinujeme *Reference point*, kterému tyto stupně volnosti přiřadíme a stanovíme tento bod jako řídicí. Takže příkazem *Create Reference Point* a vybereme středový bod na spodní straně horní plochy, viz obrázek (45). Když máme tento bod vytvořený, zdefinujeme *Constraint* a to příkazem *Create Constraint* typ *Coupling* jako kontrolní bod zvolíme právě vytvořený *Reference Point* potvrdíme *Done* a oblast constraintu zvolíme *Surface* a vybereme horní plochu proužku. Spojení bude kinematické *Kinematic* a *Constrained degrees of freedom* ponecháme *U1 - UR3* a potvrdíme *OK*. Máme tak tuto plochu propojednou s referenčním bodem, viz obrázek (45).

Nyní když máme vytvořený referenční bod přejdeme do **Module Load**, počáteční okrajové podmínky zdefinujeme dle sekce 9.6.1. Budeme pokračovat nastavením silového zatížení, příkazem *Create Load*, který budeme vkládat do *Step-1*, zatížení bude *Mechanical* typu *Moment* a vložíme ho do vytvořeného *Reference Point* a po-

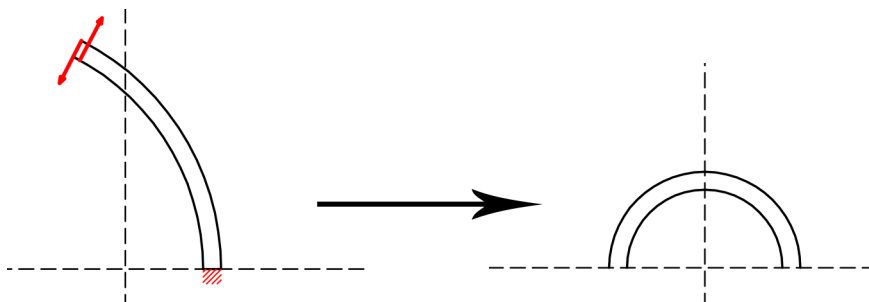


Obrázek 45: Reference point propojený pomocí Constraint s plochou

tvrdíme *Done*. Moment budeme nastavovat do směru $CM3$, tak aby způsobil rotaci okolo osy Z . Vložený moment se vyznačuje malou světle fialovou šipkou v bodě RF . Velikost momentu v této DP byla $0.0277 [N \cdot mm]$ a její nastavení probíhalo postupným zpřesňováním počátečního odhadu její velikosti.

9.6.3 Silové působení - Dvojice sil

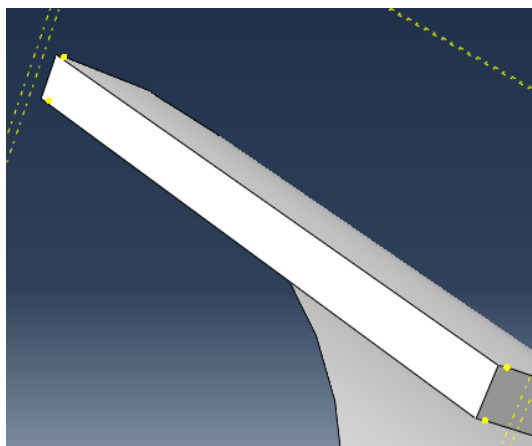
Na obrázku (46), máme vyobrazenou předpokládanou deformaci proužku při zatížení dvojicí sil.



Obrázek 46: Schéma předpokládané deformace proužku při zatížení dvojicí sil

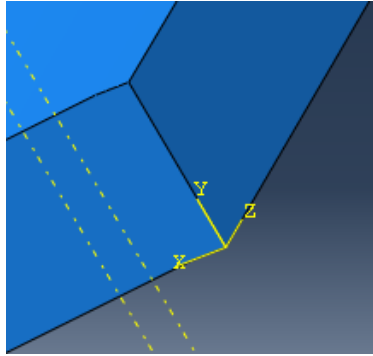
Moment je silová dvojice, proto je možné jej zadat i jako účinek dvojice sil. Aby bylo možné zadat dvojici sil, musíme si vytvořit body do kterých budou síly zadefinovány. To uděláme v **Module Part**, začneme tím, že si na horní ploše proužku zadefinujeme novou rovinu. Začneme delším podržením příkazu *Create Datum Plane*:

Offset From Principal Plane a vybereme možnost *Create Datum Plane: 3 points* a vybereme 3 body na horní ploše proužku. Dále ve stejné nabídce vybereme možnost *Create Datum Plane: Offset From Plane* vybereme vytvořenou rovinu a zvolíme *Enter Value* zkontrolujeme orientaci šipky a pokud směřuje od proužku pryč otočíme jí tlačítkem *Flip*, potvrdíme *OK*. A zadáme hodnotu odsazení v našem případě 0.25 [mm]. Nyní si vytvoříme potřebné body. Delším podržením příkazem *Partition Edge: Specify Parameter by Location* a zvolíme *Partition Edge: Use Datum Plane*, vybereme hrany oblouků potvrdíme *Done*, vybereme odsazenou plochu a potvrdíme *Create Partition*. Máme vytvořené body pro vložení silových účinků, viz obrázek (47).



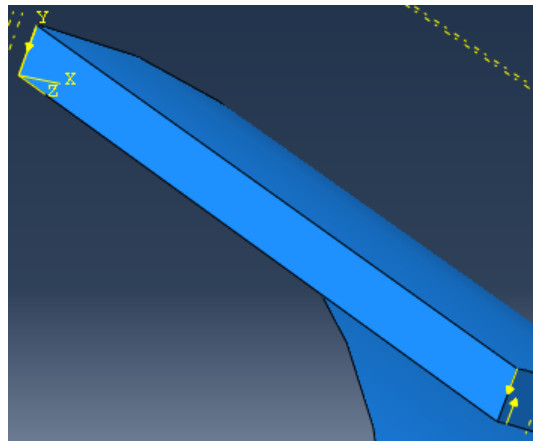
Obrázek 47: Vytvořené přídavné body pro vložení silových účinků (žlutě)

Když máme vytvořené přídavné body pro vložení sil, přesuneme se do **Module Load**, kde zadefinujeme působení sil. Okrajové podmínky zadefinujeme stejně jako v sekci 9.6.1. Dále si zadefinujeme pomocný souřadný systém, využijeme příkazu *Create Datum CSYS: 3 Points*, proužek si natočíme tak, abychom se na něj dívali ze zadní strany. Nový kartézský systém souřadnic si zadefinujeme tak, aby byl ve spodním rohu a osa Z byla souhlasná s osou Z globálního souřadného systému, viz obrázek (48). Teď se dostaneme k zadefinování silového účinku, příkazem *Create Load* kategorie *Mechanical* a typ *Concetrated Force*. Myší vybereme body, do kterých chceme vložit silové účinky (pro výběr více bodů naráz použijeme klávesu Shift). Vybereme první dva body na spodní straně, v okně pro definování síly klikneme na ikonu kurzoru a vybereme pomocný souřadný systém. Do kolonky *CF2*



Obrázek 48: Pomocný souřadný systém

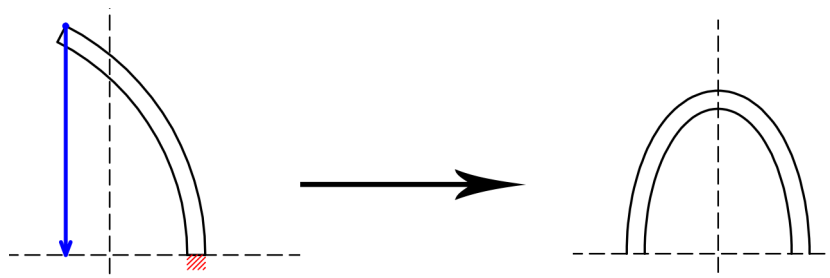
zadáme hodnotu síly, v našem případě 0.0554 [N] . Stejným způsobem zadáme hodnoty i pro horní rohy proužku a zadáme opačnou hodnotu síly. Zadané síly vidíme ve formě žlutých šipek, viz obrázek (49). Díky tomu, že máme síly zadané vzhledem k pomocnému souřadnému systému, budou se natáčet společně s proužkem.



Obrázek 49: Zobrazení sil pomocí žlutých šipek

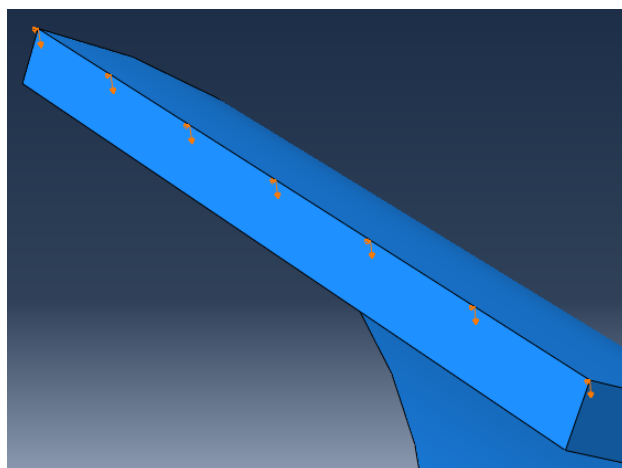
9.6.4 Kinematicky - posunem jedné hrany na rovinu XZ

Na obrázku (50), máme vyobrazenou předpokládanou deformaci proužku při zatížení jednoduchým kinematickým posuvem.



Obrázek 50: Schéma předpokládané deformace proužku při zatížení jednoduchým kinematickým posuvem

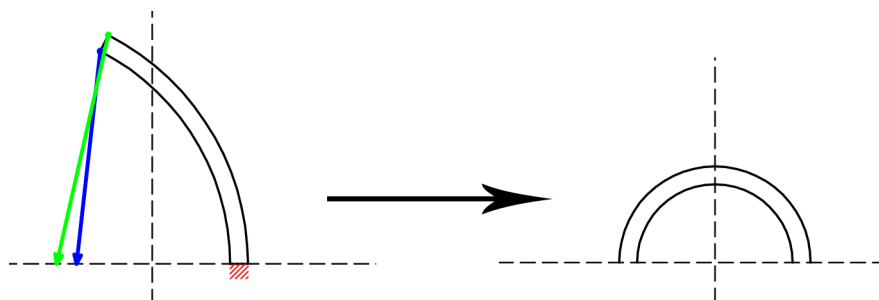
V této sekci budeme proužek uzavírat kinematicky a to nejjednodušší možností, hornímu okraji vrchní strany předepíšeme kinematický posuv směrem na rovinu XZ. Pro tuto variantu není potřeba dělat žádné další úpravy modelu. V *Module Load* nejdříve zdefinujeme okrajové podmínky, viz sekce 9.6.1. Budeme pokračovat opět příkazem *Create Boundary Condition*, který budeme vkládat do *Step-1* a to *Mechanical* typu *Displacement/Rotation*. Vybereme horní hranu a zdefinujeme jí nulový posuv ve směru osy X a posuv na rovinu XZ, který je v našem případě 15.52 [mm]. Zdefinovaný posuv se projeví oranžovými šipkami ve směru posuvu, viz obrázek (51). Obdobný postup byl použit i v práci "Arterial clamping: Finite element simulation and in vivo validation" [18]



Obrázek 51: Zobrazení zadaného posuvu ve směru Y

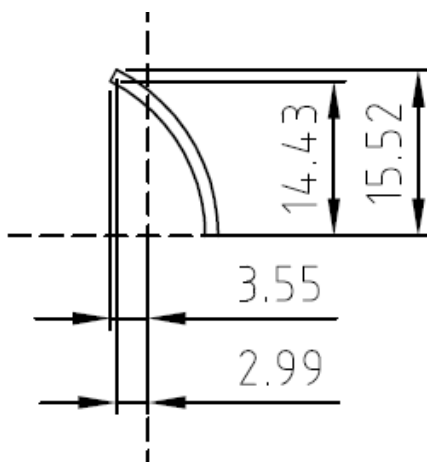
9.6.5 Kinematicky - Posuvem do tvaru půlkruhu

Na obrázku (52), máme vyobrazenou předpokládanou deformaci proužku při zatížení kinematickým posuvem do tvaru půlkruhu.



Obrázek 52: Schéma předpokládané deformace proužku při zatížení posuvem do tvaru půlkruhu

Další variantou kinematického zadefinování posuvů je dopočítání posuvů pro horní hrany tak, aby proužek po uzavření nabyl tvaru půlkruhu. Na obrázku (53) vidíme souřadnice hran, pro které budeme definovat posuvy. Horní hrana, která je

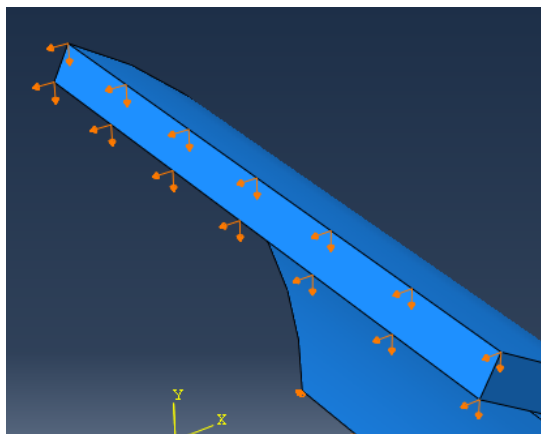


Obrázek 53: Souřadnice hran proužku pro osy X a Y

na vnějším poloměru bude po uzavření na poloze $[X = -6.52, Y = 0]$. Musí tak v X-ové souřadnici vykonat posun o $-6.52 - (-2.99) = -3.53$ a v Y-ové souřadnici o celých -15.52 . Spodní hrana, která je na vnitřním poloměru bude po uzavření na souřadnicích $[X = -5.3, Y = 0]$ a musí tak vykonat posun v Xové souřadnici o $-5.3 - (-3.55) = -1.75$ a v Y-ové o -14.43 . Využijeme příkaz *Create Boundary Condition*, okrajovou podmínku vložíme do *Step-1* a bude *Mechanical* typu *Displacement/Rotation*, vložíme jí samostatně pro horní a spodní hranu. Kam vyplníme

konkrétní hodnoty posuvu v X-ové a Y-ové ose. Posuvy se nám budou na jednotlivých hranách vizualizovat pomocí šipek, viz obrázek (54).

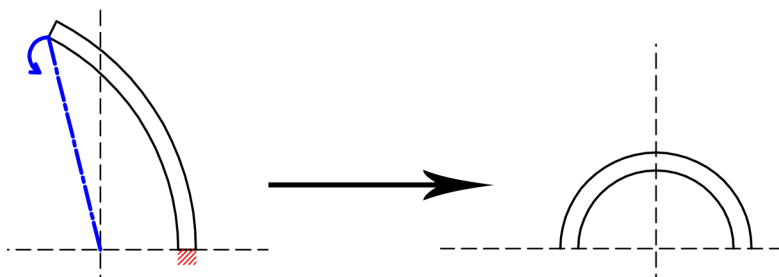
Počáteční okrajové podmínky zadefinujeme stejně jako v sekci 9.6.1.



Obrázek 54: Zobrazení posuvu na hranách ve směru os X a Y

9.6.6 Kinematicky - rotací o úhel

Na obrázku (55), máme vyobrazenou předpokládanou deformaci proužku při zatížení kinematikou rotací o úhel.



Obrázek 55: Schéma předpokládané deformace proužku při zatížení kinematikou rotací o úhel

Zadefinujeme počáteční okrajové podmínky podle sekce 9.6.1. Protože úhlem budeme zadávat rotaci a je nutné zadefinovat řídicí bod *Reference Point* a propojit ho pomocí *Constraint* s plochou. Postup byl popsán v sekci 9.6.2.

Když máme zadefinovaný řídicí bod, který je propojený s plochou, vneseme do něj kinematickou okrajovou podmínku. Použijeme příkaz *Create Boundary Condition*,

který vložíme do *Step-1* a bude *Mechanical* typu *Displacement/Rotation*. Zadáme do kolonky *UR3* úhel v radiánech, v našem případě $117^\circ = 2.04204 \text{ rad}$, tím pádem máme zdefinovanou rotaci horní plochy proužky o 117° .

9.7 Inlace a extenze trubice s předpětím

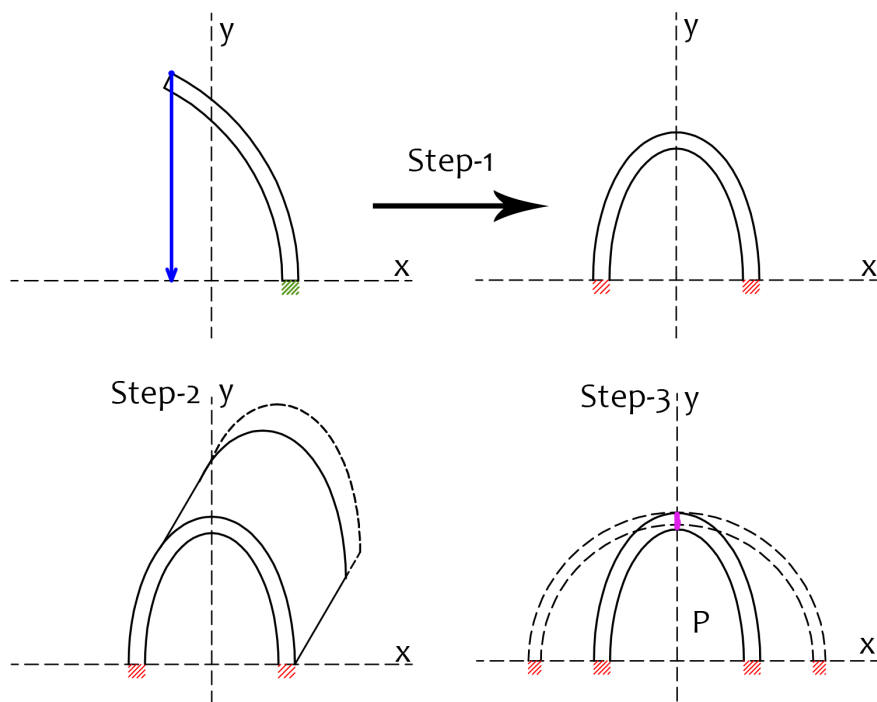
V předchozí kapitole byly ukázány jednotlivé metody jak vnést předpětí do proužku tepenné stěny. Nyní budeme pokračovat ve *Step-2* a *Step-3*, ve kterých tepenný proužek axiálně protáhneme a poté ho budeme nafukovat vnitřním tlakem. Tento postup je ovšem možný pouze pro kinematicky zdefinovaný posuv a to pro základní, kde je zdefinován pouze posunem jedné hrany a pro ten kdy proužek uzavíráme rovnou do tvaru půlkruhu. To je způsobeno tím, že v těchto variantách není zdefinovaný *Reference Point*, který je spojený s plochou pomocí *Constraint*. *Constraint* udělá z plochy *Rigid*, který není dále deformovatelný, takže neumožňuje ani axiální protažení, ani ztenčení stěny v průběhu nafukování.

Na obrázcích (56) a (57), je schématicky naznačeno jaké průběhy deformací jsou očekávány, pro tyto dvě varianty v jednotlivých zatěžovacích krocích. Ve *Step-1* je naznačeno zelené vetknutí, které značí vetknutí do směrů os X a Y, které je potřeba pouze v prvním kroku, aby bylo možné proužek uzavřít. V následujících krocích pak je červené vetknutí, které značí vetknutí už jen do osy Y. Ve *Step-3* je pak fialově vyznačená stabilizace úlohy ve směru osy X, která zamezuje "cestování" proužku pracovním prostorem v průběhu tlakování.

9.7.1 Axiální protažení - Step-2

V této sekci si popíšeme jak nadefinujeme *Step-2*, tak aby bylo možné pokračovat v jedné úloze a jednotlivé stepy na sebe navazovaly a nezpůsobily Error, který by vedl k přerušení výpočetní úlohy.

Nejdříve začneme tím, že počáteční okrajové podmínce, kterou jsme definovali v sekci 9.6.1 upravíme pro krok *Step-2* parametry. Otevřeme si *Boundary Condition Manager*, tam uvidíme okrajovou podmínku, která byla vytvořená v kroku *Initial* a je promítnutá do všech dalších kroku. Označíme jí v kroku *Step-2* a klikneme na

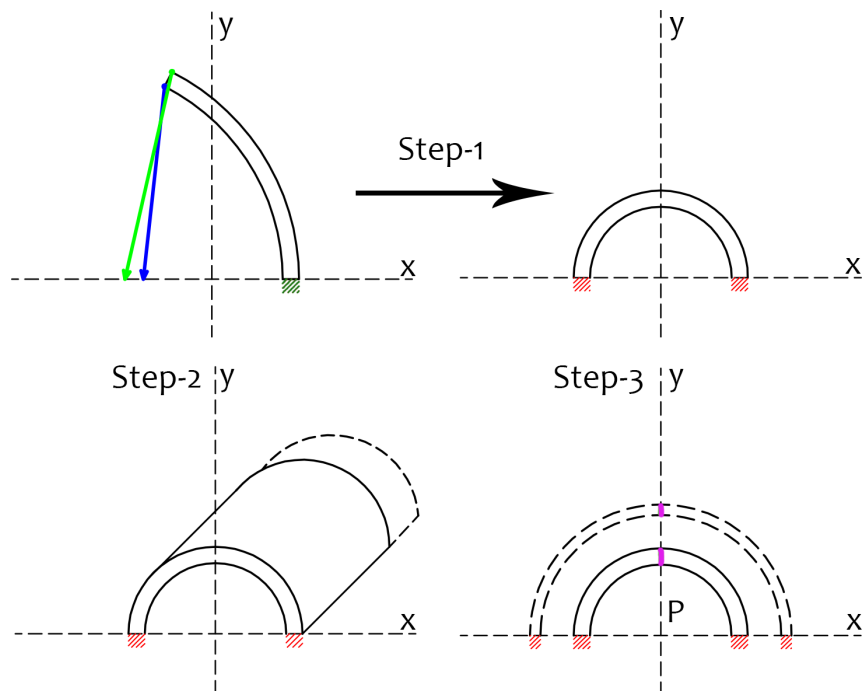


Obrázek 56: Schéma předpokládané deformace v průběhu jednotlivých zatěžovacích kroků pro variantu s jednoduchým posuvem.

tlačítko *Edit* a vypneme nulový posun v ose X a potvrdíme *OK*. Tato změna se promítne i do následujícího kroku *Step-3*. Spodní strana proužku tak má pro *Step-2* a *Step-3* povolený posun v ose X a Z.

Nyní zadefinujeme okrajovou podmínku, která bude držet ohnutou část proužku dole. Příkazem *Create Boundary Condition*, který budeme vkládat do *Step-2* a bude *Mechanical*, typu *Displacement/Rotation*, vybereme horní plochu proužku a potvrdíme *Done*. Zvolíme *Method* na *Fixed at Current Position* a necháme zaškrtnutou pouze možnost *U2*. Tím budeme mít zajištěno, že horní plocha zůstane v pozici na ose Y kam se dostala ve *Step-1* a bude mít možnost se pohybovat ve směru os X a Z. Plocha se tak bude moc natáhnout vlivem axiálního protažení a i se posunovat ve směru osy X vlivem tlakování.

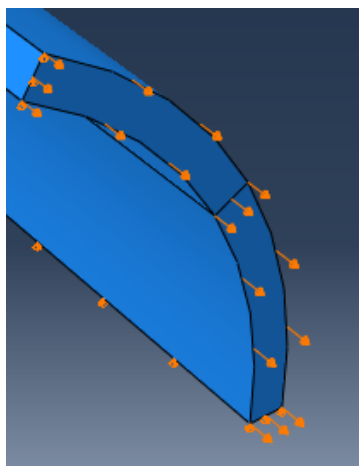
Dále deaktivujeme kinematické podmínky, které jsme zadefinovali ve *Step-1*, protože jsme je nahradili předešlou podmínkou. Otevřeme *Boundary Condition Manager* a označíme okrajovou podmínku ze *Step-1* a ve *Step-2* klikneme na tlačítko *Deactivate*. Pokud jsme podmínku deaktivovali nebude aktivní ani v následujícím



Obrázek 57: Schéma předpokládané deformace v průběhu jednotlivých zatěžovacích kroků pro variantu s posuvem do tvaru půlkruhu.

kroku *Step-3*.

Teď si zdefinujeme vliv axiálního protažení. K tomu budeme potřebovat zafixovanou zadní stěnu proužku ve směru osy Z . Příkazem *Create Boundary Condition* vložíme okrajovou kinematickou podmínku do kroku *Step-2*, bude *Mechanical*, typu *Displacement/Rotation*. Vybereme plochy na zadní straně proužku a potvrdíme *Done*. Zaškrtneme možnost *U3* a nastavíme hodnotu 0. Dále přední stěně zdefinujeme pohyb, který vyvolá axiální protažení. Opět příkazem *Create Boundary Condition* budeme vkládat kinematickou podmínku do kroku *Step-2*, která bude *Mechanical* typu *Displacement/Rotation*. Vybereme plochy na přední straně proužku, potvrdíme tlačítkem *Done* a zaškrtneme možnost *U3* a zadáme velikost axiálního posuvu. V našem případě pracujeme s axiálním protažením o 14% tedy o hodnotu 2.8 [mm]. Vyvození axiálního posuvu nám opět indikují oranžové šipky, viz obrázek (58).



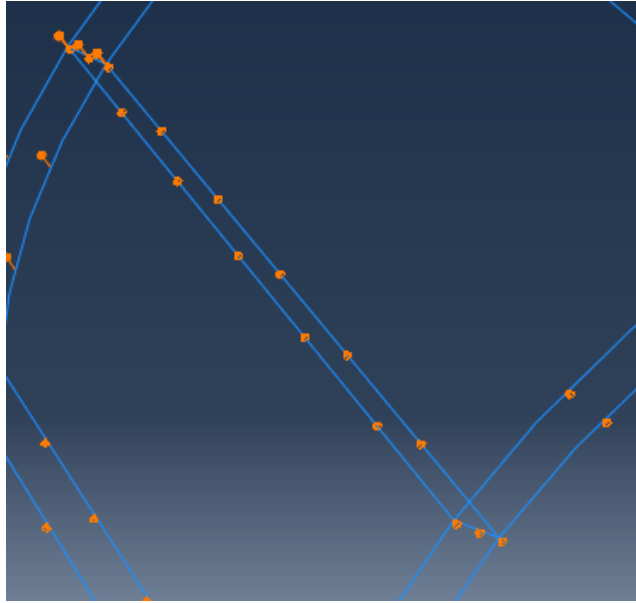
Obrázek 58: Zobrazení axiálního posuvu na přední straně proužku

9.7.2 Tlakování - Step-3

Ve třetím kroku už nastavíme pouze dodatečnou stabilizaci, aby zavřený proužek při tlakování necestoval pracovním prostorem. A velikost vnitřního tlaku, který bude působit na vnitřní straně proužku.

Začneme stabilizací, z tohoto důvodu jsme si proužek v sekci 9.5.1 rozdělili na dvě poloviny, nyní když je proužek uzavřený měla by plocha mezi jednotlivými polovinami souhlasně s rovinou YX. Zdefinujeme jí tedy nulový posun ve směru osy X. Provedeme to příkazem *Create Boundary Condition*, který budeme vkládat do kroku *Step-3* a bude *Mechanical*, typu *Displacement/Rotation*. Protože nemůžeme vybrat celou plochu, označíme její hrany a potvrdíme *Done*. Zaškrtneme možnost *U1* a zadáme hodnotu 0. Na hranách se nám tak zobrazí malé oranžové trojúhelníky, které vyznačují nulový posun v jedné z os v tomto případě X, viz obrázek (59).

Nyní zadáme hodnotu tlaku, který bude působit na vnitřní stěnu proužku. Příkazem *Create Load*, který vložíme do *Step-3* bude *Mechanical* typu *Pressure*. Vybereme plochy na vnitřní straně proužku, potvrdíme *Done* a zadáme hodnotu tlaku. V našem případě 0.016 [MPa]. Tlakové zatížení nám indikují fialové šipky směřující na vnitřní plochy proužku, viz obrázek (60).



Obrázek 59: Stabilizace proužku pro tlakování

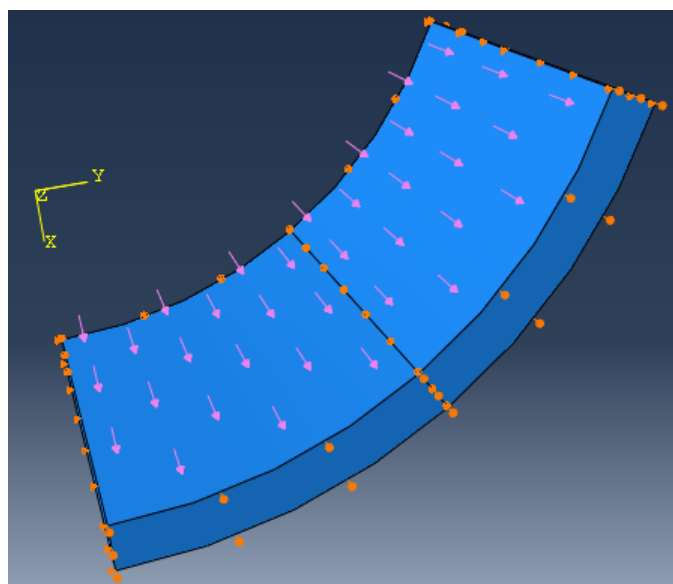
9.8 Stabilizace úlohy na čelní a zadní straně proužku

Další možností jak úlohu stabilizovat v průběhu tlakování je vetknout jí na čelní a zadní straně proužku. Toto vetknutí způsobí, že v tomto místě nebude docházet k deformaci a tak se proužek na čelní a zadní straně nebude nafukovat. Proto je nutné ho vytvořit dostatečně dlouhý, aby oblast, která bude touto okrajovou podmínkou ovlivněna nebyla přes celou délku proužku.

Úloha bude realizována podle předešlých kroků, avšak délka proužku nebude 20 [mm], ale 50 [mm]. Geometrii proužku pak není nutné dělit na dvě poloviny. Ve *Step-3* pak na čelní a zadní straně nastavíme kinematickou okrajovou podmínku za pomoci *Create Boundary Condition*, bude *Mechanical* typu *Displacement/Rotation*, postupně vybereme čelní a zadní stěnu proužku a vybereme možnost *Hold at current position* a zaškrtneme možnost *U1* a *U2*. Ty nám zajistí vetknutí ve směru os X a Y.

9.9 Načtení předpětí pomocí předdefinovaného pole

Další možností jak provést inflaci a extenzi v dalším modelu, do kterého vneseme hodnoty napětí vzniklé zavíráním proužku pomocí předdefinovaného pole - *Predefined Field*. Postup pro nadefinování této úlohy je popsán v manuálu k softwaru



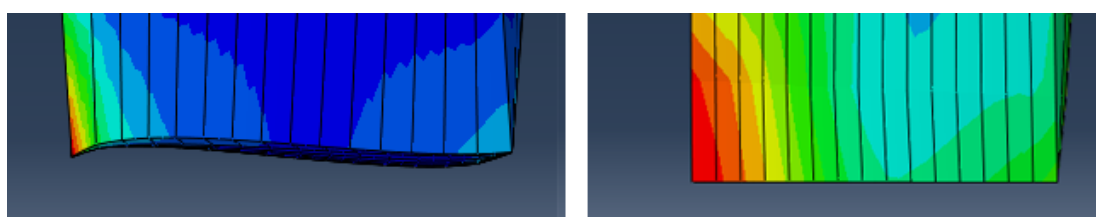
Obrázek 60: Fialové šipky indikující tlakové zatížení

Abaqus a to v kapitolách:

16.11.3 Defining an initial stress [21]

34.2.1 Initial conditions in Abaqus/Standard and Abaqus/Explicit [22]

Vzhledem k tomu, že tato úloha bude rozdělena do dvou v podstatě samostatných úloh je vhodná zejména pro varianty, kde předpětí do tepenného proužku vnášíme pomocí momentu (sekce 9.6.2), nebo kinematickým posuvem (sekce 9.6.6), který jsme zadali velikostí úhlu. Protože pro tyto úlohy jsme vrchní stranu propojili pomocí *Constraint* s řídicím bodem *Reference Point*. Toto spojení způsobilo, že se vrchní strana nedeformuje a po uzavření jsou všechny její body v jedné rovině, viz obrázek (61). Pro úlohy, kde jsme jednotlivých hranám definovali kinematický posuv dojde vždycky k částečnému vytažení této hrany z původní plochy, viz obrázek (61).



Obrázek 61: Levá (vrchní) strana proužku po uzavření kinematickou okrajovou podmínkou, posuvem (vlevo) a úhlem (vpravo)

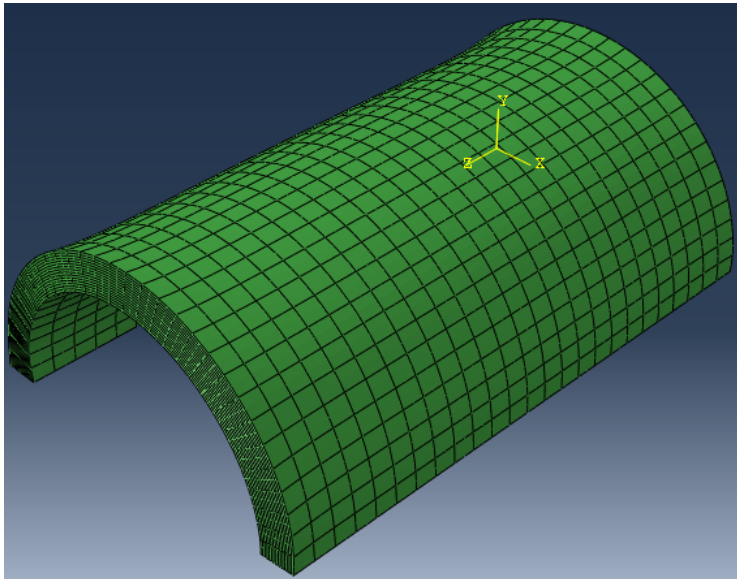
9.9.1 Založení nového Modelu

Druhou úlohu budeme modelovat v rámci jednoho *.cae souboru. V horní nabídce *Model* vybereme *Create* a potvrdíme *OK*.

9.9.2 Načtení geometrie z *.odb souboru

Začneme tím, že načteme geometrii z výsledného *.odb souboru úlohy kde jsme do proužku vnášeli předpětí jeho uzavřením. V horní nabídce *File* vybereme *Import* → *Part* v okně přepneme typ souboru na *Output Database (*.odb*)* a vybereme *.odb soubor, ze kterého chceme načíst geometrii. Vybereme *Instance* název součásti (defaultně Part-1), v kolonce *Part Name* zadáme stejný název součásti jako v úloze ze které načítáme geometrii, protože dle manuálu to Abaqus pro správné fungování této úlohy vyžaduje¹ [22].

Vybereme, že chceme naimportovat zdeformovanou součást, vybereme *Step-1*, poslední increment a potvrdíme *OK*. V pracovním prostoru tak vidíme tmavě zelenou geometrii uzavřeného proužku včetně meshe, viz obrázek (62).



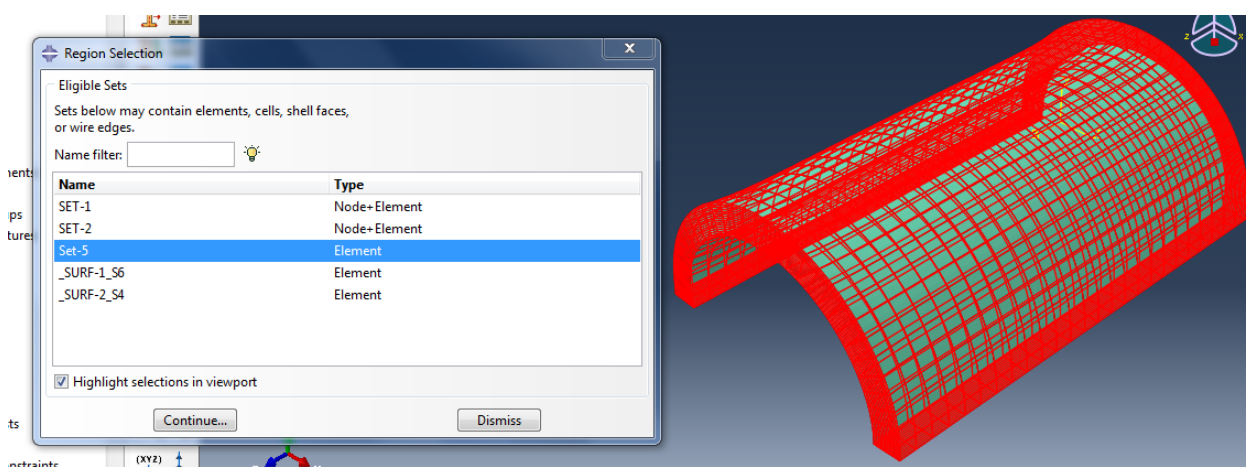
Obrázek 62: Zobrazení geometrie součásti načtené z *.odb souboru

¹Pokud jméno součásti nesouhlasí, nebude souhlasit ani jméno *Instance* a Abaqus bude při spuštění úlohy vypisovat následující chybovou hlášku "Unknown instance name: ..."

9.9.3 Materiál součásti

Materiál zadefinujeme stejně jako v sekci 9.4.2.

Dále zadefinujeme materiálovou orientaci budeme definovat pomocí setů, které si program Abaqus vytváří, jsou to plochy a oblasti součásti. Začneme příkazem *Assign Material Orientation* v pravo dole klikneme na tlačítko *Sets* a ve vyskočeném okně vybereme ten set, kterému jsme přiřadili materiál a který se skládá pouze z elementů. Můžeme si zaškrtnout možnost *Highline selections in Viewport* a Abaqus nám červeně vyznačí prvky, které jsou v setu obsaženy, viz obrázek (63). Dále po-



Obrázek 63: Zobrazená oblast, která náleží Setu-5

kračujeme s určením materiálové orientace stejně jako v sekci 9.4.2, s tím rozdílem, že plochy vybíráme ze Setů, které byly definovány v předešlé úloze a směr osy Z vybereme na hraně proužku. Použití Setů z předešlé úlohy by mělo zajistit souhlasnou materiálovou orientaci s předchozí úlohou.

9.9.4 Sestava

Nyní součást uzavřeného proužku vložíme do sestavy stejně jako v sekci 9.4.3.

9.9.5 Vytvoření zatěžovacích kroků

Zadefinujeme si tři kroky *Step-1*, *Step-2* a *Step-3*, které budou následovat jeden po druhém. Všechny budou *Static, General*, budou mít zapnutou *Nlgeom* a automa-

tickou stabilizaci stejně jako v sekci 9.4.4.

První krok *Step-1* bude sloužit k ověření rovnovážného stavu a pokud by nebyl přítomný tak k iterování, aby byl nalezen [22]. Nastavíme proto hrubější krok, který by měl být k případnému hledání rovnovážného stavu dostatečný. Počáteční velikost kroku *Initial* nastavíme na hodnotu 0.1, minimální *Minimum* na $1E - 05$ a maximální *Maximum* na 0.2. Maximální počet incrementů ponecháme na defaultní hodnotě 100.

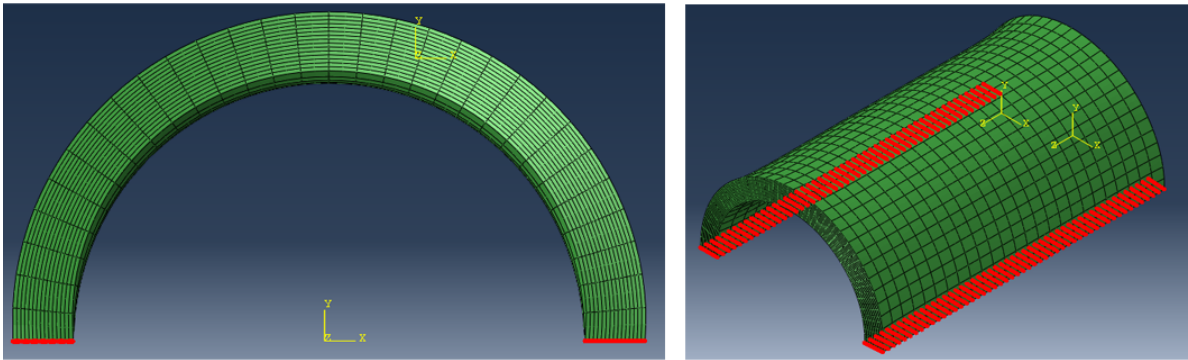
Ve druhém kroku *Step-2* zadefinujeme podmínky, které budou použity pro axiální protažení uzavřeného proužku. Vzhledem k tomu, že tuto kinematiku budeme zadávat kinematicky krok nemusí být příliš jemný. Počáteční velikost kroku *Initial* tak nastavíme na 0.05, minimální *Minimum* ponecháme na $1E - 05$ a maximální *Maximum* krok nastavíme na 0.1.

Třetí krok *Step-3* bude sloužit k natlakování trubice, protože je tato úloha náročnější zvolíme jemnější krok. počáteční velikost kroku *Initial* tak nastavíme na 0.0025, minimální *Minimum* ponecháme na $1E - 07$ a maximální *Maximum* krok nastavíme na 0.1. Také zvedneme maximální počet incrementů na 2000.

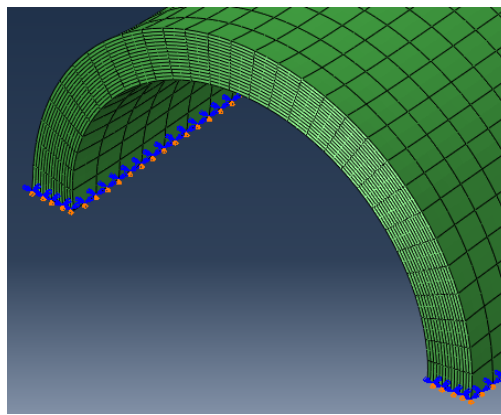
9.9.6 Nastavení zatížení

Začneme nastavením počátečních okrajových podmínek. Příkazem *Create Boundary Condition*, který budeme vkládat do kroku *Initial* a bude *Mechanical* typu *Symmetry/Antisymmetry/Encastre* a potvrdíme *Continue*. Protože jsme materiál zadávali pomocí setů, musíme nyní přepnout zadávání opět na *Select in Viewport*. Vypneme symetrii *Turn Perspective Off* symbolem kolejí v horní liště a natočíme si součást tak, abychom se dívali kolmo na rovinu YX. Tahem myši vybereme prvky na spodní straně, viz obrázek (64). Výběr bodů potvrdíme tlačítkem *Done*, zadáme symetrii podle osy Y *YSYMM* a potvrdíme *OK*. Nastavenou symetrii nám potvrzují modro oranžové trojúhelníky, viz obrázek (65). .

Stejným způsobem zadefinujeme i počáteční okrajovou podmínku na zadní stranu proužku, kam ovšem nastavíme nulový posun ve směru osy Z. Příkazem *Create Boun-*



Obrázek 64: Vybrané body pro nastavení symetrie (červeně)



Obrázek 65: Modré a oranžové trojúhelníky potvrzující nastavení symetrie

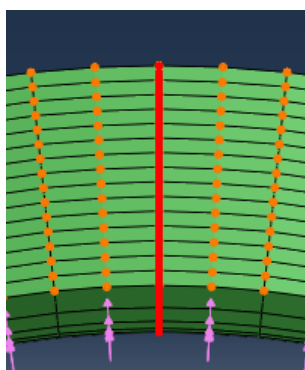
dary Condition vložíme do *Initial* Mechanickou okrajovou podmínku typu *Displacement/Rotation* a tahem myši vybereme prvky na zadní straně. Potvrdíme tlačítkem *Done* a zaškrtneme možnost *U3*.

Protože *Step-1* je vyhrazený pro nalezení rovnovážného stavu budeme axiální posun zanášet až do *Step-2*. Opět pomocí příkazu *Create Boundary Condition, Mechanical* typu *Displacement/Rotation*. Tahem myši vybereme prvky na čelní stěně, výběr potvrdíme tlačítkem *Done* a ve směru osy *Z* zadáme požadovaný posun. V našem případě 2.8 [mm]. Její zadání bude zobrazeno pomocí oranžových šipek.

Ve *Step-3* si zadefinujeme tlakování pomocí příkazu *Create Load*, bude *Mecanical* typu *Pressure*. Plochu na kterou budeme vyvíjet tlakové zatížení vybereme opět pomocí *Setu*, který jsme si zadefinovali v minulé úloze. Vyhneme se tak tím označování jednotlivých ploch všech elementů na vnitřní straně. Výběr potvrdíme tlačítkem

Continue a zadáme hodnotu tlaku, v našem případě 0.016 [MPa]. Tlaková síla je zobrazena pomocí fialových šipek.

Dále si do *Step-3* zadefinujeme okrajovou podmínku, která nám bude stabilizovat úlohu v průběhu tlakování, aby "necestovala" pracovním posuvem. Příkazem *Create Boundary Condition*, vložíme kinematickou okrajovou podmínku do *Step-3*, bude *Mechanical* typu *Displacement/Rotation*. Na horní straně oblouku vybereme tahem myši prvky, které míří do osy půlkruhu, viz obrázek (66). Potvrdíme *Done*, pro osu X zadáme hodnotu 0 a potvrdíme *OK*.²



Obrázek 66: Zobrazení vybraných prvků pro stabilizaci v průběhu tlakování

9.9.7 Zanesení předdefinovaného pole

Nyní si popíšeme jak do úlohy vneseme předpětí pomocí příkazu *Create Predefined Field*, který vložíme do stepu *Initial* a bude *Mechanical* typu *Stress*, potvrdíme *Continue*. Oblast do které toto předpětí vneseme vybereme pomocí *Setu*. Možnost *Specification* přepneme z *Direct specification* na *From output database file* a zobrazí se nám nabídka ve které specifikujeme ze kterého *.odb souboru budeme hodnoty načítat. Dále ze kterého *Stepu* a *Incrementu*. Do kolonek *Step* a *Increment* vyplňujeme pouze číselné hodnoty, tedy 1 pro *Step-1* apod. A potvrdíme tlačítkem *OK*

²Vzhledem k tomu, že jsme do kroku *Initial* vložili počáteční okrajovou podmínku symetrií nad oběma konci uzavřeného proužku naráz, je možné, že by tato dodatečná stabilizace nebyla nutná.

9.9.8 Síť

V tomto případě je *Mesh* součástí načten z předcházející úlohy a není možné jej upravovat.

9.9.9 Materiálová orientace

Dále zapíšeme hodnoty materiálové orientace, viz sekce 9.4.7.

9.9.10 Job

A zdefinujeme parametry výpočtu úlohy.

10 Vyhodnocení výsledků MKP výpočtů

V této kapitole, zhodnotíme a okomentujeme výsledky, které jsme získali pomocí MKP výpočtů. Výsledky MKP výpočtů porovnáme s výsledky analytickými, abychom ověřili jejich správnost.

10.1 Transformace kartézských souřadnic na válcové

Module Visualization Protože výsledky MKP výpočtů jsou v základním tedy kartézském souřadném systému, je nutné je transformovat do systému válcových souřadnic, aby je bylo možné porovnat s výsledky analytického výpočtu.

Nejdříve si ve vizualizaci vytvoříme válcový souřadnicový systém. Příkazem *Create Coordinate System*, který bude *Fixed* a válcový tedy *Cylindrical*, potvrdíme *Continue*. Klávesou Enter potvrdíme, že nový souřadný systém bude mít počátek v bodě $[0, 0, 0]$, dále vybereme kliknutím myši bod který bude ležet na ose R a nakonec opět kliknutím myši bod, který bude náležet rovině $R - \theta$.

Když máme vytvořený válcový souřadnicový systém. Klikneme v horní nabídce na *Results*, vybereme *Options* a v záložce *Transformation* vybereme typ *User - specified*. Z nabídky potom vybereme vytvořený souřadnicový systém, který se nám v okně zobrazí červeně. A potvrdíme *OK*. To, že máme hodnoty transformované

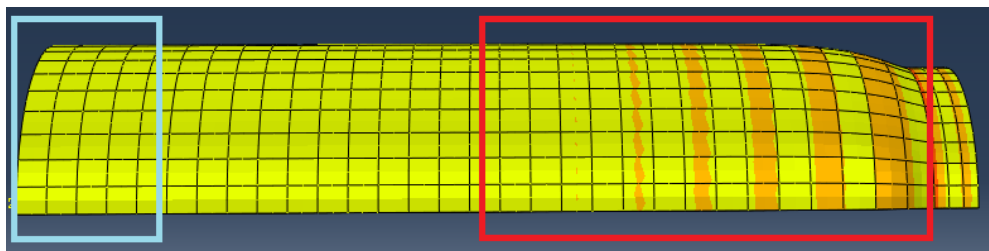
do nového souřadného systému si ověříme tak, že když si z nabídky vybereme napětí $S11$, $S22$, ... bude v okně anotací za názvem napětí v závorce uveden i název souřadného systému.

10.2 Výsledky z inflačně extenzního výpočtu uzavřené trubice

V této části zhodnotíme výsledky inflačně extenzního výpočtu, který byl použitý pro kontrolu správného nastavení materiálového modelu a materiálové orientace.

Nejdříve si výsledky transformuje do válcového souřadného systému, viz sekce 10.1.

U MKP výpočtů je velmi důležité správně vybrat oblast odkud budeme brát data, které budeme následně analyzovat. Protože některá místa mohou být ovlivněny nastavenými okrajovými podmínky a data v nich jsou tím pádem nepřesná. Na obrázku



Obrázek 67: Výsledky MKP výpočtu inflace a extenze válcové trubice

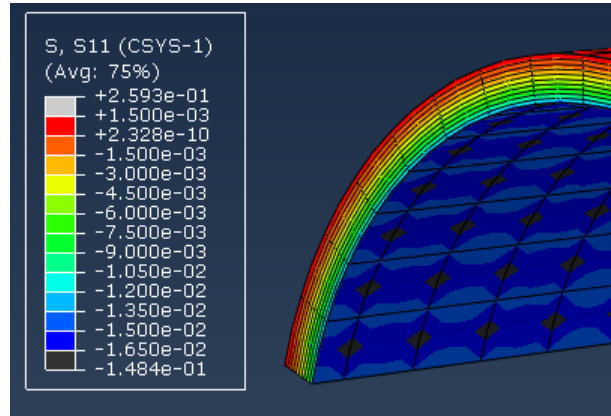
(67) máme vyobrazené výsledky z výpočtu inflace a extenze válcové trubice. Červeným obdélníkem je vyznačená oblast, která je ovlivněná tím, že dno trubice bylo z oceli a nemohlo se nafukovat společně s trubicí. Světle modrým obdélníkem je vyznačená oblast, která je ovlivněná vlivem okrajové podmínky na volném konci trubice. Výsledky pro kontrolu tedy budeme vybírat z oblasti, která je mezi nimi. Navíc protože i na spodní straně trubice máme zadanou okrajovou podmínku budeme brát data z horní části oblouku.

Pro orientační zjištění hodnot stačí barevné mapy v programu Abaqus, je však nutné správně nastavit jejich meze, aby se odfiltroval vliv okrajových podmínek atd. Na obrázku (68) můžeme vidět rozložení napětí σ_{rr} po tloušťce stěny. Vidíme, že na vnitřním poloměru je hodnota σ_{rr} o něco nižší než $-1.65E - 02$ tedy -0.0165 [MPa].

Na vnějším okraji je hodnota σ_{rr} rovna $+2.328E - 10$ a je tedy téměř nulová. Hodnoty tedy splňují okrajové podmínky:

$$\sigma_{rr}(r_i) = -P \quad (95)$$

$$\sigma_{rr}(r_o) = 0 \quad (96)$$



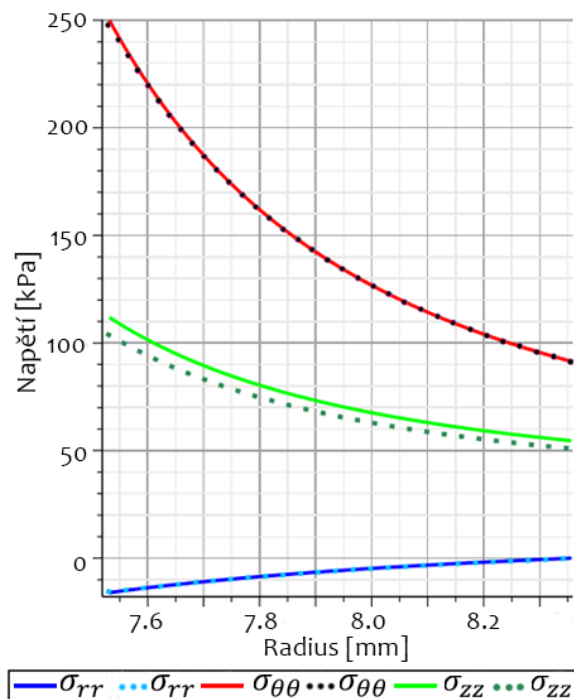
Obrázek 68: Vizualizace hodnot σ_{rr} při inflačně extenzním testu

10.2.1 Export dat z modelu

Přesné hodnoty napětí po tloušťce stěny si vyexportujeme z Abaqusu a načteme je do programu Maple, kde si je přímo porovnáme s analytickým výpočtem. Pomocí příkazu *Activate/Deactivate View Cut* si odřízneme nepotřebnou část. Pomocí *Tools* → *Path* → *Create* si vytvoříme cestu po tloušťce stěny. Na horním oblouku si naklikáme v uzlových bodech cestu z vnitřního poloměru směrem k vnějšímu. Z těchto bodů si necháme vyexportovat data, pomocí *Tools* → *XY Data* → *Create*. Data budeme vytvářet na základě vytvořené *Path*, v okně pak vybereme ze kterého *Stepu* a *Incrementu* budeme data brát. Tlačítkem *Field Output* budeme volit hodnoty, které budeme chtít exportovat. Vytvořená data pak vyexportujeme z horní nabídky vybereme *Report* → *XY*, v okně si vybereme data, která chceme vyexportovat a záložce *Setup* si pojmenujeme název souboru, do kterého budou data uložena a vypneme možnost *Append to file*. Pak už máme data vyexportovaná do textového souboru.

10.2.2 Porovnání s analytickým modelem

Vyexportovaná data si upravíme tak abychom je mohli načíst do programu Maple. A necháme si je vykreslit do grafu společně s daty z analytického výpočtu, abychom je mohli porovnat. Porovnání vidíme na obrázku (69). Na obrázku máme vyznačené



Obrázek 69: Porovnání výsledků analytického modelu inflace a extenze s MKP modelem

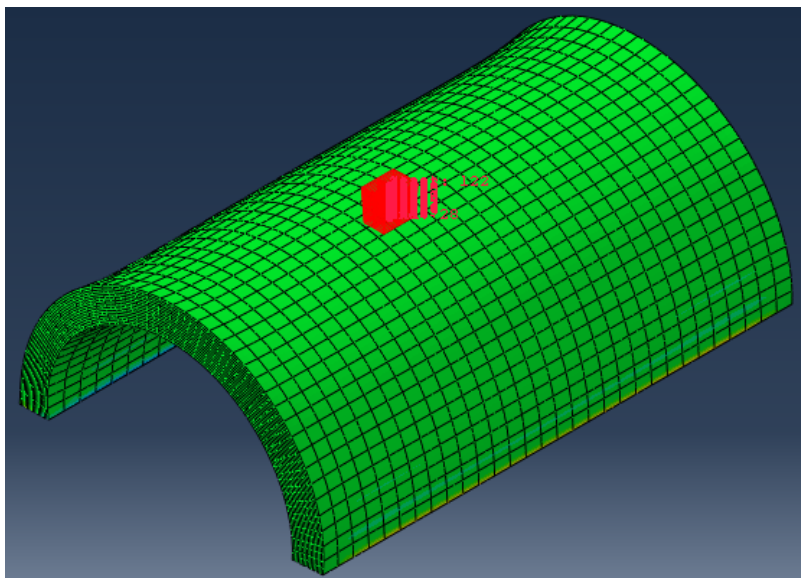
napětí v jednotlivých směrech, plnou čarou jsou vyznačené výsledky z analytického modelu a tečkovanou čarou výsledky z MKP modelu. Vidíme, že napětí se shodují, pouze axiální napětí má odchylku, která je na vnitřním průměru 10% a směrem k vnějšímu průměru se dále zmenšuje.

Z výsledků vidíme, že se nám povedlo správně nastavit materiál i jeho orientaci a můžeme tak nastavovat i další MKP úlohy.

10.3 Výsledky vnášení předpětí uzavíráním rozevřeného proužku

V této sekci zhodnotíme jednotlivé metody vnesení předpětí do MKP modelu. Data byla načítána pro všechny varianty ze stejného místa a to z prostředku proužku

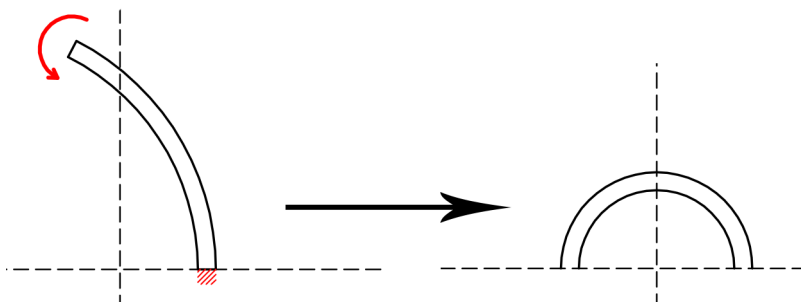
na vrcholu oblouku, viz obrázek (70).



Obrázek 70: Zobrazení místa ze kterého byla brána data pro zhodnocení výsledků

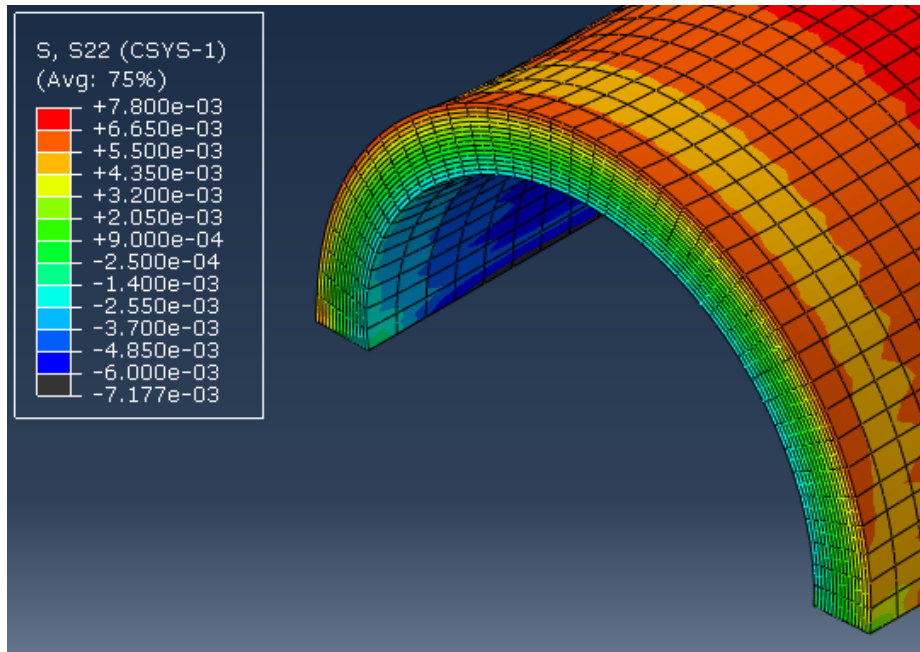
10.3.1 Vnesení předpětí působením momentu

Zatížení momentem nám proužek uzavře do kruhového tvaru, to je schématicizováno na obrázku (71). Na obrázku (72) máme zároveň i zobrazenou barevnou mapu



Obrázek 71: Schéma realizované deformace při zatížení momentem

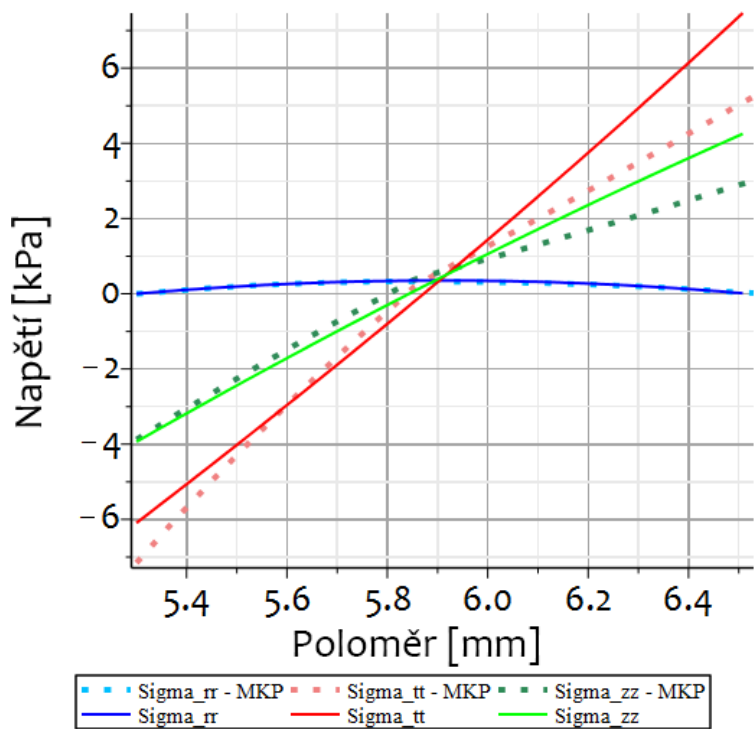
rozložení obvodového napětí po tloušťce stěny. Na první pohled můžeme na barevné mapě vidět, že rozložení napětí odpovídá realitě. Na vnitřním poloměru máme vlákna tlačena (modře) a na vnějším poloměru vlákna tažená (oranžová/červená). Data jsme načetli do programu Maple, abychom je mohli porovnat s výsledky z analytického modelu. Na obrázku (73), můžeme vidět rozložení napětí po tloušťce stěny. Vidíme že na vnitřním poloměru všechna napětí odpovídají analytickému výpočtu.



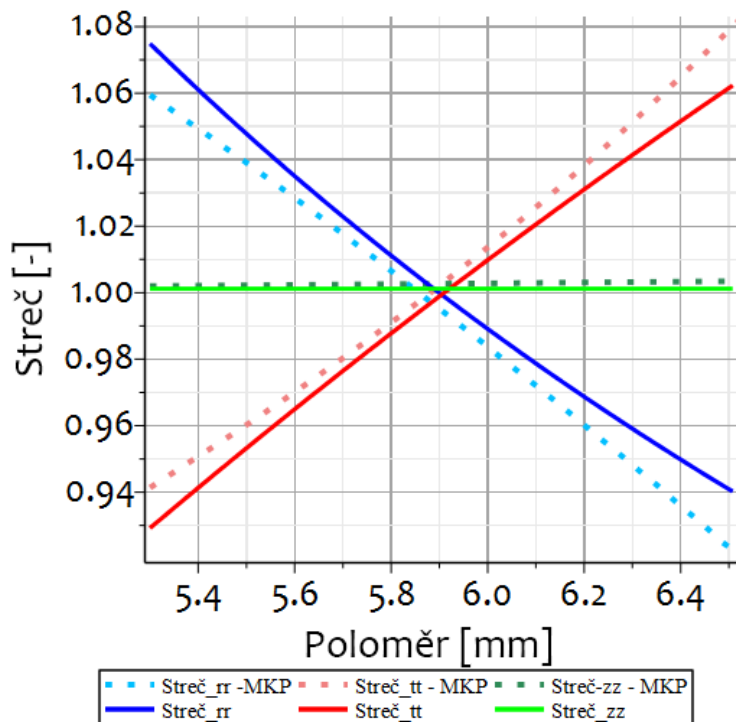
Obrázek 72: Rozložení napětí $\sigma_{\theta\theta}$ po tloušťce stěny při zavírání momentem

Za polovinou tloušťky stěny se ovšem hodnoty obvodového napětí $\sigma_{\theta\theta}$ a axiálního napětí σ_{zz} se směrem k vnějšímu poloměru začínají odchylovat od analytického řešení.

Dále si zobrazíme hodnoty strečů, které vznikly působením momentu. Na obrázku (74), můžeme vidět rozložení strečů po tloušťce stěny. Na obrázku je vidět, že radiální streč je v MKP výpočtu celkově nižší, než v analytickém výpočtu. Naopak obvodový streč vyšel v MKP výpočtu vyšší než ve výpočtu analytickém a to po celé tloušťce stěny. Axiální streč je drobně vyšší nad očekávanou hodnotou 1, to bude nejspíš způsobeno prohnutím uzavřeného proužku, které nejspíš vyvolává streč i v axiálním směru.



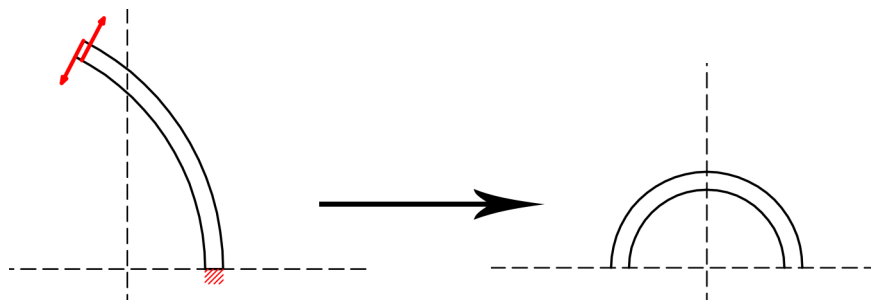
Obrázek 73: Rozložení napětí po tloušťce stěny vyvolané momentem



Obrázek 74: Porovnání strečů po uzavření proužku momentem

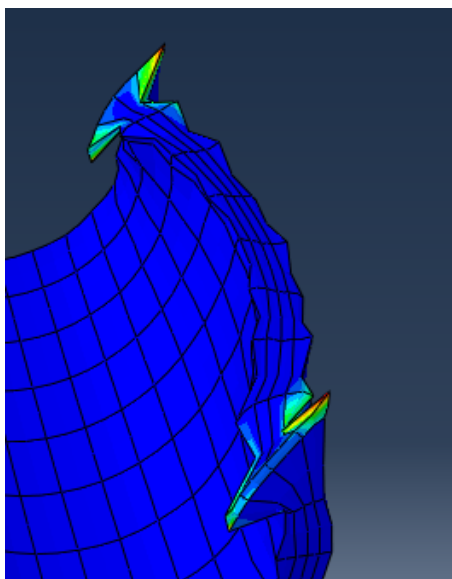
10.3.2 Vnesení předpětí silovým působením dvojice sil

Na obrázku (75) je schématicizována deformace proužku pomocí dvojice sil. Po doběhnutí



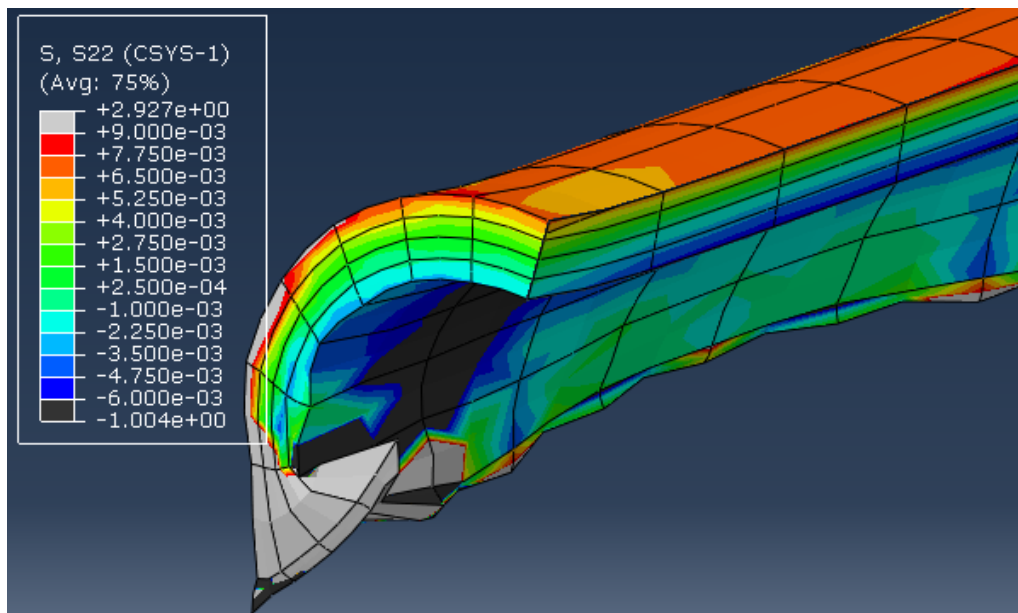
Obrázek 75: Schéma realizované deformace pomocí dvojice sil

MKP výpočtu a zobrazení výsledků se tato metoda ukázala jako nepříliš šťastná. Vlivem působení sil došlo k vytažení uzlů a zdeformování geometrie proužku, viz obrázek (76). Nicméně po odfiltrování vysokých napětí, které vznikaly v místech kde



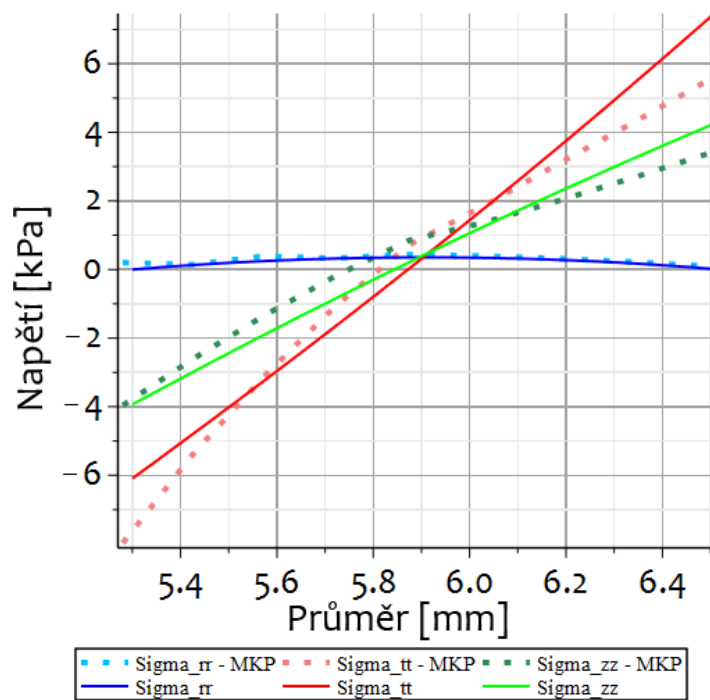
Obrázek 76: Vytažení uzlů vlivem působení sil

došlo k vytažení uzlů ven z proužku, můžeme na obrázku (77) vidět, že základní podmínka vnesení předpětí je i v tomto proužku splněna. Na vnitřním poloměru máme vlákna tlačena (tmavě modře) a na vnějším poloměru máme vlákna tažená (oranžová/červená), na přelomu modrozelené a zelené oblasti pak dochází k nulovému napětí. I oblast s nulovým napětím vychází přibližně do středu proužku. Na obrázku jsou také vidět oblasti ovlivněné velkou deformací kde vznikaly napěťové špičky.

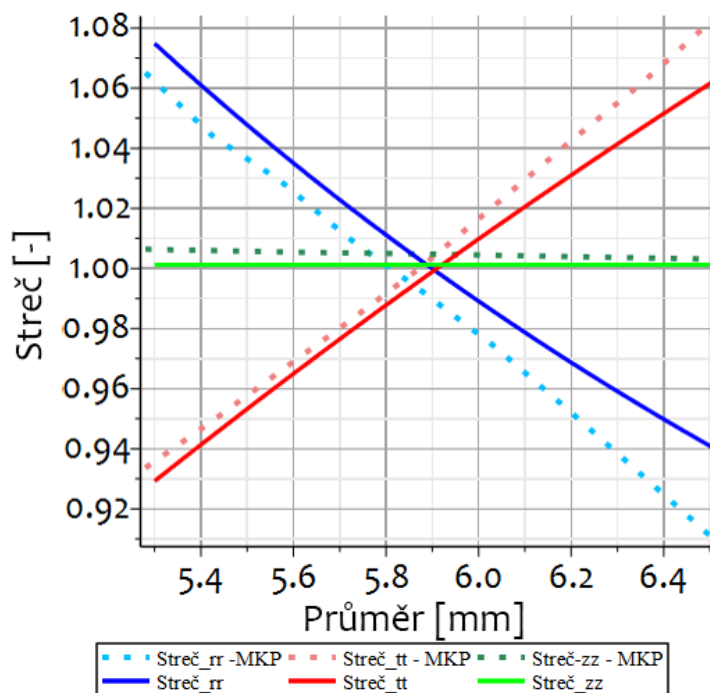


Obrázek 77: Napětí $\sigma_{\theta\theta}$ v proužku uzavíraného pomocí dvojice sil

Z prostřední části zavřeného proužku byla vyexportována data napětí a strečů, které porovnáme s analytickým modelem. Na obrázku (78) tak můžeme vidět rozložení napětí po tloušťce stěny, které bylo vyvolané dvojicí sil. Je vidět, že data se přibližně shodují a výraznější odchylky vznikají směrem k okraji proužku. Dále si porovnáme streče po uzavření proužku. Ty máme zobrazeny na obrázku (79).



Obrázek 78: Porovnání napětí vnesených dvojicí sil s analytickým modelem



Obrázek 79: Porovnání strečů po uzavření poružku dvojicí sil

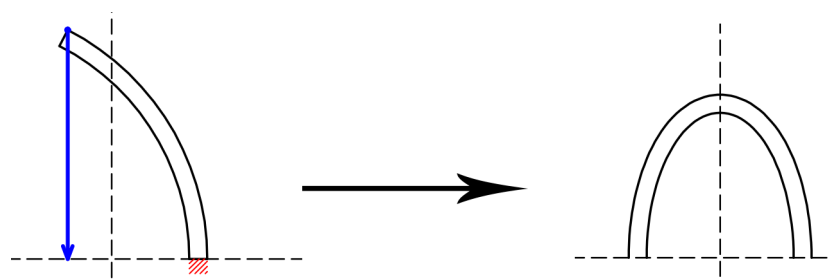
Na obrázku vidíme, že streč v radiálním směru (modře) se směrem k vnějšímu poloměru výrazněji odchyluje od hodnot získaných pomocí analytického modelu. Obvodový streč vykazuje podobné chování, avšak celkově křivka obvodových strečů

z MKP výpočtu více přiléhá ke křivce z analytického výpočtu a je tedy přesnější. Křivka axiálního streče, která by měla zůstat na hodnotě 1, protože v axiálním směru by nemělo dojít k protažení ani zkrácení je na hodnotě 1.05, to bude nejspíš dáno tím, že vlivem zavření proužku v MKP výpočtu dojde k jeho prohnutí, které může vyvolat deformace i v axiálním směru.

Vzhledem k velké deformaci ke které docházelo v místě vetknutí sil, jsou tato data pouze z testovacího modelu na kterém byla nastavená hrubější meshovací síť. Tento model tak sloužil především k ověření správného nastavení okrajových podmínek a velikosti sil, aby došlo k požadovanému uzavření proužku. Protože došlo k vytažení uzlů z meshe, které znemožňují s úlohou dále pracovat. Byla vyhodnocena jako nevhodná a nebyla spočítána s jemnější meshovací sítí, která by mohla zajistit další zpřesnění výsledků.

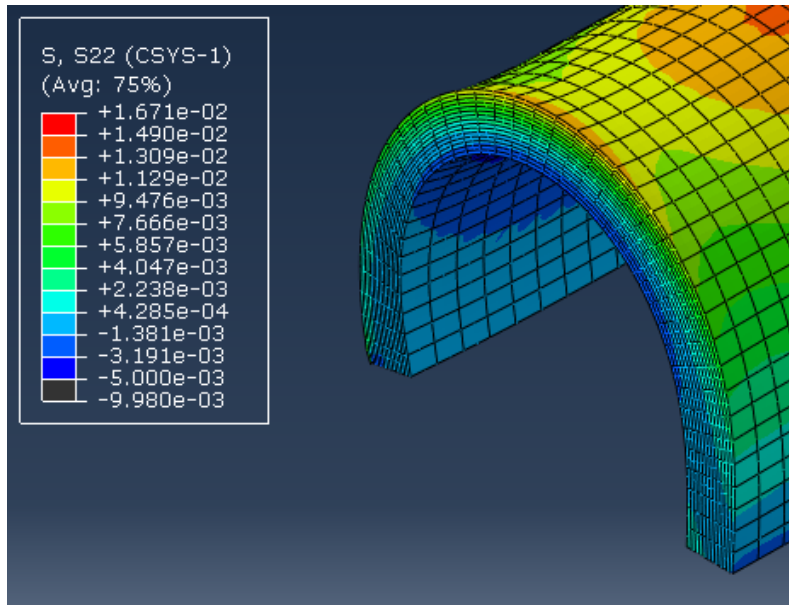
10.3.3 Výsledky vnesení předpětí jednoduchým ohybem

V této sekci budeme vyhodnocovat výsledky z MKP modelu prožku jehož horní hraně jsme zadali kinematickou podmínku posuvu. Horní hranu jsme nechali posouvat přímo dolů, nevznikne tak tvar kruhu, ale přibližně oválu viz. obrázky (80) a (81). Jak můžeme vidět na obrázku (81) rozložení napětí už na první pohled od-



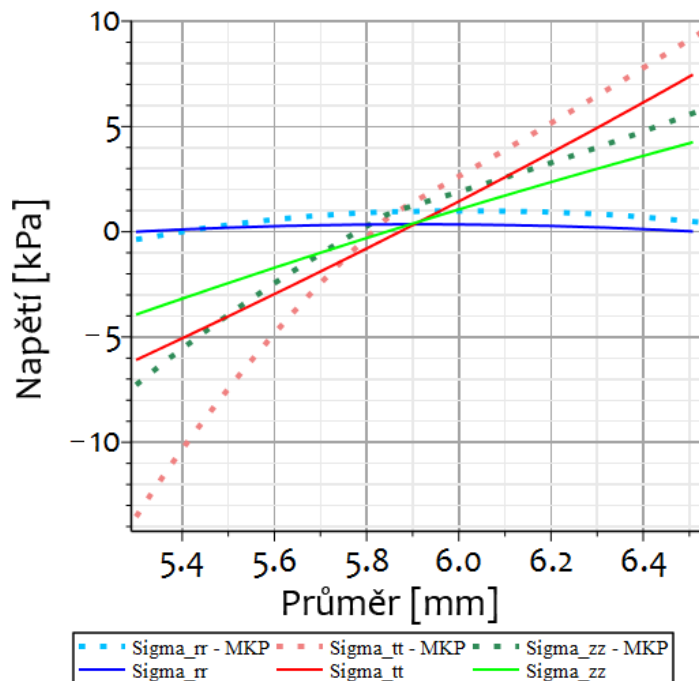
Obrázek 80: Schéma realizované deformace pomocí kinematického posuvu jedné hrany

povídá realitě. Na vnitřním poloměru máme vlákna tlačena a na vnějším poloměru vlákna tažena. Na grafech napětí a strečů uvidíme jak moc se tyto hodnoty budou odlišovat od analytického modelu, který počítal s kruhovým tvarem. Protože vzdálenost od spodní strany proužku ke spodní straně oblouku je 6.29 [mm] a načítaná data by byla posunutá, budeme i ovál idealizovat jako kruh a počítat s vnitřním

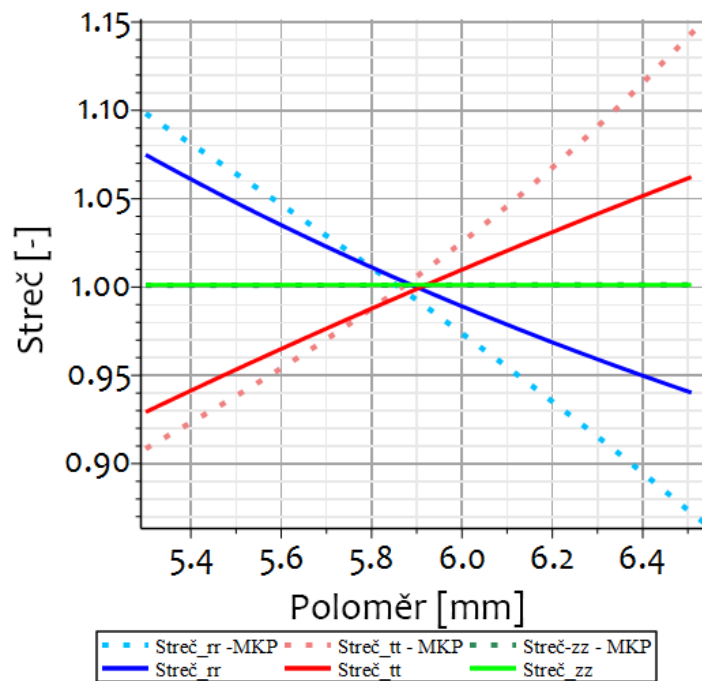


Obrázek 81: Rozložení napětí $\sigma_{\theta\theta}$ v proužku uzavřeného jednoduchým posuvem jedné hrany

poloměrem 5.3 [mm].



Obrázek 82: Napětí po tloušťce stěny vyvolané ohybem do tvaru oválu



Obrázek 83: Streče po tloušťce stěny vyvolané ohybem do tvaru oválu

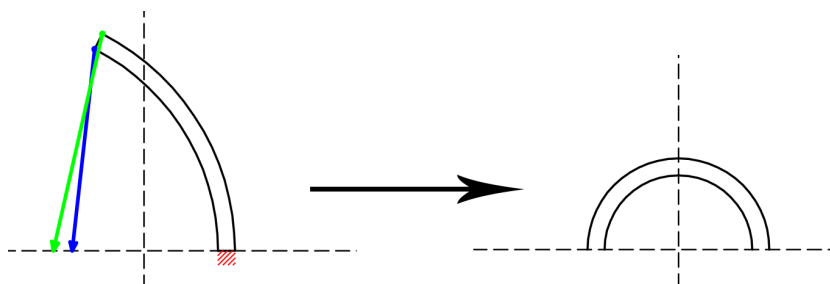
Na obrázku (82) máme zobrazené napětí po tloušťce stěny vyvolané ohybem do tvaru oválu. Vidíme, že napětí jsou větší, než pro případ kruhu, který byl modelován analyticky. Zvýšené napětí je způsobeno tím, že horní oblouk oválu má ostřejší radius než kruh, dojde tam tedy k větší deformaci a tím pádem i ke značně zvýšenému napětí. To je pro obvodový směr $\sigma_{\theta\theta}$ na vnitřním poloměru více jak dvojnásobné. Pro axiální směr σ_{zz} na vnitřním poloměru téměř dvojnásobné. To je způsobeno tím, že na vnitřním poloměru je radius po uzavření ještě menší a musí tak dojít k větší deformaci.

Na obrázku (83) máme zobrazené streče po tloušťce stěny vyvolané ohybem do oválu. Vidíme, že v axiálním směru nedošlo k žádnému, nebo jen velmi malému protažení trubice, protože hodnota axiálního streče je 1 a souhlasí tedy s analytickým modelem. Streče v radiálním a obvodovém směru, už s analytickým modelem nesouhlasí, což bude dáno především ostřejšímu rádiusem uzavření v místě oblouku.

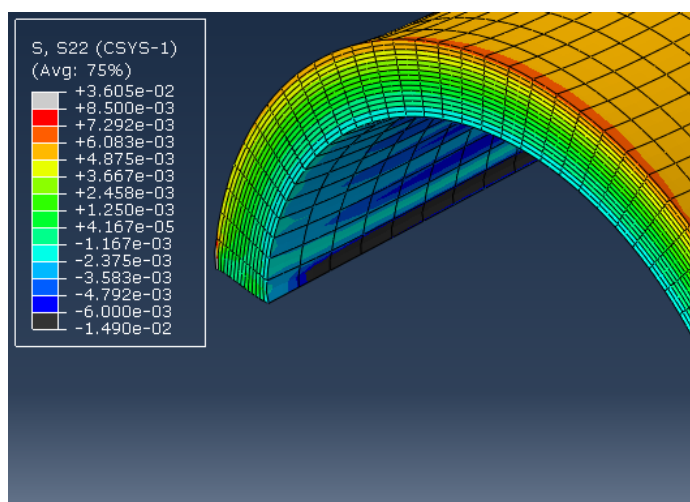
10.3.4 Výsledky vnesení předpětí ohybem do tvaru kruhu

Další variantou jak vnést předpětí do proužku tepenné stěny, bylo zadefinovat kinematický posun na souřadnice, tak aby po uzavření proužek vytvořil půlkruhový

tvar. To můžeme vidět na obrázku (84). Jak můžeme vidět na obrázku (85), roz-



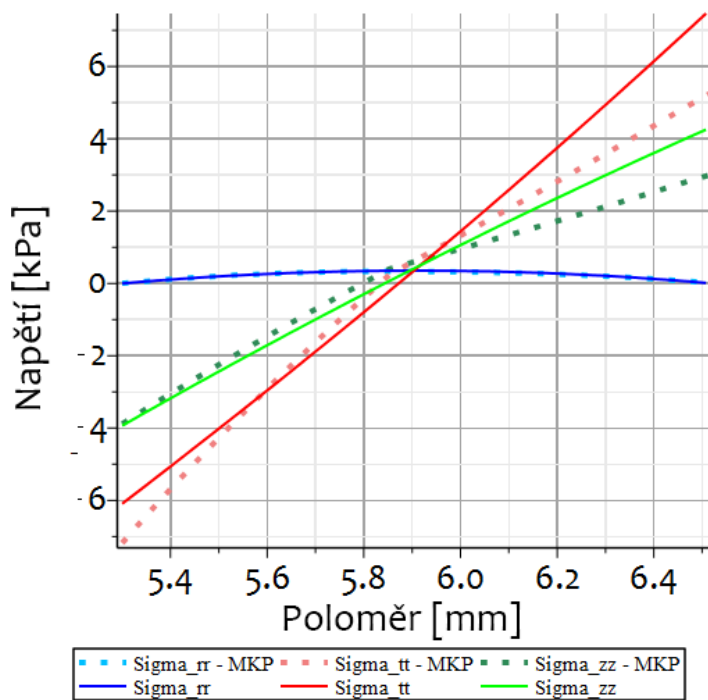
Obrázek 84: Schéma realizované deformace pomocí kinematického posuvu do tvaru půlkruhu



Obrázek 85: Rozložení napětí $\sigma_{\theta\theta}$ v proužku uzavřeného do tvaru kruhu

ložení napětí odpovídá realitě, na vnitřním poloměru máme vlákna tlačena a na vnějším poloměru vlákna tažena. Uvnitř proužku také můžeme vidět šedou oblast, která byla odfiltrována nastavením mezí pro barevnou škálu. Je to místo do kterého byla vnášena kinematická okrajová podmínka, takže zvýšená napětí v tomto místě jsou očekávatelná.

Vyexportovaná data jsme načítali do programu Maple pro porovnání hodnot napětí a strečů po tloušťce stěny. Vzhledem k tomu, že jsme proužek uzavírali přesně do tvaru kruhu sedí i vnitřní poloměr, který se shoduje s analytickým výpočtem na hodnotě $5.3 [mm]$ Na obrázku (86), tak můžeme vidět porovnání rozložení napětí po tloušťce stěny, které je vyvoláno kinematickým posuvem do tvaru kruhu. Je vidět, že narozdíl od ohybu do tvaru oválu na vnitřním poloměru napětí více odpovídá



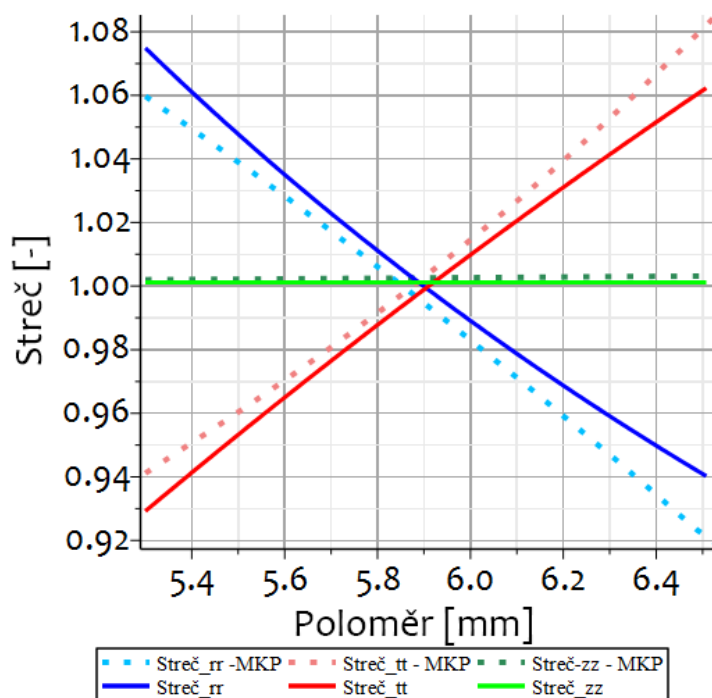
Obrázek 86: Napětí po tloušťce stěny vyvolané ohybem do tvaru kruhu

napětí, které bylo stanoveno výpočtem v analytickém modelu. Pro napětí v axiálním směru σ_{zz} je téměř stejné. Napětí v obvodovém směru $\sigma_{\theta\theta}$ je na vnitřním poloměru odlišné od analytického modelu, pak se směrem ke středu proužku zpřesňuje a poté od středu směrem k vnějšímu poloměru zase znepřesňuje a to velmi výrazně.

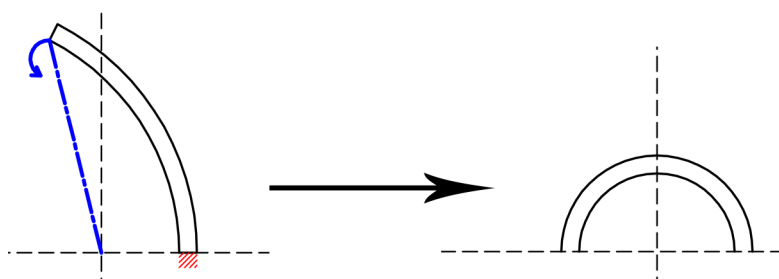
Na obrázku (87) máme vyobrazené streče po tloušťce stěny vyvolané ohybem do tvaru kruhu. Vidíme, že pro radiální směr jsou celkově nižší a to po celé tloušťce stěny. Naopak v tečném směru jsou po celé tloušťce vyšší, než analytický výpočet. Drobnou odchylku můžeme také vidět ve streči v axiálním směru, která se navíc směrem k vnějšímu poloměru zvyšuje, tato odchylka opět bude nejspíš daná prohnutím proužku v průběhu ohybu, který vyvolá drobné posuvy v axiálním směru.

10.3.5 Výsledky vnesení předpětí rotací o úhel

Poslední variantou jak vnést předpětí do tepenné stěny bylo uzavírání rozevřeného proužku zadáním rotace o úhel. To máme schématicizováno na obrázku (88). Jak můžeme vidět na základě barevné mapy zobrazené na obrázku (89), napětí $\sigma_{\theta\theta}$ od-



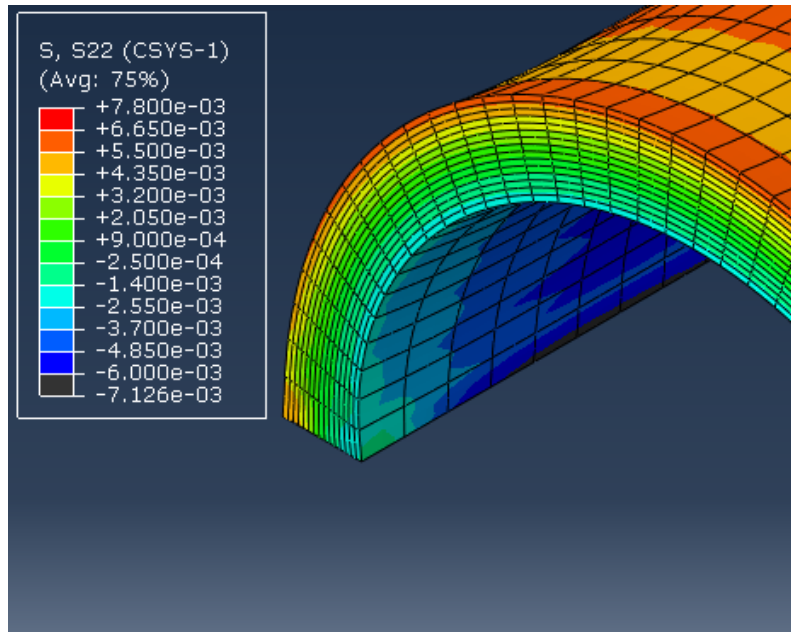
Obrázek 87: Streč po tloušťce stěny vyvolaný ohybem do tvaru kruhu



Obrázek 88: Schéma realizované deformace pomocí rotace o úhel

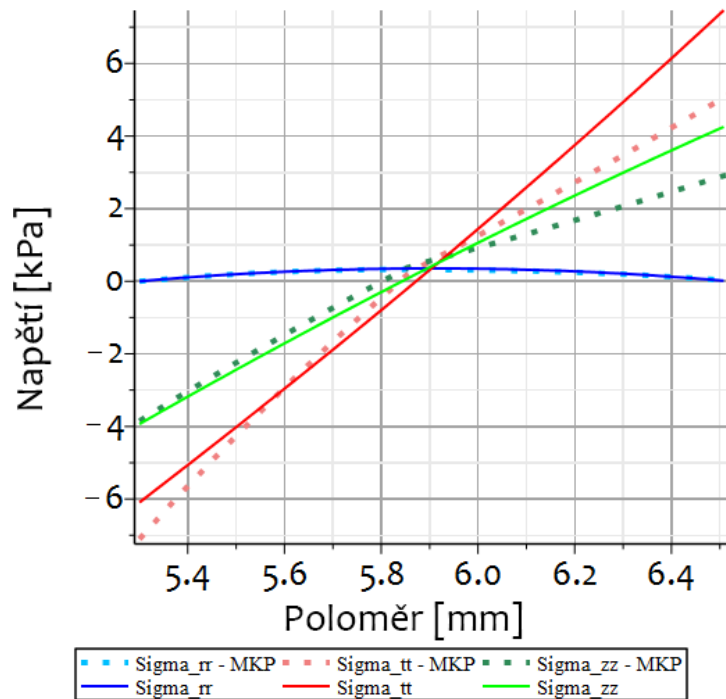
povídá realitě. Na vnitřním poloměru máme vlákna tlačaná, a na vnějším poloměru vlákna tažená. Dále jsme načetli vyexportovaná data do programu Maple kde je porovnáme s výsledky analytického výpočtu. Na obrázku (90), tak můžeme vidět rozložení napětí po tloušťce stěny. Opět vidíme, že na vnitřním poloměru směrem ke středu proužku se data s drobnými odchylkami shodují s analytickým výpočtem. Od středu proužku směrem k vnějšímu okraji se pak hodnoty napětí začínají výrazně odchylovat a to až o 50%.

Na obrázku (91) máme zobrazený průběh strečů po tloušťce stěny, které vyvolal úhlový posuv. Opět vidíme, že MKP model vykazuje menší streče v radiálním směru a naopak větší streče ve směru obvodovém. Také axiální streč je vyšší, než na ana-

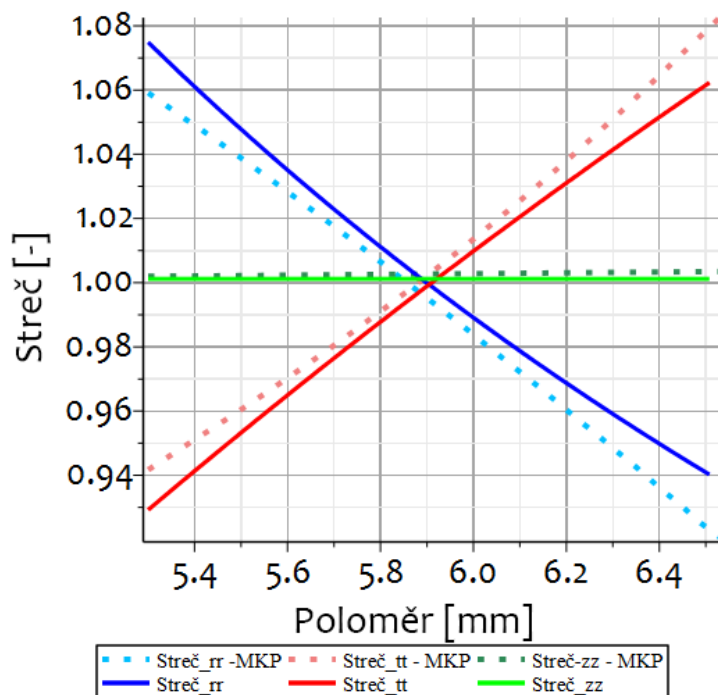


Obrázek 89: Rozložení napětí $\sigma_{\theta\theta}$ v proužku uzavřeného úhlovým posuvem

lytickém modelu.



Obrázek 90: Rozložení napětí po tloušťce stěny vyvolané úhlovým posuvem



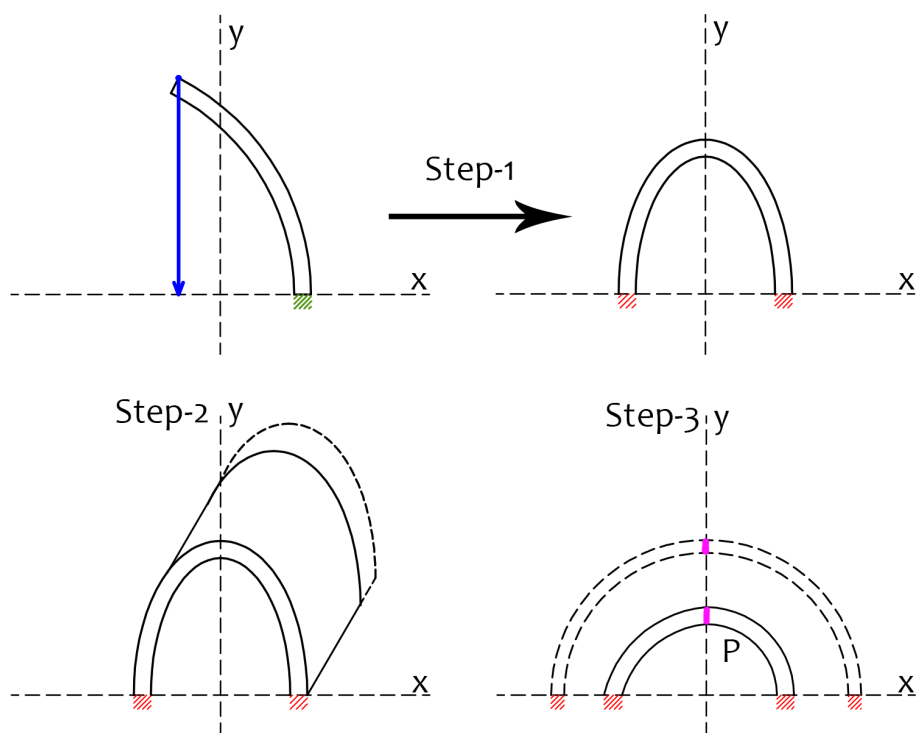
Obrázek 91: Streč po tloušťce stěny vyvolaný úhlovým posuvem

10.4 Výsledky inflace a extenze trubice s vnitřním předpětím

10.4.1 Předpětí vneseno kinematicky do tvaru oválu

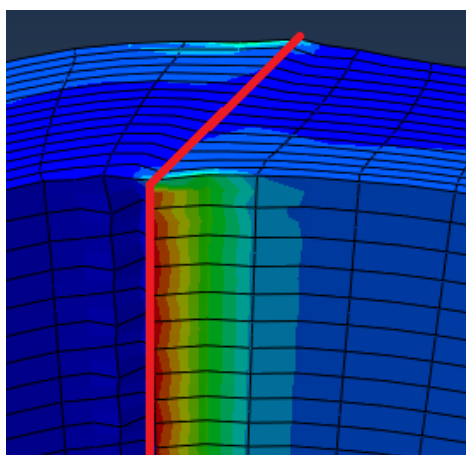
V této sekci zhodnotíme výsledky inflačně extenzního testu s vneseným vnitřním předpětím, který probíhal v rámci jedné úlohy. Předpětí bylo vneseno kinematickým posuvem horního okraje proužku směrem dolů a proužek se tak zdeformoval přibližně do tvaru oválu. Na obrázku (92), je vyznačeno schéma deformací při jednotlivých zatěžovacích krocích. Protože uzavřením proužku došlo v oblouku k jeho napružení, tak po uvolnění kinematické okrajové podmínky, dojde k vypružení jeho uzavírané strany. To je schématicizováno ve Step-3, kde uzavřený proužek nedoradí původní tvar, ale jeho levá strana byla vlivem napružení v oblouku posunuta více doleva.

Můžeme vidět, že v místě stabilizace dochází k značnému napěťovému skoku, ten je způsoben tím v tomto případě dvěma faktory. První je, že bylo nutné uvolnit kinematickou podmínku na ohýbaném okraji proužku, aby bylo možné proužek



Obrázek 92: Schéma realizované deformace pomocí jednoduché kinematiky, axiálního protažení a tlakování

nafukovat. Vzhledem k tomu, že je ohnutý konec volný ve směru X má výraznou tendenci se vypružit a posunovat se směrem od druhého konce proužku. Druhá je, že při nafukování má ohnutý proužek tendenci "cestovat" pracovním prostorem.



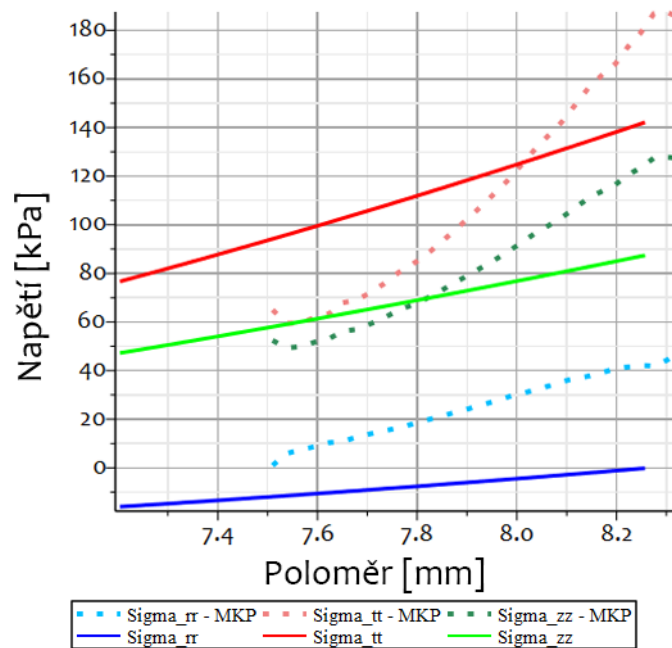
Obrázek 93: Napěťový skok vlivem kinematické okrajové podmínky

Protože tato okrajová podmínka vyvolává napěťový skok musíme brát data mimo oblasti, které jsou ovlivněny touto a okrajovými podmínkami, které jsou předepsané

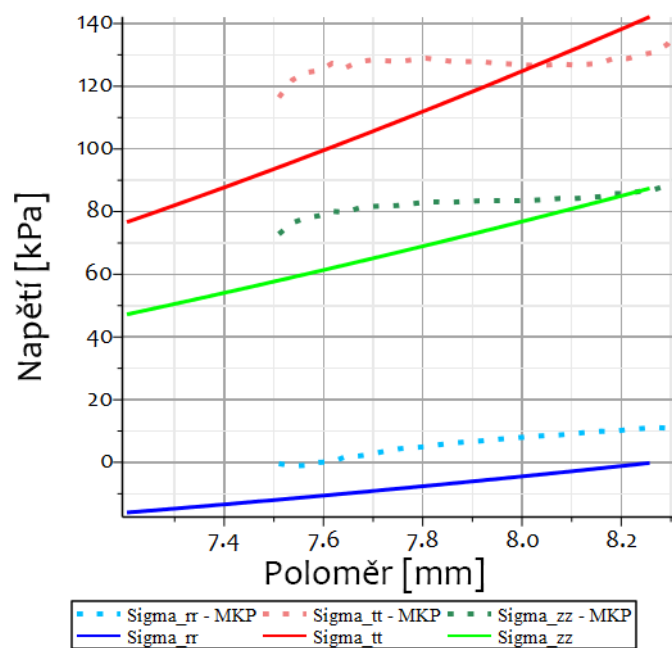
na levém a pravém konci proužku. Data tak budeme brát z poloviny proužku a to cca ve $1/4$ a $3/4$ oblouku, kde bude oblast nejméně ovlivněna okrajovými podmínkami na koncích a stabilizační podmínkou. Data zpracujeme v programu Maple a porovnáme s analytickým výpočtem.

Na obrázcích (96) a (97) můžeme vidět rozložení napětí po tloušťce stěny při inflaci a extenzi proužku s vnitřním předpětím do kterého bylo předpětí vneseno přímým posuvem směrem dolů. Můžeme vidět, že data velmi přibližně odpovídají hodnotám, které očekáváme vzhledem k sekci 8.4. Také když je porovnáme s analytickým modelem vidíme, že nejsou úplně zcestné, ale jsou silně ovlivněny okrajovou podmínkou, která slouží ke stabilizaci úlohy v průběhu tlakování. Nepřesnost je zřejmě způsobená faktem, že proužek ohnutý do tvaru oválu má po uvolnění okrajové podmínky, která tento ohyb způsobila tendenci výrazně relaxovat. Této relaxaci se okrajová podmínka pro stabilizaci snaží zabránit a tak v jejím místě vzniká velmi výrazný napěťový skok. Navíc vidíme, že tato data se výrazně liší na levé a pravé straně proužku. Také je vidět, že v případě MKP výpočtu došlo nafouknutím k většímu zvětšení vnitřního poloměru a tím pádem k většímu ztenčení stěny proužku.

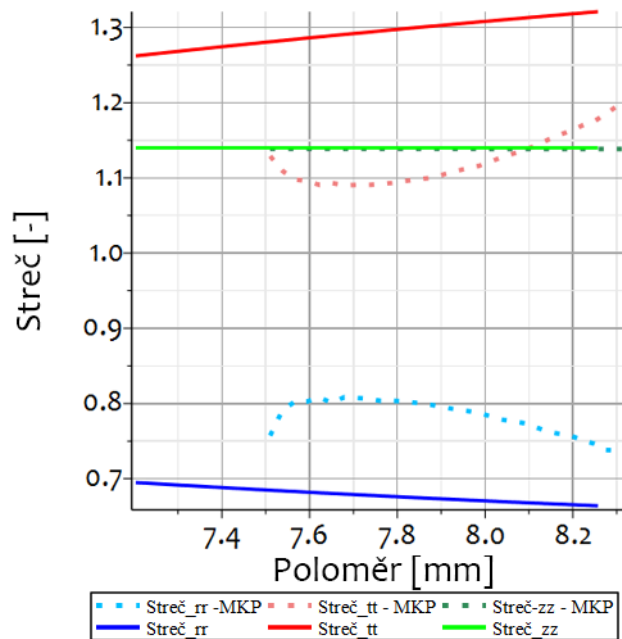
Na obrázcích (94) a (95), pak máme vykreslené průběhy strečů. Opět můžeme vidět, že se výrazně liší streč na levé a pravé straně proužku. Jediný streč, který souhlasí s analytickým modelem je axiální, který byl v obou případech zadefinovaný pomocí okrajové podmínky.



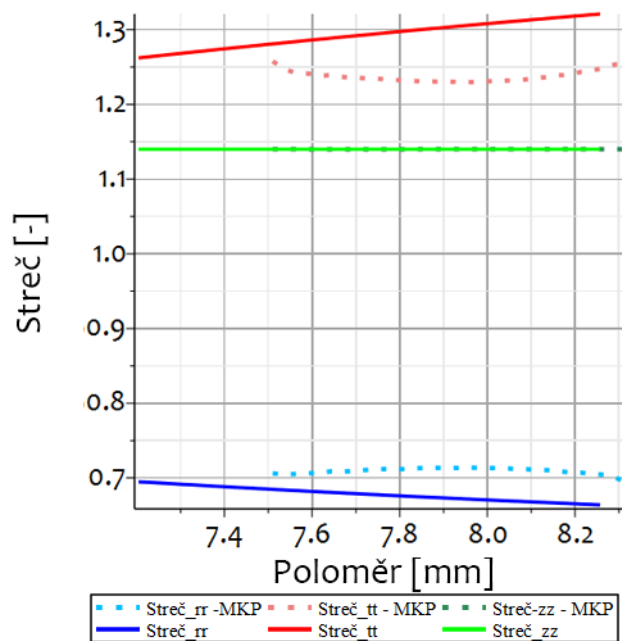
Obrázek 94: Napětí po tloušťce stěny po natlakování a axiálním protažení s vnitřním předpětím (ovál) - levá polovina



Obrázek 95: Napětí po tloušťce stěny po natlakování a axiálním protažení s vnitřním předpětím (ovál) - pravá polovina



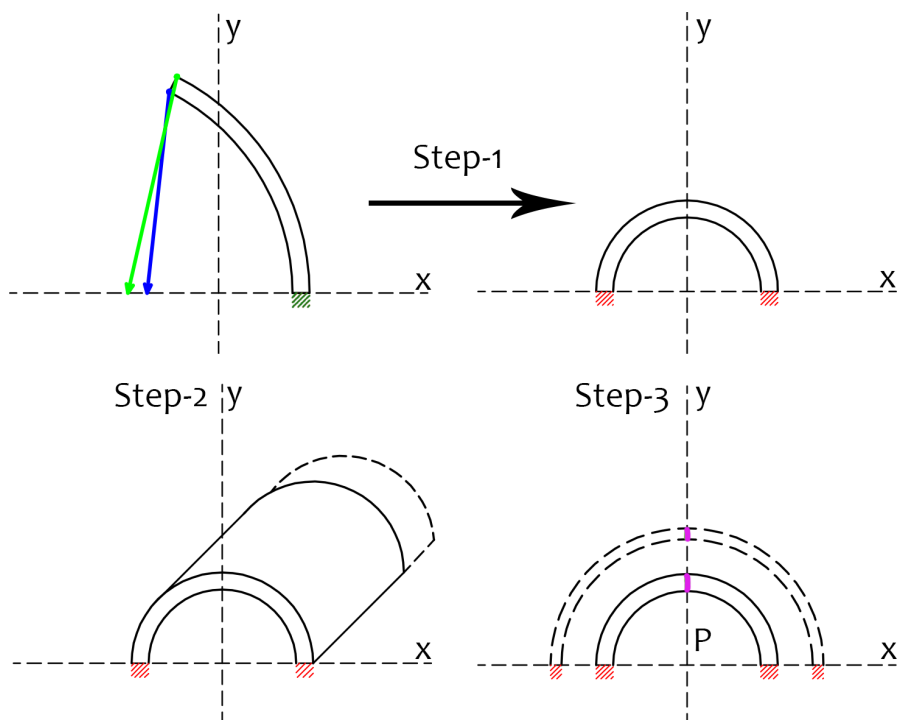
Obrázek 96: Treč po tloušťce stěny po natlakování a axiálním protažení s vnitřním předpětím (ovál) - levá polovina



Obrázek 97: Streč po tloušťce stěny po natlakování a axiálním protažení s vnitřním předpětím (ovál) - pravá polovina

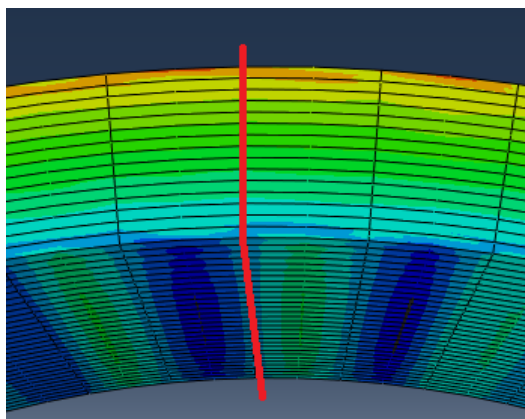
10.4.2 Předpětí vneseno kinematicky do tvaru kruhu

V této sekci zhodnotíme výsledky inflačně extenzního testu s vneseným vnitřním předpětím, který probíhal v rámci jedné úlohy. Na obrázku (98) je schématická reálná deformace proužku v průběhu jednotlivých stepů. Předpětí bylo vneseno kinematickým posuvem horní plochy, kde byly pro hrany zdefinovány takové okrajové podmínky, aby po uzavření skončil ve tvaru kruhu (viz sekce 10.3.4). Ve druhém a třetím stepu bylo zadáno axiální protažení o 14% a tlakování na hodnotu tlaku 16 [kPa]. Proužek byl v průběhu tlakování stabilizován další okrajovou podmínkou na vrcholu oblouku, která předepisovala nulový posun ve směru osy X. Na obrázku (98) je schématická reálná deformace proužku v průběhu jednotlivých stepů. Stabilizační okrajová podmínka vnesla do stěny oblouku napěťový skok, viz obrázek



Obrázek 98: Schéma realizované deformace pomocí kinematiky uzavírání do tvaru půlkruhu, axiálního protažení a tlakování

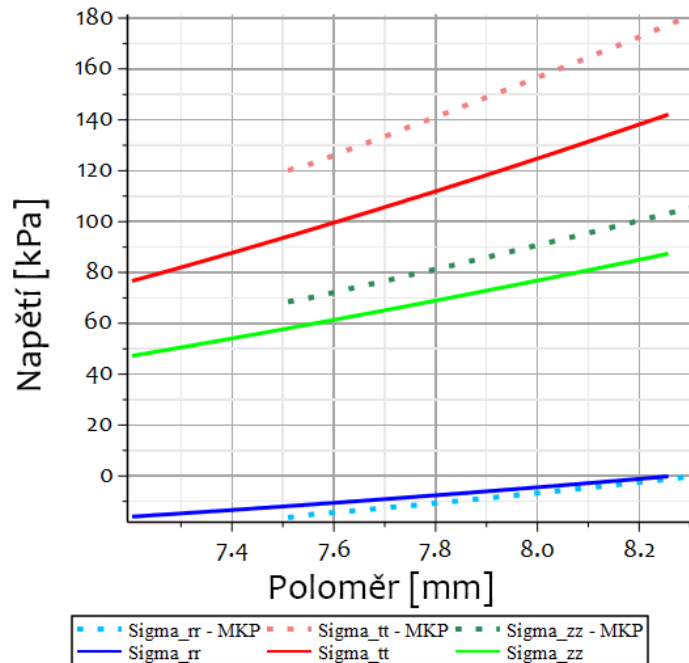
(99).



Obrázek 99: Napěťový skok v místě stabilizačního vetknutí na vrchní straně oblouku. Vetknutí vyznačeno červeně

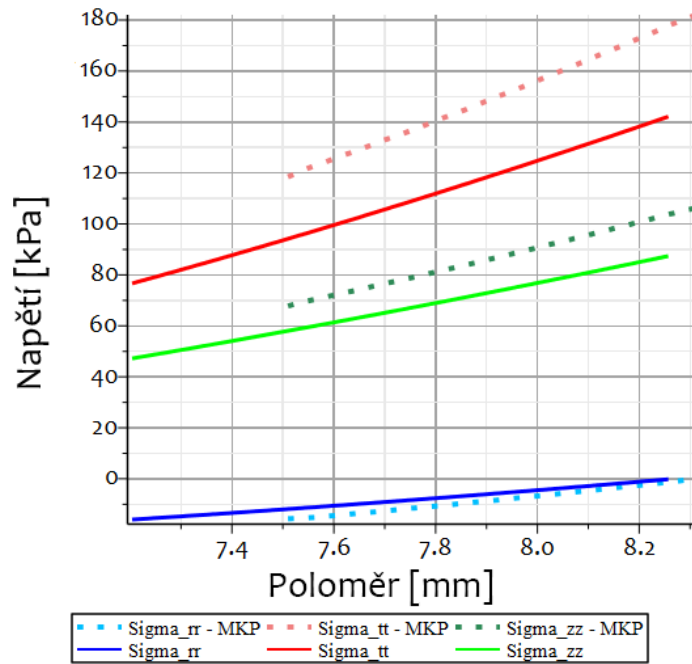
Protože je na horní straně oblouku nadefinováno vetknutí, které slouží ke stabilizaci úlohy nemůžeme z tohoto místa brát data, protože v něm vznikl napěťový skok. Tím navíc bude ovlivněna značná oblast na levé i pravé straně oblouku. Data tak budeme brát z levé i pravé strany oblouky a to v polovině délky zhruba v $1/4$ a $3/4$ oblouku, abychom se vyhnuli ovlivnění dat okrajovými podmínkami na spodní straně ve vetknutí i z horní okrajové podmínky.

Na obrázcích (100) a (101) máme vykreslené průběhy napětí po inflaci a extenzi proužku s vnitřním předpětím. Data jsou vykreslena z levé a pravé strany proužku. Můžeme vidět, že průběhy napětí odpovídají trendům křivek napětí z práce M.R.Labrosse [9], které jsou uvedené v sekci 5.2.1 pro tepny, které měly úhel rozevření 120° . Dále vidíme, že v MKP výpočtu se vnitřní rádius více nafoukl a že stěna proužku se ztenčila. Došlo tedy k větší deformaci, která vyvodí i vyšší napětí. Dále vidíme, že napětí z MKP výpočtu respektují rozložení napětí které bylo uvedeno v 8.4, ale odlišují se od hodnot analytického modelu a to cca o 25%. Dále můžeme vidět, že data z levé a pravé strany proužku se od sebe neliší a je tedy jedno ze které strany budeme data vybírat. Důvod značné odlišnosti dat z MKP modelu od analytického výpočtu může být způsoben horním vetknutím. Protože na vetknutí vzniká napěťový skok, který se může promítnout i do širší oblasti. Bohužel bez této okrajové podmínky, proužek při tlakování "cestuje" pracovním prostorem a to i s vyšší hodnotou automatické stabilizace. Výpočet tak bez této okrajové podmínky není možné realizovat.

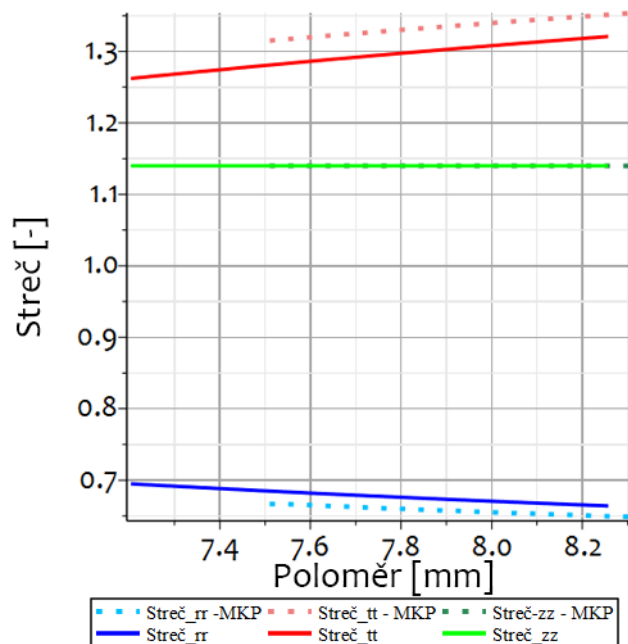


Obrázek 100: Napětí po tloušťce stěny po natlakování a axiálním protažení proužku s vnitřním předpětím - levá polovina

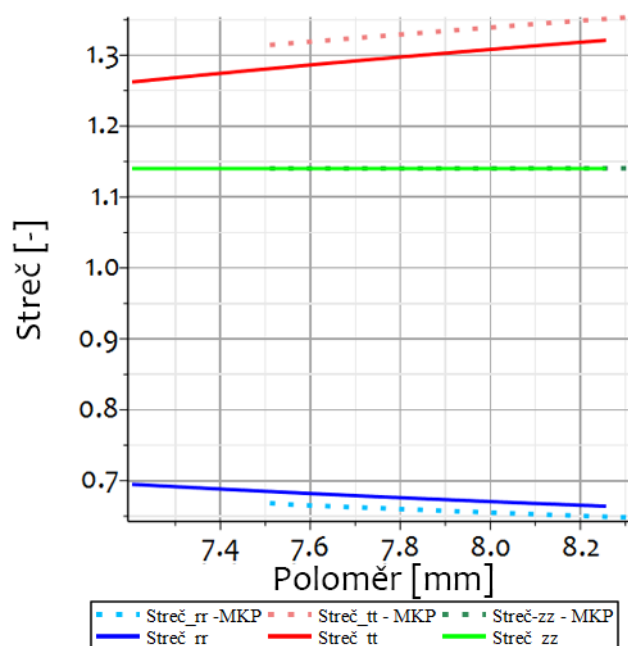
Na obrázcích (102) a (103) máme zobrazené streče, po inflaci a extenzi proužku s vnitřním předpětím. Opět můžeme vidět, že výsledky z levé a pravé strany se od sebe neliší. Vidíme, že jediný streč který se shoduje je axiální, protože jsme ho nastavovali okrajovou podmínku a to jak v MKP výpočtu tak i v tom analytickém. Poté jako ve všech předešlých MKP výpočtech radiální streč vyšel po celé tloušťce proužku nižší než ten stanovený analyticky. A obvodový streč vyšel v MKP výpočtu vyšší než v analytickém výpočtu.



Obrázek 101: Napětí po tloušťce stěny po natlakování a axiálním protažení proužku s vnitřním předpětím - pravá polovina



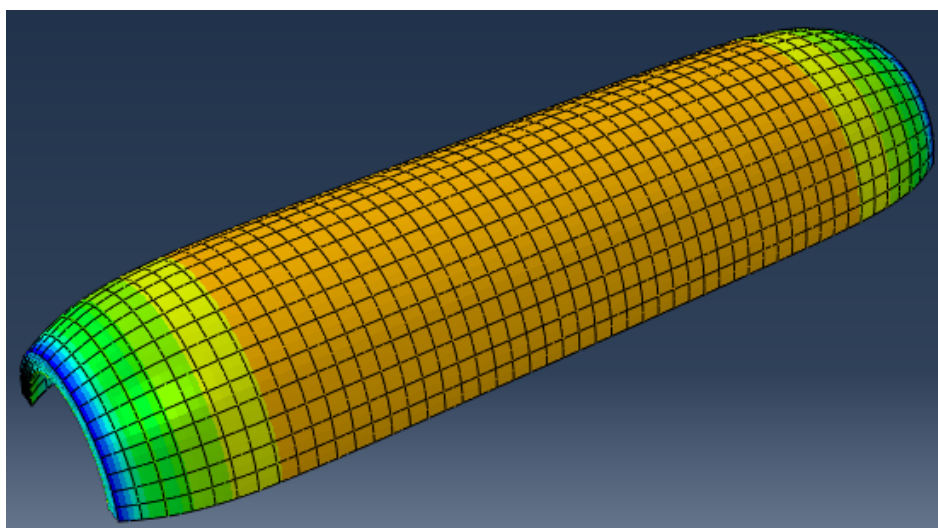
Obrázek 102: Streč po tloušťce stěny po natlakování a axiálním protažení proužku s vnitřním předpětím - levá polovina



Obrázek 103: Streč po tloušťce stěny po natlakování a axiálním protažení proužku s vnitřním předpětím - pravá polovina

10.4.3 Dlouhá trubice se stabilizací na čelní a zadní straně

V případě dlouhé trubice se stabilizací na čelní a zadní straně, bylo zavření proužku realizováno kinematicky a to do tvaru půlkruhu. Výsledný tvar dlouhé trubice po nafouknutí je vidět na obrázku (104). Na obrázku (104) je vidět, že na čelní ani zadní

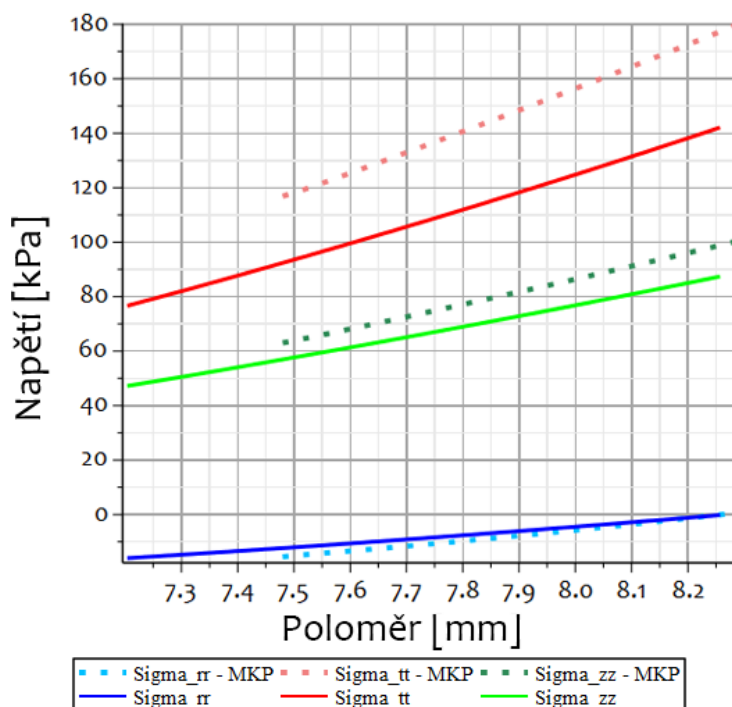


Obrázek 104: Výsledný tvar dlouhé trubice po natlakování

straně zavřeného proužku nedošlo k deformaci vlivem tlaku. A také oblast ovlivněnou

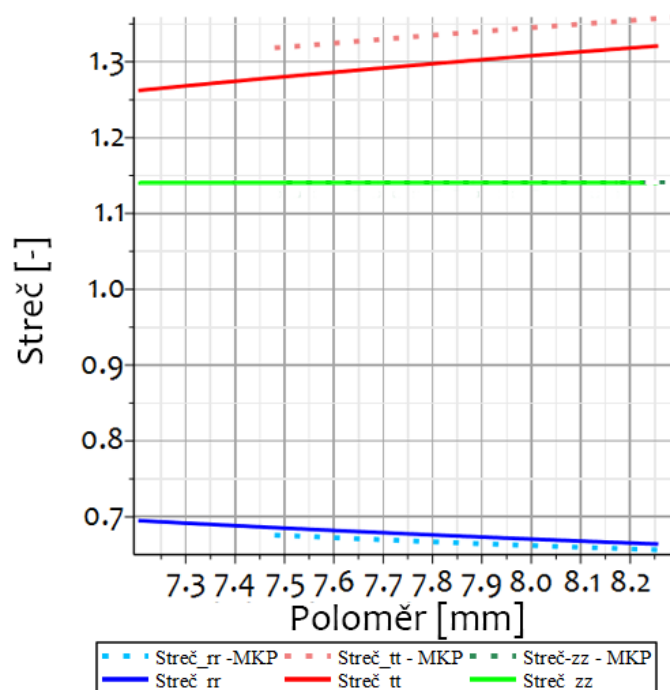
tímto vetknutím, které slouží ke stabilizaci. Výsledky proto budeme brát ze středu trubice, kde by již neměly být zkreslené. Protože na rozdíl od dvou předešlých úloh je stabilizace úlohy řešená pomocí vetknutí na čelní a zadní straně proužku, nemusíme brát data ze stran oblouku, ale můžeme je vzít přímo z jeho vrcholu, kde očekáváme jejich nejmenší zkreslení.

Na obrázku (105) tak můžeme vidět rozložení napětí po tloušťce stěny. Můžeme vidět, že stejně jako v předešlých případech tak i v tomto případě došlo k větší deformaci stěny, než jakou předpokládal analytický model. To vede k vyšším napětím ve všech základních směrech. Ale průběhy napětí odpovídají trendům křivek napětí z práce M.R.Labrosse [9], které jsou uvedené v sekci 5.2.1 pro tepny, které měly úhel rozevření 120°



Obrázek 105: Napětí po tloušťce stěny po natlakování a axiálním protažení proužku s vnitřním předpětím - dlouhá varianta

Na obrázku (106) pak můžeme vidět rozložení strečů po tloušťce stěny. Vzhledem k vyšším deformacím je vidět vyšší streč v obvodovém směru. Axiální streč souhlasí, protože byl nastaven okrajovou podmínkou a to jak v analytickém tak MKP modelu.



Obrázek 106: Střeč po tloušťce stěny po natlakování a axiálním protažení proužku s vnitřním předpětím - dlouhá varianta

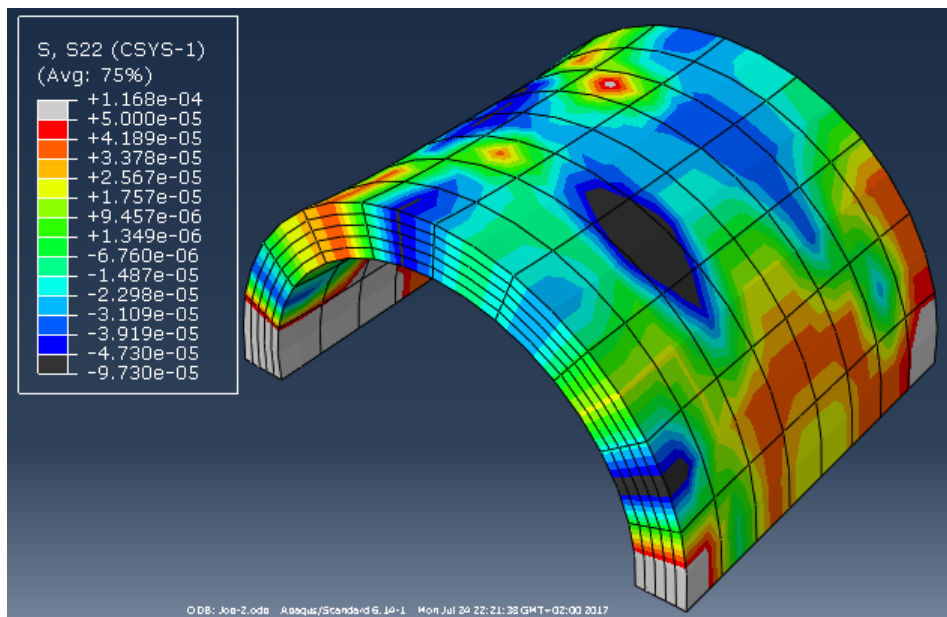
10.5 Výsledky inflačně extenzního testu proužku s předpětím pomocí předdefinovaného pole

V této části si ukážeme výsledky inflačně extenzního testu pomocí předdefinovaného pole *Predefined field*.

Bohužel tato úloha neproběhla správně. Povedlo se načíst data z předcházející úlohy, ale bohužel se nenačetla správně jsou velmi malá. Po natlakování se tak proužek chová jako kdyby v něm žádné předpětí nebylo vnesené.

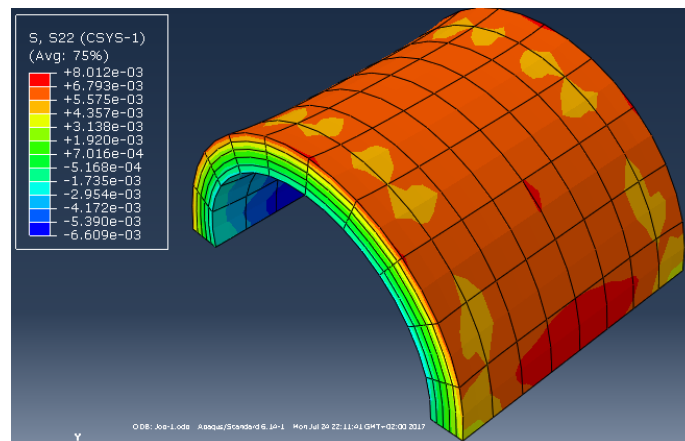
Na barevné mapě, obrázek (107), můžeme vidět hodnoty vneseného předpětí na konci prvního stepu. Je vidět, že napětí v obvodovém směru je o dva řády menší, než hodnoty obvodového napětí, které jsme získali pomocí analýzy vnášení předpětí pomocí zavírání proužku v MKP výpočtech. Dále napětí vnesené pomocí *Predefined Field* neodpovídá podmínce, aby na vnitřním poloměru byla vlákna tlačena a na vnějším tažena. Můžeme vidět, že oblasti s tlakovým a tahovým napětím jsou po proužku rozmístěna náhodně. Pro porovnání je na obrázku (108), vidět rozložení napětí po tloušťce stěny z posledního incrementu prvního stepu předchozí úlohy, ze

které načítáme data.

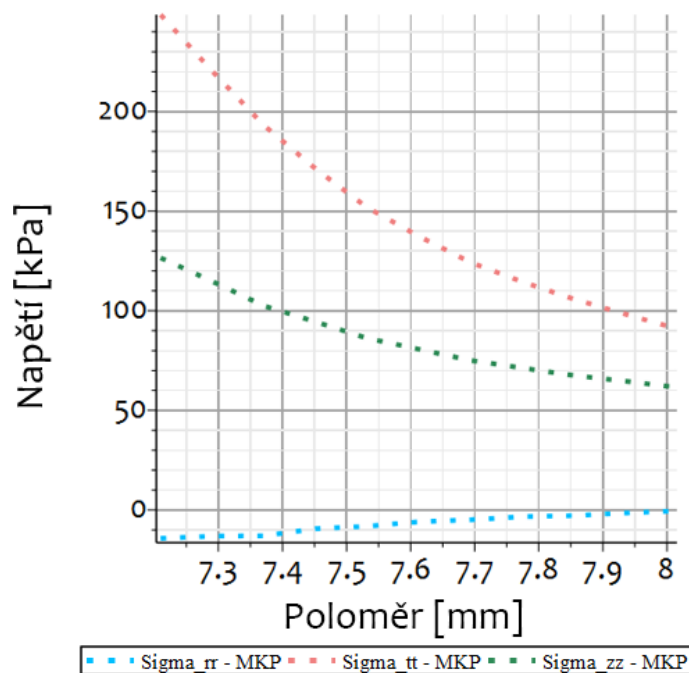


Obrázek 107: Obvodové napětí vnešené pomocí predefined field na konci prvního stepu

Na obrázku (109) vidíme graf rozložení napětí po tloušťce stěny, po inflaci a extenzi při použití *Predefined Field*. Na obrázku je vidět, že se trubice při inflaci a extenzi chová stejně jako trubice bez předpětí. Tyto data jsou z modelu s velmi



Obrázek 108: Rozložení napětí po tloušťce stěny na konci step-1 předchozí úlohy hrubým meshem, pouze 5 elementech po tloušťce stěny, navíc hloubka proužku byla pouze 10 mm. Tento model byl používán pro rychlé výpočty a především ověření správného nastavení. Jedním z důvodů proč tato úloha neprobíhá správně může být



Obrázek 109: Rozložení napětí po tloušťce stěny při použití predefined field

způsobeno právě hrubým meshem. Skoky napětí mezi jednotlivými elementy jsou tak příliš velké a Abaqus, který v prvním stepu hledá rovnovážný stav ho nalezne tím způsobem, že tato napětí vynuluje. Když jsem se pokoušel úlohu realizovat na detailnějším modelu, který je používán v této diplomové práci, nepovedlo se mi již úlohu nastavit tak, aby proběhla. Při spuštění úlohy vypisuje Abaqus blíže nespecifikovaný error. To bude nejspíš z důvodu, že Abaqus pro úlohy do kterých se zanáší hodnoty počátečního napětí pomocí funkce *Predefined Field* vyžaduje i stejnou materiálovou orientaci. Vzhledem k tomu, že v detailním modelu je velké množství elementů a faktu, že v průběhu zavírání proužku dojde k jeho prohnutí je velká šance, že se v některých elementech materiálové směry liší. Tato odlišnost pak způsobí, že se výpočetní úloha nerozběhne.

Z tohoto důvodu jsem zkoušel úlohu spustit i v programu Abaqus 2016 jestli v tomto směru nemá "robustnější" algoritmus, který by tyto rozdíly v materiálové orientaci zvládl. Bohužel i tato nová verze programu vypisovala při spuštění úlohy stejný blíže nespecifikovaný error.

11 Zhodnocení MKP postupů

Ideální postup pro zanesení obvodového předpětí do MKP modelu se bude lišit v závislosti na typu zvolené úlohy. Začátkem je možné říci, že zatěžování momentem, nebo silovou dvojicí se jeví jako nevhodné a to z toho důvodu, že nejprve nutné určit jejich velikost.

Pro realizaci úlohy je vhodné si vytvořit testovací model s hrubým meshem součásti. Tato konfigurace tak bude mít zajištěný velmi krátký výpočetní čas a bude sloužit především k ověření správného nastavení okrajových podmínek a zatěžovacích kroků. I pro tento případ je lepší používat kvadratické elementy. Protože v průběhu uzavírání proužku dochází v některých jeho místech k velkým deformacím, mohlo by při použití lineárních elementů dojít k tzv. shear-lockingu. Při shear-lockingu není element schopný snést velkou deformaci a dochází ke zhroucení úlohy. Tomu jde předejít přeepsáním většího počtu elementů po tloušťce stěny.

11.1 Úlohy realizované pomocí tří zatěžovacích kroků

Pro úlohu, která bude realizována v rámci 3 po sobě navazujících zatěžovacích kroků je nejlepší použít postup uzavření za pomoci kinematické podmínky a posuv stanovit do výsledného tvaru půlkruhu. Při uzavírání proužku do tvaru půlkruhu nedochází v oblouku k velkému napružení, které se v případě jednoduchého zavření při uvolnění okrajových podmínek vypruží a uzavíraný konec proužku se tak posune výrazně do strany. Tímto posunem tak dochází ke zkreslení výsledků.

Dobré výsledky také poskytuje úloha, která je realizována na dlouhé geometrii proužku. Tato úloha díky vetknutím na čelních stranách proužku, nepotřebuje další stabilizaci na vrcholu oblouku. Ovšem geometrie proužku musí být dostatečně dlouhá, aby nedocházelo ke zkreslení výsledků vlivem okrajových podmínek vetknutí na čelních stranách. Použití delší geometrie vede na vyšší počet elementů, které zvyšuje výpočetní náročnost úlohy.

V obou úlohách došlo při tlakování na systolický tlak k větší deformaci uzavřeného proužku než v analytickém výpočtovém modelu. Vyšší deformace způsobí ve stěně

větší napětí. Jednotlivé křivky napětí sledují trend křivek napětí, které experimentálně získal M.R.Labrosse ve své práci [9], její výsledky máme zobrazené na obrázku (12) v sekci 5.2.1.

11.2 Úloha pomocí předdefinovaného pole

Úlohu vnesení obvodového předpětí z předchozího výpočtu za pomoci funkce *predefined field* se bohužel nepodařilo rozběhnout v dostatečně detailním modelu. Úloha na modelu s hrubým meshem nedošlo ke správnému načtení hodnot napětí, které bylo téměř nulové a tepna tak v průběhu tlakování vykazovala chování jako tlaková nádoba bez předpětí.

Úlohu, ze které bude načítáno napětí je nejlepší realizovat zavření proužku kinematicky úhlovým posuvem. Tato kinematická podmínka vyžaduje nadefinování spojení *Coupling* s referenčním bodem. Ten vytvoří na spojené ploše *Rigid*, tedy pevnou plochu, která se v průběhu ohýbání nezdeformuje. Výsledná geometrie tak působí jak kdyby byla vytvořená rovnou ve tvaru půlkruhu, což se hodí pro pozdější načítání geometrie, tak i definování počátečních okrajových podmínek.

Úloha s největší pravděpodobností kolabuje z důvodu materiálové orientace, kterou Abaqus v případě načítání napětí pomocí *predefined field* vyžaduje souhlasnou s předešlou úlohou. I přes nastavení materiálové orientace pomocí stejných setů a ploch jako v předešlé úloze, není nejspíš materiálová orientace shodná ve všech elementech a tak úloha při spuštění vypisuje blíže neurčený error.

Protože Abaqus umí ve výsledném odb souboru na geometrii zobrazit souřadné systémy materiálové orientace, měla by být možnost je za pomoci skriptu vyexportovat a následně nahrát do nové úlohy. Tímto postupem by snad měla být zajištěna souhlasná materiálová orientace a tím i správný chod úlohy.

12 Závěr

Tato diplomová práce se zabývala návrhem způsobu vnesení zbytkového napětí do MKP modelu tepny. Z důvodu tvarové složitosti tepny byl její tvar aproximován tvarem válcové trubice s konstantním vnitřním a vnějším poloměrem. Tepenná stěna byla modelována jako nelineární, nestlačitelný, anizotropní materiál se dvěma preferovanými směry vláken. Napětí bylo popsáno pomocí hustoty deformační energie dle Gasserova modelu. Pro porovnání a ověření jednotlivých postupů v MKP byl vytvořen analytický výpočtový model.

Pomocí analytického výpočtového modelu byly spočítány dvě varianty, se kterými byly porovnány výsledky MKP a to:

inflačně extenzní test uzavřené válcové trubice bez vnitřního předpětí

a inflačně extenzní test otevřené válcové trubice s vnitřním předpětím.

V obou případech byly trubice uvažovány jako silnostěnné, aby bylo možné stanovit napětí po tloušťce stěny.

V MKP byl nejprve navržen model uzavřené válcové trubice, který sloužil k ověření správného nastavení materiálu a materiálové orientace. A následně 5 jednotlivých způsobů pro zanesení obvodového předpětí do tepenné stěny. Jeden z postupů vedl k přílišné deformaci geometrie proužku a vytažení uzlových bodů. S dalšími dvěma způsoby bylo možné pokračovat přímo následujícím zatěžovacím kroku Step-2 axiálním protažením a ve Step-3 tlakováním. Řešení úlohy s pomocí předdefinovaného pole se nepodařilo správně realizovat.

Ověření správného nastavení materiálu a jeho orientace v MKP modelu proběhlo porovnáním výsledků MKP s výsledky analytického výpočtového modelu. Napětí se shodovaly s výjimkou napětí v axiálním směru, které se na vnitřním poloměru více lišilo a směrem k vnějšímu poloměru docházelo ke snížení této odchylky.

Při porovnání výsledků vnesení předpětí z MKP modelů s analytickým výpočtovým modelem se všechny tyto způsoby shodovaly s analytickým výpočtovým modelem a to jak v napětích tak ve strečích. Lepší shody bylo dosaženo na vnitřním poloměru a směrem ke středu stěny trubice. Než od jejího středu směrem k vnějšímu poloměru,

kde byla odchylka výraznější.

Porovnáním výsledků inflačně extenzního testu trubice s vnitřním předpětím z MKP modelu s analytickým modelem je vidět, že v MKP modelech docházelo k větší deformaci tepenné stěny a tím i k vyšším napětím. Křivky napětí však odpovídají průběhům napětí v trubici s vnitřním předpětím. Byly tak splněny všechny úkoly vytyčené v úvodu této diplomové práce.

I přes to, že v MKP modelu dochází k větší deformaci tepenné stěny, je možné tento postup pro simulace tepny s vnitřním předpětím využívat, protože výsledné napětí ve stěně respektuje rozložení napětí v tepnách při fyziologických podmínkách.

MKP model by bylo možné dále zpřesnit načtením napětí pomocí předdefinovaného pole napětí, nebo uvažováním trubice jako uzavřené.

Seznam literatury

- [1] ČIHÁK, Radomír, DRUGA, Rastislav a Miloš GRIM, *Anatomie 3*, 2., upr. a dopl. vyd. Praha: Grada, 2004. ISBN 80-247-1132-X.
- [2] *Srdce*, In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2017-08-14]. Dostupné z: <https://cs.wikipedia.org/wiki/Srdce>
- [3] KONVIČKOVÁ, Svatava a Jaroslav VALENTA, *Biomechanika srdečně cévního systému člověka*, Vyd. 2. Praha: Česká technika - nakladatelství ČVUT. ISBN 80-010-3425-9.
- [4] HORNÝ, Lukáš, *Biomechanika I - Krevní oběh a mechanika cév* [online]. Praha, 2016, 95 [cit. 2017-08-01]. Dostupné z: <<http://users.fs.cvut.cz/~hornyluk/files/Biomechanika-I-Krevni-obeh-a-mechanika-cev.pdf>>
- [5] HORNÝ, Lukáš, *Biomechanika II* [online]. Praha, 2016, , 66 [cit. 2017-08-01]. Dostupné z: <http://users.fs.cvut.cz/~hornyluk/files/Biomechanika_II_2016.pdf>
- [6] HORNÝ, Lukáš, Tomáš ADÁMEK a Markéta KULVAJTOVÁ, Analysis of axial prestretch in the abdominal aorta with reference to post mortem interval and degree of atherosclerosis. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*. 2014, (Volume 33), 93 - 98.
- [7] BENEŠ, Václav, *Odhad rychlosti šíření pulsní vlny aortou*. Praha, 2015. Bakalářská práce. České vysoké učení technické v Praze.
- [8] HOLZAPFEL, Gerhard A. a Ray W. OGDEN, *Biomechanical modelling at the molecular, cellular, and tissue levels*. New York: Springer, c2009. Courses and lectures, no. 508. ISBN 978-3-211-95873-5.
- [9] LABROSSE, Michel R., Eleanor R. GERSON, John P. VEINOT a Carsten J. BELLER. Mechanical characterization of human aortas from pressurization testing and a paradigm shift for circumferential residual stress. *Journal*

- of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*. 2013, 17(-), 44 - 55. DOI: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.jmbbm.2012.08.004>> ISSN 1751-6161.
- [10] **HORNÝ, Lukáš**, *Patobiomechanika srdečněcévního systému I.díl*. Praha: České vysoké učení technické v Praze, 2014. ISBN 978-80-01-05473-4.
- [11] **PLEŠEK, Jiří**, *Nelineární mechanika kontinua s příklady* [online]. Praha, 2015 [cit. 2017-08-01]. Dostupné z: <<http://mechanika.fs.cvut.cz/content/files/MK/MK2015.pdf>>
- [12] **OGDEN, Ray W**, Anisotropy and Nonlinear Elasticity in Arterial Wall Mechanics. In *Biomechanical modelling at the molecular, cellular, and tissue levels*. Vienna: Springer, 2009, s. 180-258. Courses and lectures, no. 508. ISBN 978-3-211-95873-5.
- [13] **HORNÝ, Lukáš**, *Biomechanika srdečněcévní soustavy a konstitutivní modelování* [online]. Praha, 2012, , 15 [cit. 2017-08-01]. Dostupné z: <<http://users.fs.cvut.cz/~hornyluk/files/Biomechanikasrdecnecevni-sosutavy-konstitutivni-chov%C3%A1ni-cev-IV.pdf>>
- [14] **VOŇAVKOVÁ, Tereza**, *Pole napjatosti a deformace v nefyziologické tepně*. Praha, 2013. Diplomová Práce. České vysoké učení technické v Praze.
- [15] **PETRUŠKA, Jindřich**, MKP v inženýrských výpočtech. *MKP v inženýrských výpočtech*, 2011.
- [16] **ŠPANIEL, Miroslav; HORÁK, Zdeněk**. *Úvod do metody konečných prvků*. České vysoké učení technické, 2011.
- [17] České vysoké učení technické v Praze, *Metoda konečných prvků pro biomechaniku*. [online]. [cit. 2017-08-01]. Dostupné z: <<http://mechanika2.fs.cvut.cz/old/pme/predmety/mkpb/cv00.htm>>
- [18] **FAMAEY, Nele, Gerhard SOMMER, Jos VANDER SLOTEN a Gerhard A. HOLZAPFEL**, *Arterial clamping: Finite element simulation and in vivo validation*. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*

[online]. 2012, 12, 107-118 [cit. 2017-08-10]. DOI: 10.1016/j.jmbbm.2012.03.010. ISSN 17516161. Dostupné z: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1751616112000902>>

[19] *ABAQUS/Abaqus Analysis User's Guide, Ver. 6.14 Documentation*. Dassault Systèmes Simulia Corporation, 2014.

[20] 22.5.3 Anisotropic hyperelastic behavior. In *Abaqus v6.14 Documentation*. Dassault Systèmes, 2014.

[21] 16.11.3 Defining an initial stress In *Abaqus v6.14 Documentation*. Dassault Systèmes, 2014.

[22] 34.2.1 Initial conditions In Abaqus/Standard and Abaqus/Explicit In *Abaqus v6.14 Documentation*. Dassault Systèmes, 2014.

Seznam obrázků

1	Schéma oběhové soustavy [1]	16
2	Řez srdcem [2]	17
3	Řez cévní stěnou [1]	19
4	Nelineární chování v průběhu mechanické zkoušky [4]	21
5	Anisotropní chování cévní stěny [8]	22
6	Hysterezní chování cévní stěny v průběhu zatěžování [4]	23
7	Schéma zkrácení tepny vlivem axiálního předpětí [4]	24
8	Závislost rychlosti pulsní vlny na tlaku a axiálním předpětí [7]	24
9	Projev obvodového předpětí ve stěně tepny [5]	25
10	Schéma rozevření prstýnku vlivem obvodového předpětí [5]	26
11	Porovnání tlakování tepny s obvodovým předpětím a bez něj [5]	27
12	Závislost rozložení napětí na úhlu rozevření [9]	28
13	Deformační gradient [10]	30
14	Napětí v tělese [10]	31
15	Transformace $\mathbf{N}dA$ z referenční konfigurace na $\mathbf{n}da$ v konfiguraci referenční [12]	32
16	Rotace souřadného systému [13]	34
17	Vektor \mathbf{M} [12]	34
18	Geometrická interpretace invariantu I_4 [5]	35
19	Schématické zobrazení dvou směrů preferovaných vláken I_4 [12]	37
20	Sférické souřadnice [12]	38
21	Schéma výztužných vláken v jednom směru [12]	39
22	Přechod válce ve válec	42
23	Zatížení tepenné stěny [5]	43
24	Axiální a obvodový streč v průběhu tlakování	46
25	Napětí po tloušťce stěny po natlakování na 16 kPa	47
26	Kinematika zavírání proužku [5]	48
27	Kinematika zavírání proužku [5]	48
28	Schéma tlakové nádoby [5]	50
29	Napětí po tloušťce stěny vzniklé zavřením proužku	51

30	Streče vzniklé zavřením proužku	52
31	Napětí po tloušťce stěny po nafouknutí zavřeného proužku	53
32	Streče po nafouknutí zavřeného proužku	53
33	Příklad 2-D elementu CPE8PH [19]	54
34	Vytváření geometrie válce	58
35	Součást rozdělená na dvě části - válec a dno	59
36	Zadávaní materiálové orientace	60
37	Zadávaní materiálové orientace přímo do Input souboru	63
38	Schéma tvorby geometrie rozevřeného proužku	64
39	Schéma geometrie proužku	65
40	Rozevřený proužek tepenné stěny	66
41	Nastavení materiálové orientace na proužku tepenné stěny	67
42	Rozevřený proužek se zobrazeným meshem	69
43	Zobrazení vetknutí v programu Abaqus	70
44	Schéma předpokládané deformace proužku při zatížení momentem	70
45	Reference point propojený pomocí Constraint s plochou	71
46	Schéma předpokládané deformace proužku při zatížení dvojicí sil	71
47	Vytvořené přídatné body pro vložení silových účinků (žlutě)	72
48	Pomocný souřadný systém	73
49	Zobrazení sil pomocí žlutých šipek	73
50	Schéma předpokládané deformace proužku při zatížení jednoduchým kinematickým posuvem	74
51	Zobrazení zadaného posuvu ve směru Y	74
52	Schéma předpokládané deformace proužku při zatížení posuvem do tvaru půlkruhu	75
53	Souřadnice hran proužku pro osy X a Y	75
54	Zobrazení posuvu na hranách ve směru os X a Y	76
55	Schéma předpokládané deformace proužku při zatížení kinematikou rotací o úhel	76
56	Schéma předpokládané deformace v průběhu jednotlivých zatěžovacích kroků pro variantu s jednoduchým posuvem.	78

57	Schéma předpokládané deformace v průběhu jednotlivých zatěžovacích kroků pro variantu s posuvem do tvaru půlkruhu.	79
58	Zobrazení axiálního posuvu na přední straně proužku	80
59	Stabilizace proužku pro tlakování	81
60	Fialové šipky indikující tlakové zatížení	82
61	Levá (vrchní) strana proužku po uzavření kinematickou okrajovou podmínkou, posuvem (vlevo) a úhlem (vpravo)	82
62	Zobrazení geometrie součásti načtené z *.odb souboru	83
63	Zobrazená oblast, která náleží Setu-5	84
64	Vybrané body pro nastavení symetrie (červeně)	86
65	Modré a oranžové trojúhelníky potvrzující nastavení symetrie	86
66	Zobrazení vybraných prvků pro stabilizaci v průběhu tlakování	87
67	Výsledky MKP výpočtu inflace a extenze válcové trubice	89
68	Vizualizace hodnot σ_{rr} při inflačně extenzním testu	90
69	Porovnání výsledků analytického modelu inflace a extenze s MKP modelem	91
70	Zobrazení místa ze kterého byla brána data pro zhodnocení výsledků	92
71	Schéma realizované deformace při zatížení momentem	92
72	Rozložení napětí $\sigma_{\theta\theta}$ po tloušťce stěny při zavírání momentem	93
73	Rozložení napětí po tloušťce stěny vyvolané momentem	94
74	Porovnání strečů po uzavření proužku momentem	94
75	Schéma realizované deformace pomocí dvojice sil	95
76	Vytažení uzlů vlivem působení sil	95
77	Napětí $\sigma_{\theta\theta}$ v proužku uzavíraného pomocí dvojice sil	96
78	Porovnání napětí vnesených dvojicí sil s analytickým modelem	97
79	Porovnání strečů po uzavření proužku dvojicí sil	97
80	Schéma realizované deformace pomocí kinematického posuvu jedné hrany	98
81	Rozložení napětí $\sigma_{\theta\theta}$ v proužku uzavřeného jednoduchým posuvem jedné hrany	99
82	Napětí po tloušťce stěny vyvolané ohybem do tvaru oválu	99
83	Streče po tloušťce stěny vyvolané ohybem do tvaru oválu	100

84	Schéma realizované deformace pomocí kinematického posuvu do tvaru půlkruhu	101
85	Rozložení napětí $\sigma_{\theta\theta}$ v proužku uzavřeného do tvaru kruhu	101
86	Napětí po tloušťce stěny vyvolané ohybem do tvaru kruhu	102
87	Streč po tloušťce stěny vyvolaný ohybem do tvaru kruhu	103
88	Schéma realizované deformace pomocí rotace o úhel	103
89	Rozložení napětí $\sigma_{\theta\theta}$ v proužku uzavřeného úhlovým posuvem	104
90	Rozložení napětí po tloušťce stěny vyvolané úhlovým posuvem	104
91	Streč po tloušťce stěny vyvolaný úhlovým posuvem	105
92	Schéma realizované deformace pomocí jednoduché kinematiky, axiálního protažení a tlakování	106
93	Napěťový skok vlivem kinematické okrajové podmínky	106
94	Napětí po tloušťce stěny po natlakování a axiálním protažení s vnitřním předpětím (ovál) - levá polovina	108
95	Napětí po tloušťce stěny po natlakování a axiálním protažení s vnitřním předpětím (ovál) - pravá polovina	108
96	Streč po tloušťce stěny po natlakování a axiálním protažení s vnitřním předpětím (ovál) - levá polovina	109
97	Streč po tloušťce stěny po natlakování a axiálním protažení s vnitřním předpětím (ovál) - pravá polovina	109
98	Schéma realizované deformace pomocí kinematiky uzavírání do tvaru půlkruhu, axiálního protažení a tlakování	110
99	Napěťový skok v místě stabilizačního vetknutí na vrchní straně oblouku. Vetknutí vyznačeno červeně	111
100	Napětí po tloušťce stěny po natlakování a axiálním protažení proužku s vnitřním předpětím - levá polovina	112
101	Napětí po tloušťce stěny po natlakování a axiálním protažení proužku s vnitřním předpětím - pravá polovina	113
102	Streč po tloušťce stěny po natlakování a axiálním protažení proužku s vnitřním předpětím - levá polovina	113
103	Streč po tloušťce stěny po natlakování a axiálním protažení proužku s vnitřním předpětím - pravá polovina	114

104	Výsledný tvar dlouhé trubice po natlakování	114
105	Napětí po tloušťce stěny po natlakování a axiálním protažení proužku s vnitřním předpětím - dlouhá varianta	115
106	Streč po tloušťce stěny po natlakování a axiálním protažení proužku s vnitřním předpětím - dlouhá varianta	116
107	Obvodové napětí vnešené pomocí predefined field na konci prvního stepu	117
108	Rozložení napětí po tloušťce stěny na konci step-1 předchozí úlohy . .	117
109	Rozložení napětí po tloušťce stěny při použití predefined field	118