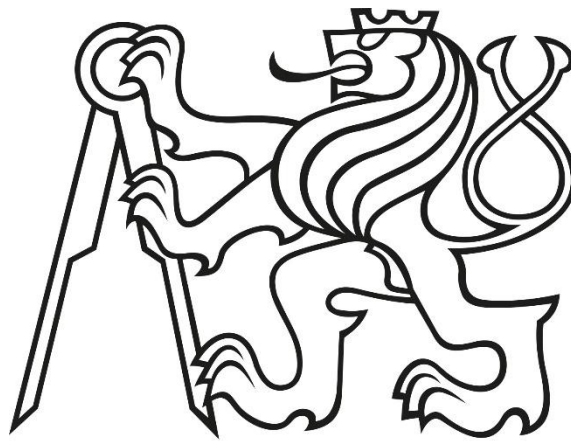


**ČESKÉ VYSOKÉ  
UČENÍ TECHNICKÉ  
V PRAZE**

**FAKULTA  
STROJNÍ**

12105 – ÚSTAV MECHANIKY,  
BIOMECHANIKY A MECHATRONIKY



**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE  
2017**

**Analýza nalisovaného spoje při zatížení  
kroučícím momentem**

Analysis of the mechanical properties of  
pressed cylinders when the torque load

JAKUB  
MANSFELD

# ZADÁNÍ



## ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

### I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Mansfeld** Jméno: **Jakub** Osobní číslo: **437736**  
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**  
Zadávající katedra/ústav: **Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**  
Studijní program: **Teoretický základ strojního inženýrství**  
Studijní obor: **bez oboru**

### II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

**ANALÝZA NALISOVANÉHO SPOJE PŘI ZATÍŽENÍ KROUTÍCÍM MOMENTEM**

Název bakalářské práce anglicky:

**Analysis of the mechanical properties of pressed cylinders when the torque load**

Pokyny pro vypracování:

Analýzujte mechanické vlastnosti variant konstrukčních úprav kontaktního povrchu nalisovaného spoje v programu MKP Abaqus. Zaměřte se na třecí síly působící obvodovým směru spoje. Bakalářskou práci formulujte v následujících kapitolách:

- 1) Rešerše teorie
- 2) Návrh analytických experimentů - návrh nalisovaného spoje klasickým výpočtem.
- 3) Návrh numerických experimentů - simulace v MKP, analýza konstrukčních úprav nalisovaného spoje
- 4) Závěry

Seznam doporučené literatury:

1. Michalec, J. a kolektiv: Pružnost a pevnost I. skripta ČVUT v Praze, 2006.
2. Michalec, J. a kolektiv: Pružnost a pevnost II. skripta ČVUT v Praze, 2006.

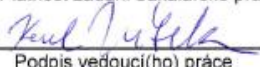
Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

**Ing. Karel Vitek ČSc., ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky FS**

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: **28.04.2017** Termín odevzdání bakalářské práce: **18.08.2017**

Platnost zadání bakalářské práce: \_\_\_\_\_

  
Podpis vedoucí(ho) práce

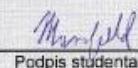
  
Podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

  
Podpis děkana(ky)

### III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

24.4.2017  
Datum převzetí zadání

  
Podpis studenta

## ANOTAČNÍ LIST

Jméno autora:	Jakub
Příjmení autora:	Mansfeld
Název práce:	Analýza nalisovaného spoje při zatížení kroutícím momentem
Anglický název:	Analysis of the mechanical properties of pressed cylinders when the torque load
Akademický rok:	2016/2017
Studijní program:	Teoretický základ strojního inženýrství
Ústav/odbor:	Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky / Odbor pružnosti a pevnosti
Vedoucí:	Ing. Karel Vítek, CSc.
Konzultant:	Ing. Jaromír Fumfera
Bibliografické údaje:	počet stran: 37 počet obrázků: 37 počet příloh: 01
Klíčová slova:	Kroutící moment, nalisovaný spoj, náboj a hřídel, drážka, napětí, deformace
Keywords:	Torque load, pressed cylinders, hub and shaft, groove, stress, deformation
Abstrakt:	<p>Předmětem bakalářské práce <i>Analýza nalisovaného spoje při zatížení kroutícím momentem</i> je porovnání vlivu konstrukčních úprav kontaktního povrchu nalisovaného spoje na přenos kroutícího momentu. Analyticky je navržen nalisovaný spoj s konkrétními parametry. Následně je simulován v programu Abaqus metodou konečných prvků. Poté je v programu Abaqus tento nalisovaný spoj několikrát simulován s úpravou kontaktního povrchu náboje variantami podélných drážek. Výsledné mezní kroutící momenty, které pro jednotlivé varianty úprav nalisovaný spoj přenesou jsou porovnány a tím jsou možnosti úprav náboje podélnou drážkou vyhodnoceny.</p>
Abstract:	<p>The subject of the bachelor thesis <i>Analysis of the mechanical properties of pressed cylinders when the</i></p>

*torque load* is a comparison of the influence of the structural modifications of the contact surface of the pressed cylinders on the torque load. Pressed cylinders are analytically devised with specific parameters. Then it is simulated in the Abaqus program by the finite element method. Then press cylinders have been simulated several times with the modification of the hub contact surface by variants of the longitudinal grooves. The resulting ultimate torque loads, which are pressed cylinders with the individual variants of the longitudinal groove able to withstand, are compared and evaluated.

## PODĚKOVÁNÍ

Tímto bych rád poděkoval vedoucímu této bakalářské práce Ing. Karlu Vítkovi, CSc. za odborné vedení, vstřícný přístup, ochotu a čas, který mi po celou dobu vytváření této bakalářské práce věnoval. Rovněž tímto děkuji Ing. Jaromírovi Fumferovi za pomoc při realizaci této úlohy v programu Abaqus.

## PROHLÁŠENÍ O AUTORSTVÍ

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Analýza nalisovaného spoje při zatížení kroutícím momentem* vypracoval samostatně pod vedením Ing. Karla Vítka, CSc. Veškerou použitou literaturu a zdroje uvádím na konci této práce.

V Praze dne .....

.....

Jakub Mansfeld

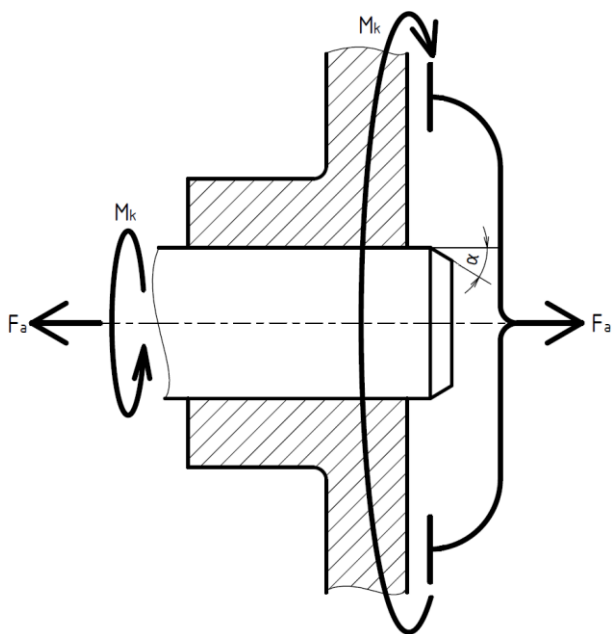
## Obsah

1	Úvod .....	7
2	Teorie tlustostěnných nádob.....	10
2.1	Rovnováha elementu v radiálním směru .....	10
2.2	Poměrná prodloužení v tečném a radiálním směru .....	11
2.3	Hlavní napětí.....	12
2.4	Vyjádření radiálního posuvu $u = u(x)$ .....	12
2.4.1	Řešení Eulerovy homogenní diferenciální rovnice odhadem .....	12
2.4.2	Řešení kvadraturou .....	13
2.5	Výpočet hlavních napětí .....	14
2.5.1	Určení konstant K a C .....	14
2.6	Grafické znázornění .....	15
3	Určení přesahu $\Delta r_2$ pro nalisování .....	16
3.1	Výpočet pro různé materiály .....	19
4	Přenos kroutícího momentu.....	19
5	Výpočet kroutícího momentu .....	20
6	Výpočet metodou konečných prvků.....	23
6.1	Výpočet kroutícího momentu metodou konečných prvků .....	24
6.2	Výpočet lisovací síly .....	25
6.3	Výpočet s kruhovou drážkou na vnitřním povrchu náboje .....	26
6.4	Porovnání nalisovaného spoje s drážkou a bez drážky .....	27
7	Vliv velikosti drážky na přenos kroutícího momentu .....	27
8	Výpočet s obdélníkovou drážkou .....	29
9	Šířka drážky.....	30
10	Zmenšování drážky v axiálním směru.....	31
10.1	Výpočet s jemnější sítí .....	32
11	Závěr .....	33
12	Seznamy.....	35
12.1	Seznam použitých označení .....	35
12.2	Seznam obrázků .....	36
12.3	Seznam použité literatury .....	37

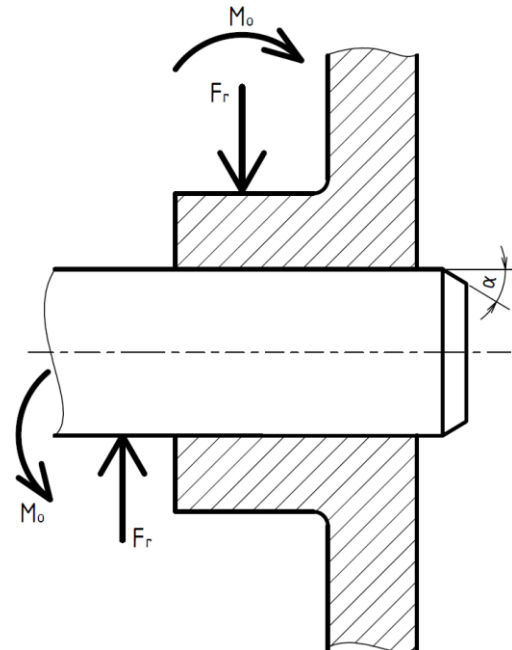
## 1 Úvod

Každý stroj se skládá z určitého počtu základních součástí, které jsou vůči sobě vhodným způsobem uspořádány a vzájemně pospojovány. Významnou skupinou v sestavě strojních zařízení tvoří konstrukční spoje, které jsou určeny k přeměně jednoho druhu pohybu v jiný, k přenosu nějaké veličiny, případně k její změně a někdy i ke změně formy mechanické energie. Mezi nejčastěji užívané konstrukční spoje pro součásti s kruhovým průřezem patří spojení nalisované.

Lisované spoje se řadí mezi spojení nepohyblivá, předepjatá a převážně nerozebíratelná. Nalisováním se obecně myslí vpravení průměrově většího hřídele do menšího otvoru náboje. Následně se ve stykových plochách indukují rovnoměrně rozložený tlak, na kterém závisí požadovaná únosnost spoje. Podle druhu vnějšího zatížení a způsobu jeho přenosu mezi hřídelem a nábojem slouží spojení k přenosu kroutícího momentu a axiální síly – viz *obr. 1* nebo k přenosu ohybového momentu a radiální síly – viz *obr. 2*.



*Obr. 1 Přenos kroutícího momentu a axiální síly nalisovaným spojem*



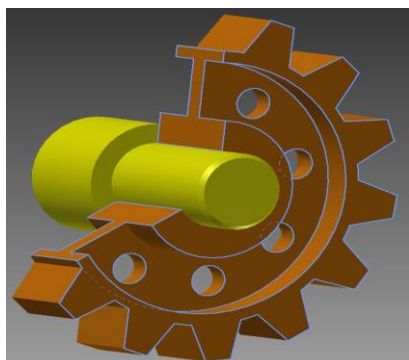
*Obr. 2 Přenos ohybového momentu a radiální síly nalisovaným spojem*

Charakteristickým znakem a základním vstupním údajem každého nalisovaného spoje je jeho přesah  $\Delta r$ . Vůči poloměru průřezu se jedná o hodnotu relativně malou. Zajišťuje pevné sevření hřídele nábojem tak, že se hřídel s nalisovanou součástí chová z hlediska tvarové soudržnosti jako celek.

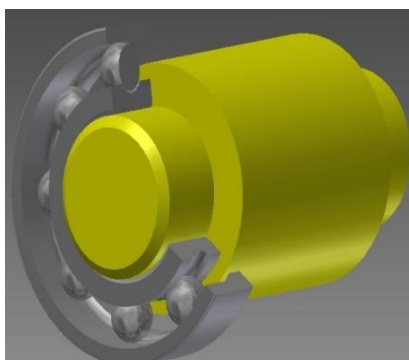
Mezi hlavní důvody pro využívání nalisovaných spojení se řadí konstrukční jednoduchost a velká únosnost při přenosu sil a momentů od klidného zatížení až po rázy. Nosný průřez hřídele nemusí být zeslaben drážkou pro klín nebo pera a proto nemusí být potřeba spoj pojišťovat proti uvolnění nebo posunutí. Mezi nevýhody nalisovaného spoje patří přesná výroba, náročná montáž, nerozebíratelnost spoje, případně náročná demontáž.



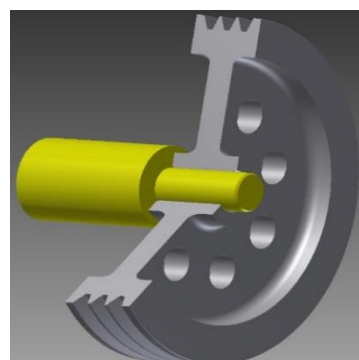
Tohoto spojení se využívá k upevnění kol – viz *obr. 3*, valivých ložisek – viz *obr. 4*, řemenic – viz *obr. 5*, setrvačnicků, rotorů turbín a elektromotorů aj. na jejich hřídele nebo také k upevnění ozubených věnců na tělesa kol.



*Obr. 3 Nalisované ozubené kolo*

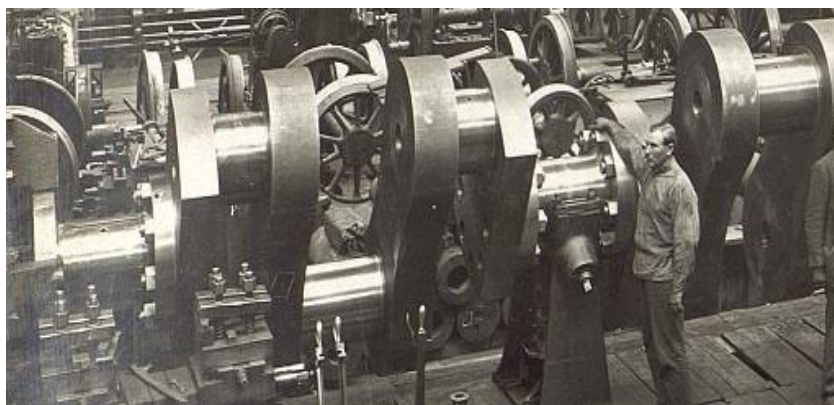


*Obr. 4 Nalisované radiální ložisko*

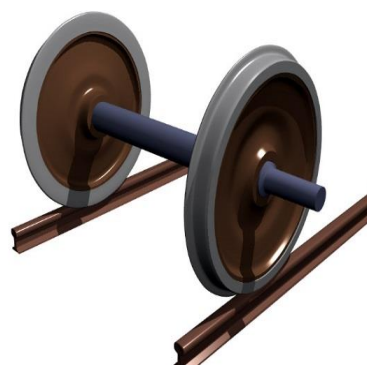


*Obr. 5 Nalisovaná řemenice*

Dále se spojení aplikuje u součástí, které se nedají z výrobních důvodů zhotovit celistvé, jako jsou velké klikové hřídele – viz *obr. 6*, nákolky železničních kol – viz *obr. 7*, hřídelové spojky aj.



*Obr. 6 Kliková hřídel*



*Obr. 7 Nákolky železničních kol*

Nalisovaného spoje dosáhneme lisováním podélným, tj. za studena nebo lisováním příčným, tj. za tepla.

Lisování za studena se zpravidla provádí u součástí malých rozměrů, tj. do průměru cca 50 mm a je prováděné mechanicky pomocí lisu. Pro zajištění správné funkce spojení je nutné zkosit ostré hrany na vnější i vnitřní součásti. Tím dojde k usnadnění nalisování, zmenšení lisovací síly a zvýšení spolehlivosti spoje. Ostré hrany spojovaných součástí vyhlazují stykové plochy a tím zmenšují přesah. Zejména je nutno pečlivě zkosit hranu na vnitřní součásti, která je zpravidla z tvrdšího materiálu než vnější součást. Velikost zkosení bývá  $\alpha = 5^\circ$  až  $15^\circ$ .

Záporem tohoto jinak jednoduchého způsobu je částečné stržení (plastizace) povrchových nerovností a tím zmenšení původního přesahu a vznik možného zadírání a nerovnoměrné deformace součástí. Aby nedocházelo k zadírání a výsledný spoj vyhověl předepsanému namáhání, jsou stykové plochy naolejovány.

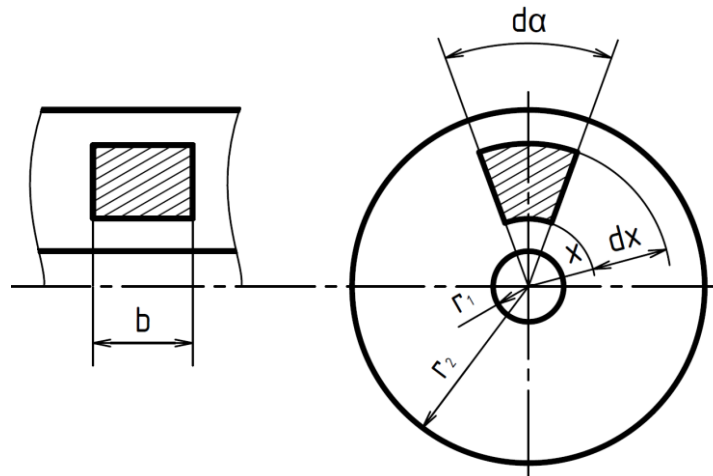
Lisování za tepla se provádí po ohřevu náboje pomocí nenásilného zasunutí součástí nebo naopak po ochlazení hřídele. Po ustálení tepelně upravované součásti na původní teplotu vznikne ve stykových plochách tlak, který odpovídá původnímu přesahu součástí  $\Delta r$ . Toto příčné lisování nenarušených mikronerovností vede k pevnému sepětí povrchů a k únosnosti spoje cca 1,5 krát vyšší než při lisování za studena. Teplota ohřevu je závislá na materiálu a vzhledem ke změně jeho struktury by neměla přesáhnout 200°C až 400°C. Ochlazování se využívá spíše u menších hřídelů. Při použití kyseliny uhličité se dosahuje teploty  $-79^{\circ}\text{C}$  a při použití zkapalněného vzduchu až  $-196^{\circ}\text{C}$ .

Z hlediska demontáže, jelikož se jedná o nepohyblivý spoj, vede násilné oddělení součástí k poškození stykových ploch a někdy i k destrukci součástí. Po případné následné montáži již spoj nedosahuje prvotní únosnosti. Výjimku mohou představovat spoje s nevelkým přesahem snadno montovatelné i demontovatelné za tepla.

V praxi jsou naše výpočty a významné veličiny, jako je tlak ve stykových plochách určující únosnost spoje a na něm závislý přesah  $\Delta r$ , ovlivněny skutečností, že průměry stykových ploch lze vyrobít jen v rámci jistých tolerančních polí. Je nutné zvolit správné uložení v soustavě jednotné díry, resp. v soustavě jednotného hřídele a skutečný přesah se tak bude pohybovat v rozmezí daném zvoleným uložení. Toto vše je nutné zohlednit pro požadovanou funkci nalisovaného spoje.

## 2 Teorie tlustostěnných nádob

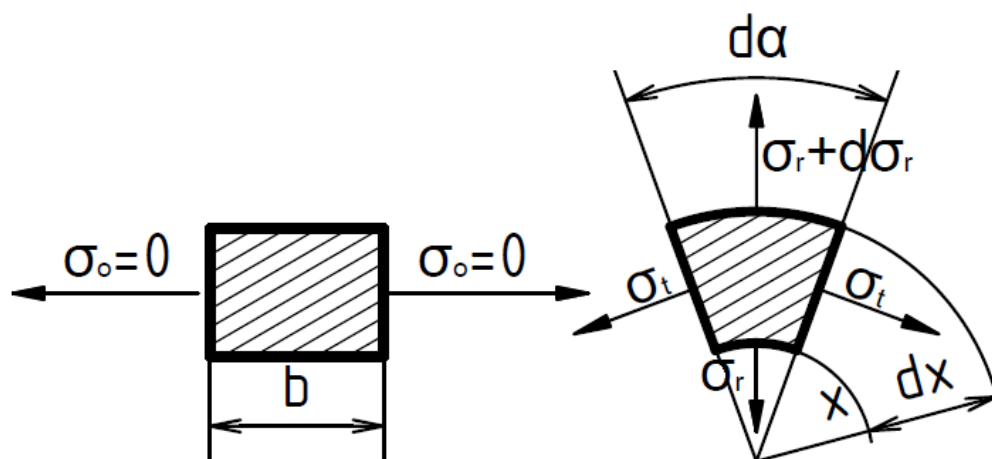
Uvažujeme konstrukční prvky tvaru dutého kruhového válce, zatížené rovnoměrně rozloženými tlaky na vnitřním i na vnějším povrchu, přičemž tloušťka stěny tohoto válce není zanedbatelná vzhledem k jeho poloměru. Deformace a napětí tělesa jsou rotačně symetrické a závisí jen na vzdálenosti od osy rotace. Zároveň předpokládáme platnost Hookeova zákona a napětí a deformace vyšetřujeme v takové vzdálenosti od okrajů nádoby, že napjatost ani deformace nejsou ovlivněny okrajovými podmínkami. Tlustostěnné nádoby nemají rovnoměrně rozložena napětí po tloušťce stěny a průběh těchto napětí odvozujeme z vytknutého elementu ze stěny nádoby, viz. obr. 8.



Obr. 8 Element zobrazený v tlustostěnné nádobě

### 2.1 Rovnováha elementu v radiálním směru

K vytknutému elementu stěny přiřadíme hlavní napětí osová, tečná a radiální a zapíšeme silovou rovnici rovnováhy pro radiální směr.



Obr. 9 Namáhání vytknutého elementu

$$(\sigma_r + d\sigma_r) \cdot (x + dx) \cdot d\alpha \cdot b - \sigma_r \cdot x \cdot d\alpha \cdot b = 2 \cdot \sigma_t \cdot b \cdot dx \cdot \sin\left(\frac{d\alpha}{2}\right)$$

Jelikož  $d\alpha$  je malý úhel, zavádíme  $\sin\left(\frac{d\alpha}{2}\right) \approx \frac{d\alpha}{2}$  a rovnice bude mít tvar

$$(\sigma_r + d\sigma_r) \cdot (x + dx) \cdot d\alpha \cdot b - \sigma_r \cdot x \cdot d\alpha \cdot b = \sigma_t \cdot b \cdot dx \cdot d\alpha.$$

Rovnici dále upravíme

$$\begin{aligned} \sigma_r \cdot x \cdot d\alpha \cdot b + \sigma_r \cdot dx \cdot d\alpha \cdot b + d\sigma_r \cdot x \cdot d\alpha \cdot b + d\sigma_r \cdot dx \cdot d\alpha \cdot b - \\ - \sigma_r \cdot x \cdot d\alpha \cdot b = \sigma_t \cdot b \cdot d\alpha \cdot dx \\ \sigma_r \cdot dx + d\sigma_r \cdot x + d\sigma_r \cdot dx = \sigma_t \cdot dx. \end{aligned}$$

Po zanedbání nekonečně malé veličiny vyššího řádu  $d\sigma_r \cdot dx$  získáme rovnici

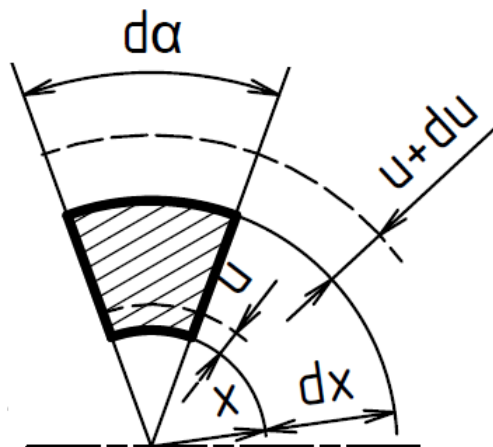
$$\frac{d(\sigma_r \cdot x)}{dx} - \sigma_t = 0.$$

Provedeme derivaci a rovnici rovnováhy elementu v radiálním směru necháme v níže uvedeném tvaru, kde  $\sigma_r$  a  $\sigma_t$  jsou dvě neznámá hlavní napětí, která dále vyjádříme z rozšířeného Hookeova zákona pomocí poměrných prodloužení

$$\frac{d\sigma_r}{dx} \cdot x + \sigma_r - \sigma_t = 0. \quad (1)$$

## 2.2 Poměrná prodloužení v tečném a radiálním směru

Z přetvoření elementu dle obr. 10 je patrné, že obě poměrná prodloužení vyjádříme v závislosti na jediné neznámé funkci, na radiálním posuvu  $u = u(x)$ , kde poloměr  $x$  je nezávislá souřadnice.



Obr. 10 Přetvoření elementu

Pro poměrné prodloužení v tečném směru, tj. pro poměrné prodloužení vnitřního oblouku o poloměru  $x$  platí

$$\varepsilon_t = \frac{(x + u)d\alpha - xd\alpha}{xd\alpha} = \frac{u}{x}.$$

Pro poměrné prodloužení elementu v radiálním směru platí

$$\varepsilon_r = \frac{(dx + du) - dx}{dx} = \frac{du}{dx} = u'.$$

### 2.3 Hlavní napětí

Pomocí rozšířeného Hookeova zákona vyjádříme dvě hlavní napětí – tečné a radiální, která jsou závislá pouze na radiálním posuvu  $u = u(x)$ . Zde  $E$  je modul pružnosti v tahu a  $\nu$  je Poissonovo číslo

$$\sigma_t = \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot [\varepsilon_t + \nu \cdot \varepsilon_r] = \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot \left[ \frac{u}{x} + \nu \cdot u' \right]$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot [\varepsilon_r + \nu \cdot \varepsilon_t] = \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot \left[ u' + \nu \cdot \frac{u}{x} \right].$$

### 2.4 Vyjádření radiálního posuvu $u = u(x)$

Do rovnice rovnováhy elementu v radiálním směru (1) dosadíme obě hlavní napětí ve tvaru vyjádřeném v závislosti na radiálním posuvu  $u = u(x)$

$$\frac{d\left(\frac{E}{1 - \nu^2} \cdot \left[ u' + \nu \cdot \frac{u}{x} \right]\right)}{dx} \cdot x + \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot \left[ u' + \nu \cdot \frac{u}{x} \right] - \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot \left[ \frac{u}{x} + \nu \cdot u' \right] = 0.$$

Jelikož výraz  $\frac{E}{1 - \nu^2} \neq 0$  a vyskytuje se v každém členu rovnice, je možné jím celou rovnici vydělit a po derivaci získáme tvar

$$\left[ u'' + \nu \cdot \frac{u'}{x} - \nu \cdot \frac{u}{x^2} \right] \cdot x + u' + \nu \cdot \frac{u}{x} - \frac{u}{x} - \nu \cdot u' = 0$$

$$u'' + \nu \cdot \frac{u'}{x} - \nu \cdot \frac{u}{x^2} + \frac{u'}{x} + \nu \cdot \frac{u}{x^2} - \frac{u}{x^2} - \nu \cdot \frac{u'}{x} = 0.$$

Po matematické úpravě má rovnice rovnováhy tvar Eulerovy diferenciální rovnice

$$x \cdot u'' + u' - \frac{u}{x} = 0 \quad \text{respektive} \quad x \cdot \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} - \frac{u}{x} = 0. \quad (2)$$

Hledanou závislost  $u = u(x)$  můžeme vyjádřit buď pomocí odhadu řešení této homogenní rovnice ve tvaru  $u(x) = x^n$  nebo zapsáním levé strany rovnice do kvadratury, neboli do postupných integrací.

#### 2.4.1 Řešení Eulerovy homogenní diferenciální rovnice odhadem

Řešení odhadujeme ve tvaru

$$u(x) = x^n$$

a postupně derivujeme

$$u' = n \cdot x^{n-1}$$

$$u'' = n \cdot (n - 1) \cdot x^{n-2}$$

a tyto vztahy dosadíme do rovnice rovnováhy (2)

$$x \cdot [n \cdot (n - 1) \cdot x^{n-2}] + n \cdot x^{n-1} - \frac{x^n}{x} = 0$$

$$x^{n-1} \cdot n \cdot (n - 1) + n \cdot x^{n-1} - x^{n-1} = 0$$

$$x^{n-1} \cdot (n \cdot (n - 1) + n - 1) = 0$$

$$x^{n-1} \cdot (n^2 - 1) = 0.$$

Jelikož výraz  $x^{n-1} \neq 0$ , jsou řešením této rovnice dva reálné různé kořeny  $n_1 = 1$  a  $n_2 = -1$  a generují fundamentální systém  $x^{n_1}$  a  $x^{n_2}$ .

Řešení posuvu  $u(x)$  má pak tvar

$$u(x) = C_1 \cdot x^{n_1} + C_2 \cdot x^{n_2},$$

což po dosazení za  $n_1$  a  $n_2$  je

$$u(x) = C_1 \cdot x + \frac{C_2}{x}.$$

## 2.4.2 Řešení kvadraturou

Původní levou stranu rovnice

$$x \cdot u'' + u' - \frac{u}{x} = 0$$

nahradíme ekvivalentním vyjádřením, tj. kvadraturou a postupně integrujeme

$$x \cdot \left[ \frac{1}{x} \cdot (u \cdot x)' \right]' = 0$$

$$\left[ \frac{1}{x} \cdot (u \cdot x)' \right]' = 0$$

$$\frac{d\left[\frac{1}{x} \cdot (u \cdot x)'\right]}{dx} = 0 \Rightarrow d\left[\frac{1}{x} \cdot (u \cdot x)'\right] = 0 \cdot dx \Rightarrow \frac{1}{x} \cdot (u \cdot x)' = \int 0 \, dx$$

$$\frac{1}{x} \cdot (u \cdot x)' = C_1^* \Rightarrow \frac{d(u \cdot x)}{dx} = C_1^* \cdot x \Rightarrow u \cdot x = \int C_1^* \cdot x \, dx$$

$$u \cdot x = \frac{C_1^*}{2} \cdot x^2 + C_2 = C_1 \cdot x^2 + C_2.$$

Závislost radiálního posuvu vyšla shodná pro obě metody hledané funkce

$$u(x) = C_1 \cdot x + \frac{C_2}{x}.$$

## 2.5 Výpočet hlavních napětí

Nyní již známe závislost posuvu  $u(x)$ . Hlavní napětí vyjádříme v závislosti na nezávislé souřadnici  $x$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left[ \frac{u}{x} + \nu \cdot u' \right] = \frac{E}{(1+\nu) \cdot (1-\nu)} \left[ C_1 + \frac{C_2}{x^2} + \nu \cdot C_1 - \nu \frac{C_2}{x^2} \right]$$

$$\sigma_t = \frac{E}{(1+\nu) \cdot (1-\nu)} \left[ C_1 \cdot (1+\nu) + \frac{C_2}{x^2} \cdot (1-\nu) \right]$$

$$\sigma_t = \frac{E \cdot (1+\nu)}{(1+\nu) \cdot (1-\nu)} \cdot C_1 + \frac{E \cdot (1-\nu)}{(1+\nu) \cdot (1-\nu)} \cdot \frac{C_2}{x^2}$$

$$\sigma_t = \frac{E}{(1-\nu)} \cdot C_1 + \frac{E}{(1+\nu)} \cdot \frac{C_2}{x^2}.$$

Rovnici si označíme novými konstantami  $K, C$  a zapíšeme ve tvaru

$$\sigma_t(x) = K + \frac{C}{x^2}.$$

Obdobnou úpravu provedeme s radiálním napětím

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left[ u' + \nu \cdot \frac{u}{x} \right] = \frac{E}{(1+\nu) \cdot (1-\nu)} \left[ C_1 - \frac{C_2}{x^2} + \nu \cdot C_1 + \nu \frac{C_2}{x^2} \right]$$

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\nu) \cdot (1-\nu)} \left[ C_1 \cdot (1+\nu) - \frac{C_2}{x^2} \cdot (1-\nu) \right]$$

$$\sigma_r = \frac{E \cdot (1+\nu)}{(1+\nu) \cdot (1-\nu)} \cdot C_1 - \frac{E \cdot (1-\nu)}{(1+\nu) \cdot (1-\nu)} \cdot \frac{C_2}{x^2}$$

$$\sigma_r = \frac{E}{(1-\nu)} \cdot C_1 - \frac{E}{(1+\nu)} \cdot \frac{C_2}{x^2}$$

$$\sigma_r(x) = K - \frac{C}{x^2}.$$

### 2.5.1 Určení konstant $K$ a $C$

Tyto konstanty řešíme z okrajových podmínek pro radiální napětí, které známe jako záporné hodnoty tlaků  $p_1$  a  $p_2$  na vnitřním i vnějším povrchu nádoby,

$$\sigma_r(r_1) = -p_1 \quad \text{a} \quad \sigma_r(r_2) = -p_2.$$

Dosažení:  $-p_1 = K - \frac{C}{r_1^2} \Rightarrow K = \frac{C}{r_1^2} - p_1$

$$-p_2 = K - \frac{C}{r_2^2} \Rightarrow -p_2 = \frac{C}{r_1^2} - p_1 - \frac{C}{r_2^2} = C \cdot \left( \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) - p_1,$$

odkud již konstanta C je rovna

$$C = (p_1 - p_2) \cdot \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

Zbývá již jen konstanta K, kterou vyjádříme z druhé rovnice

$$K = \frac{C}{r_1^2} - p_1 = \frac{(p_1 - p_2) \cdot \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}}{r_1^2} - p_1 = \frac{p_1 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - p_1$$

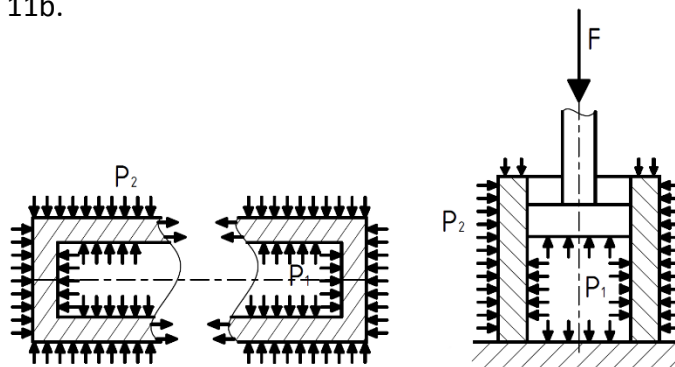
$$K = \frac{p_1 \cdot r_2^2 - p_1 \cdot r_2^2 + p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2},$$

odkud již konstanta K je rovna

$$K = \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

## 2.6 Grafické znázornění

Z odvozených vztahů pro namáhání stěny nádoby v tečném a radiálním směru jsme zjistili, že průběhy radiálního a tečného napětí  $\sigma_r$  a  $\sigma_t$  jsou dány polytropy, které jsou osově souměrné podle konstanty K. V uzavřených tlustostěnných nádobách vzniká navíc osově napětí  $\sigma_o^U$ . Toto napětí vzniká díky tlakům  $p_1$  a  $p_2$ , které působí na dna nádoby a vyvolávají tak tahové nebo tlakové namáhání pláště nádoby, viz. obr. 11a. Otevřené tlustostěnné nádoby nepřenášejí od tlaků  $p_1$  a  $p_2 \rightarrow 0$  téměř žádnou osovou sílu a osově napětí  $\sigma_o^O$  tedy uvažujeme rovno nule, viz. obr. 11b.



Obr. 11a Namáhání uzavřené silnostěnné nádoby    Obr. 11b Namáhání otevřené silnostěnné nádoby

Výsledkem jsou vztahy, kterými kompletně popisujeme napětí ve stěně tlustostěnných nádob.

$$\sigma_t(x) = K + \frac{C}{x^2}$$

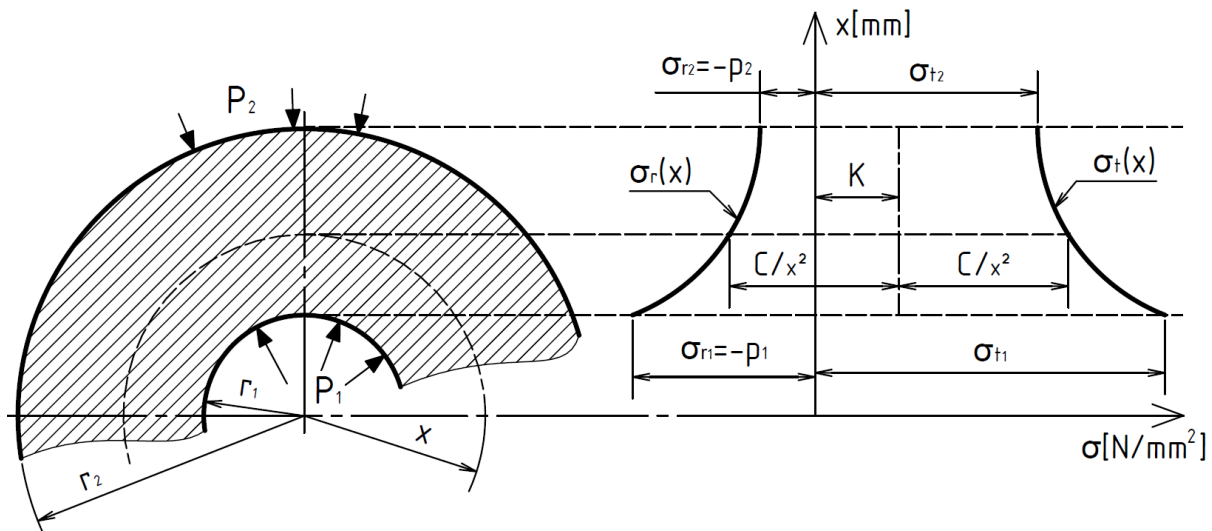
$$\sigma_r(x) = K - \frac{C}{x^2}$$



$$\sigma_o^U = \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad \sigma_o^O = 0$$

$$K = \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad C = (p_1 - p_2) \cdot \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

Obr. 12 popisuje stav napětí při vnitřním přetlaku, tj.  $p_1 > p_2$ .



Obr. 12 Průběhy napětí v radiálním a tečném směru

### 3 Určení přesahu $\Delta r_2$ pro nalisování

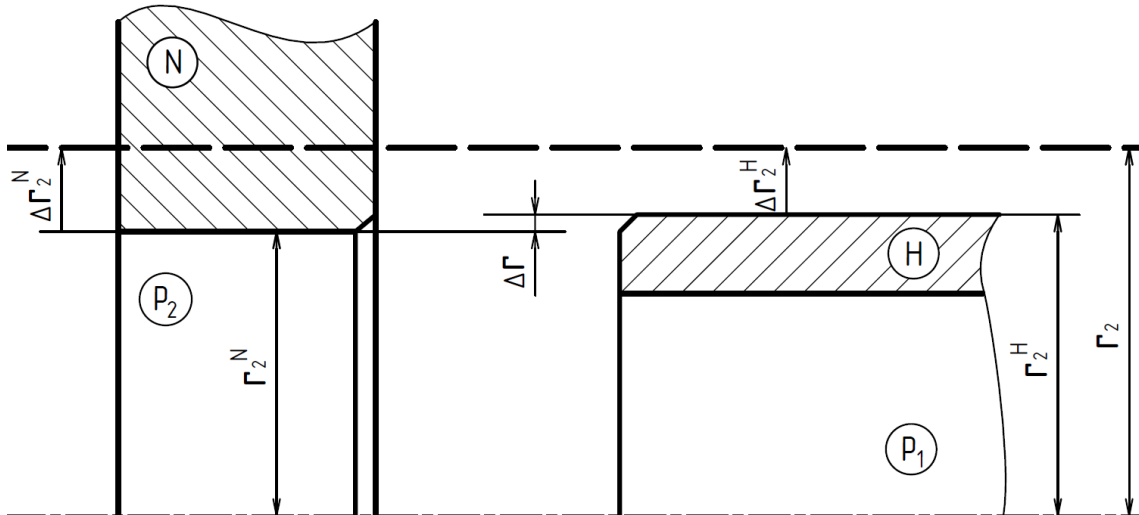
Pro správnou funkci nalisovaného spoje, tj. pro přenos osové síly nebo kroučícího momentu, je potřeba dosáhnout pevného spojení náboje s hřídelem. Toto je zajištěno vpravením průměrově většího hřídele do menšího otvoru náboje. Ve spojených součástech vznikají pružné a někdy částečně i plastické deformace. Pružné deformace vyvolávají v součástech napětí, jejichž působením jsou spojené součásti navzájem přitlačovány a tak předpokládáme, že se ve stykových plochách indukuje rovnoměrně rozložený tlak  $p_2$ . Na hodnotě tlaku  $p_2$  je závislá požadovaná únosnost spoje.

Toto vše je zajištěno vypočteným přesahem, při jehož určování budeme vycházet z následujících předpokladů.

- 1) Náboj a hřídel uvažujeme jako otevřené silnostěnné nádoby a tedy  $\sigma_o^N = \sigma_o^H = 0$ .
- 2) Náboj i hřídel jsou vyrobené z Hookeovského materiálu.
- 3) Celý proces se odehrává v oblasti malých (elastických) deformací.
- 4) Jelikož se u kovových materiálů hodnota přesahu udává v řádu tisíců nebo desetitisíců poloměru, uvažujeme

$$r_2^N \approx r_2^H \approx r_2.$$

Situaci nalisování popisuje obr. 13, ze kterého odvodíme vztah pro hledaný přesah.



Obr. 13 Přesah při nalisování

Po nalisování součástí a zatížení nádob vnitřním přetlakem  $p_1$  a vnějším přetlakem  $p_2$  se poloměr hřídele zvětší o  $\Delta r_2^H$  a poloměr v náboji se zvětší o  $\Delta r_2^N$ . Tyto poloměry se ustaví na společném poloměru  $r_2$ . Lze tedy pro hledaný přesah zapsat rovnici

$$\Delta r = \Delta r_2^N - \Delta r_2^H .$$

Rovnici vydělíme poloměrem  $r_2$  a získáme bezrozměrný tvar

$$\frac{\Delta r}{r_2} = \frac{\Delta r_2^N}{r_2} - \frac{\Delta r_2^H}{r_2} .$$

Nyní využijeme předpokladu přibližně stejných poloměrů a rovnici budeme moci přibližně zapsat jako

$$\frac{\Delta r}{r_2} = \frac{\Delta r_2^N}{r_2^N} - \frac{\Delta r_2^H}{r_2^H} .$$

Z poměrných prodloužení v tečném a radiálním směru dle obr. 10 víme, že  $\varepsilon_t = \frac{u}{x} = \frac{\Delta r}{r}$ , takže rovnice přejde na tvar

$$\frac{\Delta r}{r_2} = \varepsilon_t^N(r_2^N) - \varepsilon_t^H(r_2^H) . \quad (3)$$

Tečné deformace vyjádříme z rozšířeného Hookeova zákona

$$\varepsilon_t^N(r_2^N) = \frac{1}{E^N} \cdot [ \sigma_t^N(r_2^N) - \nu^N \cdot (\sigma_o^N(r_2^N) + \sigma_r^N(r_2^N)) ]$$

$$\varepsilon_t^H(r_2^H) = \frac{1}{E^H} \cdot [ \sigma_t^H(r_2^H) - \nu^H \cdot (\sigma_o^H(r_2^H) + \sigma_r^H(r_2^H)) ] .$$

Nyní využijeme okrajových podmínek pro radiální napětí  $\sigma_r^N(r_2^N) = -p_2$  a  $\sigma_r^H(r_2^H) = -p_2$ .

Z grafického znázornění polytrop, viz. obr. 12, vyplývá, že pro tečná napětí na poloměrech  $r_2^N$  a  $r_2^H$  platí

$$\sigma_t^N(r_2^N) = 2 \cdot K^N + p_2$$

$$\sigma_t^H(r_2^H) = 2 \cdot K^H + p_2.$$

Dosazením těchto vztahů získáme tečné deformace jako

$$\varepsilon_t^N(r_2^N) = \frac{1}{E^N} \cdot [2 \cdot K^N + p_2 - \nu^N \cdot \sigma_o^N(r_2^N) + \nu^N \cdot p_2]$$

$$\varepsilon_t^H(r_2^H) = \frac{1}{E^H} \cdot [2 \cdot K^H + p_2 - \nu^H \cdot \sigma_o^H(r_2^H) + \nu^H \cdot p_2].$$

Z předpokladu otevřené silnostěnné nádoby je osové napětí náboje i hřídele nulové. Zároveň uvažujeme stejný materiál náboje i hřídele, tzn.  $E^N = E^H = E$  a zároveň  $\nu^N = \nu^H = \nu$ . Tím se rovnice tečných deformací zjednoduší na tvar

$$\varepsilon_t^N(r_2^N) = \frac{1}{E} \cdot [2 \cdot K^N + p_2 + \nu \cdot p_2]$$

$$\varepsilon_t^H(r_2^H) = \frac{1}{E} \cdot [2 \cdot K^H + p_2 + \nu \cdot p_2].$$

Poměrná prodloužení v tomto tvaru dosadíme do bezrozměrné rovnice pro přesah a upravíme

$$\frac{\Delta r}{r_2} = \varepsilon_t^N(r_2^N) - \varepsilon_t^H(r_2^H) = \frac{1}{E} \cdot [2 \cdot K^N + p_2 + \nu \cdot p_2] - \frac{1}{E} \cdot [2 \cdot K^H + p_2 + \nu \cdot p_2]$$

$$\frac{\Delta r}{r_2} = \frac{1}{E} \cdot [2 \cdot K^N + p_2 + \nu \cdot p_2 - 2 \cdot K^H - p_2 - \nu \cdot p_2]$$

$$\frac{\Delta r}{r_2} = \frac{1}{E} \cdot [2 \cdot K^N - 2 \cdot K^H]$$

a hledaný přesah zajišťující pevné spojení náboje s hřídelem je dán vzorcem

$$\Delta r = \frac{2 \cdot r_2}{E} \cdot [K^N - K^H].$$

Konstanty  $K^N$  a  $K^H$  jsou dány již známými vztahy

$$K^H = \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

$$K^N = \frac{p_2 \cdot r_2^2 - p_3 \cdot r_3^2}{r_3^2 - r_2^2}.$$

Při uvažování plného hřídele bychom hledaný přesah získali dosažením  $r_1 = 0$  a výslednou hodnotu přesahu určíme pomocí vztahu

$$\Delta r = \frac{2 \cdot r_2}{E} \cdot [K^N + p_2].$$

### 3.1 Výpočet pro různé materiály

Z konstrukčních důvodů se často nalisovaný spoj sestává z odlišných materiálů náboje a hřídele, tj.  $E^N \neq E^H$ ,  $\nu^N \neq \nu^H$ . Vztah pro přesah získáme opět z bezrozměrné rovnice (3), kterou následně upravíme.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta r}{r_2} = \varepsilon_t^N(r_2^N) - \varepsilon_t^H(r_2^H) = \frac{1}{E^N} \cdot [2 \cdot K^N + p_2 - \nu^N \cdot \sigma_o^N(r_2^N) + \nu^N \cdot p_2] - \\ - \frac{1}{E^H} \cdot [2 \cdot K^H + p_2 - \nu^H \cdot \sigma_o^H(r_2^H) + \nu^H \cdot p_2] \end{aligned}$$

Z předpokladu otevřené silnostěnné nádoby je opět osově napětí náboje i hřídele nulové a výsledný vztah pro přesah odlišných materiálů náboje a hřídele získáme úpravou bezrozměrné rovnice

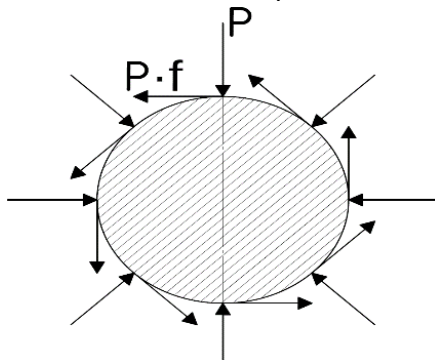
$$\begin{aligned} \frac{\Delta r}{r_2} = \frac{E^H \cdot [2 \cdot K^N + p_2 + \nu^N \cdot p_2] - E^N \cdot [2 \cdot K^H + p_2 + \nu^H \cdot p_2]}{E^N \cdot E^H} \\ \Delta r = \frac{r_2}{E^N \cdot E^H} \cdot [2 \cdot (E^H \cdot K^N - E^N \cdot K^H) + p_2 [E^H \cdot (1 + \nu^N) - E^N \cdot (1 + \nu^H)]] \end{aligned}$$

Opět při uvažování plného hřídele bychom hledaný přesah získali dosažením  $r_1 = 0$  a výslednou hodnotu přesahu určíme pomocí vztahu

$$\Delta r = \frac{r_2}{E^N \cdot E^H} \cdot [2 \cdot (E^H \cdot K^N + E^N \cdot p_2) + p_2 \cdot [E^H \cdot (1 + \nu^N) - E^N \cdot (1 + \nu^H)]]$$

## 4 Přenos kroutícího momentu

Při určování hodnoty kroutícího momentu, který je nalisovaný spoj schopný přenést, vycházíme z rovnoměrně rozloženého tlaku, indukovaného mezi stykovými plochami náboje a hřídele. Stav hřídele po nalisování popisuje obr. 14.



Zde  $p$  je indukovaný tlak a  $p \cdot f$  je projev tlaku do tečného směru, kde  $f$  je tření.

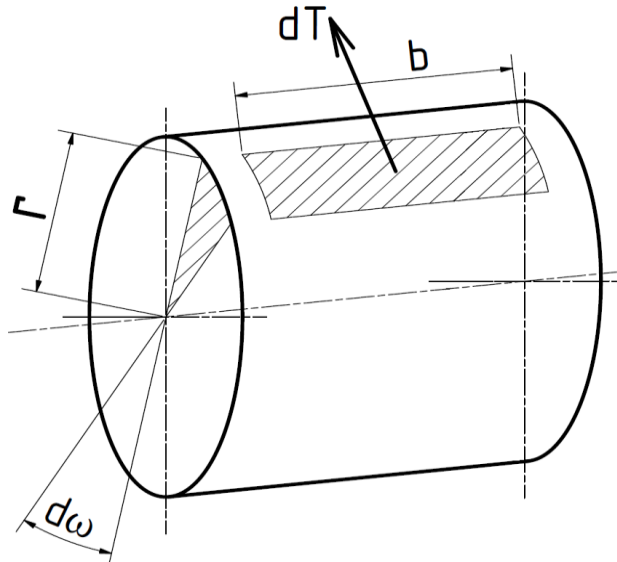
Obr. 14 Stav hřídele po nalisování

Element kroutícího momentu vypočítáme jako silovou dvojici

$$dM_k = r \cdot dT. \quad (4)$$

Zde  $T$  je síla působící na rameni  $r$  a  $r$  je poloměr hřídele.

Hodnotu  $dT$  vyjádříme pomocí tlaku působícího v tečném směru na element plochy  $dA$ .



Obr. 15 Plocha hřídele přenášející kroutící moment

Z obr. 15 je patrné, že

$$dA = b \cdot r \cdot d\omega$$

a hodnota  $dT$  je tedy rovna

$$dT = p \cdot f \cdot dA = p \cdot f \cdot b \cdot r \cdot d\omega.$$

Tento vztah dosadíme do rovnice (4)

$$dM_k = r \cdot p \cdot f \cdot b \cdot r \cdot d\omega$$

a následnou integrací v mezích  $\omega \in \langle 0; 2\pi \rangle$  získáme hledaný kroutící moment přenesený nalisovaným spojem jako

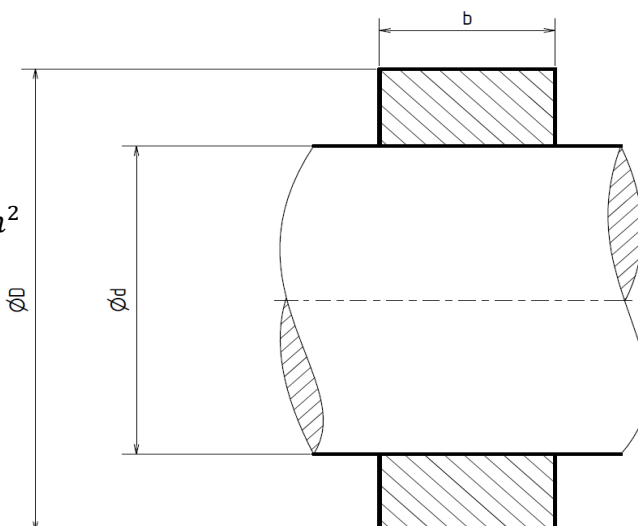
$$M_k = \int_{\omega=0}^{2\pi} dM_k = \int_{\omega=0}^{2\pi} r \cdot p \cdot f \cdot b \cdot r \cdot d\omega$$

$$M_k = 2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot p \cdot f \cdot b.$$

## 5 Výpočet kroutícího momentu

Nyní máme k dispozici všechny důležité vztahy a můžeme určit velikost kroutícího momentu, který nalisovaný spoj dokáže přenést. Uvažujme případ nalisování náboje na plný hřídel, kdy obě součásti jsou vyrobené ze stejných materiálů a o daných parametrech.

Průměr hřídele	$d = 80\text{mm}$
Vnější průměr náboje	$D = 120\text{mm}$
Šířka náboje	$b = 40\text{mm}$
Modul pružnosti v tahu	$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$
Mez kluzu materiálu	$\sigma_k = 300 \text{ N/mm}^2$
Poissonovo číslo	$\nu = 0,3$
Bezpečnost	$k = 2$
Tření	$f = 0,15$



Obr. 16 Grafické znázornění úlohy

Součinitel tření uvažujeme konstantní a shodný pro tečný i axiální směr.

Kroutící moment spočítáme odvozeným vztahem, kde jediná neznámá je tlak indukovaný ve stykových plochách.

$$M_k = p_2 \cdot \pi \cdot d \cdot b \cdot f \cdot \frac{d}{2}$$

Z grafického znázornění napětí na obr. 12 víme, že nejvíce namáhaným místem při shodném materiálu náboje a hřídele je objímka na poloměru  $\frac{d}{2}$ , takže pevnostní podmínku budeme dimenzovat právě k tomuto poloměru a při využití hypotézy  $\tau^{MAX}$  vyjdeme z rovnice

$$\sigma_{red.} = \sigma_{max.} - \sigma_{min.} \leq \sigma_D \cdot$$

Dovolené napětí určíme jako

$$\sigma_D \leq \frac{\sigma_k}{k} = \frac{300}{2} = 150 \text{ N/mm}^2 \cdot$$

Pro naši aplikaci uvažujeme stav vnitřního přetlaku a rovnici dále upravíme

$$\sigma_t^N(r_2) - \sigma_r^N(r_2) \leq \sigma_D$$

$$2 \cdot K^N + p_2 - (-p_2) \leq \sigma_D$$

$$K^N + p_2 \leq \frac{\sigma_D}{2}$$

$$\frac{p_2 \cdot r_2^2 - p_3 \cdot r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} + p_2 \leq \frac{\sigma_D}{2} \cdot$$

Tlak okolí  $p_3$  můžeme vzhledem k ostatním členům rovnice zanedbat a tedy

$$p_2 \cdot \left[ \frac{r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} + 1 \right] = p_2 \cdot \left[ \frac{r_2^2 + r_3^2 - r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \right] \leq \frac{\sigma_D}{2} \cdot$$

Maximální tlak, který může být ve stykových plochách indukován je

$$p_2 \leq \frac{\sigma_D}{2} \cdot \left[ \frac{r_3^2 - r_2^2}{r_3^2} \right] = \frac{\sigma_D}{2} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{r_2}{r_3} \right)^2 \right] = \frac{150}{2} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{40}{60} \right)^2 \right] = 41,66 \text{ N/mm}^2 .$$

Po dosažení získáváme maximální přenesený kroutící moment dosažený při dovoleném namáhání součástí.

$$M_k = 41,67 \cdot \pi \cdot 80 \cdot 40 \cdot 0,15 \cdot 40 = 2\,512\,871,99 \text{ Nmm}$$

Z praktických důvodů je vhodné dopočítat lisovací sílu, potřebný přesah a graficky znázornit namáhání součástí.

Lisovací sílu vyjádříme pomocí indukovaného tlaku, který působí v axiálním směru na stykové plochy spoje. Jelikož uvažujeme shodný součinitel tření pro tečný i axiální směr, je velikost této lisovací síly rovna velikosti síly  $dT$  z kapitoly 4 pro  $\omega \in \langle 0; 2\pi \rangle$ .

$$T = p_2 \cdot \pi \cdot d \cdot b \cdot f = 41,66 \cdot \pi \cdot 80 \cdot 40 \cdot 0,15 = 62\,821,79 \text{ N}$$

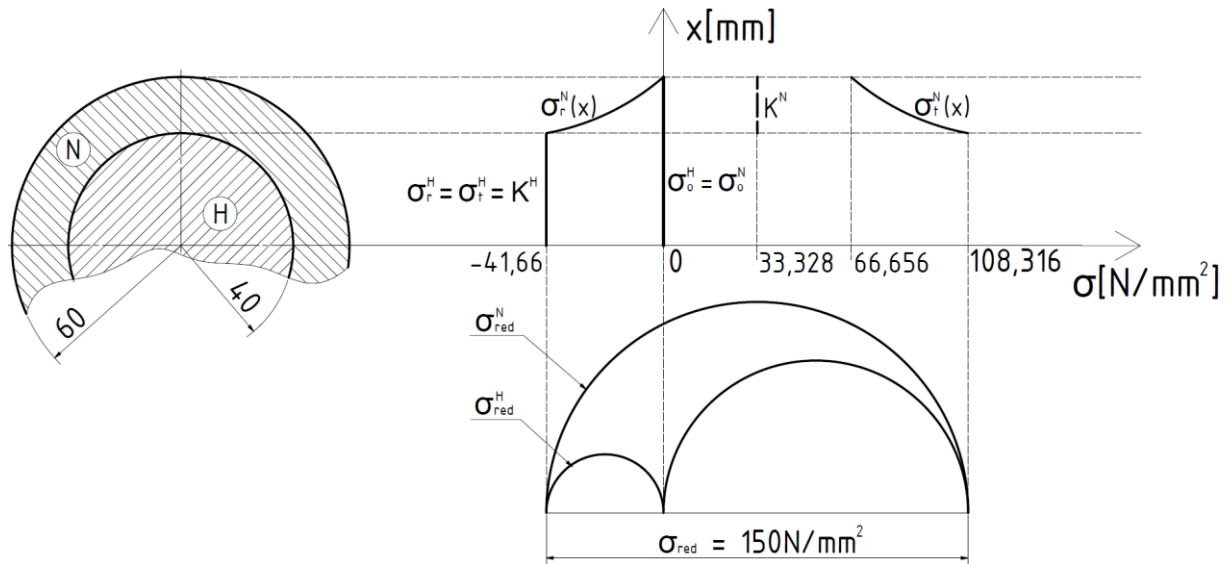
$$\Delta r = \frac{2 \cdot r_2}{E} \cdot [K^N + p_2] = \frac{2 \cdot 40}{2,1 \cdot 10^5} \cdot \left[ \frac{41,67 \cdot 40^2}{60^2 - 40^2} + 41,67 \right] = 0,0286 \text{ mm}$$

$$\sigma_t^N(x) = K^N + \frac{C^N}{x^2} = \frac{41,67 \cdot 40^2}{60^2 - 40^2} + \frac{(41,67) \cdot \frac{40^2 \cdot 60^2}{60^2 - 40^2}}{x^2} = 33,328 + \frac{119980,8}{x^2} \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_r^N(x) = K^N - \frac{C^N}{x^2} = \frac{41,67 \cdot 40^2}{60^2 - 40^2} - \frac{(41,67) \cdot \frac{40^2 \cdot 60^2}{60^2 - 40^2}}{x^2} = 33,328 - \frac{119980,8}{x^2} \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_t^H(x) = K^H + \frac{C^H}{x^2} = \frac{-41,67 \cdot 40^2}{40^2} + \frac{(-41,67) \cdot \frac{0^2 \cdot 0^2}{40^2 - 0^2}}{x^2} = -41,66 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_r^H(x) = K^H - \frac{C^H}{x^2} = \frac{-41,67 \cdot 40^2}{40^2} + \frac{(-41,67) \cdot \frac{0^2 \cdot 0^2}{40^2 - 0^2}}{x^2} = -41,66 \text{ N/mm}^2$$



Obr. 17 Grafické znázornění namáhání spoje včetně Mohrových kružnic

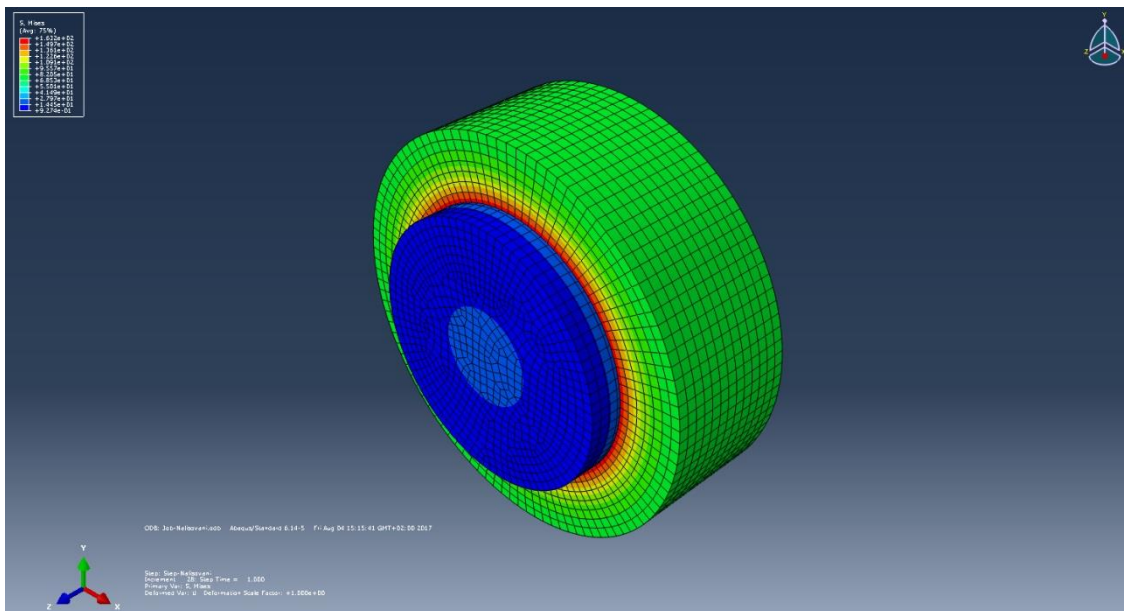
Potřebný přesah  $\Delta r = 0,0286\text{mm}$ .

Maximální přenesený kroutící moment  $M_k = 2\,512\,871,99\text{ Nmm}$ .

## 6 Výpočet metodou konečných prvků

Nyní provedeme výpočet v programu Abaqus. Parametry nalisovaného spoje jsou stejné, jako parametry zadané v kapitole 5.

Stav spoje po simulaci nalisování v programu zobrazuje obr. 18.



Obr. 18 Stav spoje po nalisování

Z analytického výpočtu je spoj dimenzován na maximální dovolené napětí  $\sigma_D \leq 150\text{ N/mm}^2$ . Analytický výpočet však vyšetřuje tato napětí v takové vzdálenosti od okrajů náboje, že napjatost ani deformace nejsou ovlivněny okrajovými podmínkami.

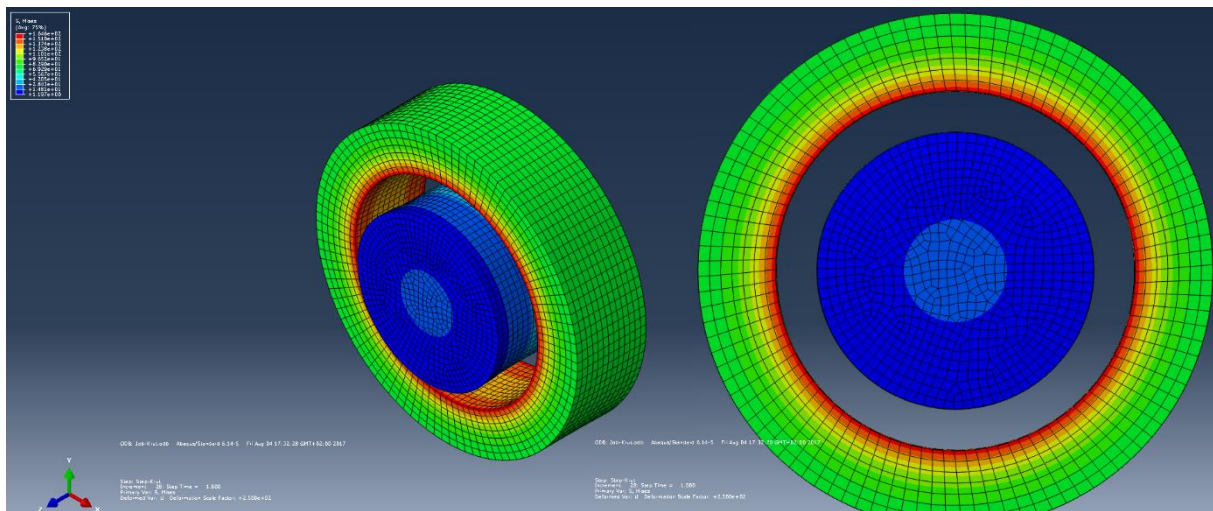


Program Abaqus zohledňuje tyto okrajové podmínky a simuluje reálné namáhání spoje. Hodnoty napětí jednotlivých elementů na vnitřním poloměru náboje nejsou po šířce náboje  $b$  konstantní. Po simulaci nalisování v programu je odečtená hodnota napětí elementu na poloměru  $d/2$  ve středu šířky náboje  $b$  rovna  $\sigma = 152,911 \text{ N/mm}^2$ . Toto napětí se postupně na poloměru  $d/2$  po šířce  $b$  směrem k okrajům nádoby zvyšuje, až dosáhne nejvyšší hodnoty napětí ve spoji  $\sigma = 181,143 \text{ N/mm}^2$ .

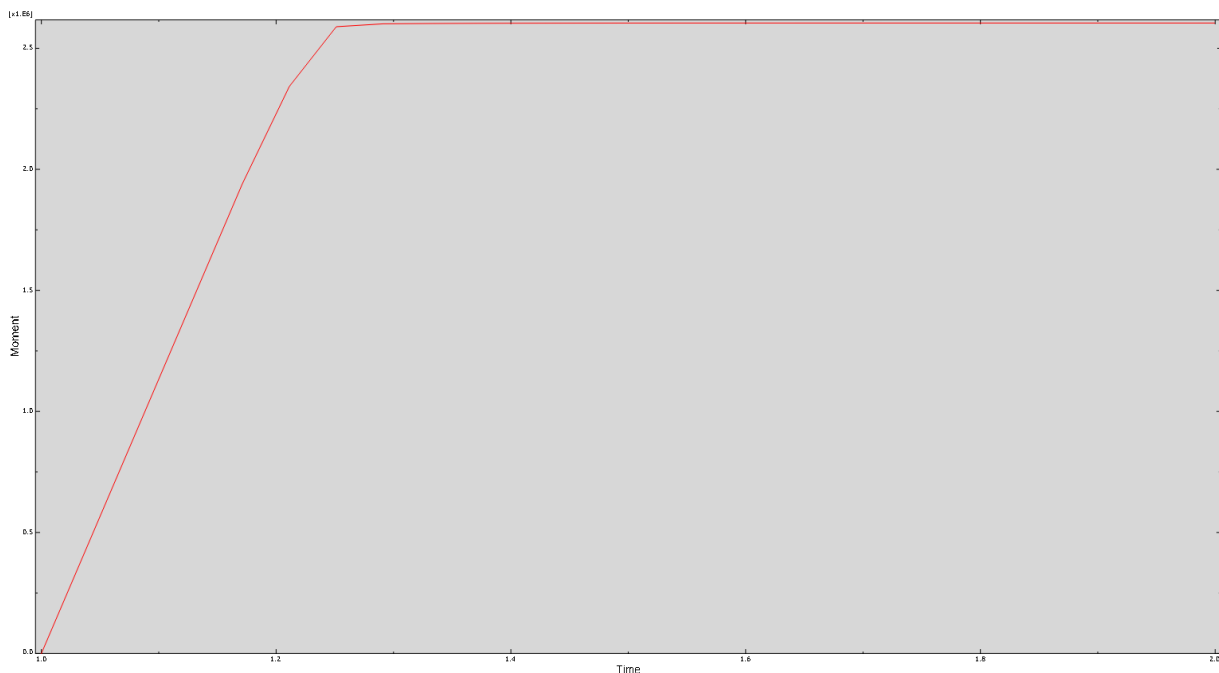
Hodnoty vypočtené v programu Abaqus jsou zpravidla přesnější, protože program zohledňuje více reálných parametrů spoje než analytický výpočet, takže hodnoty vypočtené analyticky a programem se v určitých místech značně liší.

### 6.1 Výpočet kroutícího momentu metodou konečných prvků

Nyní předepíšeme vnějšímu povrchu náboje vhodné radiální natočení vůči hřídeli a z grafu určíme maximální reakční moment, tj. maximální kroutící moment, který je spoj schopen přenést.



Obr. 19 Stav spoje po natočení vnějšího povrchu náboje při zvětšených deformacích



Obr. 20 Graf kroutícího momentu nalisovaného spoje

Grafy reakčních veličin jsou vyjádřené v závislosti na čase. Pro odečet kroutícího momentu odpovídá jednotkový čas nulovému radiálnímu natočení povrchu náboje a maximální čas odpovídá natočení předepsanému.

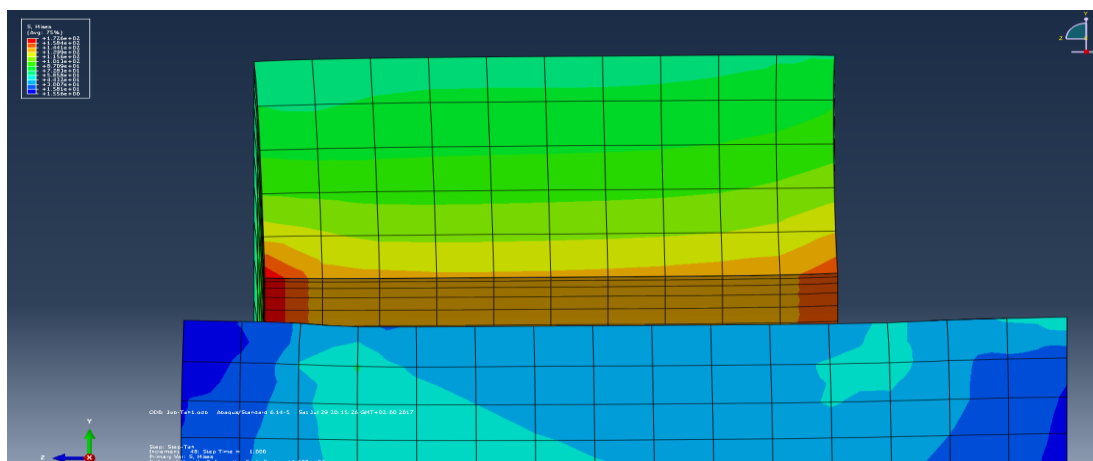
Z grafu je odečtena maximální hodnota reakčního, tj. kroutícího momentu jako

$$M_k = 2\,604\,350\text{ Nmm.}$$

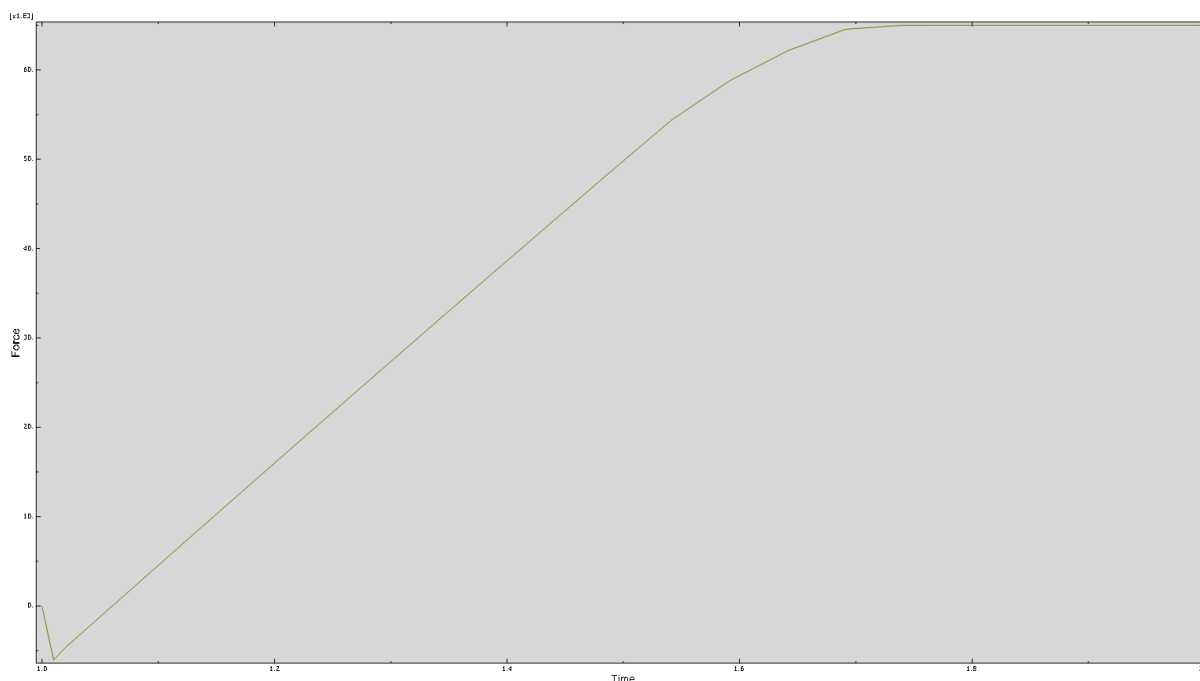
## 6.2 Výpočet lisovací síly

Uvažujme lisování za tepla, kdy nedochází ke stržení povrchových nerovností hřídele a náboje a součásti jsou tedy do sebe vsunuty nenásilně. V místě stykových ploch hřídele a náboje dochází nejen k pevnému sepětí součástí, ale také k zaklínění náboje v hřídeli v axiálním směru.

Únosnost spoje v axiálním směru zjistíme v programu pomocí předepsání axiálního posuvu vnějšího povrchu náboje vůči hřídeli. Následně z grafu analogicky odečteme reakční sílu, tj. axiální sílu, kterou je spoj schopen přenést. Zde je zvoleno hrubší síťování modelu, jelikož s touto silou již po výpočtu nebudeme nijak operovat.



Obr. 21 Stav spoje po axiálním posuvu vnějšího povrchu náboje při zvětšených deformacích



Obr. 22 Graf axiální síly nalisovaného spoje

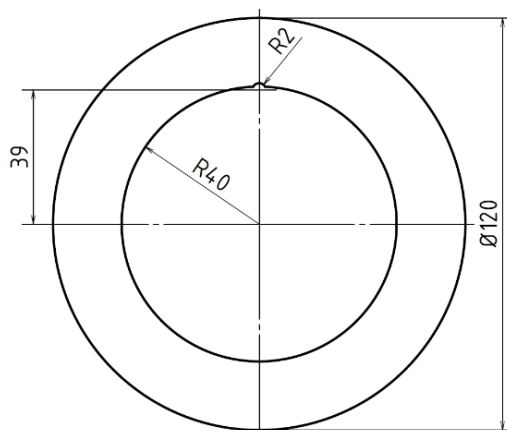
Z grafu je odečtena maximální hodnota reakční, tj. axiální síly jako

$$T = 65\,011\, N.$$

### 6.3 Výpočet s kruhovou drážkou na vnitřním povrchu náboje

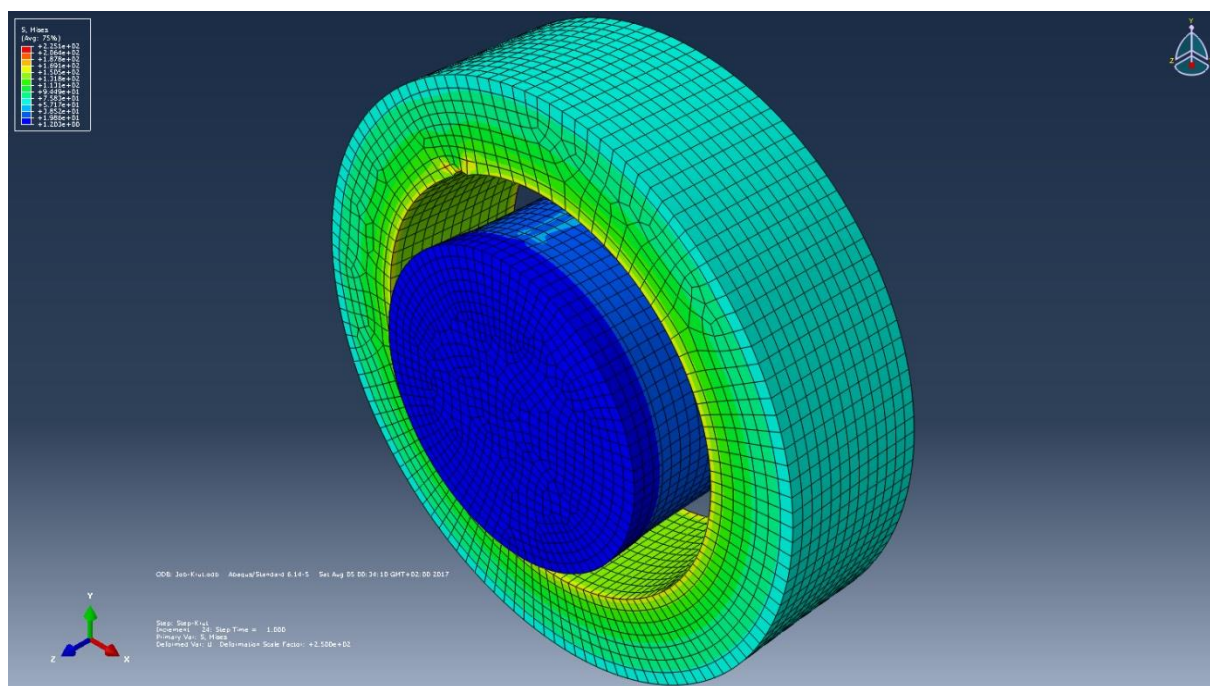
Je tedy možné, že tohoto zaklínění by se rovněž dalo využít, v podobě axiálních drážek, ke zvýšení maximálního přeneseného kroutícího momentu.

Pro jednoduchost uvažujme jednu kruhovou drážku na vnitřním povrchu náboje. Rozměry a parametry nalisovaného spoje jsou stále shodné s přechozími úlohami. Geometrie zvolené drážky je zobrazena na obr. 23.

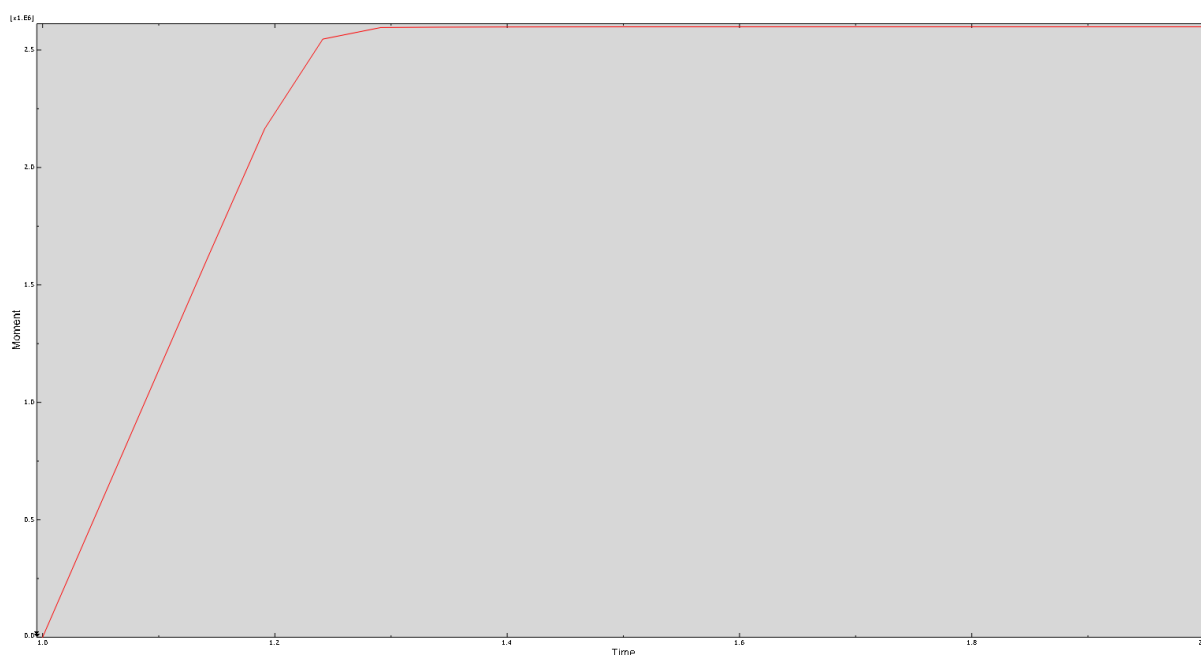


Obr. 23 Geometrie kruhové drážky R2

Nyní postupujeme analogicky. Vnějšímu povrchu náboje s drážkou předepíšeme opět totožné radiální natočení vůči hřídeli, které bylo předepsáno pro náboj s vnitřní válcovou plochou. Poté z grafu určíme maximální kroutící moment.



Obr. 24 Stav spoje s kruhovou drážkou R2 při zvětšených deformacích



Obr. 25 Graf kroutícího momentu pro spoj s kruhovou drážkou R2

Maximální hodnotu kroutícího momentu pro spoj s jednou drážkou na vnitřním povrchu náboje označíme  $\overline{M}_k$ . Z grafu je tato hodnota odečtena jako

$$\overline{M}_k = 2\,599\,030 \text{ Nmm}.$$

#### 6.4 Porovnání nalisovaného spoje s drážkou a bez drážky

Pro porovnání kroutícího momentu přeneseného spojem bez drážky a spojem s jednou drážkou zavádíme součinitel  $\overline{\beta}$ , který nazveme *separace vlivu*. Ten vyjadřuje o kolik procent je kroutící moment přenesený spojem s jednou drážkou vyšší nebo nižší než kroutící moment přenesený spojem bez drážky. Pokud  $\overline{\beta} > 0$ , tak spoj s drážkou přeneše vyšší kroutící moment a naopak pokud  $\overline{\beta} < 0$ , potom spoj přeneše nižší kroutící moment. Součinitel definujeme jako

$$\overline{\beta} = \frac{\overline{M}_k - M_k}{M_k} \cdot 100 [\%].$$

V našem případě tedy

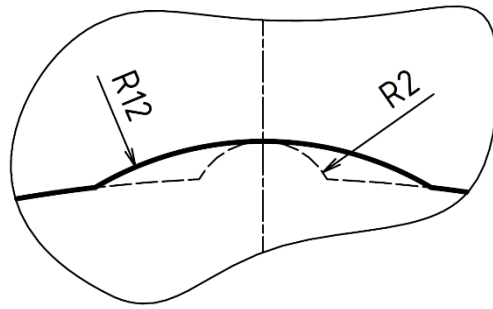
$$\overline{\beta} = \frac{2\,599\,030 - 2\,604\,350}{2\,604\,350} \cdot 100 = -0,2 \%.$$

Po porovnání jsme zjistili, že spoj s jednou drážkou přeneše o 0,2 % nižší kroutící moment než spoj bez drážky. Nyní můžeme zkoumat vliv velikosti a geometrie drážky na přenos  $M_k$ .

## 7 Vliv velikosti drážky na přenos kroutícího momentu

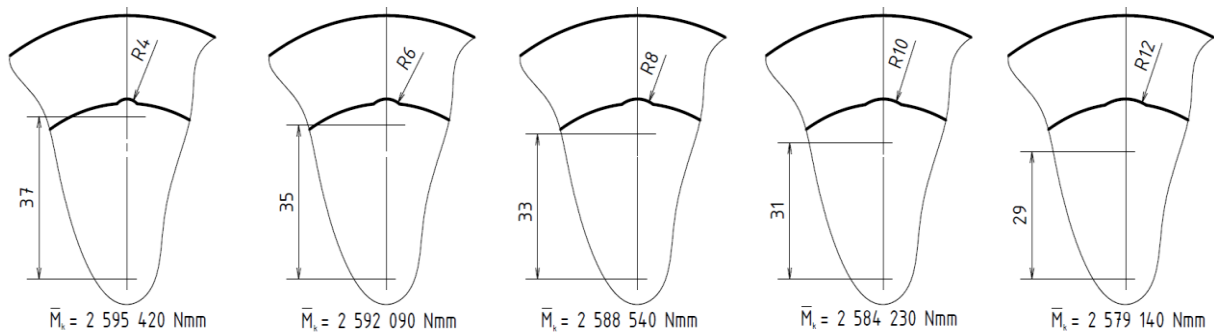
Nalisovaný spoj s kruhovou drážkou o poloměru 2 mm na vnitřním povrchu náboje přeneše kroutící moment  $\overline{M}_k = 2\,599\,030 \text{ Nmm}$ . Poloměr drážky budeme postupně zvětšovat až na 12 mm. Následně předepíšeme vnějšímu povrchu náboje radiální natočení vůči hřídeli jako

v předchozích úlohách. Postup zvětšování drážky je zobrazen na obr. 26, kde je čárkovaně zobrazena původní drážka o poloměru 2 mm.



Obr. 26 Postup zvětšování kruhové drážky

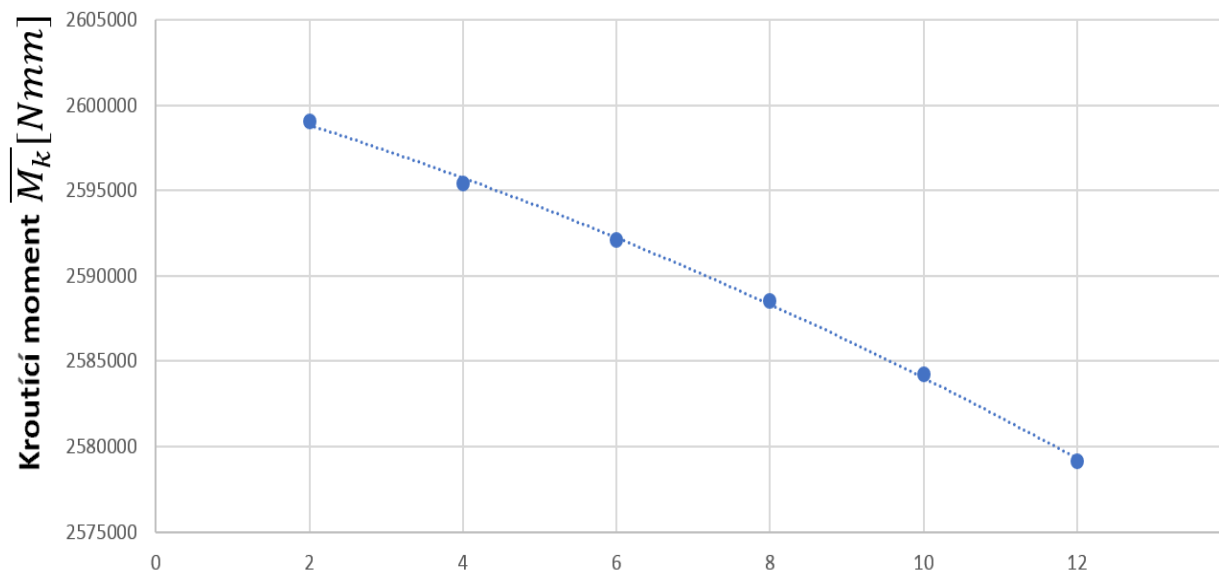
Po simulacích spojů s různými velikostmi drážek jsou v programu z grafů odečteny maximální hodnoty kroutícího momentu pro každou velikost drážky. Pro přehlednost jsou hodnoty odečtených kroutících momentů spolu s jednotlivými drážkami zobrazeny na obr. 27.



Obr. 27 Přenesené hodnoty spojů jednotlivých drážek

Závislost kroutícího momentu na počtu drážek je vynesena do grafu na obr. 28.

$$\text{Závislost } \overline{M}_k = f(R)$$

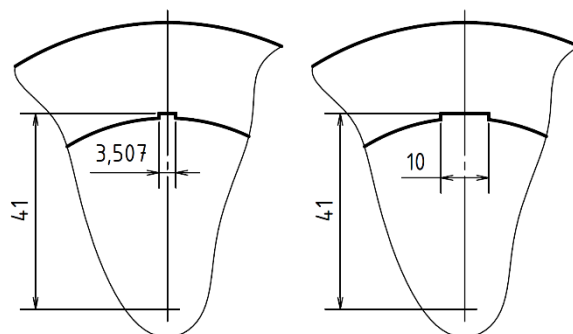


Obr. 28 Graf závislosti  $\overline{M}_k = f(R)$

Z grafu  $\overline{M}_k = f(R)$  je patrné, že kroučící moment je tím nižší, čím větší je poloměr drážky. Prozatím nelze přesně říci, zda-li je takto snižující kroučící moment způsoben zmenšující se stykovou plochou mezi nábojem a hřídelem, zvolenou geometrií drážky nebo nějakými dalšími faktory nalisovaného spoje.

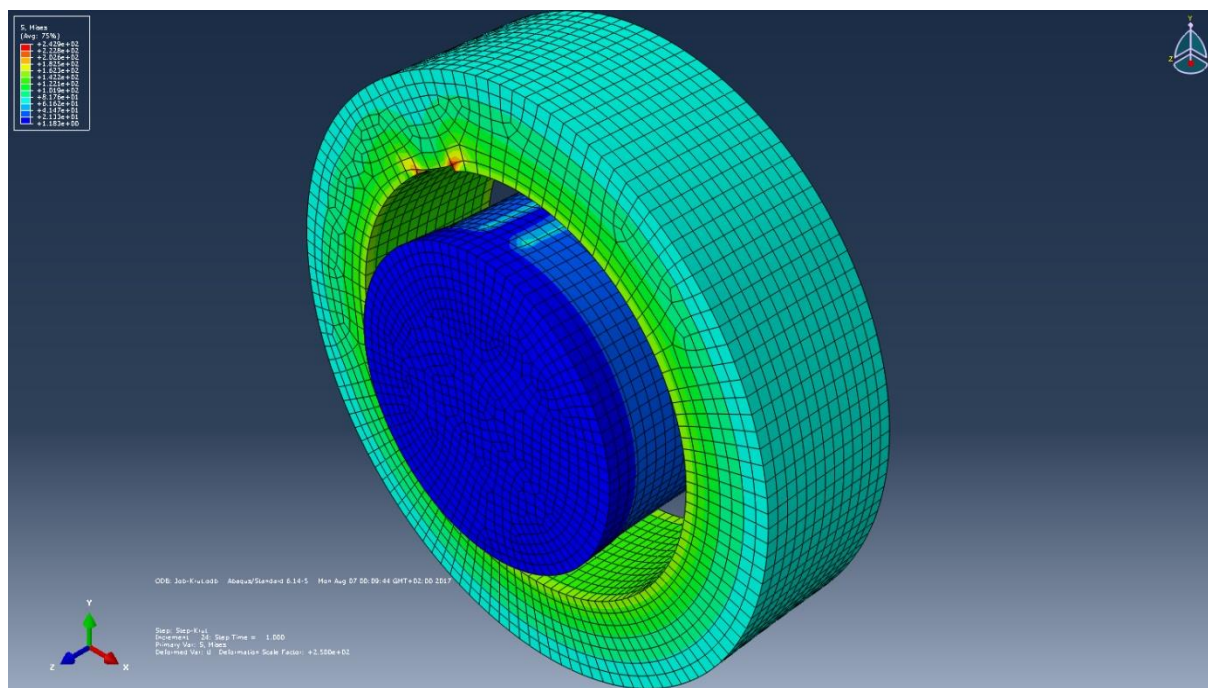
## 8 Výpočet s obdélníkovou drážkou

Nyní zjistíme, jak velký vliv má geometrie drážky na přenos kroučícího momentu. K tomu využijeme obdélníkovou drážku na vnitřním povrchu náboje. Tentokrát budeme analyzovat rovnou obdélníkovou drážku s šířkou 3,507 mm, která odpovídá šířce kruhové drážky R2 a obdélníkovou drážku s šířkou 10 mm, která přibližně odpovídá šířce drážky R10. Geometrie obdélníkových drážek je zobrazena na obr. 29.



Obr. 29 Detail geometrie obdélníkové drážky

Po simulaci nalisování a předepsání radiálního natočení vnějšího povrchu náboje vůči hřídeli odečteme z grafů v programu maximální přenesené kroučící momenty. Nalisovaný spoj s obdélníkovou drážkou šířky 3,507 mm přenesl  $\overline{M}_k = 2\,597\,660\text{ Nmm}$  a spoj s drážkou šířky 10 mm přenesl  $\overline{M}_k = 2\,578\,800\text{ Nmm}$ .



Obr. 30 Stav spoje s obdélníkovou drážkou šířky 10 mm při zvětšených deformacích

Následuje výpis a porovnání kroutících momentů přenesených kruhovou a obdélníkovou drážkou.

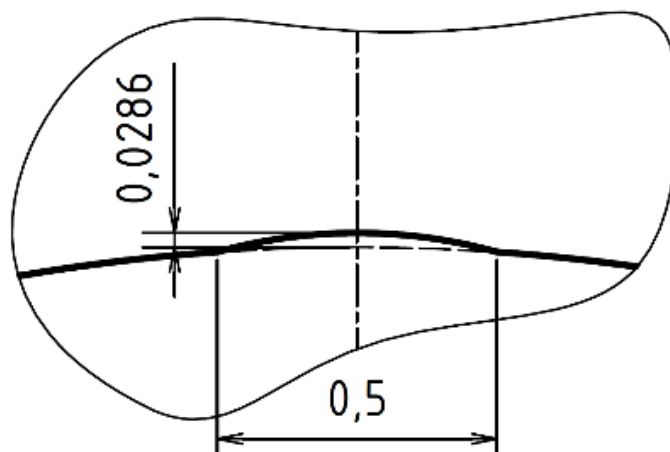
Kruhová drážka R2, resp. kruhová drážka o šířce 3,507 mm	$\overline{M}_k = 2\,599\,030\,Nmm$
Obdélníková drážka o šířce 3,507 mm	$\overline{M}_k = 2\,597\,660\,Nmm$
Kruhová drážka R10, resp. kruhová drážka o šířce 9,884 mm	$\overline{M}_k = 2\,584\,230\,Nmm$
Obdélníková drážka o šířce 10 mm	$\overline{M}_k = 2\,578\,800\,Nmm$

Kroutící moment přenesený kruhovou drážkou R2 je o 1370 Nmm vyšší než kroutícího moment přenesený drážkou obdélníkovou o stejné šířce. Rozdíl mezi kruhovou drážkou R10 a obdélníkovou drážkou o šířce 10 mm je 5430 Nmm při rozdílu šířky drážek 0,116 mm. Z porovnání je patrné, že změna geometrie drážky z kruhové na obdélníkovou sníží hodnotu přeneseného kroutícího momentu.

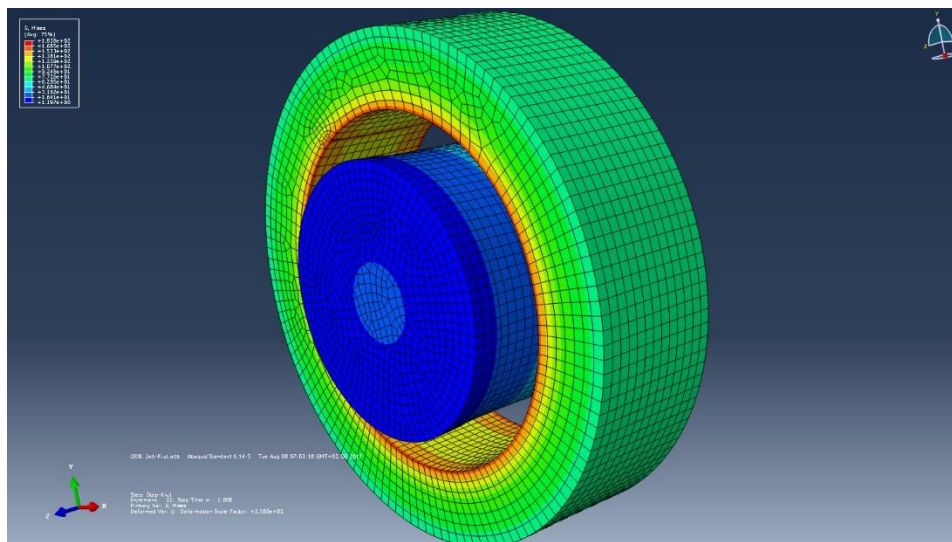
Pro kontrolu byl tento spoj nakonec analyzován s obdélníkovou drážkou menší šířky, konkrétně 2 mm. Spoj při této šířce drážky přenesl kroutící moment  $\overline{M}_k = 2\,600\,080\,Nmm$ . Z vypočtených hodnot plyne, že dominantním faktorem na hodnotu přeneseného kroutícího momentu je velikost kontaktní plochy spoje. Kroutící moment je tím nižší, čím menší je styková plocha mezi hřídelem a nábojem, nehledě na zvolenou geometrii drážky. Změna geometrie má tudíž nepatrný vliv na přenos kroutícího momentu a nelze tedy její změnou očekávat, že by mohla kompenzovat ztrátu plochy způsobenou drážkou nebo nějakým jiným vlivem razantně zvýšit kroutící moment.

## 9 Šířka drážky

Nyní budeme počítat pouze s drážkami kruhovými. Pokusíme se najít vhodnou šířku, která by kompenzovala ztrátu plochy zaklíněním náboje v hřídeli a zjistíme, zda-li by spoj tímto vlivem mohl přenést vyšší kroutící moment. Nejprve zkusíme vytvořit mělkou drážku na úrovni přesahu, abychom snížili ztrátu třecí plochy. Tak zjistíme, jestli by dostatečně malá drážka mohla být řešením, které hledáme. Detail geometrie této drážky je zobrazen na obr. 31, kde je čárkovaně zakreslen průměr 80mm.



Obr. 31 Detail geometrie mělké drážky



Obr. 32 Stav spoje s mělkou drážkou při zvětšených deformacích

V programu je z grafu odečtena maximální hodnota přeneseného kroutícího momentu jako

$$\overline{M}_k = 2\,604\,280 \text{ Nmm} .$$

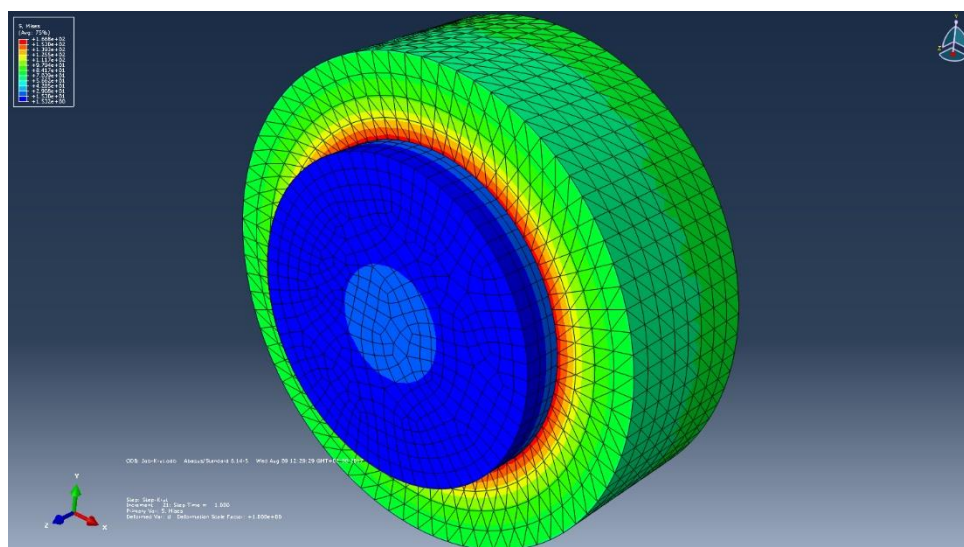
Pro porovnání spočítáme nyní součinitel *separace vlivu*

$$\overline{\beta} = \frac{2\,604\,280 - 2\,604\,350}{2\,604\,350} \cdot 100 = -0,00268 \text{ \%} .$$

Dokonce i spoj s takto malou drážkou přenáší o 0,00268 % menší kroutící moment, než spoj bez drážky. Je tedy nutné zaklínit náboj v hřídeli nějakým způsobem, díky kterému by nedocházelo ke ztrátě třecí plochy a tedy ani ke ztrátě kroutícího momentu.

## 10 Zmenšování drážky v axiálním směru

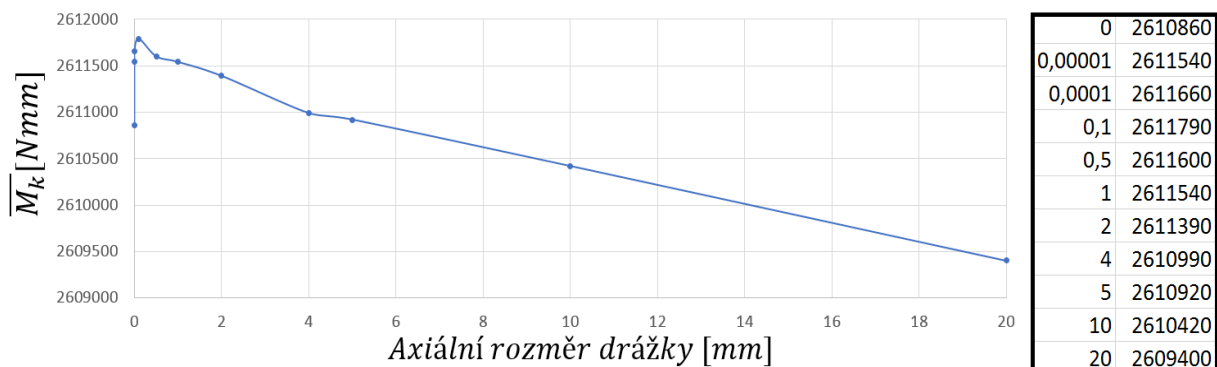
Ztrátě stykové plochy můžeme dále zamezit snižováním velikosti drážky v axiálním směru a drážka tedy nebude procházet celým nábojem. Program Abaqus však pro tuto geometrii drážky vyžaduje rozdílné síťování modelu. Při použití stejně jemné sítě jako doposud, se doba výpočtu spoje v programu stává delší a náročnější. Z tohoto důvodu zvolíme nyní síť hrubší. Stav spoje s hrubší sítí je zobrazen na obr. 33. Zde je model zobrazen bez drážky.



Obr. 33 Stav spoje po nalisování s hrubší sítí



V programu tedy postupně ke středu náboje zmenšujeme drážku  $R2$  v axiálním směru a sledujeme, jaký vliv má toto zmenšování na přenos kroutícího momentu. Vypočtené hodnoty jsou zobrazeny v grafu a v tabulce na obr. 34.

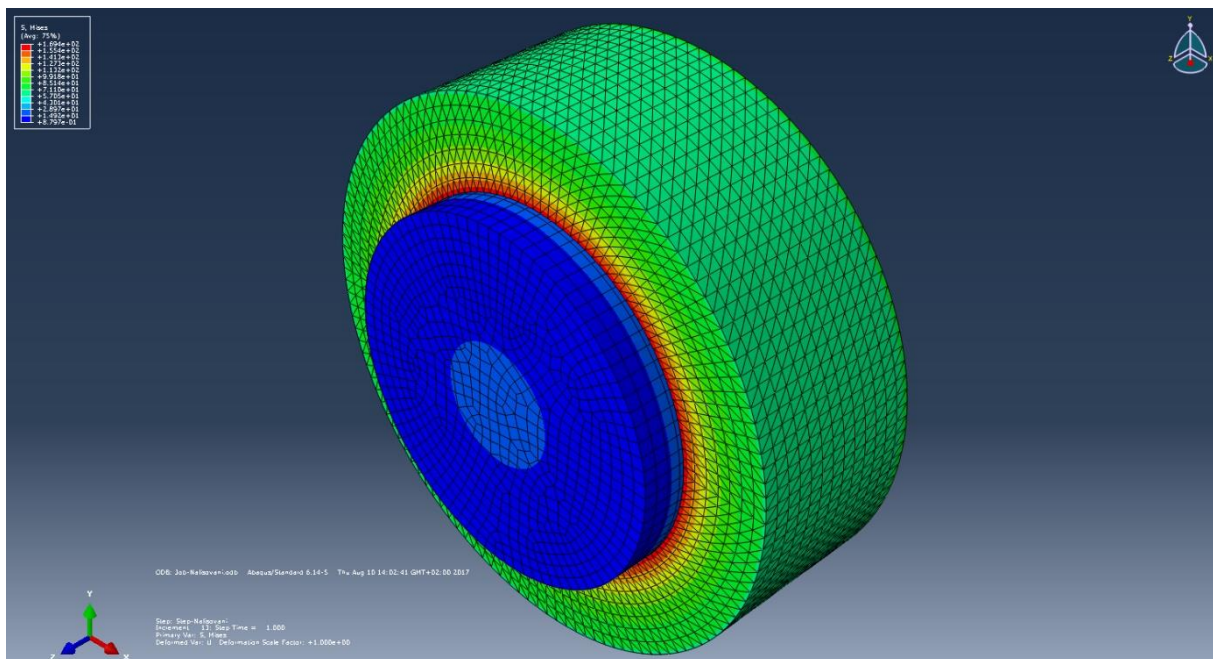


Obr. 34 Závislost kroutícího momentu na axiálním rozměru drážky  $R2$

Postupné snižování axiálního rozměru drážky způsobuje zvětšování přeneseného kroutícího momentu spojem. Z grafu je patrné, že spoj s drážkou o axiálním rozměru cca  $6\text{ mm}$  dosahuje zhruba shodného kroutícího momentu jako spoj bez drážky. Pro zjištění přesné hranice, kdy kroutící moment spoje s drážkou přesáhne kroutící moment spoje bez drážky, by bylo potřeba provést více simulací v programu. Pro naše porovnání však postačí graf na obr. 34, ze kterého vyplývá, že model s drážkou  $R2$  o axiálním rozměru v intervalu přibližně  $(0; 6)$  přeneše vyšší kroutící moment než spoj bez drážky. Hodnoty axiálního rozměru drážky blízké nule jsou zde uvedeny pro zjištění chování modelu a pro lepší doplnění grafu. Rozhodně se nejedná o reálné využití drážek takovýchto rozměrů v praxi.

### 10.1 Výpočet s jemnější sítí

Abychom v závěru mohli výsledky analýzy porovnat, je potřeba model z předchozí kapitoly vysítovat stejně jemně jako např. model v kapitole 9.

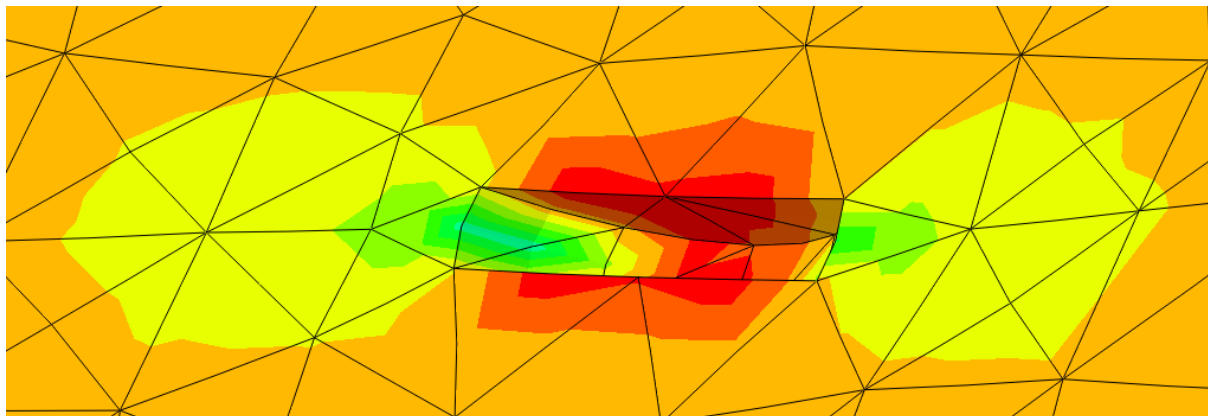


Obr. 35 Stav spoje po nalisování s jemnější sítí

V programu je po simulaci spoje s jemnou sítí odečtena hodnota kroutícího momentu pro model bez drážky jako

$$M_k = 2\,611\,640 \text{ Nmm} .$$

Následně je tento spoj analogicky simulován s drážkou R2 o axiálním rozměru 1 mm ve středu náboje.



Obr. 36 Detail drážky R2 po předepsaném namáhání

V programu je z grafu odečtena maximální hodnota kroutícího momentu jako

$$\overline{M}_k = 2\,611\,930 \text{ Nmm} .$$

Pro porovnání spočítáme nyní součinitel *separace vlivu*

$$\overline{\beta} = \frac{2\,611\,930 - 2\,611\,640}{2\,611\,640} \cdot 100 = 0,01 \% .$$

Hodnotu kroutícího momentu se podařilo vlivem použité drážky v modelu zvýšit, nicméně se však jedná o naprosto zanedbatelný rozdíl, který ani u takto relativně jednoduchého modelu nehraje žádnou roli. Důležitý je však fakt, že vhodná úprava vnitřního povrchu náboje má pozitivní vliv na přenos kroutícího momentu pro tento relativně jednoduchý 3D model v programu Abaqus.

## 11 Závěr

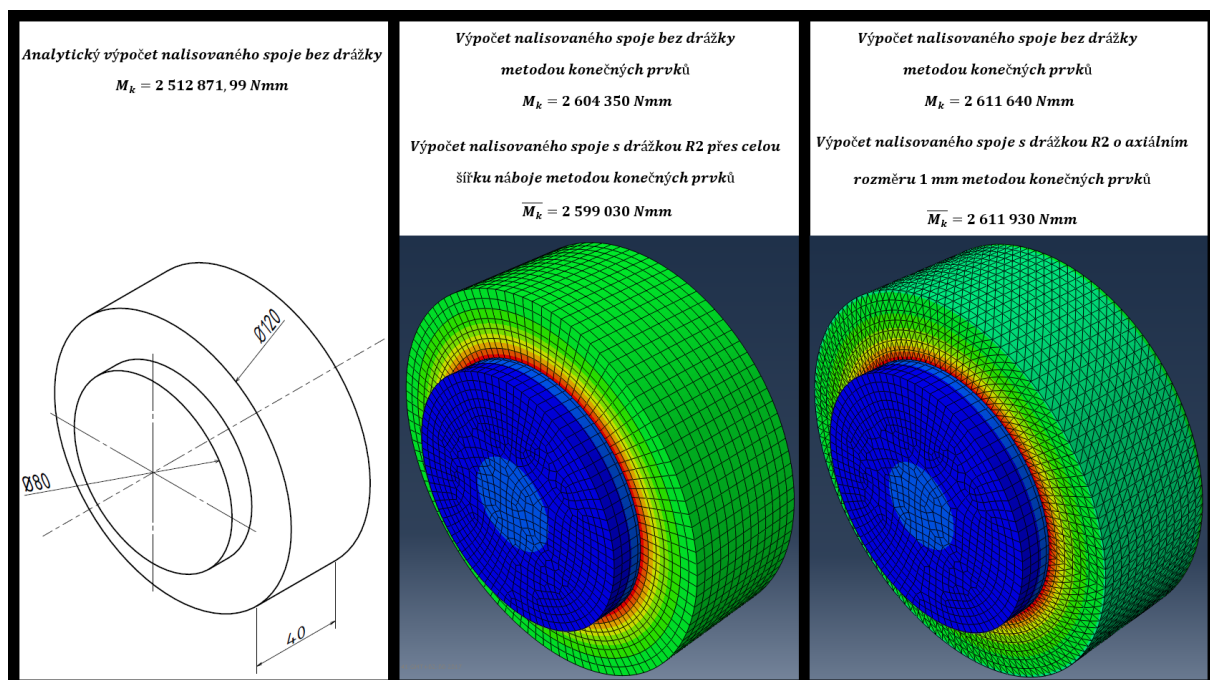
Analýza nalisovaného spoje při zatížení kroutícím momentem proběhla několika metodami a postupy. Spoj byl nejprve ze zadaných rozměrů hřídele a náboje, z materiálových vlastností a z maximálního dovoleného napětí dimenzován analyticky. Klasickým výpočtem bylo tedy spočítáno namáhání spoje, přesah a kroutící moment, který je spoj schopen přenést. Poté byl tento spoj definován v programu Abaqus jako relativně jednoduchý 3D model, který byl zatížen vhodným namáháním. Následkem namáhání spoje byl z grafu v programu odečten maximální reakční, resp. kroutící moment, který model přenesl. Poté byl vnitřní povrch náboje několikrát upravován různými variantami axiálních drážek. Následně byl vliv drážek na výsledný přenesený kroutící moment zpracován.

Z vypočtených dat vyplývá, že největší vliv na únosnost nalisovaného spoje a tedy i na přenos kroutícího momentu má velikost stykové plochy mezi nábojem a hřídelem. Únosnost spoje v axiálním směru je však navíc posílena vlivem zaklínění náboje v hřídeli. Tento jev zaklínění

byl simulován na modelu v podobě axiální drážky přes celou šířku vnitřního povrchu náboje. Úbytek stykové plochy způsobený touto drážkou má za následek menší přenos kroutícího momentu než původní spoj bez drážky. Vliv této drážky v modelu nekompensuje úbytek stykové plochy. Z vypočtených dat bylo rovněž zjištěno, že úprava geometrie drážky nemá významný vliv na přenos kroutícího momentu. Aby model s drážkou přenesl vyšší kroutící moment než model bez drážky, musí být drážka dostatečně malá, aby svým vlivem kompenzovala ztrátu stykové plochy. V našem případě dosahuje model s drážkou R2 o axiálním rozměru drážky v intervalu (0; 6) vyššího kroutícího momentu, než spoj bez drážky. Rozdíl těchto momentů bohužel není nikterak závratný. Je možné, že rozdíl kroutících momentů modelu bez drážky a modelu s drážkou by se dal navýšit např. přidáním druhé drážky. Tyto dvě drážky by byly na obvodu spoje umístěny po 180°. Analogicky lze takto samozřejmě přidávat i více drážek, ale opět je nutné provést několik simulací modelu a najít vhodný počet a vhodnou axiální velikost drážky a tímto postupem se pokusit navýšit rozdíl kroutících momentů. Náš model však přenáší vyšší kroutící moment i pro drážky nereálně malých axiálních rozměrů. Je tedy jasné, že při našem relativně hrubém síťování modelu nemůžeme tento výsledek přisuzovat vlivu zaklínění náboje v hřídeli. Zde již hrají roli další dopady drážky na spoj, jako je např. velké napětí, které v místě drážky vzniká. Pro náš jednoduchý model a pro naše základní porozumění chování nalisovaného spoje po úpravě stykového povrchu jsou však tyto výpočty dostačující.

Pokud bychom chtěli sledovat přesný reálný dopad axiálních drážek na přenos kroutícího momentu, museli bychom model definovat mnohem podrobněji. Bylo by např. nutné zavést do modelu plastické vlastnosti materiálu, uvažovat proměnné tření mezi hřídelem a nábojem, přesněji definovat efekt zaklínění náboje v hřídeli a zvolit vhodné a dostatečně jemné síťování modelu, obzvláště v místech drážky. Tím by se úloha stala daleko náročnější a přesahovala by úroveň této práce.

Důležité hodnoty kroutících momentů, které přenesou různé vypočtené varianty jsou shrnuty v tabulce na obr. 37.



Obr. 37 Použité varianty nalisovaného spoje a jejich kroutící momenty

## 12 Seznamy

### 12.1 Seznam použitých označení

Název	Značka	Jednotka
osové napětí	$\sigma_o$	$N/mm^2$
radiální napětí	$\sigma_r$	$N/mm^2$
tečné napětí	$\sigma_t$	$N/mm^2$
radiální posuv	$u$	$mm$
poměrné radiální prodloužení	$\varepsilon_r$	–
poměrné tečné prodloužení	$\varepsilon_t$	–
modul pružnosti v tahu	$E$	$N/mm^2$
Poissonovo číslo	$\nu$	–
integrační konstanta	$K$	$N/mm^2$
integrační konstanta	$C$	$N$
tlak	$p$	$N/mm^2$
přesah	$\Delta r$	$mm$
tření	$f$	–
krouťící moment spoje bez drážky	$M_k$	$Nmm$
bezpečnost	$k$	–
mez kluzu materiálu	$\sigma_k$	$N/mm^2$
reduované napětí	$\sigma_{red.}$	$N/mm^2$
dovolené napětí	$\sigma_D$	$N/mm^2$
lisovací síla	$T$	$N$
krouťící moment spoje s jednou drážkou	$\overline{M}_k$	$Nmm$
separace vlivu	$\overline{\beta}$	%

## 12.2 Seznam obrázků

Obr. 1: Přenos kroutícího momentu a axiální síly nalisovaným spojem .....	7
Obr. 2: Přenos ohybového momentu a radiální síly nalisovaným spojem .....	7
Obr. 3: Nalisované ozubené kolo.....	8
Obr. 4: Nalisované radiální ložisko .....	8
Obr. 5: Nalisovaná řemenice .....	8
Obr. 6: Kliková hřídel .....	8
Obr. 7: Nákolky železničních kol .....	8
Obr. 8: Element zobrazený v tlustostěnné nádobě.....	10
Obr. 9: Namáhání vytknutého elementu .....	10
Obr. 10: Přetvoření elementu .....	11
Obr. 11a, 11b: Namáhání uzavřené a otevřené silnostěnné nádoby.....	15
Obr. 12: Průběhy napětí v radiálním a tečném směru .....	16
Obr. 13: Přesah při nalisování .....	17
Obr. 14: Stav hřídele po nalisování.....	19
Obr. 15: Plocha hřídele přenášející kroutící moment .....	20
Obr. 16: Grafické znázornění úlohy.....	21
Obr. 17: Grafické znázornění namáhání spoje včetně Mohrových kružnic.....	23
Obr. 18: Stav spoje po nalisování .....	23
Obr. 19: Stav spoje po natočení vnějšího povrchu náboje při zvětšených deformacích .....	24
Obr. 20: Graf kroutícího momentu nalisovaného spoje.....	24
Obr. 21: Stav spoje po axiálním posuvu vnějšího povrchu náboje při zvětšených deformacích ..	25
Obr. 22: Graf axiální síly nalisovaného spoje .....	25
Obr. 23: Geometrie kruhové drážky $R2$ .....	26
Obr. 24: Stav spoje s kruhovou drážkou $R2$ při zvětšených deformacích .....	26
Obr. 25: Graf kroutícího momentu pro spoj s kruhovou drážkou $R2$ .....	27
Obr. 26: Postup zvětšování kruhové drážky .....	28
Obr. 27: Přenesené hodnoty spojů jednotlivých drážek .....	28
Obr. 28: Graf závislosti $\overline{M}_k = f(R)$ .....	28
Obr. 29: Detail geometrie obdelníkové drážky .....	29
Obr. 30: Stav spoje s obdelníkovou drážkou šířky $10\text{ mm}$ při zvětšených deformacích .....	29
Obr. 31: Detail geometrie mělké drážky .....	30
Obr. 32: Stav spoje s mělkou drážkou při zvětšených deformacích.....	31
Obr. 33: Stav spoje po nalisování s hrubší sítí .....	31
Obr. 34: Závislost kroutícího momentu na axiálním rozměru drážky $R2$ .....	32
Obr. 35: Stav spoje po nalisování s jemnější sítí.....	32
Obr. 36: Detail drážky $R2$ po předepsaném namáhání.....	33
Obr. 37: Použité varianty nalisovaného spoje a jejich kroutící momenty.....	34

### 12.3 Seznam použité literatury

- [1] MICHALEC, Jiří. *Pružnost a pevnost I*. 3. vyd. V Praze: České vysoké učení technické, 2009. ISBN 978-80-01-04224-3.
- [2] MICHALEC, Jiří. *Pružnost a pevnost II*. Vyd. 2. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2001. ISBN 80-01-02375-3.
- [3] BOLEK, Alfred a Josef KOCHMAN. *Části strojů*. Vyd. 5., přeprac. (v SNTL 1. vyd.). Praha: SNTL-Nakladatelství technické literatury, 1989. Technický průvodce. ISBN 80-03-00046-7.
- [4] ŠVEC, Vladimír. *Části a mechanismy strojů: spoje a části spojovací*. Vyd. 3. V Praze: České vysoké učení technické, 2008. ISBN 978-80-01-04138-3.
- [5] Kliková hřídel. *Technet* [online]. [cit. 2017-08-11]. Dostupné z: [http://technet.idnes.cz/varovani-pred-operaci-barbarossa-d4x-/vojenstvi.aspx?c=A160620\\_111044\\_vojenstvi\\_mla](http://technet.idnes.cz/varovani-pred-operaci-barbarossa-d4x-/vojenstvi.aspx?c=A160620_111044_vojenstvi_mla)
- [6] Nákolky železničních kol. *Betterthanufos* [online]. [cit. 2017-08-11]. Dostupné z: <http://betterthanufos.blogspot.cz/2012/02/mysterious-malta.html>