

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE  
FAKULTA STROJNÍ

Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky



**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

**Ztráta stability prutů s dodatečnými okrajovými podmínkami**

**Buckling of rods with additional boundary conditions**

Praha 2017

Vedoucí: doc. Ing. Tomáš Mareš, Ph.D.

Autor: Ramez Bariekzahy

## I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Bariekhazy** Jméno: **Ramez** Osobní číslo: **437760**  
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**  
Zadávající katedra/ústav: **Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**  
Studijní program: **Teoretický základ strojního inženýrství**  
Studijní obor: **bez oboru**

## II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

**Ztráta stability prutů s dodatečnými okrajovými podmínkami**

Název bakalářské práce anglicky:

**Buckling of rods with additional boundary conditions**

Pokyny pro vypracování:

1. Odvození Eulerovy metody vzpěru
2. Základní případy vzpěru rozšířit o další typ uložení
3. Pruty s pružným uložením
4. Pruty s proměnným průřezem

Seznam doporučené literatury:

Michalec a kol.: Pružnost a Pevnost I a II. Skripta ČVUT 1992  
Wang, Reddy: Exact solutions for buckling of structural members, CRC Press 2001

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

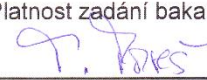
**doc. Ing. Tomáš Mareš Ph.D., ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky FS**


Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: **28.04.2017**

Termín odevzdání bakalářské práce: **18.08.2017**

Platnost zadání bakalářské práce: \_\_\_\_\_

  
Podpis vedoucí(ho) práce

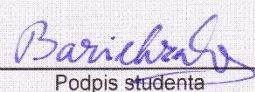
  
Podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

  
Podpis děkana(ky)

## III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

**26.4.2017**  
Datum převzetí zadání

  
Podpis studenta

## **Čestné prohlášení**

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci na téma „*Ztráta stability prutů s dodatečnými okrajovými podmínkami*“ vypracoval samostatně na základě literatury a pramenů uvedených na konci práce.

V Praze dne 5. srpna 2017



Ramez Bariekzahy

## **Poděkování**

Tímto bych rád poděkoval především váženému doc. Ing. Tomáši Marešovi, Ph.D., který mi jako vedoucí bakalářské práce poskytl odborné vedení, cenné konzultace a rady. Dále pak děkuji panu Mgr. Ing. Tomáši Bodnárovi, Ph.D. za vstřícné nasměrování k literatuře z oblasti matematiky a mé rodině za podporu.

*Autor*

## **Anotace**

Bakalářská práce se zabývá problematikou ztráty stability přímých prutů. Konkrétně je v ní provedeno odvození Eulerovy metody vzpěru, které je rozšířeno o další případ uložení. Dále se zabývá pruty s pružným uložením, které lépe vystihují reálné případy a pruty s proměnným průřezem. Rovněž jsou v práci uvedeny hodnoty kritických sil a postupy jejich odvození včetně podrobného popisu jednotlivých kroků.

## **Klíčová slova**

Vzpěr prutů, Eulerova metoda, kritická síla, pružné uložení, proměnný průřez

## **Annotation**

This bachelor's thesis deals with issues of buckling of rods. Specifically, there is implemented derivation of Euler's columns, which is extended by an additional type of support. Furthermore, the thesis looks into columns with elastic constraints, which are closely related to real cases and it also looks into columns with variable cross section. The work involves critical buckling loads as well as the derivation and description of respective steps.

## **Keywords**

Buckling of rods, Euler's method, critical load, elastic constraints, variable cross section

# Obsah

Úvod.....	- 1 -
1 Podstata vzpěru.....	- 2 -
2 Odvození Eulerovy metody vzpěru .....	- 3 -
2.1 Základní diferenciální rovnice, okrajové podmínky .....	- 3 -
2.2 Klasický případ vzpěru I.....	- 8 -
2.3 Klasický případ vzpěru II .....	- 10 -
2.4 Klasický případ vzpěru III .....	- 11 -
2.5 Klasický případ vzpěru IV .....	- 13 -
2.6 Dodatečný případ vzpěru V .....	- 14 -
2.7 Shrnutí případů vzpěru I – V .....	- 16 -
3 Pruty s pružným uložením .....	- 18 -
3.1 Obecný případ pružně uloženého prutu .....	- 18 -
3.2 Vetknutý prut s podporou translační pružiny .....	- 22 -
3.3 Nedokonale vetknutý prut s podporou translační pružiny .....	- 24 -
3.4 Nedokonale vetknutý prut po obou koncích .....	- 26 -
3.5 Nedokonale vetknutý prut s podporou torzní pružiny .....	- 28 -
4 Pruty s proměnným průřezem.....	- 30 -
4.1 Dvoustupňový prut zatížený osovou silou.....	- 30 -
Závěr .....	- 35 -
Seznam použité literatury .....	- 36 -
Seznam obrázků .....	- 37 -
Seznam použitých symbolů a označení .....	- 38 -

# Úvod

Pokud právě nahlížíte do bakalářské práce na téma „Ztráta stability prutů s dodatečnými okrajovými podmínkami“ a nemáte zcela ucelenou představu, o čem pojednává, je na místě ji zde zprvu uvést. Představte si tuto situaci: svíráte prsty párátka po jeho koncích a vyvinete proti němu sílu. Nejprve ucítíte odpor, avšak při větším úsilí párátka mírně vybočí a nakonec se zlomí. Ve větším měřítku se může jednat např. o sloupy u staveb, osově namáhané strojní hřídele a obecně o konstrukce, ve kterých se vyskytují relativně štíhlá a dlouhá tělesa, jež nazýváme pruty. Pod abstraktním pojmem prut se nám nejčastěji vybaví přímá kruhová tyč, ačkoliv geometrický profil průřezu se může lišit.

V pomyslném příkladu s párátkem prut vybočil ze své osy, když jsme ho vystavili tlakovému zatížení. V případě ideálního prutu by se tak nestalo, došlo by pouze ke stlačení úměrnému velikosti síly. Rozdíl mezi ideálním a reálným prutem představují materiálové a geometrické vady, které lze precizními technologiemi výroby redukovat, nicméně se jich nelze nikdy zcela zbavit. Důsledkem vad a nepřesností bude zatížený reálný prut čelit nejen tlaku, ale i ohybu a bude mu hrozit s tím spojená ztráta stability. Popsaný jev se někdy označuje jako „vzpěr“.

Víme tedy, že při uvažování štíhlých prutů v konstrukcích budeme muset myslet také na to, že by mohlo dojít ke ztrátě stability a podle toho se zařídit při konkrétním dimenzování. Zajímá nás samozřejmě velikost tlakové síly, kterou již prut nesmíme zatížit, aby nedošlo ke zhroucení.

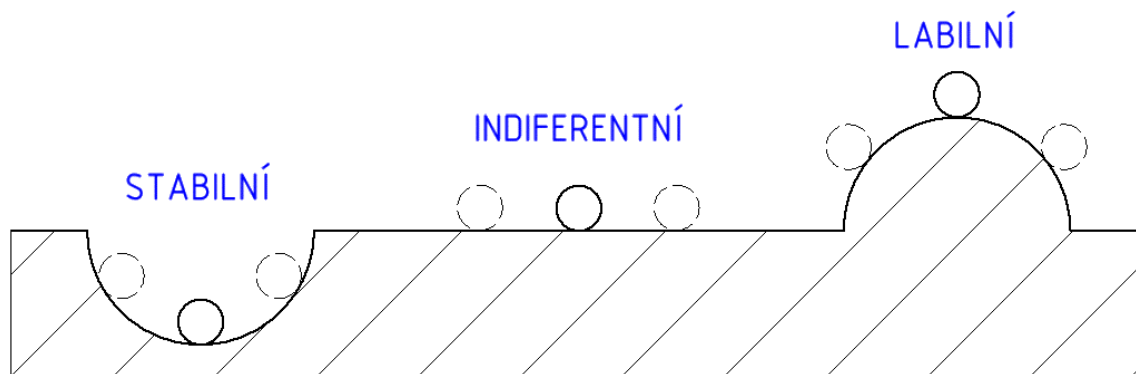
Cílem této bakalářské práce je splnit zadané úkoly, konkrétně seznámit čtenáře s odvozením Eulerovy metody vzpěru, jež rozšíříme o další typ uložení. Dále bude uvedena problematika prutů s pružným uložení a dostaneme se i k prutům s proměnným průřezem. U každého uvedeného případu bude snaha dopracovat se až k výsledným hodnotám, se kterými lze následně v praxi operovat.

V celé práci je kladen důraz na srozumitelnost jednotlivých kroků a postupů, neboť snahou autora bylo mimo jiné představit a přiblížit poměrně komplikované téma širšímu spektru čtenářů.

# 1 Podstata vzpěru

V následujících kapitolách se budeme zabývat ztrátou stability přímých prutů. Nejprve uvedme na pravou míru označení, se kterými se budeme nadále setkávat. Pod pojmem „**vzpěr**“ si představme štíhlý prut zatížený tlakovou silou, která působí v ose prutu. Jestliže je tato síla relativně malá, nedojde v prutu k zratelným deformacím a prut zůstává přímý. Avšak pokud ona síla překročí kritickou hodnotu, která bude blíže definována, dojde ke změně vlastností prutu. Znalost této síly, kterou budeme označovat jako „**kritickou**“, je rozhodující, [2], [4].

U vzpěru rozlišujeme tři případy rovnovážných stavů: *stabilní*, *indiferentní* a *labilní*. Obecně lze stabilitu definovat jako schopnost udržet rovnovážný stav. Je dobré si uvědomit, že právě stabilního stavu se v praxi snažíme dosáhnout, lépe řečeno jej udržet. Zbylé dva stavy vedou ke ztrátě stability a tudíž k případnému poškození konstrukce, ve které se prut nachází. Rovnováhu prutů namáhaných na vzpěr lze přirovnat k možným polohám tuhého tělesa (*obr. 1.1*).



Obr. 1.1 – Rovnovážné stavy tělesa

**Stabilní** rovnováhu lze pozorovat na prutu, který je zatížen osovou silou menší nežli kritickou. Dodatečně tento prut vystavíme nepatrné příčné síle, která má za následek vybočení prutu ze své původní polohy. Jakmile příčná síla odezní, prut se vrací zpět do prvotní polohy. **Indiferentní** rovnováhu charakterizuje skutečnost, při které prut setrvá ve vychýlené poloze po odstranění příčné síly. Osová síla, kterou je prut v tomto případě zatížen, se nazývá síla kritická. **Labilní** rovnováha nastává při překročení kritické osové síly. Pokud prut ve stavu labilní rovnováhy vystavíme příčné síle, tak se neřízeně zhroutí a v následujícím okamžiku dojde k lomu.

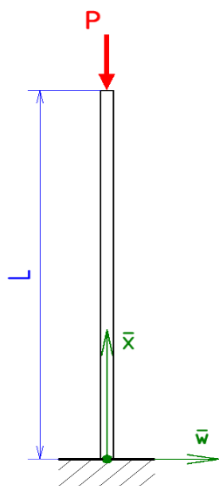
Zkoumání stavu, kdy přímý prut ztratí stabilitu, je důležité z toho důvodu, že se jedná o velmi rychlý jev, který přichází zpravidla bez předchozího varování. Při dimenzování konstrukce, jejíž prvky jsou mimo jiné namáhány na vzpěr, je třeba dbát zvýšené opatrnosti, jelikož ke ztrátě stability obvykle dochází před dosažením pevnostně nepřijatelných stavů.



## 2 Odvození Eulerovy metody vzpěru

Leonhard Euler byl významný matematik a fyzik 18. století, který se mimo jiné zabýval vzpěrem v pružném rozsahu. Jeho cenný přínos v této oblasti vědy si shrneme v následujících oddílech, [2].

### 2.1 Základní diferenciální rovnice, okrajové podmínky



Obr. 2.1 – Ideální prut

Uvažujme ideální, přímý a pružný prut, jehož vnitřní struktura je homogenní a bez materiálových vad. Dále předpokládejme, že se pohybujeme v oblasti, kde platí Hookeův zákon. Míněný prut je charakterizován délkou  $L$ , konstantním modulem pružnosti  $E$  a konstantním kvadratickým momentem průřezu  $I$ . Průhybová čára prutu  $\bar{w} = \bar{w}(x)$  je funkcí podélné souřadnice. Axiální síla  $P$  působí přesně v ose prutu. Prozatím budeme uvažovat vetknutý prut. Popsaný případ vystihuje obr. 2.1, [2], [4].

Využijeme Bernoulliho diferenciální rovnici průhybové čáry (2.1.1), která vyjadřuje vztah mezi ohybovým momentem  $M = M(x)$  a průhybem prutu v příčném směru  $\bar{w} = \bar{w}(x)$ . Předpokladem platnosti jsou malé příčné průhyby a zachování rovinnosti příčných řezů, které po deformaci zůstanou kolmé na deformovanou osu prutu, [3].

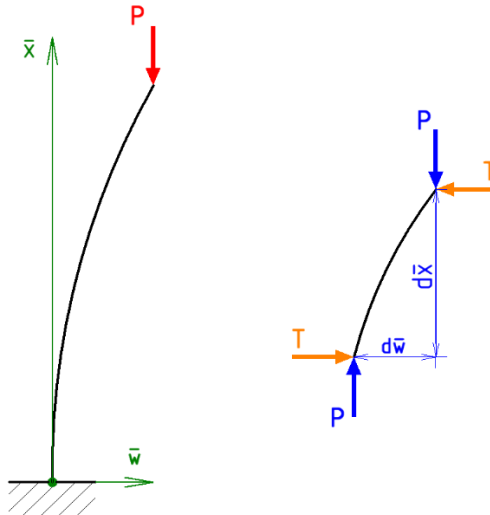
$$M = -EI \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} \quad (2.1.1)$$

Rovnice (2.1.1) poslouží jako základ, do kterého zbývá dosadit za ohybový moment  $M$ . K tomu využijeme známý vztah (2.1.2) mezi ohybovým momentem  $M$  a posouvající silou  $T = T(x)$ , který se nazývá Schwedlerova věta.

$$\frac{dM}{dx} = T \quad (2.1.2)$$

Další krok spočívá v nalezení vztahu pro posouvající sílu  $T$ , který by v této situaci pomohl. Za tímto účelem vychýlíme prut z přímé pozice tak, jak je schematicky znázorněno v levé části obr. 2.2. V pravé části obr. 2.2 se nachází vyňatý element prutu o délce  $d\bar{x}$ , na který působí silové dvojice. Provedeme-li momentovou rovnováhu elementu, získáme rovnici (2.1.3).

$$T \cdot d\bar{x} = P \cdot d\bar{w} \quad (2.1.3)$$



Obr. 2.2 – Momentová rovnováha

Rovnici (2.1.3) upravíme do tvaru (2.1.4).

$$T = P \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} \quad (2.1.4)$$

Spojením rovnic (2.1.2) a (2.1.4) obdržíme rovnici (2.1.5).

$$\frac{dM}{d\bar{x}} = P \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} \quad (2.1.5)$$

Zderivujeme-li rovnici (2.1.1), dosadíme do rovnice (2.1.5) a upravíme, získáme vztah (2.1.6). Tento krok si můžeme dovolit pouze za předpokladu  $EI = konst.$

$$P \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} + EI \frac{d^3\bar{w}}{d\bar{x}^3} = 0 \quad (2.1.6)$$

Po zderivování a úpravě rovnice (2.1.6) vyplyne vztah (2.1.7). Může se zdát, že není důvod k převedení diferenciální rovnice na vyšší řád, avšak ve finále budeme schopni řešit více typů uložení, než kdybychom se spokojili s řádem třetím.

$$\frac{d^4\bar{w}}{d\bar{x}^4} + \frac{P}{EI} \cdot \frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2} = 0 \quad (2.1.7)$$

Nyní zavedeme dvě substituce (2.1.8), (2.1.9). Nové veličiny  $x$  a  $w$  jsou bezrozměrné. Na první pohled je patrné, že hodnota podélné souřadnice prutu  $x$  se bude pohybovat na intervalu  $x \in (0; 1)$ , nehledě na konkrétní délku  $L$ , čehož s výhodou využijeme.

$$w = \frac{\bar{w}}{L} \quad (2.1.8)$$

$$x = \frac{\bar{x}}{L} \quad (2.1.9)$$

Diferenciální rovnici (2.1.7) je nutno přepsat do tvaru, ve kterém budou figurovat pouze bezrozměrné veličiny. Toho docílíme sérií níže uvedených úprav (2.1.10), (2.1.11), (2.1.12), (2.1.13), (2.1.14), (2.1.15), (2.1.16).

$$dx = \frac{d\bar{x}}{L} \quad (2.1.10)$$

$$\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} = \frac{dw}{dx} = \frac{dw}{d\bar{x}} \cdot L \quad (2.1.11)$$

$$\frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2} = \frac{d^2w}{d\bar{x}^2} \cdot L = \frac{d^2w}{dx^2} \cdot \frac{L}{L^2} = \frac{d^2w}{dx^2} \cdot \frac{1}{L} \quad (2.1.12)$$

$$\frac{d^3\bar{w}}{d\bar{x}^3} = \frac{d^3w}{d\bar{x}^3} \cdot L = \frac{d^3w}{dx^3} \cdot \frac{L}{L^3} = \frac{d^3w}{dx^3} \cdot \frac{1}{L^2} \quad (2.1.13)$$

$$\frac{d^4\bar{w}}{d\bar{x}^4} = \frac{d^4w}{d\bar{x}^4} \cdot L = \frac{d^4w}{dx^4} \cdot \frac{L}{L^4} = \frac{d^4w}{dx^4} \cdot \frac{1}{L^3} \quad (2.1.14)$$

Do rovnice (2.1.7) dosadíme výrazy (2.1.12), (2.1.14) a upravíme. Rovněž zavedeme substituci s bezrozměrným parametrem  $\alpha$ .

$$\frac{d^4w}{dx^4} + \frac{PL^2}{EI} \cdot \frac{d^2w}{dx^2} = 0 \quad (2.1.15)$$

$$\alpha = \frac{PL^2}{EI} \quad (2.1.16)$$

$$\frac{d^4w}{dx^4} + \alpha \cdot \frac{d^2w}{dx^2} = 0 \quad (2.1.17)$$

Finální tvar (2.1.17) nazveme „základní diferenciální rovnice“. Bude východiskem k odvození Eulerovy metody vzpěru. Jedná se o obyčejnou (homogenní) diferenciální rovnici čtvrtého řádu s konstantními koeficienty. Jednotlivá řešení rovnice (2.1.17) budeme hledat ve tvaru  $w = e^{\lambda x}$ . Charakteristická čísla  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  určíme z charakteristické rovnice (2.1.18) postupnými úpravami, [5].

$$\lambda^4 + \alpha \cdot \lambda^2 = 0 \quad (2.1.18)$$

$$\lambda^2(\lambda^2 + \alpha) = 0 \quad (2.1.19)$$

Z rovnice (2.1.19) lze snadno získat čtyři kořeny (2.1.20), (2.1.21).

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\alpha} \quad (2.1.20)$$

$$\lambda_{3,4} = 0 \quad (2.1.21)$$

$\lambda_{1,2}$  jsou ryze imaginární kořeny a  $\lambda_{3,4}$  je dvojnásobný kořen charakteristické rovnice. Za této skutečnosti lze napsat fundamentální systém řešení rovnice (2.1.17) v níže uvedeném tvaru.

$$\mathbf{w}_1(x) = \sin(\sqrt{\alpha}x) \quad (2.1.22)$$

$$\mathbf{w}_2(x) = \cos(\sqrt{\alpha}x) \quad (2.1.23)$$

$$\mathbf{w}_3(x) = xe^{\lambda_3 x} = x \quad (2.1.24)$$

$$\mathbf{w}_4(x) = e^{\lambda_4 x} = 1 \quad (2.1.25)$$

Využijeme princip superpozice a získáme tak obecné řešení diferenciální rovnice (2.1.17) ve tvaru (2.1.26).

$$\mathbf{w}(x) = C_1 \sin(\sqrt{\alpha}x) + C_2 \cos(\sqrt{\alpha}x) + C_3 x + C_4 \quad (2.1.26)$$

V rovnici (2.1.26) figurují čtyři konstanty  $C_1, C_2, C_3, C_4$ , které obdržíme z okrajových podmínek. Pro každé zakončení prutu lze napsat právě dvě okrajové podmínky v závislosti na typu uložení. S výhodou zde využijeme zápis zobecněného tvaru okrajových podmínek (2.1.27), (2.1.28).

$$\bar{s}_1 \mathbf{w} + \bar{s}_2 \frac{d\mathbf{w}}{dx} + \bar{s}_3 \frac{d^2\mathbf{w}}{dx^2} + \bar{s}_4 \frac{d^3\mathbf{w}}{dx^3} = \mathbf{0} \quad (2.1.27)$$

$$\hat{s}_1 \mathbf{w} + \hat{s}_2 \frac{d\mathbf{w}}{dx} + \hat{s}_3 \frac{d^2\mathbf{w}}{dx^2} + \hat{s}_4 \frac{d^3\mathbf{w}}{dx^3} = \mathbf{0} \quad (2.1.28)$$

Význam parametrů  $\bar{s}_i$  a  $\hat{s}_i$  bude objasněn níže. Nejprve však upravíme obecné řešení (2.1.26) do tvarů, které se vyskytují v okrajových podmínkách (2.1.27), (2.1.28).

$$\frac{d\mathbf{w}}{dx} = C_1 \sqrt{\alpha} \cos(\sqrt{\alpha}x) - C_2 \sqrt{\alpha} \sin(\sqrt{\alpha}x) + C_3 \quad (2.1.29)$$

$$\frac{d^2\mathbf{w}}{dx^2} = -C_1 \alpha \sin(\sqrt{\alpha}x) - C_2 \alpha \cos(\sqrt{\alpha}x) \quad (2.1.30)$$

$$\frac{d^3\mathbf{w}}{dx^3} = -C_1 \alpha \sqrt{\alpha} \cos(\sqrt{\alpha}x) + C_2 \alpha \sqrt{\alpha} \sin(\sqrt{\alpha}x) \quad (2.1.31)$$

Nyní můžeme dosadit veličinu  $\mathbf{w} = \mathbf{w}(x)$  a její derivace do rovnic okrajových podmínek (2.1.27), (2.1.28). Budou nás zajímat případy na začátku ( $x = \mathbf{0}$ ) a na konci prutu ( $x = \mathbf{1}$ ). Tímto získáme čtyři rovnice (2.1.32), (2.1.33), (2.1.34), (2.1.35).

Zavedeme označení  $\bar{s}_i^0, \hat{s}_i^0, \bar{s}_i^1, \hat{s}_i^1$ , přičemž horní indexy „0“ („1“) určují uvažovanou polohu parametru  $s$  v  $x = \mathbf{0}$  ( $x = \mathbf{1}$ ). Pro lepší představu uvedeme příklad. Ideální rotační uložení na spodním konci prutu (poloha  $x = \mathbf{0}$ ) je charakterizováno parametry  $\bar{s}_1^0 = \hat{s}_3^0 = \mathbf{1}$ ,  $\bar{s}_2^0 = \bar{s}_3^0 = \bar{s}_4^0 = \hat{s}_1^0 = \hat{s}_2^0 = \hat{s}_4^0 = \mathbf{0}$ . Dosadíme-li tyto parametry do rovnic (2.1.27), (2.1.28), vyplynou dvě okrajové podmínky  $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ ,  $\frac{d^2\mathbf{w}}{dx^2} = \mathbf{0}$ . Význam jednotlivých okrajových podmínek bude blíže upřesněn.

Rovnice okrajových podmínek (2.1.27) po dosazení a úpravě v  $x = 0$ .

$$C_1[\sqrt{\alpha}(\bar{s}_2^0 - \bar{s}_4^0\alpha)] + C_2[\bar{s}_1^0 - \bar{s}_3^0\alpha] + C_3[\bar{s}_2^0] + C_4[\bar{s}_1^0] = 0 \quad (2.1.32)$$

Rovnice okrajových podmínek (2.1.28) po dosazení a úpravě v  $x = 0$ .

$$C_1[\sqrt{\alpha}(\hat{s}_2^0 - \hat{s}_4^0\alpha)] + C_2[\hat{s}_1^0 - \hat{s}_3^0\alpha] + C_3[\hat{s}_2^0] + C_4[\hat{s}_1^0] = 0 \quad (2.1.33)$$

Rovnice okrajových podmínek (2.1.27) po dosazení a úpravě v  $x = 1$ .

$$\begin{aligned} & C_1[\bar{s}_1^1 \sin(\sqrt{\alpha}) + \bar{s}_2^1 \sqrt{\alpha} \cos(\sqrt{\alpha}) - \bar{s}_3^1 \alpha \sin(\sqrt{\alpha}) - \bar{s}_4^1 \alpha \sqrt{\alpha} \cos(\sqrt{\alpha})] \\ & + C_2[\bar{s}_1^1 \cos(\sqrt{\alpha}) - \bar{s}_2^1 \sqrt{\alpha} \sin(\sqrt{\alpha}) - \bar{s}_3^1 \alpha \cos(\sqrt{\alpha}) + \bar{s}_4^1 \alpha \sqrt{\alpha} \sin(\sqrt{\alpha})] \\ & + C_3[\bar{s}_1^1 + \bar{s}_2^1] + C_4[\bar{s}_1^1] = 0 \end{aligned} \quad (2.1.34)$$

Rovnice okrajových podmínek (2.1.28) po dosazení a úpravě v  $x = 1$ .

$$\begin{aligned} & C_1[\hat{s}_1^1 \sin(\sqrt{\alpha}) + \hat{s}_2^1 \sqrt{\alpha} \cos(\sqrt{\alpha}) - \hat{s}_3^1 \alpha \sin(\sqrt{\alpha}) - \hat{s}_4^1 \alpha \sqrt{\alpha} \cos(\sqrt{\alpha})] \\ & + C_2[\hat{s}_1^1 \cos(\sqrt{\alpha}) - \hat{s}_2^1 \sqrt{\alpha} \sin(\sqrt{\alpha}) - \hat{s}_3^1 \alpha \cos(\sqrt{\alpha}) + \hat{s}_4^1 \alpha \sqrt{\alpha} \sin(\sqrt{\alpha})] \\ & + C_3[\hat{s}_1^1 + \hat{s}_2^1] + C_4[\hat{s}_1^1] = 0 \end{aligned} \quad (2.1.35)$$

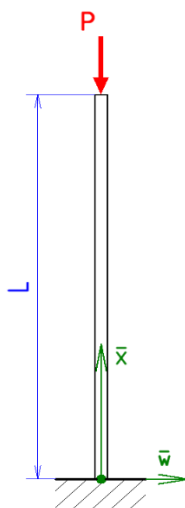
Soustavu homogenních rovnic (2.1.32), (2.1.33), (2.1.34), (2.1.35) prepíšeme do maticového zápisu ve tvaru  $A\vec{c} = \vec{0}$ , viz (2.1.36).

$$\begin{bmatrix} \sqrt{\alpha}(\bar{s}_2^0 - \bar{s}_4^0\alpha) & \bar{s}_1^0 - \bar{s}_3^0\alpha & \bar{s}_2^0 & \bar{s}_1^0 \\ \sqrt{\alpha}(\hat{s}_2^0 - \hat{s}_4^0\alpha) & \hat{s}_1^0 - \hat{s}_3^0\alpha & \hat{s}_2^0 & \hat{s}_1^0 \\ \bar{s}_1^1 \sin(\sqrt{\alpha}) + \bar{s}_2^1 \sqrt{\alpha} \cos(\sqrt{\alpha}) & \bar{s}_1^1 \cos(\sqrt{\alpha}) - \bar{s}_2^1 \sqrt{\alpha} \sin(\sqrt{\alpha}) & \bar{s}_1^1 + \bar{s}_2^1 & \bar{s}_1^1 \\ -\bar{s}_3^1 \alpha \sin(\sqrt{\alpha}) - \bar{s}_4^1 \alpha \sqrt{\alpha} \cos(\sqrt{\alpha}) & -\bar{s}_3^1 \alpha \cos(\sqrt{\alpha}) + \bar{s}_4^1 \alpha \sqrt{\alpha} \sin(\sqrt{\alpha}) & & \\ \hat{s}_1^1 \sin(\sqrt{\alpha}) + \hat{s}_2^1 \sqrt{\alpha} \cos(\sqrt{\alpha}) & \hat{s}_1^1 \cos(\sqrt{\alpha}) - \hat{s}_2^1 \sqrt{\alpha} \sin(\sqrt{\alpha}) & \hat{s}_1^1 + \hat{s}_2^1 & \hat{s}_1^1 \\ -\hat{s}_3^1 \alpha \sin(\sqrt{\alpha}) - \hat{s}_4^1 \alpha \sqrt{\alpha} \cos(\sqrt{\alpha}) & -\hat{s}_3^1 \alpha \cos(\sqrt{\alpha}) + \hat{s}_4^1 \alpha \sqrt{\alpha} \sin(\sqrt{\alpha}) & & \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.1.36)$$

V případě  $\det(A) \neq 0$  existuje jediné, triviální řešení, kdy se konstanty  $C_1, C_2, C_3, C_4$  rovnají nule, stejně jako průhyb  $w$ . Takové řešení nás ovšem nezajímá, a proto podmínku stability zajistíme tak, že položíme determinant matice  $A$  roven nule, matematicky zapsáno  $\det(A) = 0$ . V nadcházejících kapitolách využijeme tuto podmínku stability pro odvození kritických sil u základních případů vzpěru, [6].

## 2.2 Klasický případ vzpěru I

V této části si popíšeme Eulerův první případ vzpěru. Ten je charakterizován axiálně zatíženým ideálním štíhlým přímým prutem, který je na jednom konci vetknut a na druhém konci uložen volně, viz obr. 2.3, [2], [4].



Obr. 2.3 – První případ vzpěru

Nejprve si zadefinujeme patřičné okrajové podmínky. V podstatě se jedná o popis reálných (v tomto případě ideálních) vazeb a uložení, které se snažíme popsat fyzikálními rovnicemi s co nejvyšší přesností. Vetknutí na spodním konci prutu (poloha  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ) přísluší dvě okrajové podmínky (2.2.1), (2.2.2).

$$\mathbf{w} = \mathbf{0} \quad (2.2.1)$$

$$\frac{d\mathbf{w}}{d\mathbf{x}} = \mathbf{0} \quad (2.2.2)$$

První podmínka je prostá. Říká, že v místě pevné vazby nemůže dojít k příčnému posunu (průhybu) prutu. Druhá podmínka vyjadřuje nulový úhel natočení střednice prutu  $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$  v místě vetknutí. Jinými slovy, tečna deformované střednice prutu na souřadnici  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  zůstává rovnoběžná s nedeformovanou střednicí prutu a také s osou  $\bar{x}$ . Pro upřesnění je třeba dodat, že derivace průhybu  $\mathbf{w}$  podle proměnné  $\mathbf{x}$  je rovna natočení  $\boldsymbol{\varphi}$ , matematicky zapsáno rovnicí (2.2.3).

$$\frac{d\mathbf{w}}{d\mathbf{x}} = \boldsymbol{\varphi} \quad (2.2.3)$$

Volnému konci ( $\mathbf{x} = \mathbf{1}$ ), na kterém působí vnější síla  $\mathbf{P}$ , přísluší níže uvedené okrajové podmínky (2.2.4), (2.2.5).

$$\frac{d^2\mathbf{w}}{d\mathbf{x}^2} = \mathbf{0} \quad (2.2.4)$$

$$\frac{d^3 \mathbf{w}}{dx^3} + \alpha \frac{d\mathbf{w}}{dx} = \mathbf{0} \quad (2.2.5)$$

Okrajová podmínka (2.2.4) vystihuje fakt, že ohybový moment  $\mathbf{M}$  je na volném konci prutu nulový. Druhá derivace průhybu  $\mathbf{w}$  podle proměnné  $x$  je přímo úměrná ohybovému momentu  $\mathbf{M}$ , což vyplývá z Bernoulliho diferenciální rovnici průhybové čáry (2.1.1).

Okrajová podmínka (2.2.5) říká, že na souřadnici  $x = 1$  se sobě musí rovnat vnitřní posouvající síla  $\mathbf{T}$  a průmět vnější síly  $\mathbf{P}$  do směru posouvající síly. Matematický zápis této okrajové podmínky vychází z již zmíněné rovnice (2.1.6). Dosadíme-li výrazy (2.1.11), (2.1.13) do rovnice (2.1.6), obdržíme vztah (2.2.6), který lze snadno upravit do tvaru (2.2.5). Můžeme si všimnout, že třetí derivace průhybu  $\mathbf{w}$  podle proměnné  $x$  je přímo úměrná posouvající síle  $\mathbf{T}$ .

$$\mathbf{P} \frac{d\mathbf{w}}{dx} + \frac{EI}{L^2} \cdot \frac{d^3 \mathbf{w}}{dx^3} = \mathbf{0} \quad (2.2.6)$$

Výše zmíněné okrajové podmínky (2.2.1), (2.2.2), (2.2.4), (2.2.5) lze získat vhodnou volbou parametrů „s“ skrze rovnice (2.1.27), (2.1.28). Pro první případ vzpěru volíme:  $\bar{\mathbf{s}}_1^0 = \hat{\mathbf{s}}_2^0 = \mathbf{1}$ ,  $\bar{\mathbf{s}}_3^1 = \hat{\mathbf{s}}_4^1 = \mathbf{1}$ ,  $\hat{\mathbf{s}}_2^1 = \alpha$ . Zbylé parametry  $\bar{\mathbf{s}}_i^0, \hat{\mathbf{s}}_i^0, \bar{\mathbf{s}}_i^1, \hat{\mathbf{s}}_i^1$  se rovnají nule. Tyto hodnoty dosadíme do matice  $\mathbf{A}$  z rovnice (2.1.36). Poté vypočteme determinant<sup>1</sup> matice  $\mathbf{A}$  a výsledek položíme roven nule.

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \sqrt{\alpha} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ -\alpha \sin(\sqrt{\alpha}) & -\alpha \cos(\sqrt{\alpha}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \alpha & \mathbf{0} \end{vmatrix} = \alpha^{\frac{5}{2}} \cos(\sqrt{\alpha}) = \mathbf{0} \quad (2.2.7)$$

Víme, že parametr  $\alpha$  bude vždy různý od nuly, pokud eliminujeme případy, které nejsou zajímavé (např. nulová vnější síla  $\mathbf{P}$ ). Pak lze rovnici (2.2.7) vydělit členem  $\alpha^{\frac{5}{2}}$  a získat vztah (2.2.8).

$$\cos(\sqrt{\alpha}) = \mathbf{0} \quad (2.2.8)$$

Funkce kosinus je periodická, a proto homogenní rovnici (2.2.8) vyhovuje nekonečně mnoho řešení. My se však zaměříme na nejmenší možné řešení, které bude kladné. Tomu odpovídá výsledek (2.2.9). Kritickou sílu pro první případ vzpěru vyjádříme vztahem (2.2.10).

$$\alpha = \frac{\pi^2}{4} \quad (2.2.9)$$

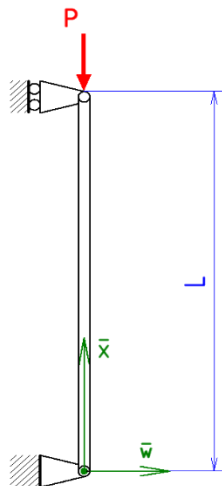
$$\mathbf{P}_{KRIT}^I = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{EI}{L^2} \quad (2.2.10)$$

---

<sup>1</sup> Pozn.: Výpočet determinantu byl proveden softwarem „MATLAB“, a proto zde nebude detailně uveden, stejně jako některé další jednoduché matematické operace, které se v této bakalářské práci vyskytují.

## 2.3 Klasický případ vzpěru II

Eulerův druhý případ vzpěru je charakterizován axiálně zatíženým ideálním štíhlým přímým prutem, který je ukotven pevnou rotační vazbou na jednom konci a rotačně posuvně vedenou vazbou na druhém konci, viz *obr. 2.4*, [2], [4].



*Obr. 2.4 – Druhý případ vzpěru*

Postup odvození kritické síly bude prakticky totožný s předešlým případem. Nejprve zadefinujeme okrajové podmínky, které v tomto případě budou stejné pro oba konce. Uložení v rotační vazbě posuvně či pevné je popsáno nulovým průhybem a nulovým ohybovým momentem. Matematicky zapsáno rovnicemi (2.3.1), (2.3.2).

$$\mathbf{w} = \mathbf{0} \quad (2.3.1)$$

$$\frac{d^2 \mathbf{w}}{dx^2} = \mathbf{0} \quad (2.3.2)$$

Fyzikální význam těchto okrajových podmínek byl již dříve komentován. Rovnou učiníme volbu parametrů „s“:  $\bar{s}_1^0 = \hat{s}_3^0 = \bar{s}_1^1 = \hat{s}_3^1 = \mathbf{1}$ , ostatní parametry  $\bar{s}_i^0, \hat{s}_i^0, \bar{s}_i^1, \hat{s}_i^1$  se rovnají nule. Parametry dosadíme do matice  $\mathbf{A}$  z rovnice (2.1.36) a vypočteme její determinant, který následně položíme roven nule.

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & -\alpha & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \sin(\sqrt{\alpha}) & \cos(\sqrt{\alpha}) & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ -\alpha \sin(\sqrt{\alpha}) & -\alpha \cos(\sqrt{\alpha}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = -\alpha^2 \sin \sqrt{\alpha} = \mathbf{0} \quad (2.3.3)$$

Homogenní rovnici (2.3.3) si můžeme dovolit vydělit členem  $-\alpha^2$ , abychom získali vztah (2.3.4).

$$\sin \sqrt{\alpha} = \mathbf{0} \quad (2.3.4)$$

Funkce sinus je periodická, proto má rovnice (2.3.4) obecně nekonečně mnoho řešení. Nejmenší možné řešení rovnice (2.3.4) by byla nula, avšak to v našem případě není fyzikálně zajímavé. Znamenalo



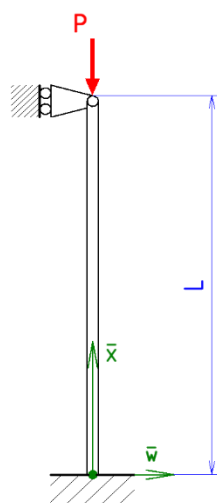
by to, že by na prut nepůsobila žádná osová síla. Vybereme v pořadí další nezáporné řešení. Tím je výsledek (2.3.5). Kritickou sílu u druhého případu vzpěru vyjádříme vztahem (2.3.6).

$$\alpha = \pi^2 \quad (2.3.5)$$

$$P_{KRIT}^{II} = \pi^2 \frac{EI}{L^2} \quad (2.3.6)$$

## 2.4 Klasický případ vzpěru III

Třetí případ vzpěru dle Eulera je charakterizován axiálně zatíženým ideálním štíhlým přímým prutem, který je na jednom konci vetknut a na druhém konci uložen rotačně s posuvným vedením, viz obr. 2.5, [2], [4].



Obr. 2.5 – Třetí případ vzpěru

Danému uložení prutu přísluší následující dvojice okrajových podmínek: rovnice (2.4.1), (2.4.2) pro vetknutí v místě  $x = 0$  a rovnice (2.4.1), (2.4.3) pro rotační vazbu v místě  $x = 1$ .

$$w = 0 \quad (2.4.1)$$

$$\frac{dw}{dx} = 0 \quad (2.4.2)$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = 0 \quad (2.4.3)$$

Ekvivalentní zápis okrajových podmínek učiníme prostřednictvím vhodně zvolených parametrů „s“:  $\bar{s}_1^0 = \hat{s}_2^0 = \bar{s}_1^1 = \hat{s}_3^1 = 1$ , zbylé parametry  $\bar{s}_i^0, \hat{s}_i^0, \bar{s}_i^1, \hat{s}_i^1$  se rovnají nule. Nyní tyto hodnoty dosadíme do matice  $A$  z rovnice (2.1.36). Vypočteme její determinant a výsledek položíme roven nule, jak je naznačeno v (2.4.4).

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sqrt{\alpha} & 0 & 1 & 0 \\ \sin(\sqrt{\alpha}) & \cos(\sqrt{\alpha}) & 1 & 1 \\ -\alpha \sin(\sqrt{\alpha}) & -\alpha \cos(\sqrt{\alpha}) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \alpha \sin \sqrt{\alpha} - \alpha \sqrt{\alpha} \cos \sqrt{\alpha} = 0 \quad (2.4.4)$$

Rovnici (2.4.4) můžeme podělit členem  $\alpha$ . Tím získáme homogenní nelineární rovnici (2.4.5), jejíž první kladný kořen bude symbolizovat kritickou sílu pro třetí případ vzpěru.

$$\sin \sqrt{\alpha} - \sqrt{\alpha} \cos \sqrt{\alpha} = 0 \quad (2.4.5)$$

$$F(\alpha) = \sin \sqrt{\alpha} - \sqrt{\alpha} \cos \sqrt{\alpha} \quad (2.4.6)$$

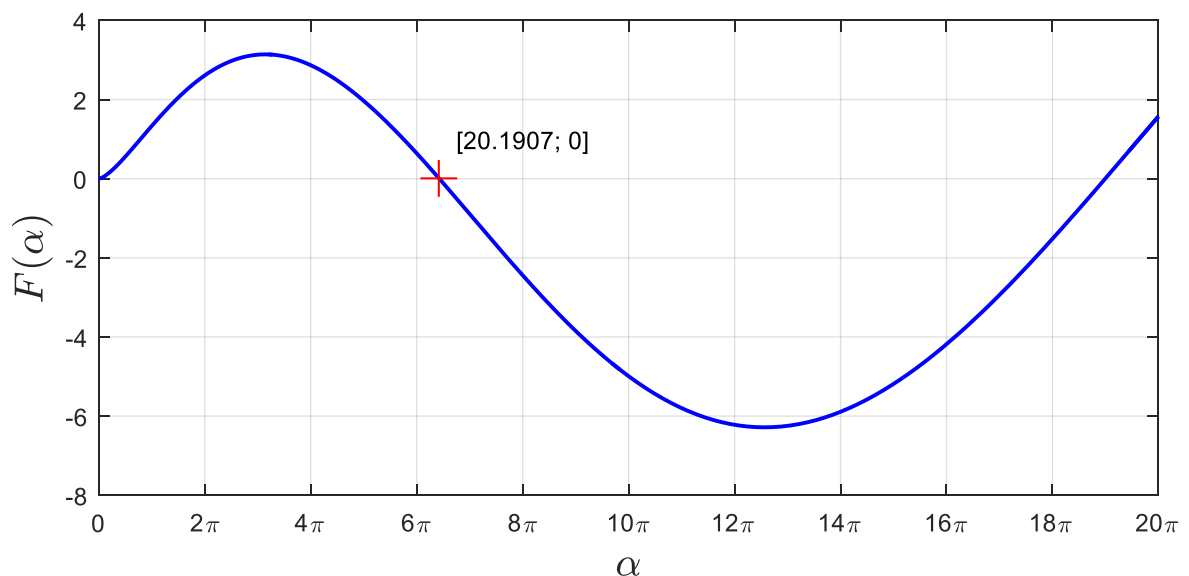
Hledaný kořen (2.4.7) byl vypočten numerickou iterační metodou. Jeho hodnota je uvedena ve tvaru zaokrouhleném na čtyři desetinná místa a ve tvaru vytknutého členu  $\pi^2$ .

$$\alpha = 20.1907 = 2.0457\pi^2 \quad (2.4.7)$$

Kritická síla pro třetí případ vzpěru je pak dána vztahem (2.4.8).

$$P_{KRIT}^{III} = 2.0457\pi^2 \frac{EI}{L^2} \quad (2.4.8)$$

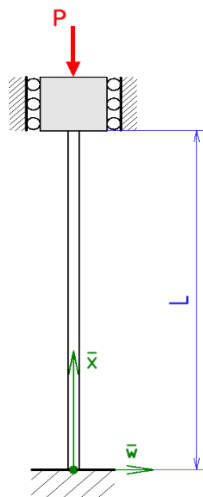
Průběh funkce  $F(\alpha)$  na intervalu  $\alpha \in \langle 0; 20\pi \rangle$  je znázorněn na obr. 2.6. Všimněme si vyznačeného bodu v grafu, který reprezentuje hledaný kořen.



Obr. 2.6 – Graf funkce  $F(\alpha)$

## 2.5 Klasický případ vzpěru IV

Eulerův čtvrtý případ vzpěru je charakterizován axiálně zatíženým ideálním štíhlým přímým prutem. Oba jeho konce jsou vetknuty, avšak jedno uložení je posuvně vedeno ve směru osy prutu, viz obr. 2.7, [2], [4].



Obr. 2.7 – Čtvrtý případ vzpěru

Okrajové podmínky pro tento případ musí zajistit nulový průhyb a nulové natočení prutu v obou místech vetknutí. Matematicky je vyjádříme rovnicemi (2.5.1), (2.5.2).

$$w = 0 \quad (2.5.1)$$

$$\frac{dw}{dx} = 0 \quad (2.5.2)$$

Využijeme zobecněných rovnic okrajových podmínek (2.1.27), (2.1.28), pro které zvolíme vhodnou kombinaci parametrů „s“:  $\bar{s}_1^0 = \hat{s}_2^0 = \bar{s}_1^1 = \hat{s}_2^1 = 1$ , zbylé parametry  $\bar{s}_i^0, \hat{s}_i^0, \bar{s}_i^1, \hat{s}_i^1$  se rovnají nule. Nyní tyto parametry dosadíme do matice  $A$  z rovnice (2.1.36) a vypočteme její determinant, který položíme roven nule.

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sqrt{\alpha} & 0 & 1 & 0 \\ \sin(\sqrt{\alpha}) & \cos(\sqrt{\alpha}) & 1 & 1 \\ \sqrt{\alpha} \cos(\sqrt{\alpha}) & -\sqrt{\alpha} \sin(\sqrt{\alpha}) & 1 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= 2\sqrt{\alpha} (1 - \cos(\sqrt{\alpha})) - \alpha \sin(\sqrt{\alpha}) = 0 \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

Hledáme nejmenší kladný kořen homogenní nelineární rovnice (2.5.3). Takovému předpokladu vyhovuje výsledek (2.5.4).

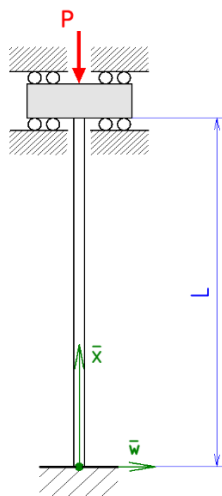
$$\alpha = 4\pi^2 \quad (2.5.4)$$

Jednoduchou úpravou vztahu (2.5.4) získáme kritickou sílu pro čtvrtý případ vzpěru ve tvaru (2.5.5).

$$P_{KRIT}^{IV} = 4\pi^2 \frac{EI}{L^2} \quad (2.5.5)$$

## 2.6 Dodatečný případ vzpěru V

V této podkapitole se zaměříme na axiálně zatížený ideální štíhlý přímý prut, který je na jednom konci vetknut a na druhém konci uložen prostřednictvím speciálního vetknutí, které dovoluje příčný i svislý pohyb, viz *obr. 2.8*, [2], [4].



*Obr. 2.8 – Dodatečný (pátý) případ vzpěru*

Okrajové podmínky pro konec prutu, který je klasicky vetknut, budou dány vztahy (2.6.1), (2.6.2). Opět se jedná o omezení, které zajistí nulový průhyb a nulové natočení prutu na souřadnici  $x = 0$ .

$$w = 0 \quad (2.6.1)$$

$$\frac{dw}{dx} = 0 \quad (2.6.2)$$

Druhý konec prutu je uložen pomocí neobvyklé kluzné vazby, kterou charakterizují následující dvě okrajové podmínky (2.6.3), (2.6.4). Slovně lze popsat chování prutu na souřadnici  $x = 1$  takto: natočení prutu  $\varphi$  a vnitřní posouvající síla  $T$  se v rovnají nule.

$$\frac{dw}{dx} = 0 \quad (2.6.3)$$

$$\frac{d^3w}{dx^3} + \alpha \frac{dw}{dx} = 0 \quad (2.6.4)$$

Na základě výše uvedených okrajových podmínek lze definovat tuto kombinaci parametrů „s“:  $\bar{s}_1^0 = \hat{s}_2^0 = \bar{s}_2^1 = \hat{s}_4^1 = \mathbf{1}$ ,  $\hat{s}_2^1 = \alpha$ , zbylé parametry  $\bar{s}_i^0, \hat{s}_i^0, \bar{s}_i^1, \hat{s}_i^1$  se rovnají nule. Nyní tyto parametry „s“ dosadíme do matice  $A$  z rovnice (2.1.36), vypočteme její determinant a výsledný výraz položíme roven nule, jak je naznačeno v rovnici (2.6.5).

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sqrt{\alpha} & 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{\alpha} \cos(\sqrt{\alpha}) & -\sqrt{\alpha} \sin(\sqrt{\alpha}) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{vmatrix} = \alpha^2 \sin(\sqrt{\alpha}) = 0 \quad (2.6.5)$$

V našem případě můžeme rovnici (2.6.5) vydělit členem  $\alpha^2$ . Předpokládáme totiž, že parametr alfa nebude nabývat nulové hodnoty. Tím se dostáváme k homogenní rovnici (2.6.6).

$$\sin(\sqrt{\alpha}) = 0 \quad (2.6.6)$$

Obecně má tato rovnice nekonečně mnoho kořenů, avšak my hledáme ten nejmenší možný a zároveň kladný. Nalezneme ho ve tvaru (2.6.7).

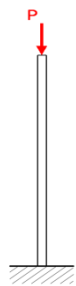




$$\alpha = \pi^2 \quad (2.6.7)$$

Nyní již snadno vyjádříme kritickou sílu (2.6.8) pro tento dodatečný (pátý) případ vzpěru.

$$P_{KRIT}^V = \pi^2 \frac{EI}{L^2} \quad (2.6.8)$$

## 2.7 Shrnutí případů vzpěru I – V

V této části si zrekapitulujeme výše popsané Eulerovy případy vzpěru, [1], [2]. Zajímavé porovnání jednotlivých sloupků přináší tabulka na obr. 2.9.

Případ vzpěru	I.	II.	III.	IV.	V.
Schéma					
Nenulové hodnoty parametrů "s"	$\bar{s}_1^0 = \bar{s}_2^0 = 1$ $\bar{s}_3^1 = \bar{s}_4^1 = 1$ $\hat{s}_2^1 = \alpha$	$\bar{s}_1^0 = \bar{s}_3^0 = 1$ $\bar{s}_1^1 = \bar{s}_3^1 = 1$	$\bar{s}_1^0 = \bar{s}_2^0 = 1$ $\bar{s}_1^1 = \bar{s}_3^1 = 1$	$\bar{s}_1^0 = \bar{s}_2^0 = 1$ $\bar{s}_1^1 = \bar{s}_2^1 = 1$	$\bar{s}_1^0 = \bar{s}_2^0 = 1$ $\bar{s}_2^1 = \bar{s}_4^1 = 1$ $\hat{s}_2^1 = \alpha$
Kritická síla "P"	$P_{KRIT}^I = 0.25\pi^2 \frac{EI}{L^2}$	$P_{KRIT}^{II} = \pi^2 \frac{EI}{L^2}$	$P_{KRIT}^{III} = 2.0457\pi^2 \frac{EI}{L^2}$	$P_{KRIT}^{IV} = 4\pi^2 \frac{EI}{L^2}$	$P_{KRIT}^V = \pi^2 \frac{EI}{L^2}$

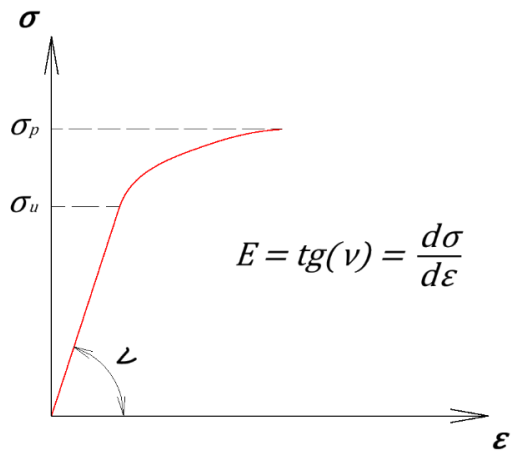
Obr. 2.9 – Porovnání případů vzpěru I – V

Jak vidíme na výše uvedeném srovnání, vyjádření kritické síly se u jednotlivých případů vzpěru liší pouze v konstantě, která stojí před členem  $\pi^2$  a celý výraz násobí. Všimněme si, že největší kritická síla připadá čtvrtému případu vzpěru a naopak nejmenší prvnímu případu vzpěru. Souvislost mezi typem uložení prutu a únosností na vzpěr je zde očividná.

Nezapomeňme na oblast platnosti výsledků. K odvození kritických sil z obr. 2.9 bylo použito některých zjednodušení. Prvním předpokladem byly malé průhyby, abychom mohli využít Bernoulliho diferenciální rovnici průhybové čáry ve zjednodušeném tvaru. Druhým předpokladem byla platnost Hookova zákona. Vzhledem k faktu, že se v uvedených vzorcích pro kritické síly objevuje modul pružnosti  $E$ , je platnost těchto vzorců omezena mezi úměrnosti materiálu  $\sigma_u$ , obecně vyjádřeno podmínkou (2.7.1). Kritické napětí sigma je dáno vztahem (2.7.2), přičemž veličina  $Z$  reprezentuje plochu průřezu prutu. Na obr. 2.10 se nachází abstraktní materiálový diagram (napětí  $\sigma$ , deformace  $\epsilon$ ), na kterém lze pozorovat lineární závislost napětí na deformaci, až do zmíněné mezi úměrnosti  $\sigma_u$ . Diagram končí mezi pevnosti materiálu  $\sigma_p$ .

$$\sigma_{KRIT} \leq \sigma_u \quad (2.7.1)$$

$$\sigma_{KRIT} = \frac{P_{KRIT}}{Z} \quad (2.7.2)$$



Obr. 2.10 – Abstraktní materiálový diagram

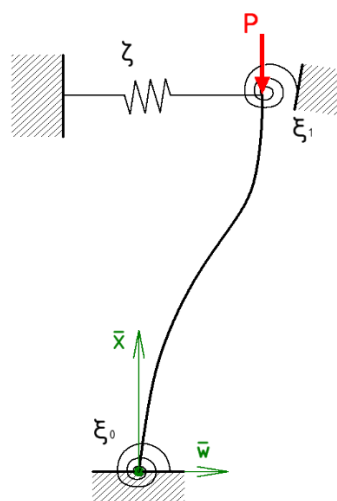
Poslední poznámka se týká ohybové tuhosti. Jde o skutečnost, že případné vyosení prutu nastává právě v rovině nejmenší ohybové tuhosti, a proto se ve vzorcích z obr. 2.9 musí uvažovat s minimálním kvadratickým momentem průřezu  $I$ .

### 3 Pruty s pružným uložením

V předcházejícím textu byly zmíněny pouze pruty s ideálním uložením. Ty bychom však stěží hledali kdekoli v reálném světě. Ve skutečnosti se jedná o vazby nedokonalé, se kterými je třeba počítat, když to přesnost výsledku vyžaduje. Může se jednat např. o čepové tření, jež v rotačních vazbách vyvolává přídatný silový moment. Rovněž nelze zajistit absolutně tuhý spoj těles, díky kterému jsme předpokládali nulové deformace v místě ukotvení. Podrobněji si tuto problematiku přiblížíme v následujícím textu, kde využijeme modelových pružin k popisu reálných vazeb, [2], [4].

#### 3.1 Obecný případ pružně uloženého prutu

Uvažujme štíhlý prut namáhaný na vzpěr, jehož konce jsou uloženy prostřednictvím translační pružiny, torzních pružin a nedokonalého vetknutí, viz *obr. 3.1*, [2], [4]. Povšimněme si bezrozměrných veličin  $\xi_0$  a  $\xi_1$ , které symbolizují konstanty tuhosti torzních pružin. Mohou nabývat hodnot v intervalu od nuly do nekonečna. Pokud je na konci prutu umístěna torzní pružina se zmíněnou konstantou o hodnotě nule, stává se konec volným a může se bez odporu natočit. V případě torzní pružiny s konstantou o hodnotě nekonečno se konec prutu chová jako vetknutý v tom smyslu, že mu není dovoleno žádné natočení. Velmi podobnou bezrozměrnou veličinou je parametr translační pružiny s označením  $\zeta$ . Rovněž nabývá hodnot v intervalu od nuly do nekonečna. Nulová hodnota značí volný pohyb konce prutu v příčném směru, zato pružina s hodnotou konstanty nekonečno nedovolí žádný pohyb konce prutu. Oba typy pružin lze přibližně chápat jako funkční aparát, který klade odpor v případě, že se přímý prut vychýlí ze své původní polohy, přitom míra odporu je jednak dána velikostí výchylky a jednak tuhostí pružiny.



*Obr. 3.1 – Prut s variací pružných uložení*



Nyní již k níže uvedeným okrajovým podmínkám. První dvě rovnice (3.1.1), (3.1.2) jsou vztaženy ke konci prutu o souřadnici  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  a zbylé dvě rovnice (3.1.3), (3.1.4) ke konci prutu o souřadnici  $\mathbf{x} = \mathbf{1}$ .

$$\mathbf{w}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad (3.1.1)$$

$$\xi_0 \left[ \frac{d\mathbf{w}}{dx} \right]_{x=0} - \left[ \frac{d^2\mathbf{w}}{dx^2} \right]_{x=0} = \mathbf{0} \quad (3.1.2)$$

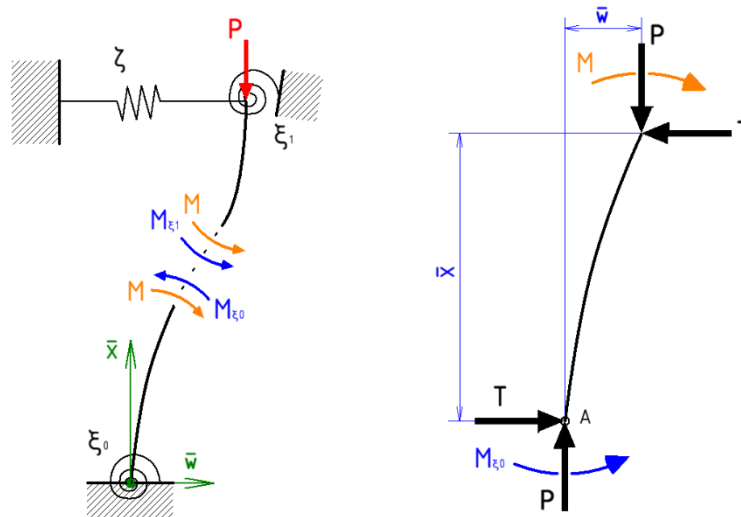
$$\xi_1 \left[ \frac{d\mathbf{w}}{dx} \right]_{x=1} + \left[ \frac{d^2\mathbf{w}}{dx^2} \right]_{x=1} = \mathbf{0} \quad (3.1.3)$$

$$\zeta \mathbf{w}(\mathbf{1}) - \left[ \frac{d^3\mathbf{w}}{dx^3} + \alpha \frac{d\mathbf{w}}{dx} \right]_{x=1} = \mathbf{0} \quad (3.1.4)$$

Smysl uvedeného značení je následující:  $\mathbf{w}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{w}(x = \mathbf{x}_0)$ , kde  $\mathbf{x}_0 \in \langle \mathbf{0}; \mathbf{1} \rangle$ . Derivace průhybu jsou rovněž vyhodnoceny v konkrétním bodě, který je určen dolním indexem za hranatou závorkou.

Konci prutu, jenž je ukotven v počátku souřadného systému, není dovolen pohyb v příčném směru, pouze natočení, které je charakterizováno podmínkou (3.1.2). Jak již bylo zmíněno v předcházejících kapitolách, první derivace průhybu  $\mathbf{w}$  podle souřadnice  $x$  udává natočení  $\boldsymbol{\varphi}$ . Pokud toto natočení vynásobíme parametrem torzní pružiny  $\xi$ , obdržíme moment síly, kterým stlačená pružina působí proti natočenému prutu. Rovnice (3.1.2) je tudíž vyjádření momentové rovnováhy na souřadnici  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , ve které figuruje moment síly vyvolaný torzní pružinou a vnitřní ohybový moment prutu  $\mathbf{M}$  reprezentovaný druhou derivací průhybu  $\mathbf{w}$  podle souřadnice  $x$ .

Třetí a čtvrtá podmínka náleží vrchnímu konci prutu, jenž je připevněn k translační a torzní pružině. Rovnice (3.1.3) vyjadřuje momentovou rovnováhu na souřadnici  $\mathbf{x} = \mathbf{1}$ , přičemž jde o obdobný zápis jako u rovnice (3.1.2). Liší se ve znaménku, jehož původ bude vysvětlen na *obr. 3.2*. Momenty  $\mathbf{M}_{\xi_0}$  a  $\mathbf{M}_{\xi_1}$ , které vyvíjí torzní pružiny, mají tendenci vrátit prut zpět do přímé polohy. Prutem nyní provedeme pomyslný řez, následně osamostatníme spodní část, kterou popíšeme silovými účinky a sestavíme momentovou rovnici (3.1.5) k bodu *A*, viz *obr. 3.2*. K tomu, abychom se dostali k okrajové podmínce pro konec prutu, nepotřebujeme celou odříznutou část, ale pouze bod. Proto pošleme rozměry  $\bar{\mathbf{w}}$  a  $\bar{\mathbf{x}}$  k nule, čímž se rovnice (3.1.5) zredukuje a po menší úpravě obdržíme vztah (3.1.6), který odpovídá výše uvedené okrajové podmínce (3.1.2). Analogickým způsobem získáme okrajovou podmínku (3.1.3).

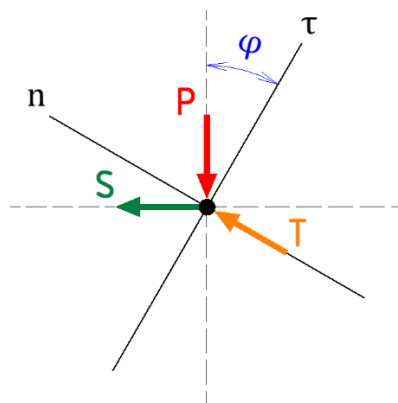


Obr. 3.2 – Pomyslný řez prutu

$$P\bar{w} - T\bar{x} + M - M_{\xi_0} = 0 \quad (3.1.5)$$

$$M_{\xi_0} - M = 0 \quad (3.1.6)$$

Odvození čtvrté okrajové podmínky (3.1.4) je vázáno na sestavení silové rovnováhy v bodě prutu na souřadnici  $x = 1$ , viz obr. 3.3. Uvažujeme, že je prut vychýlen ze své přímé polohy. Obecně na tento koncový bod působí síla translační pružiny  $S$ , vnější síla  $P$  a vnitřní posouvající síla  $T$ . Zmíněný bod musí být v rovnováze, a proto bude platit silová rovnice (3.1.7) v normálovém směru. Síly s dolním indexem představují průměty sil do příslušného směru, které v dalším kroku (3.1.8) vyjádříme pomocí úhlu  $\varphi = \varphi(x = 1) = \left[ \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} \right]_{x=1}$ . Vnitřní posouvající sílu  $T$  nahradíme prostřednictvím rovnic (2.1.1) a (2.1.2). Dále předpokládáme, že úhel natočení  $\varphi$  bude velmi malý, a tudíž si dovolíme následující dvě zanedbání:  $\sin(\varphi) \cong \varphi$ ,  $\cos(\varphi) \cong 1$ . Tyto úvahy uplatníme v úpravě (3.1.9). Nyní již stačí využít substituce (2.1.8), (2.1.11), (2.1.13) a sílu pružiny  $S$  nahradit součinem  $k_2 L w(1)$ , kde  $k_2$  značí konstantu tuhosti translační pružiny. Obdržíme rovnici (3.1.10), kterou vzápětí jednoduchou úpravou převedeme na finální tvar (3.1.11). Zavedením parametrů  $\alpha, \zeta$  obdržíme okrajovou podmínku (3.1.4).



Obr. 3.3 – Uvolnění koncového bodu prutu

$$S_n + T - P_n = 0 \quad (3.1.7)$$

$$S \cos(\varphi) + T - P \sin(\varphi) = 0 \quad (3.1.8)$$

$$S - EI \left[ \frac{d^3 \bar{w}}{d\bar{x}^3} \right]_{x=1} - P \left[ \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} \right]_{x=1} = 0 \quad (3.1.9)$$

$$k_2 L w(1) - \frac{EI}{L^2} \left[ \frac{d^3 w}{dx^3} \right]_{x=1} - P \left[ \frac{dw}{dx} \right]_{x=1} = 0 \quad (3.1.10)$$

$$\frac{k_2 L^3}{EI} w(1) - \left[ \frac{d^3 w}{dx^3} \right]_{x=1} - \frac{PL^2}{EI} \left[ \frac{dw}{dx} \right]_{x=1} = 0 \quad (3.1.11)$$

Výše popsané okrajové podmínky (3.1.1), (3.1.2), (3.1.3), (3.1.4) jsou nezbytným doplňkem obecného řešení diferenciální rovnice (2.1.26). Jejich ekvivalentní zápis utvoříme prostřednictvím rovnic (2.1.27), (2.1.28), do kterých dosadíme následující parametry „s“:  $\bar{s}_1^0 = 1$ ,  $\hat{s}_2^0 = \xi_0$ ,  $\hat{s}_3^0 = -1$ ,  $\bar{s}_2^1 = \xi_1$ ,  $\bar{s}_3^1 = 1$ ,  $\hat{s}_1^1 = \zeta$ ,  $\hat{s}_2^1 = -\alpha$ ,  $\hat{s}_4^1 = -1$ , zbylé parametry  $\bar{s}_i^0$ ,  $\hat{s}_i^0$ ,  $\bar{s}_i^1$ ,  $\hat{s}_i^1$  se rovnají nule. Nyní tyto hodnoty uplatníme v matici  $A$  z rovnice (2.1.36). Podmínku stability u prutu z obr. 3.1 zajistíme determinantem matice  $A$ , který položíme roven nule, jak je naznačeno v rovnici (3.1.12).

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \xi_0 \sqrt{\alpha} & \alpha & \xi_0 & 0 \\ \xi_1 \sqrt{\alpha} \cos(\sqrt{\alpha}) - \alpha \sin(\sqrt{\alpha}) & -\xi_1 \sqrt{\alpha} \sin(\sqrt{\alpha}) - \alpha \cos(\sqrt{\alpha}) & \xi_1 & 0 \\ \zeta \sin(\sqrt{\alpha}) & \zeta \cos(\sqrt{\alpha}) & \zeta - \alpha & \zeta \end{vmatrix} = 0 \quad (3.1.12)$$

Abychom tuto homogenní rovnici mohli vyřešit a získat kritickou sílu, musíme stanovit bezrozměrné parametry  $\xi_0$ ,  $\xi_1$ ,  $\zeta$ , které ovšem závisí na odpovídajících tuhostech pružin  $c_0$ ,  $c_1$ ,  $k_2$ , viz vzorce (3.1.13), (3.1.14), (3.1.15). V následujících kapitolách probereme konkrétní případy pružně uložených prutů.

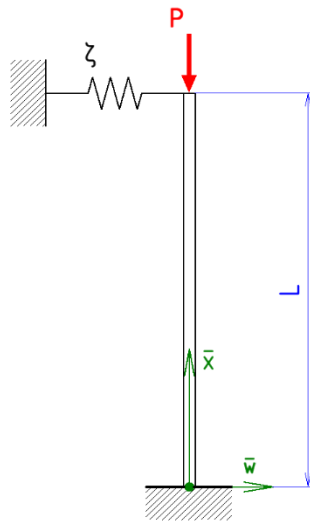
$$\xi_0 = \frac{c_0 L}{EI} \quad (3.1.13)$$

$$\xi_1 = \frac{c_1 L}{EI} \quad (3.1.14)$$

$$\zeta = \frac{k_2 L^3}{EI} \quad (3.1.15)$$

### 3.2 Vetknutý prut s podporou translační pružiny

Uvažujme axiálně zatížený ideální štíhlý přímý prut, jehož první konec je uložen pomocí absolutně tuhého vetknutí a druhý konec je připevněn k translační pružině, viz *obr. 3.4*. V souvislosti s předcházejícím případem obecného uložení se jedná o tyto hodnoty bezrozměrných konstant:  $\xi_0 = \infty$ ,  $\xi_1 = 0$ ,  $\zeta = \text{konst.}$ , [2].



*Obr. 3.4 – Vetknutý prut s podporou translační pružiny*

Okrajové podmínky vystihující dané uložení prutu jsou uvedeny níže v rovnicích (3.2.1), (3.2.2), (3.2.3), (3.2.4).

$$w(0) = 0 \quad (3.2.1)$$

$$\left[ \frac{dw}{dx} \right]_{x=0} = 0 \quad (3.2.2)$$

$$\left[ \frac{d^2 w}{dx^2} \right]_{x=1} = 0 \quad (3.2.3)$$

$$\zeta w(1) - \left[ \frac{d^3 w}{dx^3} + \alpha \frac{dw}{dx} \right]_{x=1} = 0 \quad (3.2.4)$$

Ekvivalentní zápis okrajových podmínek učiníme prostřednictvím následujících parametrů „s“:  $\bar{s}_1^0 = 1$ ,  $\hat{s}_2^0 = 1$ ,  $\bar{s}_3^1 = 1$ ,  $\hat{s}_1^1 = \zeta$ ,  $\hat{s}_2^1 = -\alpha$ ,  $\hat{s}_4^1 = -1$ , zbylé parametry  $\bar{s}_i^0$ ,  $\hat{s}_i^0$ ,  $\bar{s}_i^1$ ,  $\hat{s}_i^1$  se rovnají nule.

Nyní dosadíme do matice  $A$  z rovnice (2.1.36), vypočteme její determinant a výsledek položíme roven nule.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sqrt{\alpha} & 0 & 1 & 0 \\ -\alpha \sin(\sqrt{\alpha}) & -\alpha \cos(\sqrt{\alpha}) & 0 & 0 \\ \zeta \sin(\sqrt{\alpha}) & \zeta \cos(\sqrt{\alpha}) & \zeta - \alpha & \zeta \end{vmatrix} =$$

$$= \zeta [\sqrt{\alpha} \cos(\sqrt{\alpha}) - \sin(\sqrt{\alpha})] - \alpha \sqrt{\alpha} \cos(\sqrt{\alpha}) = 0 \quad (3.2.5)$$

Tímto jsme získali nelineární homogenní rovnici s parametrem  $\zeta$ . K obdržení kritické síly je třeba zvolit konkrétní parametr  $\zeta$  a následně nalézt nejmenší kladný kořen rovnice (3.2.5). Výsledné hodnoty parametrů  $\alpha$ , jež reprezentují kritické síly, jsou uvedeny v tabulce na obr. 3.5 pro zvolenou škálu parametrů  $\zeta$ .

$\zeta$	0	0.5	1	2	5	10	25	50	100	$\infty$
$\alpha$	$\pi^2/4$	2.8716	3.2735	4.0700	6.3921	9.9563	16.6435	18.9922	19.7035	$2.0457\pi^2$

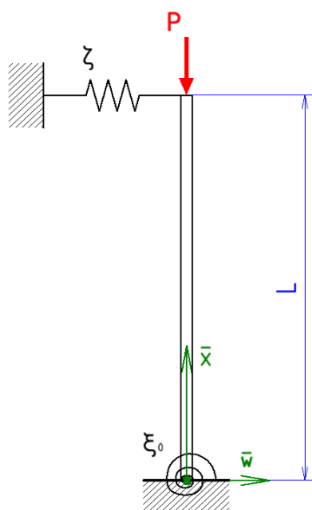
\*Obecný tvar kritické síly:  $P_{KRIT} = \alpha \frac{EI}{L^2}$

Obr. 3.5 – Výsledné hodnoty pro případ vetknutého prutu s podporou translační pružiny

Povšimněme si jistých souvislostí s klasickými Eulerovými případy vzpěru probírané v kapitole 2. Pokud uvažujeme prut s translační pružinou o bezrozměrné konstantě  $\zeta = 0$ , dojdeme ke stejné kritické síle jako u 1. případu vzpěru dle Eulerova. Vezmeme-li v úvahu translační pružinu o nekonečně velké tuhosti  $\zeta = \infty$ , obdržíme totožnou kritickou sílu jako u 3. případu vzpěru dle Eulerova. Tyto závěry indikují korektnost výše uvedeného postupu.

### 3.3 Nedokonale vetknutý prut s podporou translační pružiny

Uvažujme axiálně zatížený ideální štíhlý přímý prut. Nedokonale vetknutí na spodním konci prutu je charakterizováno abstraktní torzní pružinou o bezrozměrné konstantě  $\xi_0$ . Tato pružina zajistí možnost natočení konce prutu, které bude úměrné příslušné tuhosti. Horní konec je připojen k translační pružině o bezrozměrné konstantě  $\zeta$ , avšak v natočení má naprostou volnost  $\xi_1 = 0$ . Popsanou situaci vystihuje obr. 3.6, [2].



Obr. 3.6 – Nedokonale vetknutý prut s podporou translační pružiny

Tomuto případu uložení přísluší okrajové podmínky dané rovnicemi (3.3.1), (3.3.2), (3.3.3), (3.3.4).

$$w(0) = 0 \quad (3.3.1)$$

$$\xi_0 \left[ \frac{dw}{dx} \right]_{x=0} - \left[ \frac{d^2w}{dx^2} \right]_{x=0} = 0 \quad (3.3.2)$$

$$\left[ \frac{d^2w}{dx^2} \right]_{x=1} = 0 \quad (3.3.3)$$

$$\zeta w(1) - \left[ \frac{d^3w}{dx^3} + \alpha \frac{dw}{dx} \right]_{x=1} = 0 \quad (3.3.4)$$

V řeči parametrů „s“ se jedná o následující hodnoty:  $\bar{s}_1^0 = 1$ ,  $\hat{s}_2^0 = \xi_0$ ,  $\hat{s}_3^0 = -1$ ,  $\bar{s}_3^1 = 1$ ,  $\hat{s}_1^1 = \zeta$ ,  $\hat{s}_2^1 = -\alpha$ ,  $\hat{s}_4^1 = -1$ , zbylé parametry  $\bar{s}_i^0, \hat{s}_i^0, \bar{s}_i^1, \hat{s}_i^1$  se rovnají nule. Dosadíme je do matice  $A$  ze vztahu (2.1.36), poté vypočteme její determinant a výsledek položíme roven nule, jak je naznačeno v rovnici (3.3.5).

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \xi_0\sqrt{\alpha} & \alpha & \xi_0 & 0 \\ -\alpha \sin(\sqrt{\alpha}) & -\alpha \cos(\sqrt{\alpha}) & 0 & 0 \\ \zeta \sin(\sqrt{\alpha}) & \zeta \cos(\sqrt{\alpha}) & \zeta - \alpha & \zeta \end{vmatrix} =$$

$$= \xi_0\zeta[\sqrt{\alpha} \cos(\sqrt{\alpha}) - \sin(\sqrt{\alpha})] + \alpha \sin(\sqrt{\alpha}) [\alpha - \zeta] - \xi_0\alpha\sqrt{\alpha} \cos(\sqrt{\alpha}) = 0 \quad (3.3.5)$$

Obdrželi jsme nelineární homogenní rovnici o dvou parametrech. Opět hledáme nejmenší kladný kořen pro zjištění kritické síly. Vyhodnocení je předvedeno v tabulce na obr. 3.7.

$\alpha$	$\zeta$	0	0.5	1	2	5	10	25	50	100	$\infty$
$\xi_0$											
0	0	0	0.5000	1.0000	2.0000	5.0000	$\pi^2$	$\pi^2$	$\pi^2$	$\pi^2$	$\pi^2$
0.5	0.4268	0.9245	1.4220	2.4161	5.3865	9.9537	10.7686	10.7870	10.7930	10.7978	
1	0.7402	1.2329	1.7250	2.7068	5.6203	9.9551	11.4946	11.5603	11.5815	11.5982	
2	1.1597	1.6408	2.1204	3.0746	5.8751	9.9557	12.5702	12.7780	12.8436	12.8944	
5	1.7262	2.1815	2.6344	3.5320	6.1381	9.9561	14.2295	14.9083	15.1185	15.2768	
10	2.0417	2.4776	2.9108	3.7685	6.2557	9.9562	15.2427	16.4382	16.8063	17.0763	
25	2.2815	2.7002	3.1164	3.9406	6.3352	9.9563	16.0333	17.8059	18.3485	18.7341	
50	2.3716	2.7834	3.1928	4.0038	6.3632	9.9563	16.3303	18.3678	18.9890	19.4233	
100	2.4188	2.8269	3.2326	4.0365	6.3775	9.9563	16.4849	18.6719	19.3366	19.7970	
$\infty$	$\pi^2/4$	2.8716	3.2735	4.0700	6.3921	9.9563	16.6435	18.9922	19.7035	$2.0457\pi^2$	

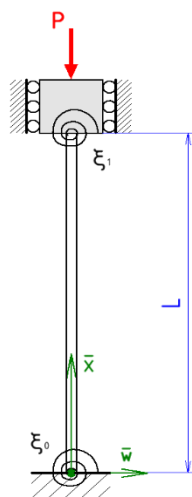
\*Obecný tvar kritické síly:  $P_{KRIT} = \alpha \frac{EI}{L^2}$

Obr. 3.7 – Výsledné hodnoty pro případ nedokonale vetknutého prutu s podporou translační pružiny

Výše uvedená tabulka zobrazuje číselné hodnoty bezrozměrného parametru  $\alpha$  pro vybrané kombinace bezrozměrných parametrů pružin  $\xi_0$  a  $\zeta$ . Pozoruhodné jsou jistě hodnoty, které se nalézají v rozích. Nulová hodnota parametru  $\alpha$  připadá situaci, kdy je spodní konec prutu uložen pomocí rotační vazby a horní konec je volný. V takovém případě prutu hrozí extrémní nebezpečí ztráty stability. Další rohová hodnota  $\pi^2$  přísluší prutu, který je uložen za pomoci dvou rotačních vazeb, a tudíž se jedná o druhý Eulerův případ vzpěru. Hodnotě  $\pi^2/4$  odpovídá prut, jehož spodní konec je vázán absolutně tuhým vetknutím a horní konec je volný. Očividně se shodujeme s prvním případem vzpěru dle Eulera. Poslední rohová hodnota  $2.0457\pi^2$  náleží třetímu případu vzpěru dle Eulera, který je charakterizován absolutně tuhým vetknutím a rotační vazbou na koncích prutu.

### 3.4 Nedokonale vetknutý prut po obou koncích

Předpokládejme axiálně zatížený ideální štíhlý přímý prut, jehož oba konce jsou nedokonale vetknuty, přičemž jedno vetknutí je posuvné ve směru osy prutu. Pojmeme „nedokonalé vetknutí“ se rozumí uložení, které nedovoluje příčný pohyb konce prutu, pouze natočení přímo úměrné tuhosti modelové torzní pružiny. V tomto případě jsou parametry  $\xi_0$  a  $\xi_1$  libovolné konstanty a parametr pomyslné translační pružiny  $\zeta = \infty$ . Popsanou situaci vystihuje obr. 3.8, [2].



Obr. 3.8 – Nedokonale vetknutý prut po obou koncích

Pro tento případ uložení napíšeme čtyři okrajové podmínky dané vztahy (3.4.1), (3.4.2), (3.4.3), (3.4.4).

$$w(0) = 0 \quad (3.4.1)$$

$$\xi_0 \left[ \frac{dw}{dx} \right]_{x=0} - \left[ \frac{d^2w}{dx^2} \right]_{x=0} = 0 \quad (3.4.2)$$

$$w(1) = 0 \quad (3.4.3)$$

$$\xi_1 \left[ \frac{dw}{dx} \right]_{x=1} + \left[ \frac{d^2w}{dx^2} \right]_{x=1} = 0 \quad (3.4.4)$$

Zmíněným okrajovým podmínkám odpovídá následující kombinace parametrů „s“:  $\bar{s}_1^0 = 1$ ,  $\hat{s}_2^0 = \xi_0$ ,  $\hat{s}_3^0 = -1$ ,  $\bar{s}_1^1 = 1$ ,  $\hat{s}_2^1 = \xi_1$ ,  $\hat{s}_3^1 = 1$ , ostatní parametry  $\bar{s}_i^0$ ,  $\hat{s}_i^0$ ,  $\bar{s}_i^1$ ,  $\hat{s}_i^1$  se rovnají nule. Tyto parametry dosadíme do matice  $A$  z rovnice (2.1.36). Poté vypočteme její determinant a výsledek položíme roven nule.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \xi_0 \sqrt{\alpha} & \alpha & \xi_0 & 0 \\ \sin(\sqrt{\alpha}) & \cos(\sqrt{\alpha}) & 1 & 1 \\ \xi_1 \sqrt{\alpha} \cos(\sqrt{\alpha}) - \alpha \sin(\sqrt{\alpha}) & -\xi_1 \sqrt{\alpha} \sin(\sqrt{\alpha}) - \alpha \cos(\sqrt{\alpha}) & \xi_1 & 0 \end{vmatrix} =$$



$$= (\xi_0 + \xi_1)[\sqrt{\alpha} \sin(\sqrt{\alpha}) - \alpha \cos(\sqrt{\alpha})] + (\xi_0 \xi_1)[2 - \sqrt{\alpha} \sin(\sqrt{\alpha}) - 2 \cos(\sqrt{\alpha})] + \alpha \sqrt{\alpha} \sin(\sqrt{\alpha}) = 0 \quad (3.4.5)$$

Tímto jsme obdrželi nelineární homogenní rovnici (3.4.5) o dvou parametrech  $\xi_0$  a  $\xi_1$ . K získání kritické síly je třeba provést volbu parametrů a následně nalézt nejmenší kladný kořen výše uvedené rovnice. Zpracování výsledků dokládá tabulka na obr. 3.9.

$\alpha$	$\xi_0$	0	0.5	1	2	5	10	25	50	100	$\infty$
$\xi_1$											
0	$\pi^2$	10.7978	11.5982	12.8944	15.2768	17.0763	18.7341	19.4233	19.7970	2.0457 $\pi^2$	
0.5	10.7978	11.7719	12.6134	13.9794	16.4962	18.3965	20.1396	20.8604	21.2500	21.6594	
1	11.5982	12.6134	13.4924	14.9224	17.5648	19.5613	21.3870	22.1387	22.5439	22.9688	
2	12.8944	13.9794	14.9224	16.4634	19.3296	21.5022	23.4824	24.2926	24.7276	25.1822	
5	15.2768	16.4962	17.5648	19.3296	22.6699	25.2394	27.5846	28.5376	29.0461	29.5748	
10	17.0763	18.3965	19.5613	21.5022	25.2394	28.1677	30.8660	31.9630	32.5474	33.1532	
25	18.7341	20.1396	21.3870	23.4824	27.5846	30.8660	33.9345	35.1893	35.8582	36.5515	
50	19.4233	20.8604	22.1387	24.2926	28.5376	31.9630	35.1893	36.5136	37.2201	37.9528	
100	19.7970	21.2500	22.5439	24.7276	29.0461	32.5474	35.8582	37.2201	37.9473	38.7015	
$\infty$	2.0457 $\pi^2$	21.6594	22.9688	25.1822	29.5748	33.1532	36.5515	37.9528	38.7015	4 $\pi^2$	

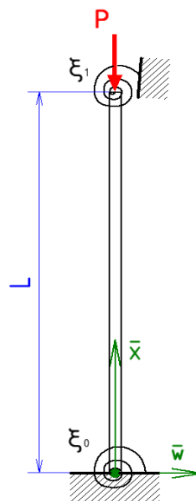
\*Obecný tvar kritické síly:  $P_{KRIT} = \alpha \frac{EI}{L^2}$

Obr. 3.9 – Výsledné hodnoty pro případ nedokonale vetknutého prutu po obou koncích

Výše uvedená tabulka prezentuje hodnoty bezrozměrného parametru  $\alpha$  pro různé kombinace bezrozměrných parametrů torzních pružin  $\xi_0$  a  $\xi_1$ . Na první pohled je zřejmé, že je celá tabulka hodnot symetrická podle zvýrazněné hlavní diagonály. Příčinu nalezneme ve fyzikální symetrii popsaného případu. Zaměříme-li se na rohové hodnoty, zjistíme, že se ztotožňují se třemi případy vzpěru dle Eulera. Nulové hodnoty obou parametrů torzních pružin zajistí ideální kloubové podpory, potom hodnota  $\pi^2$  odpovídá druhému případu vzpěru dle Eulera. Kombinací nulové a nekonečné hodnoty parametrů torzních pružin získáme prut, který je uložen prostřednictvím ideálního vetknutí a ideální kloubové vazby. V této situaci nabývá parametr  $\alpha$  hodnoty  $2.0457\pi^2$ , stejně jako je tomu v třetím případě vzpěru dle Eulera. Poslední významná tabulková hodnota  $4\pi^2$  přísluší ideálně vetknutému prutu po obou koncích, kterému odpovídají nekonečné hodnoty parametrů torzních pružin, a tudíž se jedná o čtvrtý případ vzpěru dle Eulera.

### 3.5 Nedokonale vetknutý prut s podporou torzní pružiny

Uvažujme axiálně zatížený ideální štíhlý přímý prut, jehož spodní konec je uložen prostřednictvím nedokonalého vetknutí, které je charakterizované bezrozměrnou konstantou  $\xi_0$ . Hornímu konci prutu je dovolen volný pohyb v příčném i svislém směru, pouze mu v natočení klade odpor modelová torzní pružina o bezrozměrné konstantě  $\xi_1$ . Uvedený případ vystihuje obr. 3.10, [2].



Obr. 3.10 – Nedokonale vetknutý prut s podporou torzní pružiny

Zmíněné uložení prutu lze popsat okrajovými podmínkami, které jsou dány vztahy (3.5.1), (3.5.2), (3.5.3), (3.5.4).

$$w(0) = 0 \quad (3.5.1)$$

$$\xi_0 \left[ \frac{dw}{dx} \right]_{x=0} - \left[ \frac{d^2w}{dx^2} \right]_{x=0} = 0 \quad (3.5.2)$$

$$\xi_1 \left[ \frac{dw}{dx} \right]_{x=1} + \left[ \frac{d^2w}{dx^2} \right]_{x=1} = 0 \quad (3.5.3)$$

$$\left[ \frac{d^3w}{dx^3} \right]_{x=1} + \alpha \left[ \frac{dw}{dx} \right]_{x=1} = 0 \quad (3.5.4)$$

Tyto okrajové podmínky vyjádříme pomocí následujících parametrů „s“:  $\bar{s}_1^0 = 1$ ,  $\hat{s}_2^0 = \xi_0$ ,  $\hat{s}_3^0 = -1$ ,  $\bar{s}_2^1 = \xi_1$ ,  $\bar{s}_3^1 = 1$ ,  $\hat{s}_4^1 = 1$ ,  $\hat{s}_2^1 = \alpha$ , zbylé parametry  $\bar{s}_i^0, \hat{s}_i^0, \bar{s}_i^1, \hat{s}_i^1$  se rovnají nule. Nyní můžeme dosadit do matice  $\mathbf{A}$  z rovnice (2.1.36). Dále vypočteme její determinant a výsledek položíme roven nule.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \xi_0\sqrt{\alpha} & \alpha & \xi_0 & 0 \\ \xi_1\sqrt{\alpha}\cos(\sqrt{\alpha}) - \alpha\sin(\sqrt{\alpha}) & -\xi_1\sqrt{\alpha}\sin(\sqrt{\alpha}) - \alpha\cos(\sqrt{\alpha}) & \xi_1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (\xi_0 + \xi_1)\sqrt{\alpha}\cos(\sqrt{\alpha}) + (\xi_0\xi_1 - \alpha)\sin(\sqrt{\alpha}) = 0 \quad (3.5.5)$$

Obdrželi jsme nelineární homogenní rovnici (3.5.5) o dvou parametrech  $\xi_0$  a  $\xi_1$ . Abychom získali kritickou sílu, musíme zvolit oba parametry a poté nalézt nejmenší kladný kořen dané rovnice. Výsledky jsou uvedeny v tabulce na obr. 3.11.

$\alpha$	$\xi_0$	0	0.5	1	2	5	10	25	50	100	$\infty$
$\xi_1$											
0	0	0	0.4268	0.7402	1.1597	1.7262	2.0417	2.2815	2.3716	2.4188	$\pi^2/4$
0.5	0.4268	0.9220	1.2911	1.7916	2.4761	2.8589	3.1491	3.2579	3.3146	3.3731	
1	0.7402	1.2911	1.7071	2.2783	3.0705	3.5168	3.8552	3.9819	4.0479	4.1159	
2	1.1597	1.7916	2.2783	2.9607	3.9320	4.4886	4.9127	5.0715	5.1542	5.2392	
5	1.7262	2.4761	3.0705	3.9320	5.2187	5.9858	6.5808	6.8048	6.9217	7.0419	
10	2.0417	2.8589	3.5168	4.4886	5.9858	6.9047	7.6290	7.9038	8.0475	8.1955	
25	2.2815	3.1491	3.8552	4.9127	6.5808	7.6290	8.4672	8.7874	8.9553	9.1284	
50	2.3716	3.2579	3.9819	5.0715	6.8048	7.9038	8.7874	9.1259	9.3036	9.4868	
100	2.4188	3.3146	4.0479	5.1542	6.9217	8.0475	8.9553	9.3036	9.4865	9.6752	
$\infty$	$\pi^2/4$	3.3731	4.1159	5.2392	7.0419	8.1955	9.1284	9.4868	9.6752	$\pi^2$	

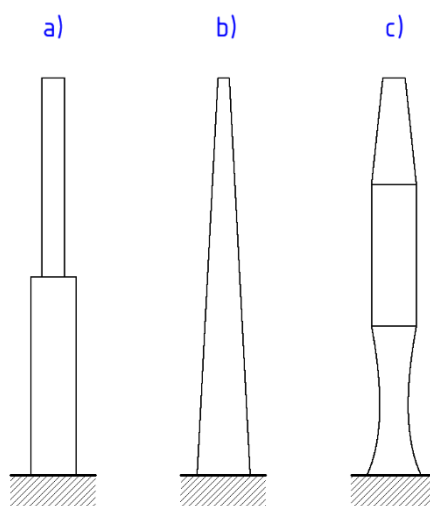
\*Obecný tvar kritické síly:  $P_{KRIT} = \alpha \frac{EI}{L^2}$

Obr. 3.11 – Výsledné hodnoty pro případ nedokonale vetknutého prutu s podporou torzní pružiny

Výše přiložená tabulka vyobrazuje hodnoty bezrozměrného parametru  $\alpha$  v závislosti na volených bezrozměrných parametrech modelových torzních pružin  $\xi_0$  a  $\xi_1$ . Výsledky jsou symetrické podle zvýrazněné hlavní diagonály. Povšimněme si rohových hodnot, které jsou zajímavé v souvislosti s Eulerovými případy vzpěru. Ojedinelá nulová hodnota parametru  $\alpha$  značí prut, kterému hrozí extrémní nebezpečí ztráty stability. Hodnotě  $\pi^2/4$  odpovídají dva případy, z nichž první je totožný s prvním případem vzpěru dle Eulera. Jedná se o vetknutý prut s volným koncem. Druhý případ se vyznačuje ideální kloubovou vazbou na spodním konci prutu, přičemž hornímu konci není dovoleno natočení. Poslední rohová hodnota  $\pi^2$  náleží prutu, jehož spodní konec je ideálně vetknut a opačnému konci není dovoleno natočení, pouze pohyb v příčném směru. Jedná se o tentýž případ, který byl uveden v kapitole 2.6.

## 4 Pruty s proměnným průřezem

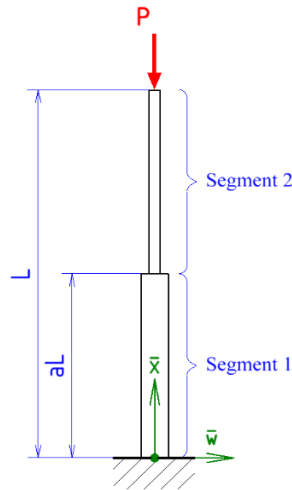
V mnoha reálných konstrukcích narazíme na sloupky, jejichž průřez se po délce jistým způsobem mění. V praxi jde nejčastěji o dva případy. První si lze představit jako kaskádovitý prut, který je členěn do segmentů, viz a) na *obr. 4.1*. Druhý pak jako prut o spojitě proměnném průřezu, viz b) na *obr. 4.1*. Zajisté bychom našli i jiné varianty, např. kombinace předchozích dvou typů, ale již se bude jednat o méně obvyklé příklady, viz c) na *obr. 4.1*. Hlavní rozdíl oproti případům v předešlých kapitolách představuje kvadratický moment průřezu  $I = I(x)$ , který bude obecně záviset na podélné souřadnici prutu  $x$ , a tudíž nebude konstantní. Tento fakt s sebou přináší jisté obtíže, jež budeme v následujícím textu řešit. Nutno uvést, že jen zlomek případů prutů s proměnným průřezem lze řešit exaktně, v ostatních případech přichází na řadu metody numerické, [2], [4].



*Obr. 4.1 – Členění prutů s proměnným průřezem*

### 4.1 Dvoustupňový prut zatížený osovou silou

Začneme s jednodušším příkladem ideálního přímého prutu o dvou segmentech, který je zatížen axiální silou  $P$ , viz *obr. 4.2*, [2], [4]. Místo přechodu označíme kótou  $aL$ , kde  $a \in (0; 1)$  volíme dle konkrétních požadavků a  $L$  je celková délka prutu. Dále předpokládáme, že se jednotlivé části prutu neliší materiálem, tudíž uvažujeme konstantní modul pružnosti  $E$ . Jediný rozdíl představuje kvadratický moment průřezu  $I$ , který závisí na tvaru a ploše průřezu. Nyní definujme „segment 1“ pomocí intervalu:  $0 \leq \bar{x} < aL$ . Obdobně „segment 2“ prostřednictvím intervalu:  $aL \leq \bar{x} \leq L$ . Dále budeme některé veličiny označovat dolním indexem dle příslušnosti k segmentu. Konkrétně se jedná o bezrozměrný parametr  $\alpha_i$ , kvadratický moment průřezu  $I_i$  a průhyb  $w_i$ , kde  $i = 1, 2$ .



Obr. 4.2 – Dvoustupňový prut zatížený osovou silou

K odvození kritické síly pro výše popsany případ použijeme základní diferenciální rovnici (2.1.17) z druhé kapitoly, kterou bychom za jiných okolností u prutů s proměnným průřezem použít nemohli, avšak díky rozdělení případu na dva intervaly opět docílíme konstantního součinu  $EI_{1,2} = konst.$  Pro každý segment prutu napíšeme jedinečnou diferenciální rovnici a rovněž definujeme bezrozměrné parametry  $\alpha$ .

$$\frac{d^4 w_2}{dx^4} + \alpha_2 \frac{d^2 w_2}{dx^2} = 0 \quad (4.1.1)$$

$$\frac{d^4 w_1}{dx^4} + \alpha_1 \frac{d^2 w_1}{dx^2} = 0 \quad (4.1.2)$$

$$\alpha_2 = \frac{PL^2}{EI_2} \quad (4.1.3)$$

$$\alpha_1 = \frac{PL^2}{EI_1} \quad (4.1.4)$$

Obecné řešení diferenciálních rovnic (4.1.1), (4.1.2) nalezneme v příslušných tvarech (4.1.5), (4.1.6).

$$w_2 = C_1 \sin(\sqrt{\alpha_2} x) + C_2 \cos(\sqrt{\alpha_2} x) + C_3 x + C_4 \quad (4.1.5)$$

$$w_1 = B_1 \sin(\sqrt{\alpha_1} x) + B_2 \cos(\sqrt{\alpha_1} x) + B_3 x + B_4 \quad (4.1.6)$$

Obdrželi jsme vztahy, ve kterých dohromady figuruje osm integračních konstant  $B_k$  a  $C_k$ , kde  $k = 1, 2, 3, 4$ . Jak následně zjistíme, tyto konstanty jsou mezi sebou závislé. Nyní napíšeme čtyři rovnice spojitosti (4.1.7), (4.1.8), (4.1.9), (4.1.10), které platí na rozhraní, tj. na souřadnici  $x = a$ .

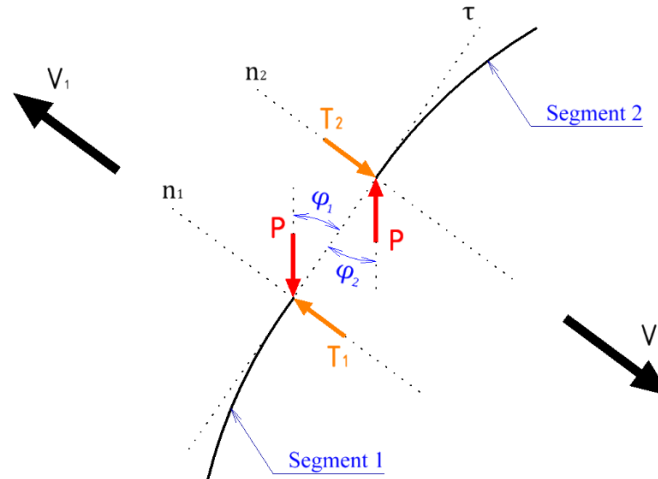
$$w_1(a) = w_2(a) \quad (4.1.7)$$

$$\left[ \frac{dw_1}{dx} \right]_{x=a} = \left[ \frac{dw_2}{dx} \right]_{x=a} \quad (4.1.8)$$

$$I_1 \left[ \frac{d^2w_1}{dx^2} \right]_{x=a} = I_2 \left[ \frac{d^2w_2}{dx^2} \right]_{x=a} \quad (4.1.9)$$

$$I_1 \left[ \frac{d^3w_1}{dx^3} + \alpha_1 \frac{dw_1}{dx} \right]_{x=a} = I_2 \left[ \frac{d^3w_2}{dx^3} + \alpha_2 \frac{dw_2}{dx} \right]_{x=a} \quad (4.1.10)$$

První rovnice (4.1.7) vyjadřuje rovnost průhybů  $w_{1,2}$  v místě rozhraní. Druhá rovnice (4.1.8) popisuje shodnost úhlu natočení střednice prutu  $\varphi$  v místě rozhraní, který je reprezentován první derivací průhybů  $w_{1,2}$  podle bezrozměrné souřadnice  $x$ . Třetí rovnice (4.1.9) představuje rovnost ohybových momentů  $M_{1,2}$  v místě rozhraní. Čtvrtá rovnice (4.1.10) je odvozena níže, viz *obr. 4.3*. Dává do rovnosti silové účinky v místě rozhraní z obou stran, konkrétně se jedná o posouvající sílu  $T$  a průmět vnější síly  $P$ .



*Obr. 4.3 – Silové účinky v místě rozhraní*

Na *obr. 4.3* se nachází pomyslně rozdělený prut právě v místě rozhraní ( $x = a$ ). Síly  $V_1, V_2$  označují obecné výslednice sil do směru normál  $n_1, n_2$ , které působí na příslušných stranách odděleného prutu. Ve skutečnosti obě normály splynou v jednu, zatímco zde se jedná o schéma problému. Z principu akce a reakce plyne vztah (4.1.11). Další rovnice jsou pouhým vyjádřením sil do normálového směru. Následují úpravy, které korespondují s poznatky z předchozích kapitol, jejichž prostřednictvím získáme uvedenou rovnici (4.1.10).

$$V_1 = V_2 \quad (4.1.11)$$

$$T_1 - P \sin(\varphi_1) = T_2 - P \sin(\varphi_2) \quad (4.1.12)$$

$$T_1 - P\varphi_1 = T_2 - P\varphi_2 \quad (4.1.13)$$

$$-\frac{EI_1}{L^2} \frac{d^3 w_1}{dx^3} - P \frac{dw_1}{dx} = -\frac{EI_2}{L^2} \frac{d^3 w_2}{dx^3} - P \frac{dw_2}{dx} \quad (4.1.14)$$

$$I_1 \frac{d^3 w_1}{dx^3} + \frac{PL^2}{E} \frac{dw_1}{dx} = I_2 \frac{d^3 w_2}{dx^3} + \frac{PL^2}{E} \frac{dw_2}{dx} \quad (4.1.15)$$

$$I_1 \left[ \frac{d^3 w_1}{dx^3} + \alpha_1 \frac{dw_1}{dx} \right] = I_2 \left[ \frac{d^3 w_2}{dx^3} + \alpha_2 \frac{dw_2}{dx} \right] \quad (4.1.16)$$

Dále obecně vyřešíme soustavu čtyř rovnic spjitosti, které byly uvedeny výše a vyjádříme integrační konstanty  $B_k$  v závislosti na integračních konstantách  $C_k$ .

$$\begin{aligned} B_1 = & C_1 \left[ \frac{\sqrt{\alpha_2}}{\sqrt{\alpha_1}} \cos(a\sqrt{\alpha_1}) \cos(a\sqrt{\alpha_2}) + \frac{I_2 \alpha_2}{I_1 \alpha_1} \sin(a\sqrt{\alpha_1}) \sin(a\sqrt{\alpha_2}) \right] \\ & + C_2 \left[ \frac{I_2 \alpha_2}{I_1 \alpha_1} \cos(a\sqrt{\alpha_2}) \sin(a\sqrt{\alpha_1}) - \frac{\sqrt{\alpha_2}}{\sqrt{\alpha_1}} \cos(a\sqrt{\alpha_1}) \sin(a\sqrt{\alpha_2}) \right] \\ & + C_3 \left[ \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} \cos(a\sqrt{\alpha_1}) - \frac{I_2 \alpha_2}{I_1 \alpha_1 \sqrt{\alpha_1}} \cos(a\sqrt{\alpha_1}) \right] \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

$$\begin{aligned} B_2 = & C_1 \left[ \frac{I_2 \alpha_2}{I_1 \alpha_1} \cos(a\sqrt{\alpha_1}) \sin(a\sqrt{\alpha_2}) - \frac{\sqrt{\alpha_2}}{\sqrt{\alpha_1}} \cos(a\sqrt{\alpha_2}) \sin(a\sqrt{\alpha_1}) \right] \\ & + C_2 \left[ \frac{I_2 \alpha_2}{I_1 \alpha_1} \cos(a\sqrt{\alpha_1}) \cos(a\sqrt{\alpha_2}) + \frac{\sqrt{\alpha_2}}{\sqrt{\alpha_1}} \sin(a\sqrt{\alpha_1}) \sin(a\sqrt{\alpha_2}) \right] \\ & + C_3 \left[ \frac{I_2 \alpha_2}{I_1 \alpha_1 \sqrt{\alpha_1}} \sin(a\sqrt{\alpha_1}) - \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} \sin(a\sqrt{\alpha_1}) \right] \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

$$B_3 = C_3 \left[ \frac{I_2 \alpha_2}{I_1 \alpha_1} \right] \quad (4.1.19)$$

$$\begin{aligned} B_4 = & C_1 \left[ \sin(a\sqrt{\alpha_2}) - \frac{I_2 \alpha_2}{I_1 \alpha_1} \sin(a\sqrt{\alpha_2}) \right] \\ & + C_2 \left[ \cos(a\sqrt{\alpha_2}) - \frac{I_2 \alpha_2}{I_1 \alpha_1} \cos(a\sqrt{\alpha_2}) \right] + C_3 \left[ a - \frac{I_2 \alpha_2}{I_1 \alpha_1} a \right] + C_4 \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

Nyní přichází na řadu formulace okrajových podmínek (4.1.21), (4.1.22), (4.1.23), (4.1.24), které jsou vztaženy k uložení z obr. 4.2. Jedná se o vetknutý prut s volným koncem.

$$w_1(0) = 0 \quad (4.1.21)$$

$$\left[ \frac{dw_1}{dx} \right]_{x=0} = 0 \quad (4.1.22)$$

$$\left[ \frac{d^2 w_2}{dx^2} \right]_{x=1} = 0 \quad (4.1.23)$$

$$\left[ \frac{d^3 w_2}{dx^3} + \alpha_2 \frac{dw_2}{dx} \right]_{x=1} = 0 \quad (4.1.24)$$

Do rovnic okrajových podmínek dosadíme příslušné vztahy průhybů  $w_{1,2}$  a jejich derivace. Tímto získáme soustavu čtyř homogenních rovnic, ve kterých se vyskytují integrační konstanty  $B_k$  a  $C_k$ , ale jelikož známe jejich vzájemný vztah, můžeme celou soustavu převést na následující tvar maticového zápisu (4.1.25).

$$A\vec{c} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.1.25)$$

Obdobný postup bychom uplatnili rovněž při jiném typu uložení prutu, potažmo okrajových podmínkách. Matice  $A$  z rovnice (4.1.25) zde nebude jmenovitě vyčíslena, jelikož její vnitřní výrazy dosahují přílišných rozměrů a také z toho důvodu, že je k řešení využita výpočetní technika. Podmínku stability prutu zajistíme determinantem matice  $A$ , který položíme roven nule. Tak se po malé úpravě dostaneme k následujícímu vztahu.

$$I_2 \alpha_2 \sin(a\sqrt{\alpha_1}) [\cos(\sqrt{\alpha_2}) \sin(a\sqrt{\alpha_2}) - \sin(\sqrt{\alpha_2}) \cos(a\sqrt{\alpha_2})] + I_1 \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} \cos(a\sqrt{\alpha_1}) [\cos(\sqrt{\alpha_2}) \cos(a\sqrt{\alpha_2}) + \sin(\sqrt{\alpha_2}) \sin(a\sqrt{\alpha_2})] = 0 \quad (4.1.26)$$

Obdrželi jsme nelineární homogenní rovnici (4.1.26). Dále je třeba zvolit parametr  $a$ , který reprezentuje výšku segmentů a poměr parametrů  $I_1/I_2$ , jenž se váže na plochu průřezu jednotlivých segmentů. Za této situace hledáme nejmenší kladný kořen zmíněné rovnice pro odvození kritické síly. Výsledky jsou uvedeny v tabulce na obr. 4.4.

$\alpha_1$	$a$	0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1
$I_1/I_2$								
1		$\pi^2/4$	$\pi^2/4$	$\pi^2/4$	$\pi^2/4$	$\pi^2/4$	$\pi^2/4$	$\pi^2/4$
1.1		2.2431	2.2841	2.3624	2.4231	2.4569	2.4670	$\pi^2/4$
1.3		1.8980	1.9883	2.1748	2.3373	2.4359	2.4662	$\pi^2/4$
1.5		1.6449	1.7599	2.0128	2.2554	2.4148	2.4654	$\pi^2/4$
1.7		1.4514	1.5783	1.8718	2.1773	2.3937	2.4646	$\pi^2/4$
1.9		1.2986	1.4306	1.7483	2.1030	2.3725	2.4637	$\pi^2/4$
2		1.2337	1.3667	1.6921	2.0672	2.3619	2.4633	$\pi^2/4$

\*Obecný tvar kritické síly:  $P_{KRIT} = \alpha_1 \frac{EI_1}{L^2}$

Obr. 4.4 – Výsledné hodnoty pro případ dvoustupňového prutu zatíženého osovou silou



## Závěr

V této práci byla použita metoda odvození vzpěru mírně odlišná od těch, se kterými se běžně student Fakulty strojní ČVUT setká v předmětu „Pružnost a pevnost II“. Tato skutečnost se vztahuje k odvození Eulerovy metody vzpěru. Zprvu se může uvedený postup jevit jako složitý, avšak tento subjektivní názor vyvažuje možnost snazšího zobecnění pro téměř libovolnou kombinaci ideálních uložení konců prutů. Vyšší míra zobecnění s sebou ovšem přináší výrazy, jejichž úpravy a následné řešení by byly bez pomoci výpočetní techniky časově náročné. V závěru vedou obě metody k totožným výsledkům, které detailně popisuje shrnutí v druhé kapitole. Snahou bylo nejen uvést hodnoty kritických sil, ty totiž snadno nalezneme v odborné literatuře, ale rovněž okomentovat podmínky, za kterých byly odvozeny a také upřesnit jejich vzájemné souvislosti. Dále jsou v práci rozvedeny pruty s pružným uložením. Těmi lze v praxi mnohem lépe vystihnout reálné případy, a právě proto se jim věnuje velká část této práce. Výsledné hodnoty jsou systematicky uspořádány dle konkrétních kombinací parametrů uložení. Bližší zkoumání těchto hodnot vede k hlubšímu pochopení dané problematiky a utvoření potřebného vhledu do tématu. Neméně důležité pruty s proměnným průřezem představuje poslední kapitola, která mimo jiné popisuje tzv. stupňovitý prut tvořený dvěma segmenty. Tento názorný případ byl vybrán záměrně, jelikož lze zmíněný postup řešení snadno rozšířit na libovolný počet segmentů, a tím získat výsledek pro konkrétní prut.

Ztráta stability prutů se dá považovat za rozsáhlou látku, kterou tato bakalářská práce popisuje pouze povrchově. Jejím cílem nebylo obsáhnout každý možný případ, a to by ani nebylo možné, nýbrž řídit se pokyny zadání, které plnila. V dalších směrech by se jistě mohla rozvíjet, avšak svým cílům, které byly formulovány v úvodu práce, dostála.

## Seznam použité literatury

- [1] VALENTA, František. *Pružnost a pevnost III*. Vyd. 2. přeprac. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2002. ISBN 80-01-02480-6.
- [2] WANG, C. M., C. Y. WANG a J. N. REDDY. *Exact solutions for buckling of structural members*. Boca Raton, FL: CRC Press, 2004. ISBN 0-8493-2222-7.
- [3] MÍKA, Stanislav a Alois KUFNER. *Okrajové úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice. 2.*, upravené vyd. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1983. Matematika pro vysoké školy technické.
- [4] MICHALEC, Jiří. *Pružnost a pevnost I*. 3. vyd. V Praze: České vysoké učení technické, 2009. ISBN 978-80-01-04224-3.
- [5] ČIPERA, Stanislav. *Řešené příklady z matematiky 3*. Vyd. 2., přeprac. Praha: České vysoké učení technické v Praze, 2008. ISBN 978-80-01-04029-4.
- [6] NEUSTUPA, Jiří. *Matematika I*. 6. vyd. V Praze: České vysoké učení technické, 2013. ISBN 978-80-01-05328-7.

## Seznam obrázků

Obr. 1.1 – Rovnovážné stavy tělesa.....	- 2 -
Obr. 2.1 – Ideální prut.....	- 3 -
Obr. 2.2 – Momentová rovnováha .....	- 4 -
Obr. 2.3 – První případ vzpěru.....	- 8 -
Obr. 2.4 – Druhý případ vzpěru .....	- 10 -
Obr. 2.5 – Třetí případ vzpěru.....	- 11 -
Obr. 2.6 – Graf funkce $F(\alpha)$ .....	- 12 -
Obr. 2.7 – Čtvrtý případ vzpěru .....	- 13 -
Obr. 2.8 – Dodatečný (pátý) případ vzpěru .....	- 14 -
Obr. 2.9 – Porovnání případů vzpěru I – V.....	- 16 -
Obr. 2.10 – Abstraktní materiálový diagram .....	- 17 -
Obr. 3.1 – Prut s variací pružných uložení.....	- 18 -
Obr. 3.2 – Pomyslný řez prutu .....	- 20 -
Obr. 3.3 – Uvolnění koncového bodu prutu.....	- 21 -
Obr. 3.4 – Vetknutý prut s podporou translační pružiny.....	- 22 -
Obr. 3.5 – Výsledné hodnoty pro případ vetknutého prutu s podporou translační pružiny .....	- 23 -
Obr. 3.6 – Nedokonale vetknutý prut s podporou translační pružiny .....	- 24 -
Obr. 3.7 – Výsledné hodnoty pro případ nedokonale vetknutého prutu s podporou translační pružiny .....	- 25 -
Obr. 3.8 – Nedokonale vetknutý prut po obou koncích .....	- 26 -
Obr. 3.9 – Výsledné hodnoty pro případ nedokonale vetknutého prutu po obou koncích.....	- 27 -
Obr. 3.10 – Nedokonale vetknutý prut s podporou torzní pružiny .....	- 28 -
Obr. 3.11 – Výsledné hodnoty pro případ nedokonale vetknutého prutu s podporou torzní pružiny .....	- 29 -
Obr. 4.1 – Členění prutů s proměnným průřezem.....	- 30 -
Obr. 4.2 – Dvoustupňový prut zatížený osovou silou.....	- 31 -
Obr. 4.3 – Silové účinky v místě rozhraní .....	- 32 -
Obr. 4.4 – Výsledné hodnoty pro případ dvoustupňového prutu zatíženého osovou silou.....	- 34 -

## Seznam použitých symbolů a označení

$a$	součinitel délky segmentu	[1]
$A$	matice soustavy	
$B$	integrační konstanta	[1]
$c$	konstanta tuhosti torzní pružiny	[Nm/rad]
$C$	integrační konstanta	[1]
$\vec{c}$	aritmetický vektor řešení	
$E$	modul pružnosti materiálu	[N/m <sup>2</sup> ]
$I$	kvadratický moment průřezu	[m <sup>4</sup> ]
$k$	konstanta tuhosti translační pružiny	[N/m]
$L$	celková délka prutu	[m]
$M$	vnitřní ohybový moment	[Nm]
$M_\xi$	moment síly torzní pružiny	[Nm]
$n$	směr normály	
$P$	vnější síla	[N]
$s$	parametr zobecněného tvaru okrajových podmínek	[1]
$S$	síla translační pružiny	[N]
$T$	vnitřní posouvající síla	[N]
$V$	výslednice sil	[N]
$w$	bezrozměrný průhyb prutu v příčném směru	[1]
$\bar{w}$	průhyb prutu v příčném směru	[m]
$x$	bezrozměrná podélná souřadnice prutu	[1]
$\bar{x}$	podélná souřadnice prutu	[m]
$Z$	plocha průřezu prutu	[m <sup>2</sup> ]
$\alpha$	charakteristický parametr prutu	[1]
$\varepsilon$	poměrná deformace	[1]
$\zeta$	charakteristický parametr translační pružiny	[1]
$\lambda$	charakteristické číslo diferenciální rovnice	[1]
$\xi$	charakteristický parametr torzní pružiny	[1]
$\pi$	Ludolfovo číslo	[1]
$\sigma$	napětí	[N/m <sup>2</sup> ]
$\sigma_p$	mez pevnosti materiálu	[N/m <sup>2</sup> ]
$\sigma_u$	mez úměrnosti materiálu	[N/m <sup>2</sup> ]
$\tau$	směr tečny	
$\varphi$	natočení střednice prutu	[rad]