

Bakalářská práce

**Analýza mechanických vlastností  
nalisovaného spoje při zatížení spoje osovými  
silami**

*Yan Shchankin*



Srpen 2017

vedoucí práce: Ing. Karel Vítek CSc.

České vysoké učení technické v Praze  
Fakulta strojní, Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky

## I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Shchankin** Jméno: **Yan** Osobní číslo: **437103**  
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**  
Zadávající katedra/ústav: **Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**  
Studijní program: **Teoretický základ strojního inženýrství**  
Studijní obor: **bez oboru**

## II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

**ANALÝZA MECHANICKÝCH VLASTNOSTÍ NALISOVANÉHO SPOJE PŘI ZATÍŽENÍ SPOJE OSOVÝMI SILAMI**

Název bakalářské práce anglicky:

**Analysis of the mechanical properties of pressed cylinders when loaded by axial forces**

Pokyny pro vypracování:

Analyzujte mechanické vlastnosti variant konstrukčních úprav kontaktního povrchu nalisovaného spoje v programu MKP Abaqus. Zaměřte se na třecí síly působící v osovém směru spoje. Bakalářskou práci formulujte v následujících kapitolách:

- 1) Rešerše teorie
- 2) Návrh analytických experimentů - návrh nalisovaného spoje klasickým výpočtem.
- 3) Návrh numerických experimentů - simulace v MKP, analýza konstrukčních úprav nalisovaného spoje
- 4) Závěry

Seznam doporučené literatury:

1. Michalec, J. a kolektiv: Pružnost a pevnost I. skripta ČVUT v Praze, 2006.
2. Michalec, J. a kolektiv: Pružnost a pevnost II. skripta ČVUT v Praze, 2006.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:


**Ing. Karel Vítek CSc., ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky FS**


Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:


Datum zadání bakalářské práce: **28.04.2017**

Termín odevzdání bakalářské práce: **18.08.2017**

Platnost zadání bakalářské práce: \_\_\_\_\_

  
Podpis vedoucí(ho) práce

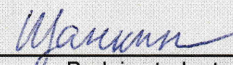
  
Podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

  
Podpis děkana(ky)

## III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

3.5.2017  
Datum převzetí zadání

  
Podpis studenta

## **Poděkování**

Touto formou bych rád poděkoval Ing. Karlu Vítkovi, CSc. za odborné vedení a konzultace v průběhu vypracování této práce. Dále děkuji Ing. Jaromíru Fumferovi za pomoc s programem SIMULIA Abaqus. Také děkuji Ing. Michalu Richterovi za konzultace týkající se českého pravopisu.

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem svoji bakalářskou práci vypracoval samostatně. Dále prohlašuji, že jsem všechny použité zdroje správně a úplně citoval a uvádím je v příloženém seznamu použité literatury.

Nemám závažný důvod proti zpřístupnění této závěrečné práce v souladu se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) v platném znění.

V Praze dne 18. srpna 2017

.....

## **Abstrakt**

Shchankin, Y.: Analýza mechanických vlastností nalisovaného spoje při zatížení spoje osovými silami

Bakalářská práce, Praha 2017

Tato práce zkoumá mechanické vlastnosti nalisovaného spoje při zatížení spoje osovými silami. V teoretické části je podrobně rozebrána teorie tlustostěnných nádob, nalisovaných nádob a spojů. Praktická část obsahuje analytický návrh nalisovaného spoje pro přenos axiálního zatížení. Dále následují numerické experimenty metodou konečných prvků realizované pomocí specializovaného systému SIMULIA Abaqus. V rámci numerických experimentů se porovnávají výsledky MKP s analytickým řešením. Potom následuje návrh konstrukčních úprav pro zvýšení únosnosti spoje při statickém a dynamickém zatížení osovými silami.

## **Klíčová slova**

Nalisovaný spoj, nalisovaná nádoba, tlustostěnná nádoba, silnostěnná nádoba, osová síla, axiální síla, analytický návrh, nalisování zatepla, nalisování zatepla, podélné lisování, příčné lisování, metoda konečných prvků, MKP, Abaqus, numerické experimenty, konstrukční úpravy, statické namáhání, dynamické namáhání

## **Abstract**

Shchankin, Y.: Analysis of the mechanical properties of pressed cylinders when loaded by axial forces

Bachelor thesis, Prague 2017

This work contains the investigation of the mechanical properties of interference fit when loaded by axial forces. The theoretical part includes the detailed theory of thick-walled cylinders, pressed cylinders and joints. The practical part contains an analytical calculation of an interference fit for the axial force transmission. After that, there are numerical experiments using the finite element method realized by the specialized SIMULIA Abaqus system. In this part the results of FEM are compared with the analytical solution. There follows a design of some modifications to increase the permissible load when the joint is loaded by static and dynamic axial forces.

## **Keywords**

Interference fit, pressed joint, pressed cylinder, axial force transmission, analytical calculation, press fit, shrink fit, finite element method, finite element analysis, FEM, FEA, Abaqus, numerical experiments, structural modifications, static force, dynamic force

# Obsah

<b>1. Úvod</b>	<b>1</b>
<b>I. Teoretická část</b>	<b>2</b>
<b>2. Tlustostěnné nádoby</b>	<b>3</b>
2.1. Definice a rozdělení . . . . .	3
2.1.1. Nádoby uzavřené . . . . .	3
2.1.2. Nádoby otevřené . . . . .	3
2.2. Průběhy napětí v tlustostěnné nádobě . . . . .	4
2.2.1. Předpoklady odvození . . . . .	4
2.2.2. Odvození základní diferenciální rovnice . . . . .	4
2.2.3. Řešení diferenciální rovnice Eulerova typu . . . . .	8
První způsob řešení . . . . .	8
Druhý způsob řešení . . . . .	9
Řešení úloh postupným integrováním . . . . .	9
Třetí způsob řešení . . . . .	10
2.2.4. Výsledné vztahy pro průběhy napětí $\sigma_t(x)$ a $\sigma_r(x)$ . . . . .	10
2.2.5. Grafické znázornění průběhů tečného a radiálního napětí . . . . .	12
2.3. Deformace pláště tlustostěnné nádoby . . . . .	13
2.3.1. Pro uzavřenou nádobu . . . . .	14
2.3.2. Pro otevřenou nádobu . . . . .	15
2.4. Pevnostní podmínky tlustostěnných nádob . . . . .	16
2.4.1. Příklad vnitřního přetlaku . . . . .	17
2.4.2. Příklad vnějšího přetlaku . . . . .	18
2.5. Hřídel jako tlustostěnná nádoba . . . . .	19
<b>3. Nalisované nádoby a spoje</b>	<b>21</b>
3.1. Rozložení napětí v nalisované nádobě . . . . .	21
3.2. Pevnostní podmínky nalisované nádoby . . . . .	21
3.3. Optimální geometrie . . . . .	22
3.4. Přesah pro nalisování . . . . .	22
3.4.1. Pro uzavřenou nádobu . . . . .	23
3.4.2. Pro otevřenou nádobu . . . . .	24
3.5. Odlehčený stav . . . . .	25
3.6. Nalisované spoje . . . . .	26
3.6.1. Náboj na dutém hřídeli . . . . .	27
3.6.2. Náboj na plném hřídeli . . . . .	28
3.6.3. Sílové poměry a únosnost . . . . .	28
Zatížení kroutícím momentem a osovou silou . . . . .	28
Zatížení radiální silou a ohybovým momentem . . . . .	29
<b>II. Praktická část</b>	<b>31</b>
<b>4. Analytický návrh</b>	<b>32</b>
4.1. Vstupní parametry . . . . .	32
4.2. Základní rozměry a vlastnosti spoje . . . . .	32

4.3.	Určení minimálního tlaku . . . . .	33
4.4.	Určení přesahu . . . . .	33
4.4.1.	Stanovení minimálního přesahu . . . . .	33
4.4.2.	Stanovení minimálního výrobního přesahu . . . . .	34
	Nalisování zastudena . . . . .	34
	Nalisování zatepla . . . . .	35
4.4.3.	Rozptyl skutečného kontaktního tlaku $p$ . . . . .	35
4.4.4.	Pevnostní kontrola . . . . .	36
4.5.	Lisovací a stahovací síla . . . . .	36
4.6.	Grafický výstup . . . . .	36
<b>5.</b>	<b>Numerické experimenty</b>	<b>38</b>
5.1.	Použitý software . . . . .	38
5.1.1.	Parametry modelu . . . . .	38
5.2.	Porovnání numerického a analytického řešení . . . . .	38
5.2.1.	Modelování nalisovaného spoje . . . . .	38
5.2.2.	Průběhy napětí a tlaku . . . . .	38
5.2.3.	Stanovení stahovací síly . . . . .	42
	Numerickým integrováním v MATLABu . . . . .	42
	Abaqus . . . . .	42
5.3.	Konstrukční úpravy . . . . .	43
5.3.1.	Vznik koncentrace tlaku . . . . .	43
5.3.2.	Statické namáhání . . . . .	44
	Drážka v náboji . . . . .	44
5.3.3.	Dynamické namáhání . . . . .	47
	Vyrovnání délky nalisování . . . . .	47
	Čelní zápichy v náboje . . . . .	50
<b>III.</b>	<b>Závěr</b>	<b>54</b>
	<b>Přílohy</b>	
<b>A.</b>	<b>Ukázka zpracování dat z Abaqusu</b>	<b>56</b>
<b>B.</b>	<b>Znázornění hlavních napětí v navrženém spoji s čelními zápichy</b>	<b>57</b>
<b>C.</b>	<b>Obsah přiloženého DVD</b>	<b>59</b>
	<b>Literatura</b>	<b>60</b>

# Seznam obrázků

1.	Ozubené kolo na plném hřídeli. . . . .	1
2.	Ozubené kolo na dutém hřídeli . . . . .	1
3.	Uzavřená nádoba: a) jednoduchá, b) s víkem . . . . .	3
4.	Otevřená nádoba: a) hydraulický válec, b) kroužek nalisovaný s přesahem na hřídel . . . . .	4
5.	Tlustostěnná nádoba: a) působení tlaku, b) uvažovaný element nádoby .	5
6.	Přetvoření uvažovaného elementu . . . . .	6
7.	Průběhy napětí pro případ vnitřního přetlaku . . . . .	12
8.	Průběhy napětí pro případ vnějšího přetlaku . . . . .	13
9.	Deformace nádoby: a) radiální, b) znázornění axiální deformace otevřené nádoby . . . . .	14
10.	Průběhy napětí a Mohrův diagram pro případ vnitřního přetlaku . . . .	17
11.	Průběhy napětí a Mohrův diagram pro případ vnějšího přetlaku . . . .	18
12.	Plný hřídel. Průběhy napětí a Mohrův diagram . . . . .	20
13.	Rozložení napětí v nalisovaných nádobách při vnitřním přetlaku . . . . .	21
14.	Přesah pro nalisování a poloha rozhraní nádob po natlakování . . . . .	23
15.	Odlehčený stav nalisované nádoby. Průběhy tečného a radiálního napětí	25
16.	Superpozice namáhání nalisované nádoby . . . . .	26
17.	Průběh napětí v nalisovaném spoji (dutý hřídel) . . . . .	27
18.	Průběh napětí v nalisovaném spoji (plný hřídel) . . . . .	28
19.	Silové poměry v náboji při zatížení kroutícím momentem a osovou silou	29
20.	Přerozdělení tlaku $p$ vlivem zatížení radiální silou a ohybovým momentem	30
21.	Stržení povrchových nerovností při podélném lisování (zastudena) . . . .	34
22.	Uložení spoje: a) nalisování zastudena, b) nalisování zatepla (hodnoty jsou v $\mu\text{m}$ ) . . . . .	35
23.	Průběhy hlavních napětí v nalisovaném spoji (analytický výpočet) . . .	37
24.	Spoj bez konstrukčních úprav. Znázornění redukovaného napětí (dle HMM), deformace 500x zvětšena. . . . .	39
25.	Spoj bez konstrukčních úprav. Průběh kontaktního tlaku $p$ po délce spoje	39
26.	Spoj bez konstrukčních úprav. Průběhy hlavních napětí v nalisovaném spoji pro $x_s = 22,5$ mm (porovnání MKP s analytickým výpočtem) . .	40
27.	Spoj bez konstrukčních úprav. Znázornění radiálního napětí, deformace 250x zvětšena. . . . .	40
28.	Spoj bez konstrukčních úprav. Znázornění osového napětí, deformace 250x zvětšena. . . . .	41
29.	Spoj bez konstrukčních úprav. Znázornění tečného napětí, deformace 250x zvětšena. . . . .	41
30.	Spoj bez konstrukčních úprav. Průběh reakční třecí síly $F$ ( $T_a$ ) v závislosti na čase . . . . .	42



31.	Spoj bez konstrukčních úprav. Průběh kontaktního tlaku $p$ po délce spoje při působení stahovací síly $F_{stah}$ . . . . .	43
32.	Spoj s vyrovnáním délek náboje a hřídele. Znázornění redukovaného napětí (dle HMM) a deformace (500x zvětšena) . . . . .	43
33.	Spoj s vyrovnáním délek náboje a hřídele. Průběh kontaktního tlaku $p$ po délce spoje . . . . .	44
34.	Náčrt spoje s drážkou . . . . .	44
35.	Spoj s drážkou. Znázornění redukovaného napětí (dle HMM) a deformace (500x zvětšena) . . . . .	45
36.	Detail spoje s drážkou.. Síťování a redukované napětí (HMM), deformace 250x zvětšena: a) náboj, b) hřídel . . . . .	45
37.	Spoj s drážkou. Průběh kontaktního tlaku $p$ po délce spoje po nalisování	46
38.	Spoj s drážkou. Průběh kontaktního tlaku $p$ po délce spoje po zatížení osovou silou $F_{stah} = 79,26$ kN . . . . .	46
39.	Spoj s drážkou. Závislost stahovací síly na šířce drážky . . . . .	47
40.	Náčrt spoje s vyrovnáním délky nalisování . . . . .	48
41.	Spoj s vyrovnáním délky nalisování. Průběh kontaktního tlaku $p$ po délce spoje pro různé hodnoty $d_1$ . . . . .	48
42.	Náčrt spoje s vyrovnáním délky nalisování a pozvolnými přechody . . . . .	48
43.	Spoj s vyrovnáním délky nalisování a pozvolnými přechody. Průběh kontaktního tlaku $p$ po délce spoje pro různé hodnoty $R$ . . . . .	49
44.	Detail přechodu na hřídeli. Redukované napětí (HMM), deformace 500x zvětšena: a) $R = 0,5$ mm - je patrný vrub, b) $R = 10$ mm - vrub není . . . . .	49
45.	Náčrt spoje s čelními zápichy v náboje . . . . .	50
46.	Spoj s čelními zápichy. Průběh kontaktního tlaku $p$ po délce spoje pro různé hodnoty $b$ . . . . .	50
47.	Spoj s čelními zápichy. Průběh kontaktního tlaku $p$ po délce spoje pro různé hodnoty $a$ . . . . .	51
48.	Spoj s čelními zápichy. Průběh kontaktního tlaku $p$ po délce spoje pro různé hodnoty $\gamma$ . . . . .	51
49.	Spoj s čelními zápichy. Průběh kontaktního tlaku $p$ po délce spoje pro různé hodnoty $r$ . . . . .	52
50.	Detail spoje s čelními zápichy (náboj). Redukované napětí (HMM), deformace 50x zvětšena: a) $r = 0,5$ mm a $\gamma = 10^\circ$ - je patrný vrub, b) $r = 1,5$ mm a $\gamma = 30^\circ$ - vrub není . . . . .	52
51.	Navržený spoj s čelními zápichy. Znázornění tečného napětí, deformace 250x zvětšena . . . . .	53
52.	Porovnání spoje s čelními zápichy se spojením bez úprav. Průběh kontaktního tlaku $p$ po délce spoje . . . . .	53
53.	Zpracování dat v MATLABu. Průběh tlaku od nalisování po délce spoje.	56
54.	Zpracování dat v MATLABu. Detail . . . . .	56
55.	Navržený nalisovaný spoj s čelními zápichy. Znázornění osového napětí, deformace 250x zvětšena. . . . .	57
56.	Navržený nalisovaný spoj s čelními zápichy. Znázornění tečného napětí, deformace 250x zvětšena. . . . .	58
57.	Navržený nalisovaný spoj s čelními zápichy.. Znázornění radiálního napětí, deformace 250x zvětšena. . . . .	58

## Seznam tabulek

1. Poměr  $l/d$  u nalisovaných spojů [4] . . . . . 33
2. Přibližné hodnoty součinitele tření  $f$  za klidu pro nalisovaný spoj [4] . . . . . 33
3. Doporučené hodnoty středních aritmetických odchylek  $R_a$  [5] . . . . . 34

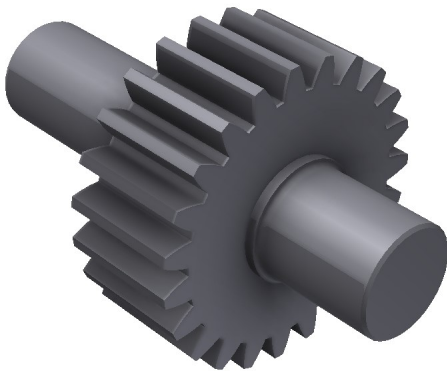
## Seznam použitých označení

$R, r$ [mm]	Poloměr
$D, d$ [mm]	Průměr
$l, a, b$ [mm]	Délkové rozměry
$\delta$ [mm]	Přesah
$A$ [mm <sup>2</sup> ]	Obsah plochy
$F$ [N]	Síla
$N$ [N]	Normálová síla
$T$ [N]	Třecí síla
$M$ [N·mm]	Moment
$p$ [MPa]	Tlak
$\sigma$ [MPa]	Normálové napětí
$\tau$ [MPa]	Smykové napětí
$\sigma_K$ [MPa]	Mez kluzu
$\sigma_{Pt}$ [MPa]	Mez pevnosti v tahu
$\sigma_{Pd}$ [MPa]	Mez pevnosti v tlaku
$k$ [1]	Míra bezpečnosti
$k_K$ [1]	Míra bezpečnosti vztažená k mezi kluzu
$k_P$ [1]	Míra bezpečnosti vztažená k mezi pevnosti
$E$ [MPa]	Modul pružnosti v tahu (tlaku)
$\nu$ [1]	Poissonovo číslo
$\varepsilon$ [1]	Poměrné prodloužení
$\Theta$ [1]	Poměrná změna objemu
$f$ [1]	Součinitel tření
$P$ [kW]	Výkon
$n$ [min <sup>-1</sup> ]	Otáčky
$\omega$ [min <sup>-1</sup> ]	Úhlová rychlost
$R_z$ [ $\mu$ m]	Největší výška profilu drsnosti povrchu
$R_a$ [ $\mu$ m]	Střední aritmetická odchylka drsnosti povrchu

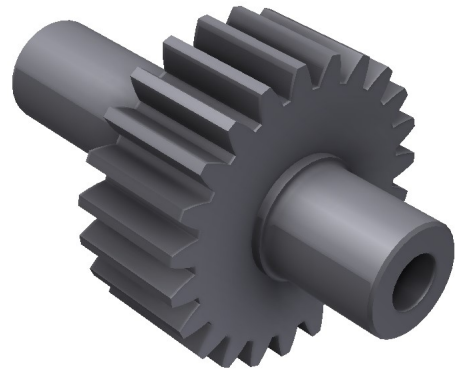
# 1. Úvod

Nalisovaným spojem lze dosáhnout pevného spojení dvou součástí. Takové spoje patří mezi spojení nepohyblivá, předejzatá, bezprostřední a převážně nerozebíratelná, jsou jednoduché, hospodárné a spolehlivé. Příkladem použití může být upevnění ozubeného kola na hřídeli, valivých ložisek, řemenic nebo také rotorů elektromotorů a turbín, dále například nalisování ramen a čepů u skládaných klikových hřídelů.

Tato bakalářská práce si klade za cíle provést obecný teoretický rozbor nalisovaného spoje, následně se zaměřit na zatížení spoje osovými silami: provést analytický výpočet a pomocí MKP navrhnout konstrukční úpravy pro zvýšení únosnosti spoje.



**Obrázek 1.** Ozubené kolo na plném hřídeli.



**Obrázek 2.** Ozubené kolo na dutém hřídeli

K výpočtům nalisovaných spojů se používá teorie tlustostěnných nádob a to protože v případě uložení s přesahem, náboj na hřídeli představuje otevřenou tlustostěnnou válcovou nádobu a hřídel nádobu bez otvoru (obr. 1), na které vlivem přesahu kontaktních ploch působí vzájemný tlak. V případě dutého hřídele bychom zkoumali dvě tlustostěnné nádoby s otvorem (obr. 2).

**Část I.**

**Teoretická část**

## 2. Tlustostěnné nádoby

### 2.1. Definice a rozdělení

Nádoby, u kterých poměr tloušťky stěny k vnitřnímu průměru  $s/(2 \cdot r_1)$  je větší než  $1/20$ , nazýváme tlustostěnné [3]. Rozdělení nádob na tlustostěnné a tenkostěnné je spojeno pouze s přesností jejich výpočtů. Při přibližném výpočtu nádoby s  $s/(2 \cdot r_1) \leq 1/20$  se dopustíme chyby max 5% ve srovnání s přesným řešením. Přibližný výpočet spočívá v zanedbání změny napětí ve stěně v závislosti na vzdálenosti od osy nádoby. Zaměříme se pouze na tlustostěnný případ, který budeme potřebovat u nalisovaných spojů.

Rozdělení tlustostěnných nádob:

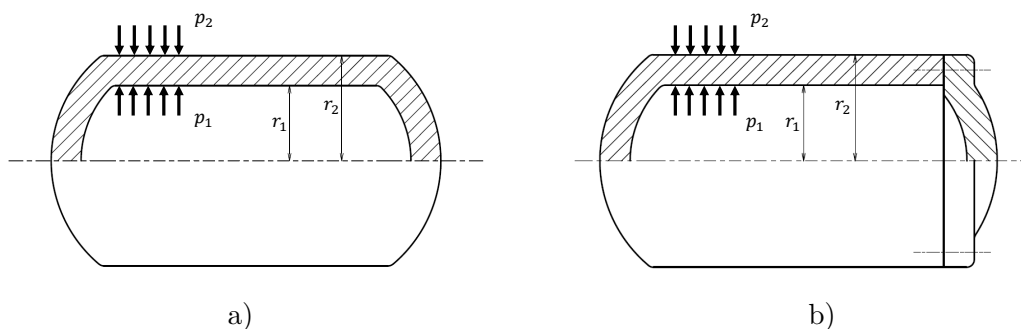
- Nádoby uzavřené
- Nádoby otevřené

#### 2.1.1. Nádoby uzavřené

Taková nádoba je z obou stran uzavřena dnem nebo víkem (obr. 3). Vnitřní a vnější tlak působící na dno (resp. víko) nádoby vyvolá sílu  $F$  velikosti

$$F = p_1 \cdot \pi \cdot r_1^2 - p_2 \cdot \pi \cdot r_2^2.$$

Osově napětí, které vzniká ve válcové části nádoby potom je



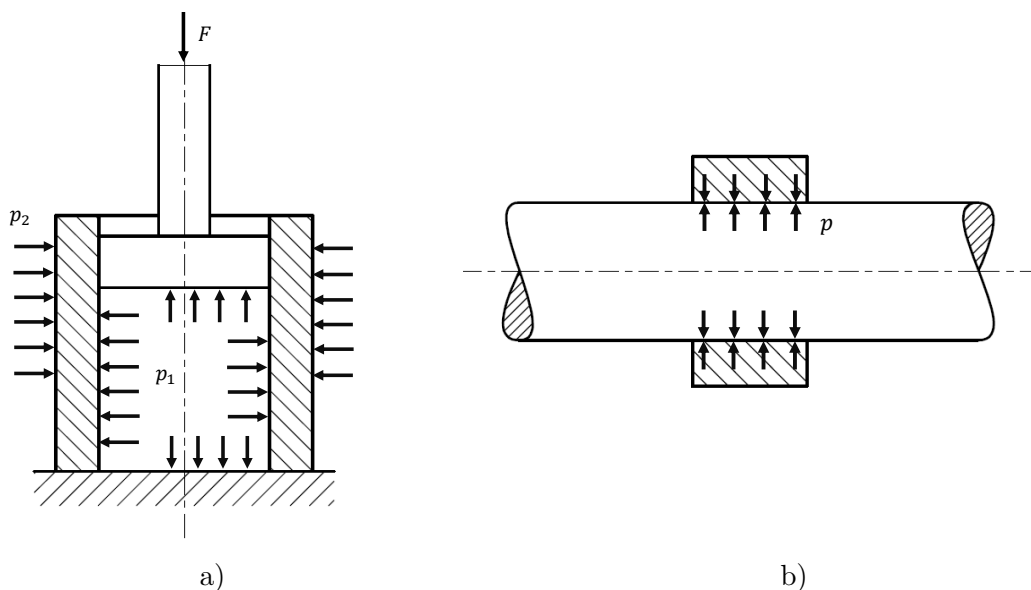
**Obrázek 3.** Uzavřená nádoba: a) jednoduchá, b) s víkem

$$\sigma_o = \frac{F}{A} = \frac{p_1 \cdot \pi \cdot r_1^2 - p_2 \cdot \pi \cdot r_2^2}{\pi \cdot r_2^2 - \pi \cdot r_1^2} = \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (1)$$

#### 2.1.2. Nádoby otevřené

Stěny otevřené nádoby nepřenášejí osovou sílu, tedy osově napětí  $\sigma_o$  je rovno nule. Příklady jednoduchých otevřených nádob jsou na obr. 4. V hydraulickém válci tlakový prostor uvnitř nádoby je uzavřen pístem - jiným tělesem, které není s nádobou pevně spojeno. Proto stěny této nádoby nepřenášejí žádnou axiální sílu.

U nalisovaného spoje tlak na vnitřní stěnu kroužku vzniká vlivem přesahu a působí pouze v radiálním směru. V axiálním směru je tedy nulové napětí. To však platí pouze



**Obrázek 4.** Otevřená nádoba: a) hydraulický válec, b) kroužek nalisovaný s přesahem na hřídel

pro axiálně nezatížený spoj. Také osově napětí v kroužku (i hřídeli) bude vznikat i při nalisování zatepla, kdy vlivem chladnutí (resp. ohřevu) dochází k tepelné dilataci součástí. Zatím se omezíme na zjednodušený model a budeme uvažovat kroužek jako tlustostěnnou jednoduchou otevřenou nádobu.

## 2.2. Průběhy napětí v tlustostěnné nádobě

### 2.2.1. Předpoklady odvození

Při odvození průběhů napětí po tloušťce stěny budeme vycházet z těchto předpokladů:

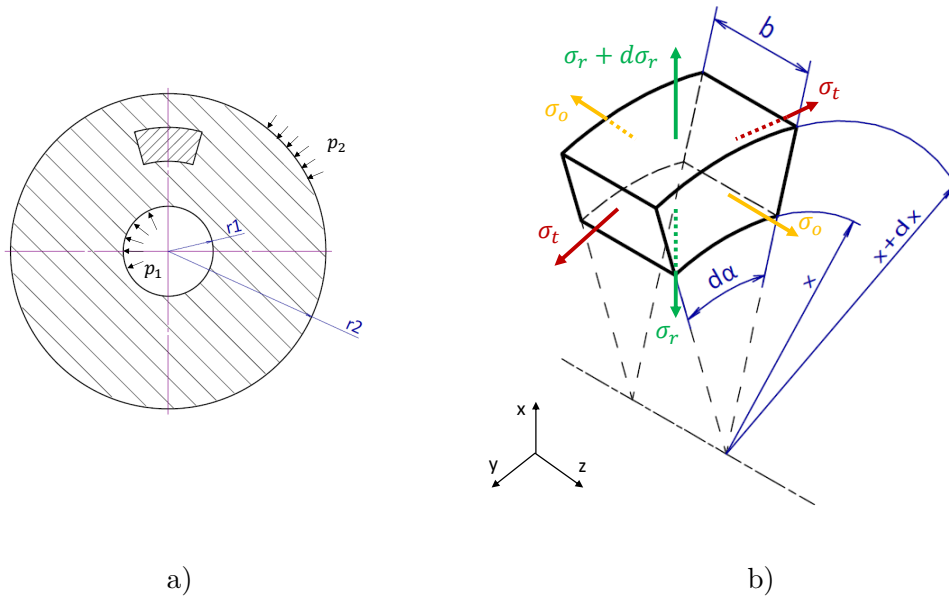
1. Platnost Hookova zákona. Pracujeme pouze v oblasti elastických deformací, kdy napětí nepřekročí mez úměrnosti  $\sigma_u$  resp. mez kluzu  $\sigma_k$ .
2. Řešíme rotačně symetrickou úlohu. To znamená, že geometrie zkoumaného tělesa i jeho zatížení a uložení jsou rotačně symetrické, t.j. průběhy napětí a deformace jsou závislé pouze na vzdálenosti od osy rotace (v radiálním směru).
3. Řešíme úlohu v dostatečné vzdálenosti od dna nádoby, kde osově napětí  $\sigma_o$  je rovnoměrně rozloženo po celé tloušťce stěny. Změna válcové geometrie způsobuje vznik složitější napjatosti, tak se děje například v blízkosti dna, víka, příruby nebo otvorů.

### 2.2.2. Odvození základní diferenciální rovnice

Uvažujme jednoduchou tlustostěnnou uzavřenou nádobu, jak je to naznačeno na obr. 3 a) a na obr. 5 a). Ze stěny nádoby vyjme element (obr. 5 b)). Tento element má délku  $b$ , tloušťku  $dx$  a je omezen středovým úhlem  $d\alpha$ . Ve směru poloměru nádoby na uvažovaný element působí radiální napětí  $\sigma_r$ , ve směru tečny k obvodovým kružnicím působí tečné napětí  $\sigma_t$  a v axiálním směru nádoby působí osově napětí  $\sigma_o$ .

Pro daný element sestavíme rovnice rovnováhy ve všech směrech:

$$x : (\sigma_r + d\sigma_r) \cdot (x + dx) \cdot d\alpha \cdot b - \sigma_r \cdot x \cdot d\alpha \cdot b - 2 \cdot \sigma_t \cdot b \cdot dx \cdot \sin(d\alpha/2) = 0, \quad (2)$$



Obrázek 5. Tlustostěnná nádoba: a) působení tlaku, b) uvažovaný element nádoby

$$y : -\sigma_t \cdot b \cdot dx \cdot \cos(d\alpha/2) + \sigma_t \cdot b \cdot dx \cdot \cos(d\alpha/2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0, \quad (3)$$

$$z : -\sigma_o \cdot x \cdot d\alpha \cdot dx + \sigma_o \cdot x \cdot d\alpha \cdot dx = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0. \quad (4)$$

Rovnice (3) a (4) jsou identicky rovny nule. Upravíme rovnici (2) pro radiální směr  $x$ . Pro malé úhly platí

$$\sin \frac{d\alpha}{2} \approx \frac{d\alpha}{2}.$$

Délka elementu  $b$  a úhel  $d\alpha$  nejsou rovny nule, můžeme je zkrátit. Potom dostaneme

$$\sigma_r \cdot x + \sigma_r \cdot dx + x \cdot d\sigma_r + d\sigma_r \cdot dx - \sigma_r \cdot x - \sigma_t \cdot dx = 0.$$

Člen  $d\sigma_r \cdot dx$  zanedbáváme jako nekonečně malou veličinu 2. řádu. Celou rovnici podělíme  $x \cdot dx$  ( $x \cdot dx \neq 0$ ). Výsledná rovnice má následující tvar:

$$\frac{\sigma_t - \sigma_r}{x} - \frac{d\sigma_r}{dx} = 0. \quad (5)$$

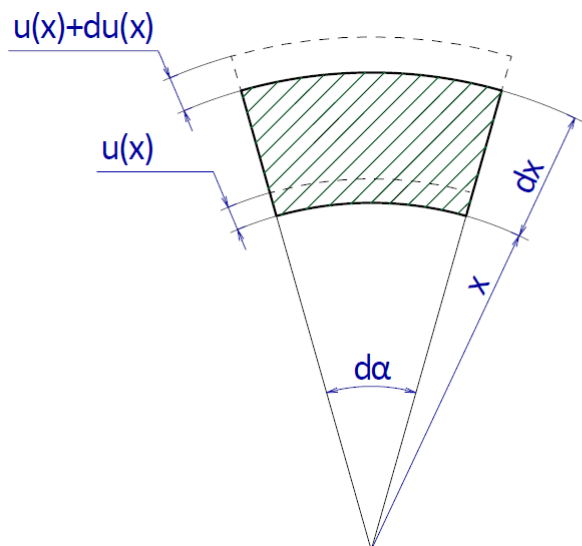
Ze statické rovnováhy jsme získali jednu rovnici o dvou neznámých  $\sigma_t$  a  $\sigma_r$ . Rovnice (5) je pro dvě neznámá na sobě nezávislá napětí staticky neurčitá, proto ji dále transformujeme na úlohu pro jednu neznámou funkci - změnu poloměru  $u(x)$ .

Na obr. 6 je naznačeno přetvoření daného elementu: plně před deformací a čárkovaně po deformaci. Jiné přetvoření nemůže nastát vzhledem k rotačně symetrické úloze (viz kap. 2.2.1). Na daném náčrtu jsme zavedli neznámý posuv  $u(x)$  v radiálním směru.

Z geometrii přetvoření plynou následující vztahy:

- Pro poměrné prodloužení v radiálním směru

$$\varepsilon_r = \frac{dx + (u + du) - u - dx}{dx} = \frac{du}{dx} = u'; \quad (6)$$



Obrázek 6. Přetvoření uvažovaného elementu

- Pro poměrné prodloužení vnitřního oblouku o poloměru  $x$  v tečném směru

$$\varepsilon_t = \frac{(x + u) \cdot d\alpha - x \cdot d\alpha}{x \cdot d\alpha} = \frac{u}{x}. \quad (7)$$

Poměrné prodloužení v axiálním směru nádoby je konstantní. Táto úvaha plyne z předpokladu, že osové napětí je rovnoměrně rozloženo po celé tloušťce stěny (viz kap. 2.2.1).

$$\varepsilon_o = konst = B. \quad (8)$$

Potřebujeme vyjádřit jednotlivá napětí pomocí získaných poměrných prodloužení. Použijeme rozšířený Hookův zákon:

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_t - \nu \cdot (\sigma_r + \sigma_o)],$$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_r - \nu \cdot (\sigma_o + \sigma_t)],$$

$$\varepsilon_o = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_o - \nu \cdot (\sigma_t + \sigma_r)].$$

Z rozšířeného Hookova zákona vyjádříme vztahy pro napětí:

$$\sigma_t = \frac{E}{1 + \nu} \cdot \left[ \varepsilon_t + \frac{\nu}{1 - 2 \cdot \nu} \cdot \Theta \right],$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1 + \nu} \cdot \left[ \varepsilon_r + \frac{\nu}{1 - 2 \cdot \nu} \cdot \Theta \right],$$

$$\sigma_o = \frac{E}{1 + \nu} \cdot \left[ \varepsilon_o + \frac{\nu}{1 - 2 \cdot \nu} \cdot \Theta \right],$$

kde  $\Theta$  je poměrná změna objemu.

Dosadíme poměrná prodloužení (6), (7) a (8):

$$\sigma_t = \frac{E}{1 + \nu} \cdot \left[ \frac{u}{x} + \frac{\nu}{1 - 2 \cdot \nu} \cdot \Theta \right], \quad (9)$$



$$\sigma_r = \frac{E}{1+\nu} \cdot \left[ u' + \frac{\nu}{1-2\cdot\nu} \cdot \Theta \right], \quad (10)$$

$$\sigma_o = \frac{E}{1+\nu} \cdot \left[ B + \frac{\nu}{1-2\cdot\nu} \cdot \Theta \right]. \quad (11)$$

Poměrná změna objemu je

$$\Theta = \varepsilon_t + \varepsilon_r + \varepsilon_o = \frac{u}{x} + u' + B. \quad (12)$$

Vyjádřili jsme napětí  $\sigma_t$  a  $\sigma_r$  pouze v závislosti na posuvu  $u(x)$ . Teď můžeme dosadit vztahy (9) a (10) do jediné rovnice rovnováhy uvažovaného elementu, kterou jsme získali (5). Dostaneme diferenciální rovnici o jedné neznámé funkci  $u(x)$ , kterou jsme již schopni vyřešit.

Nejdříve potřebujeme určit  $d\sigma_r/dx$ :

$$\frac{d\sigma_r}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{E}{1+\nu} \cdot \left[ u' + \frac{\nu}{1-2\cdot\nu} \cdot \Theta \right] \right) = \frac{E}{1+\nu} \cdot \left[ u'' + \frac{\nu}{1-2\cdot\nu} \cdot \Theta' \right].$$

Po dosazení získaných vztahů do rovnice rovnováhy (5):

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{E}{1+\nu} \cdot \left[ \frac{u}{x} - u' \right] = \frac{E}{1+\nu} \cdot \left[ u'' + \frac{\nu}{1-2\cdot\nu} \cdot \Theta' \right].$$

Z rovnice (12) stanovíme  $\Theta'$ :

$$\frac{d\Theta}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{u(x)}{x} + u'(x) + B \right) = \frac{u' \cdot x - 1 \cdot u}{x^2} + u'' = \frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2} + u''.$$

Po dosazení a zkrácení členu  $E/(1+\nu)$ , který je vždy nenulový:

$$\frac{u}{x^2} - \frac{u'}{x} = u'' + \frac{\nu}{1-2\cdot\nu} \cdot \left[ \frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2} + u'' \right].$$

Vytkneme výraz v hranatých závorkách:

$$\left[ u'' + \frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2} \right] \cdot \left[ 1 + \frac{\nu}{1-2\cdot\nu} \right] = 0.$$

Druhou závorku můžeme zkrátit. Protože pro Poissonovo číslo platí  $\nu \leq 0,5$ , tedy je

$$1 + \frac{\nu}{1-2\cdot\nu} \neq 0.$$

Výsledná diferenciální rovnice pro posuv  $u(x)$  v radiálním směru:

$$u''(x) + \frac{u'(x)}{x} - \frac{u(x)}{x^2} = 0$$

nebo:

$$x^2 \cdot u''(x) + x \cdot u'(x) - u(x) = 0. \quad (13)$$

Rovnice (13) je diferenciální rovnice Eulerova typu.

### 2.2.3. Řešení diferenciální rovnice Eulerova typu

Eulerova diferenciální rovnice je rovnice ve tvaru:

$$\sum_{k=0}^n (b_k \cdot x^{n-k} \cdot y^{(n-k)}) = f(x), \quad (14)$$

kde  $b_k \in \mathbb{C}$ ,  $b_0 \neq 0$  a  $f(x)$  je definována na intervalu  $I$ . Koefficient u nejvyšší derivace  $b_0 \cdot x^n$  není roven nule pro  $x \in (-\infty; 0)$  a  $x \in (0; +\infty)$ .

Rovnice pro posuv  $u(x)$  v radiálním směru, kterou potřebujeme vyřešit:

$$x^2 \cdot u''(x) + x \cdot u'(x) - u(x) = 0.$$

Platí:  $b_0 = 1$ ,  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = -1$ ,  $f(x) = 0$  a  $x \in (0; +\infty)$ .

Eulerovu rovnici lze řešit několika způsoby.

#### První způsob řešení

Odhad řešení ve tvaru:  $y(x) = |x|^m$ .

Pro náš případ ( $x \in (0; +\infty)$ ) hledáme řešení ve tvaru:  $u(x) = x^m$ .

1. Derivace:

$$\frac{du(x)}{dx} = m \cdot x^{m-1},$$

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = m \cdot (m-1) \cdot x^{m-2}.$$

2. Dosadíme do původní rovnice (13):

$$x^2 \cdot m \cdot (m-1) \cdot x^{m-2} + x \cdot m \cdot x^{m-1} - x^m = 0.$$

3. Vytkneme člen  $x^m$ :

$$x^m \cdot [x^2 \cdot m \cdot (m-1) \cdot x^{-2} + x \cdot m \cdot x^{-1} - 1] = 0.$$

4. Člen  $x^m$  je vždy nenulový, můžeme ho zkrátit.

$$m \cdot (m-1) + m - 1 = 0,$$

$$m^2 - 1 = 0,$$

$$m_1 = 1, \quad m_2 = -1.$$

5. Pro případ dvou různých reálných kořenů  $m_1$  a  $m_2$  bude mít řešení Eulerovy rovnice následující tvar:

$$u(x) = C_1 \cdot x^{m_1} + C_2 \cdot x^{m_2}.$$

6. Obecné řešení diferenciální rovnice (13) potom je

$$u(x) = C_1 \cdot x + \frac{C_2}{x}, \quad (15)$$

kde  $C_1$  a  $C_2$  jsou integrační konstanty.

**Druhý způsob řešení**

Pomocí substituce převedeme Eulerovu rovnici na rovnici s konstantními koeficienty. Substituce bude definována vztahem:

$$t = \ln(x),$$

$$u(x) = \phi(\ln(x)) = \phi(t).$$

1. Derivace:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{d\phi}{dt},$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{x^2} \cdot \left( \frac{d^2\phi}{dt^2} - \frac{d\phi}{dt} \right).$$

2. Dosadíme do původní rovnice (13):

$$x^2 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \left( \frac{d^2\phi}{dt^2} - \frac{d\phi}{dt} \right) + x \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{d\phi}{dt} - \phi(t) = 0.$$

3. Po úpravách dostáváme rovnici s konstantními koeficienty:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} - \phi(t) = 0.$$

4. Charakteristický polynom této rovnice:

$$\lambda^2 - 1 = 0,$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1.$$

5. Potom obecné řešení je:

$$\phi(t) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 t}.$$

6. Po zpětném dosazení ( $e^t = x$ ) dostáváme obecné řešení diferenciální rovnice (13):

$$u(x) = C_1 \cdot x + \frac{C_2}{x},$$

kde  $C_1$  a  $C_2$  jsou integrační konstanty.

**Řešení úloh postupným integrováním**

V našem případě (pro dané koeficienty  $b_k$ ) lze převést Eulerovu diferenciální rovnici 2. řádu do tvaru:

$$x^2 \cdot u''(x) + x \cdot u'(x) - u(x) = x^2 \cdot \left[ \frac{1}{x} (u(x) \cdot x) \right]' \quad (16)$$

Tento tvar umožňuje řešit úlohy postupným integrováním, což lze s výhodou využít pro řešení různých úloh. Tuto úvahu si dokážeme zpětným postupným derivováním:

$$\begin{aligned} x^2 \cdot \left[ \frac{1}{x} \cdot (u \cdot x) \right]' &= x^2 \cdot \left[ \frac{1}{x} \cdot (u' \cdot x + u \cdot 1) \right]' = x^2 \cdot \left[ \frac{-1}{x^2} \cdot (u' \cdot x + u \cdot 1) + \right. \\ &\left. \frac{1}{x} (u'' \cdot x + u' \cdot 1 + u' \cdot 1) \right] = x^2 \cdot \left[ -\frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2} + u'' + \frac{u'}{x} + \frac{u'}{x} \right] = x^2 \cdot u''(x) + x \cdot u'(x) - u(x). \end{aligned}$$

**Třetí způsob řešení**

Využijme úvahu zmíněnou v předchozím odstavce (16) a vyřešíme rovnici (13) postupným integrováním.

1. Nahradíme rovnici ekvivalentním zápisem:

$$x^2 \cdot u'' + x \cdot u' - u = x^2 \cdot \left[ \frac{1}{x}(u \cdot x) \right]' = 0.$$

2. Podělíme celou rovnici nenulovým členem  $x^2$ :

$$\left[ \frac{1}{x}(u \cdot x) \right]' = \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{x}(u \cdot x) \right] = 0.$$

3. První integrace:

$$\int d \left[ \frac{1}{x}(u \cdot x) \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x}(u \cdot x)' + C_{10} = 0.$$

4. Po úpravě:

$$(u \cdot x)' = -C_{10} \cdot x \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}(u \cdot x) = -C_{10} \cdot x.$$

5. Druhá integrace:

$$\int d(u \cdot x) = \int (-C_{10} \cdot x) dx \quad \Rightarrow \quad u \cdot x = -C_{10} \cdot \frac{x^2}{2} + C_2.$$

6. Zavedeme novou konstantu  $C_1 = -C_{10}/2$  a dostaneme výsledné řešení:

$$u(x) = C_1 \cdot x + \frac{C_2}{x},$$

kde  $C_1$  a  $C_2$  jsou integrační konstanty.

**2.2.4. Výsledné vztahy pro průběhy napětí  $\sigma_t(x)$  a  $\sigma_r(x)$** 

Nalezenou funkci  $u(x)$  (15) dosadíme do rovnic napětí (9) a (10), které jsme dříve vyjádřili z rozšířeného Hookova zákona. Nejdříve si spočítáme  $u'$ :

$$u' = \frac{du(x)}{dx} = C_1 - \frac{C_2}{x^2}.$$

Po dosazení:

$$\begin{aligned} \sigma_t(x) &= \frac{E}{1+\nu} \cdot \left[ C_1 + \frac{C_2}{x^2} + \frac{\nu}{1-2 \cdot \nu} \cdot \left( C_1 + \frac{C_2}{x^2} + C_1 - \frac{C_2}{x^2} + B \right) \right] = \\ &= \frac{E}{1+\nu} \cdot \left[ C_1 + \frac{C_2}{x^2} + \frac{\nu}{1-2 \cdot \nu} \cdot (2 \cdot C_1 + B) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_r(x) &= \frac{E}{1+\nu} \cdot \left[ C_1 - \frac{C_2}{x^2} + \frac{\nu}{1-2 \cdot \nu} \cdot \left( C_1 + \frac{C_2}{x^2} + C_1 - \frac{C_2}{x^2} + B \right) \right] = \\ &= \frac{E}{1+\nu} \cdot \left[ C_1 - \frac{C_2}{x^2} + \frac{\nu}{1-2 \cdot \nu} \cdot (2 \cdot C_1 + B) \right]. \end{aligned}$$

V obou rovnicích se vyskytují stejné konstantní členy, zavedeme si nové integrační konstanty  $K$  a  $C$  za účelem zjednodušení rovnic:

$$\sigma_t(x) = \underbrace{\frac{E}{1+\nu} \cdot \left[ C_1 + \frac{\nu}{1-2\cdot\nu} \cdot (2 \cdot C_1 + B) \right]}_K + \underbrace{\frac{E}{1+\nu} \cdot C_2 \cdot \frac{1}{x^2}}_C = K + \frac{C}{x^2}, \quad (17)$$

$$\sigma_r(x) = \underbrace{\frac{E}{1+\nu} \cdot \left[ C_1 + \frac{\nu}{1-2\cdot\nu} \cdot (2 \cdot C_1 + B) \right]}_K - \underbrace{\frac{E}{1+\nu} \cdot C_2 \cdot \frac{1}{x^2}}_C = K - \frac{C}{x^2}. \quad (18)$$

Integrační konstanty  $K$  a  $C$  určíme z okrajových podmínek pro radiální napětí  $\sigma_r$ . Okrajové podmínky jsou dány vnitřním a vnějším povrchem nádoby, kde platí:

$$1. \text{ O.P: } \quad \sigma_r(x = r_1) = \sigma_{r1} = -p_1,$$

$$2. \text{ O.P: } \quad \sigma_r(x = r_2) = \sigma_{r2} = -p_2.$$

Po dosazení:

$$-p_1 = K - \frac{C}{r_1^2} \quad \Rightarrow \quad K = \frac{C}{r_1^2} - p_1,$$

$$-p_2 = K - \frac{C}{r_2^2} = \frac{C}{r_1^2} - p_1 - \frac{C}{r_2^2} \quad \Rightarrow \quad C = (p_1 - p_2) \cdot \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (19)$$

$$K = \frac{C}{r_1^2} - p_1 = (p_1 - p_2) \cdot \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - p_1 = p_1 \cdot \left( \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - 1 \right) - \frac{p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2},$$

$$K = \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (20)$$

Je patrné, že konstanta  $K$  se rovná velikosti osového napětí  $\sigma_o$  dle vztahu (1), pokud by nádoba byla uzavřená. Proto někteří autoři značí tuto konstantu jako myšlené osově napětí ( $\sigma_o$ ). Ovšem skutečné osově napětí  $\sigma_o$  v plášti otevřené nádoby se bude rovnat nule.

Pokud bychom dosadili výrazy pro integrační konstanty  $K$  (20) a  $C$  (19) do rovnic (17) a (18), dostali bychom po úpravách:

$$\sigma_t(x) = -\frac{1}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \left[ p_2 \cdot r_2^2 \cdot \left( 1 + \frac{r_1^2}{x^2} \right) - p_1 \cdot r_1^2 \cdot \left( \frac{r_2^2}{x^2} + 1 \right) \right], \quad (21)$$

$$\sigma_r(x) = -\frac{1}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \left[ p_2 \cdot r_2^2 \cdot \left( 1 - \frac{r_1^2}{x^2} \right) + p_1 \cdot r_1^2 \cdot \left( \frac{r_2^2}{x^2} - 1 \right) \right]. \quad (22)$$

Rovnice (21) a (22) se nazývají Laméovy rovnice [3]. Sice Laméovy rovnice jsou kompletní rovnice pro stanovení průběhů napětí, však dle mého osobního názoru je praktičtější si nejdřív spočítat konstanty  $K$  (20) a  $C$  (19) a potom je dosadit do jednodušších vztahů (17) a (18).

Při praktických výpočtech (např. dimenzování tlakových nádob nebo nalisovaných spojů, bezpečnostních výpočtech atd.) nás vždy zajímají maximální (resp. minimální) hodnoty napětí. Z rovnic (17) a (18) plyne, že největší namáhání bude vždy na vnitřním povrchu nádoby, kde radiální napětí známe:  $\sigma_{r1} = -p_1$ . Sečtením rovnic (17) a (18) dostaneme:

## 2. Tlustostěnné nádoby

$$\sigma_t(x) + \sigma_r(x) = 2 \cdot K. \quad (23)$$

To znamená, že po celé tloušťce nádoby je součet tečného a radiálního napětí konstantní. Pro tečné napětí potom platí:

$$\sigma_t(x) = 2 \cdot K - \sigma_r(x),$$

Pro velikosti hlavních napětí na vnitřním povrchu nádoby, kde je největší namáhání, platí:

$$\sigma_{t1} = \sigma_t(r_1) = 2 \cdot K + p_1,$$

$$\sigma_{r1} = \sigma_r(r_1) = -p_1,$$

$$\sigma_{o1} = \sigma_o(r_1) = K \quad (\text{pro uzavřenou nádobu}),$$

$$\sigma_{o1} = \sigma_o(r_1) = 0 \quad (\text{pro otevřenou nádobu}),$$

Obdobným způsobem lze psát pro velikosti hlavních napětí na vnějším povrchu nádoby, kde bude naopak nemějí namáhání:

$$\sigma_{t2} = \sigma_t(r_2) = 2 \cdot K + p_2,$$

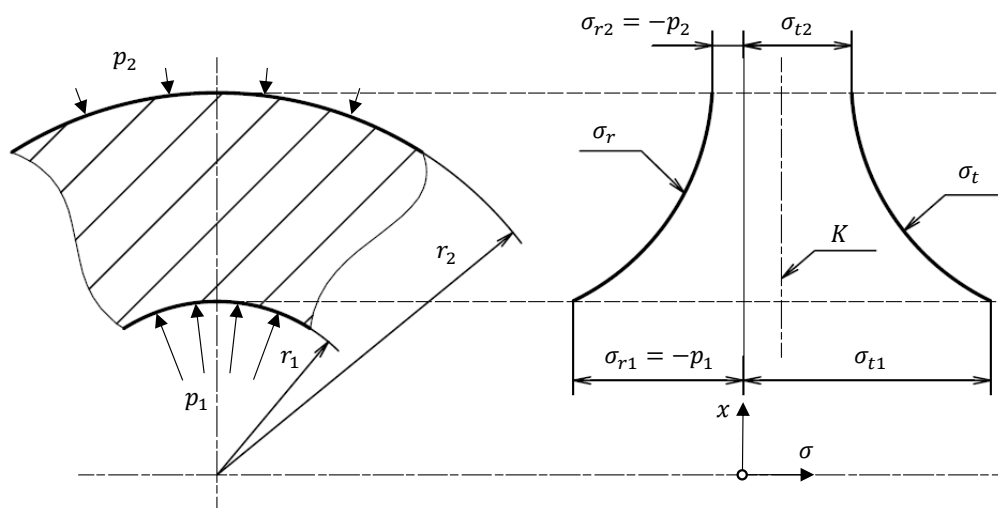
$$\sigma_{r2} = \sigma_r(r_2) = -p_2,$$

$$\sigma_{o2} = \sigma_o(r_2) = K \quad (\text{pro uzavřenou nádobu}),$$

$$\sigma_{o2} = \sigma_o(r_2) = 0 \quad (\text{pro otevřenou nádobu}),$$

### 2.2.5. Grafické znázornění průběhů tečného a radiálního napětí

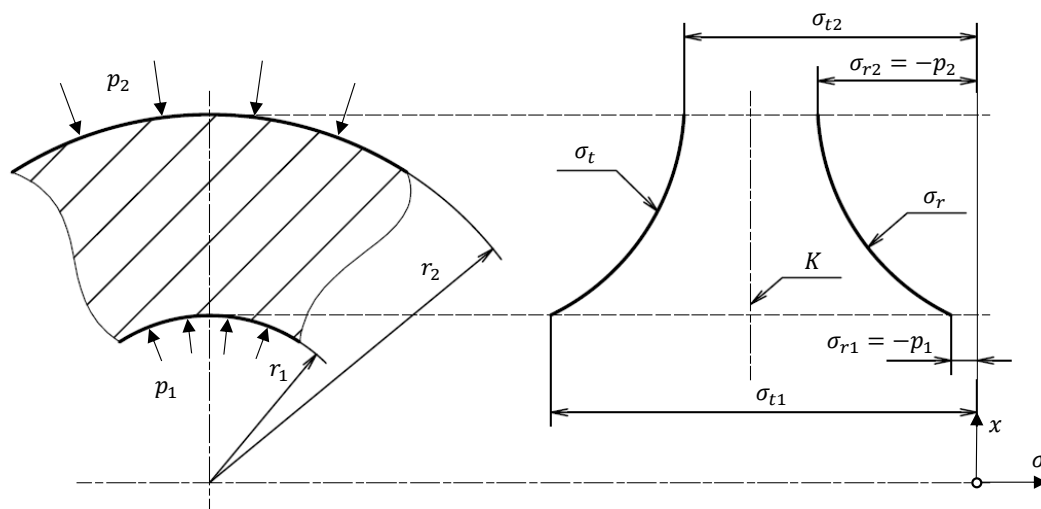
Vyneseme závislosti (17) a (18) resp. (21) a (22) do grafů. Jedná se o polytropy. Na obr. 7 jsou obecně vyznačeny průběhy tečného a radiálního napětí pro případ vnitřního přetlaku ( $p_1 > p_2$ ).



**Obrázek 7.** Průběhy napětí pro případ vnitřního přetlaku

Na obr. 8 jsou obecně vyznačeny průběhy napětí pro případ vnějšího přetlaku ( $p_1 < p_2$ ).

Je patrné, že v tomto případě tečné napětí  $\sigma_t(x)$  a konstanta  $K$  budou vždy záporné.



**Obrázek 8.** Průběhy napětí pro případ vnějšího přetlaku

Obě polytropy mají společnou asymptotu - přímku  $\sigma = konst = K$ , která odpovídá osovému napětí v uzavřené nádobě (20). Současně vůči této asymptotě jsou průběhy radiálního a tečného napětí symetrické.

Průběh osového napětí  $\sigma_o$  bude v obou případech konstantní, a to buď roven konstantě  $K$  u uzavřené nádoby nebo nulový u nádoby otevřené (viz obr. 10 a 11).

### 2.3. Deformace pláště tlustostěnné nádoby

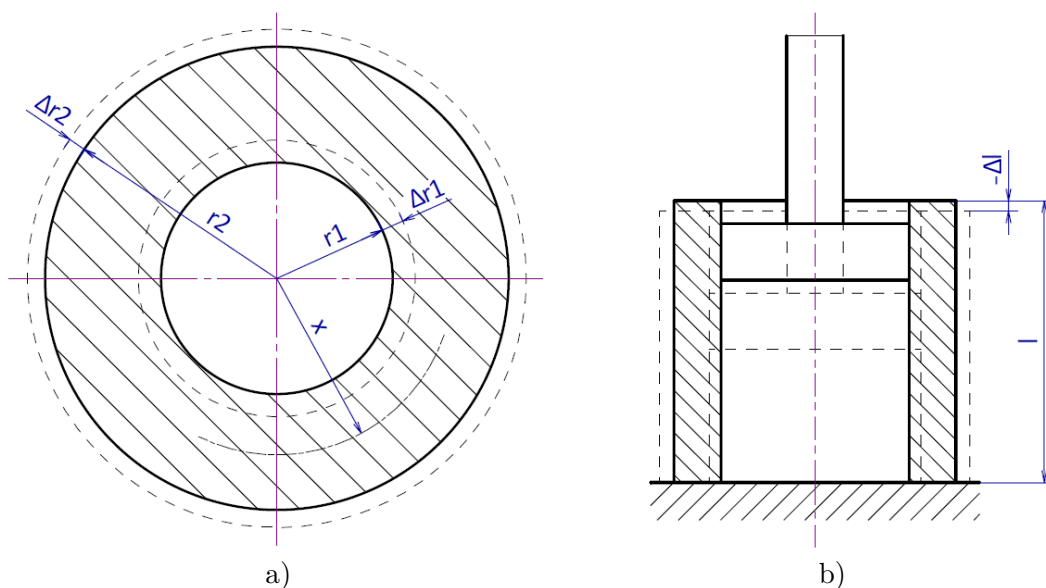
Vlivem působení tlaků  $p_1$  a  $p_2$  (obr. 5 a) se každý bod nádoby posune v rovině, kterou tvoří osa nádoby a uvažovaný bod. Deformace v radiálním směru je naznačena na obr. 9 a. Deformace v axiálním směru znázorníme na příkladě hydraulického válce (otevřená nádoba) na obr. 9 b. Stejným principem se bude axiálně deformovat i uzavřená nádoba, kde však budeme čekat větší deformace  $\Delta l$  vlivem sil působících na dna (resp. víka) této nádoby. Stav před deformací je vyznačen plnou čarou a stav po deformaci čárkovaně. Obecný vztah pro posuv v radiálním směru (změnu poloměru nádoby)  $u(x)$  získáme tak, že použijeme rozšířený Hookův zákon a závislost (7), potom platí:

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_t - \nu \cdot (\sigma_r + \sigma_o)] = \frac{u}{x}.$$

Po vyjádření  $u(x)$  dostáváme:

$$u(x) = \frac{x}{E} \cdot [\sigma_t(x) - \nu \cdot (\sigma_r(x) + \sigma_o)]. \quad (24)$$

Deformace uzavřené a otevřené nádoby se budou lišit. To je důsledkem toho, že v uzavřené nádobě vzniká prostorová (trojosá) napjatost a v otevřené nádobě vzniká rovinná (dvouosá) napjatost.



**Obrázek 9.** Deformace nádoby: a) radiální, b) znázornění axiální deformace otevřené nádoby

### 2.3.1. Pro uzavřenou nádobu

Po dosazení do (24) známých závislosti  $\sigma_t(x)$  a  $\sigma_r(x)$ , daných rovnicemi (17), (18) a  $\sigma_o = K$  dostáváme:

$$u(x) = \frac{x}{E} \cdot \left[ K + \frac{C}{x^2} - \nu \cdot \left( K - \frac{C}{x^2} + K \right) \right] = \frac{1}{E} \cdot \left[ (1 - 2 \cdot \nu) \cdot K \cdot x + (1 + \nu) \cdot \frac{C}{x} \right].$$

Po dosazení konstant  $K$  a  $C$  dle (20) a (19) dostaneme výsledný vztah  $u(x)$  - změnu poloměru tlustostěnné uzavřené nádoby v závislosti na vzdálenosti od osy:

$$u(x) = \frac{1}{E \cdot (r_2^2 - r_1^2)} \cdot \left[ (1 - 2 \cdot \nu) \cdot (p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2) \cdot x + (1 + \nu) \cdot (p_1 - p_2) \cdot \frac{r_2^2 \cdot r_1^2}{x} \right]. \quad (25)$$

Ze vztahu (25) lze odvodit změnu vnitřního nebo vnějšího poloměru nádoby dosazením  $r_1$  resp.  $r_2$ . Nebo můžeme dosadit známé velikosti napětí na vnitřním resp. vnějším povrchu nádoby (viz str. 12) do rovnice (24). Potom dostáváme:

$$\Delta r_1 = u(x = r_1) = \frac{r_1}{E} \cdot \left[ 2 \cdot K + p_1 - \nu \cdot (-p_1 + K) \right] = \frac{r_1}{E} \cdot \left[ K \cdot (2 - \nu) + p_1 \cdot (1 + \nu) \right],$$

resp.

$$\Delta r_2 = u(x = r_2) = \frac{r_2}{E} \cdot \left[ 2 \cdot K + p_2 - \nu \cdot (-p_2 + K) \right] = \frac{r_2}{E} \cdot \left[ K \cdot (2 - \nu) + p_2 \cdot (1 + \nu) \right].$$

Po dosazení konstanty  $K$  dle (20) a úpravách:

$$\Delta r_1 = \frac{r_1}{E \cdot (r_2^2 - r_1^2)} \cdot \left[ p_1 \cdot \left( (1 - 2 \cdot \nu) \cdot r_1^2 + (1 + \nu) \cdot r_2^2 \right) - p_2 \cdot (2 - \nu) \cdot r_2^2 \right], \quad (26)$$

resp.

$$\Delta r_2 = \frac{r_2}{E \cdot (r_2^2 - r_1^2)} \cdot \left[ p_1 \cdot (2 - \nu) \cdot r_1^2 - p_2 \cdot \left( (1 - 2 \cdot \nu) \cdot r_2^2 + (1 + \nu) \cdot r_1^2 \right) \right]. \quad (27)$$



Pro odvození velikosti změny délky nádoby v axiálním směru budeme vycházet z rozšířeného Hookova zákona a závislosti (23). Potom platí:

$$\Delta l = l \cdot \varepsilon_o = \frac{l}{E} \cdot \left[ \sigma_o - \nu \cdot \underbrace{(\sigma_t + \sigma_r)}_{2 \cdot K} \right] = \frac{l}{E} \cdot K \cdot (1 - 2 \cdot \nu).$$

Po dosazení konstanty  $K$  (20) potom dostáváme výsledné prodloužení uzavřené nádoby:

$$\Delta l = \frac{l}{E} \cdot \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot (1 - 2 \cdot \nu). \quad (28)$$

### 2.3.2. Pro otevřenou nádobu

Pro otevřenou nádobu budeme postupovat stejným způsobem, tentokrát ale počítáme s nulovým osovým napětím. Po dosazení do (24) známých závislosti  $\sigma_t(x)$  a  $\sigma_r(x)$ , daných rovnicemi (17), (18) a  $\sigma_o = 0$  dostáváme:

$$u(x) = \frac{x}{E} \cdot \left[ K + \frac{C}{x^2} - \nu \cdot \left( K - \frac{C}{x^2} + 0 \right) \right] = \frac{1}{E} \cdot \left[ (1 - \nu) \cdot K \cdot x + (1 + \nu) \cdot \frac{C}{x} \right].$$

Po dosazení konstant  $K$  a  $C$  dle (20) a (19) dostaneme výsledný vztah  $u(x)$  - změnu poloměru tlustostěnné otevřené nádoby v závislosti na vzdálenosti od osy:

$$u(x) = \frac{1}{E \cdot (r_2^2 - r_1^2)} \cdot \left[ (1 - \nu) \cdot (p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2) \cdot x + (1 + \nu) \cdot (p_1 - p_2) \cdot \frac{r_2^2 \cdot r_1^2}{x} \right]. \quad (29)$$

Ze vztahu (29) lze odvodit změnu vnitřního nebo vnějšího poloměru nádoby dosazením  $r_1$  resp.  $r_2$ . Nebo můžeme dosadit známé velikosti napětí na vnitřním resp. vnějším povrchu nádoby (viz str. 12) do rovnice (24). Potom dostáváme:

$$\Delta r_1 = u(x = r_1) = \frac{r_1}{E} \cdot \left[ 2 \cdot K + p_1 - \nu \cdot (-p_1 + 0) \right] = \frac{r_1}{E} \cdot \left[ 2 \cdot K + p_1 \cdot (1 + \nu) \right],$$

resp.

$$\Delta r_2 = u(x = r_2) = \frac{r_2}{E} \cdot \left[ 2 \cdot K + p_2 - \nu \cdot (-p_2 + 0) \right] = \frac{r_2}{E} \cdot \left[ 2 \cdot K + p_2 \cdot (1 + \nu) \right].$$

Po dosazení konstanty  $K$  dle (20) a úpravách:

$$\Delta r_1 = \frac{r_1}{E} \cdot \left[ p_1 \cdot \left( \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + \nu \right) - 2 \cdot p_2 \cdot \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right], \quad (30)$$

resp.

$$\Delta r_2 = \frac{r_2}{E} \cdot \left[ 2 \cdot p_1 \cdot \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - p_2 \cdot \left( \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \nu \right) \right]. \quad (31)$$

Pro odvození velikosti změny délky nádoby v axiálním směru budeme vycházet z rozšířeného Hookova zákona a závislosti (23). Potom platí:

$$\Delta l = l \cdot \varepsilon_o = \frac{l}{E} \cdot \left[ 0 - \nu \cdot \underbrace{(\sigma_t + \sigma_r)}_{2 \cdot K} \right] = -\frac{l}{E} \cdot 2 \cdot K \cdot \nu.$$

Záporné znaménko ukazuje, že se ve většině případů (větší vnitřní přetlak) bude jednat o zkrácení. Po dosazení konstanty  $K$  (20) potom dostáváme výsledné prodloužení otevřené

## 2. Tlustostěnné nádoby

nádoby:

$$\Delta l = -\frac{l}{E} \cdot 2 \cdot \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \nu. \quad (32)$$

### 2.4. Pevnostní podmínky tlustostěnných nádob

Z průběhů napětí (viz kap. 2.2.5) je vidět, že u tlustostěnných nádob bude vždy největší namáhání na vnitřním povrchu. Proto budeme počítat redukované napětí a určovat pevnostní podmínky právě na poloměru  $r_1$ .

Pro **houževnatý** stav materiálu máme dvě pevnostní teorie:

- **Trescova** (Guestova) hypotéza  $\tau_{max}$  maximálních smykových napětí.  
Podle této teorie pevnostní podmínka je

$$\sigma_{red} = \sigma_{max} - \sigma_{min} \leq \sigma_D, \quad (33)$$

kde  $\sigma_{max}$  je maximální hlavní napětí,  $\sigma_{min}$  je minimální hlavní napětí a  $\sigma_D$  je dovolené napětí

$$\sigma_D = \frac{\sigma_K}{k_K}.$$

- Energetická hypotéza **HMH** (Huber, Mises, Hencky).  
Podle této teorie pevnostní podmínka je

$$\sigma_{red} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq \sigma_D,$$

kde  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  a  $\sigma_3$  jsou hlavní napětí a  $\sigma_D$  je dovolené napětí

$$\sigma_D = \frac{\sigma_K}{k_K}.$$

Pro **křehký** stav materiálu máme také dvě pevnostní teorie:

- Hypotéza  $\sigma_{max}$  podle maximálního normálového napětí.  
Podle této teorie máme dvě pevnostní podmínky, a to zvlášť pro tah a tlak.  
Pro tah:

$$\sigma_{red} = \sigma_{max} \leq \sigma_{Dt},$$

kde  $\sigma_{max}$  je maximální hlavní napětí v oblasti tahu ( $\sigma_{max} > 0$ ) a  $\sigma_{Dt}$  je dovolené napětí v tahu

$$\sigma_{Dt} = \frac{\sigma_{Pt}}{k_P}.$$

Pro tlak:

$$\sigma_{red} = |\sigma_{min}| \leq \sigma_{Dd},$$

kde  $\sigma_{min}$  je minimální hlavní napětí v oblasti tlaku ( $\sigma_{min} < 0$ ) a  $\sigma_{Dd}$  je dovolené napětí v tlaku

$$\sigma_{Dd} = \frac{\sigma_{Pd}}{k_P}.$$

- **Mohrova** pevnostní hypotéza.  
Podle této teorie pevnostní podmínka je

$$\sigma_{red} = \sigma_{max} - \frac{\sigma_{Pt}}{\sigma_{Pd}} \cdot \sigma_{min} \leq \sigma_{Dt},$$

kde  $\sigma_{max}$  je maximální hlavní napětí,  $\sigma_{min}$  je minimální hlavní napětí a  $\sigma_{Dt}$  je

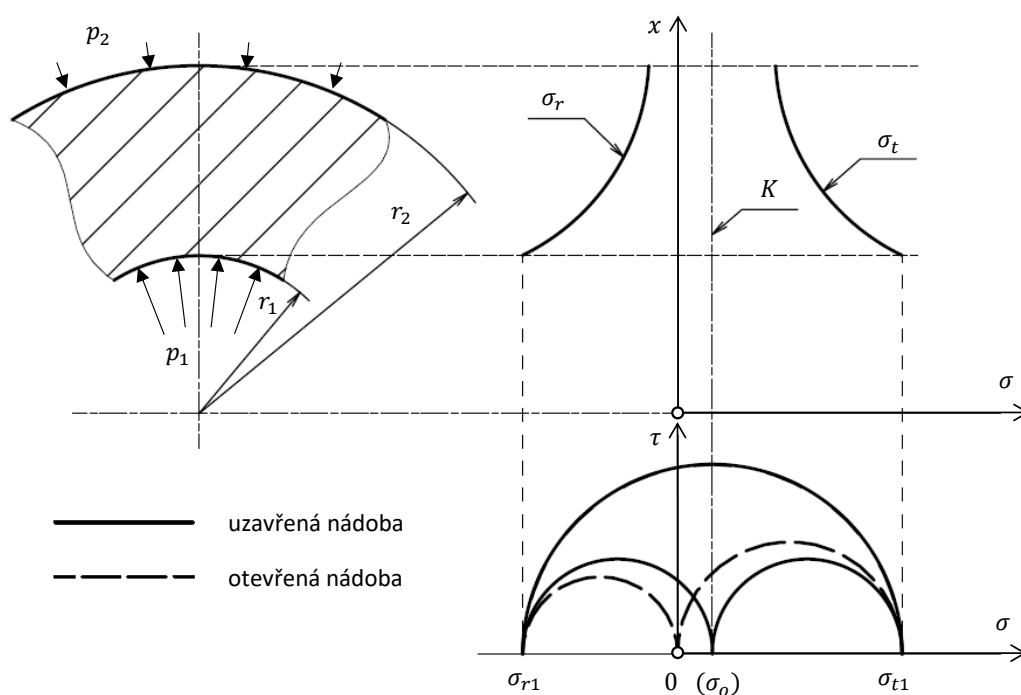
dovolené napětí v tahu

$$\sigma_D = \frac{\sigma_{Pt}}{k_P}.$$

Pro výpočet pevnostních podmínek tlustostěnných nádob předpokládáme **houževnatý** materiál a tak použijeme konzervativnější a na výpočet jednodušší **Trescovu** hypotézu  $\tau_{max}$  dle (33).

### 2.4.1. Příklad vnitřního přetlaku

Pro případ vnitřního přetlaku ( $p_1 > p_2$ ) jsou na obr. 10 zakresleny průběhy napětí a Mohrův diagram prostorové napjatosti na vnitřním povrchu nádoby. Napětí  $\sigma_{r1}$ ,  $\sigma_{t1}$  a  $\sigma_o$  jsou hlavními napětími. Také z obrázku plyne, že redukované napětí pro uzavřenou a otevřenou nádobu bude schodné (pro  $p_1 > p_2$ ). To je důsledkem toho, že teorie  $\tau_{max}$  zanedbává vliv středního hlavního napětí, v našem případě jde o osové napětí  $\sigma_o$ .



**Obrázek 10.** Průběhy napětí a Mohrův diagram pro případ vnitřního přetlaku

Potom pro uzavřenou i otevřenou nádobu můžeme psát společnou pevnostní podmínku:

$$\sigma_{red} = \sigma_{t1} - \sigma_{r1} \leq \sigma_D.$$

Dosadíme-li velikosti těchto napětí, dostáváme:

$$\sigma_{red} = 2 \cdot K + p_1 - (-p_1) = 2 \cdot (K + p_1) \leq \sigma_D.$$

Po dosazení konstanty  $K$  dle (20) - velikosti osového napětí v uzavřené nádobě:

$$\sigma_{red} = 2 \cdot \left( \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + p_1 \right) = 2 \cdot \left[ \frac{(p_1 - p_2) \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right] \leq \sigma_D.$$

## 2. Tlustostěnné nádoby

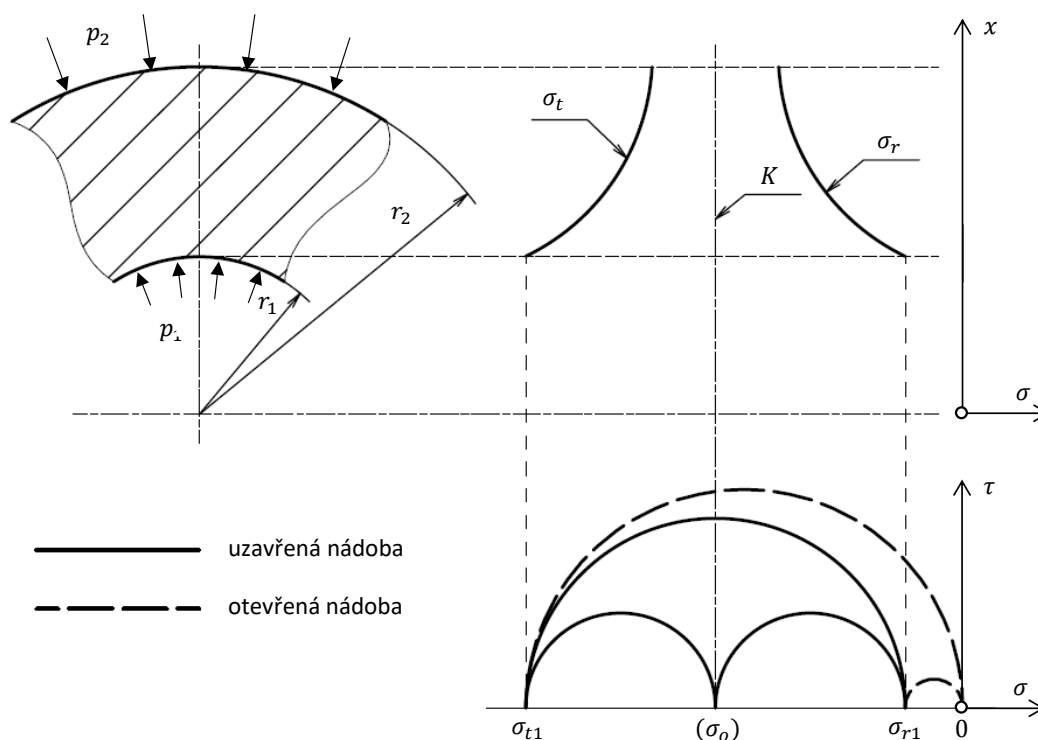
Potom výsledná pevnostní podmínka pro vnitřní přetlak má následující tvar:

$$p_1 - p_2 \leq \frac{\sigma_D}{2} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right]. \quad (34)$$

Z pevnostní podmínky (34) plyne, že dovolený přetlak závisí na materiálu nádoby  $\sigma_K$ , potřebné pevnostní bezpečnosti  $k$  a rozměrech nádoby  $r_1$  a  $r_2$ .

### 2.4.2. Příklad vnějšího přetlaku

Případ vnějšího přetlaku ( $p_1 < p_2$ ) je znázorněn na obr. 11, na kterém je zakreslen Mohrův diagram prostorové napjatosti na vnitřním povrchu nádoby a průběhy napětí. Z obrázku je vidět, že největší Mohrova kružnice uzavřené nádoby splývá s jednou z menších kružnic pro otevřenou nádobu. V tomto případě největší kružnice uzavřené a otevřené nádoby nejsou schodné, a tak se pevnostní podmínky budou taky lišit.



**Obrázek 11.** Průběhy napětí a Mohrův diagram pro případ vnějšího přetlaku

Použijeme-li Trescovu hypotézu  $\tau_{max}$  (33), potom pevnostní podmínka má tvar:

- pro uzavřenou nádobu:

$$\sigma_{red} = \sigma_{r1} - \sigma_{t1} \leq \sigma_D.$$

Dosadíme-li napětí  $\sigma_{r1}$  a  $\sigma_{t1}$  a následně konstantu  $K$  (obdobně jako v 2.4.1), dostáváme výslednou pevnostní podmínku pro vnější přetlak v uzavřené nádobě:

$$p_2 - p_1 \leq \frac{\sigma_D}{2} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right]. \quad (35)$$

- pro otevřenou nádobu:

$$\sigma_{red} = 0 - \sigma_{t1} \leq \sigma_D.$$

Po dosazení napětí  $\sigma_{t1}$  a konstanty  $K$ , dostáváme pevnostní podmínku pro otevřenou nádobu zatíženou vnějším přetlakem:

$$\sigma_{red} = 0 - (2 \cdot K + p_1) = -2 \cdot \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - p_1 \leq \sigma_D. \quad (36)$$

Upravit dále (36) tak, abychom vyjádřili pevnostní podmínku pro vnější přetlak nelze.

## 2.5. Hřídel jako tlustostěnná nádoba

Výpočtovým modelem pro hřídel je otevřená tlustostěnná nádoba. V případě **dutého** hřídele se jedná o klasický model otevřené nádoby.

**Plný** hřídel uvažujeme jako otevřenou tlustostěnnou nádobu bez otvoru, t.j. vnitřní poloměr  $r_1 = 0$  a vnitřní tlak  $p_1 = 0$ . Průměr hřídele je  $d = 2 \cdot r_2$  a na povrchu působí tlak  $p_2$ . (viz. obr. 12) Dané úvahy zaneseme do rovnic tečného a radiálního napětí (17) a (18). Nejdříve si spočítáme konstanty  $K$  a  $C$  dle jejich definice (viz vztahy (20) a (19)):

$$K = \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{0 \cdot 0^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - 0^2} = \frac{-p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2} = -p_2,$$

$$C = (p_1 - p_2) \cdot \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = (0 - p_2) \cdot \frac{0^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - 0^2} = 0.$$

Pro plný hřídel se rovnice pro průběh napětí velmi zjednoduší a po dosazení  $K$  a  $C$  do vztahů (17) a (18) budou mít následující tvar:

$$\sigma_t(x) = K + \frac{C}{x^2} = -p_2 + \frac{0}{x^2} = -p_2, \quad (37)$$

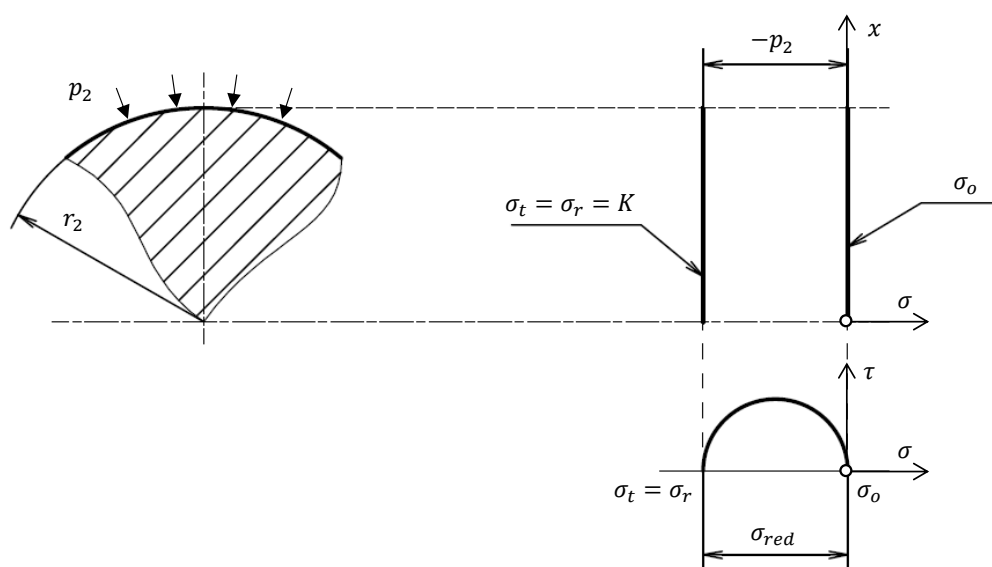
$$\sigma_r(x) = K - \frac{C}{x^2} = -p_2 - \frac{0}{x^2} = -p_2. \quad (38)$$

Protože jde o otevřenou nádobu, tak platí  $\sigma_o = 0$ . Je zřejmé, že v případě plného hřídele všechny hlavní napětí  $\sigma_t$ ,  $\sigma_r$  a  $\sigma_o$  jsou rovny konstantám a na vzdálenosti od osy rotace nezávisí.

Na obr. 12 je znázorněn plný hřídel, jeho zatížení, průběhy napětí a Mohrův diagram. Z Mohrova diagramu je zřejmé, že při použití Trescovy hypotézy (33) pevnostní podmínka pro plný hřídel bude:

$$\sigma_{red} = \sigma_o - \sigma_t = 0 - (-p_2) = p_2 \leq \sigma_D. \quad (39)$$

Z pevnostní podmínky (39) plyne, že dovolený tlak na povrchu hřídele závisí pouze na zvoleném materiálu a potřebné pevnostní bezpečnosti, nikoliv na průměru hřídele.

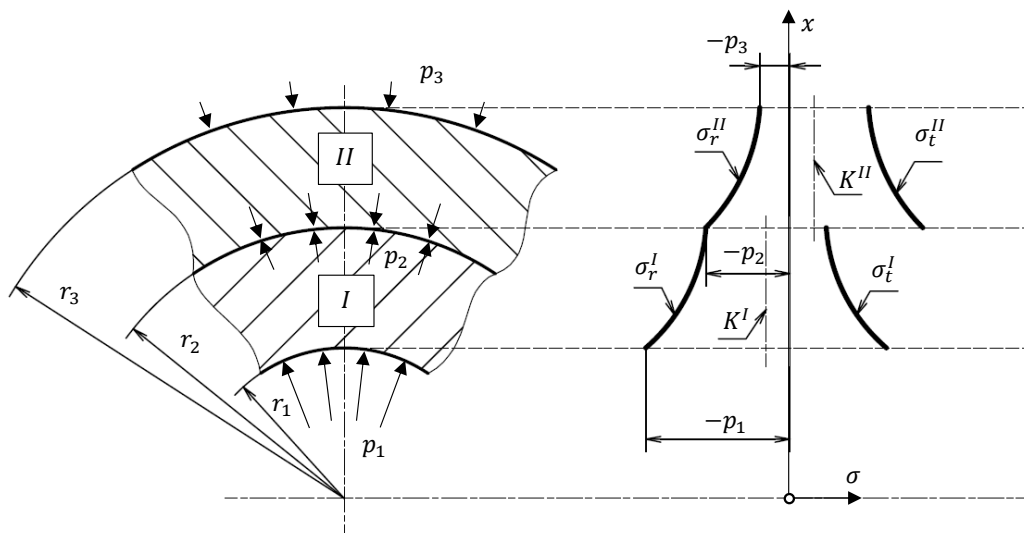


**Obrázek 12.** Plný hřídel. Průběhy napětí a Mohrův diagram

## 3. Nalisované nádoby a spoje

### 3.1. Rozložení napětí v nalisované nádobě

Z teorie tlustostěnných nádob již víme, že taková nádoba je vždy nejvíce namáhána na vnitřním povrchu a zbývající materiál není pevnostně využit (viz kap. 2.2.5). Při nalisování nádob na sebe můžeme dosáhnout výhodnějšího rozložení napětí, ukážeme si to na příkladu dvou nalisovaných nádob zatížených vnitřním přetlakem (viz obr. 13). Vlivem přesahu vzniká v místě styku dvou ploch vzájemný tlak  $p_2$ . Nádoba *I* má vnitřní přetlak  $(p_1 - p_2)$  a nádoba *II* má vnitřní přetlak  $(p_2 - p_3)$ . Z grafu je patrné, že při nalisování v místě styku ( $x = r_2$ ) vzniká skok tečného napětí. Díky tomu se tečné napětí v nádobě *I* zmenšuje a redukované napětí v nádobě *II* se skokově zvýší. Takto je celá konstrukce schopná přenést větší přetlak  $(p_1 - p_3)$  a materiál je využit mnohem efektivněji, než v případě jednoduché nádoby, kdy se redukované napětí se vzdáleností od osy zmenšuje.



Obrázek 13. Rozložení napětí v nalisovaných nádobách při vnitřním přetlaku

### 3.2. Pevnostní podmínky nalisované nádoby

Při stanovení pevnostní podmínky uvažujeme dvě jednoduché tlustostěnné nádoby, na které dle obr. (13) působí tlaky  $p_1$ ,  $p_2$  a  $p_3$ . Potom s použitím již odvozené (viz kap. 2.4.1) pevnostní podmínky pro jednoduché nádoby dle Trescovy hypotézy (33) můžeme psát:

$$p_1 - p_2 \leq \frac{\sigma_D}{2} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right],$$

$$p_2 - p_3 \leq \frac{\sigma_D}{2} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{r_2}{r_3} \right)^2 \right].$$

Sečtením těchto dvou nerovností dostaneme výslednou pevnostní podmínku pro přípustný přetlak (pokud uvažujeme stejný materiál nádob):

$$p_1 - p_3 \leq \frac{\sigma_D}{2} \cdot \left[ 2 - \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 - \left( \frac{r_2}{r_3} \right)^2 \right]. \quad (40)$$

### 3.3. Optimální geometrie

Z pevnostní podmínky (40) plyne vztah pro dovolený vnitřní přetlak (maximální přípustný přetlak):

$$(p_1 - p_3)_D = \frac{\sigma_D}{2} \cdot \left[ 2 - \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 - \left( \frac{r_2}{r_3} \right)^2 \right].$$

Pokud jsou při dimenzování nalisovaných nádob rozměry  $r_1$  a  $r_3$  dány, potom je  $(p_1 - p_3)_D$  funkcí pouze  $r_2$ :  $(p_1 - p_3)_D = f(r_2)$ . Pro stanovení optimálního poloměru  $r_2$  stačí najít maximum této funkce, kdy je  $(p_1 - p_3)_D$  největší. Provedeme derivaci:

$$\frac{d}{dr_2}(p_1 - p_3)_D = \frac{\sigma_D}{2} \cdot \left[ 0 + 2 \cdot \frac{r_1^2}{r_2^3} - 2 \cdot \frac{r_2}{r_3^3} \right] = \sigma_D \cdot \left( \frac{r_1^2}{r_2^3} - \frac{r_2}{r_3^3} \right).$$

Abychom našli extrémy této funkce, položíme derivaci rovnou nule a vyjádříme  $r_2$  (současně platí  $r_1, r_2, r_3 > 0$ ):

$$\sigma_D \cdot \left( \frac{r_1^2}{r_2^3} - \frac{r_2}{r_3^3} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{r_1^2}{r_2^3} = \frac{r_2}{r_3^3} \quad \Rightarrow \quad r_2 = \sqrt{r_1 \cdot r_3}. \quad (41)$$

Musíme se ujistit, že se jedná o maximum, nikoliv o minimum. Druhá derivace:

$$\frac{d^2}{dr_2^2}(p_1 - p_3)_D = \sigma_D \cdot \left( -3 \cdot \frac{r_1^2}{r_2^4} - \frac{1}{r_3^3} \right) = -\sigma_D \cdot \left( 3 \cdot \frac{r_1^2}{r_2^4} + \frac{1}{r_3^3} \right).$$

Je patrné, že uvažovaná funkce je konkávní, protože druhá derivace je záporná. To znamená, že nalezený vztah pro  $r_2$  (41) skutečně odpovídá maximu funkce.

### 3.4. Přesah pro nalisování

Přesah vyvolává vzájemný tlak  $p_2$  (obr. 13). Je zřejmé, že velikost tlaku  $p_2$  je ovlivněna velikostí přesahu a také natlakováním nádoby. Na obr. 14 jsou naznačeny dvě nádoby s přesahem před nalisováním a stav rozhraní nádob po nalisování a zatížení vnitřním přetlakem.

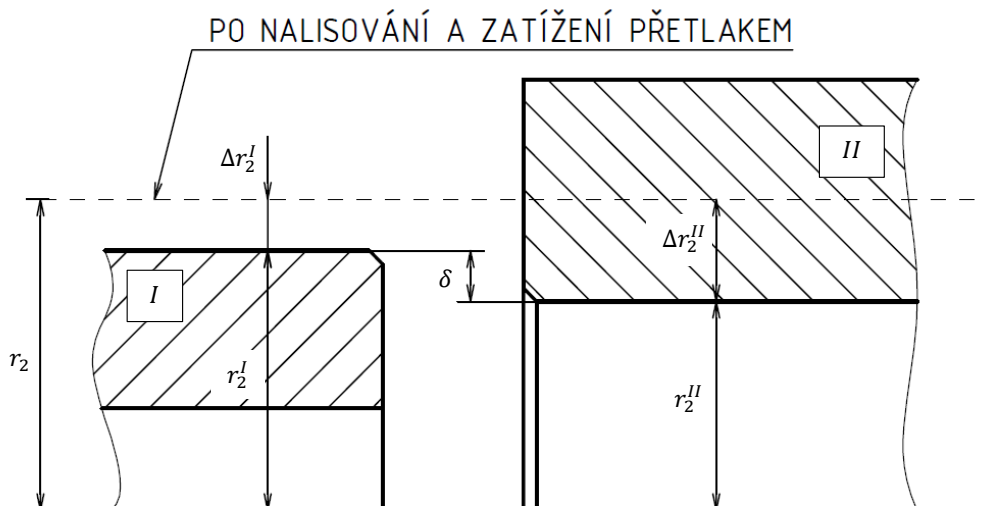
Z přetvoření je vidět, že se poloměr  $r_2^I$  nádoby  $I$  zvětší o přírůstek  $\Delta r_2^I$  a poloměr  $r_2^{II}$  nádoby  $II$  se zvětší o přírůstek  $\Delta r_2^{II}$ . Rozdíl těchto přírůstků je roven přesahu:

$$\delta = \Delta r_2^{II} - \Delta r_2^I.$$

Podělíme celou rovnici  $r_2$ :

$$\frac{\delta}{r_2} = \frac{\Delta r_2^{II}}{r_2} - \frac{\Delta r_2^I}{r_2}.$$





**Obrázek 14.** Přesah pro nalisování a poloha rozhraní nádob po natlakování

Protože hodnoty přírůstků a přesahu dosahují vzhledem k poloměru  $r_2$  velmi malých hodnot, můžeme psát:

$$r_2 \approx r_2^I \approx r_2^{II}.$$

Po dosazení:

$$\frac{\delta}{r_2} = \frac{\Delta r_2^{II}}{r_2^{II}} - \frac{\Delta r_2^I}{r_2^I} = \varepsilon_t^{II}(r_2) - \varepsilon_t^I(r_2), \quad (42)$$

kde poměrná prodloužení na poloměru  $r_2$  jsme dostali použitím závislosti (7):

$$\frac{\Delta r_2^I}{r_2^I} = \varepsilon_t^I(r_2) \quad a \quad \frac{\Delta r_2^{II}}{r_2^{II}} = \varepsilon_t^{II}(r_2).$$

Použijeme rozšířený Hookův zákon pro vyjádření poměrných prodloužení:

$$\varepsilon_t^I(r_2) = \frac{1}{E} \cdot \left[ \sigma_t^I(r_2) - \nu \cdot (\sigma_r^I(r_2) + \sigma_o^I) \right], \quad (43)$$

$$\varepsilon_t^{II}(r_2) = \frac{1}{E} \cdot \left[ \sigma_t^{II}(r_2) - \nu \cdot (\sigma_r^{II}(r_2) + \sigma_o^{II}) \right]. \quad (44)$$

### 3.4.1. Pro uzavřenou nádobu

Pro uzavřenou nádobu platí (viz str. 12):

$$\sigma_r^I(r_2) = \sigma_r^{II}(r_2) = -p_2,$$

$$\sigma_t^I(r_2) = 2 \cdot K^I + p_2,$$

$$\sigma_t^{II}(r_2) = 2 \cdot K^{II} + p_2,$$

$$\sigma_o^I(r_2) = K^I,$$

$$\sigma_o^{II}(r_2) = K^{II}.$$

### 3. Nalisované nádoby a spoje

Dosadíme dané vztahy do (43) a (44):

$$\varepsilon_t^I(r_2) = \frac{1}{E} \cdot \left[ 2 \cdot K^I + p_2 - \nu \cdot (-p_2 + K^I) \right] = \frac{1}{E} \cdot \left[ (2 - \nu) \cdot K^I + (1 + \nu) \cdot p_2 \right],$$

$$\varepsilon_t^{II}(r_2) = \frac{1}{E} \cdot \left[ 2 \cdot K^{II} + p_2 - \nu \cdot (-p_2 + K^{II}) \right] = \frac{1}{E} \cdot \left[ (2 - \nu) \cdot K^{II} + (1 + \nu) \cdot p_2 \right].$$

Potom po dosazení poměrných prodloužení do (42) dostáváme

$$\frac{\delta}{r_2} = \frac{1}{E} \cdot \left[ (2 - \nu) \cdot K^{II} + (1 + \nu) \cdot p_2 - (2 - \nu) \cdot K^I - (1 + \nu) \cdot p_2 \right] = \frac{2 - \nu}{E} \cdot \left[ K^{II} - K^I \right].$$

Výsledný vztah pro přesah nalisování u uzavřené nádoby:

$$\delta = \frac{(2 - \nu) \cdot r_2}{E} \cdot \left[ K^{II} - K^I \right], \quad (45)$$

kde konstanty  $K^I$  a  $K^{II}$  spočítáme dle vztahu (20):

$$K^I = \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad a \quad K^{II} = \frac{p_2 \cdot r_2^2 - p_3 \cdot r_3^2}{r_3^2 - r_2^2}.$$

#### 3.4.2. Pro otevřenou nádobu

Pro otevřenou nádobu platí (viz str. 12):

$$\sigma_r^I(r_2) = \sigma_r^{II}(r_2) = -p_2,$$

$$\sigma_t^I(r_2) = 2 \cdot K^I + p_2,$$

$$\sigma_t^{II}(r_2) = 2 \cdot K^{II} + p_2,$$

$$\sigma_o^I(r_2) = \sigma_o^{II}(r_2) = 0.$$

Dosadíme dané vztahy do (43) a (44):

$$\varepsilon_t^I(r_2) = \frac{1}{E} \cdot \left[ 2 \cdot K^I + p_2 - \nu \cdot (-p_2 + 0) \right] = \frac{1}{E} \cdot \left[ 2 \cdot K^I + (1 + \nu) \cdot p_2 \right],$$

$$\varepsilon_t^{II}(r_2) = \frac{1}{E} \cdot \left[ 2 \cdot K^{II} + p_2 - \nu \cdot (-p_2 + 0) \right] = \frac{1}{E} \cdot \left[ 2 \cdot K^{II} + (1 + \nu) \cdot p_2 \right].$$

Potom po dosazení poměrných prodloužení do (42) dostáváme

$$\frac{\delta}{r_2} = \frac{1}{E} \cdot \left[ 2 \cdot K^{II} + (1 + \nu) \cdot p_2 - 2 \cdot K^I - (1 + \nu) \cdot p_2 \right] = \frac{2}{E} \cdot \left[ K^{II} - K^I \right].$$

Výsledný vztah pro přesah nalisování u otevřené nádoby:

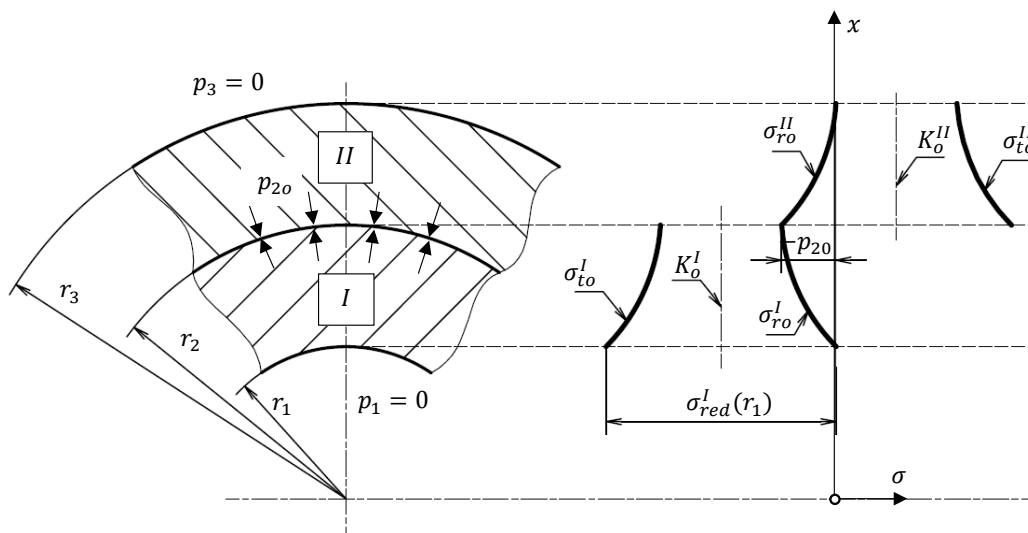
$$\delta = \frac{2 \cdot r_2}{E} \cdot \left[ K^{II} - K^I \right], \quad (46)$$

kde konstanty  $K^I$  a  $K^{II}$  spočítáme dle vztahu (20):

$$K^I = \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad a \quad K^{II} = \frac{p_2 \cdot r_2^2 - p_3 \cdot r_3^2}{r_3^2 - r_2^2}.$$

### 3.5. Odlehčený stav

Při odlehčeném stavu nalisované nádoby, kdy tlaky  $p_1$  a  $p_3$  jsou nulové (nebo je možné je zanedbat jako velmi malé), působí pouze vzájemný  $p_{2o}$ <sup>1</sup> vlivem nalisování nádob na sebe (obr. 15).



**Obrázek 15.** Odlehčený stav nalisované nádoby. Průběhy tečného a radiálního napětí

Při porovnání s obr. 13, kde je konstrukce zatížena celkovým přetlakem ( $p_1 - p_3$ ) je patrné, že namáhání nádoby II v odlehčeném stavu bude menší, proto pevnostní kontrola dané nádoby v odlehčeném stavu není nutná. Opačná situace je s nádobou I, kde v odlehčeném stavu je tato nádoba namáhána vnějším přetlakem ( $p_{2o} - 0$ ). Proto provádíme pevnostní kontrolu nádoby I.

Za předpokladu houževnatého stavu materiálu použijeme Trescovu hypotézu a to v místě největšího namáhání na vnitřním povrchu nádoby. Potom pevnostní podmínka má tvar:

$$\sigma_{red} = 0 - \sigma_{to}^I(r_1) \leq \sigma_D. \quad (47)$$

Protože platí princip superpozice, celkové namáhání nalisované natlakované nádoby je algebraickým součtem namáhání vyvolaném přesahem (nalisováním) a namáhání způsobeném vnitřním přetlakem ( $p_1 - p_3$ ) na jednoduchou nádobu (viz obr. 16)

Potom dle principu superpozice musí platit:

$$\sigma_t^I = \sigma_{to}^I + \sigma_t^{fikt}.$$

Vyjádříme tečné napětí v odlehčeném stavu. Pro vnitřní povrch potom dostáváme:

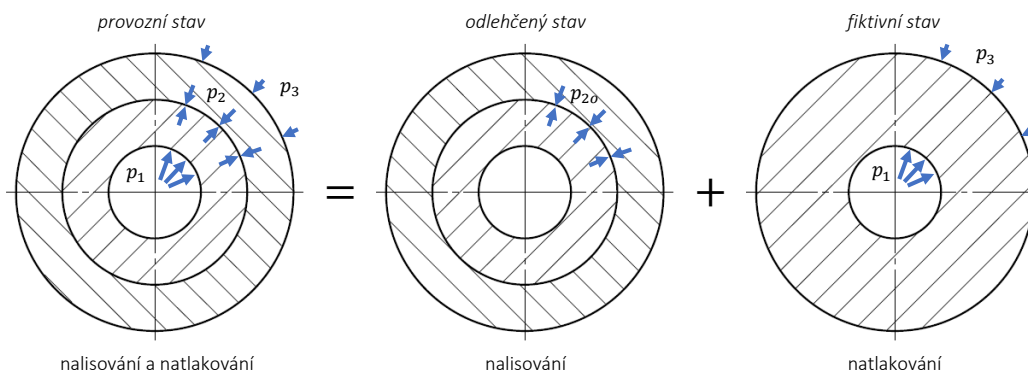
$$\sigma_{to}^I(r_1) = \sigma_t^I(r_1) - \sigma_t^{fikt}(r_1).$$

Po dosazení do pevnostní podmínky (47):

$$\sigma_t^{fikt}(r_1) - \sigma_t^I(r_1) \leq \sigma_D.$$

<sup>1</sup>indexem „o“ v této kapitole budeme značit veličiny v odlehčeném stavu

### 3. Nalisované nádoby a spoje



**Obrázek 16.** Superpozice namáhání nalisované nádoby

Za tečná napětí dosadíme známé vztahy (viz str. 12):

$$2 \cdot K^{fikt} + p_1 - (2 \cdot K^I + p_1) \leq \sigma_D.$$

Potom výsledná pevnostní podmínka odlehčeného stavu je

$$K^{fikt} - K^I \leq \frac{\sigma_D}{2}, \quad (48)$$

kde konstanty  $K^{fikt}$  a  $K^I$  spočítáme dle vztahu (20):

$$K^{fikt} = \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_3 \cdot r_3^2}{r_3^2 - r_1^2} \quad a \quad K^I = \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

### 3.6. Nalisované spoje

Nalisovaný spoj se používá pro pevné spojení dvou součástí (například objímky na hřídeli). Spoj je schopen přenést krouticí moment a osovou sílu díky velkým třecím silám, které vznikají v důsledku působení tlaku na styčné plochy. Tento tlak je vyvolán nalisováním s přesahem.

#### Výhody:

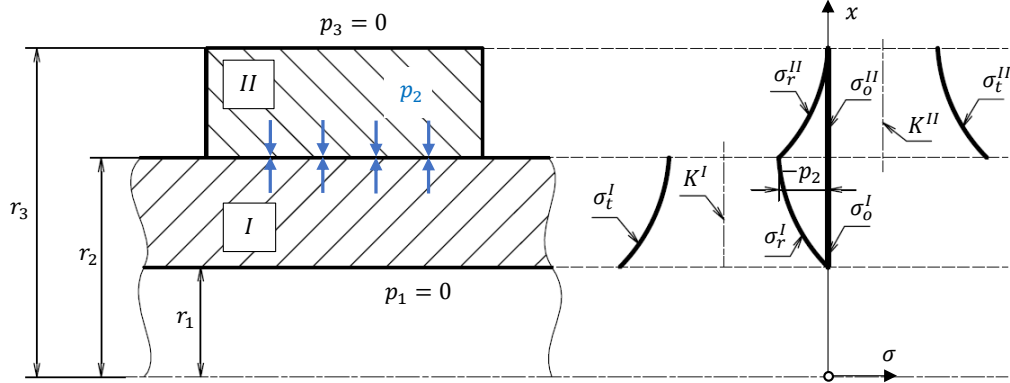
- Jednoduchá konstrukce a tvar součástí;
- Hospodárné - snadná výroba, pevné spojení je realizováno bez použití dalších prvků;
- Spolehlivé - přenáší velké krouticí momenty a osové síly. Dobře snáší střídavé zatížení i rázy;
- Dobré centrování spojovaných součástí;
- Zajišťuje malý přechodový odpor při vedení elektrického proudu nebo tepla.

#### Nevýhody:

- Relativně náročná montáž (zastudena nebo zatepla);
- Prakticky nerozebíratelný spoj (při demontáži dochází k poškození stykové plochy a následně zmenšení únosnosti spoje);
- Nutné dodržení přísných geometrických tolerancí při výrobě - sousost, házení.

### 3.6.1. Náboj na dutém hřídeli

Jak již bylo zmíněno v úvodu této práce, v tomto případě náboj a hřídel představuje dvě otevřené tlustostěnné nádoby a můžeme použít teorii odvozenou v teoretické části.



**Obrázek 17.** Průběh napětí v nalisovaném spoji (dutý hřídel)

Pokud tento spoj je zatížen pouze tlakem od nalisování (viz obr. 17), platí:

- tlaky  $p_1$  a  $p_3$  jsou nulové;
- osová napětí jsou v obou součástkách nulová<sup>1</sup>:  $\sigma_o^I = \sigma_o^{II} = 0$ ;
- nádoba I (hřídel) je zatížena vnějším přetlakem ( $p_2 - 0$ ), nádoba II (náboj) je zatížena vnitřním přetlakem ( $p_2 - 0$ ).

Dané úvahy zaneseme do odvozených rovnic napětí (17) a (18). Pro konstanty  $K$  (20) a  $C$  (19) platí:

$$K^I = -\frac{p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad a \quad K^{II} = \frac{p_2 \cdot r_2^2}{r_3^2 - r_2^2}, \quad (49)$$

$$C^I = -p_2 \cdot \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad a \quad C^{II} = p_2 \cdot \frac{r_2^2 \cdot r_3^2}{r_3^2 - r_2^2}.$$

Pro průběhy tečného a radiálního napětí v dutém hřídeli potom platí:

$$\sigma_t^I = K^I + \frac{C^I}{x^2} = -\frac{p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - p_2 \cdot \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{x^2} \quad \text{pro } x \in \langle r_1; r_2 \rangle,$$

$$\sigma_r^I = K^I - \frac{C^I}{x^2} = -\frac{p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + p_2 \cdot \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{x^2} \quad \text{pro } x \in \langle r_1; r_2 \rangle.$$

Pro průběhy tečného a radiálního napětí v náboji dostáváme:

$$\sigma_t^{II} = K^{II} + \frac{C^{II}}{x^2} = \frac{p_2 \cdot r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} + p_2 \cdot \frac{r_2^2 \cdot r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} \cdot \frac{1}{x^2} \quad \text{pro } x \in \langle r_2; r_3 \rangle, \quad (50)$$

$$\sigma_r^{II} = K^{II} - \frac{C^{II}}{x^2} = \frac{p_2 \cdot r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} - p_2 \cdot \frac{r_2^2 \cdot r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} \cdot \frac{1}{x^2} \quad \text{pro } x \in \langle r_2; r_3 \rangle. \quad (51)$$

<sup>1</sup>horním indexem „I“ budeme značit veličiny pro hřídel a horním indexem „II“ veličiny pro náboj

### 3. Nalisované nádoby a spoje

Po dosazení konstant  $K^I$  a  $K^{II}$  dle (49) do odvozeného vztahu pro přesah (46) dostáváme:

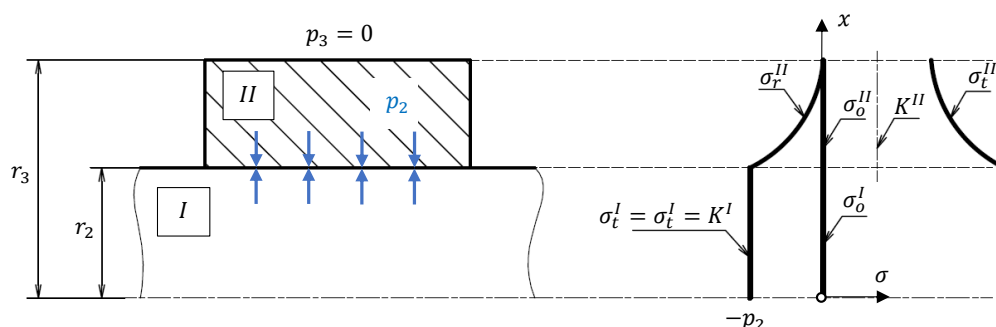
$$\delta = \frac{2 \cdot r_2^3}{E} \cdot \left[ \frac{1}{r_3^2 - r_2^2} + \frac{1}{r_2^2 - r_1^2} \right] \cdot p_2. \quad (52)$$

#### 3.6.2. Náboj na plném hřídeli

Výpočtovým modelem pro plný hřídel je tlustostěnná otevřená nádoba bez otvoru (viz kap. 2.5). Pro tento zvláštní případ tlustostěnné otevřené nádoby jsme odvodili, že platí:

$$\sigma_t^I(x) = \sigma_r^I(x) = K^I = -p_2 \quad \text{pro } x \in \langle 0; r_2 \rangle. \quad (53)$$

Průběhy napětí v náboji budou stejné, viz závislosti (50) a (51).



**Obrázek 18.** Průběh napětí v nalisovaném spoji (plný hřídel)

Po dosazení konstanty  $K^I$  dle (53) a  $K^{II}$  dle (49) do odvozeného vztahu pro přesah (46) dostáváme:

$$\delta = \frac{2 \cdot r_2}{E} \cdot \frac{r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} \cdot p_2. \quad (54)$$

#### 3.6.3. Sílové poměry a únosnost

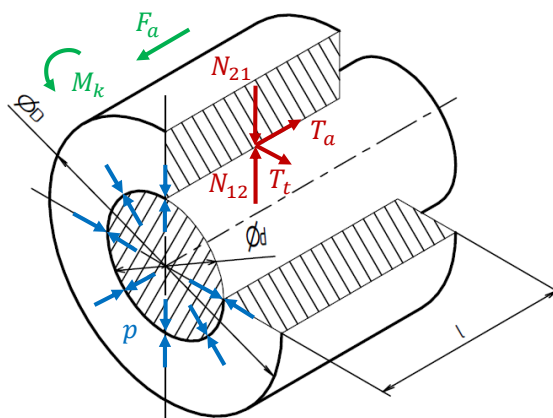
##### Zatížení krutícím momentem a osovou silou

Na obr. 19 je zjednodušeně naznačeno zakreslení silových poměrů v náboji nalisovaného spoje. Zelenou barvou je naznačeno vnější zatížení momentem  $M_k$  a silou  $F_a$ . Červenou barvou jsem znázornil výslednou tlakovou sílu  $N_{12}$  působící na náboj a normálovou reakční sílu  $N_{21}$  vznikající v samotném náboji.<sup>1</sup>

$$N_{12} = N_{21} = p \cdot \underbrace{\pi \cdot d \cdot l}_{\text{plocha}},$$

kde  $p$  je tlak na styčnou plochu,  $d$  je průměr hřídele,  $l$  je délka spoje.

<sup>1</sup>Normálové a třecí síly naznačené červenou barvou na obr. 19 jsou pouze náhradní výsledné síly pro jednodušší znázornění silových poměrů v náboji. Dané nahrazení jsme provedli takovým způsobem, že jsme stykovou válcovou plochu rozvinuli. Ve skutečnosti je pochopitelné, že tyto síly budou rozloženy po celé ploše rovnoměrně. Výslednice  $T_a$  potom bude v ose náboje.



**Obrázek 19.** Silové poměry v náboji při zatížení kroutícím momentem a osovou silou

Vlivem působení síly  $N_{12}$  vznikají třecí síly, díky kterým náboj zůstává v rovnováze a je zajištěno pevné spojení náboje na hřídeli. Třecí síla  $T_a$  potom přenáší osovou sílu  $F_a$ :

$$T_a = N_{12} \cdot f_a = p \cdot \pi \cdot d \cdot l \cdot f_a,$$

kde  $f_a$  je součinitel tření v axiálním směru.

Pro přenos kroutícího momentu  $M_k$  musí vzniknout třecí moment  $M_t$ :

$$M_t = T_t \cdot \frac{d}{2} = p \cdot \pi \cdot d \cdot l \cdot f_t \cdot \frac{d}{2},$$

kde  $f_t$  je součinitel tření v tečném směru.

Celková třecí síla při zatížení spoje kroutícím momentem i osovou silou bude

$$T = \sqrt{T_a^2 + T_t^2}.$$

Potom výsledné podmínky únosnosti pro nalisovaný spoj:

$$\text{přenos pouze osově síly: } F_a \leq \frac{\pi}{k} \cdot d \cdot l \cdot p \cdot f_a, \quad (55)$$

$$\text{přenos pouze kroutícího momentu: } M_k \leq \frac{\pi}{2 \cdot k} \cdot d^2 \cdot l \cdot p \cdot f_t, \quad (56)$$

$$\text{kombinované zatížení: } \sqrt{F_a^2 + \left(\frac{2 \cdot M_k}{d}\right)^2} \leq \frac{\pi}{k} \cdot d \cdot l \cdot p \cdot f, \quad (57)$$

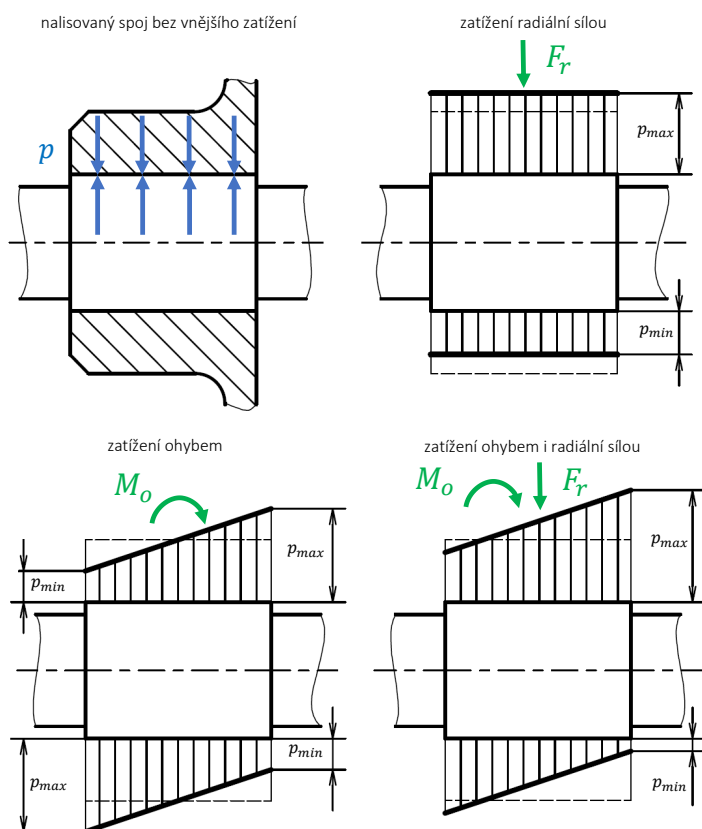
kde  $k$  je součinitel bezpečnosti spoje,  $k$  se doporučuje volit pro daný spoj v rozmezí 1,1 až 1,5 [5]. Předpokladem daných podmínek únosnosti je rovnoměrné rozložení tlaku  $p$  po celé délce spoje.

### Zatížení radiální silou a ohybovým momentem

Přídavné zatížení spoje radiální silou  $F_r$ , ohybovým momentem  $M_o$  nebo jejich kombinací vyvolává přerozdělení tlaku  $p$ , který byl vlivem nalisování rozložen rovnoměrně (při analytickém výpočtu). Na obr. 20 je vyznačeno přerozdělení tlaku  $p$  po délce spoje (za předpokladu, že hřídel i náboj jsou ohybově absolutně tuhé). Extrémní hodnoty

### 3. Nalisované nádoby a spoje

$p_{max}$  a  $p_{min}$  budou vznikat v rovině, kterou tvoří vektor síly  $F_r$  a osa hřídele, nebo v případě působení  $M_o$  v rovině, v níž působí dvojice sil vyvolávající ohybový moment. Proto rozložení tlaku  $p$  na obr. 20 je znázorněno právě v těchto rovinách, čárkovaně je naznačeno původní rozložení tlaku od nalisování.



**Obrázek 20.** Přerozdělení tlaku  $p$  vlivem zatížení radiální silou a ohybovým momentem

Přerozdělení tlaku  $p$  nemění souhrnnou hodnotu tlaku na styčné ploše (obsah vyšrafované plochy zůstává stejný), tedy nemění se ani únosnost spoje při přenosu kroutícího momentu  $M_k$  a osové síly  $F_a$  [5]. Protože se v této práci budeme zabývat pouze zatížením osovými silami, nebudeme odvozovat příslušné vztahy a pevnostní podmínky pro zatížení radiální silou a ohybovým momentem.



**Část II.**

**Praktická část**

## 4. Analytický návrh

### 4.1. Vstupní parametry

Při návrhu nalisovaného spoje (například ozubené kolo na hřídeli) vycházíme z potřebného zatížení, které spoj musí při provozu trvale vydržet. Obvykle známe přenášený výkon  $P$ , otáčky  $n$  a axiální sílu  $F_a$ .

Přenášený krouticí moment  $M_k$  se určí z výkonu a otáček:

$$P = M_k \cdot \omega \quad \Rightarrow \quad M_k = \frac{P}{\omega} = \frac{P}{2 \cdot \pi \cdot n} \quad (\text{jednotky SI}),$$

$$M_k = \frac{P \cdot 30 \cdot 10^6}{\pi \cdot n} \quad [\text{N mm; kW, min}^{-1}].$$

Dle zadání této bakalářské práce budeme zkoumat nalisovaný spoj při zatížení osovými silami. Proto uvažujeme pouze axiální sílu  $F_a$  působící na náboj. Ukážeme si příklad návrhu pro  $F_a = 25000$  N. Pro stanovení podmínek únosností musíme nejdříve provést rozbor sílových poměrů v nalisovaném spoji.

### 4.2. Základní rozměry a vlastnosti spoje

Minimální průměr hřídele se obvykle dimenzuje z pevnostní podmínky pro kombinaci krutu a ohybu (zanedbáváme vliv posouvající a osově síly). Nejdříve se spočítá redukovaný moment, pro který platí

$$M_{ored} = \sqrt{M_o^2 + \left(\frac{\alpha}{2} \cdot M_k\right)^2},$$

kde  $\alpha = 2$  při použití Trescovy pevnostní hypotézy nebo  $\alpha = \sqrt{3}$  při použití pevnostní hypotézy HMH. Potom pro redukované napětí musí platit

$$\sigma_{red} = \frac{M_{ored}}{W_o} = \frac{32 \cdot M_{ored}}{\pi \cdot d^3} \leq \sigma_D.$$

Pro minimální průměr hřídele potom platí

$$d_{min} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{ored}}{\pi \cdot \sigma_D}}.$$

Jedná se pouze o předběžné dimenzování, skutečné namáhání je složitější, jelikož jsme nebrali v úvahu ani tlak  $p$  ve styčné ploše. Pro spoj zatížený jen axiální silou  $F_a$  se minimální průměr hřídele nestanovuje.

Délku spoje  $l$  je možné zvolit z doporučených hodnot poměru  $l/d$  (viz. tab. 1) a průměr dle  $D = (1,8 \div 2,0) \cdot d$  [4].

S ohledem na zmíněná doporučení volím následující rozměry:

- $d = 30$  mm;

materiál náboje (hřídel z oceli)	ocel	šedá litina lehké slitiny
$l/d$ pro spoj nezatížený ohybem	0,6 až 0,8	1,2
$l/d$ pro spoj zatížený ohybem	1,25	až 2,0

**Tabulka 1.** Poměr  $l/d$  u nalisovaných spojů [4]

- $D = 60$  mm;
- $l = 45$  mm.

Níže je uvedena tabulka součinitelů tření pro nalisovaný spoj:

<i>materiál součástí, způsob výroby a lisování</i>	<i>f</i>
obě součásti z oceli, kalené a broušené, lisováno za studena	0,10 až 0,15
stejné materiály, plochy hladce obrobené, lisováno za studena	0,12 až 0,20
náboj z litiny, čep z oceli, lisováno za studena	0,10 až 0,16
obě součásti z oceli, plochy hladce obrobené, lisováno za tepla	0,15 až 0,25

**Tabulka 2.** Přibližné hodnoty součinitele tření  $f$  za klidu pro nalisovaný spoj [4]

Pro výpočty předpokládáme obě součásti z oceli 16220 s vlastnostmi: minimální zaručená mez kluzu  $\sigma_K = 500$  MPa, modul pružnosti  $E = 210000$  MPa, Poissonovo číslo  $\nu = 0,3$ . Součinitel tření volím  $f_a = 0,15$ .

### 4.3. Určení minimálního tlaku

Ze vztahu (55) nebo (56) se určí minimální potřebný tlak, který musíme vyvolat ve styčné ploše pro přenos zatížení. Potom minimální **potřebný** tlak je:

$$p_{min}^{(p)} = \frac{F_a \cdot k}{\pi \cdot d \cdot l \cdot f_a} = \frac{25000 \cdot 1,2}{\pi \cdot 30 \cdot 45 \cdot 0,15} = 47,2 \text{ MPa.}$$

### 4.4. Určení přesahu

#### 4.4.1. Stanovení minimálního přesahu

Použitím odvozeného vztahu pro přesah poloměru (54) určíme velikost přesahu vedoucího ke vzniku tlaku  $p_{min}$ :

$$\delta_{min} = \frac{2 \cdot r_2}{E} \cdot \frac{r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} \cdot p_{min}^{(p)} = \frac{2 \cdot 15}{210000} \cdot \frac{30^2}{30^2 - 15^2} \cdot 47,2 = 0,009 \text{ mm,}$$

kde  $r_2 = d/2 = 15$  mm a  $r_3 = D/2 = 30$  mm.

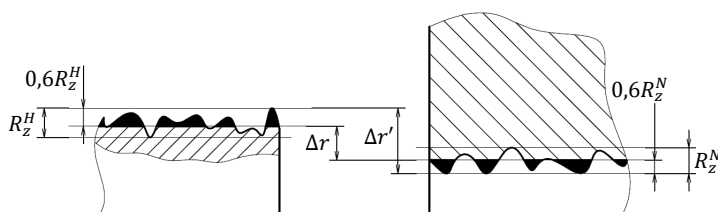
Ve strojřenství se pracuje s přesahem průměru  $\Delta d$ , což je dvojnásobek přesahu poloměru, potom minimální (efektivní) přesah je:

$$\Delta d_{min} = 2 \cdot \delta_{min} = 2 \cdot 0,009 = 0,018 \text{ mm.}$$

#### 4.4.2. Stanovení minimálního výrobního přesahu

##### Nalisování zastudena

Při nalisování zastudena dochází k poškození styčných ploch, část přesahu se strhne (viz obr. 21).



**Obrázek 21.** Stržení povrchových nerovností při podélném lisování (zastudena)

Proto pro tento způsob nalisování musíme určit přídavek, který se může strhnout aniž by se zmenšil potřebný tlak  $p_{min}$ . Postup určení tohoto přídávku vychází z předpokladu, že se výšky drsností povrchu sníží o 60% při podélném nalisování zastudena [5]. Potom pro minimální výrobní přesah platí:

$$\Delta d'_{wmin} = \Delta d_{min} + 1,2 \cdot (R_z^N + R_z^H),$$

kde  $R_z^N$  resp.  $R_z^H$  je největší výška profilu drsnosti náboje resp. hřídele (viz obr.). Po náhradě  $R_z$  za průměrnou aritmetickou odchylku profilu  $R_a$  dle  $R_z = 4,5 \cdot R_a$  dostáváme výsledný minimální výrobní přesah s korekcí na stržení povrchových nerovností při nalisování:

$$\Delta d'_{wmin} = \Delta d_{min} + 5,4 \cdot (R_a^N + R_a^H),$$

kde za  $R_a$  dosadíme doporučené hodnoty z tabulky 3.

způsob nalisování	d [mm]	$R_a$ [ $\mu\text{m}$ ]	
		hřídel	náboj
zastudena	<50	0,1	0,2
		0,4	0,8
		0,8	1,6
zatepla	50 až 120	0,8	1,6
	>120	1,6	1,6
zatepla	<250	1,6	1,6
	>250	1,6	3,2

**Tabulka 3.** Doporučené hodnoty středních aritmetických odchylek  $R_a$  [5]

Dle tab. 3 volím  $R_a^H = 0,4 \mu\text{m}$  a  $R_a^N = 0,8 \mu\text{m}$ , potom minimální výrobní přesah je

$$\Delta d'_{wmin} = 0,018 + 5,4 \cdot (0,8 + 0,4) \cdot 10^{-3} = 0,025 \text{ mm}$$

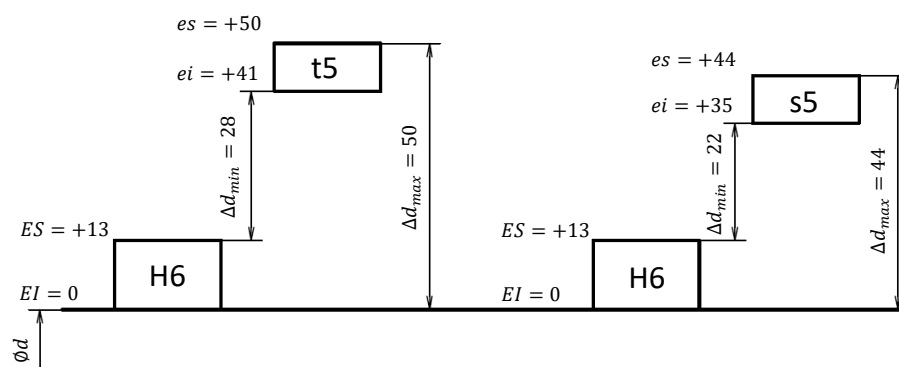
Návrh uložení se obvykle provádí v soustavě jednotné díry stupně přesnosti 6 nebo 7 [4]. Předepsaná tabulková minimální hodnota přesahu nesmí být menší než hodnota minimálního výrobního přesahu. Zároveň maximální přípustný přesah nesmí být příliš velký, aby hodnota tlaku  $p$  byla co nejbližší výpočtům. Navržené uložení potom je:  $\varnothing 30$

H6/t5 (viz obr. 22 a). Z obrázku je patrné, že minimální předepsaný (výrobní) přesah bude  $\Delta d_{wmin} = 0,028$  mm a maximální přesah  $\Delta d_{wmax} = 0,050$  mm.

### Nalisování zatepla

Při nalisování zatepla ke zmenšení přesahu nedochází, proto  $\Delta d'_{wmin} = \Delta d_{min} = 0,018$  mm.

Navržené uložení:  $\phi 30$  H6/s5 (viz obr. 22 b). Z obrázku je patrné, že minimální předepsaný (výrobní) přesah bude  $\Delta d_{wmin} = 0,022$  mm a maximální přesah  $\Delta d_{wmax} = 0,044$  mm.



Obrázek 22. Uložení spoje: a) nalisování zastudena, b) nalisování zatepla (hodnoty jsou v  $\mu\text{m}$ )

#### 4.4.3. Rozptyl skutečného kontaktního tlaku $p$

Po montáži zastudena se přesah zmenší (viz kap. 4.4.2), potom hodnoty maximálního a minimálního přesahu nabydou velikosti:

$$\Delta d_{wmin}^{pnalis} = 0,028 - 5,4 \cdot (0,8 + 0,4) \cdot 10^{-3} = 0,022 \text{ mm},$$

$$\Delta d_{wmax}^{pnalis} = 0,050 - 5,4 \cdot (0,8 + 0,4) \cdot 10^{-3} = 0,044 \text{ mm}.$$

V našem případě výrobní přesahy po nalisování zastudena a zatepla vychází stejně, proto se další výpočty a podmínky pro oba způsoby nalisování nebudou lišit.

Určíme tlak  $p_{min}$  resp.  $p_{max}$ , který je důsledkem přesahu  $\Delta d_{wmin}$  resp.  $\Delta d_{wmax}$ . Jeho velikost stanovíme dle odvozené závislosti mezi přesahem a tlakem pro spoj s plným hřídelem (54):

$$p_{min} = \frac{\Delta d_{wmin} \cdot E}{4 \cdot r_2} \cdot \frac{r_3^2 - r_2^2}{r_3^2} = \frac{0,022 \cdot 210000}{4 \cdot 15} \cdot \frac{30^2 - 15^2}{30^2} = 57,75 \text{ MPa},$$

$$p_{max} = \frac{\Delta d_{wmax} \cdot E}{4 \cdot r_2} \cdot \frac{r_3^2 - r_2^2}{r_3^2} = \frac{0,044 \cdot 210000}{4 \cdot 15} \cdot \frac{30^2 - 15^2}{30^2} = 115,5 \text{ MPa},$$

kde  $r_2 = d/2 = 15$  mm,  $r_3 = D/2 = 30$  mm a přesah poloměru jsem nahradili  $\delta_{max} = \Delta d_{wmax}/2$ .

Je patrné, že skutečný kontaktní tlak  $p$  vznikající v nalisovaném spoji bude v rozmezí

#### 4. Analytický návrh

hodnot  $p_{min}$  a  $p_{max}$ :

$$p \in \langle 57, 76; 115, 5 \rangle \quad [\text{MPa}].$$

Z tohoto plyne velká nevýhoda nalisovaných spojů - náhodná hodnota kontaktního tlaku  $p$ , tedy taky i únosnosti nalisovaného spoje a stavu jeho napjatosti.

Pro řešení únosnosti spoje je směrodatný přesah  $\Delta d_{wmin}$ , protože i tento přesah musí zajistit přenos  $F_a$  resp.  $M_k$  bez nebezpečí prokluzu. Pro řešení stavu napjatosti a pevnostní kontrolu je směrodatný přesah  $\Delta d_{wmax}$  - větší zatížení vyvolané tímto přesahem nesmí ohrozit pevnostní situaci nalisovaného spoje.

##### 4.4.4. Pevnostní kontrola

Pro pevnostní kontrolu nalisovaného spoje počítáme s největším možným přesahem, tedy s největším možným tlakem  $p_{max}$ .

Obvykle se provádí pouze pevnostní kontrola náboje, který je namáhán vždy více než hřídel. Pro hřídel totiž platí jednoduchá podmínka (viz kap 2.5):

$$\sigma_{red} = p_{max} \leq \sigma_D = \frac{\sigma_K}{k}$$

$$115,5 \text{ MPa} \leq \frac{500}{1,2} = 417 \text{ MPa}.$$

Pevnostní podmínka pro náboj 34 (viz otevřená nádoba zatížená vnitřním přetlakem - kap. 2.4.1) má následující tvar:

$$p_{max} \leq \frac{\sigma_D}{2} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{r_2}{r_3} \right)^2 \right],$$

$$115,5 \text{ MPa} \leq \frac{417}{2} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{15}{30} \right)^2 \right] = 156,4 \text{ MPa}.$$

Pevnostní kontrola navrženého nalisovaného spoje vychází v pořádku.

#### 4.5. Lisovací a stahovací síla

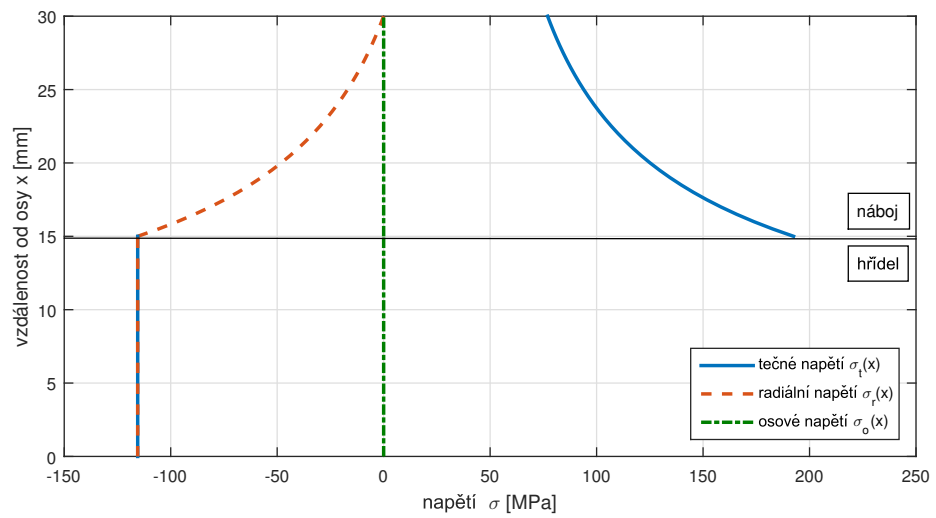
Lisovací nebo stahovací sílu stanovíme z podmínky únosnosti (55), když za koeficient bezpečnosti dosadíme „1“, potom můžeme psát:

$$F_{lis(max)} = F_{stah(max)} = \pi \cdot d \cdot l \cdot p_{max} \cdot f_a = \pi \cdot 30 \cdot 45 \cdot 115,5 \cdot 0,15 = 73,5 \text{ kN}.$$

Jedná se pouze o maximální možné teoretické hodnoty pro navržený spoj (pro přesah  $\Delta d_{wmax} = 0,044 \text{ mm}$ ).

#### 4.6. Grafický výstup

Použitím odvozených vztahů (50), (51) a (53) získáme průběhy napětí pro  $p_{max} = 115,5 \text{ MPa}$  (obr. 23).



**Obrázek 23.** Průběhy hlavních napětí v nalisovaném spoji (analytický výpočet)

## 5. Numerické experimenty

### 5.1. Použitý software

Pro analýzu a simulaci metodou konečných prvků použijeme specializovaný systém SIMULIA Abaqus, FS ČVUT disponuje studentskými licencemi. Pomocí MKP namodelujeme úlohu, kterou jsme řešili analyticky, porovnáme výsledky. Následně navrhne konstrukční úpravy při statickém a dynamickém zatížení spoje osovou silou  $F_a$ .

#### 5.1.1. Parametry modelu

Abaqus umožňuje řešit rotačně symetrické úlohy ve 2D (v osovém řezu), toto s výhodou využijeme při simulaci. Můžeme si totiž dovolit jemnější síť a tím i přesnější výpočet (pro řešení ve 3D by počet prvků byl mnohonásobně větší a simulace by trvala mnohem déle).

Uvažujeme pouze elastický lineární model, to znamená, že při simulaci nikdy nedojde k překonání meze kluzu  $\sigma_K$  resp. meze úměrnosti  $\sigma_U$ , tedy nedojde k plastizaci materiálu. Ostatní parametry modelu budou zcela schodné, jak při analytickém návrhu:

- modul pružnosti v tahu  $E = 210000$  MPa;
- Poissonovo číslo  $\nu = 0,3$ ;
- součinitel tření  $f = 0,15$ .

Požítý princip simulace nalisování v Abaqusu se nejvíce podobá radiálnímu lisování náboje na hřídel, tj. nalisování zatepla. Zmínka této skutečnosti je důležitá pro vysvětlení vzniku osového napětí v součástkách (viz dále).

### 5.2. Porovnání numerického a analytického řešení

#### 5.2.1. Modelování nalisovaného spoje

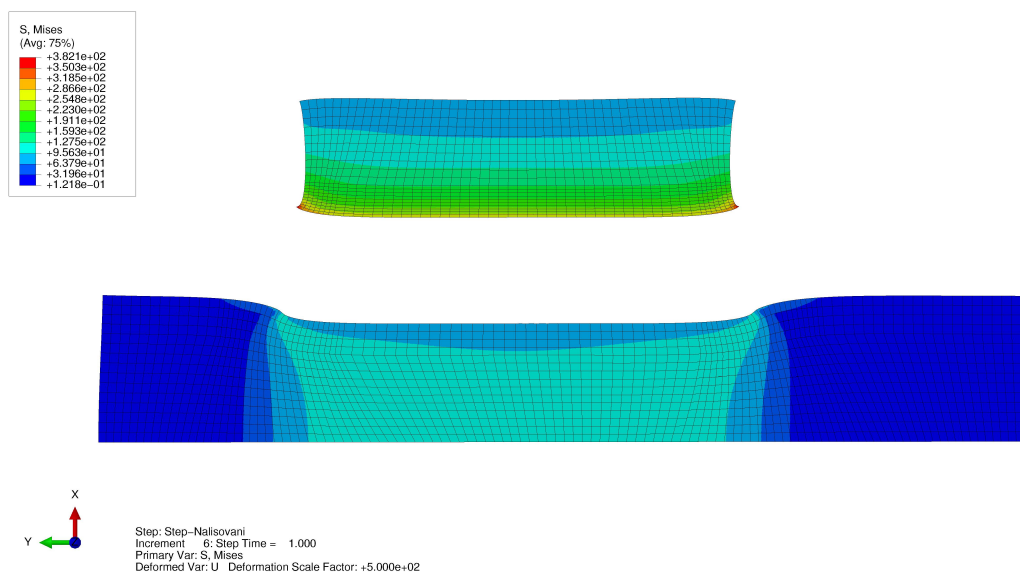
Uvažujeme maximální výrobní přesah  $\Delta d_{max} = 0,044$  mm (viz Analytický návrh). Při modelování volíme jemnější síť na okrajích spoje, protože tam dochází ke skokovému zvýšení namáhání a potřebujeme přesnější výpočet. Výsledky z Abaqusu jsou na obr. 24 (v osovém řezu), deformace (nikoliv rozměry) je 500x zvětšena pro lepší představení jejího tvaru.

#### 5.2.2. Průběhy napětí a tlaku

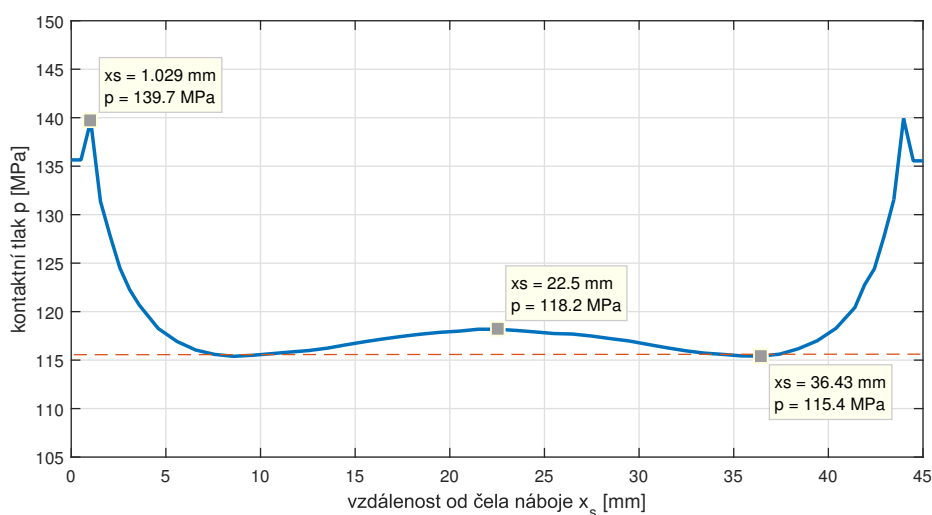
Průběh kontaktního tlaku  $p$  po délce spoje je vyneseno do grafu (obr. 25).<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Při zpracování dat z Abaqusu v tomto modelu krajní hodnoty (pro  $x_s = 0$  mm a  $x_s = 45$  mm) jsou nahrazeny hodnotami v nejbližším bodě sítě, protože při numerickém výpočtu v těchto bodech vznikají velká špičková napětí, které se však nebudou blížit realitě. Takovým způsobem lze v obdobných situacích „filtrovat“ špičkové body sítě. Ovšem při dalších experimentech se ukázalo, že při jemnějším síťování modelu takový přístup dává zcela odlišné hodnoty špiček. Pro zpřesnění byla zvolena jiná metoda - velmi jemné síťování a zpracování dat v MATLABU (proklad „Smoothing spline“ s vhodně zvoleným parametrem „p“ - viz příloha A)





**Obrázek 24.** Spoj bez konstrukčních úprav. Znázornění redukovaného napětí (dle HMM), deformace 500x zvětšena.



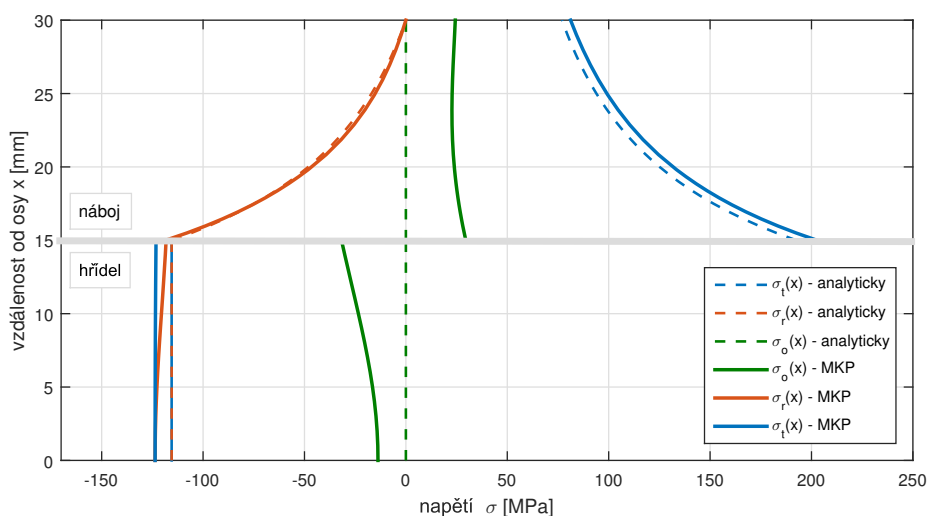
**Obrázek 25.** Spoj bez konstrukčních úprav. Průběh kontaktního tlaku  $p$  po délce spoje

Z grafu je zřejmé, že průběh tlaku je symetrický vůči středu spoje. Na obrázku jsou také vyznačeny hodnoty lokálních extrémů. Čárkovane je znázorněno rozložení tlaku při analytickém výpočtu.

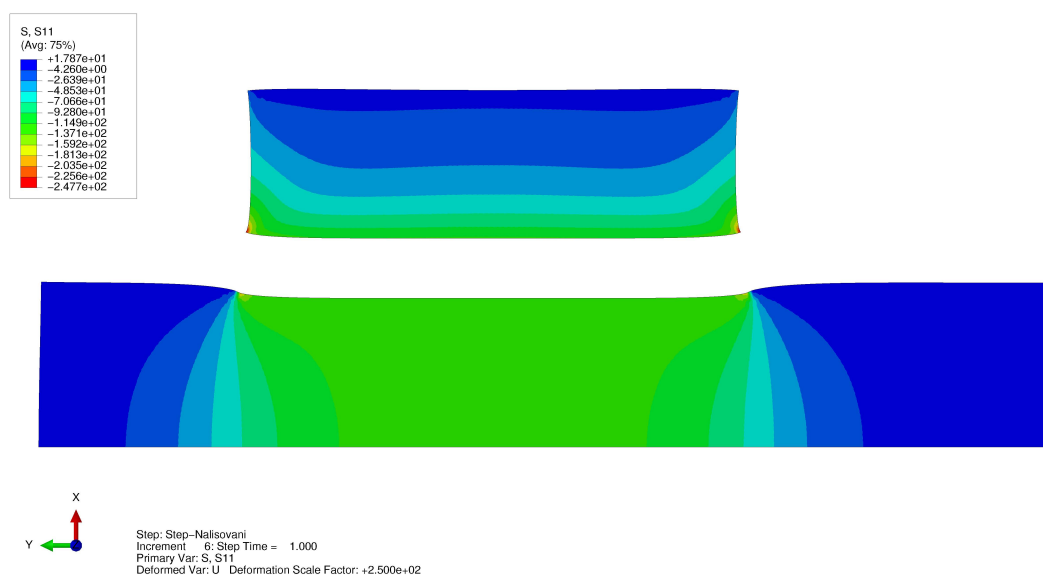
Pro porovnání průběhů hlavních napětí s analytickým výpočtem vyneseme výsledky z Abaqusu do grafu (obr. 26). Pro tento účel vezmeme hodnoty uprostřed spoje. Je patrné, že takové rozložení hlavních napětí je na většině spoje (pro přibližně  $x_s \in \langle 5; 40 \rangle$  mm), kde rozložení tlaku  $p$  je relativně rovnoměrné (viz obr. 25). Průběhy tečného a radiálního napětí vycházejí velmi podobně, maximální rozdíl se pohybuje kolem 6%. Jiná situace je s osovým napětím, kde při analytickém návrhu jsme považovali toto napětí za nulové.

## 5. Numerické experimenty

Výsledky z Abaqusu ukazují, že pro tento spoj vzniká v náboji tahové napětí přibližně 25 MPa a v hřídeli tlakové napětí přibližně stejné velikosti. Tato neshoda průběhu osového napětí ovšem nepřinese do výpočtu redukovaného napětí velké rozdíly. Například Trescova hypotéza střední hlavní napětí zanedbává a tak redukované napětí dle této hypotézy bude prakticky stejné jako v Abaqusu. Vznik osového napětí vysvětlíme na analogii reálného lisování zatepla. Při chladnutí se ohřátá část smršťuje nejen v radiálním směru, ale také v axiálním. Třecí odpor ve styčné ploše však brání axiálnímu smršťování, tak v náboji vzniká tahové napětí v osovém směru a v hřídeli napětí tlakové. Při nalisování dlouhého náboje zatepla ve spoji mohou vznikat značná osová napětí. V Abaqusu, kde rozdíl teplot neuvažujeme, vzniká osová napětí, protože při deformaci v radiálním směru dochází také ke změně podélného rozměru (viz Poissonovo číslo). Deformaci v podélném (axiálním) směru je však bráněno třecím odporem ve styčné ploše.

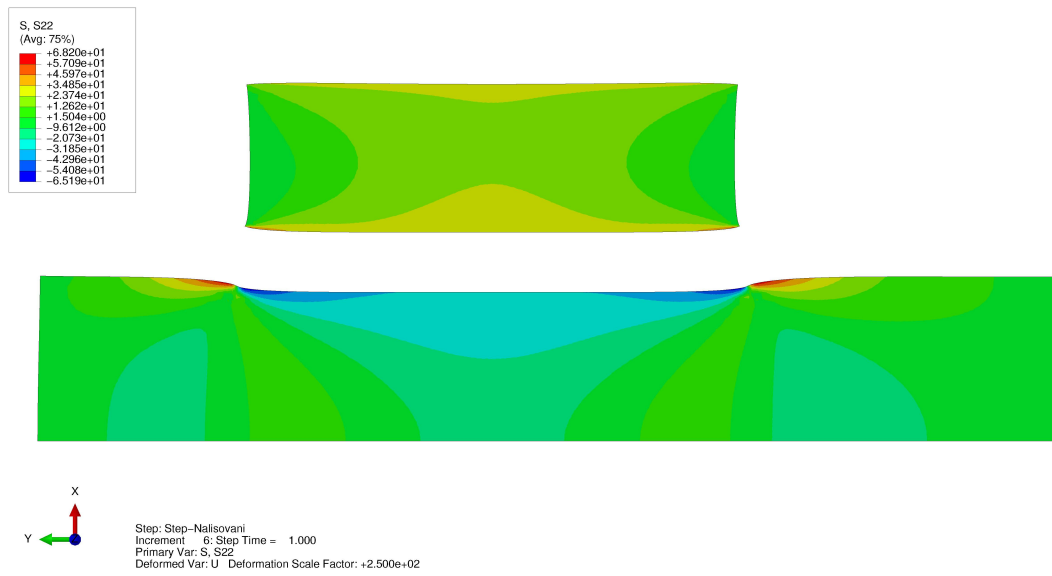


**Obrázek 26.** Spoj bez konstrukčních úprav. Průběhy hlavních napětí v nalisovaném spoji pro  $x_s = 22,5$  mm (porovnání MKP s analytickým výpočtem)

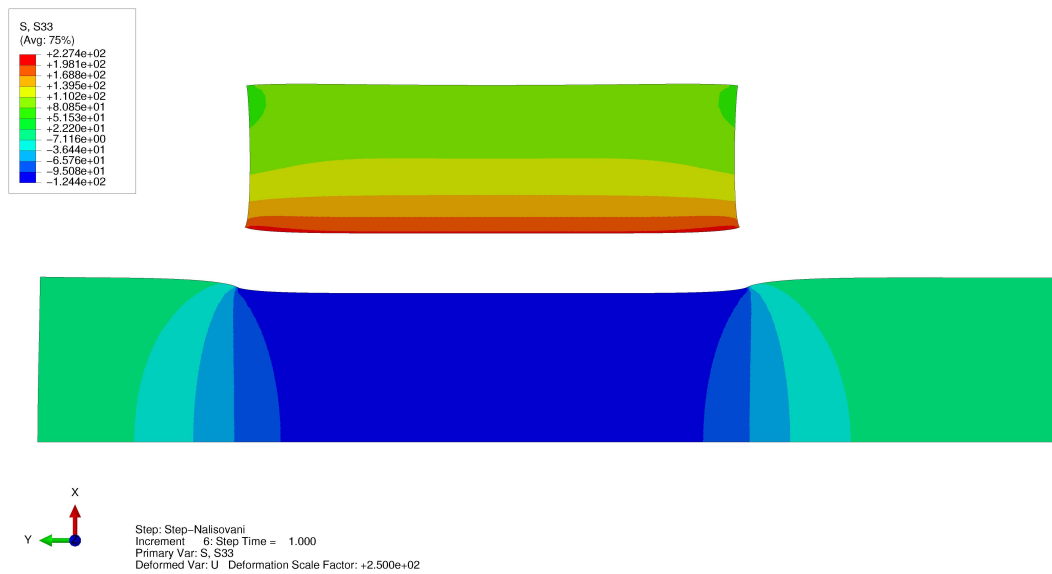


**Obrázek 27.** Spoj bez konstrukčních úprav. Znázornění radiálního napětí, deformace 250x zvětšena.

Na obr. 27, 28 a 29 je znázorněno rozložení všech hlavních napětí po nalisování.



**Obrázek 28.** Spoj bez konstrukčních úprav. Znázornění osového napětí, deformace 250x zvětšena.



**Obrázek 29.** Spoj bez konstrukčních úprav. Znázornění tečného napětí, deformace 250x zvětšena.

### 5.2.3. Stanovení stahovací síly

#### Numerickým integrováním v MATLABu

Stahovací sílu lze určit podobným způsobem jako při analytickém řešení (viz kap. 4.5). Ovšem tentokrát nebudeme považovat průběh tlaku za konstantní, ale využijeme výsledky z Abaquusu (obr. 25). Pro velikost lisovací/stahovací síly můžeme psát

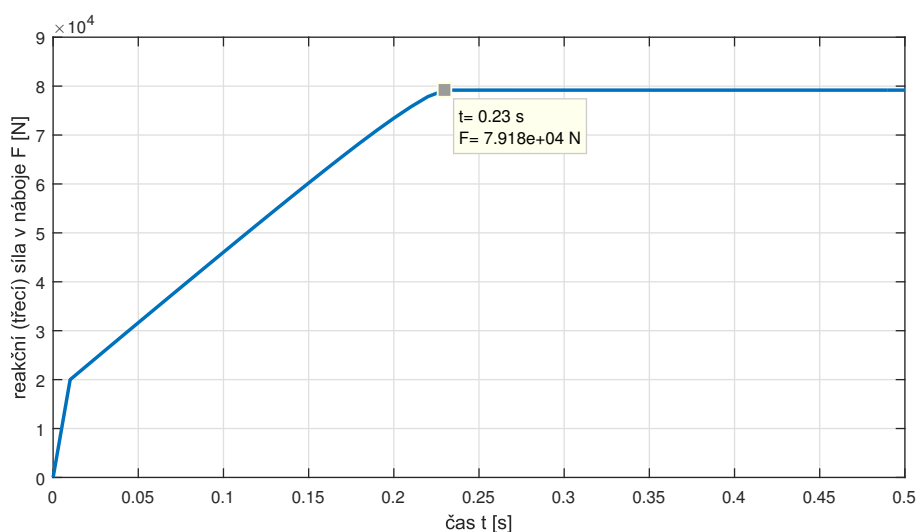
$$F_{lis} = F_{stah} = \int_0^l \pi \cdot d \cdot p(x_s) \cdot f_a \cdot dx_s = \pi \cdot d \cdot f_a \cdot \int_0^l p(x_s) \cdot dx_s,$$

kde  $\int_0^l p(x_s) \cdot dx_s$  spočítáme numerickým integrováním (lichoběžníkovou metodou) pomocí MATLABu. Potom dostáváme

$$F_{stah} = \pi \cdot 30 \cdot 0,15 \cdot 5353,6 = 75684 \text{ N} \doteq 75,7 \text{ kN}.$$

#### Abaqus

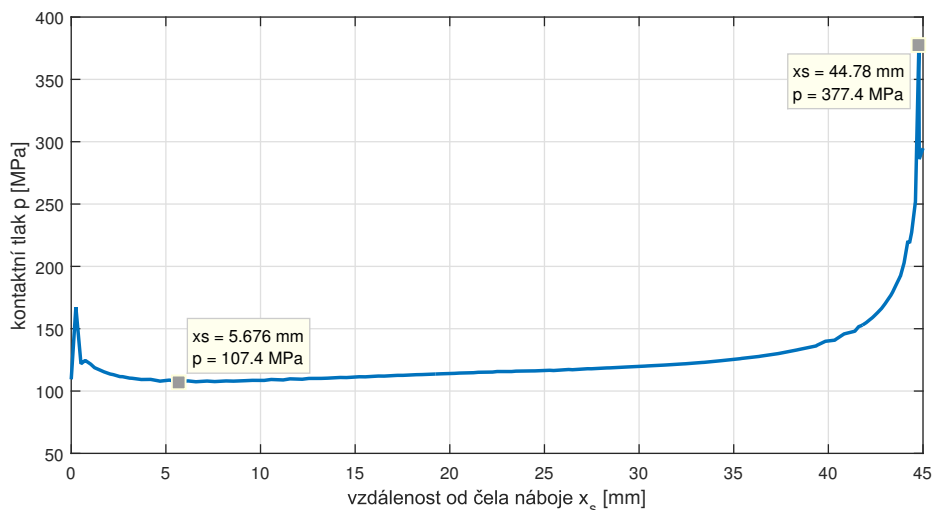
Stahovací sílu můžeme určit přímo v Abaquusu a to takovým způsobem, že vynutíme skluz náboje po hřídeli a budeme sledovat reakční sílu vznikající v náboji v závislosti na čase. Tato reakční síla je zřejmě třecí silou  $T_a$  mezi součásti. Největší dosažená reakční síla bude odpovídat velikosti stahovací síly (viz obr. 30)



**Obrázek 30.** Spoj bez konstrukčních úprav. Průběh reakční třecí síly  $F$  ( $T_a$ ) v závislosti na čase

Z grafu je patrné, že stahovací síla  $F_{stah} \doteq 79,2 \text{ kN}$ , v čase  $t = 0,23 \text{ s}$  náboj začal klouzat po hřídeli.

Takový způsob určení stahovací síly je nejpřesnější z uvedených metod v této práci, protože uvažuje přerozdělení tlaku  $p$  vlivem axiálního zatížení. Znázornění rozložení tlaku  $p$  po délce spoje při působení stahovací síly  $F_{stah} = 79,18 \text{ kN}$  je na obr. 31.



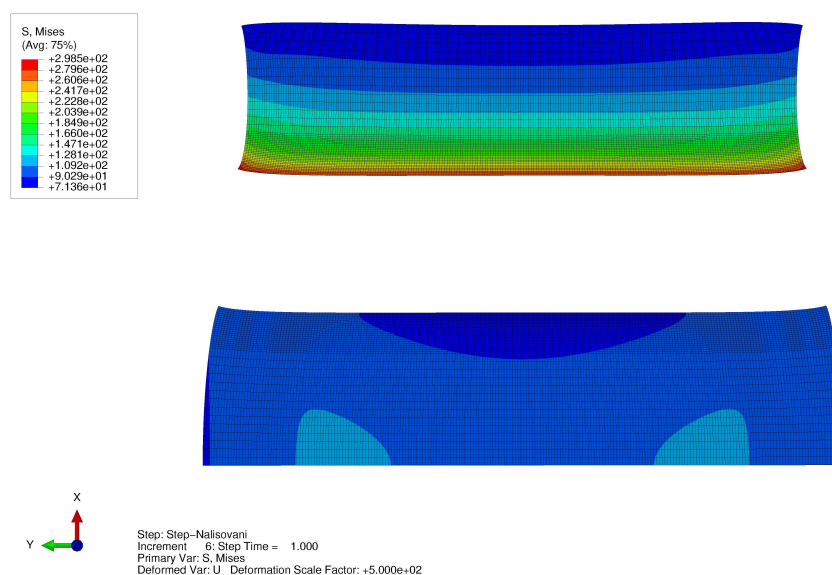
**Obrázek 31.** Spoj bez konstrukčních úprav. Průběh kontaktního tlaku  $p$  po délce spoje při působení stahovací síly  $F_{stah}$

## 5.3. Konstrukční úpravy

### 5.3.1. Vznik koncentrace tlaku

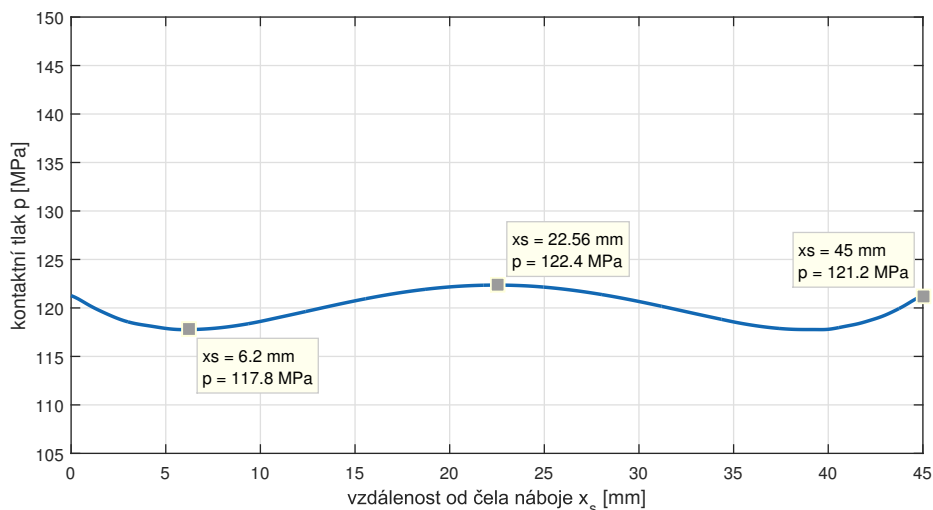
Jak již bylo zmíněno v kap. 5.2.2 na okrajích náboje dochází ke koncentraci zatížení - skokovému zvýšení kontaktního tlaku  $p$  (viz obr. 25). Důvodem je místní zvětšení přesahu, vyvolané výstužným efektem volného hřídele v blízkosti čela náboje, tento efekt je možné sledovat díky zvětšené deformaci na obr. 24.

Pro ověření této úvahy provedeme experiment. Výstužný efekt by neměl nastávat, pokud hřídel a náboj budou mít stejnou délku  $l$ . Zachováme stejné rozměry spoje, včetně přesahu, změníme pouze délku hřídele. Výsledky z Abaqusu jsou na obr. 32 a 33.



**Obrázek 32.** Spoj s vyrovnáním délek náboje a hřídele. Znázornění redukovaného napětí (dle HMH) a deformace (500x zvětšena)

## 5. Numerické experimenty



**Obrázek 33.** Spoj s vyrovnáním délek náboje a hřídele. Průběh kontaktního tlaku  $p$  po délce spoje

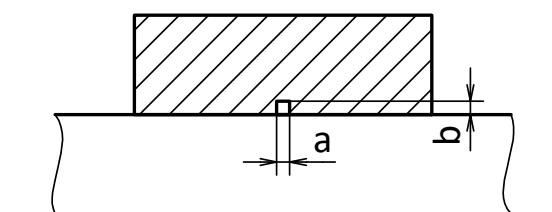
Z obrázků plyne, že úvaha byla správná. V průběhu kontaktního tlaku již nedochází ke špičkám na okrajích spoje. Tlak je rozložen relativně rovnoměrně se střední velikostí přibližně 120 MPa.

### 5.3.2. Statické namáhání

Při statickém namáhání nalisovaného spoje je vliv koncentrace tlaku prakticky zanedbatelný a proto se neuvažuje [5]. Ovšem pro přenos statické axiální síly je prospěšný, protože zvýšením tlaku vyvoláme větší reakční třecí sílu ve spoji. Z obr. 31 je patrná tlaková špička při působení stahovací síly, tedy při přenosu osové síly bude vždy nejvíce namáhán jeden okraj náboje. Pokud bychom dimenzovali nalisovaný spoj podle tohoto nejnamáhanějšího místa, zbývající část spoje by byla pevnostně nevyužita. Proto připadá v úvahu zkusit navržený spoj upravit takovým způsobem, aby po délce spoje vznikaly další špičky tlaku.

#### Drážka v náboji

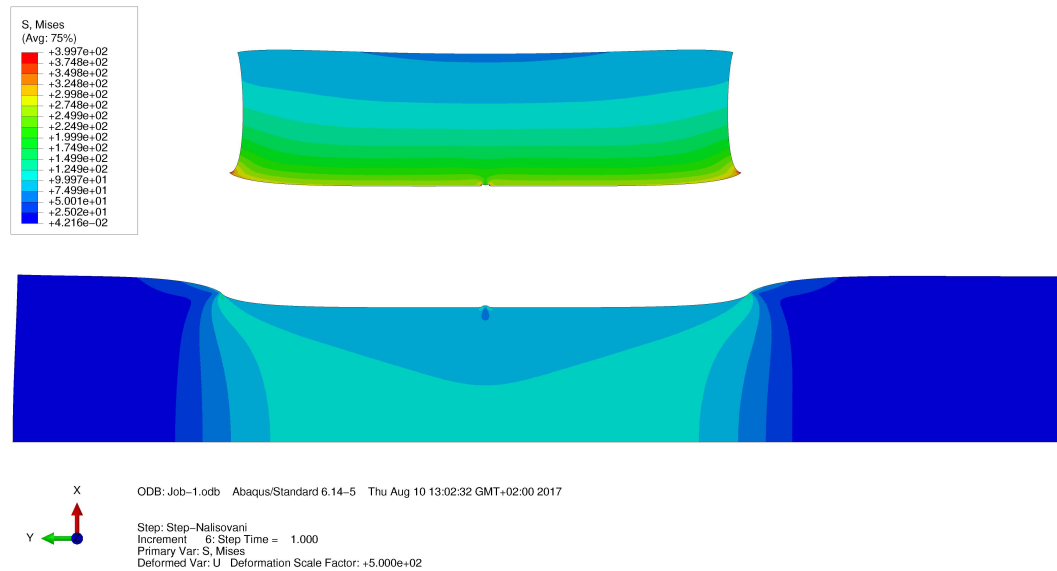
Na vnitřním povrchu náboje uděláme drážku po celém obvodu, jak je to naznačeno na obr. 34.



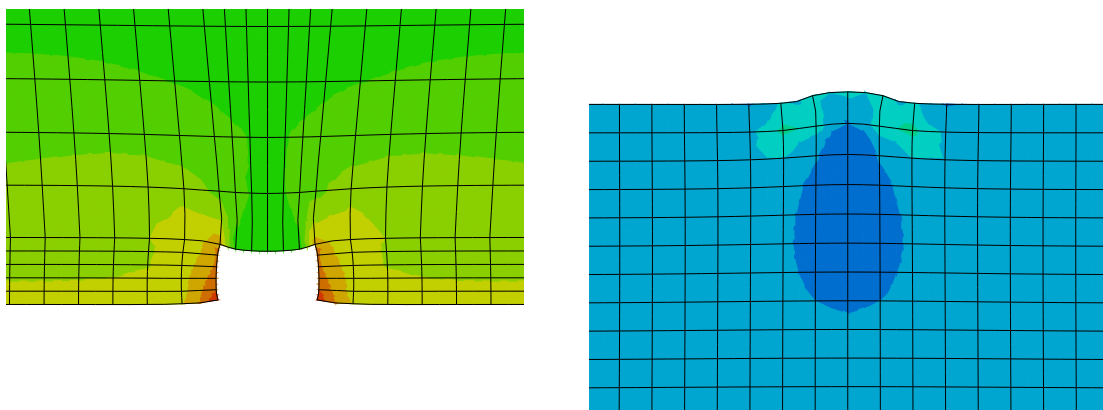
**Obrázek 34.** Náčrt spoje s drážkou

V místě drážky hřídel bude volný a tak by zde měl vzniknout výstužný efekt s následnou koncentrací tlaku v blízkosti drážky. Únosnost spoje budeme hodnotit dle velikosti stahovací síly stejným principem, popsaným v kapitole 5.2.3.

Výšku drážky zvolíme takovou, abychom umožnili vznik hrbu - volíme  $b = 0,5$  mm. Znázornění redukovaného napětí a tvaru deformace po nalisování (pro  $a = 0,5$  mm) je na obr. 35 a detail drážky na obr. 36.



**Obrázek 35.** Spoj s drážkou. Znázornění redukovaného napětí (dle HMM) a deformace (500x zvětšena)



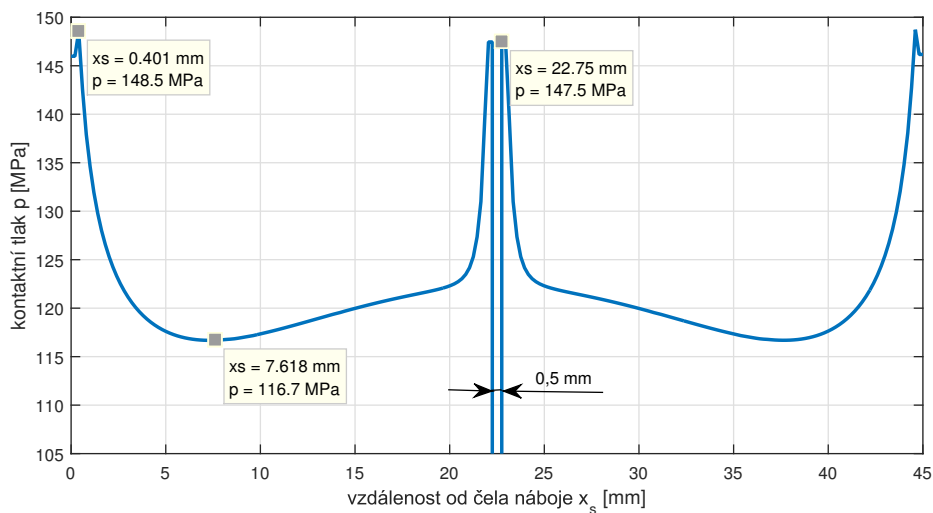
a)

b)

**Obrázek 36.** Detail spoje s drážkou.. Síťování a redukované napětí (HMM), deformace 250x zvětšena: a) náboj, b) hřídel

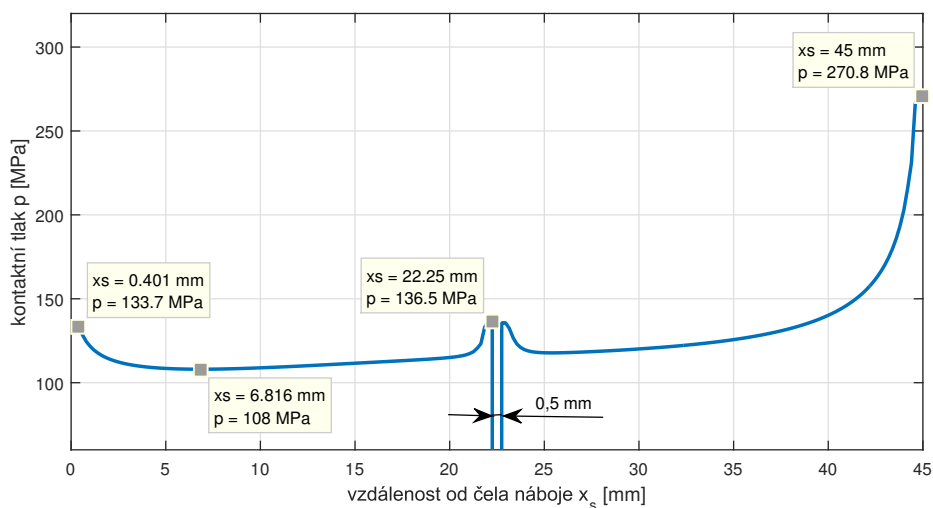
## 5. Numerické experimenty

Průběh kontaktního tlaku  $p$  po délce spoje po zavedení drážky je na obr. 37 (pro šířku  $a = 0,5$  mm). Zavedením drážky jsme vyvolali dvě tlakové špičky uprostřed spoje, ovšem zároveň jsme přišli o část styčné plochy, v tomto případě se účinná délka spoje zmenšila o  $0,5$  mm.



**Obrázek 37.** Spoj s drážkou. Průběh kontaktního tlaku  $p$  po délce spoje po nalisování

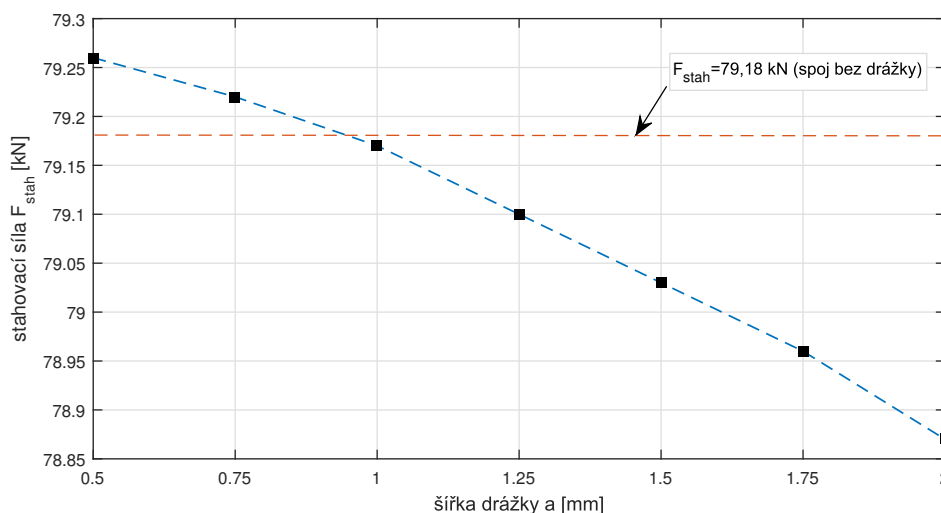
Přerozdělení kontaktního tlaku  $p$  při zatížení nalisovaného spoje s drážkou  $0,5$  mm  $\times$   $0,5$  mm osovou silou  $F_{stah} = 79,26$  kN je na obr. 38.



**Obrázek 38.** Spoj s drážkou. Průběh kontaktního tlaku  $p$  po délce spoje po zatížení osovou silou  $F_{stah} = 79,26$  kN



Po krocích budeme zvětšovat šířku drážky a zjišťovat velikost síly  $F_{stah}$ . Potom velikost stahovací síly v závislosti na šířce drážky vyneseme do grafu (viz obr. 39).



**Obrázek 39.** Spoj s drážkou. Závislost stahovací síly na šířce drážky

Z grafu na obr. 39 je patrné, že únosnost spoje s rostoucí šířkou drážky klesá. Ztráta účinné délky  $l$  (a tím zmenšení styčné plochy) má větší dopad, než vyvolání špiček napětí. Ovšem pro velmi úzkou drážku ( $a = 0,5$  mm) jsme dosáhli nepatrně vyšší (cca o 0,1%) únosnosti spoje při zatížení osovou silou. Vzhledem k výsledkům experimentu nemá taková úprava praktický význam, ani větší počet takových drážek by nezpůsobil citelný nárůst únosnosti. To znamená, že pro přenos statického osového zatížení je nejlepší volbou jednoduchý spoj bez konstrukčních úprav.

### 5.3.3. Dynamické namáhání

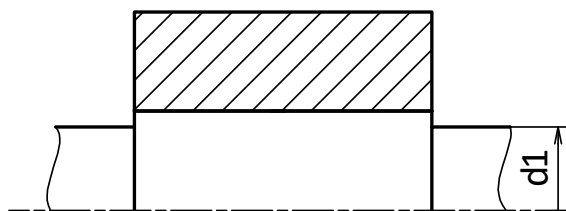
Při dynamickém namáhání jsou koncentrace napětí nežádoucí, protože negativně ovlivňují únavovou pevnost součástek. Proto je snaha špičky tlaku na okrajích nalisovaného spoje potlačit. Provedeme experimenty některých konstrukčních úprav. Ve své bakalářské práci prováděl podobné experimenty Jan Perníček, který hodnotil vliv vnitřního a vnějšího zkosení hran náboje na průběh tlaku od nalisování [10]. V rámci této práce vyzkoušíme následující úpravy:

- Vyrovnání délky nalisování s pozvolnými přechody - viz obr. 42;
- Snížení radiální tuhosti náboje čelními zápichy - viz obr. 45.

#### Vyrovnání délky nalisování

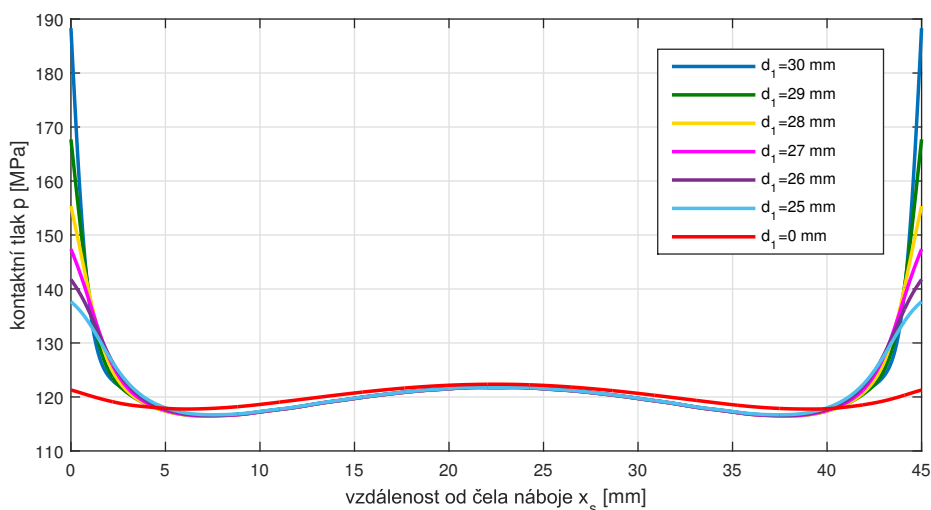
Vycházíme z kap. 5.3.1, kde je vysvětlena příčina vzniku koncentrace tlaku. Úvaha daného konstrukčního zásahu spočívá ve vyrovnání délky náboje a čepu pod nalisovaným spojem.

Nejdříve uděláme úpravu dle obr. 40.



**Obrázek 40.** Náčrt spoje s vyrovnáním délky nalisování

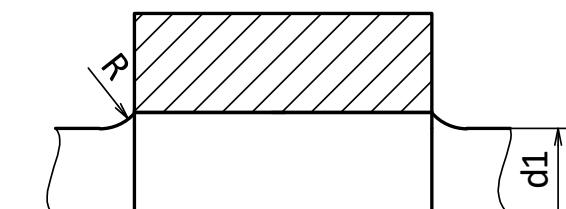
Provedeme výpočty pro různé hodnoty  $d_1$  a průběh tlaku  $p$  vyneseme do grafu (viz obr. 41).



**Obrázek 41.** Spoj s vyrovnáním délky nalisování. Průběh kontaktního tlaku  $p$  po délce spoje pro různé hodnoty  $d_1$

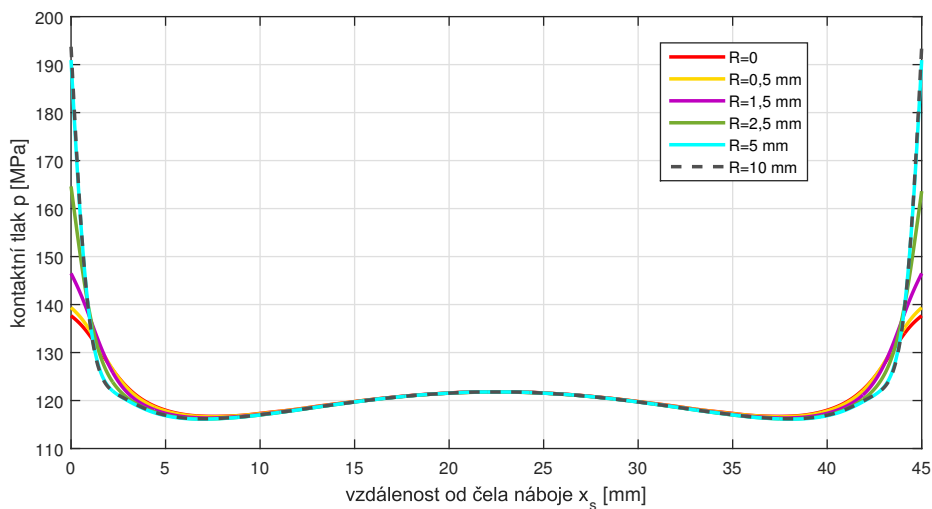
Z výsledků plyne logický závěr, že čím menší bude průměr  $d_1$ , tím budou menší i špičky tlaku  $p$ . Ovšem rozměr  $d_1$  nemůžeme zvolit libovolný, minimální průměr hřídele volíme z pevnostní podmínky (viz kap. 4.2).

Provedenou úpravou (přechodem na menší průměr  $d_1$ ) jsme způsobili vznik nového vrubu na hřídeli, pro potlačení tohoto vrubu se dělá pozvolný přechod dle obr. 42.



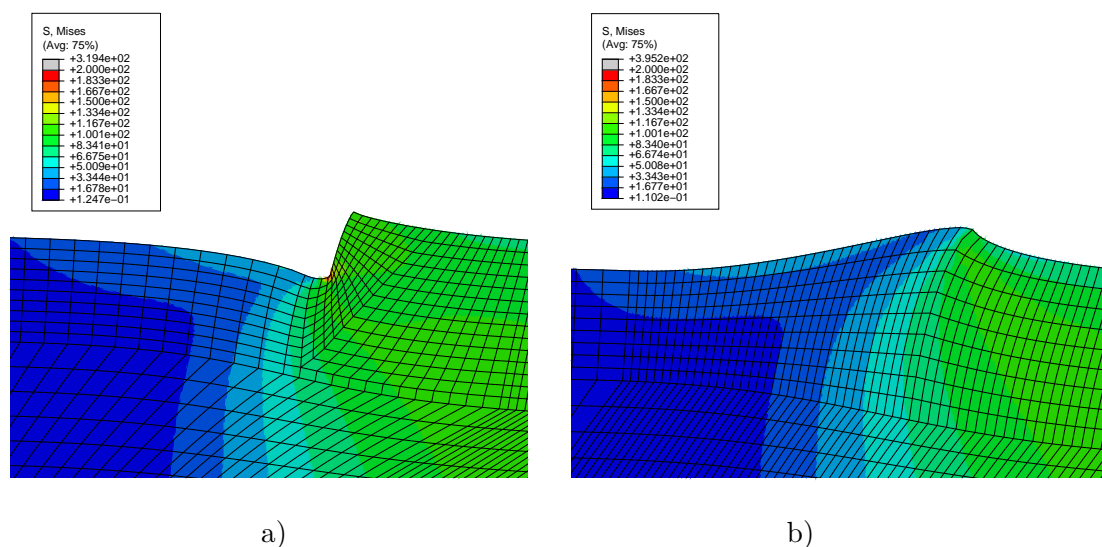
**Obrázek 42.** Náčrt spoje s vyrovnáním délky nalisování a pozvolnými přechody

Pro velikost průměru  $d_1 = 25$  mm provedeme výpočty v Abaqusu pro různé hodnoty  $R$ . Výsledky jsou na obr. 43.



**Obrázek 43.** Spoj s vyrovnáním délky nalisování a pozvolnými přechody. Průběh kontaktního tlaku  $p$  po délce spoje pro různé hodnoty  $R$

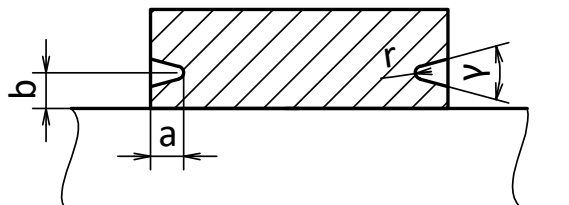
Z výsledků na obr. 43 a obr. 44 je patrné, že pozvolný přechod zvětšuje tlakové špičky a zmenšuje koncentrace napětí v hřídeli. Proto je potřeba zvolit vhodné velikosti  $d_1$  a  $R$ . Někteří autoři doporučují volit  $R \approx d_1$  [4].



**Obrázek 44.** Detail přechodu na hřídeli. Redukované napětí (HMH), deformace 500x zvětšena:  
a)  $R = 0,5$  mm - je patrný vrub, b)  $R = 10$  mm - vrub není

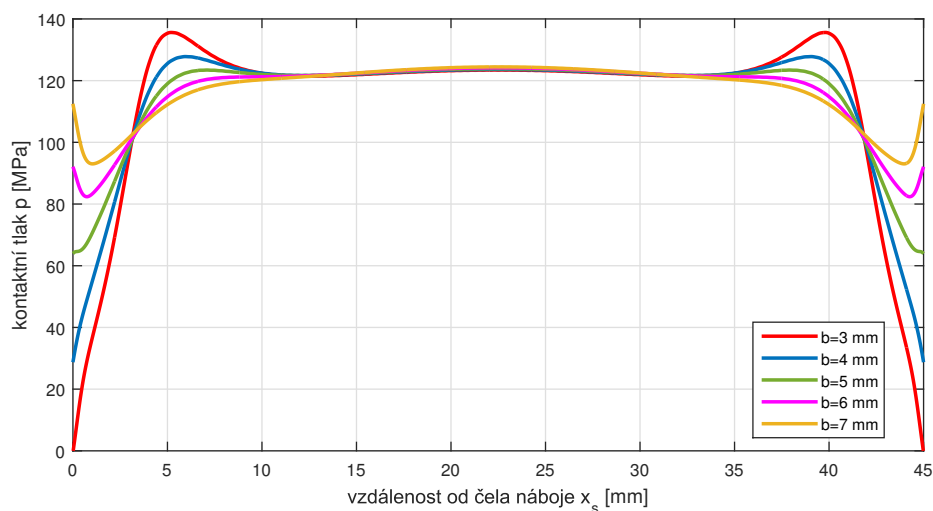
### Čelní zápichy v náboje

Provedeme konstrukční úpravu, která spočívá ve snížení radiální tuhosti náboje čelními zápichy (viz obr. 45).



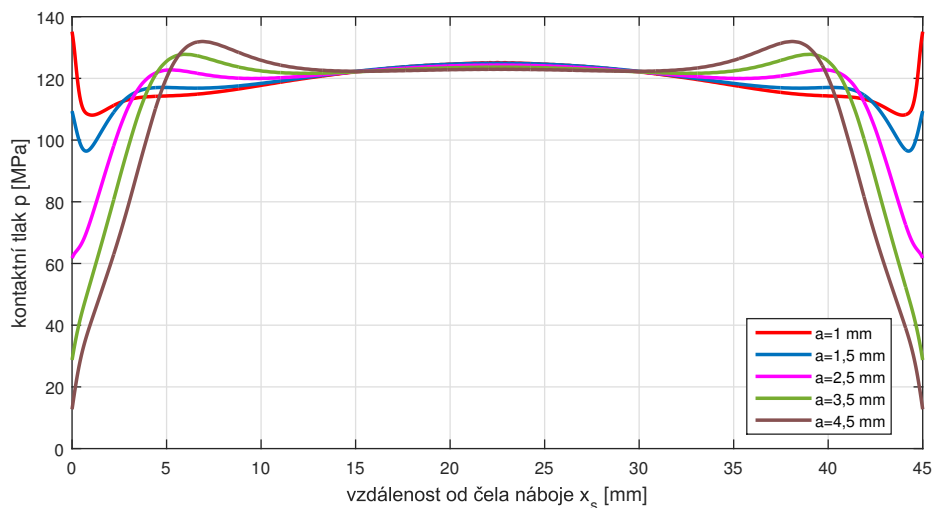
**Obrázek 45.** Náčrt spoje s čelními zápichy v náboje

Pro návrh nejvhodnějších rozměrů  $a$ ,  $b$ ,  $r$  a  $\gamma$  budeme postupovat iteračním způsobem. Výchozími hodnotami budou:  $a = 3,5$  mm,  $b = 4$  mm,  $r = 0,5$  mm a  $\gamma = 30^\circ$ . Nejdříve budeme sledovat průběh kontaktního tlaku  $p$  po délce spoje pro různé hodnoty  $b$ . Výsledky jsou na obr. 46.



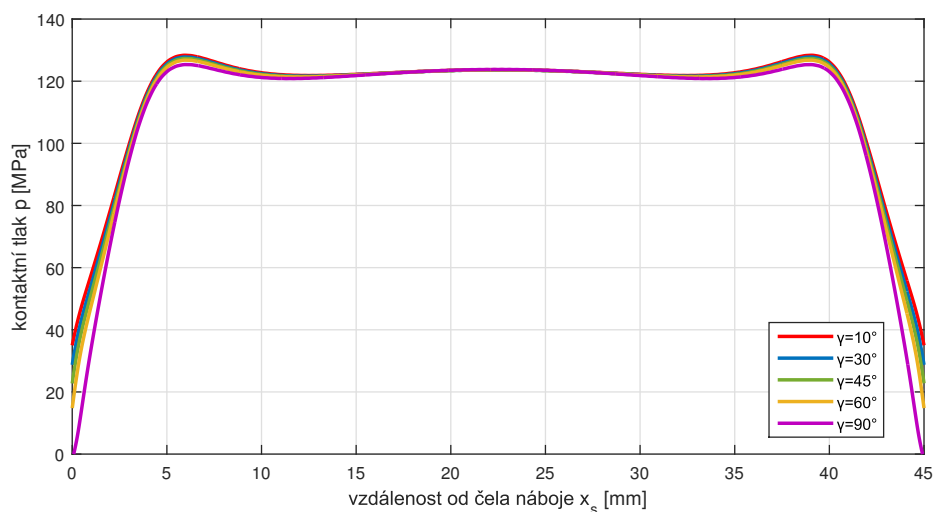
**Obrázek 46.** Spoj s čelními zápichy. Průběh kontaktního tlaku  $p$  po délce spoje pro různé hodnoty  $b$

Je patrné, že pro malé hodnoty  $b$  na okrajích spoje nepůsobí tlak od nalisování. Dále pro výchozí hodnoty zápichu budeme měnit rozměr  $a$ . Výsledky jsou na obr. 47.



**Obrázek 47.** Spoj s čelními zápichy. Průběh kontaktního tlaku  $p$  po délce spoje pro různé hodnoty  $a$

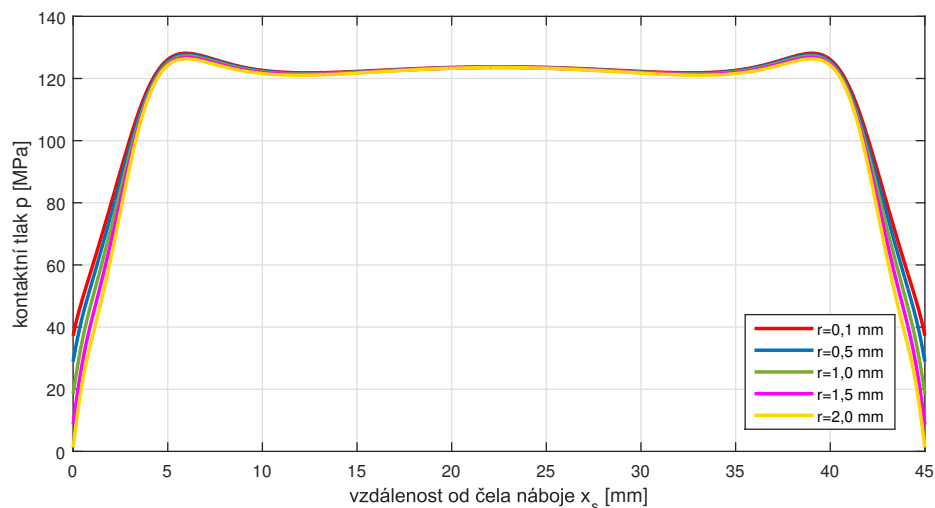
Je zřejmé, že rozložení tlaku od nalisování vychází nejlépe pro  $a = 1,5$  mm, protože tlakové špičky nejsou přítomny a průběh tlaku je relativně rovnoměrný. Dále pro výchozí hodnoty zápichu budeme měnit úhel  $\gamma$ . Z výsledků na obr. 48 je vidět, že velikost úhlu  $\gamma$  nemá velký vliv na průběh tlaku od nalisování.



**Obrázek 48.** Spoj s čelními zápichy. Průběh kontaktního tlaku  $p$  po délce spoje pro různé hodnoty  $\gamma$

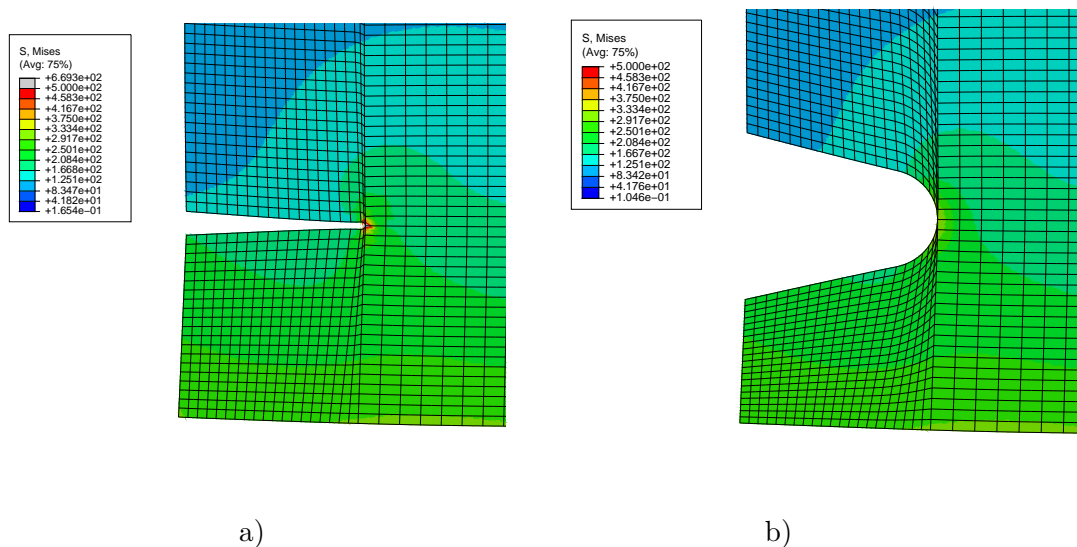
Naposled budeme obdobným způsobem měnit velikost poloměru  $r$ , výsledky jsou na obr. 49.

## 5. Numerické experimenty



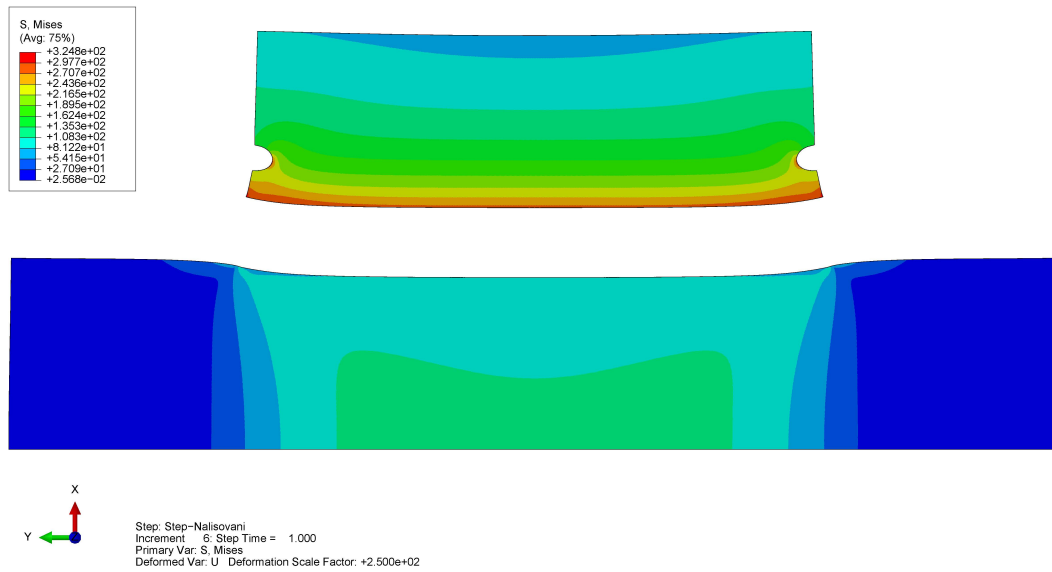
**Obrázek 49.** Spoj s čelními zápichy. Průběh kontaktního tlaku  $p$  po délce spoje pro různé hodnoty  $r$

Z výsledků je patrné, že velikost poloměru  $r$  také nemá podstatný vliv na rozložení tlaku od nalisování. Ovšem rozměry  $r$  a  $\gamma$  mají významný vliv na velikost koncentrace napětí v místě zápichu (vrubu), to je znázorněno na obr. 50.



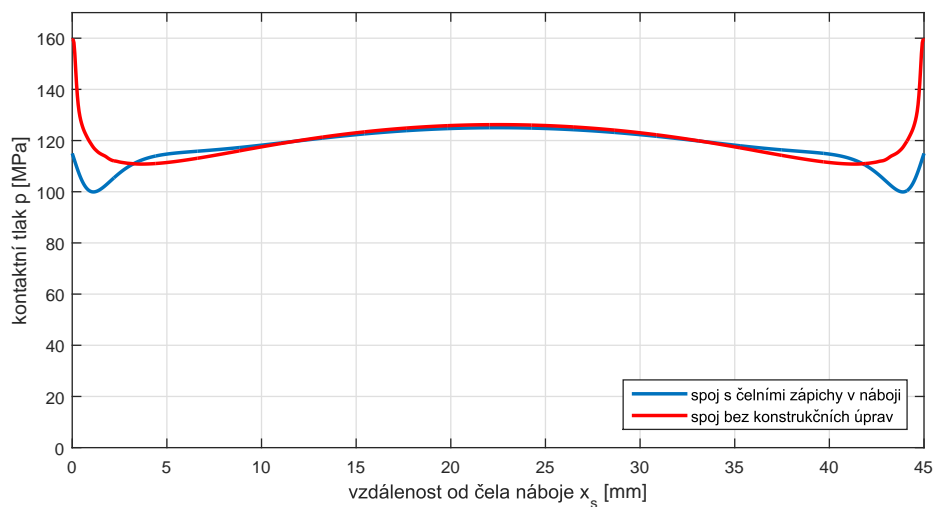
**Obrázek 50.** Detail spoje s čelními zápichy (náboj). Redukované napětí (HMH), deformace 50x zvětšena: a)  $r = 0,5$  mm a  $\gamma = 10^\circ$  - je patrný vrub, b)  $r = 1,5$  mm a  $\gamma = 30^\circ$  - vrub není

Vzhledem k výsledkům experimentu volím následující rozměry zápichu:  $a = 3,5$  mm,  $b = 4$  mm,  $r = 0,5$  mm a  $\gamma = 30^\circ$ . Na obr. 51 je znázorněno redukované HMH napětí v navrženém spoji po nalisování.



**Obrázek 51.** Navržený spoj s čelními zápichy. Znázornění tečného napětí, deformace 250x zvětšena

Průběh kontaktního tlaku v spoji s navrženými konstrukčními úpravami a porovnání se spojem bez úprav je na obr. 52.



**Obrázek 52.** Porovnání spoje s čelními zápichy se spojem bez úprav. Průběh kontaktního tlaku  $p$  po délce spoje

**Část III.**

**Závěr**



V této bakalářské práci byla provedena analýza nalisovaného spoje při zatížení osovými silami. Protože výpočtovým modelem nalisovaného spoje jsou tlustostěnné nádoby, byla podrobně rozebrána teorie tlustostěnných nádob. Byly odvozeny vztahy pro řešení napjatosti tlustostěnných nádob a jejich deformace po zatížení přetlakem. Dále podle druhu zatížení (vnitřním nebo vnějším přetlakem) byly stanoveny pevnostní podmínky. Na základě této teorie byl proveden rozbor nalisovaných nádob a následně nalisovaného spoje jako zvláštního případu takové nádoby. Pro nalisovaný spoj byly řešeny silové poměry ve spoji pro různé druhy zatížení.

V praktické části byl klasickým způsobem navržen nalisovaný spoj pro přenos osové síly  $F_a = 25000 \text{ N}$ . Navržené uložení náboje na hřídeli pro nalisování zastudena je:  $\varnothing 30 \text{ H6/t5}$ , pro nalisování zatepla:  $\varnothing 30 \text{ H6/s5}$ .

Dále praktická část pokračuje numerickými experimenty metodou konečných prvků v systému SIMULIA Abaqus. Bylo provedeno modelování navrženého spoje pro přesah  $\Delta d = 0,044 \text{ mm}$  a porovnání s výsledky analytického návrhu. Výsledky MKP ukazují vznik osového napětí ve spoji, které v klasickém výpočtu je bráno za nulové. Důvody vzniku tohoto napětí v náboji a hřídeli byly také uvedeny.

Potom pro znázornění příčiny vzniku špiček tlaku na okrajích spoje byl proveden experiment, který ukázal, že důvodem je místní zvětšení přesahu, vyvolané výstužným efektem volného hřídele v blízkosti čela náboje.

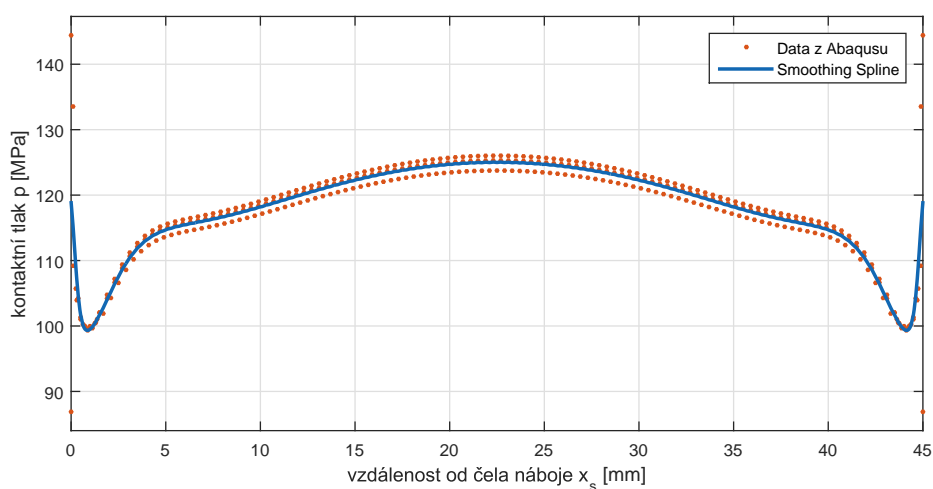
Dále byly provedeny experimenty konstrukčních úprav navrženého spoje. Při namáhání statickou osovou silou zvýšení tlaku je prospěšné, protože zvyšuje třecí odpor a tím i únosnost spoje. Při statickém zatížení koncentrace napětí nejsou nebezpečné, pochopitelně pokud nepřekročí dovolené napětí. Při tomto experimentu byla snaha v průběhu kontaktního tlaku vyvolat další špičky tlaku. Vytváření drážky v náboji způsobilo výstužný efekt volného hřídele a následně koncentraci tlaku, ovšem plocha pod drážkou pro třecí kontakt byla nevyužita. Výsledná únosnost spoje s takovou úpravou zůstala přibližně stejná, proto taková konstrukční úprava nemá praktický význam.

Při namáhání dynamickým zatížením koncentrace napětí jsou nežádoucí, proto je snaha špičky tlaku v průběhu kontaktního tlaku potlačit. Byly provedeny dva experimenty: vyrovnání délky nalisování s pozvolnými přechody a snížení radiální tuhosti náboje čelními zápichy. Na základě výsledků byly navrženy vhodné rozměry konstrukčních úprav pro nalisovaný spoj.

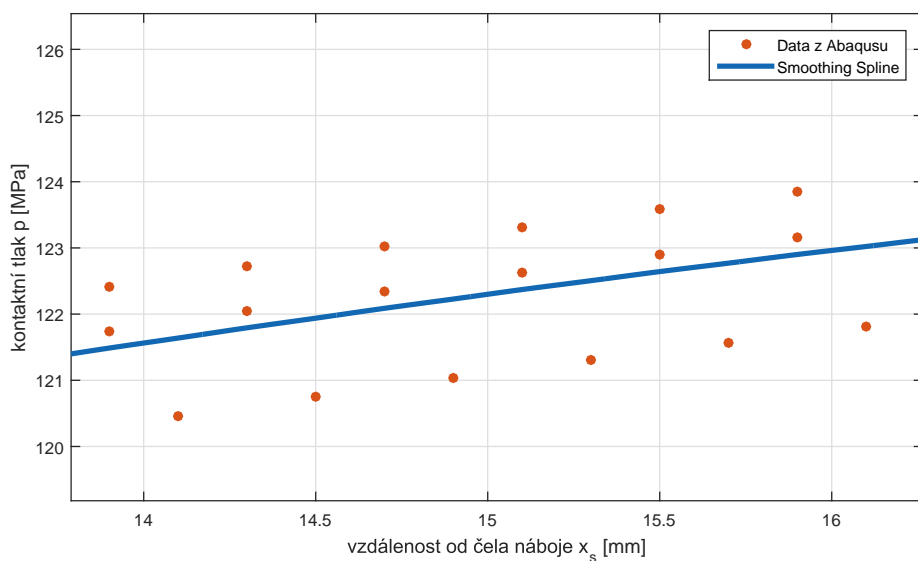
## Příloha A.

### Ukázka zpracování dat z Abaqusu

Pro zpracování dat z Abaqusu byl použit Curve Fitting Toolbox v MATLABu, kde byl proveden proklad křivky „Smoothing spline“ s vhodně zvoleným parametrem „p“. Znázornění je na obr. 53 a 54.



**Obrázek 53.** Zpracování dat v MATLABu. Průběh tlaku od nalisování po délce spoje.

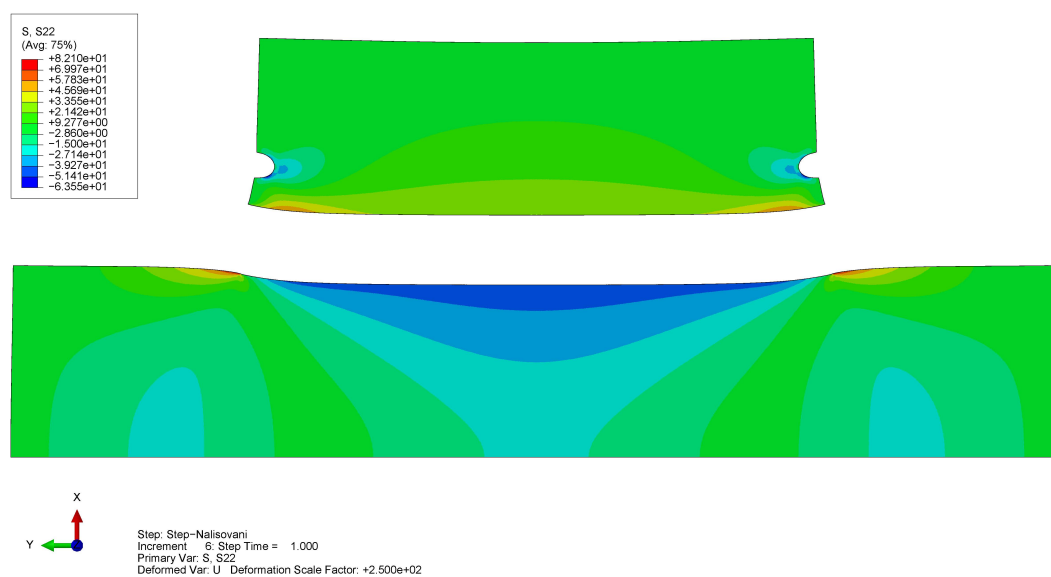


**Obrázek 54.** Zpracování dat v MATLABu. Detail

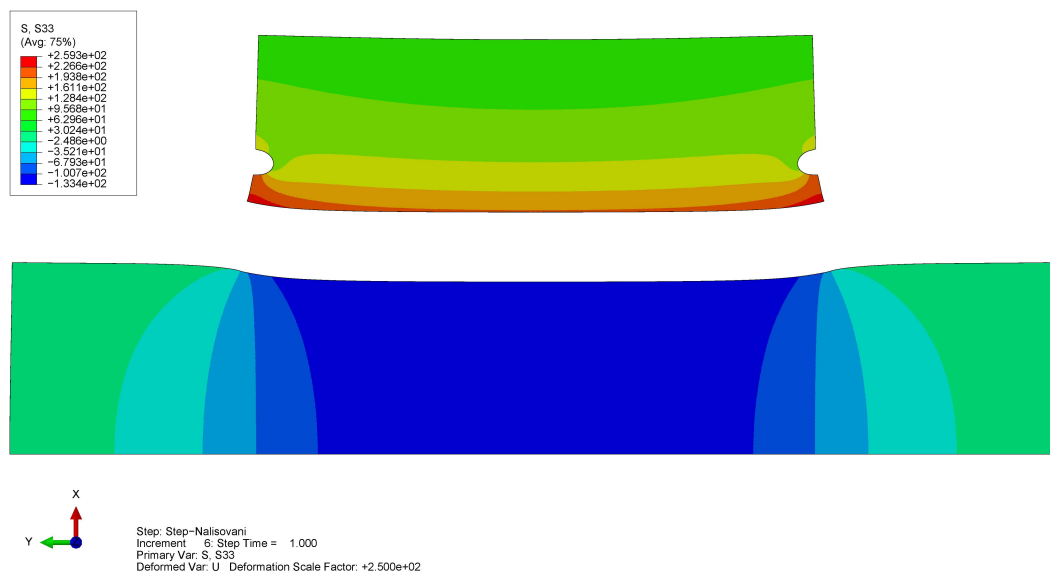
## Příloha B.

### Znázornění hlavních napětí v navrženém spoji s čelními zápichy

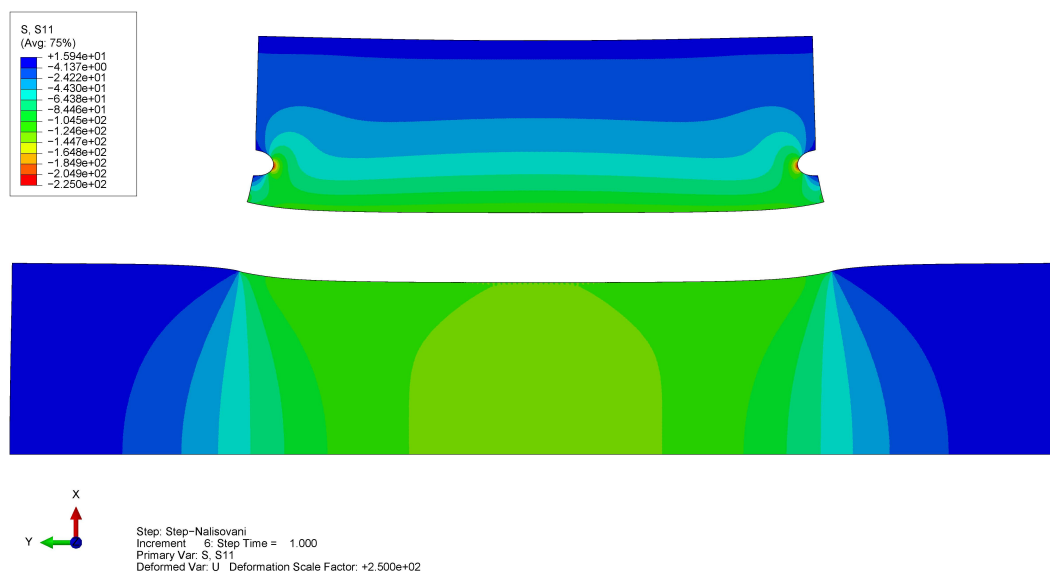
Na obr. 55, 56 a 57 je znázorněno rozložení všech hlavních napětí v navrženém spoji s čelními zápichy po nalisování.



**Obrázek 55.** Navržený nalisovaný spoj s čelními zápichy. Znázornění osového napětí, deformace 250x zvětšena.



**Obrázek 56.** Navržený nalisovaný spoj s čelními zápichy. Znázornění tečného napětí, deformace 250x zvětšena.



**Obrázek 57.** Navržený nalisovaný spoj s čelními zápichy.. Znázornění radiálního napětí, deformace 250x zvětšena.

## **Příloha C.**

### **Obsah přiloženého DVD**

- elektronická podoba práce
- zdrojové soubory Tex
- zdrojové soubory SIMULIA Abaqus
- zdrojové soubory MATLAB

## Literatura

- [1] Jiří Michalec a České vysoké učení technické v Praze. Strojní fakulta. *Pružnost a pevnost I*. 3. vyd. Praha: České vysoké učení technické, 2010. ISBN: 9788001042243; 8001042243;
- [2] Jiří Michalec. *Pružnost a pevnost II*. 1. vyd. Praha: ČVUT, 1994. ISBN: 9788001010877; 8001010872;
- [3] Anatolij V. Darkov a G. S. Špiro. *Soprotivlenije materialov*. 4. pererab. izd. Moskva: Vysšaja škola, 1975.
- [4] Alfred Bolek a Josef Kochman. *Části strojů*. 5. přeprac. vyd. Sv. roč. 1990. Č. spisu 432. Praha: Nakladatelství technické literatury, 1990. ISBN: 8003004268; 9788003004263;
- [5] Vladimír Švec. *Části a mechanismy strojů: spoje a části spojovací*. 1. vyd. Praha: České vysoké učení technické, 1997. ISBN: 9788001017012;800101701X;
- [6] D. N. Rešetov. *Detali mašin*. 3. isprav. i pererabot. izd. Moskva: Mašinostrojenije, 1974.
- [7] *TeXample.net*. 2013. URL: <http://www.texample.net/> (cit. 05.04.2012).
- [8] Philipp Lehman. *BibL<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X*. 2012. URL: <http://ftp.cstug.cz/pub/tex/CTAN/help/Catalogue/entries/biblatex.html> (cit. 13.12.2012).
- [9] Keith Reckdahl. *Using Imported Graphics in L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X and pdfL<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X*. Led. 2006. URL: <http://mirrors.ctan.org/info/epslatex/english/epslatex.pdf>.
- [10] Perníček Jan. “Analýza mechanických vlastností nalisovaného spoje s ohledem na přenos krouticího momentu”. Bakalářská práce. České vysoké učení technické v Praze, červ. 2012.