

České vysoké učení technické v Praze  
Fakulta elektrotechnická

# Disertační práce

*květen, 2017*

*Ing. Radko Kříž*

České vysoké učení technické v Praze  
Fakulta elektrotechnická  
Katedra ekonomiky, manažerství a humanitních věd

***TEORIE CHAOSU JAKO VÝCHODISKO  
PRO ANALÝZU EKONOMICKÝCH  
DYNAMICKÝCH SYSTÉMŮ***

**Disertační práce**

***Ing. Radko Kříž***

*Praha, květen, 2017*

Doktorský studijní program: Elektrotechnika a informatika  
Studijní obor: *Řízení a ekonomika podniku*

**Školitel:** *Doc. Ing. Fialova Helena, CSc.*

### **Čestné prohlášení**

Prohlašuji, že jsem autorem disertační práce "Teorie chaosu jako východisko pro analýzu ekonomických dynamických systémů" s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce. Jako autor uvedené disertační práce dále prohlašuji, že jsem v souvislosti s jejím vytvořením neporušil autorská práva třetích osob.

V Praze dne 30.5.2017

---

### **Poděkování**

Rád bych touto cestou poděkoval paní doc. Ing. Heleně Fialové, CSc. za vedení při zpracování této disertační práce a kolegovi Ing. Pavlu Šedkovi za obstarání dat PHELIX. Dále mé ženě a celé rodině za podporu při výzkumu a psaní této práce. Zvláštní poděkování patří PaedDr. Zdeně Rohanové za jazykovou korekturu.

V Praze dne 30 .5. 2017

---

# Teorie chaosu jako východisko pro analýzu ekonomických dynamických systémů

## Abstrakt

Disertační práce je zaměřena na analýzu ekonomických dynamických systémů z hlediska teorie chaosu a vypracování metodiky detekce deterministického chaosu. Úvod je věnován fundamentálním otázkám filozofického charakteru související s teorií chaosu, především pak otázce determinizmu. Dále se věnuje samotné teorii chaosu a jeho vlivu na vědecký výzkum. Deterministický chaos je typ komplexního chování vyskytující se v deterministickém systému. Jedná se tedy o systém striktně deterministický bez jakékoliv náhody. Dlouhodobá předpověď je tedy z hlediska teorie chaosu nemožná. Následují úvahy o využití teorie chaosu v ekonomii, které jsou dokresleny Gabischovým a Kaldorovým modelem.

Významná část práce se v teoretické i praktické rovině věnuje detekci chaosu v ekonomických časových řadách. Byly použity jak klasické deskriptory, tak i nejnovější metody mnohdy prvně aplikovány na ekonomické časové řady. Mezi klasické deskriptory řadíme míru vzájemné informace, největší Ljapunovův exponent, fraktální dimenze, entropie, Hurstův exponent. Dále byla aplikována poměrně nová metoda 0-1 test pro detekci chaotického chování.

Ověření metodiky je provedeno na dvou časových řadách (finanční a makroekonomické). Jako příklad finanční časové řady byla zvolena časová řada spotových cen elektrické energie PHELIX. Jako příklad časové řady makroekonomických ukazatelů bylo zvolené čtvrtletní tempo růstu HDP v USA. Byl proveden odhad základních chaotických deskriptorů těchto časových řad. U HDP je nutné brát v úvahu nedostatečné množství dat pro kvalifikovanou analýzu. Pokud je Ljapunovův exponent kladný, korelační dimenze nabývá nízkých neceločíselných hodnot a Kolmogorova entropie je kladné konečné číslo, potom je daný systém pravděpodobně chaotický. Z vypočtených hodnot je možné učinit závěr, že u časové řady spotových cen elektrické energie je chaos přítomen. To bylo potvrzeno výsledkem 0-1 testu. Dále byl spočítán Hurstův exponent, který u chaotické časové řady identifikuje dlouhodobý paměťový cyklus.

**Klíčová slova:** teorie chaosu, analýza časových řad, rekonstrukce fázového prostoru, Hurstův koeficient, fraktální dimenze, rekurentní analýza, ekonomie

# The Chaos Theory as the Basis for Analysis of Dynamical Systems in Economics

## **Abstract**

This doctoral thesis is focused on the analysis of dynamical systems in economics from the point of view of the chaos theory. The introduction is devoted to issues of fundamental philosophical nature related to the chaos theory, especially the question of determinism. Subsequently it concentrates on the chaos theory its impact on scientific research. Chaos is a type of complex behavior occurring in deterministic systems. So it is a strictly deterministic system without any random influence. A long-term forecast is therefore impossible from the point of view of the chaos theory. The following considerations are about the chaos theory in economics and are illustrated by the Gabisch and Kaldor models.

A significant part of this thesis is about detecting chaos in economic time series theoretically and practically. Classical methods as well as the latest methods, often applied for the first time to economic time series, were used. Among traditional descriptors belong mutual information, the largest Lyapunov exponent, fractal dimension, entropy and the Hurst exponent. A fairly new method called the 0-1 chaos test was applied to detect chaotic behavior.

An actual empirical analysis was conducted in two time series (financial and macroeconomic). Phelix spot electricity prices were chosen as an example of financial time series. The quarterly GDP growth rate in the USA was selected as an example of macroeconomic time series. An estimate of the basic chaotic descriptors of these time series was made. The lack of data for must be taken into account when analyzing the GDP. If the Lyapunov exponent is positive, the correlation dimension will take on low and non-integer values and the Kolmogorov entropy is a positive final number, it can be assumed that the system is likely to be chaotic. This was proven by the 0-1 chaos test. From these calculated values, it can be concluded that chaos is present in the spot electricity prices time series. The Hurst exponent was then calculated which identifies a long-term memory in chaotic time series.

**Keywords:** Chaos Theory, Time Series Analysis, Phase Space Reconstruction, Hurst Exponent, Fractal Dimension, Recurrence Analysis, Economy

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod.....</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>Zaměření práce.....</b>	<b>16</b>
2.1	Motivace .....	16
2.2	Cíle práce .....	16
2.3	Definice hypotéz .....	16
<b>3</b>	<b>Teorie chaosu .....</b>	<b>17</b>
3.1	Historie .....	17
3.2	Dynamický systém.....	20
3.3	Deterministický chaos .....	23
3.4	Fraktály .....	24
3.5	Logistická rovnice .....	31
3.6	Lorenzův model.....	33
3.7	Perspektivy teorie chaosu .....	37
<b>4</b>	<b>Teorie chaosu v ekonomii .....</b>	<b>38</b>
4.1	Chaos v ekonomických časových řadách .....	39
4.2	Chaos v makroekonomii .....	40
4.2.1	Gabishův model .....	41
4.2.2	Kaldorův model .....	44
<b>5</b>	<b>Metodika detekce deterministického chaosu .....</b>	<b>47</b>
5.1	Úprava časových řad.....	47
5.1.1	Míry dynamiky .....	48
5.2	Klasická analýza časových řad .....	49
5.2.1	Dekompozice časové řady .....	49
5.2.2	Box-Jenkinsova metodologie.....	50
5.2.3	Spektrální analýza časových řad.....	52
5.3	Rekonstrukce fázového prostoru .....	53
5.3.1	Optimální hodnota časového zpoždění .....	54
5.3.2	Optimální dimenze vnoření .....	55
5.4	Ljapunovovy exponenty.....	58
5.5	Fraktální dimenze .....	60
5.5.1	Korelační dimenze .....	60
5.5.2	Higuchiho dimenze .....	61
5.6	Entropie.....	62
5.7	Hurstův exponent.....	64
5.7.1	R/S analýza .....	65
5.7.2	DFA .....	67

5.7.3	GPH .....	68
5.7.4	AWC .....	69
<b>5.8</b>	<b>Test 0-1 .....</b>	<b>70</b>
<b>5.9</b>	<b>Aplikace fraktální Fourierovy transformace.....</b>	<b>72</b>
<b>5.10</b>	<b>Rekurentní analýza .....</b>	<b>73</b>
<b>5.11</b>	<b>Predikce.....</b>	<b>77</b>
<b>5.12</b>	<b>Shrnutí.....</b>	<b>80</b>
<b>6</b>	<b>Trh elektrické energie.....</b>	<b>83</b>
<b>6.1</b>	<b>Úvod.....</b>	<b>83</b>
<b>6.2</b>	<b>Analyzovaná data .....</b>	<b>85</b>
<b>6.3</b>	<b>Empirická analýza PHELIX.....</b>	<b>87</b>
6.3.1	Klasická analýza .....	87
6.3.2	Rekonstrukce fázového prostoru PHELIX .....	88
6.3.3	Maximální Ljapunovův exponent PHELIX.....	90
6.3.4	Fraktální dimenze PHELIX .....	91
6.3.5	Entropie PHELIX .....	93
6.3.6	Hurstův exponent PHELIX.....	93
6.3.7	Test 0-1 PHELIX .....	96
6.3.8	Rekurentní analýza PHELIX .....	99
<b>6.4</b>	<b>Shrnutí výsledků analýzy .....</b>	<b>100</b>
<b>7</b>	<b>Hrubý domácí produkt.....</b>	<b>101</b>
<b>7.1</b>	<b>Úvod.....</b>	<b>101</b>
<b>7.2</b>	<b>Analyzovaná data HDP.....</b>	<b>102</b>
<b>7.3</b>	<b>Empirická analýza HDP .....</b>	<b>103</b>
7.3.1	Rekonstrukce fázového prostoru HDP .....	104
7.3.2	Maximální Ljapunovův exponent HDP .....	105
7.3.3	Fraktální dimenze HDP .....	106
7.3.4	Entropie HDP.....	107
7.3.5	Hurstův exponent HDP .....	108
7.3.6	Test 0-1 HDP .....	111
7.3.7	Rekurentní analýza HDP .....	113
<b>7.4</b>	<b>Shrnutí výsledků analýzy .....</b>	<b>115</b>
<b>8</b>	<b>Závěr a diskuse.....</b>	<b>116</b>
<b>8.1</b>	<b>Metodika detekce deterministického chaosu .....</b>	<b>117</b>
<b>8.2</b>	<b>Vyhodnocení stanovených hypotéz.....</b>	<b>120</b>
<b>8.3</b>	<b>Naplnění cílů práce .....</b>	<b>121</b>
<b>8.4</b>	<b>Přínosy a praktické využití práce .....</b>	<b>123</b>
<b>8.5</b>	<b>Náměty pro další práci.....</b>	<b>124</b>
<b>9</b>	<b>Publikační činnost .....</b>	<b>125</b>



<b>9.1</b>	<b>Seznam vědeckých publikací souvisejících s tématem disertace .....</b>	<b>125</b>
9.1.1	Články v časopisech indexovaných v databázi Scopus nebo WoS .....	125
9.1.2	Ostatní publikace indexované v databázi Scopus nebo WoS .....	125
9.1.3	Ostatní související publikace .....	126
<b>9.2</b>	<b>Seznam vědeckých publikací nesouvisejících s tématem disertace .....</b>	<b>127</b>
9.2.1	Články v časopisech indexovaných v databázi Scopus nebo WoS .....	127
9.2.2	Ostatní publikace .....	127
<b>9.3</b>	<b>Citace .....</b>	<b>128</b>
9.3.1	Google Scholar .....	128
9.3.2	Scopus .....	128
<b>10</b>	<b>Literatura .....</b>	<b>129</b>



# 1 Úvod

Lidstvo již od pradávna trápila otázka, zda jsou procesy v reálném světě deterministické podstaty či nikoliv. Determinizmus lze chápat různě, například z pohledu filozofie, biologie, ekonomiky, genetiky, kultury, psychologie, teologie, lingvistiky, fyziky a matematiky. Většinou je determinizmus chápán tak, že všechny události nebo stavy jsou důsledkem předchozích událostí a stavů. Asi jedni z prvních kdo se determinizmem uceleně zabývali, byli řečtí atomisté. Podle atomistů jsou všechny atomy řízeny nějakým principem, který Řekové nazývali ananké (nutnost či osud). Pohyb atomů je tedy podle atomistů přesně předurčen. Pokud je přijat předpoklad, že se vše děje nutně, pak při aplikaci na člověka dochází k naprostému potlačení svobodné vůle. Tento paradox se začal řešit již od jeho samotného vzniku a řeší se dodnes. Bergson (1910) ve svých úvahách o čase razantně odmítl aplikaci determinizmu na člověka.

Jestliže určité příčině odpovídá vždy stejný následek, jedná se o determinizmus. Pokud nikoliv, jedná se o stochastický proces. Jsou procesy v reálném světě deterministické nebo stochastické? Tato otázka má stejnou povahu jako otázka: "Je světlo částice nebo vlna?" Již od starověku existuje mnoho protichůdných teorií (viz. Aristoteles x Demokritos) a vrcholí v 17. století, kdy byly navrženy dvě ucelené protichůdné teorie světla. Newton (1704) uváděl, že světlo je složeno z částic hmoty. Huygens (1690) formuloval vlnovou teorii světla. Následně Maxwell (1881) pohřbil korpuskulární teorii světla čtyřmi jednoduchými rovnicemi, které obsahovaly vše o elektřině a magnetizmu. Konečnou odpověď nám dala až kvantová mechanika, zvláště de Brogliho (1923) hypotéza. Světlo se chová současně jako vlna i jako částice a mluví se o vlnově částicovém dualismu. Vlnový charakter převládá u záření s delší vlnovou délkou, korpuskulární neboli částicový charakter převládá u záření s kratší vlnovou délkou.

Zpět na hlavní otázku o přírodě v reálném světě z hlediska determinizmu. Odpovědi jsou zkoumány teology, filozofy a dalšími vědci z různých oborů. Odpověď na tuto otázku není jednoznačná. Oba deterministické a stochastické přístupy mají významné místo v historii vědy i v současnosti. Je zde vidět jistá paralela s předchozí otázkou o podstatě světla. Jak již bylo zmíněno, první deterministické teorie byly vypracovány ve starověku. Na přelomu 17. a 18. století proběhla revoluce ve vědeckém myšlení, která vyvrcholila monumentálním dílem „Matematické principy přírodní filozofie“ (Newton, 1687). Sám Newton (1687) své zákony formuloval jako diferenciální matematické rovnice. Pro rovnice tohoto typu je možné dokázat, že za daných, tzv. počátečních podmínek, existuje právě jediné řešení. Pokud je

známa poloha a rychlost všech částic, které systém vytvářejí, je teoreticky možné s libovolnou přesností vypočítat stav systému i kdykoli v budoucnosti či v minulosti. Toto si uvědomil Laplace (1902), který na Newtona navázal a vyjádřil deterministickou ideu: Kdyby existoval mohutný intelekt, který by v určitém časovém okamžiku znal všechny síly, které hýbou světem, vzájemné polohy všech bytostí, ze kterých je svět složen, byl by schopen tato data zanalyzovat, mohl by všechny pohyby soustředit do jednoho vzorce a veškerou budoucnost i minulost by měl před očima (Laplace, 1902). Tento hypotetický intelekt se nazývá Laplaceův démon, který není technicky ani duševně omezen. Laplaceova představa vesmíru jako "hodinového stroje" vychází z důsledků řešení Cauchyho úlohy. Následovalo triumfální tažení determinizmu v souladu s vědeckými teoriemi a pozorováními. Ve skutečnosti klasický determinismus čelí nepřekonatelným limitům i v rámci samotné klasické mechaniky. Dokázat, že řešení existuje a umět je efektivně nalézt, jsou však dvě odlišné věci. Analytické řešení přichází v úvahu jen výjimečně, především u rovnic lineárních. Reálný svět je ale nelineární a tudíž jsme většinou odkázáni pouze na řešení přibližná. Za prvé pro přesnou predikci budoucnosti je zapotřebí stanovit přesné počáteční podmínky, ale to je nemožné. Druhé omezení spočívá v obtížnosti matematických řešení klasických pohybových rovnic. Citlivost na počáteční podmínky činí chování systému dlouhodobě nepředvídatelným. Dále bylo mlčky předpokládáno, že Laplaceův démon stojí mimo pozorovaný systém. Pokud by byl zahrnut v systému, nastává problém zpětné vazby, neboť by měl předvídat i chování sama sebe, i své budoucí predikce, což je problematické.

Laplaceova démona a tím i klasický determinismus nakonec pohřbila kvantová mechanika. Kvantová mechanika přinesla neodstranitelné pravděpodobnosti možných výsledků měření. Jaký výsledek měření bude pozorován (za co nejuplněji vymezených podmínek) lze popsat jen pravděpodobnostně, nikoli jednoznačně deterministicky. Heisenberg (1927) ukázal, že není možné současně určit polohu a hybnost vlnové funkce s neomezenou přesností.

Je tedy náš svět indeterministický a zmítán náhodou? Asi ne úplně, vždyť celá řada zákonů je čistě deterministická v souladu s pozorováním. Jak interpretovat výsledky kvantové fyziky, které jsou k dispozici pouze v pravděpodobnostní statistické formě? Ukazuje se tedy, že klasická deterministická představa funguje jen v nejjednodušších idealizovaných případech. V jiných reálnějších případech je možné klasický determinismus chápat principiálně, nikoli v prakticky. V reálných systémech, řídících se navíc nejen zákony klasické, ale i kvantové mechaniky, i sebemenší nejistota určení stavu v daném časovém okamžiku zpravidla vede k naprosté ztrátě možnosti přesně stanovit jeho stav i po poměrně

krátkém časovém období. Malé rozdíly v počátečních podmínkách mohou vyvolat velké změny ve výsledných jevech. Jinak řečeno, téměř totožné stavy přítomnosti se mohou vyvíjet k velmi odlišným budoucnostem - jakákoli předpověď se stává nemožnou, jev se efektivně stává náhodným; mluvíme o chaotickém chování systému (Ullmann, 1986). Janeček et al. (2006) poukazuje na zobecněný determinizmus, kdy zadaný počáteční stav umožňuje určit jednoznačně stav v budoucnosti. Přitom však blíže není specifikována míra informace, která je v zadání stavu obsažena. Zobecněná deterministická teorie musí potom splňovat následující dvě podmínky. Je definována procedura, jejíž pomocí můžeme jednoznačně definovat stav studovaného systému a je formulována pohybová rovnice, která umožňuje k zadanému počátečnímu stavu určit jednoznačně stavy budoucí. V rámci klasických požadavků, které jsou však, dokonce i klasickou fyzikou nesplnitelné, jistě kvantová mechanika indeterministická je. V rámci zobecněného determinizmu se však jedná o dokonalou deterministickou teorii.

Při zkoumání jakéhokoliv reálného systému vyvstává otázka, do jaké míry dojde ke zjednodušení zkoumaného modelu odpovídajícího reálnému systému. Descartův (1637) redukcionizmus, který pomohl k význačným objevům vědy, je založen na rozkladu reality na jednoduché součásti a zanedbává všechno, co se takovému rozložení přičí. Jakmile se rozklad na jednoduché složky podaří, lze mezi nimi najít i kauzální vztahy, jež se dají vyjádřit matematicky a s jejich pomocí s jistotou předvídat. Vždyť Lorenz (1963) by nikdy neobjevil teorii chaosu, pokud by drasticky nezredukoval Saltzmanovy rovnice. Na druhé straně je evidentní, že v reálném životě znamená celek víc než souhrn jeho částí. Reálné systémy jsou komplexní systémy, které jsou složeny ze vzájemně propojených částí, které jako celek vykazují vlastnosti, jež nejsou jasně viditelné z vlastností jednotlivých částí. Příkladem mohou být Navier-Stokesovy rovnice popisující proudění spojité kapaliny. Vědci, zabývající se jejím numerickým řešením, zvažují dilema měřítka. Pokud, ale nastaví hrubé měřítko, pak budou zanedbány důležité detaily. Pokud nastaví přílišný detail, bude to znamenat enormní nárůst výpočetního výkonu. Jedná se sice o technicky řešitelný problém, ale pro stavy turbulence je pro současné počítače nezvládnutelný. Feigenbaum (1983) nevysvětlil turbulenci důkladným studiem Navier-Stokesových rovnic, ale zkoumáním umělé zdánlivě nesouvisející rovnice – logistické rovnice. Typickým rysem komplexních systémů je nelinearita, dynamika, emergence, rozmanitost a existence zpětných vazeb. Komplexita je studium chování makroskopických souborů takových jednotek, které jsou nadány schopností vyvíjet se v čase (Coveney et Highfield, 1995).

Boltzman (1974) pomocí entropie propojil chápání mikrosvětů s makrosvětem a ukázal, že 2. věta termodynamiky je vlastně statistickým zákonem. Vesmír je komplexní, ale příroda se zpravidla řídí jednoduchými zákony.

Ve stručnosti je vhodné se zamyslet ještě nad jednou otázkou, zda svět (časoprostor) kolem nás je spojitý nebo diskrétní. Nejdříve se tato otázka týkala především prostoru. Asi první ucelený filozofický pohled přichází opět od atomistů, kteří se zabývali otázkou nekonečné dělitelnosti látky a vztahem jsoucna a nejsoucna. Následně byly tyto teorie potlačeny jinými, ale byly vzkříšeny až s nástupem renesance v 16. a 17. století a dále rozvíjeny. Podle Ullmanna (1986) je fyzikální vztah mezi spojitou (kontinuální) a diskrétní povahou mikrosvětů v zásadě dvojitý: Diskrétnost je základní, která sekundárně generuje spojitost (zdánlivou), anebo je spojitost základní, která sekundárně generuje diskrétnost (opět jen zdánlivou). V případě standardního diskrétního přístupu jsou veškeré látky složeny z diskrétních atomů, které mají konkrétní celočíselný počet protonů v jádře a elektronů v obalu, zaujímají diskrétní energetické hladiny (Bohr, 1913). V souborech velkých počtů atomů a molekul pak metody statistické fyziky umožňují odvodit zákony kinetiky plynů a termodynamiky, které jsou spojitě. Avšak základními vstupními hodnotami jsou diskrétní celá čísla. Spojitost se zde zdánlivě vynořuje zprůměrováním velkého množství diskrétních dějů. Na druhé straně spojitý přístup vychází z korpuskulárně-vlnové představy. Vlnové rovnice kvantové fyziky obsahují jen spojitě veličiny. Názorným příkladem této koncepce je Broglieho vlnové vysvětlení Bohrových kvantových drah elektronů kolem jádra atomu, kde diskrétnost drah elektronů je formována kontinuitou vlnových funkcí elektronů. Ve standardním modelu částic jsou výchozími stavebními kameny hmoty diskrétní částice - leptony a kvarky. Avšak podle unitární teorie pole (Ullmann, 1986) je základním stavebním médiem pole, spojitá fluidní substance rozprostřená v prostoru. Z pohledu unitární teorie pole jsou elementární částice pouze jakýmsi zhuštěninami unitárního pole. Z této teorie plyne, že příroda je opravdové kontinuum, v němž na žádné úrovni zvětšení nenalezneme žádné již dále nedělitelné stavební prvky. Fyzikální veličiny obecně nejsou celá čísla, ale spojitá čísla reálná, u nichž se s postupným zpřesňováním měření stále zvyšuje počet míst za desetinnou čárkou. Tento pohled je vcelku zásadní pro reálnou aplikaci teorie chaosu. Otázka, týkající se spojitosti či diskrétnosti času, se vyvíjela nezávisle. Klasicky byl čas většinou typickou spojitou veličinou, kterou plynul nezávisle na prostoru. Je nutné zdůraznit, že řešení stejného problému v případě diskrétního a spojitého času mohou být naprosto odlišná viz. logistická rovnice. Z pohledu moderních fyzikálních teorií není možné čas vymezovat, ale je nutné chápat časoprostor obecně. Tak, jak moderní fyzika došla k poznání o diskrétní kvantové

strukturu hmoty, nabízí se hypotéza, že i časoprostor je kvantován. Možná se zdá, že tyto úvahy jsou vzdálené každodenní realitě, ale možná tyto fundamentální otázky jsou klíčem k dalšímu vědeckému poznání.

Pochopit podstatu a nalézt univerzální rovnici světa je pořád nad naše síly, ale i kdybychom přes všechny naznačené obtíže toho dosáhli, nemohli bychom ji pravděpodobně vyřešit s rozumnou přesností a učinit tak relevantní dlouhodobou předpověď. Mnohdy nám nezbyvá nic jiného, než se pokusit popsat realitu pouze na základě několika málo nekvalitních dat. Je tedy ospravedlnitelné použít všechny známé teorie, nebo budovat vlastní pro popis reality a tvoření její předpovědi. Mocným nástrojem pro vytušení skrytých závislostí je analýza časových řad. Analýza časových řad je rozsáhlou kategorií, zahrnující klasické lineární metody, ale i nelineární techniky. Klasické statistické lineární metody jsou založeny na počtu pravděpodobnosti a náhodných veličinách. Zde je dobré si ujasnit co je to vlastně náhoda a vůbec jak si někdo může být jist, že je něco náhodné? Čistě náhodný proces je pouze matematická fikce. Klasické statistické lineární metody dobře fungují v „klidných lineárních oblastech“, ale nejsou schopny předpovědět, nebo namodelovat náhlé změny v časových řadách, se kterými je možné se v reálných systémech setkat. Z těchto důvodů byly vyvinuty nelineární metody analýzy časových řad využitelné také v ekonomii např. Abarbanel et al. (1993), Farmer et Sidorowich (1987), Fraser et Swinney (1986), Hegger et al. (1999), Henry et al. (2001), Kantz et Schreiber (2004), Kennel et al. (1992), Packard et al. (1980), Schreiber (1999) etc. Tato práce se zabývá mimo jiné nelineárními technikami analýzy časových řad, konkrétně metodami založenými na teorii chaosu.

Teorie chaosu nám říká, že pokud je systém chaotický, je možné učinit krátkodobé předpovědi. To je pozitivní zpráva, která sděluje, že předpovědi nejsou zcela vydány na pospas náhodě. Přístupy, založené na teorii chaosu vycházejí z předpokladu, že pokud je známý systém a jeho počáteční podmínky, je možné předvídat budoucí stav tohoto systému. Z podstaty plyne, že úspěšná dlouhodobá předpověď není možná. Fenoménu této teorie je věnována samostatná kapitola „Teorie chaosu“. Moderní pojetí této teorie bylo poprvé pozorováno a následně použito pro modelování v meteorologii (Lorenz, 1963), kterou zásadně ovlivnila. Teorie chaosu zasáhla do myšlení ve všech vědách.

## **2 Zaměření práce**

### **2.1 Motivace**

Teorie chaosu způsobila změnu uvažování vědců a myslitelů v mnoha vědeckých disciplínách. Pomocí teorie chaosu je možné vysvětlit celou řadu problémů, na které nelze aplikovat tradiční pohled vědy. Teorie v exaktních vědách vycházející z chaosu zaznamenaly mnoho úspěchů, situace v ekonomii je mnohem složitější, neboť předmětem jejich zkoumání jsou tvorové nejnevypočitatelnější. Chaos je generován mnohými ekonomickými modely, ale důkaz existence deterministického chaosu z reálných ekonomických dat je mnohem složitější. Tato práce se zabývá metodami detekce deterministického chaosu a jejich vhodnostmi v reálných ekonomických systémech. Pokud se prokáže existence deterministického chaosu, můžeme činit krátkodobou předpověď.

### **2.2 Cíle práce**

Práce si klade následující cíle:

1. Vypracovat metodiku detekce deterministického chaosu v ekonomických časových řadách
2. Prokázat kvantifikovatelné chaotické projevy ve spotových cenách elektrické energie PHELIX.
3. Prokázat dlouhodobou paměť u časové řady spotových cen elektrické energie PHELIX.
4. Demonstrace aplikace metodiky detekce deterministického chaosu na tempu růstu HDP v USA.

### **2.3 Definice hypotéz**

Cíle práce vycházejí z následujících hypotéz:

1. Časová řada spotových cen elektrické energie PHELIX má kvantifikovatelný chaotický projev.
2. Časová řada spotových cen elektrické energie PHELIX je perzistentní.



## 3 Teorie chaosu

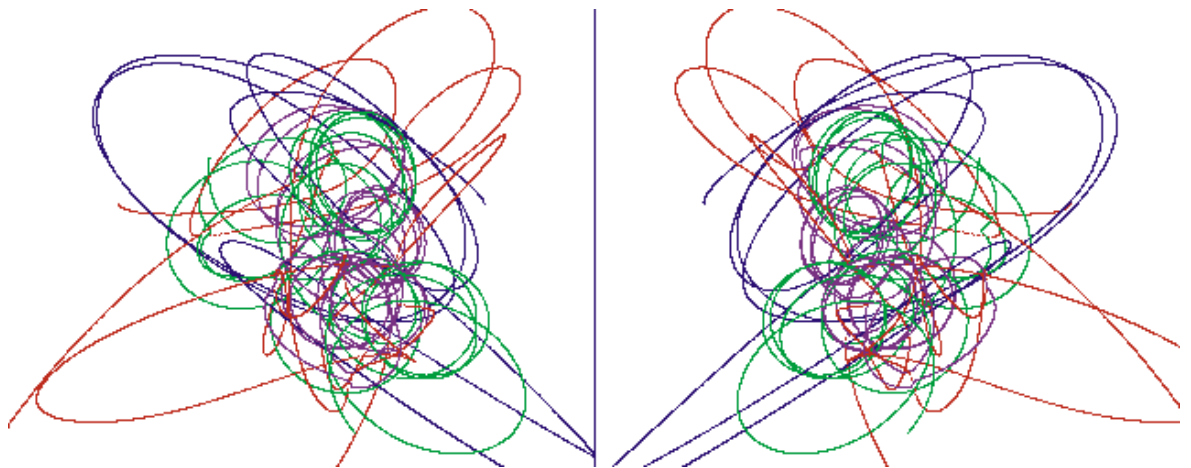
### 3.1 Historie

Slovo chaos může být chápáno různě. Původně pochází z řecké mytologie a v kosmogonii znamená počátek všehomíra. Chaos (χάος) zde představoval primordinální božstvo, který své následovníky zplodil sám se sebou. Nejdříve vznikla temná noc Nyx a podsvětí Erebos na jedné straně a Země na straně druhé (Vítek et al., 2010). Poprvé slovo chaos použil řecký básník Hésiodos ve svém díle „O původu bohů“ (Theogoniá) v 7 st. př. n. l. Pojem chaos se vyskytuje v různých starověkých kulturách, u kterých tento pojem měl odlišnou tvářnost a odlišný obsah. V běžném slova smyslu v současné době je chaos intuitivně chápán jako zmatek, opak pořádku. V této práci se zásadně hovoří o deterministickém chaosu. Toto sousloví může znít jako oxymóron, neboť determinismus je spojený s řádem a chaos zní jako zmatek. Právě tento zdánlivý protimluv vystihuje podstatu teorie chaosu. Deterministický chaos je takové chování, které vypadá náhodně, ale má deterministickou povahu.

Již někteří starověcí myslitelé chápali chaos alespoň trochu ve smyslu deterministického chaosu. Jedním z nich byl i řecký filozof Anaxagorás v 5 st. př. n. l., který identifikoval soběpodobnost ve vesmíru a uvažoval o chaosu jako o informačním kanálu. Čínský mistr Zhuang Zhou ve 4 st. př. n. l. pojednával o chaosu a správně popsal jeho komplexní podstatu (Hansen, 2015). Další řecký filozof Epikúros ze Samu poukázal na nestabilitu orbitů, z kterých plyne citlivost na počáteční podmínky (Kaneko, et al., 2001).

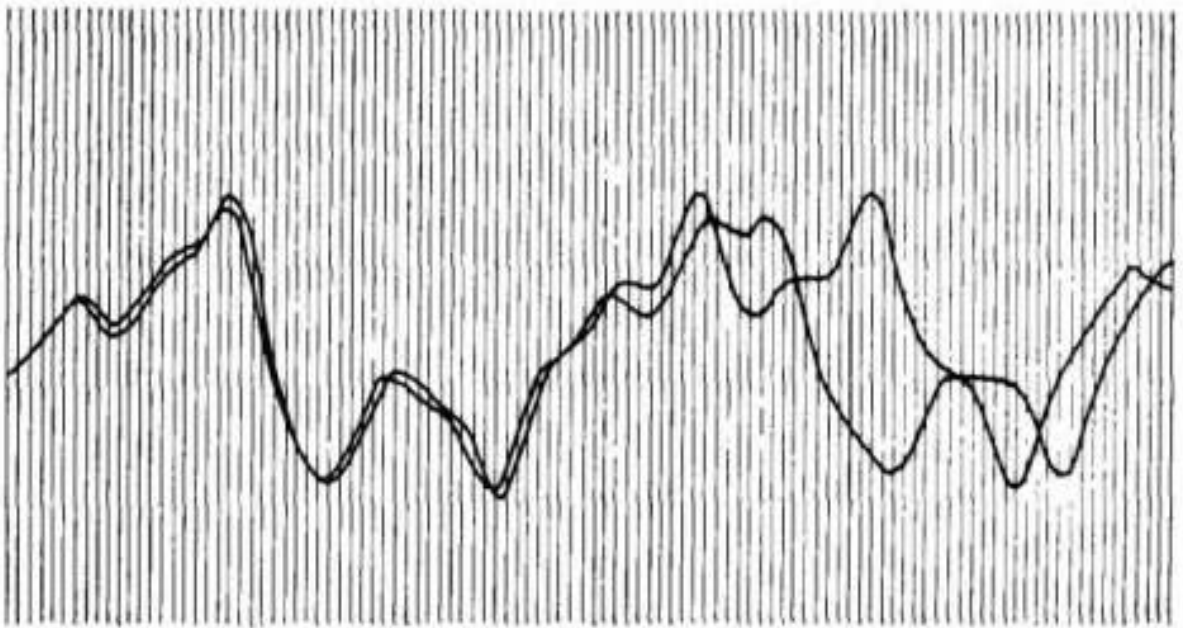
Z moderních klasických vědců se nejbliže přiblížil teorii chaosu H. Poincaré. Poincaré (1890) při studiu problému tří těles dokázal, že v určité malé oblasti fázového prostoru existují trajektorie systému, které projdou touto malou oblastí nekonečněkrát často (Obr. 3.1). Poincaré (1890) ve své knize poznamenal: „Velice drobná příčina, která uniká naší pozornosti. Kdybychom přesně znali přírodní zákony a stav vesmíru v počátečním okamžiku, dokázali bychom přesně odpovédět, v jakém stavu se bude vesmír nacházet v následujícím okamžiku. Ale i kdyby pro nás přírodní zákony už nepředstavovaly žádné tajemství, stále bychom znali situaci jen přibližně. Kdybychom měli možnost se stejnou přesností předpovědět následující situaci, dosáhli bychom toho, co požadujeme a mohli bychom říci, že jsme daný jev předpověděli a že se řídí danými zákony. Ale tak tomu vždycky není; může se stát, že nepatrný rozdíl v počátečních podmínkách způsobuje velký rozdíl v konečných

jevech. Malá chyba v podmínkách způsobí obrovskou chybu v jejich důsledcích. Předpověď se stává nemožnou ... “



**Obr. 3.1.** Problém tří těles: červené, modré, zelené a jejich trajektorie (Holmes, 1998)

Hadamardův biliard byl dalším příkladem chaotického chování. Hadamard (1898) dokázal nestabilitu všech trajektorií, neboli všechny trajektorie se exponenciálně rozcházejí od sebe (mají pozitivní Ljapunovův exponent). Oba vědci se velmi lehce dotkli problematiky chaosu, ale dále v ní nepokračovali. Je nutno poznamenat, že chaos nevědomky zahlédlo velké množství vědců, a také i obyčejných lidí, ale nikdo tomu nepřikládal důležitost. Následoval rozvoj ergodické teorie jako odvětví matematiky studující dynamické systémy.



**Obr. 3.2.** Objev citlivosti na počáteční podmínky (Lorenz, 1963)

Z hlediska vzniku teorie chaosu byl významný příspěvek matematika a meteorologa Lorenze (1963). Lorenz při simulaci počasí objevil, že malé změny v počátečních podmínkách mohou vyvolat velké změny v budoucnosti. Lorenz pomocí jednoduchého počítače prováděl simulaci počasí. Chtěl vidět sled dat znovu a zároveň ušetřit čas, proto začal simulaci v polovině jeho průběhu (Obr. 3.2). Lorenz byl překvapen, že nová předpověď se výrazně liší od té předchozí. Začal to analyzovat a zjistil, že počítač pracoval s přesností na 6 desetinných míst, ale výtisk zaokrouhlí na 3 desetinná místa. To byl revoluční objev, že takto malá změna počátečních podmínek způsobí výraznou změnu v budoucnosti. Do této doby se vědci domnívali, že malá odchylka způsobí pouze malou změnu v předpovědi. Determinismus a predikovatelnost byly v podstatě pokládány za totéž. Vědci se domnívali, že nepřesnost předpovědí plyne především z nedostatku dat. Meteorologové plánovali hustou síť měřících stanic, což by mělo dodávat více dat a za využití výkonnějších počítačů chtěli predikovat počasí na dlouhou dobu. Tato idea se rozplynula, vždyť i mnohem jednodušší deterministické systémy mohou být náhodné.

Přestože byl Lorenzův objev významný, na nějaký čas upadl v zapomnění, protože ho nikdo nehledal v „Journal of the atmospheric sciences“ (Lorenz, 1963). Li et York (1975) byli první, kdo slovo chaos použili v tomto moderním slova smyslu. Výzkum v oblasti chaosu pokračoval nekoordinovaně, mnozí vědci na sobě objevovali to, co již někdo jiný objevil (Gleick, 1987). Nakonec se z původního ostychu k chaosu vyklubalo hnutí, které bylo v popředí vědeckého zájmu (Gleick, 1996). Teorie chaosu je jedním z mála objevů v přírodních vědách, které by upoutaly pozornost vědců napříč všech oborů. Dá se říci, že 20. století bylo charakterizováno třema významnými fyzikálními teoriemi: relativita, kvantová mechanika a chaos. Gleick (1996) uvádí slova jednoho fyzika: „Relativita zkoncovala s newtonovskou iluzí absolutního prostoru a času; kvantová teorie skoncovalo s newtonovským snem kontrolovaného procesu měření a chaos zkoncoval s laplaceovskou fantazií deterministické prediktability.“ Právě teorie chaosu je teorií, která nás pronásleduje doslova na každém kroku, stačí se jen podívat, podívat na přírodu, vodu, nebesa, ...

## 3.2 Dynamický systém

Pojem dynamický systém představuje matematizaci vědeckého přístupu k deterministickým procesům a má svůj původ v newtonovské mechanice. Jak již bylo v úvodu nastíněno, pokud známe současný stav a zákony řídící vývoj daného systému, budoucí a minulé stavy mohou být do jisté míry předpovězeny. Dynamický systém je složen ze stavového (fázového) prostoru, jehož souřadnice popisují stav systému v daném čase a z dynamických podmínek, které popisují změnu tohoto systému v čase. Stav systému je potom popsán vektorem, který celý leží ve stavovém prostoru. Dynamické podmínky jsou většinou zadány soustavou diferenciálních nebo diferenčních rovnic, které popisují změnu stavového vektoru v čase. Změna stavu dynamického systému se děje provedením těchto diferenciálních resp. diferenčních rovnic a nahrazením starého stavového vektoru vektorem novým. V dané době je dynamický systém stav vyjádřený množinou reálných čísel (vektorem), který může být reprezentován bodem ve vhodném stavovém prostoru.

Dynamickým systémem rozumíme trojici  $\{Y, T, \Phi\}$ , kde:

- $Y$  je množina zvaná fázový nebo stavový prostor
- $T$  je časová množina
- $\Phi: T \times Y \rightarrow Y, (t, y) \rightarrow \Phi_t(y)$  (3.2.1)

je druh zobrazení zvaný tok nebo semi-tok, který splňuje, tzv. „semigrupovou vlastnost“:

$$- \Phi_0(y) = y, \forall y \in Y \quad (3.2.2)$$

$$- \Phi_s(\Phi_t(y)) = \Phi_{s+t}(y), \forall s, t \in T, \forall y \in Y \quad (3.2.3)$$

Dynamický systém je možné vyjádřit soustavou diferenciálních rovnic:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{f}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m \quad (3.2.4)$$

Diskrétní dynamický systém na množině  $Y$  je funkce:

$$\Phi: Y \rightarrow Y \quad (3.2.5)$$

Tato funkce, často nazývána zobrazení, může popisovat deterministickou evoluci nějakého systému: Jestliže se systém nachází ve stavu  $y$  v čase  $t$ , pak bude ve stavu  $\Phi(y)$  v čase  $t+1$ . Studium časově diskrétního dynamického systému je založeno na iteracích zobrazení: sekvence

$$y, \Phi(y), \Phi^2(y), \dots \quad (3.2.6)$$

Nelineární systém je takový systém, u kterého neplatí princip superpozice a vstup není přímo úměrný výstupu. Říkáme tedy, že zobrazení  $f$  z vektorového prostoru do vektorového prostoru je lineární, jestliže platí:

$$f(\alpha x) = \alpha f(x) \quad (3.2.7)$$

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (3.2.8)$$

Nechť je dán dynamický systém (3.4) můžeme definovat Jacobiho matici jako

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (3.2.9)$$

V případě, že  $m=n$  je Jacobiho matice čtvercová a determinant se nazývá Jaccobián.

$$\det J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)} \quad (3.2.10)$$

kde  $\text{sgn}(\sigma)$  definuje znaménko permutace  $\sigma$ , kladné pro sudé a záporné pro liché permutace.

Nechť je dán dynamický systém:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{F} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n \quad (3.2.11)$$

Kde  $\mathbf{F}$  je diferencovatelná. Bod  $\mathbf{x}^*$  je stacionární pokud  $\mathbf{F}(\mathbf{x}^*)=\mathbf{0}$ . Chování tohoto systému v blízkosti stacionárního bodu závisí na hodnotách vlastních čísel Jacobiho matice  $\mathbf{J}(\mathbf{x}^*)$ . To plyne z Taylorova rozvoje systému (3.10) v bodě  $\mathbf{x}^*$ :

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}^*) + \frac{1}{1!} \frac{d\mathbf{F}(\mathbf{x}^*)}{d\mathbf{x}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \frac{1}{2!} \frac{d^2\mathbf{F}(\mathbf{x}^*)}{d\mathbf{x}^2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \frac{d^n\mathbf{F}(\mathbf{x}^*)}{d\mathbf{x}^n} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^n \quad (3.2.12)$$

Pokud vlastní čísla mají reálné části, které jsou negativní, pak je systém stabilní v blízkosti stacionárního bodu. Pokud existuje vlastní číslo, jehož reálná část je pozitivní, pak je

system nestabilní. V případě, že největší reálná část vlastních čísel je rovna nule, pak nemůžeme pomocí Jacobiánu vyhodnotit stabilitu systému.

V souvislosti s dynamickými systémy a s ohledem na zkoumání chaosu je vhodné definovat bifurkaci. Pojem bifurkace (zdvojení) v matematice poprvé zavedl Poincaré (1885). Bifurkace značí jev, při kterém dochází k velkým změnám vnitřního stavu systému v případě malých plynulých změn vstupních parametrů. Je možné se setkat se systémy, u nichž po dosažení určitých kritických hodnot na vstupu dochází k náhlé, kvalitativní změně vnitřního stavu. Bifurkace značí zdvojení periody, což značí extrémní nestabilitu systému, kdy existují dvě se vzdalující řešení. V okolí bifurkačního se nachází strukturální nestabilita systému. Bifurkace, k nimž může docházet, lze dále klasifikovat, a v současné době byla popsána řada mechanismů, které k bifurkaci určitého druhu vedou.

Nyní více matematicky, necht' je dán dynamický systém

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x}, \mu), \mu \in \mathbf{R} \text{ a } \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \quad (3.2.13)$$

A předpokládejme, že pravá strana  $f$  je hladká. Fázový portrét tohoto systému se mění v závislosti na změně parametru; vznikají tak nové systémy. Je zřejmé, že jsou dvě možnosti: Buď tyto systémy zůstanou topologicky ekvivalentní anebo se jejich topologie změní. Situace, kdy se v závislosti na změně parametru objeví topologicky neekvivalentní fázové portréty, se nazývá bifurkace.

Bifurkace dělíme do dvou hlavních skupin:

- Lokální bifurkace, které mohou být analyzovány výhradně prostřednictvím změn lokální stability v oblastech rovnováhy, periodický orbitů nebo jiných neměnných sad.
- Globální bifurkace, které se nemohou být detekovány pouze na základě analýzy stability v oblasti rovnováhy.

Lokální bifurkace dynamického systému (3.11) nastává, pokud Jacobián má vlastní číslo s nulovou reálnou částí. Pokud se vlastní číslo rovná nule, bifurkace je v ustáleném stavu. V případě, že vlastní číslo je čistě imaginární, nastává Hopfova bifurkace. Hopfova bifurkace je kritický bod, kde systém přechází skokově ze stability k periodickým řešením. Existuje celá řada typů bifurkací, které se mohou vyskytovat v reálných nelineárních dynamických systémech. Studium komplikovaných bifurkací je předmětem současného výzkumu dynamických systémů.

Atraktor dynamického systému je stav, do kterého systém směřuje. Je to tedy určitá podmnožina fázového prostoru, ke kterému mohou být přitahovány počáteční podmínky, když je systém v nekonečném čase.

Atraktory lze rozdělit na:

- pevné body
- periodické body
- kvaziperiodické body
- chaotický atraktor
- podivný atraktor

V nejjednodušších případech může být atraktorem bod tedy dimenze 0 nebo křivka s dimenzí 1. Pro mnoho jiných atraktorů je toto přitahování nepravidelné a mnohem komplikovanější. Dokonce jejich dimenze ani není celé číslo, a to jsou právě ty nejzajímavější případy (Grebogi et al., 1998). Tyto atraktory jsou vlastně fraktály a nazývají se podivnými atraktory (Ruelle et Takens, 1971). Dimenze v podstatě vyjadřuje počet aktivních stupňů volnosti. Neceločíselná dimenze naznačuje existenci chaosu. Ale ne nutně, existují chaotické atraktory, které nejsou podivné. A na druhé straně existují podivné atraktory, které nejsou chaotické. Stochastické procesy při dostatečně dlouhé realizaci vyplňují celý fázový prostor. Nalezení oblasti, kde je fraktální dimenze dostatečně malá, je považováno za příznak determinismu. Je běžné, že reálný dynamický systém má více atraktorů. Pro každý takový atraktor a jeho oblast přitažlivosti jsou počáteční podmínky zásadní, na kterém atraktoru řešení uvízne.

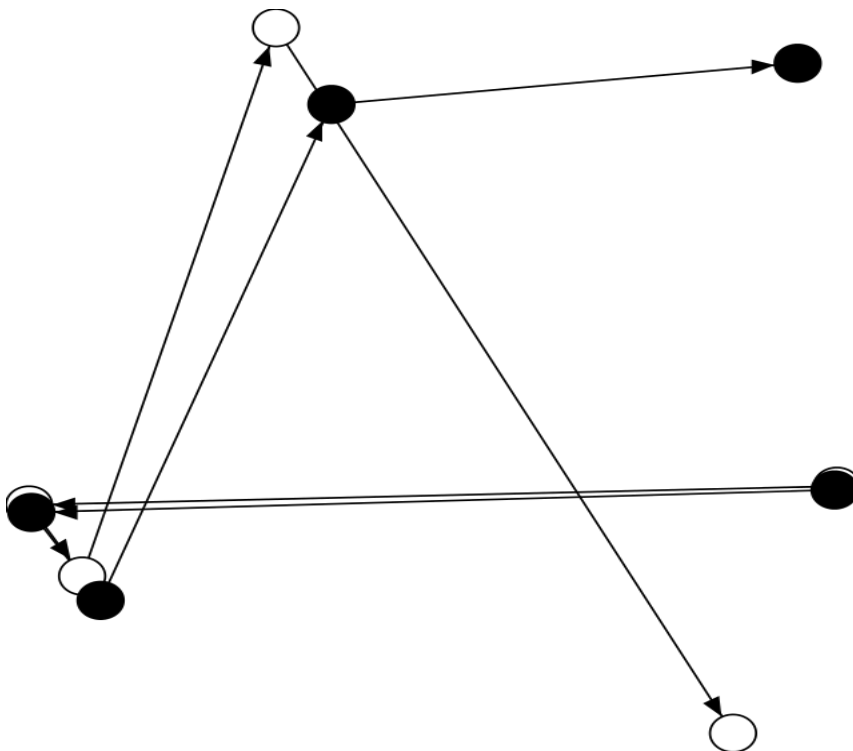
### **3.3 *Deterministický chaos***

Existuje celá řada definic deterministického chaosu. Chaos je ohraničený deterministický systém s kladným Lyapunovým exponentem. Více intuitivní definice pochází z Royal Society of London z roku 1986, kde je chaos definován jako stochastické chování vyskytující se v deterministickém systému. Jedná se tedy o systém striktně deterministický bez jakékoliv náhody. Jakýkoliv stav v budoucnosti je dán svou minulostí. Ale právě z důvodu velké citlivosti na počáteční podmínky je dlouhodobá předpověď nemožná. V reálném životě totiž nic nemůžeme změřit absolutně přesně a jakákoliv nepatrná chyba vstupující do výpočtu se po několika iteracích exponenciálně násobí. Chaos je z časového hlediska budoucí stav deterministického dynamického systému, který je nepředpověditelný v důsledku velké citlivosti na počáteční podmínky. Je to oproti běžnému významu slova chaos „dobrá zpráva“

v tom smyslu, že přívlastek deterministický říká, že jsme našli určitý řád, deterministické souvislosti v ději, který se dříve jevil jako nesrozumitelný (Pokorný, 2008).

Devaney (1989) definuje deterministický chaos (pro dynamický systém s diskretním časem) třemi podmínkami:

1. citlivá závislost na počátečních podmínkách (Obr. 3.3),
2. hustá množina periodických bodů,
3. tranzitivnost.



**Obr.3.3.** Citlivá závislost na počátečních podmínkách

Později se ukázalo, že z tranzitivnosti a husté množiny periodických bodů plyne citlivá závislost na počátečních podmínkách (Pokorný, 2008). Chaos se může, za předpokladu diskretního času, objevit již v systému o jednom stupni volnosti. V případě spojitého času je minimální požadavek na přítomnost chaosu, systém o třech stupních volnosti.

### 3.4 *Fraktály*

S teorií chaosu souvisí také pojem fraktál a fraktální geometrie. Fraktály jsou v podstatě množiny, jejichž geometrický motiv se opakuje ve vlastním mateřském tělese (Zelinka, 2005). Fraktální geometrie je matematický nástroj pro popis složitě strukturovaných objektů, jejichž charakter se nemění při určitém zvětšení nebo zmenšení (Hotař, 2008). Vhodným příkladem



je pobřežní linie. Mandelbrot (1967) se zabýval úvahami, o tom jakou má vlastně délku pobřeží Velké Británie. Mandelbrot (1967) navázal na práci Richardsona (1926), který se touto otázkou první vážně zabýval a po němž je pojmenován Richardsonův efekt, který je popsán níže. Na první pohled se může zdát, že se jedná o triviální otázku, ale při hlubším zamyšlení je problematika mnohem složitější, spjatá s měřítkem. Jedna z možných metod je změřit ostrov libovolným měřidlem. Výsledná hodnota však bude pouhou aproximací skutečné délky ostrova. Pokud se celý proces zopakuje s poloviční délkou měřidla, výsledek bude o něco větší. Podařilo se totiž zachytit mnohem více detailů. Teoreticky lze zmenšováním měřidla zachytit více detailů a tím dojít až k nekonečné délce jakéhokoliv geometricky nepravidelného ostrova.



**Obr. 3.4.** Závislost délky pobřežní linie na měřítku (Sande, 2015)

Existuje celá řada definic fraktálu. Fraktál je množina, jejíž Hausdorff-Besicovitchova (fraktální) dimenze převyšuje její topologickou dimenzi (Mandelbrot, 1982). Pojem dimenze je obvykle chápán v souvislosti s Euklidovským prostorem. Zjednodušeně řečeno, topologická dimenze označuje počet parametrů, kterými je možné každý vektor daného lineárního vektorového prostoru jednoznačně popsat. Topologickou dimenzi lineárního vektorového prostoru lze definovat jako počet prvků báze. Topologická dimenze je vždy celočíselná. Objekt, který je možné homomorfne převést stlačováním a ohýbáním na jeden ze simplexů, má stejnou topologickou dimenzi jako simplex. Simplex v tomto případě je bod s topologickou dimenzí 0, úsečka délky 1 s topologickou dimenzí 1, pravoúhlý trojúhelník s

odvěsnami délky 1 má topologickou dimenzi 2 a tetraedr má topologickou dimenzi 3 (Hotař, 2008).

Fraktální dimenze (Hausdorff-Besicovitch dimenze)  $D_H$  nemusí být oproti topologické dimenzi celočíselná. Fraktální dimenze jsou charakteristiky plynoucí z geometrie atraktoru. Fraktální dimenze také obsahuje informaci o tvaru tělesa, nebo-li je úměrná míře nepravidelnosti objektu. Vyjadřuje do jaké míry se útvar liší od klasického euklidovského útvaru, který má topologickou dimenzi celočíselnou. Výpočet Hausdorff-Besicovitchovi dimenze je možné provádět různými způsoby. Jedním z příkladů fraktální dimenze je kapacitní dimenze. Kapacitní (box counting) dimenze  $D_K$  dané množiny je zobecněním pojmu topologické dimenze následujícím způsobem (Pokorný, 2008): Necht'  $N(\varepsilon)$  je nejmenší počet hyperkrychliček  $C$  o hraně  $\varepsilon$  nutných pro pokrytí dané množiny. Např. pro pokrytí jednotkové úsečky úsečkami o délce  $\varepsilon$  je třeba alespoň

$$N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}, \quad (3.4.1)$$

těchto malých úseček. Říkáme, že úsečka má dimenzi 1. Pro pokrytí jednotkového čtverce malými čtverečky o délce hrany  $\varepsilon$  je třeba alespoň

$$N(\varepsilon) = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2, \quad (3.4.2)$$

těchto malých čtverečků. Říkáme, že čtverec má dimenzi 2. Pro pokrytí jednotkové krychle malými krychličkami o délce hrany  $\varepsilon$  je třeba alespoň

$$N(\varepsilon) = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^3, \quad (3.4.3)$$

těchto malých krychliček. Říkáme, že krychle má dimenzi 3. Kapacitní dimenze je definována jako exponent ve vztahu mezi nutným počtem  $N$  malých  $\varepsilon$ -hyperkrychliček a jejich hranou  $\varepsilon$

$$N(\varepsilon) = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^D = \varepsilon^{-D}, \quad (3.4.4)$$

tedy:

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \varepsilon^{-1}}, \quad (3.4.5)$$

Kapacitní dimenze je již reálné číslo. Pokud je neceločíselná, pak se jedná o Hausdorff-Besicovitchovu dimenzi. Neceločíselná dimenze je jednou z nutných, ale ne postačujících, podmínek chaotických systémů.

Pojem fraktální dimenze je možné zobecnit a definovat zobecněnou fraktální dimenzi  $q$ -tého řádu zvanou Réneyiho dimenzi:

$$D_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{1-q} \frac{\ln \sum_j \mu(C_j)^q}{\ln \varepsilon^{-1}}, \quad (3.4.6)$$

kde  $\mu$  je míra a  $C_j$  značí  $j$ -tou  $\varepsilon$ -hyperkrychličku pokrývající atraktor systému. Kapacitní dimenze  $D_K$  odpovídá pro  $q = 0$ . Informační dimenze  $D_I$  odpovídá pro  $q \rightarrow 1$  za použití L'Hospitalova pravidla:

$$D_I = D_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_j \mu(C_j) \ln \mu(C_j)}{\ln \varepsilon^{-1}}, \quad (3.4.7)$$

Korelační dimenze  $D_C$  odpovídá pro  $q = 2$ .

$$D_C = D_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \sum_j \mu(C_j)^2}{\ln \varepsilon}, \quad (3.4.8)$$

Pro samotné fraktály má atraktor klíčový význam a ve své podstatě by fraktály nemohly bez atraktorů existovat. Atraktor je z hlediska fraktálu jeho limitou a ta je hromadným bodem (Hotař, 2008).

Pro fraktály je typická soběpodobnost, případně soběpříbuznost. Soběpodobnost je charakteristika tvaru objektů, kdy libovolná část objektu má tvar, který je podobný tvaru téhož objektu při jiném rozlišení (zvětšení nebo zmenšení). Soběpodobný proces můžeme definovat následovně:

$$X(at) = a^H X(t) \quad (3.4.9)$$

kde  $a$  je kladná konstanta a  $H$  je Hurstův koeficient soběpodobnosti nabývajících hodnot 0 až 1. Označení  $H$  pak dal exponentu Mandelbrot (Mandelbrot et van Ness, 1968), kde ho definoval následovně:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x,t) dx = ct^{2H} \quad (3.4.10)$$

Dokonalá soběpodobnost se vyskytuje pouze v matematice u fraktálů. V přírodě není soběpodobnost přesně geometrická, ale musí se chápat v pravděpodobnostním smyslu: změní-li se měřítko zobrazení, neboli škála, objekt zůstává v pravděpodobnostním smyslu totožný. Soběpodobnost nebo lépe soběpříbuznost nazýváme stav, kdy určitá část fraktálu je velmi podobná, ne však zcela shodná s původním motivem.

Fraktální dimenze je měřítkem hrubosti v  $n$  rozměrném prostoru a nabývá hodnot mezi  $n$  a  $n+1$ . Čím vyšší hodnota, tím větší hrubost. Hurstův koeficient je měřítkem perzistentnosti v souladu s mocninným zákonem. V zásadě jsou fraktální dimenze a Hurstův koeficient na sobě nezávislé. Nicméně jsou tyto dva pojmy úzce propojeny, což plyne právě ze zmiňované soběpodobnosti, resp. soběpříbuznosti, které se vyskytují u fraktálního Gausova šumu, nebo fraktálního Brownova pohybu. Lévy (1953) definuje fraktální Brownův pohyb pomocí Riemann-Liouville fraktálního integrálu následovně:

$$B_H(t) = \frac{1}{\Gamma(H + 0.5)} \int_0^t (t-s)^{H-0.5} dB(s) \quad (3.4.11)$$

kde  $\Gamma$  je Gama funkce.

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt \quad (3.4.12)$$

U soběpodobnostního povrchu v  $n$  dimenzionálním prostoru platí známá relace:

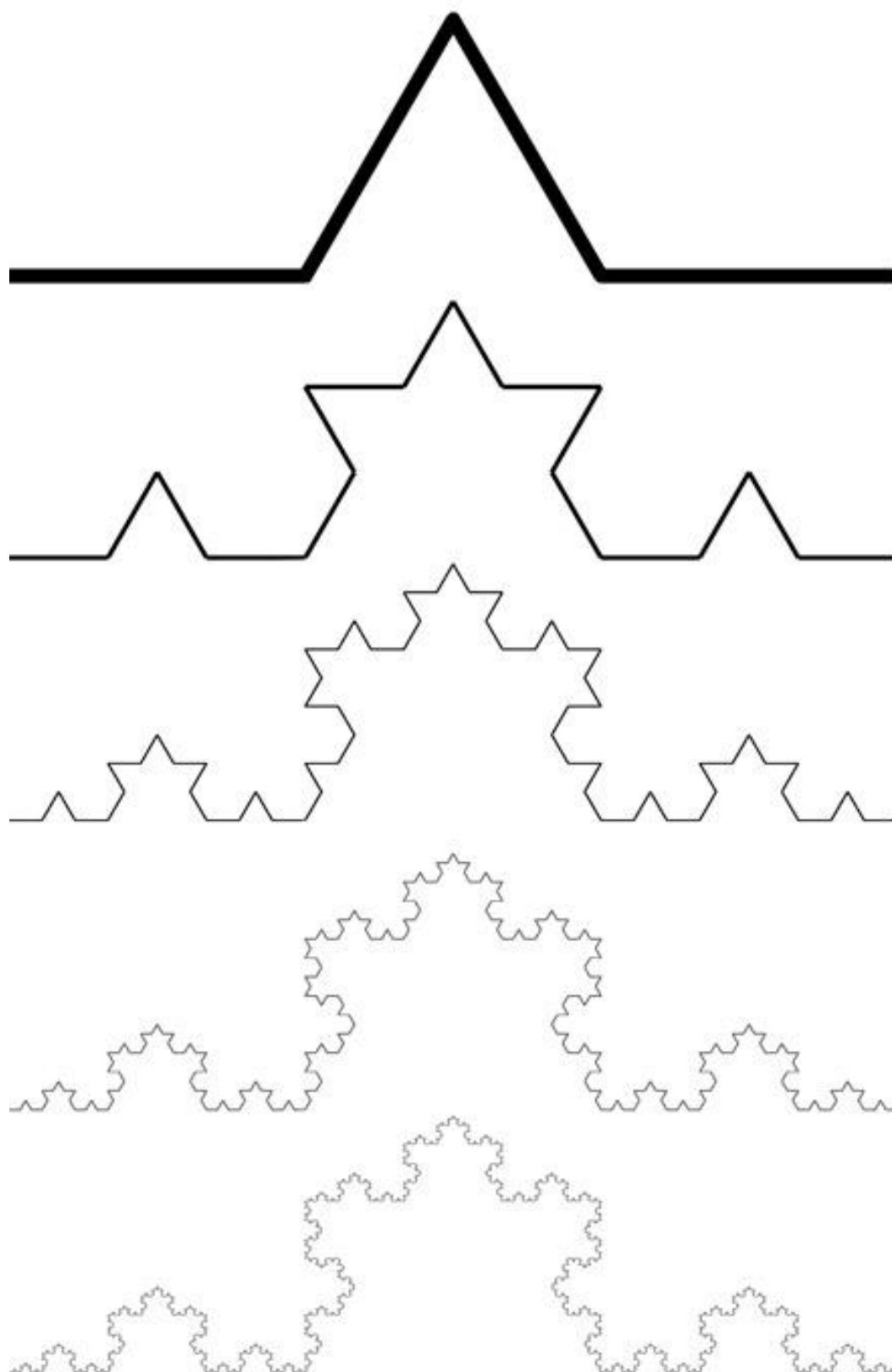
$$D = n + 1 - H \quad (3.4.13)$$

Statistická soběpodobnost určuje vztahy mezi lokálním a globálním chování, tedy mezi fraktální dimenzí a Hurstovým koeficientem.

Fraktály je možné dělit různými způsoby, např. podle algoritmu konstrukce fraktálu (Hotař, 2008):

- IFS (Iteration Function System), který ke konstrukci používá transformací, které se cyklicky opakují.
- TEA (Time Escape Algorithms). Tento algoritmus provádí iterace pro uživatelsky stanovené hranice a pro konstrukci využívá komplexní rovinu.

Příkladem IFS fraktálu může být třeba Kochova (1904) křivka (obr. 3.5). Konstrukce tohoto typu fraktálů je založena na afinních transformacích. Těmito transformacemi se rozumí: zmenšení, rotace a posuv. V případě Kochovy vložky je definován iniciátor a generátor. Iniciátor v tomto případě představuje úsečku a generátor je tvar, kterým se iniciátor nahradí. V tomto případě je generátorem útvar vzniklý vyjmutím prostřední třetiny a nahrazením této třetiny dvěma úsečkami délky jedné třetiny. A tak se to opakuje do nekonečna.

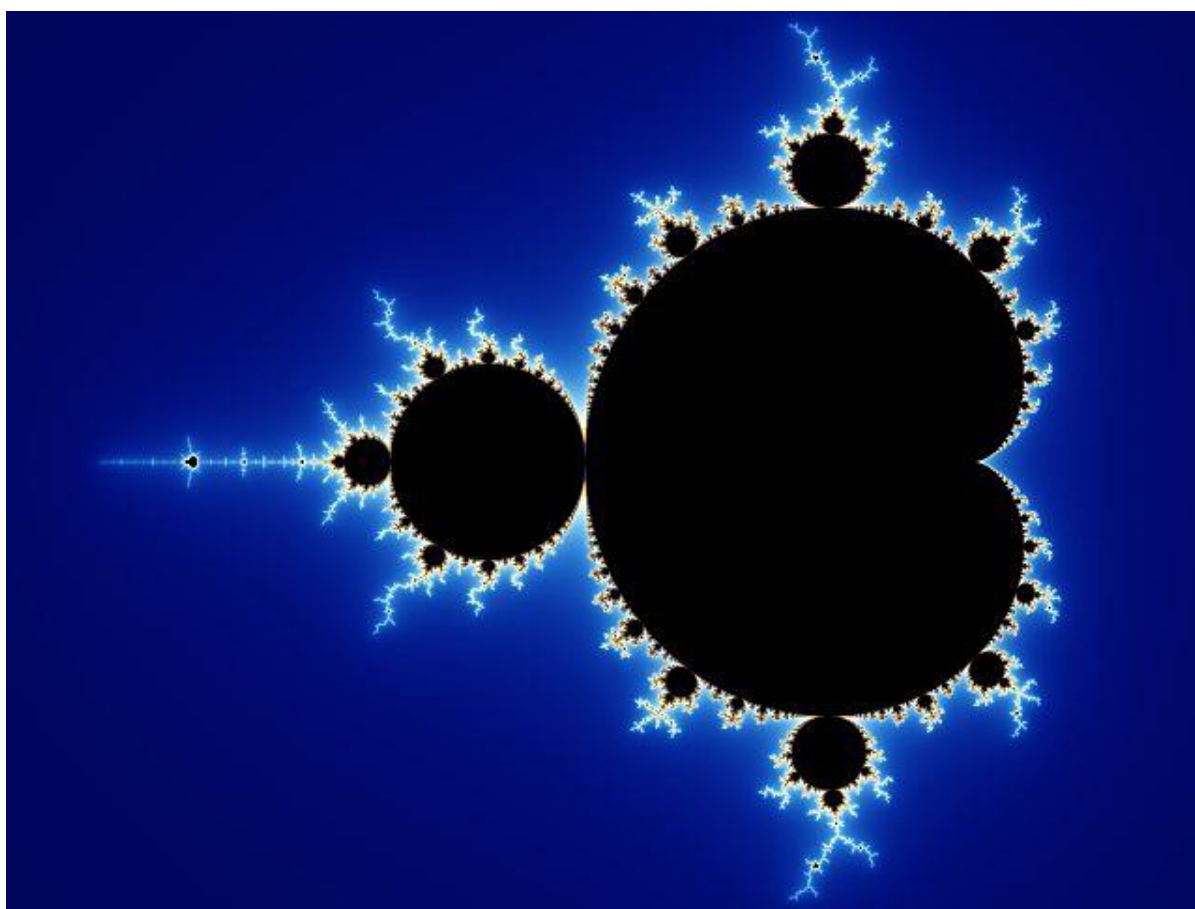


Obr. 3.5. Kochova křivka

Pro fraktály typu TEA je typické využití komplexní roviny, která je definována maticí komplexních čísel. Jednotlivé body matice jsou brány jako vstupní hodnoty iterace. Nejznámějším příkladem této skupiny fraktálů je Mandelbrotova množina, která je dána vztahem:

$$\begin{aligned} z_0 &= 0 \\ z_{n+1} &= z_n^2 + c \end{aligned} \tag{3.4.14}$$

kde  $c$  je komplexní konstanta, které přiřadíme posloupnost komplexních čísel  $z_n$ .



Obr. 3.6. Mandelbrotova množina (Beyer, 2015)

K zobrazení výsledku výpočtů je často používána barevná škála (obr. 3.6). Černé plochy obrázku tvoří množinu bodů, která je fraktálním obrazcem. Ostatní barvy reprezentují části, které do množiny nepatří a začaly unikat do nekonečna po několika krocích. Barevná škála tak reprezentuje, po kolika krocích se výpočet přeruší.

### 3.5 Logistická rovnice

Jednodimenzionální diskrétní dynamické systémy jsou poměrně často využívány pro modelování, neboť jsou relativně jednoduché a jsou schopny demonstrovat komplexní dynamiku. Matematické vlastnosti jednodimenzionálního dynamického systému jsou dostatečně pochopitelné ve srovnání s vícedimenzionálními systémy.

Jednparametrové, diskrétní, jednodimenzionální zobrazení  $f: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ :

$$x_{t+1} = f(x_t, r) \quad x \in \mathbf{R}, \quad r \in \mathbf{R} \quad (3.5.1)$$

Nechť  $x^*$  je fixním bod zobrazení, tj.  $x^* = f(x^*, r)$ . Asymptotická stabilita fixního bodu  $x^*$  závisí na sklonu zobrazení  $f$ , fixní bod leží mimo jednotkový kruh

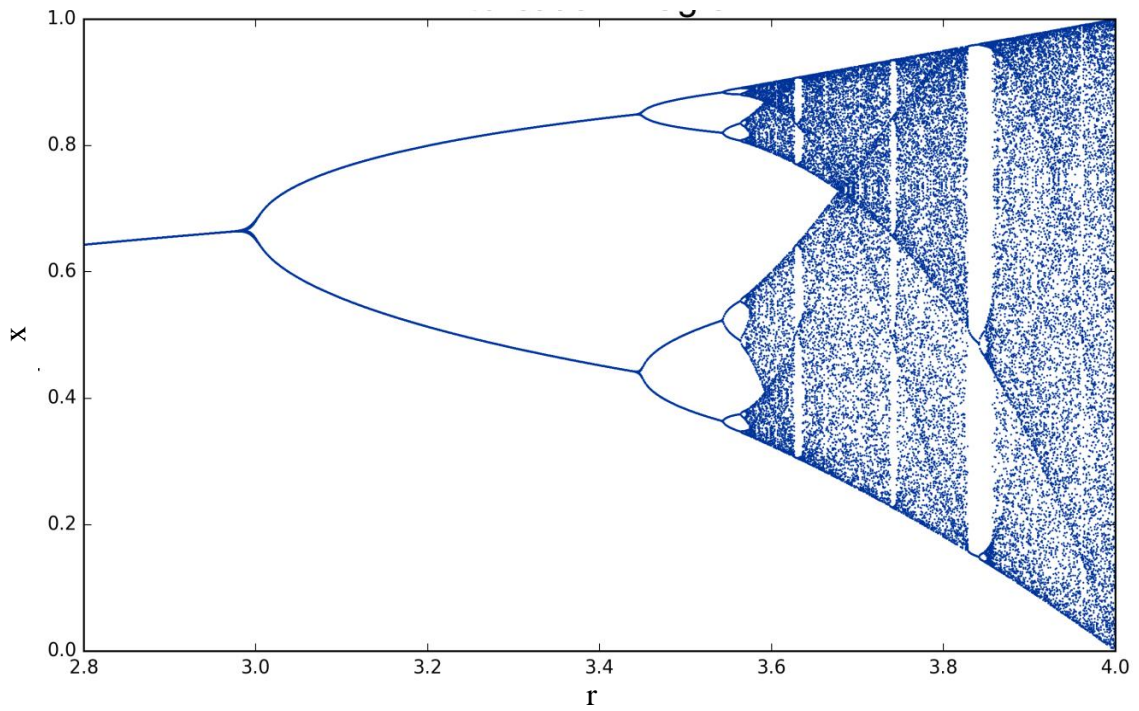
$$\left| \frac{df(x^*)}{dx} \right| = |\lambda| < 1 \quad (3.5.2)$$

Bifurkace, změna v kvantitativním chování zobrazení může nastat jenom, pokud vlastní hodnota  $\lambda$  nabývá hodnot  $+1$  nebo  $-1$ .

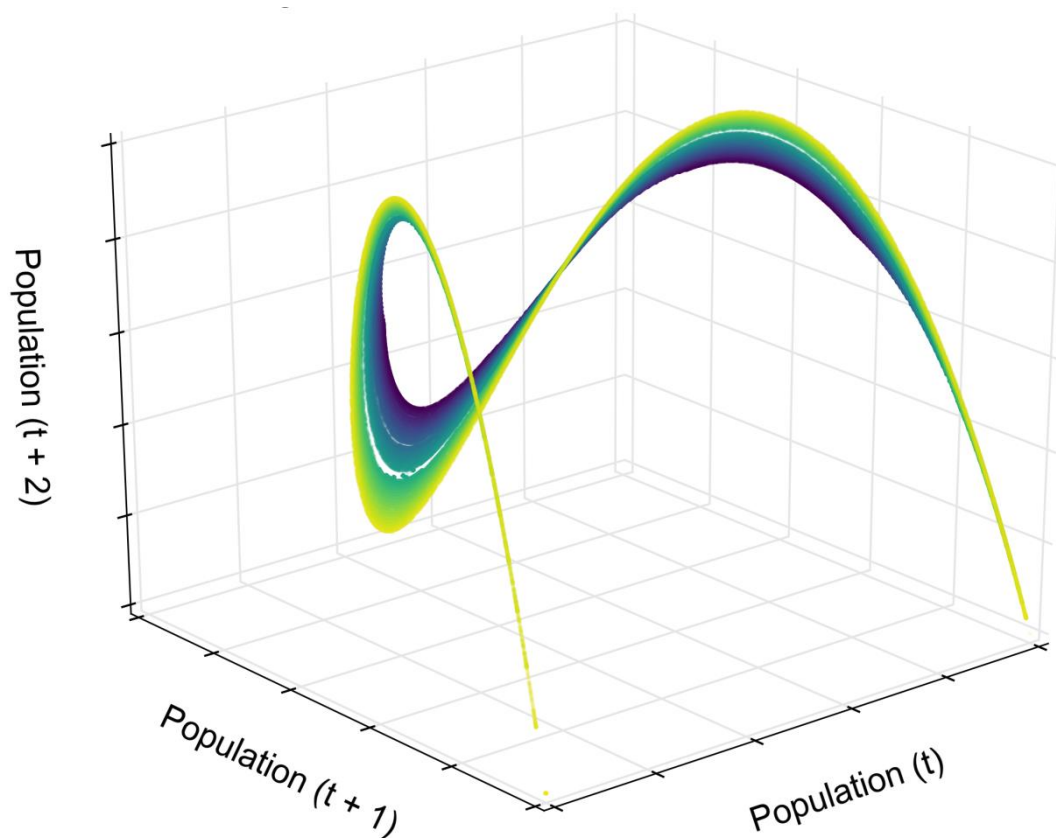
Typickým příkladem jednoduchého jednodimenzionálního diskrétního dynamického systému, který může být chaotický, je logistická rovnice.

$$x_{t+1} = rx_t(1 - x_t) \quad (3.5.3)$$

Logistická rovnice byla využívána především populačními biology, neboť se hodila k simulacím vývoje populace. Při studiu tohoto modelu si May (1976) všiml výrazných změn v chování systému v závislosti na parametru  $r$ . Bude-li parametr nízký, systém se ustálí. Pokud se parametr dále zvyšuje, dojde k oscilaci mezi dvěma stavy. V případě, že je překročena hodnota řídicího parametru  $3,5699\dots$ , začne se systém chovat chaoticky. Přestože se jedná o velmi jednoduchou rovnici, může generovat neskutečnou složitost (Obr. 3.7).



**Obr. 3.7.** Bifurkační diagram logistické rovnice (Boeing, 2016)



**Obr. 3.8.** Logistická mapa ve fázovém prostoru pro 50 hodnot řídicího parametru  $r$  nabývajících hodnoty od 3,6 až 4 (Boeing, 2016)



Detailní analýzu této rovnice provedl Feigenbaum (1978) a našel pravidelnost – měřítkovou strukturu, škálovací konstantu. Vypočítal univerzální konvergenční konstantu chaosu, nazvanou Feigenbaumova konstanta:

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_{n-1} - l_{n-2}}{l_n - l_{n-1}} = 4,669\ 201\ 609\ 102\ 990\ 671\dots \quad (3.5.4)$$

Jedná se o limitu poměru mezi následnými bifurkacemi  $l_i$ . Univerzalita Feigenbaumovy konstanty není absolutní, nýbrž platí pouze pro určitou skupinu zobrazení. Konkrétně tato konstanta platí pro všechny jednohrbé zobrazení typu „parabola“ mezi něž patří např. logistické a trigonometrické zobrazení. Zobecněním logistické rovnice do komplexní roviny dostaneme fraktální množinu.

### 3.6 Lorenzův model

Jak již bylo předesláno v úvodu, vliv Lorenza (1963) na utváření teorie chaosu byl zásadní. Do té doby se všeobecně věřilo, že klasická fyzika může předpovědět jakýkoliv stav vesmíru v budoucnosti. Vědci se do té doby chybně domnívali, že malá chyba v počátečních podmínkách může způsobit jen malou změnu v budoucnosti. Lorenz (1963) ukázal, že i tato malá změna může vést k dramatickým změnám v chování systému.

Modelování počasí vychází ze studia přenášení tepla v atmosféře. Následující popis, pokud není uvedeno jinak, vychází z (Raidl, 2015), (Horák, et al., 2003), (Prokšová, et. al., 2007). Uplatňují se zde tyto rozhodující fyzikální mechanismy: archimedovské vztlakové síly a vnitřní tření v tekutině. Který proces převládne, závisí na fyzikálních vlastnostech tekutiny, okrajových podmínkách a především rozdílu teplot mezi spodní a svrchní vrstvou. V případě, že rozdíl teplot je velký, dochází k převaze vztlakových sil a teplo je přenášeno především konvekcí. K nerovnovázným dějům dochází při zahřívání kapaliny a následném konvekčním proudění uvnitř kapaliny. Jedná se o tzv. Rayleigh-Bénardovi konvekci, kterou lze popsat pomocí systému nelineárních rovnic, vyjadřujících v podstatě bilanci hmotnosti, hybnosti a energie. Jedná se o základní rovnice hydrodynamiky:

Navier-Stokesova rovnice:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \nabla) v = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \nabla^2 v + g \beta T \quad (3.6.1)$$

rovnice kontinuity:

$$\nabla v = 0 \quad (3.6.2)$$

rovnice vedení tepla:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T - (v \nabla) T + Q \quad (3.6.3)$$

kde  $v$  je lokální rychlost toku,  $\nu$  je kinematická viskozita,  $\rho_o$  je objemová střední hustota tekutiny,  $p$  je tlak,  $T$  je termodynamická teplota. Sčítanec  $g\beta T$  je výslednicí vztlakové a gravitační síly působící na jednotku hmotnosti;  $g$  je tíhové zrychlení,  $\kappa$  je koeficient tepelné vodivosti,  $\beta$  je tepelná roztažnost a  $Q$  je tepelná funkce. Při využití Boussinesqovy aproximace, která představuje zjednodušení příslušných modelových rovnic, kdy se změny hustoty vzduchu uvažují pouze v tom členu rovnic, který představuje archimedovské vztlakové síly, zatímco jinak se hustota vzduchu považuje za konstantní veličinu. Řešením této problematiky se zabýval Saltzman (1962), po kterém jsou pojmenovány rovnice. Tyto rovnice pocházejí ze studia kapaliny konstantní hloubky  $H$  s teplotním rozdílem horní a spodní vrstvy  $T$  a lineární změnou teploty. V případě, že nedochází ke změnám v ose  $y$ ; mají Saltzmanovy rovnice tvar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi &= - \frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(x, z)} + \nu \nabla^4 \psi + g \varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial t} \theta &= - \frac{\partial(\psi, \theta)}{\partial(x, z)} + \frac{\Delta T}{H} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \kappa \nabla^2 \theta \end{aligned} \quad (3.6.4)$$

kde  $\psi$  je proudová funkce pro dvoudimenzionální rychlost proudění,  $\theta$  je teplotní odchylka od rovnovážného stavu a  $g$ ,  $\varepsilon$ ,  $\nu$ ,  $\kappa$  jsou konstanty gravitačního zrychlení, koeficientu teplotní roztažnosti, kinetické viskozity a tepelné vodivosti.

Řešení ve tvaru Fourierovy řady v bezrozměrných jednotkách (Saltzman, 1962):

$$\begin{aligned} \psi^*(x^*, z^*, t^*) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Psi(m, n, t^*) \exp \left[ 2\pi H i \left( \frac{m}{L} x^* + \frac{n}{2H} z^* \right) \right] \\ \theta^*(x^*, z^*, t^*) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Theta(m, n, t^*) \exp \left[ 2\pi H i \left( \frac{m}{L} x^* + \frac{n}{2H} z^* \right) \right] \end{aligned} \quad (3.6.5)$$

Lorenz (1963) vychází ze Saltzmanových rovnic konvekce a uvažuje pouze první členy řešení Fourierovy řady:

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial \tau} &= -\sigma(X + Y) \\ \frac{\partial Y}{\partial \tau} &= -XZ + rX - Y \\ \frac{\partial Z}{\partial \tau} &= -XY - bZ\end{aligned}\tag{3.6.6}$$

V systému se nacházejí tři časové proměnné:  $X$  odpovídá intenzitě konvektivních toků (je úměrná úhlové rychlosti rotace konvektivní buňky v tekutině),  $Y$  udává teplotní rozdíl mezi stoupající a klesající kapalinou a  $Z$  je úměrná odchylce vertikálního teplotního profilu od linearity. Proměnné  $X$  a  $Y$  odpovídají členům Fourierova rozvoje teploty.

Kde  $\tau$  je bezrozměrný čas,  $\sigma = \nu/\kappa$  je Prandtlovo číslo,  $b$  udává míru disipace a  $r$  je redukované Rayleighovo číslo  $R_a$ , které je vztaženo ke své kritické hodnotě  $R_{ak}$ .

$$\tau = \frac{\pi^2 \left(1 + \left(\frac{2H}{L}\right)^2\right) \kappa}{H^2} t\tag{3.6.7}$$

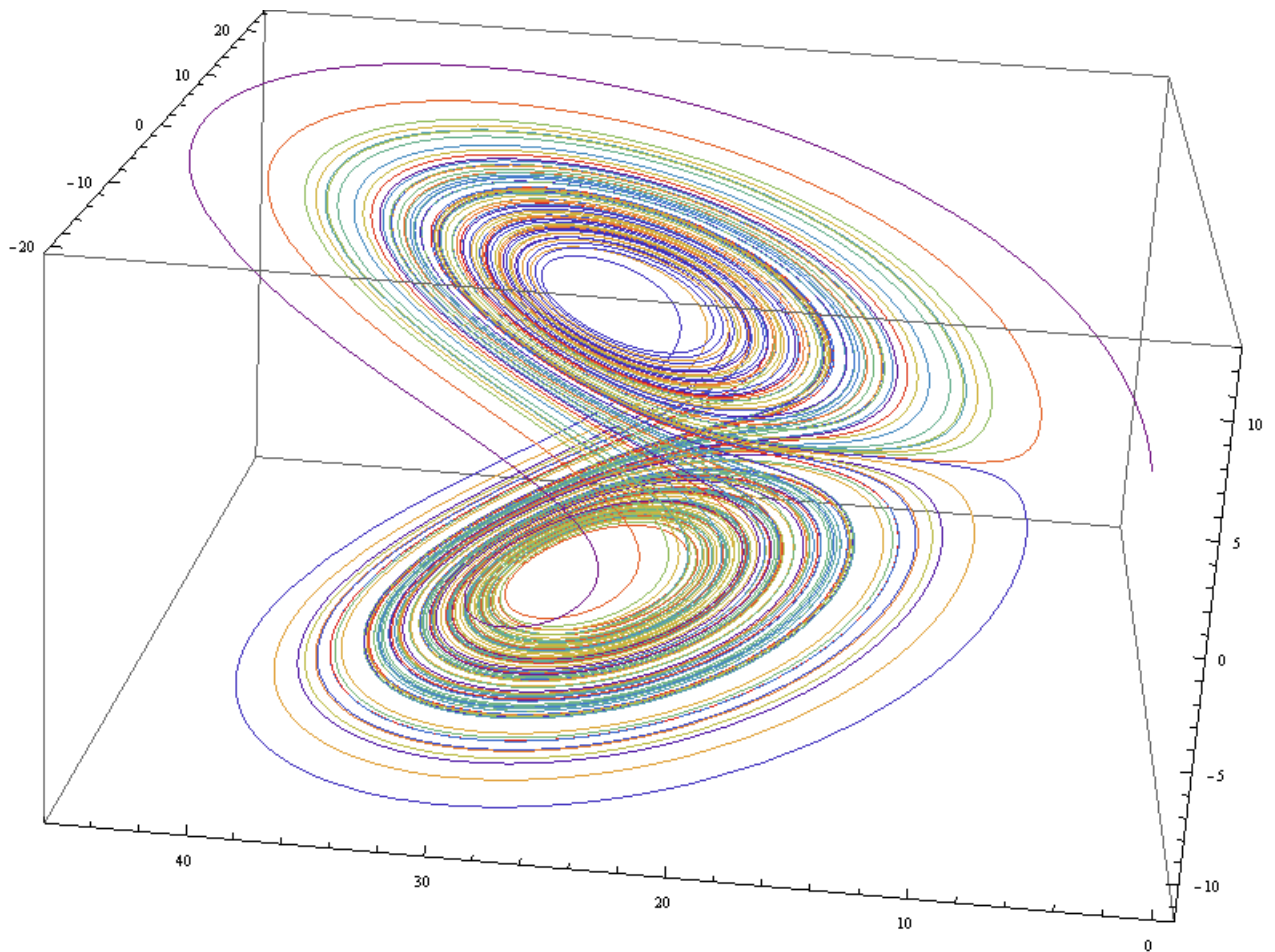
$$b = \frac{4}{1 + \left(\frac{2H}{L}\right)^2}\tag{3.6.8}$$

$$R_a = \frac{\beta g H^3 \Delta T}{k \nu}\tag{3.6.9}$$

Lorenzův matematický model zachycuje základní vlastnosti konvektivního proudění v atmosféře, která je zahřívána povrchem ze spodu a ochlazována svrchu. Vzniká tak rotační pohyb částic vzduchu, kdy ohřátá částice stoupá, tím se ochlazuje a začne klesat, aby se opět zahřála a stoupala. Tento jev je známý jako Rayleighova-Bénárdova nestabilita (Uruba, 2009).

Chování Lorenzova systému je velice složité (Obr. 3.9). Obvyklé parametry pro atmosférické podmínky se uvažují  $\sigma=10$  a  $b=83$  a parametr  $r$  je proměnný. Pro hodnoty  $r < 1$  se ustálí stacionární stav bez konvekce. Všechny trajektorie ve stavovém prostoru skončí v pevném nulovém bodě bez ohledu na počáteční podmínky. V intervalu hodnot  $1 < r < 1,346$

začne nulový bod ztrácet stabilitu a odpuzovat trajektorie, ale v systému jsou nová stacionární řešení (pevné body)  $C^+$  a  $C^-$ . V tomto případě se jedná o ustálenou konvekci s neproměnnými konvektivními útvary. V intervalu hodnot  $1,346 < r < 24,74$  se v systému vyskytují tzv. spirální pevné body. Pro hodnoty  $r > 24,74$  se objevuje legendární chaotický atraktor ve tvaru motýlích křídel. Nutno poznamenat, že i v oblasti pro hodnoty  $r > 24,74$  dochází k výskytu periodických oblastí např. pro  $r = 475$ .



**Obr. 3.9.** Lorenzův atraktor

### **3.7 Perspektivy teorie chaosu**

Když si poprvé Lorenz (1963) všiml rozdílu při simulaci počasí, ani netušil, o jak revoluční objev se jedná. Malé změny v počátečních podmínkách nelineárního dynamického systému mohou vyvolat velké změny v budoucnosti. Do této doby se vědci domnívali, že malá odchylka způsobí pouze malou změnu v předpovědi. Determinismus a predikovatelnost byly v podstatě pokládány za totéž. Teorie chaosu si vynutila změnu v uvažování vědců a myslitelů. Matematický důkaz existence deterministického chaosu v Lorenzově modelu je nezvratný. Pomocí teorie chaosu došlo k vysvětlení mnoha „podivných“ jevů, které se občas přihodily ve stavech daleko od rovnováhy. Podle teorie chaosu se mohou i jednoduché systémy projevovat složitě. Na druhé straně existuje teorie komplexity, podle které se složité systémy mohou chovat emergentně. Emergence znamená spontánní vznik makroskopických vlastností a struktur složitých systémů, které nejsou jasně viditelné z vlastností jednotlivých částí. Emergence je typickou vlastností všech systémů, výrazná je u komplexních systémů. Chaotické systémy jsou jistým typem komplexního systému. Teorie chaosu a teorie komplexity, složitost a jednoduchost jsou v podstatě dvě strany téže mince. To že spolu obě teorie úzce souvisejí, je dáno skutečností, že patří do teorie nelineární dynamiky. Stewart (2009) popisuje ve světle teorie komplexity burzovní krach jako emergentní odpověď složitého peněžního systému na akce jednotlivých investorů. Nikdo z těchto investorů krach nemůže přivodit a ani si pravděpodobně nepřeje. Vzájemná působení těchto investorů se ubírá podél jisté nelineární dynamické trajektorie, jejich reakce se posilují a krach burzy je nevyhnutelný.

## 4 Teorie chaosu v ekonomii

Teorie chaosu způsobila změnu uvažování vědců a myslitelů v mnoha vědeckých disciplínách, včetně ekonomů. Dalo by se předpokládat, že teorie chaosu je přímo určená pro popis ekonomických systémů. Mnoho vědců se snažilo hlouběji prozkoumat chaos v ekonomických řadách. Na rozdíl od exaktních přírodních jevů je v ekonomii a jiných společenských disciplínách důkaz existence deterministického chaosu mnohem složitější. Ekonomové zde narážejí na celou řadu problémů. V makroekonomii je to především problém nedostatečného množství dat v odpovídající kvalitě. S jinými problémy se setkávají obchodníci na finančních trzích. S tím pak souvisí i provázanost finančních trhů a makroekonomie. Z těchto důvodů je zřejmé, že v ekonomických systémech mnohdy není možné aplikovat stejné metody výzkumu jako u exaktních věd a pokud ano, tak s nejvyšší obezřetností. Problémem je, že nízkodimenzionální chaos je obtížné detekovat a vícedimenzionální chaos je podobný náhodnému procesu. Mnoho ekonomů předpokládá, že nízkodimenzionální chaos se v ekonomii objevuje výjimečně a hodí se jen pro teoretické úvahy. Vzácná detekce nízkodimenzionálního chaosu v ekonomických řadách je zapříčiněna kontaminací bílým šumem a tváří se jako vícedimenzionální chaos. To ale neznamená, že nízkodimenzionální chaos neexistuje.

Nezávisle na typu zkoumaného objektu je možné se zabývat dvěma přístupy. Prvním z nich je vytvoření teoretického modelu ekonomického systému, analyzovat ho a následně porovnat s reálnými daty. Druhý přístup představuje samotná analýza časových řad generovaných zkoumaným systémem a nalezení nějaké skryté zákonitosti. Oba přístupy se můžou kombinovat a ovlivňovat za účelem vytvoření věrohodné prognózy. První přístup se spíše využívá v makroekonomii a druhý především na finančních trzích.

Podle Smale (1998) je uvedení teorie chaosu do ekonomie jedním z 18. nejdůležitějších úkolů matematiky tohoto století. Konkrétně se jedná o 8. problém zabývající se rozšíření matematického modelu všeobecné teorie rovnováhy, který by zahrnoval cenové úpravy. Tento problém není čistě matematický, ale leží na rozhraní ekonomiky a matematiky. K dispozici je již (statická) teorie rovnovážných cen v ekonomice vybudovaná Walras (1874) a pevně ukotvená v práci Arrow et Debreu (1954).

## 4.1 *Chaos v ekonomických časových řadách*

Hlavním problémem je samotná detekce chaosu v ekonomických časových řadách. Z empirického hlediska je obtížné rozlišit mezi změnou vyvolanou náhodou a endogenními kolísáními způsobenými nelinearitami mezi hospodářskými agregáty. V úvodu byla teoreticky diskutována otázka stochastického a deterministického chování. Čistě stochastická časová řada neumožňuje předvídání budoucích výsledků. Chaotické řady jsou deterministické, ale dlouhodobá předpověď je také nemožná, nicméně krátkodobá může být užitečná. Byla vyvinuta celá řada metod pro detekci chaosu, ale pouze některé jsou vhodné i pro ekonomické časové řady, protože existuje celá řada problémů. Pro získání spolehlivých výsledků je zapotřebí velkých datových souborů. Množství a kvalita dat jsou zásadní pro jejich aplikaci v empirické ekonomické analýze. Zejména testování časových řad makroekonomických ukazatelů jsou obecně provázeny s určitou nedůvěrou. Byly zaznamenány přesvědčivé důkazy nelinearity, ale relativně slabé důkazy o přítomnosti chaosu v časových řadách makroekonomických ukazatelů. To je způsobeno nedostatečným množstvím dat a vysokou hladinou šumu u většiny časových řad makroekonomických ukazatelů. Další problém spočívá v agregaci časových řad přicházející ze systému, jehož dynamika a měřicí sondy se mohou v průběhu času měnit. Na rozdíl od laboratorních experimentů, kde lze snadno získat velké množství dat, ekonomické časové řady se skládají z měsíčních, čtvrtletních nebo ročních údajů, s výjimkou některých finančních časových řad. Právě finanční časové řady jsou dobrým kandidátem pro analýzu chaotického chování. Jsou k dispozici v dostatečném množství, ale pořád je tu otázka kvality dat. Pro analýzu ekonomických časových řad jsou nutné metody, které pracují s malými soubory dat a jsou robustní proti šumu. Z těchto důvodů byly vyvinuty nelineární metody analýzy časových řad využitelné také v ekonomii např. Abarbanel et al. (1993), Farmer et Sidorowich (1987), Fraser et Swinney (1986), Hegger et al. (1999), Henry et al. (2001), Kantz et Schreiber (2004), Kennel et al. (1992), Packard et al. (1980), Schreiber (1999) etc. Právě analýza časových řad z hlediska fraktální geometrie a teorie chaosu, může odhalit nové poznatky. Kristoufek et Vosvrda (2013, 2014) vyvinuli novou metodu měření efektivnosti kapitálových a komoditních trhů založenou na dlouhodobé i krátkodobé paměti. Elliott et al. (1948) přišel s technickou analýzou založenou na fraktálech a Fibonacciho číselné řadě.

## 4.2 *Chaos v makroekonomii*

Ekonomii lze chápat jako velký otevřený systém, který je ovlivňován celou řadou fluktuací a zásahů jak vnitřních tak vnějších. V minulosti bylo předmětem zkoumání ekonomů chování tohoto systému v blízkosti rovnovážného stavu. V rovnovážném stavu se systém chová „ukázněně“ a do jisté míry předvídatelně. Pokud je systém vychýlen z rovnovážného stavu, může dojít k zesílení výchyly a systém může nabývat zcela nových stavů.

V současné dynamické ekonomické teorii existují dva důležité proudy. Převládajícím proudem je model celkové dynamické stochastické rovnováhy. Jeho převaha je zajištěna institucionálně, neboť řada centrálních bank tyto modely používá pro realizaci své měnové politiky. Tyto modely se prosazují s diskutabilním úspěchem a tak zejména v poslední době jejich kritika narůstá. Druhým proudem, který se neprosazuje s takovou vehemencí jako modely celkové dynamické rovnováhy, jsou nelineární dynamické makroekonomické modely. Určitou překážku v jejich aplikacích je ve značné matematické náročnosti těchto modelů, nicméně s nárůstem výkonů počítačů je tato překážka pomalu odstraňována. Jejich největší předností je (i při relativně jednoduché nelineární struktuře) schopnost generování složité dynamiky ekonomických veličin, kterou lze charakterizovat jako nelineární neperiodické oscilace, tedy vlastnost, kterou mají ekonomické časové řady.

Teorie chaosu znamenala významnou změnu v uvažování makroekonomických teoretiků. Teorie chaosu stimuluje hledání mechanismů, které generují pozorované úkazy v realitě, a minimalizuje roli exogenních šoků. V tomto smyslu by to mohlo znamenat posun ve vysvětlení ekonomických jevů, jako jsou výkyvy, nestabilita, recese a krize. To podtrhla průkopnická práce Benhadib et Day (1981), která poukázala na potenciální užitečnost teorie chaosu a jejich nástrojů pro analýzu ekonomických jevů. Následně byla zjištěna přítomnost chaotické dynamiky v mnoha standardních makroekonomických modelech. Hommes (1991) představil chaos v modelech Hicksova typu se zpožděním v investicích a spotřebě. Chiarella (1990) ukazuje nový pohled na teorii endogenních cyklů ve světle chaosu a zároveň představil obecnou nelineární nabídkovou funkci v tradičním pavučinovém modelu, který obsahuje režim zdvojování period i chaos. Společným znakem většiny těchto modelů je, že nelineární dynamika má tendenci vznikat v důsledku uvolnění předpokladů všeobecné rovnováhy.



### 4.2.1 Gabishův model

Gabischův model (Gabisch, 1984) je jedním z nejjednodušších chaotických ekonomických modelů, jenž je založen na vzájemné vazbě mezi akcelerátorem a multiplikátorem. Tento model je odvozen z původního Samuelsonova modelu akcelératoru-multiplikátoru a je velmi podobný Hicksovou modelu. Zatímco investice u Samuelsonova modelu jsou funkcí spotřeby  $I_t = k(C_t - C_{t-1})$ , u Gabischova a Hicksův modelu jsou investice funkcí hrubého národního produktu  $I_t = k(Y_t - Y_{t-1})$  (Nusse et Hommes, 1990). Model založený na nelineárních diferenčních rovnicích je možné napsat následovně:

$$Y_t = C_t + I_t \quad (4.2.1)$$

$$I_t = k(Y_t + Y_{t-1}), \quad k > 1 \quad (4.2.2)$$

$$C_t = c(Y_{t-1})^\alpha, \quad \alpha \geq 1, \quad 0 < c < 1 \quad (4.2.3)$$

kde Y je hrubý národní produkt, C spotřeba a I investice. Po dosazení uvedených rovnic do jedné:

$$Y_{t+1} = \frac{Y_t(k - cY_t^{\alpha-1})}{k-1} \quad (4.2.4)$$

Gabischův model je tedy dán nelineární diferenční rovnicí:

$$x_{t+1} = G(x_t) \quad (4.2.5)$$

G se nazývá Gabischovým zobrazením. Necht' je dáno tříparametrické zobrazení  $G(x; \alpha, k, c)$ :

$$G(x; \alpha, k, c) = \frac{x(k - cx^{\alpha-1})}{k-1} \quad (4.2.6)$$

Gabischovo zobrazení G má jeden nestabilní fixní bod nula a druhý fixní bod je

$$x^* = \left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \quad (4.2.7)$$

Gabisch dále ve své práci dokázal, že pokud

$$k = \left(1 + \alpha^{\frac{\alpha}{(1-\alpha)}} - \alpha^{\frac{1}{(1-\alpha)}}\right)^{-1}, \quad (4.2.8)$$

pak existuje periodická orbita s periodou tři, což je chaos ve smyslu Li a Yorka. Obecně Li-Yorkův teorém dokazuje, že zobrazení  $f$  je chaotické, pokud existuje periodický bod s periodou větší než druhého řádu (Li et York, 1975).

Gabischův model je možné dále rozšířit:

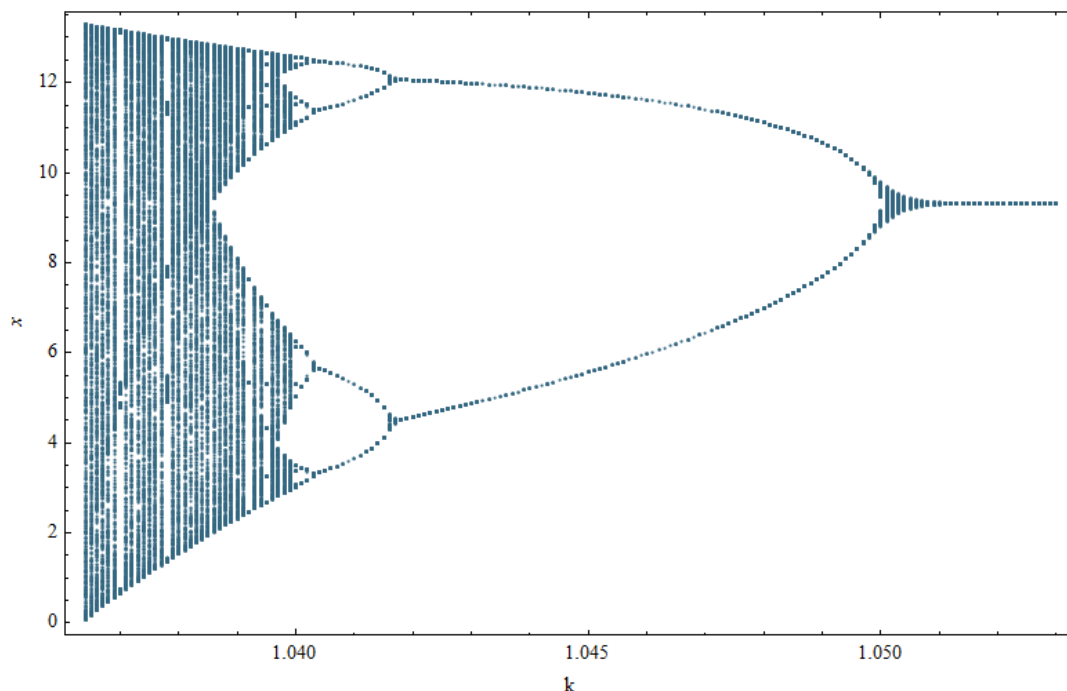
$$Y_t = C_t + T_t + G \quad (4.2.9)$$

$$I_t = k(Y_t + Y_{t-1}), \quad k > 1 \quad (4.2.10)$$

$$C_t = c(Y_{t-1} - T)^\alpha, \quad \alpha \geq 1, \quad 0 < c < 1 \quad (4.2.11)$$

Po dosazením uvedených rovnic do jedné:

$$Y_{t+1} = \frac{(kY_t - c(Y_t - T)^\alpha) - G}{k-1} \quad (4.2.12)$$



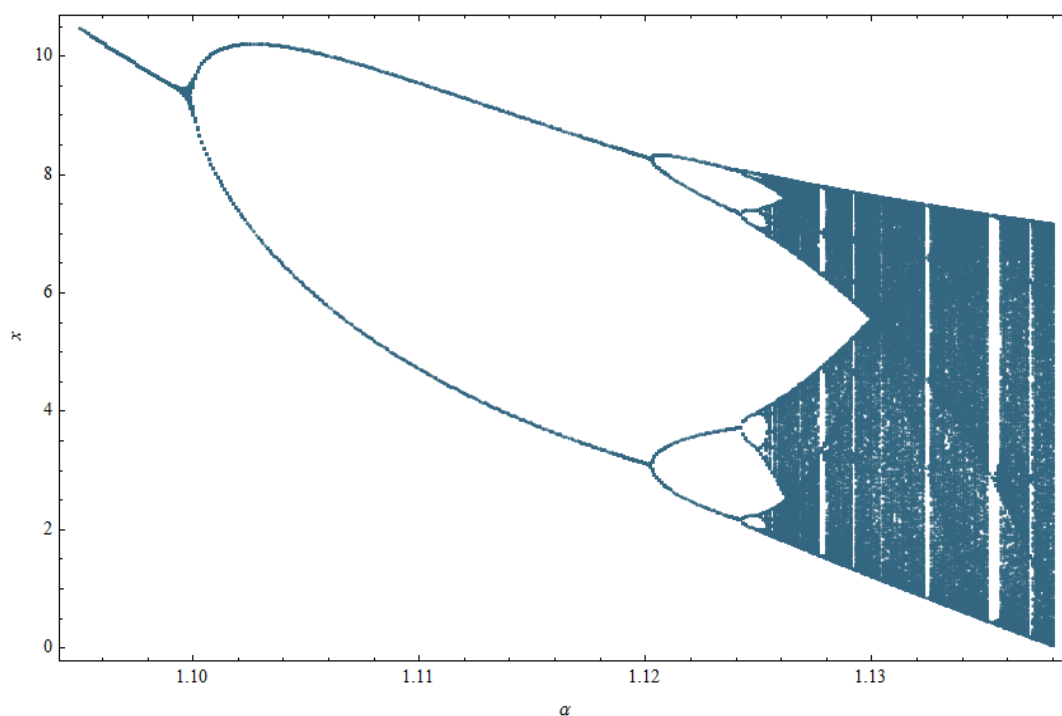
**Obr. 4.1.** Bifurkační diagram části Gabischovy mapy v závislosti na parametru  $k$ , kde ( $\alpha=1,1$ ;  $c=0,8$ ;  $x_0=0,3$ )

Kříž (2014b) porovnává Gabishův model s výsledky HDP v České republice. Porovnání je založeno na předpokladu, že hledaná funkce bude kubickou rovnicí s jedním nulovým kořenem s chaotickým projevem.

$$y_{t+1} = y_t(\alpha y_t^2 - \beta) \quad (4.2.13)$$

Následuje její porovnání se základní verzí Gabischova modelu. Gabischův model obsahuje tři parametry ( $k$ ,  $\alpha$ ,  $c$ ). Z první restrikce, týkající se chaotického chování plyne, že  $k$  je dané rovnicí (4.2.8). Z druhého předpokladu, kubická funkce s jedním nulovým kořenem, plyne, že  $\alpha$  musí být 3. Je zde soulad s teorií, neboť Gabischovo zobrazení má vždy jeden nestabilní fixní bod roven 0. Výsledná rovnice vznikne dosazením uvedených předpokladů do Gabischova modelu (4.2.4):

$$y_{t+1} = y_t \left( \frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}-2}{2} c y_t^2 \right) \quad (4.2.14)$$

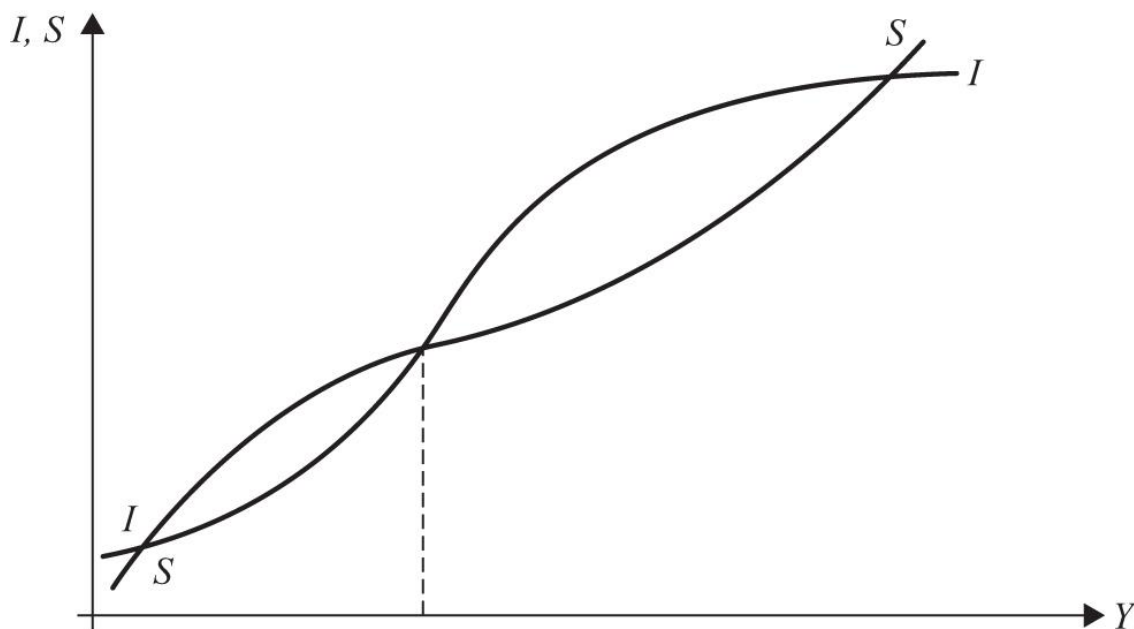


**Obr. 4.2.** Bifurkační diagram části Gabischovy mapy v závislosti na parametru  $\alpha$ , kde ( $k=1,05$ ;  $c=0,8$ ;  $x_0=0,3$ )

Gabischův model je svou jednoduchostí spíše vhodný pro úvod do této problematiky, než k reálným simulacím. Problém spočívá ve volbě parametru spotřební funkce, kde chaotické chování vyžaduje, aby mocninná spotřební funkce měla mocninu vyšší než jedna, což odporuje ekonomické zkušenosti. Podstatou Gabischova modelu je rovnice s podobnými vlastnostmi jako logistická rovnice, která již byla detailněji popsána. Není bez zajímavosti, že z mnoha podobných ekonomických diskretních modelů vyplyne právě logistická rovnice. A není bez zajímavosti, že v mnoha reálných systémech dochází k sérii zdvojování period podobně jako u logistické rovnice. Feigenbaum (1983) úspěšně aplikoval logistické zobrazení při studiu turbulencí. Ale čekat, že pomocí matematické analýzy bude možné z Navier-Stokesových rovnic odvodit logistické zobrazení, je opravdu přehnané (Steward, 2009).

#### 4.2.2 Kaldorův model

Autorem tohoto modelu je jeden ze zakladatelů postkeynesiánství a zároveň jeden z nejvýznamnějších osobností ekonomie Nicholas Kaldor. Kaldor ovlivněn Keynesovou (1936) teorií se pokoušel vysvětlit existenci cyklů v ekonomice. Hospodářské cykly jsou v makroekonomii úzce spjaty s investičními výkyvy. Makroekonomické teorie endogenního cyklu je možné vysvětlit dvěma způsoby. Je to způsobené buď zpožděním mezi investičním rozhodnutím a realizací investic, nebo nelinearitami v investiční funkci (Kodera et al. 2012). Podle Keynesa (1936) by měla ekonomika dosáhnout rovnováhy, pokud jsou si hladina úspor a investic rovny, ale takové rovnováhy nejsou pozorovány v reálném světě. To se Kaldor (1940) pokusil vysvětlit pomocí nelineárních závislostí investic a úspor. Investiční příležitosti jsou saturovány vysokou aktivitou (tj. jsou přijímány všechny individuální investice a tudíž jsou vyšší náklady a vyšší investiční riziko) a naopak nízká aktivita investic je důsledek nízkého očekávání tržeb. To vede k sigmoidální závislosti. Kaldor (1940) ukazuje, že  $I(t)$  a  $S(t)$  nemohou být obě zároveň lineární a je pravděpodobné, že jsou nelineární obě. Pro vznik endogenního cyklu však stačí, když je nelineární jen jedna z nich.



**Obr. 4.3.** Závislost investic a úspor na aktivitě (reálném produktu) v Kaldorově modelu.

Kaldorova originální idea je založena na analýze vývoje výroby a tvorby kapitálu. Kaldorův model obchodního cyklu je jedním z prvních nelineárních modelů makroekonomie. Přestože Kaldorův model je poměrně jednoduchý, může být vhodným prototypem pro složitější modely a je zdrojem komplikované dynamiky. Lorenz (1993) uvádí, že Kaldorův model je prototypem modelu nelineární dynamické ekonomie. Kaldorův model je složen ze dvou rovnic.

$$\frac{dY(t)}{dt} = \alpha[I(Y(t), K(t)) - S(Y(t), K(t))] \quad (4.2.15)$$

$$\frac{dK(t)}{dt} = I(Y(t), K(t)) - \delta K(t) \quad (4.2.16)$$

kde  $Y(t)$  je reálný produkt,  $K(t)$  kapitál,  $I(Y(t), K(t))$  jsou investice, které jsou rostoucí funkcí produkce a klesající funkcí kapitálu. Parametr  $\alpha$  je kladný. Malé hodnoty parametru  $\alpha$  značí pomalou reakci firem na nerovnováhu způsobenou buď jejich vysokou averzí k riziku, nebo monopolizací trhu. Úspory  $S(Y(t), K(t))$  jsou rostoucí funkcí produkce a kapitálu,  $\delta$  značí stupeň depreciae.

Systém (4.9, 4.10) je možné ve stacionárním bodě  $(Y^*, K^*)$  linearizovat pomocí Taylorova rozvoje a získat Jacobiho matici:

$$J = \begin{pmatrix} \alpha(I_Y - S_Y) & \alpha(I_K - S_K) \\ I_Y & I_K - \delta \end{pmatrix} \quad (4.2.17)$$

s determinantem

$$\det J = \alpha(I_Y - S_Y)(I_K - \delta) - \alpha I_Y(I_K - S_K) \quad (4.2.18)$$

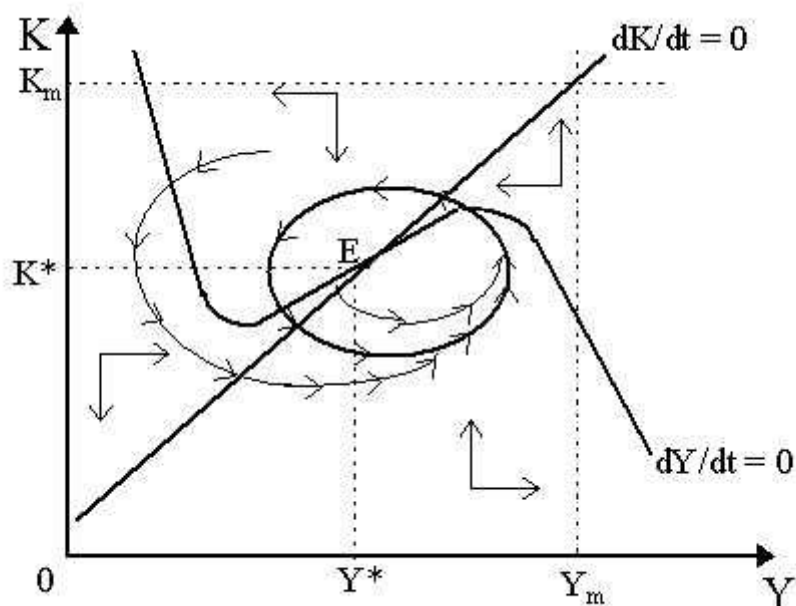
a stopou

$$\text{tr} J = \alpha(I_Y - S_Y) + (I_K - \delta) \quad (4.2.19)$$

Vlastní čísla tohoto lineárního modelu jsou:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{tr} J \pm \sqrt{(\text{tr} J)^2 - 4 \det J}}{2} \quad (4.2.20)$$

Rovnováha je asymptoticky stabilní, pokud jsou reálné části vlastních čísel negativní. Detailnější analýzu modelu provedl např. Lorenz (1993). V souladu s Poicaré-Bendixonovým teorémem model vykazuje limitní cyklus - neexistuje jeden rovnovážný bod, ale model neustále osciluje. Amplitudy cyklu rostou s rostoucím parametrem  $\alpha$ . Existují dvě stabilní rovnováhy vlevo a vpravo a jedna nestabilní rovnováha uprostřed (obr. 4.3). Předpokládá se, že normální úroveň výstupu je někde kolem prostředního bodu.



**Obr. 4.4.** Fázový portrét Kaldorova modelu ekonomického cyklu (Yamagata, 2016)

Diskrétní Kaldorův model je možné získat nahrazením diferenciálního operátoru  $d/dt$  operátorem diferenčním  $\Delta$ :

$$Y_{t+1} = \alpha[I(Y_t, K_t) - S(Y_t, K_t)] + Y_t \quad (4.2.21)$$

$$K_{t+1} = I(Y_t, K_t) + (1 - \delta)K_t \quad (4.2.22)$$

Nahrazení diferenciálního operátoru  $d/dt$  operátorem diferenčním  $\Delta$  v Kaldorově modelu způsobí kvantitativně rozdílné chování. Binter et Vácha (2005) provedli ve svém modifikovaném diskretním Kaldorovu modelu bifurkační analýzu a poukázali na celou škálu bifurkací.

Szydłowski et Krawiec (2001) analyzují Kaldor-Kaleckého model (4.15,4.16). Model pracuje s časovým zpožděním  $T$  v investičních procesech. Je zde ukázáno, že existuje Hopfova bifurkace vedoucí k limitnímu cyklu.

$$\frac{dY(t)}{dt} = \alpha[I(Y(t), K(t)) - S(Y(t), K(t))] \quad (4.2.23)$$

$$\frac{dK(t)}{dt} = I(Y(t-T), K(t)) - \delta K(t) \quad (4.2.24)$$

Akhmet et al. (2014) prokázali v modifikovaném Kaldor-Kaleckém modelu s exogeními šoky deterministický chaos.

## 5 Metodika detekce deterministického chaosu

Cílem této kapitoly je stanovení metodiky detekce deterministického chaosu a uvést základní chaotické deskriptory vhodné k posouzení míry ztráty informace, nelinearity a chaotičnosti. Zároveň popsat algoritmy využívané pro samotný odhad těchto deskriptorů. Při analýze dynamických systémů je důležité určit invarianty systémů. Pro lineární systémy je invariantem Fourierova frekvence. Pro chaotické systémy je typická širokopásmová Fourierova frekvence, která je však pro popis chaotického systému nevhodná.

Na první pohled je těžké rozlišit, zda zkoumaná data jsou stochastická nebo vznikla deterministicky chaotickým procesem. Pro popis chaotických systémů se používají dva typy deskriptorů. První dávají informaci o geometrické struktuře trajektorií ve fázovém prostoru a představitelem jsou fraktální dimenze (Hausdorffova, informační, korelační atd.). Druhá skupina deskriptorů popisuje dynamiku daného systému. Nejvýznamnější jsou Ljapunovovy exponenty popisující dynamiku vývoje blízkých trajektorií ve fázovém prostoru. Gilmore (1993) klasifikuje metody používané v analýze časových řad pro detekci chaosu na metrické, dynamické a topologické. Metrické metody jsou založeny na výpočtu vzdáleností v atraktoru systému a zahrnují výpočet korelační dimenze. Dynamické metody jsou založeny na výpočtu rozbíhavosti drah dynamického systému v čase na základě odhadu Ljapunovových exponentů. Topologické metody jsou charakterizovány studiem organizace atraktoru a hlavním představitelem této metody je rekurentní analýza. V této práci jsou využity metrické, dynamické i topologické metody.

### 5.1 Úprava časových řad

Prvním krokem je posoudit zda se jedná o vhodnou časovou řadu z různých hledisek. Mnohdy se stává, že u reálných dat některé hodnoty chybějí a pro účely dalších analýz je nutné se s tím vyrovnat. Mnohdy se je nutné doplnit chybějící hodnoty. Doplněné hodnoty samozřejmě nejsou plnohodnotné a jejich velký počet snižuje věrohodnost následujících analýz. Obecně jsou doporučovány následující postupy:

- Ignorování chybějících dat. Nelze většinou doporučit u ekonomických časových řad.
- Nahrazení chybějících hodnot nulami. Vhodné pouze v případech, kdy je průměr časové řady roven nule.
- Nahrazení chybějící hodnoty nějakou centrální charakteristikou souboru dat nebo pouze okolních bodů. Nejčastěji je používán aritmetický průměr nebo medián.

- Nahrazení chybějících hodnot lineární interpolací mezi sousedními body. Vhodné pro řady vykazující výraznou setrvačnost.
- Nahrazení chybějících hodnot trendem celého souboru získaného regresí vhodné křivky
- Nahrazení chybějících hodnot odhadem založeným na známém či odhadnutém modelu chování procesu.

Reálné ekonomické řady mohou obsahovat celou škálu šumů. Existuje mnoho studií zabývajících se úpravou a hlavně detrendováním ekonomických časových řad viz např. Hodrick et Prescott (1997) nebo Nelson et Plosser (1982). Je nutné si uvědomit, že jakýkoliv zásah může ovlivnit charakter původní řady. Pro analýzu z hlediska teorie chaosu je vhodné co nejméně zasahovat do původní časové řady. Pokud to použítá metodika nevyžaduje, do originálních časových řad se nezasahuje.

### 5.1.1 Míry dynamiky

Někdy je vhodnější než samotná analýza původní časové řady, analyzovat časovou řadu odvozenou z původní časové řady. Pro účely zkoumání deterministického chaosu je vhodné analyzování tzv. měr dynamiky, které nám umožňují charakterizovat základní rysy "chování" časových řad. Pro časovou řadu  $y_t$ ,  $t = 1, \dots, T$  jsou definovány následující míry dynamiky:

Absolutní přírůstek (první diference)

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1} \quad t = 2, 3, \dots, T, \quad (5.1.1)$$

Druhá diference a analogicky diference vyšších řádů

$$\Delta^2 y_t = \Delta y_t - \Delta y_{t-1} \quad t = 3, 4, \dots, T, \quad (5.1.2)$$

Relativní přírůstek

$$\delta_t = \frac{\Delta y_t}{y_{t-1}} = \frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}} = \frac{y_t}{y_{t-1}} - 1 \quad t = 2, 3, \dots, T, \quad (5.1.3)$$

Koeficient růstu (tempo růstu)

$$k_t = \frac{y_t}{y_{t-1}} \quad t = 2, 3, \dots, T, \quad (5.1.4)$$

Průměrné tempo růstu se vypočítá jako geometrický průměr jednotlivých koeficientů růstu

$$\bar{k} = T^{-1} \sqrt[T]{\prod_{i=2}^T k_i} = T^{-1} \sqrt[T]{\prod_{i=2}^T \frac{y_i}{y_{i-1}}} = T^{-1} \sqrt{\frac{y_T}{y_1}}, \quad (5.1.5)$$



## 5.2 Klasická analýza časových řad

Hlavním cílem analýzy časových řad je pochopení mechanismu, na jehož základě vznikají příslušné hodnoty časové řady. Ekonomickou časovou řadou se rozumí řada  $y_t$  pro  $t = 1, 2, \dots, T$  hodnot jistého věcně a prostorově vymezeného ukazatele, která je uspořádána v čase směrem od minulosti do přítomnosti. Existuje několik základních metod a postupů při analýze časových řad.

### 5.2.1 Dekompozice časové řady

Klasická analýza ekonomických časových řad vychází z předpokladu, že časovou řadu  $y_t$  pro  $t = 1, 2, \dots, T$  je možné rozložit na čtyři složky: trendovou, cyklickou, sezónní a nesystematickou (Artl et al., 2002).

Trendová složka ( $T_t$ ) vyjadřuje dlouhodobou tendenci vývoje zkoumaného jevu. Je výsledkem dlouhodobých procesů působících stejným směrem.

Cyklická složka ( $C_t$ ) vyjadřuje kolísání okolo trendu, ve kterém se střídají fáze růstu a poklesu. Jednotlivé cykly (periody) se vytvářejí za období delší než jeden rok a mají nepravidelný charakter, tj. různou délku a amplitudu. Cykly jsou v ekonomických časových řadách způsobeny ekonomickými a neekonomickými faktory.

Sezónní složka ( $S_t$ ) vyjadřuje pravidelné kolísání okolo trendu v rámci kalendářního roku. Sezónní výkyvy se opakují každoročně ve stejných obdobích (délka periody je jeden rok) a vznikají v důsledku střídání ročních období nebo vlivem různých institucionalizovaných zvyků, jako jsou např. svátky, dovolené apod.

Nesystematická složka ( $e_t$ ) vyjadřuje nahodilé a jiné nesystematické výkyvy, ale také chyby měření apod. Nesystematická složka je prakticky přítomna ve všech reálných ekonomických řadách.

Samotná dekompozice může být aditivní:

$$y_t = T_t + C_t + S_t + e_t, \quad (5.2.1)$$

nebo multiplikativní:

$$y_t = T_t C_t S_t e_t, \quad (5.2.2)$$

Pro analýzy z hlediska teorie chaosu je zásadní přítomnost trendu. Artl et al. (2002) uvádí, že trend v časových řadách je možné popsat pomocí trendových funkcí a klouzavých průměrů nebo klouzavých mediánů. Modelování trendu pomocí trendových funkcí se používá, pokud vývoj časové řady odpovídá určité funkci času např. lineární, kvadratické,

exponenciální, S-křivky apod. Modelování trendu pomocí klouzavých průměrů nebo pomocí klouzavých mediánů se používá, je-li vývoj řady v důsledku silného vlivu nesystematické složky nerovnoměrný, nebo má extrémní hodnoty.

Při modelování trendu pomocí trendových funkcí se vychází z následujících předpokladů.

- a) Časová řada  $y_t$  pro  $t = 1, 2, \dots, T$  je řadou uspořádaných hodnot v čase  $t$ , které získáme měřením určitého ukazatele ve stejně dlouhých časových intervalech  $t$ .
- b) Časovou řadu  $y_t$  pro  $t = 1, 2, \dots, T$  je možno zapsat ve tvaru:

$$y_t = Y_t + e_t, \quad (5.2.3)$$

- c) V analýze časových řad je model  $Y_t$  funkcí času  $t$ , tj.  $Y_t = f(t)$ . Pokud se jedná o časovou řadu pouze s trendovou složkou, potom  $Y_t$  vyjadřuje model trendu  $T_t$  v čase  $t$ .

$$y_t = Y_t + e_t = T_t + e_t, \quad (5.2.4)$$

kde:

$T_t$  je systematická složka a představuje deterministický trend, který lze vyjádřit matematickou funkcí časové proměnné  $t$ ,

$e_t$  je nesystematická složka s vlastnostmi procesu bílého šumu, což znamená, že v každém čase  $t$ , platí

$$E(e_t) = 0, \quad D(e_t) = \sigma_e^2, \quad \text{cov}(e_{t-k}, e_t) = 0, \quad e_t = N(0, \sigma_e^2), \quad (5.2.5)$$

## 5.2.2 Box-Jenkinsova metodologie

Při dekompozici časových řad se nesystematická složka  $e_t$  uvažuje jako stochastická a dále se již neanalyzuje. Ve skutečnosti však také v nesystematické (reziduální) složce existují jisté systematickosti, jež jsou významné, a je proto nutné se jimi zabývat. Box et Jenkins (1970) vypracovali metodologii, která je založena na myšlence, že časová řada může být chápána jako řada stochastického charakteru. Na jejím základě lze modelovat systematickosti v reziduální složce. Na druhé straně je možné každou časovou řadu chápat jako realizaci stochastického procesu a Box-Jenkinsonova metodologie se stává relativně samostatným přístupem k analýze časových řad.

Podle Artl et al. (2002) lze časovou řadu chápat jako realizaci stochastického procesu. Stochastický proces je v čase uspořádaná řada náhodných veličin  $\{y(s,t), s \in S, t \in T\}$ , kde  $S$  je výběrový prostor a  $T$  je indexní řada. Pro každé  $t \in T$  je  $y(.,t)$  náhodná veličina definovaná na výběrovém prostoru  $S$ . Pro každé  $s \in S$  je  $y(s,.)$  realizace stochastického procesu definovaná na

indexní řadě  $T$ , tj. uspořádaná řada čísel, z nichž každé odpovídá jedné hodnotě indexní řady. Dále se předpokládá, že indexní řada je řadou celých čísel, tj.  $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ . U stochastického procesu je dána:

Střední hodnota

$$\mu_t = E(y_t), \quad (5.2.6)$$

Rozptyl

$$\sigma_t^2 = D(y_t) = E(y_t - \mu_t)^2, \quad (5.2.7)$$

Autokovarianční funkce

$$\gamma_{t,s} = \text{cov}(y_t, y_{t-k}) = E[(y_t - \mu_t)(y_{t-k} - \mu_{t-k})], \quad (5.2.8)$$

Autokorelační funkce

$$\rho_{t,s} = \frac{\text{cov}(y_t, y_{t-k})}{\sqrt{D(y_t)D(y_{t-k})}} = \frac{\gamma_{t,t-k}}{\sqrt{\gamma_{t,t}\gamma_{t-k,t-k}}} = \frac{\gamma_{t,t-k}}{\sqrt{\sigma_{t,t}^2 \sigma_{t-k,t-k}^2}}, \quad (5.2.9)$$

Stochastický proces je slabě stacionární resp. stacionární v kovariancích, platí-li  $\mu_t = \mu$ ,  $\sigma_t^2 = \sigma^2$  pro všechna  $t$  a kovarianční a korelační funkce závisí pouze na časové vzdálenosti náhodných veličin, tj.  $\gamma_{t,t-k} = \gamma_{t+k,t} = \gamma_k$  a  $\rho_{t,t-k} = \rho_{t+k,t} = \rho_{k,k} = \dots, -1, 0, 1, \dots$ .

Autokorelační funkce (ACF) podává informaci o síle lineární závislosti mezi veličinami  $y_t$  a  $y_{t-k}$ . Korelace mezi náhodnými veličinami  $y_t$  a  $y_{t-k}$  však může být způsobena jejich korelací s veličinami  $y_{t-1}$ ,  $y_{t-2}$ , ...,  $y_{t-k+1}$ . Parciální autokorelační funkce (PACF) podává informaci o korelaci veličin  $y_t$  a  $y_{t-k}$  očištěnou o vliv veličin ležících mezi nimi. Parciální autokorelaci se zpožděním  $k$  vyjadřuje parciální regresní koeficient  $\phi_{kk}$  v autoregresi  $k$ -tého řádu

$$y_t = \phi_{k1}y_{t-1} + \phi_{k2}y_{t-2} + \dots + \phi_{kk}y_{t-k} + e_t, \quad (5.2.10)$$

kde veličina  $e_t$  je nekorelovaná s veličinami  $y_{t-j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ .

Základem Box-Jenkinsovi metodologie je korelační analýza. Kombinují se autoregresivní modely  $AR(p)$  s modely klouzavých průměrů reziduální složky  $MA(q)$ . Box-Jenkinsova metodologie je odvozena pouze pro stacionární časové řady. Nicméně, některé nestacionární řady lze převést na řady stacionární.

### 5.2.3 Spektrální analýza časových řad

U metod založené na spektrální analýze časových řad se časová řada považuje za kombinaci určitého konečného nebo nekonečného počtu sinusových a kosinusových křivek s různými amplitudami a frekvencemi. Hlavním nástrojem spektrální analýzy je peridiogram umožňující grafickou formou identifikovat nejvýznamnější frekvence, obsažené v časové řadě. Periodogram  $S(\omega)$  dané časové řady  $y_t$  délky  $n$  je dán následujícím vztahem:

$$I(\omega) = \frac{1}{4\pi} [a^2(\omega) + b^2(\omega)], \quad (5.2.11)$$

kde

$$a(\omega) = \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{t=1}^n y_t \cos(\omega t), \quad (5.2.12)$$

$$b(\omega) = \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{t=1}^n y_t \sin(\omega t), \quad (5.2.13)$$

Tato metoda umožňuje určit významné složky periodicity, které se podílí na věcných vlastnostech zkoumaného procesu. Pro lineární systémy je invariantem Fourierova frekvence. Pro chaotické systémy je typická širokopásmová Fourierova frekvence, která je však pro popis chaotického systému nevhodná. Mezi základní představitele spektrální analýzy časových řad patří Fourierova transformace a vlnková (wavelet) transformace (WT). Fourierova transformace je založena na přechodu z časové do frekvenční oblasti

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi j\omega t} f(t) dt, \quad (5.2.14)$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi j\omega t} F(\omega) d\omega. \quad (5.2.15)$$

Vlnková transformace představuje alternativní přístup k diskrétní Fourierově transformaci (FFT) pro analýzu nestacionárních signálů a detekci bodů, pro které signál mění vlastnosti. Hlavní výhoda WT spočívá v její schopnosti analýzy signálů s proměnným časově-frekvenčním rozlišením.

Necht' je dána funkce zvaná mateřská vlnka, která tvoří jádro transformace:

$$\psi_{a;b}(x) = \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad a > 0; \quad b \in (-\infty, +\infty) \quad (5.2.16)$$

kde  $a$  značí měřítko a  $b$  časový posun. Vlnková transformace dané funkce  $h(x)$  je:

$$W[h](a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{a;b}^*(x) h(x) dx \quad (5.2.17)$$

$\psi^*(x)$  značí funkci, která je komplexně sdružená k  $\psi(x)$ .

### 5.3 Rekonstrukce fázového prostoru

Užitečné informace o určité časové řadě se získá ze zobrazení ve fázovém prostoru. Toto zobrazení může ukázat skrytou podstatu dané časové řady. Fázový prostor je prostor všech možných fyzikálních stavů daného systému. To znamená, že každý bod fázového prostoru jednoznačně určuje stav uvažovaného systému. Každým bodem fázového prostoru tedy prochází jedna trajektorie popisující časový vývoj daného systému, který se nachází v daném bodě fázového prostoru. Dynamika systému může být vyšetřována dynamikou pohybu bodů ve fázovém prostoru bodů (Abarbanel et al., 1993). Všechny body fázového prostoru tedy určují všechny možné stavy, do kterých se systém může dostat. Je to tedy jakási vizualizace vývoje systému. Pokud je čas spojitý, vývojem systému vzniká ve fázovém prostoru křivka. V případě diskrétního času mluvíme o množině bodů. Křivka ve fázovém prostoru začne po určitém čase zvýrazňovat charakteristickou strukturu, která se nazývá atraktor. Pokud je atraktorem bod nebo uzavřená křivka, lze předpovědět chování tohoto systému na libovolně dlouhou dobu. Křivka se nazývá uzavřená, pokud je uzavřený i interval  $I \in \mathbb{R} \langle a, b \rangle$  a  $k(a) = k(b)$ , kde  $k$  je zobrazení z  $I$  do daného prostoru. Chaotické systémy vytvářejí chaotický atraktor, který je neuzavřený. Pro rekonstrukci fázového prostoru se nejčastěji využívá metody zpoždění vycházející z Takensovy věty (Takens, 1981).

Hlavním cílem nelineární analýzy časových řad je určit, zda je daná časová řada deterministické povahy. Pokud ano, potom jsou vhodné následující otázky: „Jaký je rozměr fázového prostoru daného datového souboru? Je tento datový soubor chaotický?“ Klíčem k odpovědi na tyto otázky je metoda zvaná rekonstrukce fázového prostoru, která vychází z Takensovy věty (Takens, 1981). Takensova věta transformuje problém predikce z extrapolace v čase do interpolace ve fázovém prostoru. Takens ve svých úvahách došel k závěru, že lze z dané časové řady zjistit typické vlastnosti atraktoru tohoto systému, a případně tuto rekonstrukci použít k předpovědím. Základní myšlenkou této úvahy je, že charakteristické vlastnosti atraktoru jsou nezávislé na volbě fázového prostoru. Každý bod atraktoru je možné popsat nejméně  $d$  nezávisle proměnnými.

Nechť je dána časová řada  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , která je vložena do  $m$ -dimenzionálního fázového prostoru skrze stavový vektor. Bod ve fázovém prostoru je dán následovně:

$$Y_n = x_n, x_{n-\tau}, \dots, x_{n-(m-1)\tau} \quad n = 1, 2, \dots, N - (m-1)\tau, \quad (5.3.1)$$

kde  $\tau$  je časové zpoždění a  $m$  dimenze vnoření. Veličina  $\tau$  nám udává časovou vzdálenost mezi sousedními prvky a  $m$  udává celkovou dimenzi atraktoru. Veličiny  $\tau$  a  $m$  jsou

tedy parametry vnoření, na kterém je rekonstrukce fázového prostoru založena (Takens, 1985). Kompletní popis rekonstruovaného fázového prostoru signálu je dán maticí atraktoru:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} x_{1+(m-1)\tau} & \cdots & x_{1+\tau} & x_1 \\ x_{2+(m-1)\tau} & \cdots & x_{2+\tau} & x_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_N & \cdots & x_{N+(m-1)\tau} & x_{N+(m-1)\tau} \end{pmatrix}. \quad (5.3.2)$$

### 5.3.1 Optimální hodnota časového zpoždění

Existují různé metodiky stanovení optimální hodnoty časového zpoždění (Horák, 2003) a stanovená hodnota má přímý vliv na následnou rekonstrukci fázového prostoru. Pokud je stanovená hodnota příliš malá, rozdíl mezi jednotlivými stavy rekonstruovaného prostoru bude nepatrný a význam informací získaných tímto způsobem je pak malý. Naopak, pokud stanovená hodnota je příliš velká, může se stát, že jednotlivé stavy rekonstruovaného systému budou vnímány jako nezávislé. Neboli, volbou dlouhé časové vzdálenosti mezi jednotlivými stavy systému se ztratí souvislost jeho dynamiky a jako důsledek se takto rekonstruovaná trajektorie jeví jako stochastický proces (Kodera, 2009). To je důležité zejména pro chaotické systémy, které jsou vnitřně nepředvídatelné, čímž ztrácejí v průběhu času informaci o počátečním stavu (Kodba, 2005).

V současné době se jeví jako nejvýhodnější metody založené na teorii informace (Shannon, 1948). Informace je schopnost organizovat, nebo v organizovaném stavu udržovat (Beneš, 2010). Teorie informace vychází z pravděpodobnostního přístupu. Necht' existují dvě množiny měřených hodnot  $A = \{a_i\}$  a  $B = \{b_j\}$ . Množství informace, které jsou získány z měření  $b_j$  prostřednictvím měření  $a_i$  je dána vztahem:

$$I_{AB}(a_i, b_j) = \ln \frac{P_{AB}(a_i, b_j)}{P_A(a_i)P_B(b_j)}, \quad (5.3.3)$$

kde  $P_A(a_i)$  je pravděpodobnost pozorování hodnoty  $a_i$  z množiny  $A$  a obdobně  $P_B(b_j)$  je pravděpodobnost pozorování hodnoty  $b_j$  z množiny  $B$  a  $P_{AB}(a_i, b_j)$  je sdružená pravděpodobnost současného výskytu  $a_i$  i  $b_j$ .

Zprůměrováním tohoto výrazu přes všechna měření  $a_i$  a  $b_j$  se získá tzv. průměrná míra množství vzájemné informace mezi množinami měření  $A$  a  $B$ :

$$I_{AB} = \sum_{a_i, b_j} P_{AB}(a_i, b_j) \ln \frac{P_{AB}(a_i, b_j)}{P_A(a_i)P_B(b_j)}, \quad (5.3.4)$$

Analogicky je získána míru vzájemné informace mezi časovou řadou a časovou řadou posunutou o čas  $\tau$  jako funkci tohoto časového posunutí  $\tau$ , která je označena  $I(\tau)$ .

Konkrétní metodiku určování optimální hodnoty časového zpoždění vyvinuli Fraser et Swinney (1986). Necht' je dána časová řada  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N$ . Následně je nalezena minimální  $x_{min}$  a maximální  $x_{max}$  hodnotu této řady. Absolutní hodnota jejich rozdílu  $|x_{max} - x_{min}|$  je rozdělena do  $j$  stejně velkých intervalů, kde  $j$  je dostatečně velké celé číslo. Fraser et Swinney (1986) následně spočítají míru vzájemné informace:

$$I(\tau) = - \sum_{h=1}^j \sum_{k=1}^j P_{h,k}(\tau) \ln \frac{P_{h,k}(\tau)}{P_h P_k}, \quad (5.3.5)$$

kde  $P_h$  a  $P_k$  označují pravděpodobnost výskytu hodnoty z množiny  $h$  a  $k$ , respektive, a  $P_{h,k}(\tau)$  je sdružená pravděpodobnost současného výskytu  $x_i$  a  $x_{i+\tau}$ . V případě chaotického chování platí, že  $I(\tau) \rightarrow 0$  a  $(\tau) \rightarrow \infty$ , protože veličiny  $x_i$  a  $x_{i+\tau}$  již nejsou korelované a tedy  $P_{h,k}(\tau)$  je rovna nule. Obecně nás tedy zajímá minimum funkce  $I(\tau)$ . První minimum  $I(\tau)$  obsahuje největší množství informace bez úplné ztráty korelace mezi nimi. Z těchto důvodů Fraser et Swinney (1986) navrhuje použít první minimum  $I(\tau)$  jako optimální hodnotu časového zpoždění. Je nutné však poznamenat, že tento postup není univerzální a v některých případech selhává viz. Martinerie et al. (1992).

### 5.3.2 Optimální dimenze vnoření

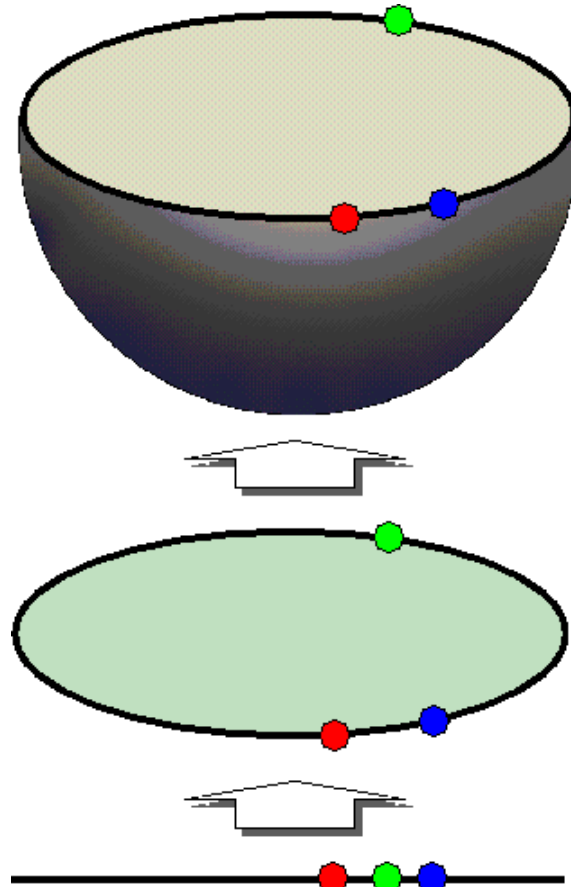
Vhodná dimenze vnoření  $m$  má zásadní význam na zobrazení atraktoru ve fázovém prostoru. Problém může být řešen pomocí projekce atraktoru o dimenzi  $d$  do prostoru o dimenzi  $m$ . Pokud hodnota  $m$  je dostatečně velká, je rekonstruovaná trajektorie vložení původní trajektorie. U volby dimenze vnoření platí postačující, ale nikoliv nutná podmínka  $m > 2D_C$  (Raidl, 2015).

U chaotických systémů by měla mít vhodná dimenze vnoření poměrně ostrou dolní hranici, zhruba odpovídající dimenzi atraktoru dynamického systému. Dalším zvyšováním dimenze vnoření by se získané výsledky neměly moc měnit, respektive by se měly velmi pomalu zhoršovat v důsledku přítomnosti šumu a numerických chyb. Příliš velká dimenze vnoření má také nevýhodu větší časové náročnosti výpočtů.

Existuje celá řada způsobů určení vhodné dimenze vnoření. Asi nejvhodnější se jeví metoda nejbližších falešných sousedů (FNN) vytvořená Kennel et al. (1992) a dále vylepšená

Hegger et Kantz (1999). Metoda nejbližších falešných sousedů je založena na projekci trajektorie systému z originálního fázového prostoru do prostoru s nižší dimenzí, při kterém dochází k tzv. překřížení této trajektorie se sebou samou. Kvůli tomuto překřížení vznikají tzv. falešní sousedé. Při zvyšování dimenze vnoření se počet těchto falešných sousedů postupně snižuje. Zcela vymizí v případě, že dimenze vnoření použítá při rekonstrukci je rovna skutečné dimenzi originálního fázového prostoru. Skuteční sousedé jsou blízko sebe při jakékoli dimenzi vnoření, samozřejmě i v původním fázovém prostoru. Metoda nejbližších falešných sousedů je potom založena na detekci jejich počtu při zvýšení dimenze vnoření (Kodera, et al., 2009).

Jednoduchá demonstrace metody nejbližších falešných sousedů je podle Bertenthal et al. (2015) uvedena na následujícím obrázku. Červené a zelené tečky se jeví jako nejbližší sousedé při promítnutí do jednoho rozměrného prostoru, ale při promítnutí ve vyšší dimenzi jsou již oba body (červený a zelený) značně vzdáleny. Naopak červené a modré tečky jsou blízcí sousedé ve dvourozměrném prostoru a stále jsou blízcí sousedé i v trojrozměrném prostoru. A tak je možné zkoumat všechny body v závislosti na zvyšující se dimenzi, dokud se objevují falešní sousedé.





**Obr.5.1.** Schéma metody falešných nejbližších sousedů (Bertenthal et al., 2015).

Nechť je dán rekonstruovaný stav v  $m$ -dimenzionálním prostoru:

$$y_m = x_n, x_{n-\tau}, \dots, x_{n-(m-2)\tau}, x_{n-(m-1)\tau} \quad (5.3.6)$$

K tomuto stavu je pak následující nejbližší souseď:

$$y_m^{NN} = x_n^{NN}, x_{n-\tau}^{NN}, \dots, x_{n-(m-2)\tau}^{NN}, x_{n-(m-1)\tau}^{NN} \quad (5.3.7)$$

Pokud je tento nejbližší souseď souseďem falešným, potom při zvýšení dimenze vnoření dojde ke zvětšení vzdálenosti mezi těmito stavy natolik, že již nelze je považovat za sousedy.

Zvýšení dimenze vnoření o jednu se souřadnice těchto dvou stavů změní na:

$$y_{m+1} = x_n, x_{n-\tau}, \dots, x_{n-(m-1)\tau}, x_{n-m\tau} \quad (5.3.8)$$

$$y_{m+1}^{NN} = x_n^{NN}, x_{n-\tau}^{NN}, \dots, x_{n-(m-1)\tau}^{NN}, x_{n-m\tau}^{NN} \quad (5.3.9)$$

Dále bude zkoumána vzdálenost mezi těmito stavy. Pro účely této práce je kalkulována euklidovská vzdálenost. Euklidovská vzdálenost těchto dvou stavů ve fázovém prostoru o dimenzi vnoření  $m$  je:

$$R_m = \|y_m - y_m^{NN}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_{n-(i-1)\tau} - x_{n-(i-1)\tau}^{NN})^2} \quad (5.3.10)$$

Euklidovská vzdálenost těchto dvou stavů ve fázovém prostoru o dimenzi vnoření  $m+1$  je:

$$R_{m+1} = \|y_{m+1} - y_{m+1}^{NN}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m+1} (x_{n-(i-1)\tau} - x_{n-(i-1)\tau}^{NN})^2} \quad (5.3.11)$$

$$R_{m+1}^2 = R_m^2 + (x_{n-m\tau} - x_{n-m\tau}^{NN})^2 \quad (5.3.12)$$

Dále definujeme poměr  $r$ :

$$r = \sqrt{\frac{R_{m+1}^2 - R_m^2}{R_m^2}} = \frac{|x_{n-m\tau} - x_{n-m\tau}^{NN}|}{R_m} \quad (5.3.13)$$

Pokud hodnota poměru  $r$  překročí jistou prahovou hodnotu, budou sousedé považováni za falešné sousedy. Za dostatečnou dimenzi vnoření se bere hodnota, která snižuje počet falešných sousedů k nule.

## 5.4 Ljapunovovy exponenty

Ljapunovovy exponenty jsou čísla, která popisují divergenci blízkých trajektorií. Zhruba řečeno, vzdálenost blízkých trajektorií je úměrná  $e^{\lambda n}$  pro diskrétní čas, kde  $\lambda$  je Ljapunovův exponent (Pokorný, 2008). Kladné  $\lambda$  značí rozbíhání, záporné  $\lambda$  značí přibližování trajektorií. Je-li alespoň jeden Ljapunovův exponent kladný, je to považováno za dostatečný signál, že se studovaný systém chová chaoticky (pro zvolené počáteční podmínky a zvolené hodnoty parametrů).

Nechť je dán dynamický diskrétní systém:

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (5.4.1)$$

lze časový vývoj odchylky vyjádřit diferenciálem:

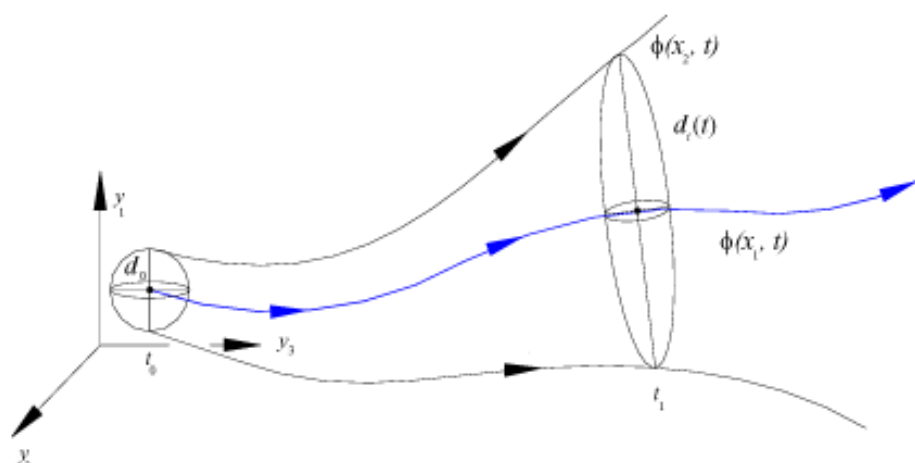
$$dx_{n+1} = J(x_n)dx_n \quad (5.4.2)$$

kde  $J$  je Jacobiho matice parciálních derivací zobrazení  $f$ . Potom

$$dx_n = \prod_{i=0}^{n-1} J(x_i)dx_0 \quad (5.4.3)$$

Tedy obrazem jednotkové hyperkoule je hyperelipsoid. Ljapunovovy exponenty jsou střední hodnoty logaritmu rychlosti růstu jeho poloos a vyjadřují rychlost růstu vzdáleností v čase

$$\lambda(dx_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{dx_n}{dx_0} \right| \quad (5.4.4)$$



**Obr. 5.2.** Ljapunovovy exponenty – schéma divergence blízkých trajektorií (Savi, 2005)

Pro různé volby  $dx_0$  je možné získat tolik Ljapunovových exponentů, kolik je dimenze stavového prostoru (tolik poloos má výše zmíněný elipsoid).

$$dx_n \approx e^{\lambda n} |dx_0| \quad (5.4.5)$$

Ljapunovovo spektrum v  $m$  dimenzionálním prostoru jsou uspořádané exponenty  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m$ . Pro chaotické chování je nutné, aby byl alespoň jeden Ljapunovův exponent kladný. To samo ještě nestačí, musí se vyloučit asymptotická periodičita, tj. že v limitě  $n \rightarrow \infty$  trajektorie nepřechází v periodickou orbitu. Toto může způsobovat problém u reálných systémů reprezentovaných konečným počtem měření. Hyperchaotické systémy jsou chaotické systémy s více než jedním kladným Ljapunovovým exponentem. Limita  $n \rightarrow \infty$  vytváří z Ljapunovova exponentu veličinu globální. Pokud ale vezmeme jen část fázového prostoru a konečný čas, dostáváme lokální Ljapunovův exponent.

A největší Ljapunovův exponent je

$$\lambda_{\max} = \sup_{dx_0} \lambda(dx_0) \quad (5.4.6)$$

Největší Ljapunovův exponent hraje důležitou roli pro určování, zdali je systém chaotický nebo ne. Výpočet největšího Ljapunovova exponentu přímo z definice je poměrně obtížné. Praktický odhad největšího Ljapunovova exponentu je zpravidla založen na pracích Wolf et al. (1985) a Sato et al. (1987), ze kterého jsou odvozeny další vylepšené algoritmy např. Rosenstein et al. (1993) a Kantz (1994).

Podstatou Satoho algoritmu je zkoumání vývoje vzdálenosti dvou různých bodů  $x_i, x_j$  atraktoru daného systému. Necht' je dán tok systému  $f^t$  a různé body  $x_i, x_j$  a zároveň  $x_i$  je nejbližší bod  $x_j$ , potom je aproximace největšího Ljapunovova exponentu dána vztahem:

$$\lambda(t) = \frac{1}{t} \left\langle \ln \frac{\|f^t(x_i), f^t(x_j)\|}{\|x_i, x_j\|} \right\rangle \quad (5.4.7)$$

kde  $\langle \rangle$  značí ansámblový průměr. Vzhledem k pomalé konvergenci navrhuje Sato et al. (1987) ekvivalentní rychleji konvergující vztah:

$$\lambda(t, \tau) = \frac{1}{t} \left\langle \ln \frac{\|f^{t+\tau}(x_i), f^{t+\tau}(x_j)\|}{\|f^t(x_i), f^t(x_j)\|} \right\rangle \quad (5.4.8)$$

Pro odhad největšího Ljapunovova exponentu je použit Rosensteinův algoritmus (Rosenstein et al., 1993) založen na následujícím vzorci.

$$\lambda(i) = \frac{1}{i\Delta t} \cdot \frac{1}{(M-i)} \sum_{j=1}^{M-i} \ln \frac{d_j(i)}{d_j(0)} \quad (5.4.9)$$

kde  $\Delta t$  je vzorkovací čas,  $d_j(i)$  je vzdálenost  $j$ -tého bodu k jeho nejbližšímu sousedovi po  $i$  časových krocích a  $M$  je počet rekonstruovaných bodů. Rosensteinův algoritmus je obzvlášť výhodný pro malé množství dat.

$$\lambda(i) = \frac{1}{i\Delta t} \cdot \frac{1}{(M-i)} \sum_{j=1}^{M-i} \ln \frac{d_j(i)}{d_j(0)} \quad (5.4.10)$$

## 5.5 Fraktální dimenze

Základní myšlenka je založena na fraktální struktuře zkoumaných časových řad. Kapacitní dimenze je vhodná pro myšlenkovou abstrakci od euklidovské (topologické) dimenze k dimenzi fraktální, ale její výpočet není vždy jednoduchý. Problém je především v konečném počtu dat, nepřesnosti měření a chybě výpočtu. Z těchto důvodů byla vyvinuta celá řada metod vhodných pro praktický výpočet z reálných dat.

### 5.5.1 Korelační dimenze

Asi neznámější a nejpoužívanější prakticky spočitatelná fraktální dimenze je korelační dimenze od Grassberger et Procaccia (1983). Algoritmus byl ještě dále upraven a zobecněn. Hlavní výhodou tohoto algoritmu je relativní přesnost výpočtu při omezeném množství dat.

Nechť je dán pro množinu dat délky  $M$  korelační integrál:

$$C(\varepsilon) = \frac{1}{M(M-1)} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^M \Theta(\varepsilon - \|x_i - x_j\|) \quad (5.5.1)$$

kde  $\Theta$  je Heavisidova funkce:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad (5.5.2)$$

Pro výpočet je použita Euklidovská vzdálenost. Korelační integrál je spojen s korelační dimenzí pomocí mocninného zákona:

$$C(\varepsilon) \propto \varepsilon^{D_c} \quad (5.5.3)$$

$\varepsilon \rightarrow 0$   
 $M \rightarrow \infty$

Pokud dolní limita existuje, můžeme definovat korelační dimenzi:

$$D_C = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ M \rightarrow \infty}} \frac{\partial \ln(C(\varepsilon))}{\partial \ln(\varepsilon)} \quad (5.5.4)$$

Pro praktický výpočet je však tento vztah nevhodný, vzhledem k omezenému množství dostupných údajů. Z toho důvodu se získává korelační dimenze vynesáním  $\ln C(\varepsilon)$  vůči  $\ln(\varepsilon)$ . Sklon křivek pro různé dimenze vnoření  $m$  udávají různé hodnoty  $D_C$ . Tento proces je stochastický, pokud nedochází k saturaci korelační dimenze při zvyšování  $m$ . Saturace  $D_C$  od určité hodnoty  $m$ , ukazuje, že generující proces časové řady není náhodný, ale spíše deterministický (Hegger, et al., 1999).

Praktické určování korelační dimenze není jednoduchá věc, proto existuje mnoho přístupů jak ji odhadnout. Další možností je vynést do grafu poměr  $\ln C(\varepsilon)/\ln(\varepsilon)$  vůči  $\ln(\varepsilon)$ . Korelační dimenze se určí ze střední oblasti, která by měla být vodorovná.

Korelační integrál  $C(\varepsilon)$  je v podstatě průměrná hustota, kde je lokální hustota získaná pomocí skokového jádra transformace:

$$\Theta(\varepsilon - r) \quad (5.5.5)$$

Naskýtá se tedy možnost, zvláště pro malé množství dat, nahrazení skokového jádra jádrem spojitým o šířce  $\varepsilon$ . Vhodným kandidátem pro toto nahrazení je Gaussova funkce:

$$e^{-\frac{r^2}{4\varepsilon^2}} \quad (5.5.6)$$

Takto upravený korelační integrál má stejné škálovací vlastnosti jako původní korelační integrál (Hegger, et al., 1999). Korelační integrál s Gaussovým jádrem se vypočítá z původního korelačního integrálu podle vztahu:

$$C_G(\varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^\infty d\tilde{\varepsilon} e^{-\frac{\tilde{\varepsilon}^2}{4\varepsilon^2}} \tilde{\varepsilon} C(\tilde{\varepsilon}) \quad (5.5.7)$$

Analogicky, pomocí mocninného zákona lze získat korelační dimenzi z korelačního integrálu s Gaussovým jádrem.

## 5.5.2 Higuchiho dimenze

Higuchiho dimenze  $D_{Hi}$  vychází přímo z časové domény, bez nutnosti konstrukce fázového prostoru (Higuchi, 1988).

Nechť je dána časová řada délky  $n$ ,  $x=x_1, x_2, \dots, x_n$  a z této časové řady je vytvořena nová časová řada:

$$X_m(k) : x(m), x(m+d), x(m+2d), \dots, x(m + \left[ \frac{N-m}{k} \right] k) \quad m = 1, 2, \dots, k \quad (5.5.8)$$

kde  $m$  je iniciační čas a  $k$  je časový interval. A pro každý člen  $X_m(k)$  je spočítána jeho délka podle vzorce:

$$L_m(k) = \frac{1}{k} \left\{ \left( \sum_{i=1}^{\left[ \frac{N-m}{k} \right]} |x(m+ik) - x(m+(i-1)k)| \right) \left[ \frac{N-1}{\left[ \frac{N-m}{k} \right] k} \right] \right\} \quad (5.5.9)$$

a průměrná hodnota všech délek  $L_m(k)$  přes všechna  $k$ :

$$\langle L(k) \rangle = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k L_m(k) \quad (5.5.10)$$

v souladu s mocninným zákonem je vypočítána Higuchiho dimenze:

$$\langle L(k) \rangle \propto k^{-D_H} \quad (5.5.11)$$

## 5.6 Entropie

Entropie obecně značí stupeň neuspořádanosti, nebo-li jak moc se daný systém chová stochasticky nebo deterministicky. Původně zavedl entropii v termodynamice Clausius (1850), kdy definoval změnu entropie při diferenciální vratné změně stavu:

$$\Delta S = \int \frac{\delta Q_{rev}}{T} \quad (5.6.1)$$

kde  $\delta Q$  je vratně přijaté teplo a  $T$  je absolutní teplota plynu. Boltzman (1974) ji dále rozšířil do statistické mechaniky a propojil chápání mikrosvěta s makrosvětlem. Na základě kinetické teorie objasnil 2. větu termodynamiky a ukázal, že je vlastně statistickým zákonem. Boltzman (1974) definuje entropii  $S$  jako logaritmus měření počtu stavů se signifikantní pravděpodobností:

$$S = -k_B \sum_i p_i \log p_i \quad (5.6.2)$$

kde  $k_B$  je Boltzmanova konstanta. Následně ji Shannon (1948) uvedl ve své průlomové práci o teorii informace i v informatice. Entropie nám udává množství informace potřebné k predikci další hodnoty při požadované přesnosti.

Rényi (1961) definoval zobecněnou entropii zvanou podle něj Rényiho entropie  $q$ -tého řádu:

$$h_q = \frac{q}{1-q} \log \left( \sum_{i=1}^n p^q(i) \right) \quad q \geq 0 \text{ a } q \neq 0 \quad (5.6.3)$$

kde  $p(i)$  je pravděpodobnostní distribuce. Hodnotě  $q = 0$  odpovídá Hartleyho (1928) entropie:

$$h_H = h_0 = \log n \quad (5.6.4)$$

Limitním případem pro  $q \rightarrow 1$  je Shannonova (1948) entropie:

$$h_S = h_1 = k \sum_{i=1}^n p(i) \log p(i) \quad (5.6.5)$$

kde  $k$  je konstanta závislá na měřítku, obvykle  $k = -1$ .

Při analýzách časových řad je důležité určit vhodné časové zpoždění a dimenzi vnoření rekonstruovaného fázového prostoru. Schreiber (1999) uvádí závislost korelačního integrálu na dimenzi vnoření:

$$C_q(m, \varepsilon) = \alpha m \varepsilon^{-(q-1)h_q m} \varepsilon^{(q-1)D_q} \quad (5.6.6)$$

$\varepsilon \rightarrow 0$   
 $m \rightarrow \infty$

který definuje řád  $q$  entropie  $h_q$ . Entropie druhého řádu je nazývána Kolmogorov-Sinai nebo jen Kolmogorova entropie  $h_2$  a je vhodná pro analýzu časových řad. Grassberger et Procaccia (1983b) odvodili praktickou metodu pro její výpočet, založenou na korelačním integrálu zvanou Korelační entropií:

$$C_q(\varepsilon) \approx \varepsilon^s e^{-h_q m} \quad (5.6.7)$$

$\varepsilon \rightarrow 0$   
 $m \rightarrow \infty$

kde  $s$  značí sklon v grafu  $\ln C_q(\varepsilon)$  vůči  $\ln(\varepsilon)$

$$h_{2,d}(\varepsilon) = \frac{1}{\tau} \ln \frac{C_d(\varepsilon)}{C_{d+1}(\varepsilon)} \quad (5.6.8)$$

a

$$h_2 = \lim_{d \rightarrow \infty} h_{2,d}(\varepsilon) \quad (5.6.9)$$

$\varepsilon \rightarrow 0$

Kolmogorovova entropie je důležitým kvantifikátorem determinismu dynamického systému a udává, jakou rychlostí ztrácíme informace o chování našeho systému. Představuje tedy míru jeho předpověditelnosti a tato míra je úměrná převrácené hodnotě entropie. Pokud dynamický systém má nulovou entropii, je periodický. V případě, že má konečnou entropii, je chaotický a je-li entropie nekonečná, systém je pak čistě náhodný (Kodera et Van Quang, 2009).

## 5.7 Hurstův exponent

Hurstův exponent  $H$  určuje míru chaotičnosti časové řady. Dokáže nejen rozlišit chaotickou a náhodnou časovou řadu, ale navíc je schopen u chaotické časové řady nalézt dlouhodobý paměťový cyklus („long-memory effects“). Hurstův exponent nabývá hodnot od 0 do 1 a stejně jako fraktální dimenze, uvádí charakter objektu. Časová řada se nazývá antiperzistentní, pokud hodnota Hurstova exponentu je nižší než 0,5. U antiperzistentní časové řady po výchylce v jednom směru následuje velmi pravděpodobně výchylka ve směru opačném. Čistě stochastický proces má hodnotu 0,5. Pokud hodnota Hurstova exponentu je vyšší než 0,5 nazývá se časová řada perzistentní a vykazuje dlouhodobou paměť. Hodnoty, blíží se krajním bodům ukazují na významnou deterministickou povahu procesu. Jinak řečeno, hodnota 0 prezentuje tzv. růžový šum; hodnota 0,5 Brownův šum a hodnota 1 černý šum. Tyto extrémní hodnoty se však většinou v reálných procesech nevyskytují. Uvádí se, že většina procesů v přírodě má charakter perzistentních procesů, což znamená, že je zde přítomna dlouhodobá paměť, která způsobuje trendy a cykly. Mandelbrot nazval tento jev Josefovým efektem podle biblické události. „Přichází sedm let hojnosti v celé egyptské zemi. Po nich však nastane sedm let hladu a všechna hojnost v egyptské zemi bude zapomenuta. Hlad zemi úplně zničí. V zemi nebude po hojnosti ani potuchy pro hlad, který potom nastane, neboť bude velmi krutý...“ (Bible, 1993, Genesis 41:29-31) Lze tedy předpokládat perzistenci i u časových řad koncentrací zkoumaných polutantů. Dále je možné se setkat v perzistentních systémech s nenadálými skoky – diskontinuity, kdy se některá měnící se veličina může měnit téměř libovolnou rychlostí. Mandelbrot opět inspirovaný biblí nazval tyto katastrofy Noemovým jevem. Tyto katastrofy jsou projevem kladné zpětné vazby v systému. Jesefův a Noemův jev poukazují na skutečnost, že reálné procesy mají tendenci směřovat k setrvalému stavu, ale zároveň tyto tendence můžou velmi rychle zmizet a pak se zase objevit.

Existuje celá řada metod pro odhad Hurstova koeficientu, které jsou v podstatě založeny na analýze buď v časové, nebo frekvenční doméně. Srovnání vybraných metod provedl např. Geweke et Porter-Hudak (1983).



### 5.7.1 R/S analýza

R/S analýza je nejstarší a nepoužívanější metoda výpočtu Hurstova exponentu, kterou vyvinul hydrolog Hurst (1951) při zkoumání průtoku na řece Nilu. Hurst (1951) se zabýval možností staveb na Nilu. Zcela zásadní je určit kapacitu přehrady, která je dána přítokem a odtokem. Povšimnul si studiem historických dat, že tyto procesy nejsou náhodné. Zjistil, že po potopě větší než průměr, tak s velkou pravděpodobností bude následovat potopa ještě větší a opačně. Standardní dosud známé metody žádnou souvislost neprokázaly. Z těchto důvodů vyvinul novou metodu, která je založena na normalizaci přepočteného rozpětí lokální směrodatnou odchylkou. Toto přeškálování umožňuje porovnávat hodnoty za různá období. Pro výpočet Hurstova exponentu je nutné odhadnout závislost přeškálovaného rozpětí na velikosti časového intervalu  $n$  pozorování. Je tedy nezbytné spočítat průměrné přepočtené rozpětí pro každou hodnotu  $n$ . Pro časovou řadu délky  $n$ ,  $Y=Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ , je přeškálované rozpětí vypočteno následovně:

Řada odchylek od průměru daného úseku pro každý úsek je vypočtena následovně:

$$U_t = Y_t - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \quad \text{for } t = 1, 2, \dots, n \quad (5.7.1)$$

Řada akumulovaných odchylek pro každý úsek je vypočtena následovně:

$$V_t = \sum_{i=1}^n U_i \quad \text{for } t = 1, 2, \dots, n \quad (5.7.2)$$

Přeškálované rozpětí  $R$  se spočítá pro každý úsek  $n$ , dle následujícího vztahu:

$$R(n) = \max(V_1, V_2, \dots, V_n) - \min(V_1, V_2, \dots, V_n) \quad (5.7.3)$$

Obdobně pro každý úsek  $n$  se spočítá směrodatná odchylka  $S$ :

$$S(n) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2} \quad (5.7.4)$$

Očekávaná hodnota normalizovaného rozpětí směrodatnou odchylkou odpovídá mocninnému zákonu:

$$E \left[ \frac{R(n)}{S(n)} \right] = Cn^H \quad \text{as } n \rightarrow \infty \quad (5.7.5)$$

Mocninný zákon lze zjednodušeně definovat jako pravidlo, které vyjadřuje, jak závisí získaná informace na zvoleném měřítku. Odhad Hurstova exponentu je založen na využití regresní analýzy. Jednotlivé údaje  $[R(n)/S(n)]$  jsou závislé proměnné a velikosti  $n$  nezávislé proměnné. Hurstův exponent může být interpretován jako sklon přímky získané pomocí metody nejmenších čtverců pro zlogaritmované hodnoty  $[R(n)/S(n)]$  a  $n$ . Tento Log-log graf je vhodná praktická pomůcka pro určování Hurstova koeficientu. V případě, že se jedná o šum, pak směrnice se blíží hodnotě 0,5 (Weron, 2002). Pro malá  $n$  dochází k významným odchýlkám, a proto Annis et Lloyd (1976) navrhli zpřesnění, které následně doplnil Peters (1994).

$$E\left[\frac{R(n)}{S(n)}\right] = \begin{cases} \frac{n - \frac{1}{2}}{n} \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n}{2})} \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\frac{n-i}{i}} & \text{for } n \leq 340 \\ \frac{n - \frac{1}{2}}{n} \frac{1}{\sqrt{n\frac{\pi}{2}}} \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\frac{n-i}{i}} & \text{for } n > 340 \end{cases} \quad (5.7.6)$$

kde  $\Gamma$  je Gama funkce.

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt \quad (5.7.7)$$

Odhad realizovaný pomocí R/S analýzy nemusí být věrohodný u heteroskedastické a antiperzistentní řady. Pro účely této práce je naopak tato metoda vhodná.

### 5.7.2 DFA

Detrendovaná flukтуаční analýza (DFA), navržená Pengem et al. (1993), je založená na škálování rozptylů detrendované řady. Při detrendované flukтуаční analýze se postupuje obdobně jako u R/S analýzy. Je tedy nezbytné spočítat průměrné přepočtené rozpětí pro každou hodnotu  $n$ . Kantelhardt et al. (2002) tuto metodiku dále zobecnili a definovali multifraktální detrendovanou analýzu (MDFA).

Nechť je dána časová řada délky  $n$ ,  $x=x_1, x_2, \dots, x_n$ . V prvním kroku je vypočten průměr:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, n \quad (5.7.8)$$

Následně je vytvořena detrendovaná řada:

$$X_n = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, n \quad (5.7.9)$$

Tato detrendovaná řada je následně rozdělena do  $N = \text{int}(n/s)$  nepřekrývajících subřad o délce  $s$ . Vzhledem k tomu, že délka původní časové řady  $n$  většinou není násobkem uvažovaného časového měřítka  $s$ , krátký úsek na konci není zahrnut do výpočtu. Aby nedošlo k ignorování této části časové řady, opakuje se celý proces z opačného konce. Tím se celkem získá  $2N$  segmentů. U každého z těchto segmentů se vypočte lokální trend pomocí metody nejmenších čtverců. Rozptyl je pro každý interval  $v$  určen následovně:

$$F^2(s, v) = \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s (Y((v-1)s + j) - y_v(j))^2 \quad v = 1, \dots, N \quad (5.7.10)$$

$$F^2(s, v) = \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s (Y(n - (v-N)s + j) - y_v(j))^2 \quad v = N+1, \dots, 2N \quad (5.7.11)$$

kde  $y_v(j)$  je polynomiální regrese segmentu  $v$ . DFA1, DFA2, DFA3, ... odpovídá lineární, kvadratické, kubické a obecně polynomiální regresi daného stupně.

Flukтуаční funkce  $q$ -tého řádu vznikne zprůměrováním přes všechny segmenty:

$$F_q(s) = \left( \frac{1}{2N} \sum_{v=1}^{2N} (F^2(s, v))^{\frac{q}{2}} \right)^{\frac{1}{q}} \quad (5.7.12)$$

Standartní DFA je uvažována pro hodnotu  $q=2$ .

$$F_2(s) = \sqrt{\frac{1}{2N} \sum_{v=1}^{2N} F^2(s, v)} \quad (5.7.13)$$

Závislost přeškálování na flukтуаční funkci je vidět z log-log diagramu. Podle mocninného zákona platí:

$$F_q(s) \propto s^{h(q)} \quad (5.7.14)$$

Pro stacionární časové řady hodnota  $h(2)$  odpovídá hledanému Hurstovu exponentu. Funkce  $h(q)$  je nazývána zobecněný Hurstův koeficient.

### 5.7.3 GPH

Geweke et Porter-Hudak (1983) vyvinuli metodu určení Hurstova koeficientu s využitím Fourierovi transformace. Podstatou je analýza závislosti spektrální hustoty na frekvenci. Geweke et Porter-Hudak (1983) dokázali, že hustota spektrální funkce obecného fraktálního integrovaného modelu (např. FARIMA) s parametrem diference  $d$  je identická s fraktálním Brownovým pohybem s Hurstovým koeficientem  $H=d+0,5$ .

Periodogram výkonové spektrální hustoty pro vektor  $\{x_1, \dots, x_N\}$  je definován:

$$S_N(\omega_k) = \frac{1}{N} \left| \sum_{t=1}^N x_t e^{-2\pi i(t-1)\omega_k} \right|^2 \quad (5.7.15)$$

kde  $\omega_k$  jsou Fourierovy frekvence

$$\omega_k = \frac{k}{N} \quad k = 1, \dots, \left[ \frac{N}{2} \right] \quad (5.7.16)$$

Lineární regrese periodogramu na nízkých Fourierových frekvencích je dána:

$$\log\{P_N(\omega_k)\} = a - \hat{d} \log\left\{4 \sin^2 \frac{\omega_k}{2}\right\} + \varepsilon_k \quad (5.7.17)$$

Metodou nejmenších čtverců je určena směrnice závislosti periodogramu  $S_N$  na parametru diference  $d$ . Hurstův koeficient je dán vztahem  $H=d+0,5$ , kdy  $d = \hat{d}$ .

#### 5.7.4 AWC

Simonsen et Hansen (1998) přišli s metodou určení Hurstova koeficientu pomocí vlnkové (wavelet) transformace nazvanou zprůměrované vlnkové koeficienty (AWC).

Nechť je dána funkce  $h(x)$ . Soběpodobnost je definována jako statická invariance v transformaci:

$$x \rightarrow \lambda x \quad (5.7.18)$$

$$h \rightarrow \lambda^H h \quad (5.7.19)$$

Kde  $H$  je Hurstův exponent a po zkombinování předešlých vztahů:

$$h(x) \cong \lambda^{-H} h(\lambda x) \quad (5.7.20)$$

Nechť je dána funkce zvaná mateřská vlnka, která tvoří jádro transformace:

$$\psi_{a;b}(x) = \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad a > 0; \quad b \in (-\infty, +\infty) \quad (5.7.21)$$

kde  $a$  značí měřítko a  $b$  časový posun. Vlnková transformace dané funkce  $h(x)$  je:

$$W[h](a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{a;b}^*(x) h(x) dx \quad (5.7.22)$$

$\psi^*(x)$  značí funkci, která je komplexně sdružená k  $\psi(x)$ . Po dosazení předchozích vztahů:

$$W[h(x)](a, b) \cong W[\lambda^{-H} h(\lambda x)](a, b) \quad (5.7.23)$$

$$W[h(x)](a, b) \cong \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{-H} h(\lambda x) \psi^*\left(\frac{x-b}{a}\right) dx \quad (5.7.24)$$

$$W[h(x)](a, b) \cong \lambda^{-H-0.5} W[h(x)](\lambda a, \lambda b) \quad (5.7.25)$$

z předchozího vztahu a definice transformace plyne:

$$W[h(x)](a, b) \cong \lambda^{-H-0.5} W[h(x)](\lambda a, \lambda b) \quad (5.7.26)$$

Vlnková transformace je z definice skalární součin, tj. zobrazení z dvojdimenzionálního prostoru do jednodimenzionálního, a pokud se jedná o fraktální objekt, který je soběpodobný stačí napsat:

$$W[h](a) = \langle W[h](a, b) \rangle_b \quad (5.7.27)$$

kde operátor  $\langle \cdot \rangle_b$  značí aritmetický průměr s respektováním proměnné  $b$ . Prvním krokem metody AWC je vypočítání vlnkové transformace analyzovaných dat, následuje výpočet zprůměrovaných koeficientů  $W[h](a)$ . Hurstův koeficient je opět směrnice závislosti  $W[h](a)$  na  $a$  v log-log grafu.

## 5.8 Test 0-1

Gottwald et Melbourne (2004) představili nový test na detekci deterministického chaosu. Vstupem je časová řada a výstupem jedna skalární hodnota, jehož hodnota je mezi 0 a 1. Test 0-1 nezávisí na rekonstrukci ve fázovém prostoru, ale pracuje přímo s časovou řadou.

Nechť je dána skalární časová řada pozorování  $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ . Pro reálný parametr  $c \in (0, \pi)$  je dána Fourierova transformace:

$$z_c(n) = \sum_{j=1}^n \varphi_j e^{ijc}, \quad n = 1, \dots, N \quad (5.8.1)$$

nebo-li, rozepsané jako kosinová a sinová složka:

$$p_c(n) = \sum_{j=1}^n \varphi(j) \cos jc \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (5.8.2)$$

$$q_c(n) = \sum_{j=1}^n \varphi(j) \sin jc \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (5.8.3)$$

Difuzní chování proměnných  $p_c$  a  $q_c$  může být analyzováno pomocí středního kvadratického posunu (mean squared displacement):

$$M_c(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [p_c(j+n) - p_c(j)]^2 + [q_c(j+n) - q_c(j)]^2 \quad (5.8.4)$$

Podstatou tohoto testu je zkoumání dynamiky středního kvadratického posunu (Gottwald et Melbourne, 2004). V případě, že se jedná o chaotické chování, roste  $M_c(n)$  lineárně s časem. Hlubší teoretickou analýzu provedl Field et al. (2003). Gottwald et Melbourne, (2006) dále definují odečtením oscilační složky modifikovaný střední kvadratický posun, který má stejné asymptotické chování, ale lépe konverguje

$$D_c(n) = \frac{1}{N-n} \sum_{j=1}^{N-n} [p_c(j+n) - p_c(j)]^2 + [q_c(j+n) - q_c(j)]^2 - \left( \sum_{k=1}^N \frac{\phi_k}{N} \right)^2 \frac{1 - \cos nc}{1 - \cos c} \quad (5.8.5)$$

Závěrem se spočítá asymptotické tempo růstu  $K_c$  a to buď korelační metodou:

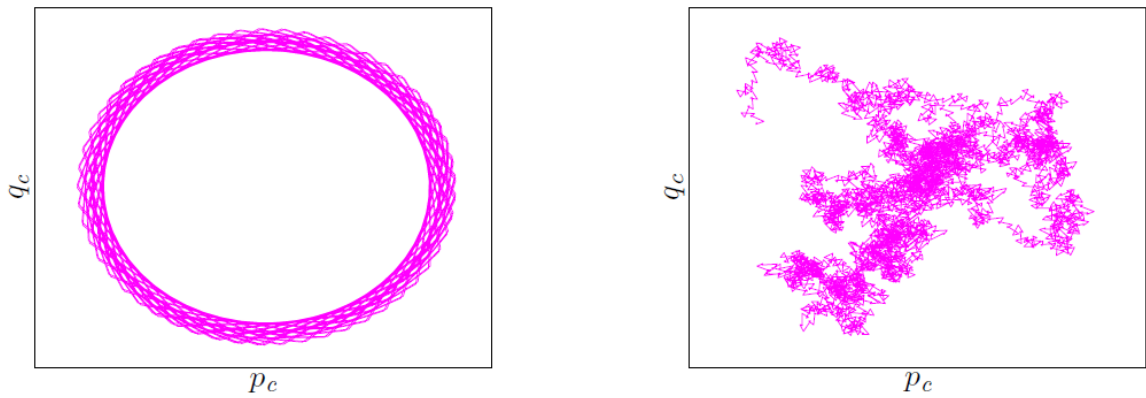
$$K_c^k = \frac{\text{cov}(n, D_c(n))}{\sqrt{\text{cov}(n, n) \text{cov}(D_c(n), D_c(n))}} \quad (5.8.6)$$

nebo regresní metodou:

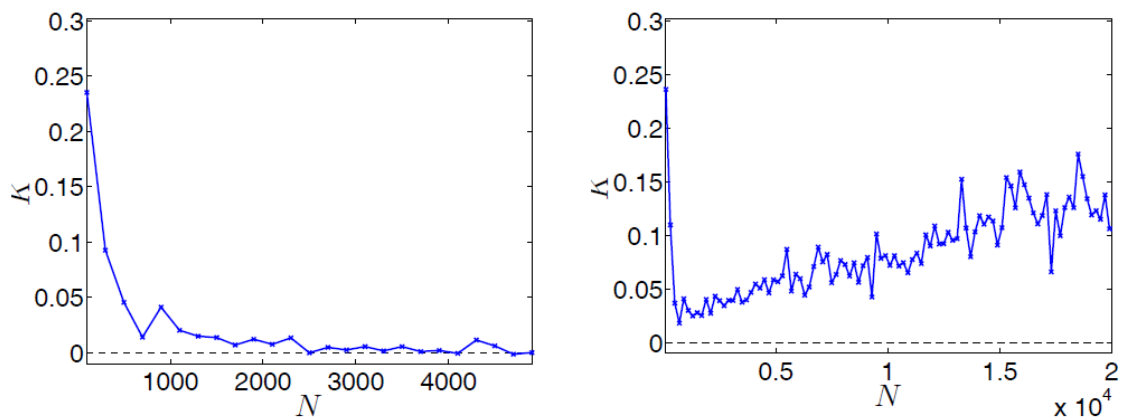
$$K_c^r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log D_c(n)}{\log n} \quad (5.8.7)$$

Pokud se  $K_c$  asymptoticky blíží k 1, tak se jedná o chaotické chování.

Pochopení podstaty testu je vidět z obr. 5.3 a 5.4, kdy v levé části je zobrazena regulérní dynamika a v pravé chaotická dynamika logistické rovnice.



**Obr. 5.3.** Graf závislosti  $p_c$  na  $q_c$  pro logistické zobrazení při použití  $N=5000$  datových bodů. Na levém obrázku je zobrazena regulérní dynamika pro parametr  $r=3,55$ . Na pravém obrázku je zobrazena chaotická dynamika pro parametr  $r=3,97$  (Gottwald et Melbourne, 2016)



**Obr. 5.4.** Graf závislosti  $K_c$  na délce časové řady  $N$  blízko hrany chaosu. Na levém obrázku je zobrazena regulérní dynamika pro parametr  $\mu=3,569$ . Na pravém obrázku je zobrazena chaotická dynamika pro parametr  $\mu=3,571$  (Gottwald et Melbourne, 2016)

## 5.9 Aplikace fraktální Fourierovy transformace

Fraktální (frakční) Fourierova transformace je lineární transformací zobecňující Fourierovu transformaci poprvé představena Condon (1931).

Pro  $\alpha \in R$  je definována fraktální Fourierova transformace následovně:

$$F_{\alpha}[f](u) = \sqrt{1 - i \cot(\alpha)} e^{i\pi \cot(\alpha) u^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi \left( \csc(\alpha) u x - \frac{\cot(\alpha)}{2} x^2 \right)} f(x) dx \quad (5.9.1)$$

kde

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} \quad (5.9.2)$$

a

$$\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} \quad (5.9.3)$$

Druhá odmocnina je definována tak, že argument výsledku leží v intervalu  $(-\pi/2, \pi/2)$ . Pokud je  $\alpha$  celočíselným násobkem  $\pi$ , pak se hodnoty  $\cot \alpha$  a  $\csc \alpha$  liší. Tyto limitní případy vedou k Dirakově delta funkci.

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty & \text{pro } x = 0 \\ 0 & \text{pro } x \neq 0 \end{cases} \quad (5.9.4)$$

kteřou je možné v komplexní rovině vyjádřit ve tvaru:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dx. \quad (5.9.5)$$

Tato práce přichází s využitím fraktální (frakční) Fourierova transformace pro detekci deterministického chaosu. Podobně jako u Testu 0-1 je zkoumána dynamika středního kvadratického posunu (mean squared displacement).

Difuzní chování reálné a imaginární části fraktální Fourierovy transformace je analyzováno pomocí středního kvadratického posunu:

$$M_c(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [\text{Re}(F_{\alpha}[f](u))(j+n) - \text{Re}(F_{\alpha}[f](u))(j)]^2 + [\text{Im}(F_{\alpha}[f](u))(j+n) - \text{Im}(F_{\alpha}[f](u))(j)]^2 \quad (5.9.6)$$

Užitečným nástrojem je zobrazení závislosti reálné složky na imaginární složce. Při vhodně zvoleném parametru  $\alpha$  je možné u reálných dat zřetelněji rozlišit rozdíl mezi stochastickým procesem a deterministickým chaosem



## 5.10 Rekurentní analýza

Rekurence je základní vlastností dynamických systémů, která může být využita pro analýzu vlastností systému ve fázovém prostoru. Rekurentní analýza je založena na topologickém přístupu, jejímž cílem je prokázání opakujících se vzorů a nestacionaritu časových řad. Toho se využívá ke studiu chaotických systémů, protože rekurence je důležitou vlastností chaotických systémů související s fraktální soběpodobností.

Eckmann et al. (1987) navrhli pro vizualizaci a nelineární analýzu dat jako vhodný nástroj rekurentní graf (*RP*). *RP* vyhledává opakující se vzory, nestacionarity a strukturální změny chování studovaného systému. Jedná se o vizualizaci čtvercové matice, ve které prvky matice odpovídají době, při které se stav dynamického systému opakuje.

Necht' je dána trajektorie dynamického systému v jeho fázovém prostoru. Trajektorie je tedy vektor, jehož prvky jsou body ve fázovém prostoru. Dynamika tohoto systému je popsána sérií těchto vektorů, reprezentující dráhu v abstraktním matematickém prostoru. *RP* odpovídá následující matici rekurence:

$$\mathbf{R}_{i,j} = \begin{cases} 1: \mathbf{x}_i \approx \mathbf{x}_j \\ 0: \mathbf{x}_i \neq \mathbf{x}_j \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, N \quad (5.10.1)$$

kde  $N$  je počet uvažovaných stavů a  $\mathbf{x}_i \approx \mathbf{x}_j$  znamená přibližnou rovnost s ohledem na odchylku  $r$ . Nastavení odchylky  $r$  je zásadní, neboť rekurence v dynamických systémech je většinou pouze přibližná. Rekurentní matice tedy vyhodnocuje stavy v čase  $i$  a  $j$ . *RP* je formálně vyjádřen následovně:

$$\mathbf{R}_{i,j}(r) = \Theta(r - \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|) \quad i, j = 1, \dots, N \quad (5.10.2)$$

kde  $N$  je počet měřených bodů  $\mathbf{x}_i$ ,  $r$  je prahová hodnota,  $\Theta$  je Heavisedova skoková funkce. Stavy v okolí  $r$  jsou značeny:

$$\mathbf{x}_i \approx \mathbf{x}_j \Leftrightarrow \mathbf{R}_{i,j} \equiv 1 \quad (5.10.3)$$

*RP* je získán zobrazením rekurentní matice pomocí různých barev. Černý bod souřadnic  $(i, j)$  odpovídá  $\mathbf{R}_{i,j} \equiv 1$ , a bílý bod, pokud  $\mathbf{R}_{i,j} \equiv 0$ . Obě osy *RP* jsou časové rostoucí směrem doprava a nahoru. Vzhledem k tomu, že  $\mathbf{R}_{i,i} \equiv 1$  pro všechna  $i$ , bude diagonála *RP* vždy černá. *RP* je vždy diagonálně symetrický a obsahuje alespoň jednu z následujících struktur tzv. textur: jednotlivé tečky, diagonální linie, svislé a vodorovné čáry. Tyto struktury mají následující význam:

- jednotlivé samostatné body znamenají, že stavy ve fázovém prostoru jsou jedinečné, systém v nich nesetrvává dlouho, nebo silně fluktuje,

- diagonální linie se vyskytuje v případě, když část trajektorie běží paralelně s jinou částí trajektorie, neboli trajektorie se vrací do stejné oblasti v různých časech,
- vertikální nebo horizontální linie znamenají, že stavy setrvávají v jednom bodě nebo se jen málo mění od tohoto bodu, systém je tedy uvězněn v těchto bodech.

Nejzajímavějším případem jsou diagonální linie. Tyto linie indikují existenci nestabilních periodických orbit a jsou tedy charakteristickým znakem přítomnosti determinismu. Pokud v rekurentním grafu existují pouze tyto diagonální linie, jedná se pak o periodický signál. Délka tohoto úseku je určena dobou, jak dlouho jednotlivé části trajektorie setrvává v těchto oblastech. V případě, že vzdálenost mezi diagonálními liniemi je různá, značí to složitou komplexní dynamiku systému.

Pro exaktnější interpretaci Zbilut et Webber (1992) a Marvan et al. (2002) vytvořili exaktní nástroj nazvaný kvantitativní rekurentní analýza *RQA*.

Rekurentní míra *RR* je definována jako podíl rekurentních stavů *i* a *j* v *RP*

$$RR = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \mathbf{R}_{i,j} \quad (5.10.4)$$

Míra determinismu *DET* je definována jako podíl stavů tvořící diagonální úseky na celkovém počtu stavů

$$DET = \frac{\sum_{l=l_{\min}}^n lP(l)}{\sum_{i,j=1}^n \mathbf{R}_{i,j}} \quad (5.10.5)$$

Laminarita *LAM* je definována jako podíl stavů tvořící vertikální úseky na celkovém počtu rekurentních stavů

$$LAM = \frac{\sum_{v=v_{\min}}^n vP(v)}{\sum_{v=1}^n vP(v)} \quad (5.10.6)$$

*Trend* je definován jako regresní koeficient lineárních závislostí mezi hustotou rekurentních stavů v jedné linii paralelní s diagonálou.

$$TREND = \frac{\sum_{i=1}^{\bar{N}} \left( i - \frac{\bar{N}}{2} \right) (RR_i - \bar{RR}_i)}{\sum_{i=1}^{\bar{N}} \left( i - \frac{\bar{N}}{2} \right)^2} \quad (5.10.7)$$

Doba v pasti  $TT$  (trapping time) je definována jako průměrná délka všech vertikálních linií a představuje průměrnou dobu, kterou se systém zdržuje v jednom ojedinělém stavu:

$$TT = \frac{\sum_{v=v_{\min}}^n vP(v)}{\sum_{v=v_{\min}}^n P(v)} \quad (5.10.8)$$

Entropie  $ENT$  poskytuje informace o komplexnosti deterministické struktury daného systému a je definována jako Shannonova entropie:

$$ENT = - \sum_{l=l_{\min}}^n p(l) \ln p(l) \quad (5.10.9)$$

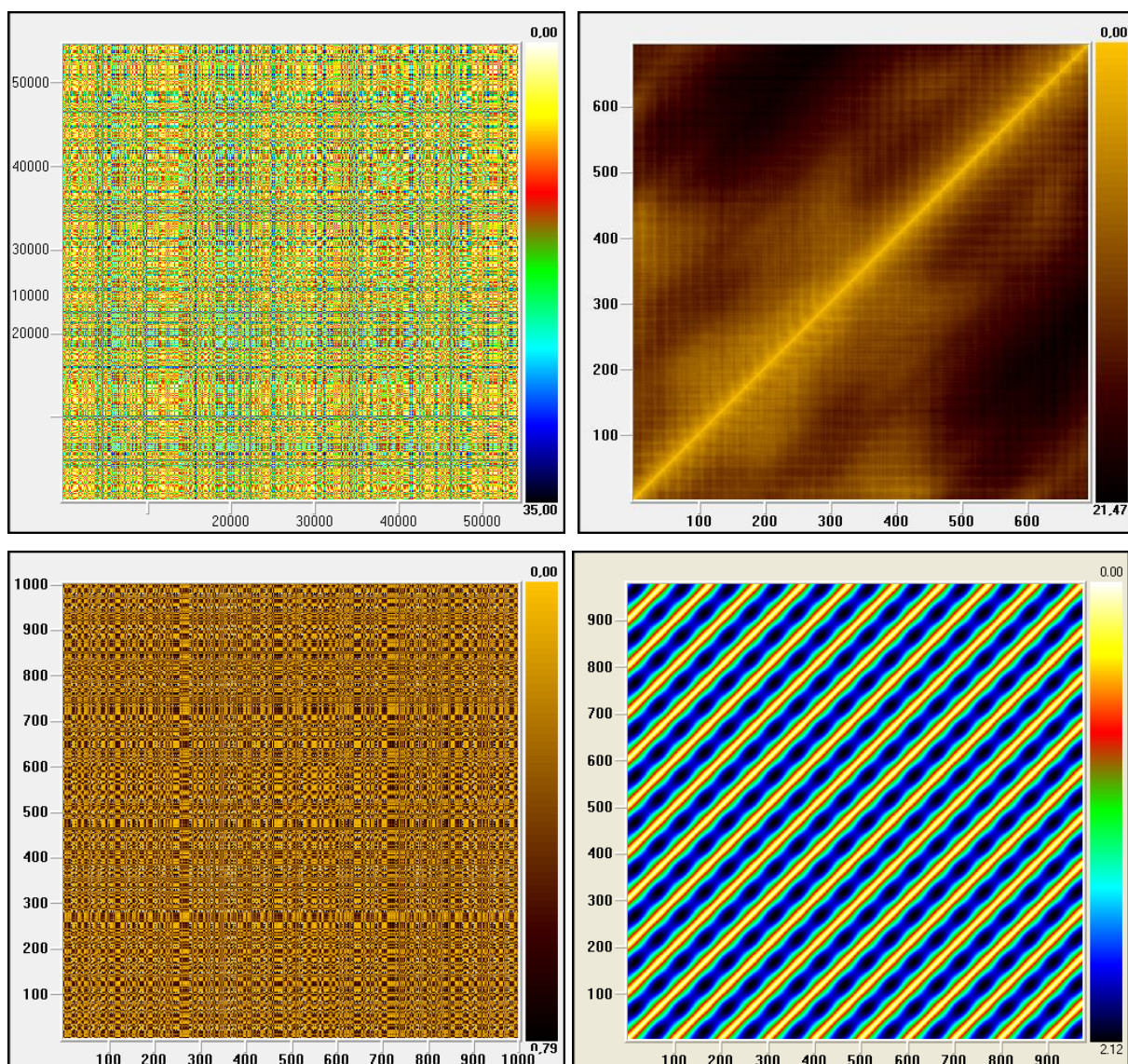
kde  $P(l)$  a  $P(v)$  jsou pravděpodobnosti výskytu diagonálního nebo vertikálního úseku délky  $l$  a  $v$  v  $RP$ .

$$P(l) = \sum_{i,j=1}^N (1 - R_{i-1,j-1})(1 - R_{i+1,j+1}) \prod_{k=0}^{l-1} R_{i+k,j+k} \quad (5.10.10)$$

a

$$P(v) = \sum_{i,j=1}^N (1 - R_{i,j})(1 - R_{i,j+v}) \prod_{k=0}^{v-1} R_{i,j+k} \quad (5.10.11)$$

Na obr. 5.5. jsou znázorněny rekurentní grafy různých typů systémů. U obr. 5.5 a), který znázorňuje bílý šum, jsou jedinou strukturou rekurentního grafu jednotlivé samostatné body, horizontální a vertikální linie. Samostatné body znamenají, že stavy ve fázovém prostoru jsou jedinečné, systém v nich nesetrvává dlouho, nebo silně fluktuje. Vertikální nebo horizontální linie znamenají, že stavy setrvávají v jednom bodě nebo se jen málo mění od tohoto bodu, systém je tedy uvězněn v těchto bodech. Na druhé straně u obr. 5.5. d), který znázorňuje deterministický předpis- funkci sinus, jsou výrazné diagonální linie. Ty se vyskytují v případě, když část trajektorie běží paralelně s jinou částí trajektorie, neboli trajektorie se vrací do stejné oblasti v různých časech. Pokud v rekurentním grafu existují pouze tyto diagonální linie, jedná se pak o periodický signál. Obrázky 5.5 b) a 5.5 c) vyjadřují situace nastávající mezi těmito extrémy. Obr. 5.5 b) znázorňuje Brownův šum a jsou zde patrné náznaky složité komplexní dynamiky systému. Obr. 5.5 c) znázorňuje logistickou rovnici s chaotickou dynamikou. V obrázku jsou patrné různé struktury, které bohužel nejsou příliš zřetelné.



**Obr. 5.5.** Rekurentní grafy různých systémů: a) nahoře vlevo bílý šum, b) nahoře vpravo brownův šum, c) dole vlevo logistická rovnice, d) dole vpravo sinus

## 5.11 Predikce

Obecně většinu vlastností chaotických systémů lze mnohem snadněji určit z rovnic, než z časových řad. Pokud by byly nalezeny odpovídající rovnice dané časové řady, dalo by se dokonce opustit analýzu časových řad a věnovat se analýze modelu. Ale tato situace je, kromě dobře kontrolovaných laboratorních experimentů, poměrně vzácná. Nicméně, analýzy samotného empirického modelu a analýzy dat generované tímto modelem, můžou otestovat konzistenci výsledků analýzy časových řad. V realitě, při vytváření modelu z dat, není záruka, že se výsledek blíží skutečné dynamice pozorovaného systému. Chaotické dynamické systémy obecně ukazují fenomén strukturální nestability. To znamená, že modely s velmi podobnými parametry mohou vykazovat kvalitativně odlišnou globální dynamiku.

V rekonstruovaném fázovém prostoru můžeme určit vztah mezi následujícím a současným stavem následovně:

$$X(t + T) = f(X(t)) \quad (5.11.1)$$

kde  $T$  představuje počet časových kroků dopředu předpovědi. Funkce  $f$  představuje aproximaci neznámého dynamického systému. Je ukázáno, že pro dostatečně velké hodnoty dimenze vnoření a jsou-li splněny některé další podmínky, zrekonstruovaná trajektorie má stejné topologické a geometrické vlastnosti jako fázový prostor trajektorie systému (Takens, 1981). To znamená, že pokud jsou splněny podmínky Takensovy věty, toto mapování zachycuje některé vlastnosti neznámého dynamického systému.

$$X(t + T) = f_p(X(t)) \quad (5.11.2)$$

Cílem je najít prediktor  $f_p$ , který by predikoval  $x(t + T)$  na základě rekonstruované časové řady. V případě, že časová řada je chaotická, pak  $f_p$  je nutně nelineární. Existuje mnoho přístupů (lokálních i globálních) k nalezení vhodného prediktora  $f_p$ .

Skupina lokálních modelů zahrnuje případy, kdy dochází k lokální linearizaci. Podle Hegger et al. (1999) jsou lokální lineární modely vázané pouze na případ, že je dobrý důvod předpokládat, že následující vztah

$$\hat{s}_{n+1} = f(s_n) \quad (5.11.3)$$

je možné použít na experimentální data jako dobrou předem zvolenou aproximaci neznámé funkce  $f$  a zároveň  $f$  je hladká. Neznámá funkce  $f$  se nahradí prvním členem Taylorova rozvoje. Následně je tedy možné provést minimalizaci následujícího vztahu:

$$\sigma^2 = \sum_{s_j \in U_n} (s_{j+1} - a_n s_j - b_n)^2 \quad (5.11.4)$$

Predikce je následně dána:

$$\hat{s}_{n+1} = a_n s_n + b_n \quad (5.11.5)$$

Lokální modely jsou jistě zajímavé, ale v některých případech můžou špatně predikovat, zvláště v případech, kdy vybrané body nejsou dostupné v dané dimenzi, nebo neexistuje inverzní matice k danému problému. Druhou velkou skupinou jsou modely globální, které jsou založeny na minimalizaci směrodatné odchylky:

$$\sigma^2 = \sum_n (s_{n+1} - f_p(s_n))^2 \quad (5.11.6)$$

kde  $f_p$  je nelineární funkce s parametrem  $p$ . Zásadním problémem je volba vhodné nelineární funkce  $f_p$ . Hegger et al. (1999) uvádí, že je možné použít přístupy založené na polynomiálních funkcích, radiálně bazických funkcích, neuronových sítí, ortogonálních polynomech atd. Výsledky predikce závisí na tom, jak byl vybrán vhodný prediktor  $f_p$  pro modelování neznámé nelineární funkce a na deterministické podstatě vůbec.

Funkce  $f_p$  v této práci je zvolena radiálně bazická funkce. Radiálně bazická funkce (RBF) je reálná funkce, jejíž hodnota závisí pouze na vzdálenosti od počátku, nebo alternativně na vzdálenosti od nějakého jiného bodu  $c$ , nazvaného centrum. RBF musí splňovat následující vztah:

$$\Phi(x) = \Phi(\|x\|) \quad (5.11.7)$$

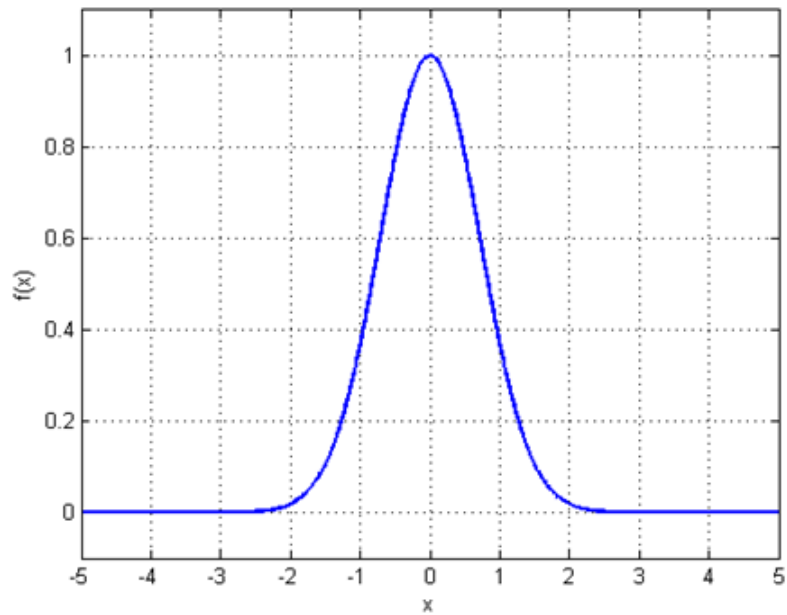
respektive:

$$\Phi(x, c) = \Phi(\|x - c\|) \quad (5.11.8)$$

Existuje celá řada radiálně bazických funkcí, které se prakticky používají pro reprezentaci jádra. V tomto modelovém případě je využito Gaussovské a polynomiální jádro.

Gaussovské jádro je dáno následovně (Obr.):

$$\Phi(x) = e^{-c^2 x^2} \quad (5.11.9)$$



Obr. 5.. Gaussovské jádro

Rovnice prediktoru je dána následovně:

$$f_p = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \Phi(\|x - x_i\|) \quad (5.11.10)$$

Respektive, předpis pro predikci s využitím Gaussovské jádra RBF:

$$x_{t+1} = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i e^{-(c\|x-x_i\|)^2} \quad (5.11.11)$$

Obdobně může být definován prediktor s využitím polynomiálních funkcí  $n$ -tého řádu:

$$f_p = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad (5.11.12)$$

## 5.12 Shrnutí

Základním cílem této disertační práce bylo vypracovat metodiku detekce deterministického chaosu v ekonomických časových řadách. Na základě výše uvedených kvantifikátorů deterministického chaosu je vypracován následující postup detekce deterministického chaosu.

**Krok č. 1** je posouzení vhodnosti časové řady z různých hledisek. Mnohdy se stává, že u reálných dat některé hodnoty chybějí a pro účely dalších analýz je nutné se s tím vyrovnat. Často je nutné doplnit chybějící hodnoty. V některých případech je možné chybějící hodnoty úplně ignorovat. Reálné ekonomické řady mohou obsahovat celou škálu šumů. Je nutné si uvědomit, že jakýkoliv zásah může ovlivnit charakter původní řady. Pro analýzu z hlediska teorie chaosu je vhodné co nejméně zasahovat do původní časové řady. Pokud to použité metodika nevyžaduje, aby se do originálních časových řad spíše nezasahovalo. Někdy je vhodnější než samotná analýza původní časové řady, analyzovat časovou řadu odvozenou z původní časové řady. Pro účely zkoumání deterministického chaosu je vhodné analyzování tzv. měr dynamiky, které nám umožňují charakterizovat základní rysy "chování" časových řad. Pro řady vykazující trend, především makroekonomické řady je vhodné analyzovat tempo růstu.

**Krok č. 2** je provedení rekonstrukce ve fázovém prostoru, která nám ukazuje nový pohled na danou časovou řadu. V případě dvou a tří dimenzionálního prostoru nám přímo vizuálně napoví fázový graf o skrytých vlastnostech zkoumané časové řady. Toto zobrazení může ukázat skrytou podstatu dané časové řady. Fázový prostor je prostor všech možných fyzikálních stavů daného systému. To znamená, že každý bod fázového prostoru jednoznačně určuje stav uvažovaného systému. Každým bodem fázového prostoru tedy prochází jedna trajektorie popisující časový vývoj daného systému, který se nachází v daném bodě fázového prostoru. Podstatou rekonstrukce je Takensova věta, která transformuje problém predikce z extrapolace v čase do interpolace ve fázovém prostoru. Základní myšlenkou této úvahy je, že charakteristické vlastnosti atraktoru jsou nezávislé na volbě fázového prostoru. Pro provedení rekonstrukce ve fázovém prostoru je nutné určit optimální hodnotu časového zpoždění a optimální hodnotu dimenze vnoření.

**Krok č. 3** spočívá v odhadu klasických invariantů systému tj. Ljapunovův exponent, korelační dimenze a Kolmogorova entropie. Konkrétní algoritmy výpočtu jsou uvedeny v předchozích kapitolách. Pokud je splněna klasická „Podmínka chaosu“, nebo-li pokud je Ljapunovův exponent kladný, korelační dimenze nabývá nízkých neceločíselných hodnot a



Kolmogorova entropie je kladné konečné číslo, můžeme usuzovat, že daný systém je chaotický. Splnit klasickou „podmínku chaosu“ z reálných dat je mnohdy velmi komplikované. Nedostatečné množství dat je hlavní problém analýzy deterministického chaosu v reálných dynamických systémech. Standardní metodika založená na výpočtu Ljapunovových exponentů či korelační dimenze je nevhodná. Wolf et al. (1985) uvádí, že minimální délka dat pro výpočet největšího Ljapunovova exponentu by měla být  $N \in (10^{D_2}, 30^{D_2})$ . Pro systém  $D_2=3$  je to 1000 až 30000 dat.

**Krok č. 4** je výpočet Hurstova exponentu. Hurstův exponent  $H$  určuje míru chaotičnosti časové řady. Dokáže nejen rozlišit chaotickou a náhodnou časovou řadu, ale navíc je schopen u chaotické časové řady nalézt dlouhodobý paměťový cyklus. Hurstův exponent nabývá hodnot od 0 do 1. Časová řada se nazývá antipersistentní, pokud hodnota Hurstova exponentu je nižší než 0,5. Čistě stochastický proces má hodnotu 0,5. Pokud hodnota Hurstova exponentu je vyšší než 0,5 nazývá se časová řada persistentní a vykazuje dlouhodobou paměť. Hodnoty, blížíící se krajním bodům ukazují na významnou deterministickou povahu procesu. Pokud hodnoty Hurstova exponentu leží někde mezi hodnotami 0 a 0,5 nebo 0,5 a 1 potvrzuje to přítomnost deterministického chaosu.

**Krok č. 5** spočívá v provedení nového testu 0-1 na detekci deterministického chaosu. Vstupem je časová řada a výstupem jedna skalární hodnota, jehož hodnota je mezi 0 a 1. Test 0-1 nezávisí na rekonstrukci ve fázovém prostoru, ale pracuje přímo s časovou řadou. Podstatou tohoto testu je zkoumání dynamiky středního kvadratického posunu. V případě, že se jedná o chaotické chování, roste střední kvadratický posun lineárně s časem. Alternativně je vhodné použít metodu založenou na fraktální Fourierově transformaci, která rozšiřuje test 0-1 Gottwald et Melbourne (2004).

**Krok č. 6** je založen na využití topologické metody rekurentní analýza. Rekurence je základní vlastností dynamických systémů, která může být využita pro analýzu vlastností systému ve fázovém prostoru. Rekurentní analýza je založena na topologickém přístupu, jejímž cílem je prokázání opakujících se vzorů a nestacionaritu časových řad. Toho se využívá ke studiu chaotických systémů, protože rekurence je důležitou vlastností chaotických systémů související s fraktální soběpodobností. Eckmann et al. (1987) navrhli pro vizualizaci a nelineární analýzu dat jako vhodný nástroj rekurentní graf (*RP*). *RP* vyhledává opakující se vzory, nestacionarity a strukturální změny chování studovaného systému. Jedná se o vizualizaci čtvercové matice, ve které prvky matice odpovídají době, při které se stav dynamického systému opakuje. Pro exaktnější interpretaci Zbilut et Webber (1992) a Marvan

et al. (2002) vytvořili exaktní nástroj nazvaný kvantitativní rekurentní analýza RQA. Je nutné poznamenat, že tato metoda je vhodná pro některé makroekonomické časové řady s omezenou délkou, ale její využití pro analýzu finančních trhů je spíše sporadické.

**Krok č. 7** spočívá ve vyhodnocení výsledků jednotlivých metod popsanych v krocích č. 3,4,5,6. Jedná se o mix metrických, dynamických a topologických metod vhodných pro analýzu časových řad z hlediska teorie chaosu. Obecně platí, že výsledky uváděných testů jsou věrohodné, pokud jsou splněny předpoklady těchto testů. Nedostatečné množství dat je hlavní problém analýzy deterministického chaosu v reálných ekonomických dynamických systémech. Situace je zřejmá pokud všechny popsané metody ukazují shodně. V případě pokud uvedené metody neukazují shodně, není již situace jednoznačná a je nutné situaci detailněji analyzovat. Pokud je k dispozici dostatečné množství dat a jsou splněny všechny předpoklady pro výpočet klasických invariantů systému (tj. Ljapunovův exponent, korelační dimenze a Kolmogorova entropie), je výsledek věrohodný. Pokud je splněna klasická „Podmínka chaosu“, nebo-li pokud je Ljapunovův exponent kladný, korelační dimenze nabývá nízkých neceločíslných hodnot a Kolmogorova entropie je kladné konečné číslo, můžeme usuzovat, že je daný systém chaotický. Naopak u rekurentní analýzy se ukazuje, že je vhodná právě pro kratší (řádově  $10^2$  hodnot) ekonomické řady. U takto krátkých časových řad je výpočet klasických invariantů systému nevěrohodný.

Uvedená metodika obsahuje metody a postupy, které byly autorem ověřeny na mnoha reálných ekonomických datech. Někteří autoři doporučují i jiné metody a testy. Používaný je např. BDS test (Broock et al., 1996) založený na konceptu korelačního integrálu. BDS test je neparametrický test nulové hypotézy, že zkoumaná data jsou nezávislá a stejnoměrně rozdělená. Bohužel přímo z tohoto testu nelze určit, zda zamítnutí nulové hypotézy zapříčinil deterministický chaos. Dále je to pak metoda náhradních dat (Surrogate data testing) od Schreiber et Schmitz (2000) vyvinutá k testování nelinearit. Opět z tohoto testu nemůžeme nic říci o deterministickém chaosu. Testy BDS a Surrogate je možné použít jako doplnění vypracované metodiky.

## 6 Trh elektrické energie

Tato kapitola se zabývá ověřením vypracované metodiky na příkladu cen elektrické energie. Je nutné poznamenat, že trh s elektrickou energií je unikátní a zároveň komplikovaný v tom, že elektřinu v podstatě ve velkém neumíme na rozdíl od jiných komodit efektivně skladovat. Z těchto důvodů má aplikace vypracované metodiky svá specifika.

### 6.1 Úvod

Evropský trh s elektřinou se postupně integruje, ale stále zůstává národně a regionálně rozdělen. V Evropě tak lze stále mluvit o několika regionálních trzích. Next Finance (2007) očekává, přestože je trh zatím výrazně rozdělen na menší celky, že bude probíhat konvergence směrem k jednotnému trhu, jehož výsledkem by měly být bezpečnější dodávky pro konečné spotřebitele. Mezinárodní obchod s elektřinou přispěje i k větší konkurenci, což by mělo přinést vyšší efektivitu s nižší cenou. Cílem evropské integrace trhu s elektřinou je úplná liberalizace v rámci Evropy. Na trhu by se přitom měly uplatňovat klasické tržní principy. V současné době mezi klíčové evropské burzy patří německá European Energy Exchange (EEX) skandinávská Nord Pool.

Velkoobchodní trh s elektrickou energií je klasický komoditní trh s mnoha hráči včetně spekulantů. Obchodují se jak spotové, tak i termínové kontrakty, což umožňuje kromě spekulace i zajištění se před nepříznivým vývojem ceny do budoucna, a tedy omezení rizika. Ceny na trhu s elektřinou jsou dány vztahem nabídky a poptávky. Cena elektřiny není určena pouze náklady na výrobu či úrovní mezd, ale také celou řadou dalších faktorů. Dokonce ani neplatí, že v chudých zemích je elektřina levnější než v zemích bohatých. Mezi hlavní determinanty ceny na straně nabídky patří: výrobní kapacita, provozní náklady a počasí. Na straně poptávky se hlavně projevuje počasí a makroekonomické faktory. Ciarreta et Zarraga (2010) poukazují na souvislost s růstem HDP a spotřebou elektrické energie. Každý z uvedených faktorů konkrétní trh formuje jinak a v jiném období. Nejvyšší cena elektrické energie je u skandinávské Nord Pool (Simonsen, 2003) v zimě, ale u kalifornské CalPX (Weron et Przybyłowicz, 2000) v létě. Spotové ceny jsou ovlivněny počasím více než ceny forwardové. A právě při predikci počasí byl poprvé objeven deterministický chaos. Ceny ročních a kvartálních dodávek jsou především určeny výrobními kapacitami, palivovými náklady, cenou povolenek a dlouhodobým trendem spotřeby. U časově bližších dodávek se již projevuje vliv počasí. Navíc se zde projevuje přesnější znalost disponibility výrobních zařízení a přenosové soustavy (Next Finance, 2007).

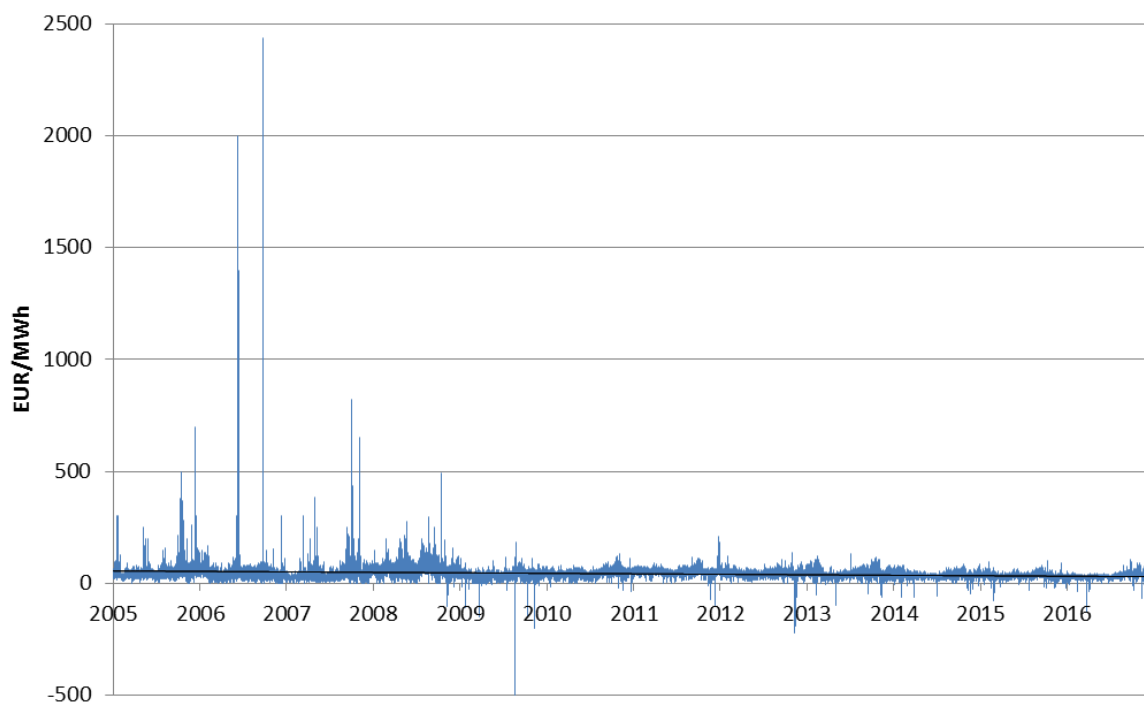
Trh s elektrickou energií je unikátní a zároveň komplikovaný v tom, že elektřinu v podstatě ve velkém neumíme na rozdíl od jiných komodit efektivně skladovat. V každém okamžiku musí výroba odpovídat spotřebě. Výrobci proto musí mít odhad, jak se bude vyvíjet poptávka po elektřině nejen během roku, ale i během každého dne a každé hodiny. Přesný odhad spotřeby podle jednotlivých hodin dne je samozřejmě komplikovaný. Na poslední chvíli je proto potřeba doladit nabídku s poptávkou. Svou roli hrají zejména dlouhodobě nepredikovatelné faktory, jako je třeba počasí. Počasí ovlivňuje jak stranu poptávky, tak také stranu nabídky. U EEX je hlavním problémem volatilita dodávek elektřiny z větrných elektráren. Sphanic et al. (2007) se zabývají otázkou ekonomické efektivnosti skladování elektrické energie a navrhuji sodíkovo-sírové akumulátory (NAS). Pro smysluplné integrování obnovitelných zdrojů je důležité optimalizovat řízení a kapacitu skladování elektrické energie. Harsha et Dahleh (2015) dokázali na příkladech USA, že optimální skladovací kapacita elektřiny může efektivně integrovat elektřinu z obnovitelných zdrojů do energetické soustavy bez výrazného zatížení přenosové soustavy. Kromě toho může dojít k neplánované odstávce velkého zdroje elektřiny, nebo části přenosové soustavy. I na dvou sousedních trzích může být cena elektřiny výrazně odlišná. Elektřina může být snadno a rychle přepravována, ale vedení elektrické energie má své kapacitní omezení, která nesmí být překročena. To je hlavní důvodem, proč se ceny elektrické energie liší v sousedních oblastech. Na spotovém trhu se proto obchoduje elektřina po časových pásmech dne na následujících 24 hodin. Dále se rozlišuje tzv. Baseload (energie nabízená po celý den) a Peakload (energie nabízená v denní špičce). Spotová cena se proto během dne výrazně mění a volatilita roste s blížící se dobou dodávky. Dále se rozlišuje hodinová a bloková cena. U hodinové dodávky se obchoduje konstantní výstup energie po dobu jedné hodiny. U blokové ceny se jedná o několik hodin dodávek. Pro ceny se používají indexy. Na německé EEX je používán index PHELIX (Physical Electricity Index). Dle návrhu nařízení evropské komise o vnitřním trhu s elektřinou by měl být interval zúčtování odchylek 15 minut zaveden od 1.1.2025. Rozdělením hodinového intervalu na čtvrt hodinu má být dosaženo udržení hodinové periody obchodování, ale rozdělení cílové hodnoty výkonu při rostoucím zatížení do čtyř čtvrt hodinových kroků v rámci každé hodiny.

## 6.2 Analyzovaná data

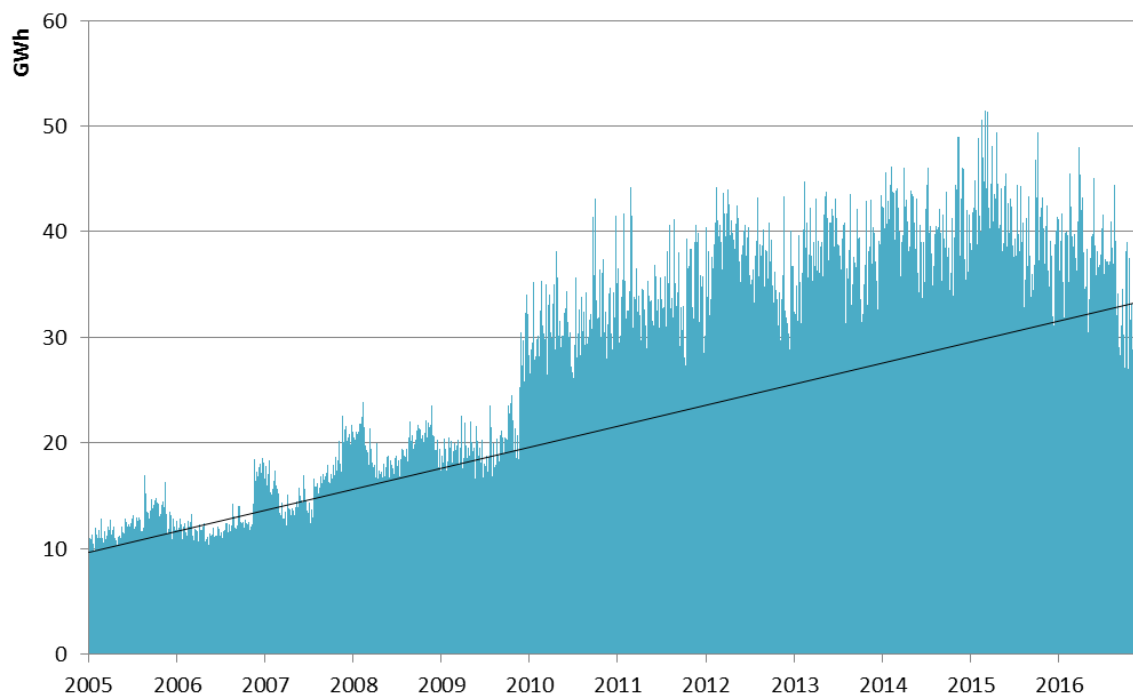
Tato práce analyzuje data z největšího evropského trhu elektrické energie (European energy markets EEX). Tento trh má mnoho účastníků a je zajištěna dobrá likvidita. Konkrétně jsou analyzovány PHELIX hodinové spotové ceny v období od 8. 2. 2005 do 31. 12. 2016 uvedené v EUR/MWh (obr. 6.1). To představuje celkem 104 136 hodnot, což je dostatečné množství dat pro analýzu z hlediska chaosu. Z grafu (obr. 6.1) je patrné, že časová řada v dlouhém období neobsahuje výrazný rostoucí nebo klesající trend. To je typické u cen elektřiny, kdy se ceny elektřiny vrací k průměrné hodnotě např. Kristoufek et Lunackova (2013), Alvarez-Ramirez et Escarela-Perez (2010) Weron et Przybyłowicz (2000), Simonsen (2003) Norouzzadeh et al. (2007). Pro některé analýzy je nutné v případě zjištění trendu nutné provést vyloučením trendu. Z prvního srovnání spotových cen a objemu (obr. 6.1 a 6.2) je vidět pokles volatility a nárůst objemů někdy od začátku roku 2010.

Střední hodnota	42,500
Medián	39,280
Modus	50,000
Směrodatná odchylka	25,798
Rozptyl výběru	665,516
Špičatost	1177,457
Šikmost	16,669
Minimum	-500,020
Maximum	2436,630
Počet	104136

**Tab. 6.1.** Základní charakteristika zkoumaného souboru hodinových spotových cen PHELIX v EUR/MWh



**Obr. 6.1.** Hodinové spotové ceny PHELIX, včetně lineární regrese



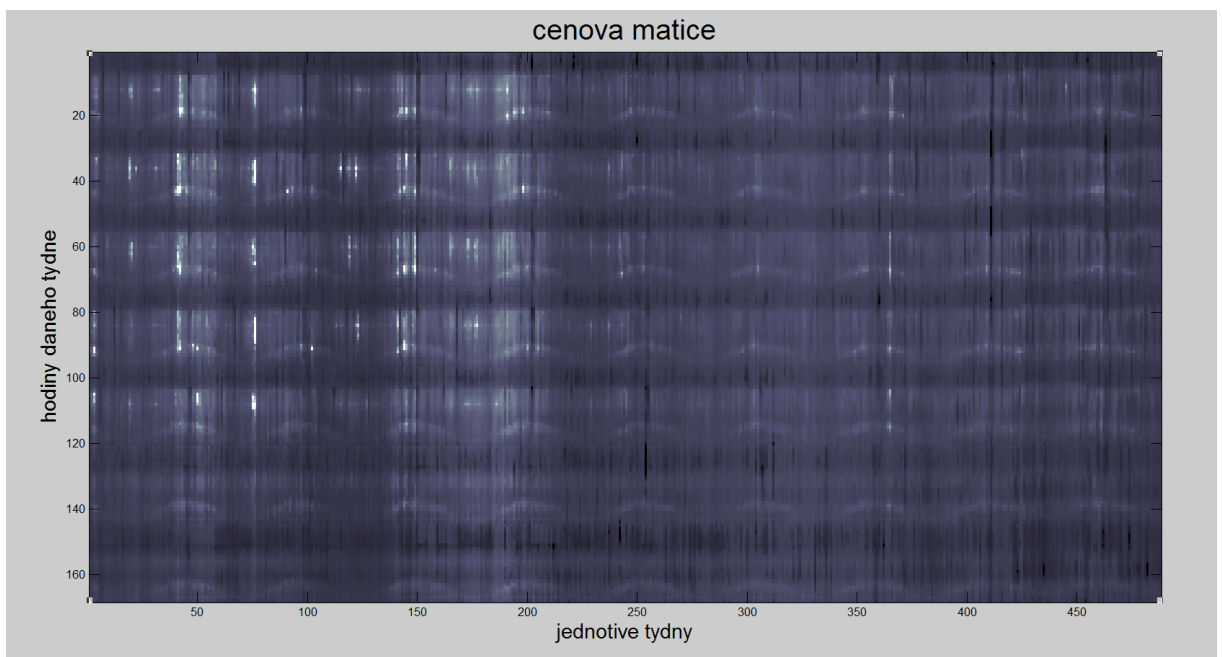
**Obr. 6.2.** Objem obchodů na EEX, včetně lineární regrese

### 6.3 Empirická analýza PHELIX

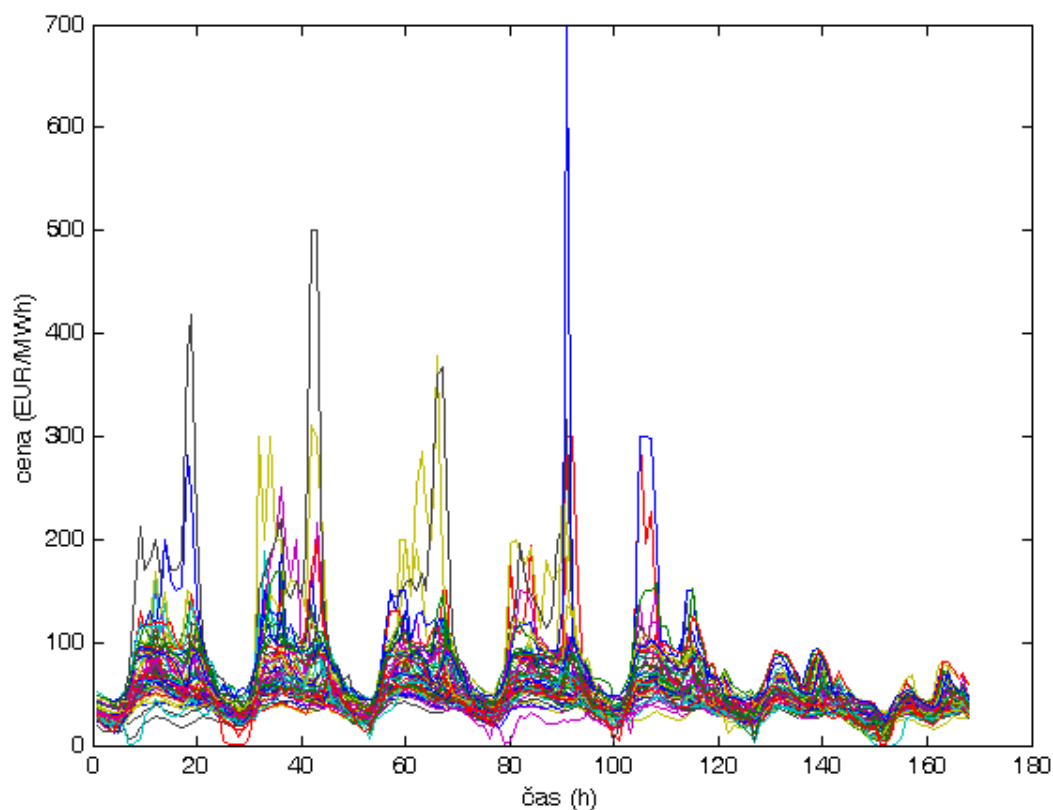
Výpočty a analýzy, včetně grafického zpracování, jsou provedeny v prostředí MATLAB, MATHEMATICA, TISEAN a MS EXCEL. TISEAN je softwarový projekt speciálně vyvinutý pro analýzu časových řad založený na teorii chaosu (Hegger, et al., 1999). Teoretickým podkladem pro tento software je práce Kanz et Schreiber (2004).

#### 6.3.1 Klasická analýza

Jak již bylo zmiňováno z grafu (obr. 6.1) je patrné, že časová řada PHELIX v dlouhém období neobsahuje výrazný rostoucí nebo klesající trend. V tomto případě je tedy možné se pustit do korelační analýzy. Na první pohled nejsou korelace patrné, je nutné se na to podívat pomocí určitých figlů. Krásné korelace jsou patrné po týdnu (168 hodinách)



Obr. 6.3. Cenová matice

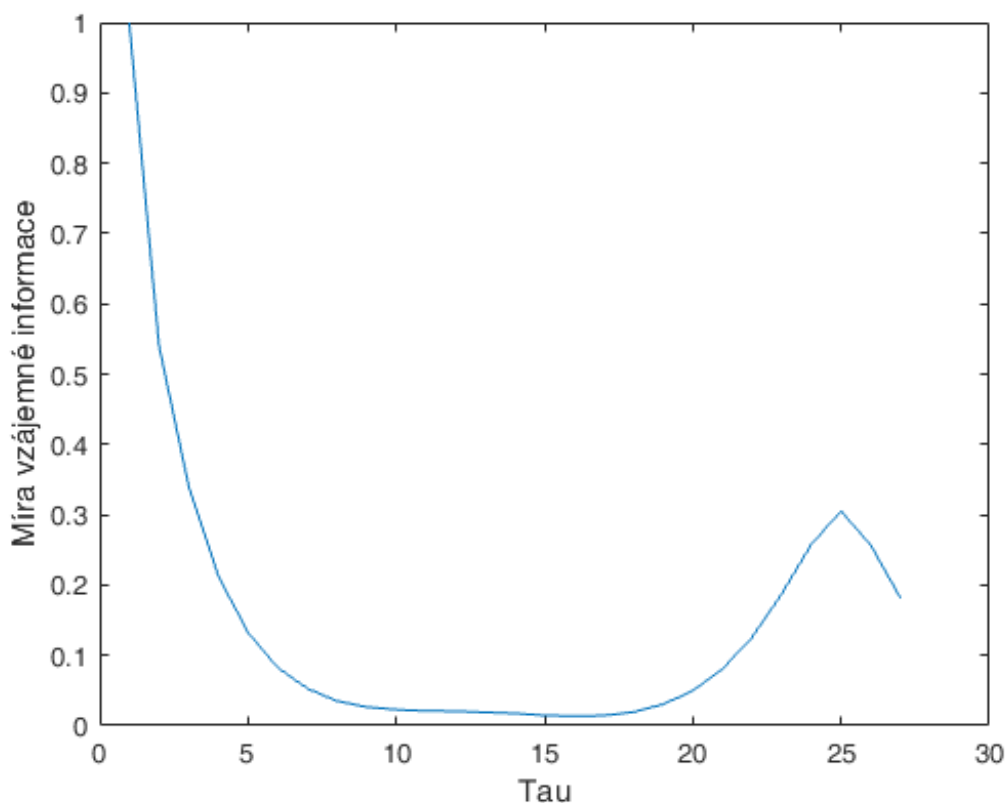


**Obr. 6.4.** Průběh cen elektřiny PHELIx po jednotlivých týdnech

### 6.3.2 Rekonstrukce fázového prostoru PHELIx

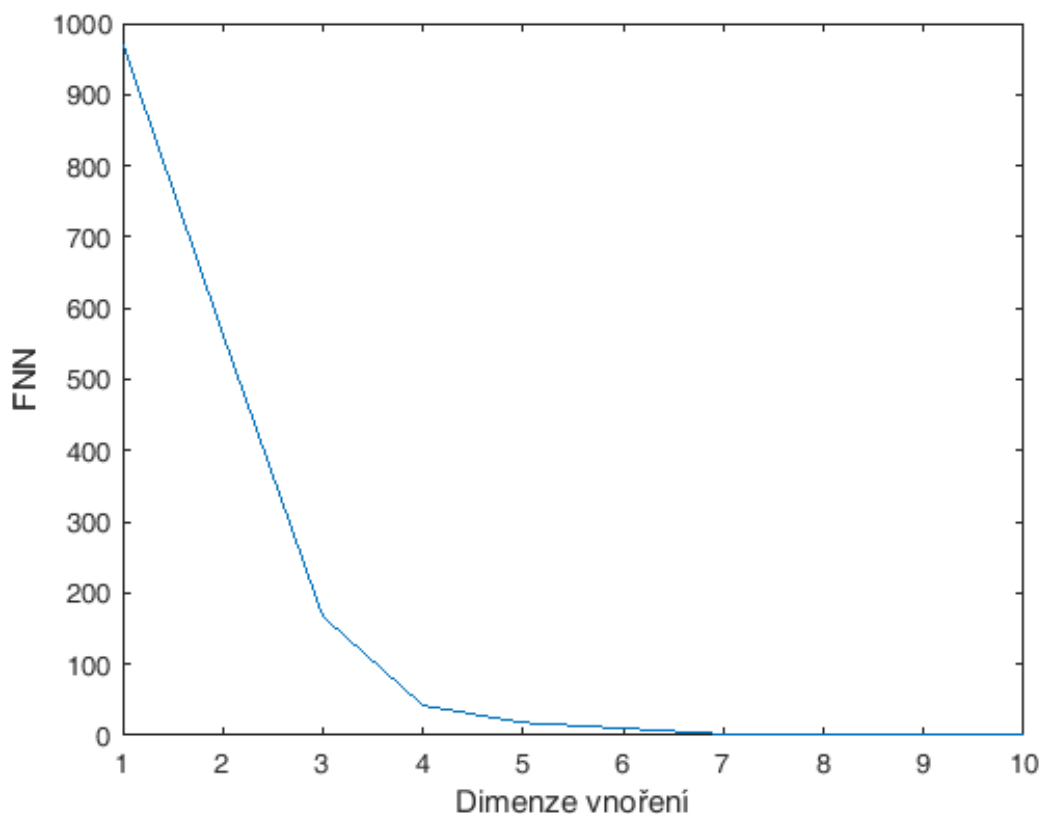
Optimální hodnota časového zpoždění byla vypočtena pomocí míry vzájemné informace. Na základě popsané metodiky je důležité zjistit první minimum funkce  $I(\tau)$ . První minimum  $I(\tau)$  obsahuje největší množství informace, aniž by byla úplně ztracena korelace mezi časovou řadou a časovou řadou posunutou o čas  $\tau$ . Z průběhu funkce  $I(\tau)$  byla určena hodnota optimálního časového zpoždění  $\tau = 15$





**Obr. 6.5.** Míra vzájemné informace u časové řady spotových cen

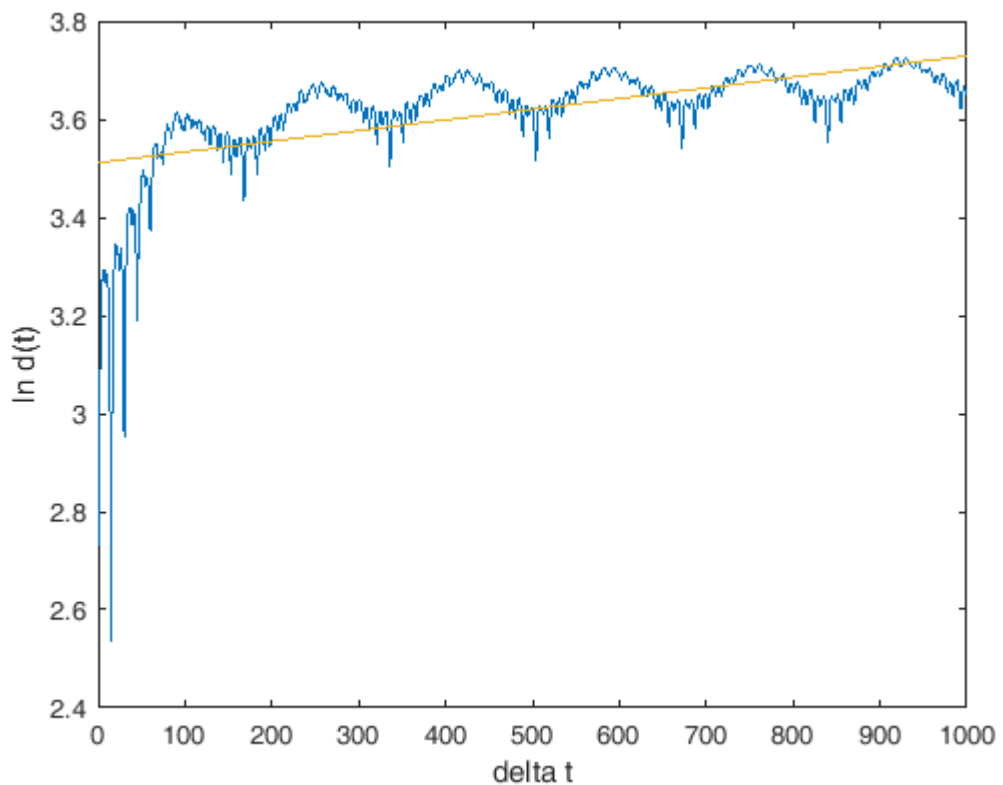
Optimální hodnota dimenze vnoření byla vypočtena pomocí metody nejbližších falešných sousedů. Podstatou metody je porovnání vzdálenosti dvou sousedů v určité dimenzi a v dimenzi o jednu větší. Pokud se jedná o falešné sousedy, bude jejich vzdálenost ve vyšší dimenzi tak velká, že již nebudou sousedy. Za dostatečnou dimenzi vnoření se bere hodnota, která snižuje počet falešných sousedů k nule. Dimenze vnoření je odhadnuta na  $m = 6$ . Liu et al. (2005) došli u New England Power Market k hodnotám  $\tau = 8$  a  $m = 9$ . Kříž et Kratochvíl (2014) odhadli u stejného trhu, ale v jiném období  $\tau = 8$  a  $m = 7$ . Bigdeli et Afshar (2009) u íránského trhu zjistili hodnoty  $\tau = 6$  a  $m = 3$ . Z uvedeného článku přímo neplyne, jak vypočetli dimenzi vnoření, ale Bigdeli et Afshar (2009) mají velké štěstí, protože úspěšně vykreslili atraktor ve fázovém prostoru.



**Obr. 6.6.** Podíl nejblížešých falešných sousedů u časové řady spotových cen

### 6.3.3 Maximální Ljapunovův exponent PHELIX

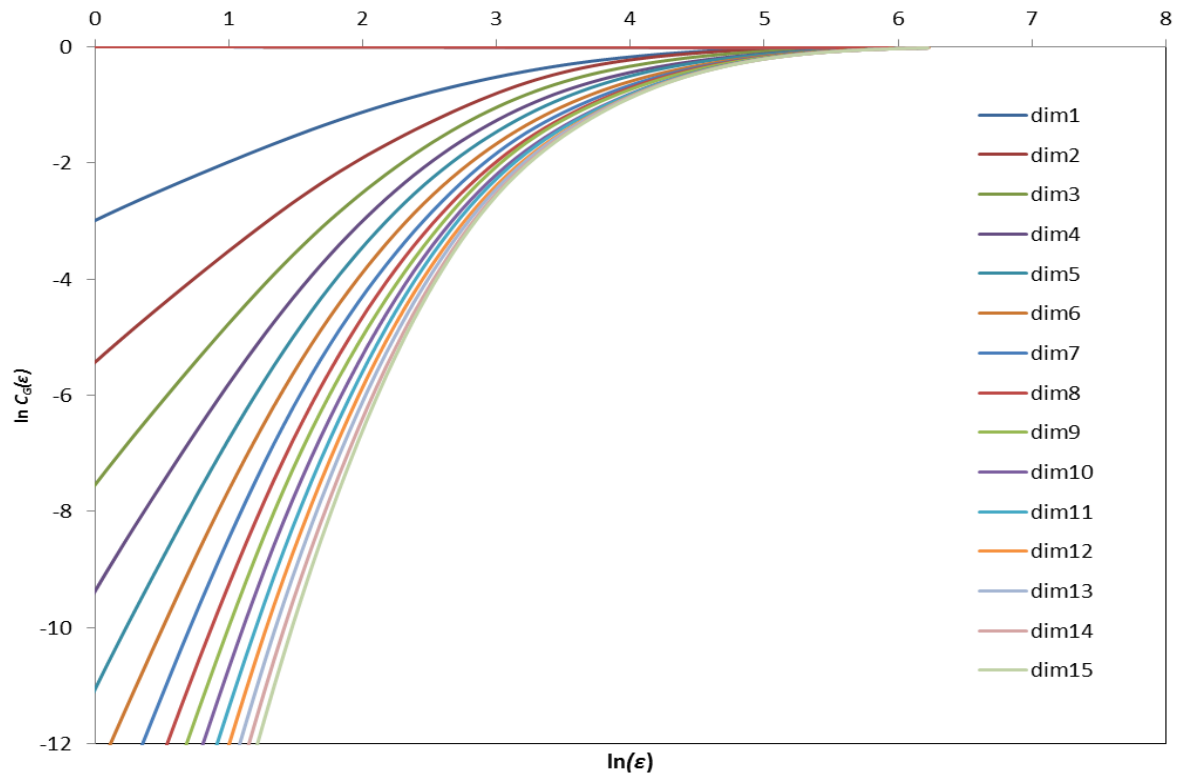
Ljapunovovy exponenty jsou čísla, která popisují divergenci blízkých trajektorií. Maximální Ljapunovův exponent hraje významnou roli v analýze dynamických systémů. Je-li alespoň jeden Ljapunovův exponent kladný, je to považováno za dostatečný signál, že se studovaný systém chová chaoticky. Pro odhad největšího Ljapunovova exponentu je použit Rosensteinův algoritmus (Rosenstein, et al., 1993). Rosensteinův algoritmus je založen na lineární regresi metodou nejmenších čtverců v grafu logaritmu divergence a času. Maximální Ljapunovův exponent pro časovou řadu spotových cen elektřiny PHELIX byl odhadnut na 0,00022, což je sice malé, ale kladné číslo. Kříž et Kratochvíl (2014) odhadli Ljapunovův exponent na hodnotu 0,0005. Výsledky této práce mají vzhledem k většímu počtu dat ( $10^5$ ) a vylepšení výpočetního algoritmu vyšší vypovídající schopnost. Liu et al. (2005) odhadli u New England Power Market největší Ljapunovův na 0,013.



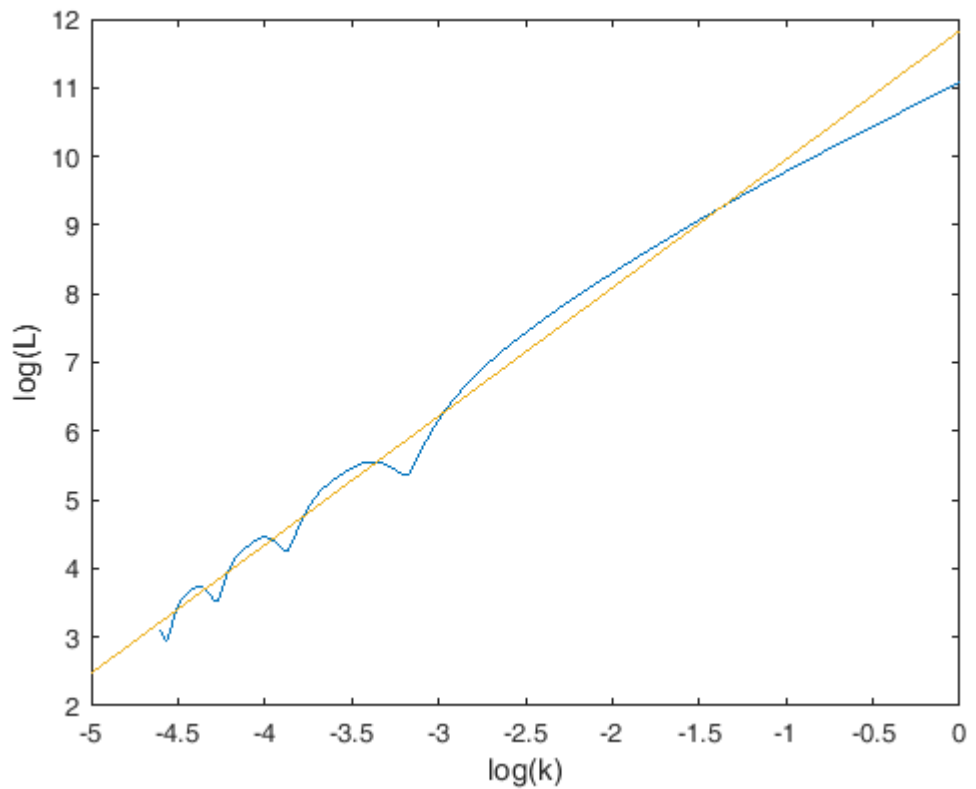
**Obr. 6.7.** Závislost logaritmu divergencece  $\lambda(\Delta t)$  na  $\Delta t$  u spotový cen elektřiny PHELIX. Směrnice proložené přímkou v nesaturované oblasti udává největší Ljapunovův exponent 0,00022.

#### 6.3.4 Fraktální dimenze PHELIX

Výpočet korelační dimenze je založen na metodě vyvinuté Grassberger et Procaccia, (1983). Základem je výpočet korelačního integrálu  $C(\varepsilon)$ . Vzhledem k definici korelačního integrálu se nejedná o hladkou křivku, proto byl použit korelační integrál s Gaussovým jádrem  $C_G(\varepsilon)$ . Korelační dimenze se získá z log-log diagramu  $C_G(\varepsilon)$  vůči  $\varepsilon$ . Sklon křivek pro různé dimenze vnoření  $m$  udávají různé hodnoty korelační dimenze  $D_C$ . Korelační dimenze byla odhadnuta na 4,52 a Higuchiho dimenze byla odhadnuta na 1,87. Velký rozdíl je způsoben metodikou výpočtu. Liu et al. (2005) odhadli u New England Power Market korelační dimenzi na 5,42.



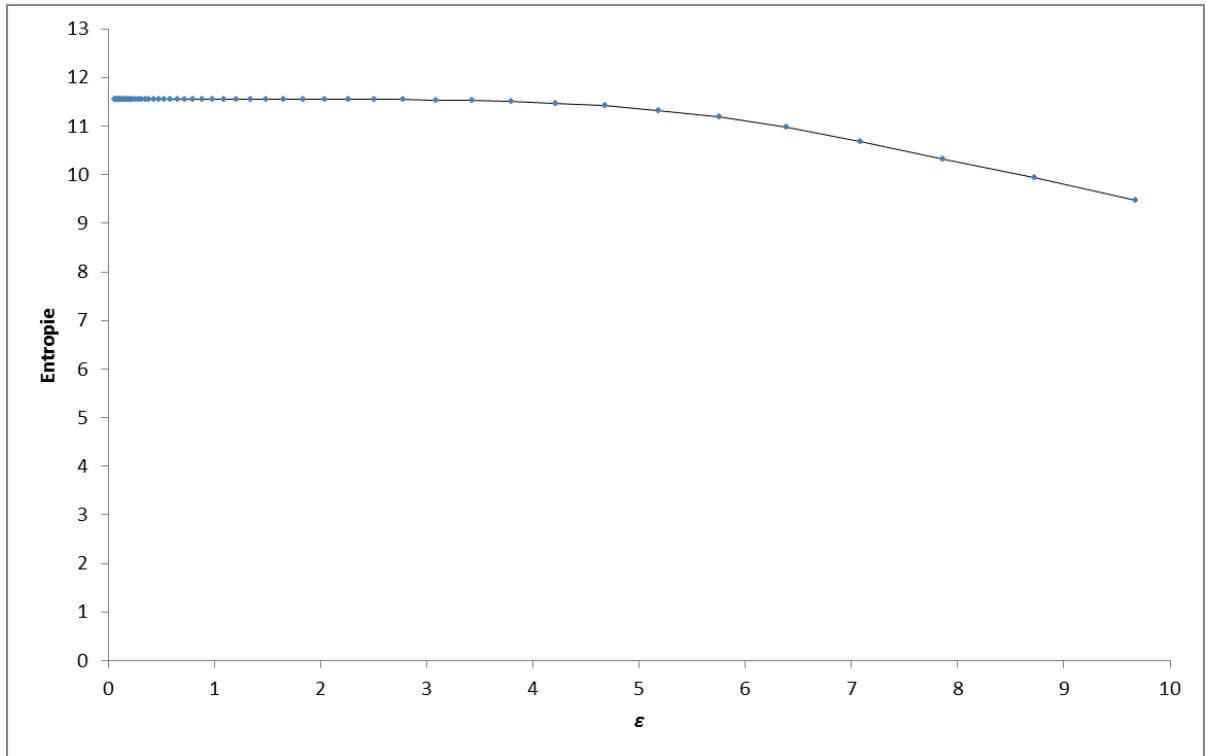
**Obr. 6.8.** Závislost  $\ln(C_G(\epsilon))$  vůči  $\ln(\epsilon)$  u časové řady spotových cen elektřiny PHELIX



**Obr. 6.9.** Závislost  $\log(L)$  vůči  $\log(k)$  u časové řady spotových cen elektřiny PHELIX. Směrnice lineárního trendu je hledaná Higuchiho dimenze 1,87.

### 6.3.5 Entropie PHELIX

Byl proveden výpočet Kolmogorov-Sinai entropie dle popsané metodiky. Vyšla hodnota entropie 11,53, což je konečné kladné číslo a to je podstatné z hlediska analyzování detekce deterministického chaosu.



Obr. 6.10. Entropie  $h_2(\epsilon)$  s klesajícím  $\epsilon$  konverguje na hodnotu 11,53

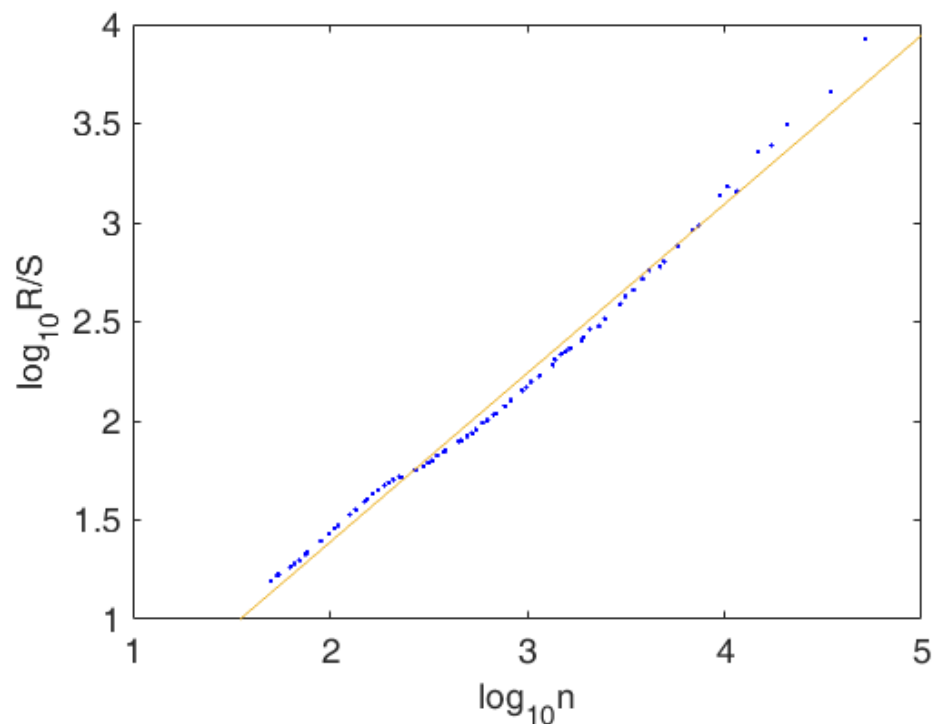
### 6.3.6 Hurstův exponent PHELIX

Hurstův exponent nám udává perzistentnost procesů, neboli nám říká, zdali se jedná o časovou řadu s dlouhodobou pamětí. U spotových cen elektřiny PHELIX byla prokázána perzistentnost v souladu s obdobnou prací Kříž et Kratochvíl (2014), která analyzovala 10 000 dat ze stejného trhu. Kristoufek et Lunackova (2013) analyzovali hodinové ceny elektřiny v České republice a prokázali silnou perzistentnost procesů. Alvarez-Ramirez et Escarela-Perez (2010) podobně prokázali silnou perzistentnost u hodinových cen elektrické energie v kanadské Albertě a Ontariu. K opačnému výsledku došli Weron et Przybyłowicz (2000) při analýze hodinových cen elektrické energie u California Power Exchange (CalPX) a Swiss Electricity Prices (SWEP) v letech 1998 až 2000, kde hodnoty Hurstova exponentu jsou 0,428 (CalPX) a 0,529 (SWEP). K podobným hodnotám dospěl Simonsen (2003) u skandinávského Nord Pool a Norouzzadeh et al. (2007) u španělského Operador del Mercado Ibérico de Energía. Markantní rozdíly u jednotlivých trhů jsou způsobeny především rozdílnou

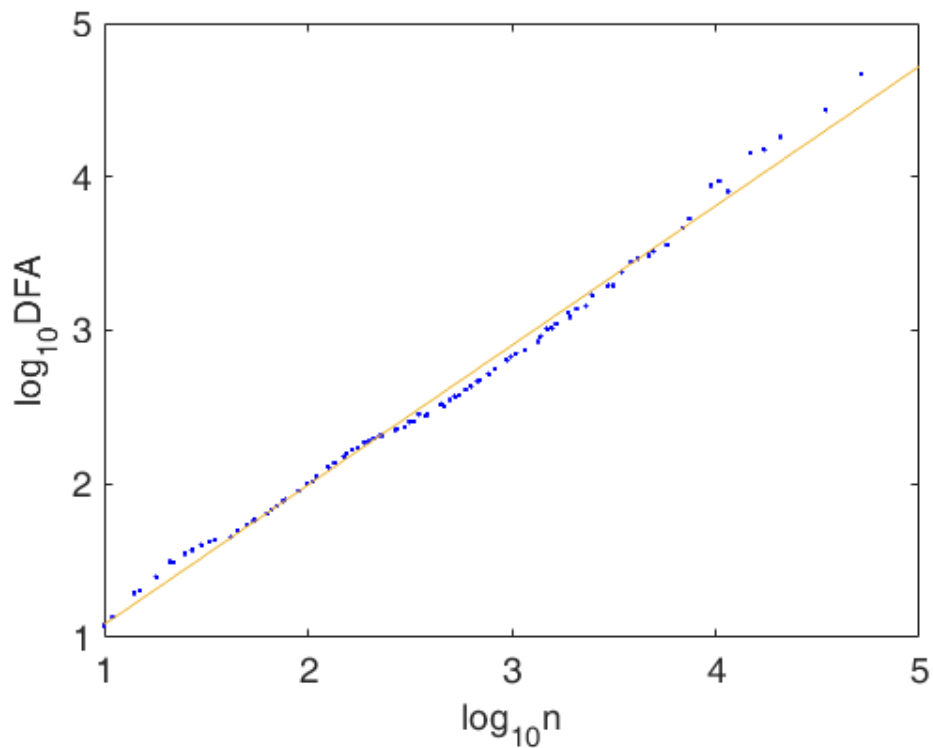
efektivností těchto komoditních trhů. Je známa souvislost mezi efektivností kapitálového a komoditního trhu a fraktální dimenzí (Kristoufek et Vosvrda, 2013). Obecně fraktální dimenze a Hurstův koeficient můžou být nezávislé veličiny, většinou se vychází se vztahu  $H+D=2$ , z čehož plyne závislost mezi efektivností kapitálového nebo komoditního trhu a Hurstovým exponentem.

Metoda	Odhad Hurstova koeficientu
R/S analýza	0,853
DFA	0,909
GPH	0,917
AWC	0,976
Aritmetický průměr	0,914
Směrodatná odchylka	0,044

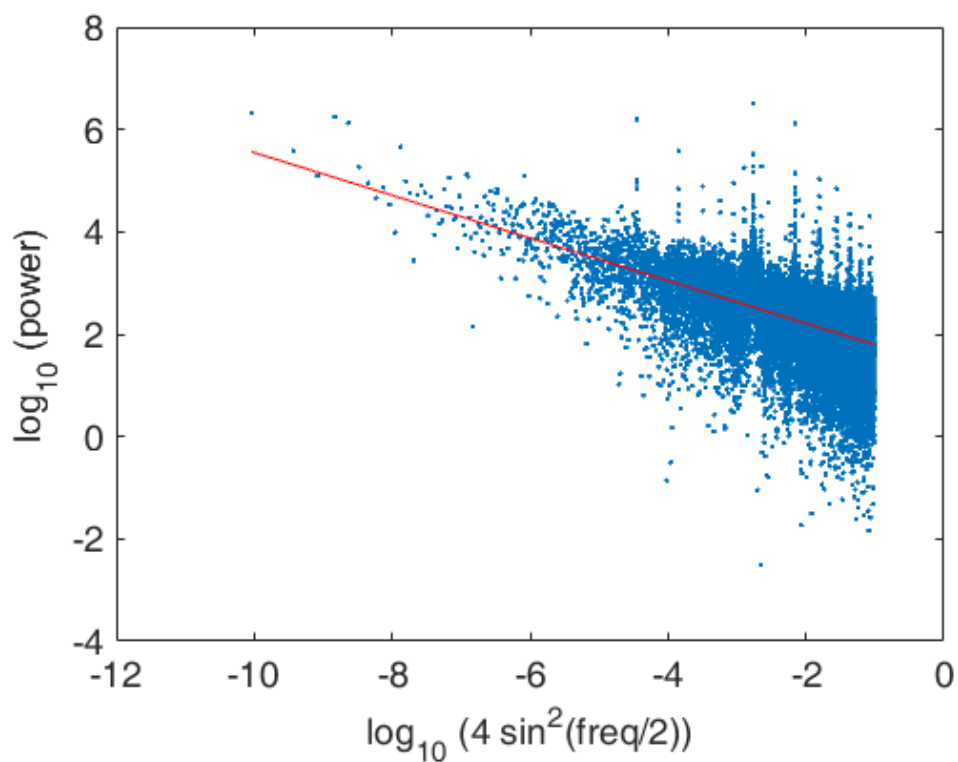
**Tab 6.2.** Přehled výpočtu Hurstova exponentu podle jednotlivých metod:



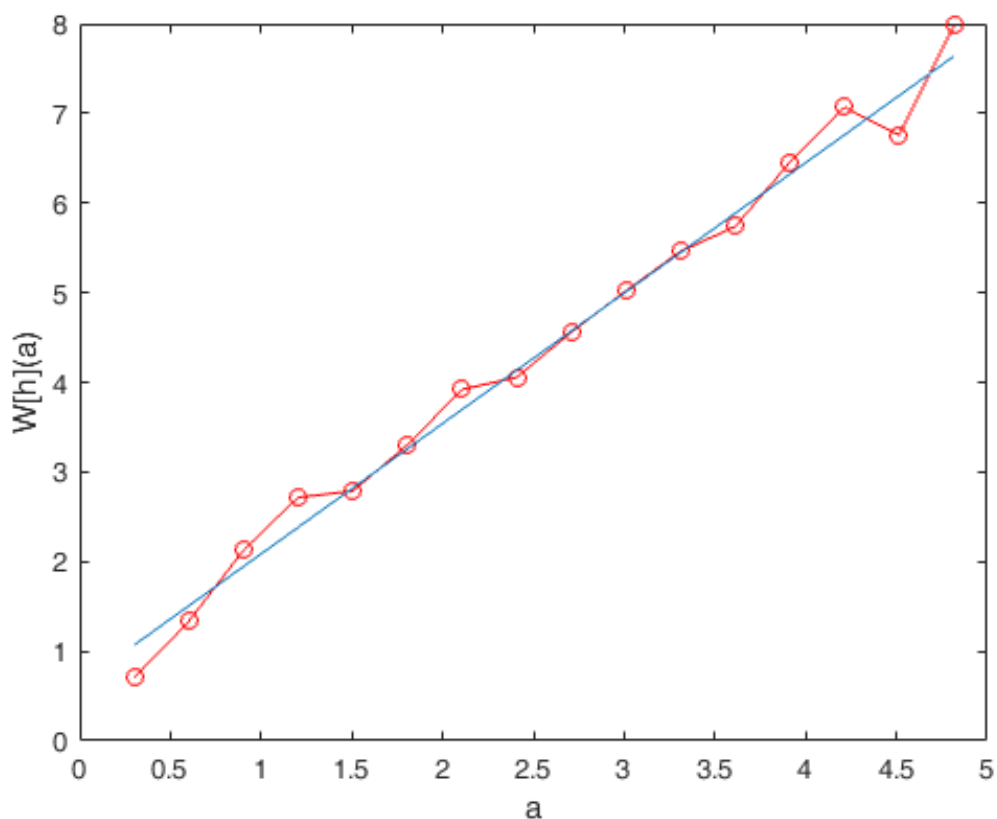
**Obr. 6.11.** R/S analýza hodinových spotových cen PHELIX. Empirická hodnota Hurstova exponentu byla odhadnuta na 0,853.



**Obr. 6.12.** DFA analýza hodinových spotových cen PHELIX. Empirická hodnota Hurstova exponentu byla odhadnuta na 0,909.



**Obr. 6.13.** Výkonové (Power) spektrum spotových cen v log-log grafu. Hodnota Hurstova koeficientu je 0,917.

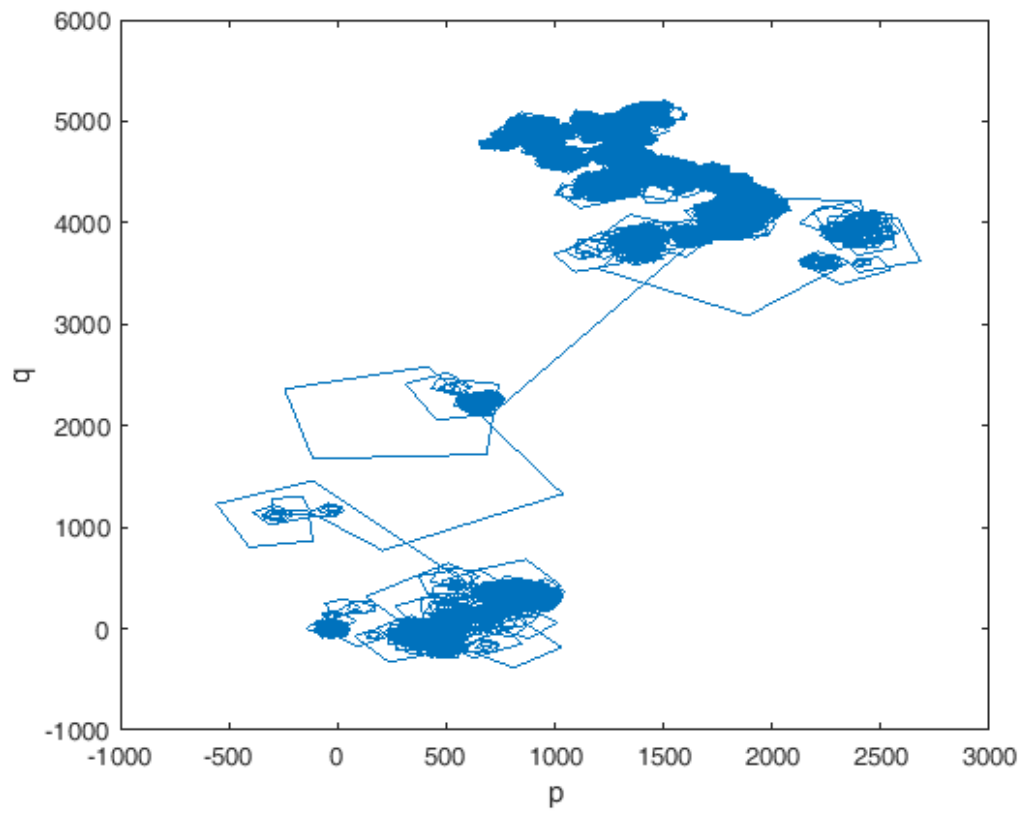


**Obr. 6.14.** AWC analýza. Závislost  $W[h](a)$  na  $a$ . Hodnota Hurstova koeficientu je 0,976.

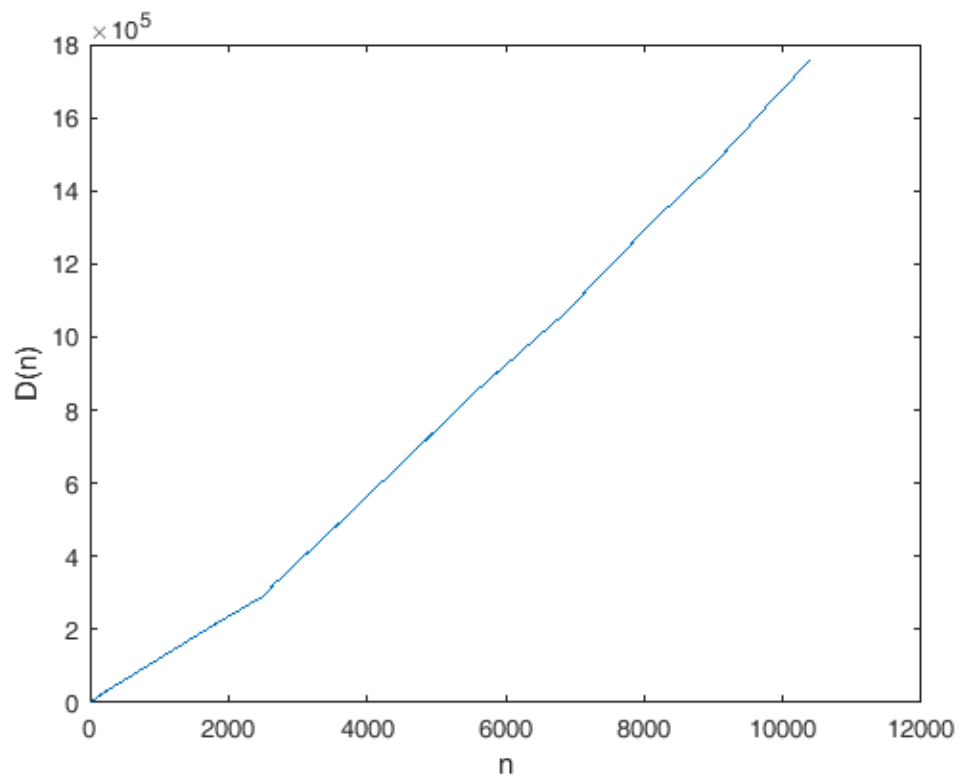
### 6.3.7 Test 0-1 PHELIX

Před samotným použitím 0-1 testu je vhodné se podívat na závislost kosinové  $p_c(n)$  a sinové  $q_c(n)$  složky Fourierovy transformace. Alternativně je možné využít fraktální Fourierovu transformaci. Vzájemná závislost kosinové  $p_c(n)$  a sinové  $q_c(n)$  složky podle obr. 6.13 indikuje chaos viz srovnání s chaotickou dynamikou logistické rovnice s parametrem  $r=3,97$  (obr. 5.3). Další informaci je možné získat ze závislosti modifikovaného středního kvadratického posunu  $D(n)$  na  $n$ . Pokud modifikovaný střední kvadratický posunu  $D(n)$  diverguje s rostoucím  $n$ , pak je chaos pravděpodobně přítomen v tomto systému.

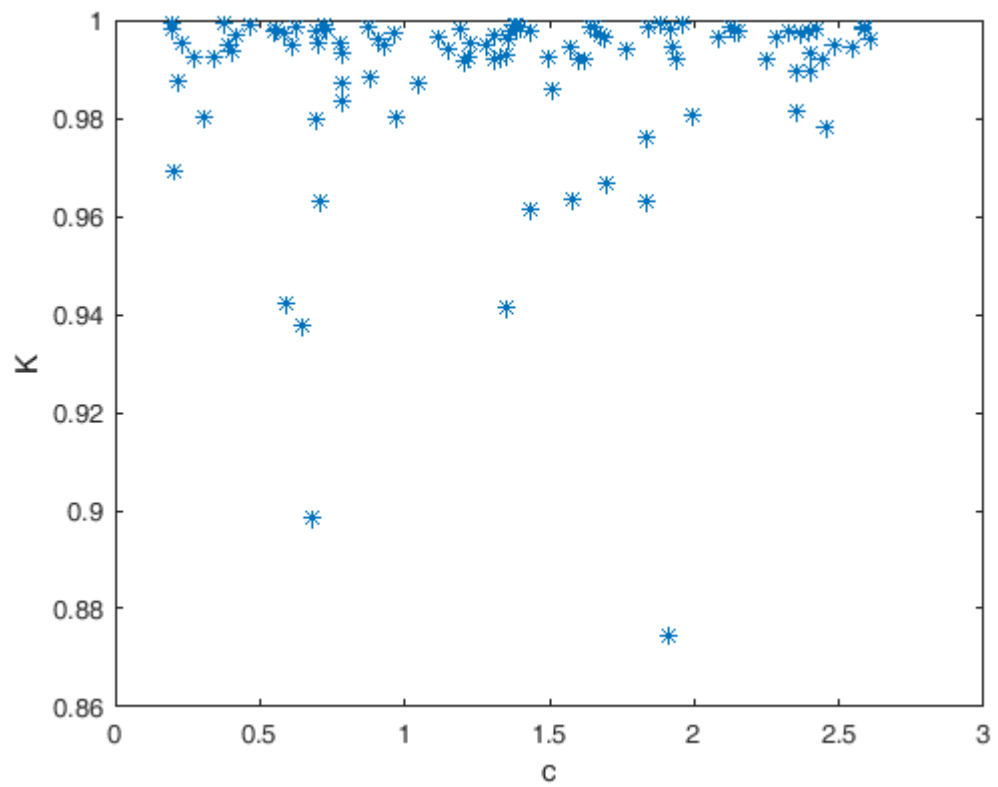




**Obr. 6.15.** Závislost proměnných  $p_c(n)$  a  $q_c(n)$ .



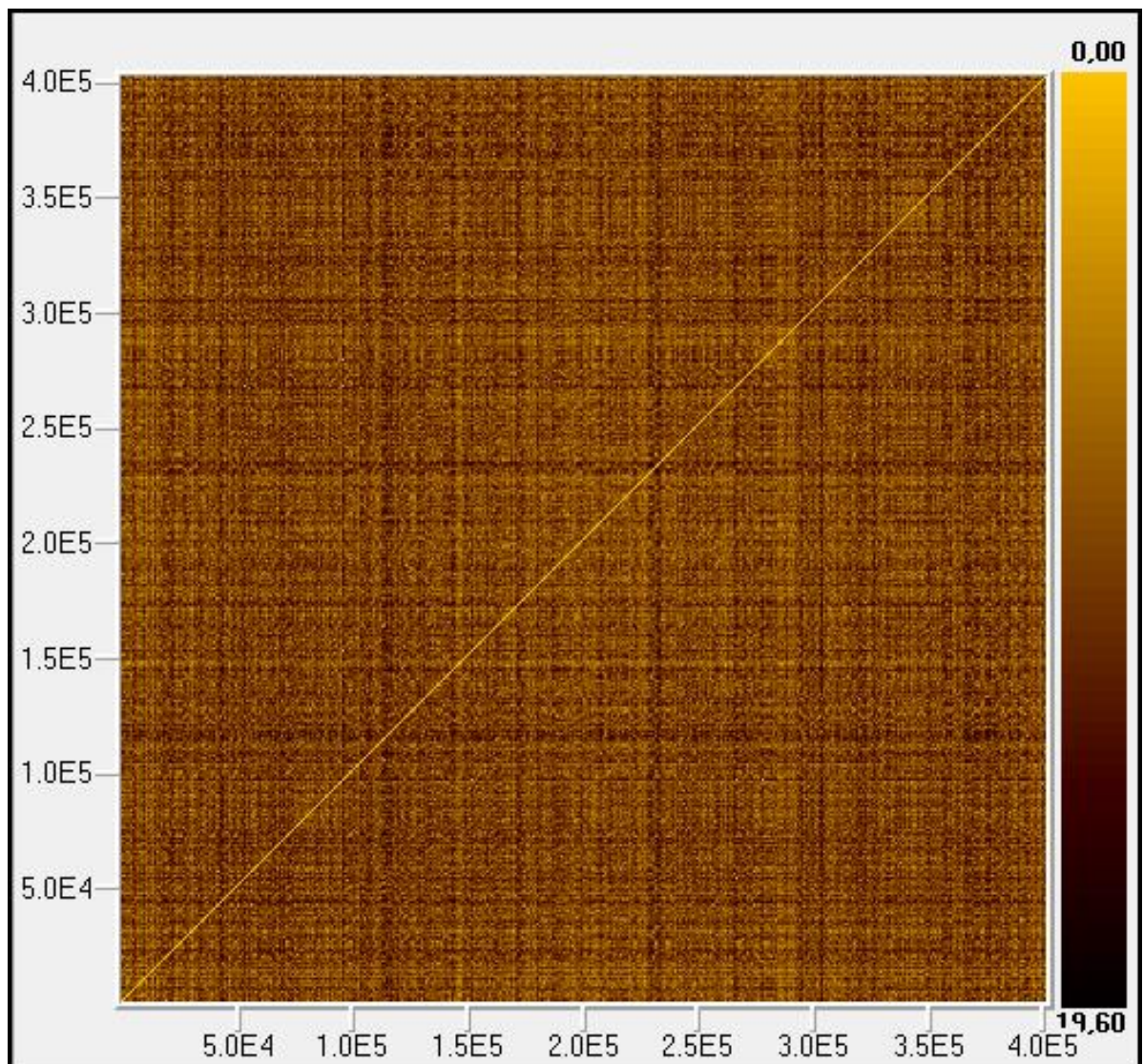
**Obr. 6.16.** Závislost modifikovaného středního kvadratického posunu  $D(n)$  na  $n$ .



**Obr. 6.17.** Asymptotické tempo růstu  $K_c$

### 6.3.8 Rekurentní analýza PHELIX

Kvantitativní rekurentní analýza nepotvrdila přesvědčivě přítomnost komplexní dynamiky. Kodera et Van Quang (2009) při analýze vybraných akciových titulů i souhrnného ukazatele PX také nepotvrdili existenci determinismu. Je nutné poznamenat, že tato metoda je vhodná pro některé makroekonomické časové řady s omezenou délkou, ale její využití pro analýzu finančních trhů je spíše sporadické.



Obr. 6.18. Rekurentní graf

## 6.4 *Shrnutí výsledků analýzy*

Tato kapitola se zabývá ověřením vypracované metodiky na příkladu spotových cen elektrické energie PHELIX. Tento trh má mnoho účastníků a je zajištěna dobrá likvidita. Konkrétně jsou analyzovány PHELIX hodinové spotové ceny v období od 8. 2. 2005 do 31. 12. 2016 uvedené v EUR/MWh. To představuje celkem 104 136 hodnot, což je dostatečné množství dat pro analýzu z hlediska chaosu. Časová řada spotových cen elektrické energie PHELIX v dlouhém období neobsahuje výrazný rostoucí nebo klesající trend.

Byla provedena poměrně rozsáhlá analýza založená na metodách teorie chaosu. Pokud je Ljapunovův exponent kladný, korelační dimenze nabývá nízkých neceločíselných hodnot a Kolmogorova entropie je kladné konečné číslo, můžeme usuzovat, že daný systém je chaotický. Provedená analýza potvrdila předpoklady pro přítomnost chaosu v časových řadách spotových cen elektrické energie PHELIX. Vzhledem k dostatečnému množství dat a splnění všech předpokladů pro výpočet klasických invariantů je tento výsledek věrohodný. To potvrdil přesvědčivě i test 0-1 poprvé představený Gottwald et Melbourne (2004). Kříž et Kratochvíl (2014) poprvé aplikovali nový 0-1 chaos test na spotové ceny elektřiny a potvrdili jeho využitelnost. Byla prvně aplikována metoda založená na fraktální Fourierovy transformaci pro detekci deterministického chaosu, která přítomnost deterministického chaosu také potvrdila. Tímto byla potvrzena první hypotéza a také byl splněn cíl práce týkající se prokázání kvantifikovatelných chaotických projevů ve spotových cenách elektrické energie PHELIX. Součástí této analýzy byl dále výpočet Hurstova exponentu. U spotových cen elektřiny PHELIX byla prokázána poměrně silná perzistentnost. To je v souladu s obdobnou prací Kříž et Kratochvíl (2014), která analyzovala 10 000 dat ze stejného trhu.

Navržená metodika byla ověřena na reálném příkladu spotových cen elektrické energie PHELIX. U časové řady spotových cen elektrické energie PHELIX je potvrzena přítomnost deterministického chaosu a její perzistentnost. Tento závěr nám říká, že krátkodobá predikce je teoreticky proveditelná.

## 7 Hrubý domácí produkt

Tato kapitola se zabývá ověřením vypracované metodiky na příkladu hrubého domácího produktu. Časová řada HDP je typickým příkladem makroekonomické časové řady.

### 7.1 Úvod

HDP je základní makroekonomický ukazatel. Hrubý domácí produkt (HDP, v mezinárodních pramenech GDP z anglického Gross Domestic Product) je celková hodnota finálních statků vyrobených na daném území za určité období (zpravidla rok) a procházejících trhem vyjádřená v peněžních jednotkách (Fialová et Fiala, 2011). Tento ukazatel se používá v makroekonomii pro určování výkonnosti ekonomiky států. V mezinárodních srovnáních se také používá HDP na obyvatele (HDP na hlavu). Hlavními průkopníky využívání HDP byli Clark (1932) a Kuznets (1971).

Na rozdíl od bohatství, které představuje stav, představuje HDP přírůstek bohatství, což je tok. Z mnoha analýz např. Ciarreta et Zarraga (2010) vyplývá příčinná souvislost HDP se spotřebou energie. HDP je tedy téměř vyjádřením míry spotřeby bez ohledu na kvalitu produktu. HDP je klíčovým ukazatelem vývoje národního hospodářství, měří výkonnost ekonomiky. HDP ve finančním vyjádření představuje hodnotu všeho, co bylo nově v zemi vytvořeno za sledované období – rok, případně čtvrtletí. Domácí produkt lze vypočítat třemi způsoby (produkční, výdajová, důchodová). Každá metoda představuje jiný pohled na totéž (tvorba, rozdělení a užití HDP).

Hrubý domácí produkt v absolutním vyjádření nemá příliš velkou vypovídající schopnost, slouží hlavně jako srovnávací základna pro různé poměrové ukazatele (zadlužení, energetická náročnost, otevřenost ekonomiky, daňové zatížení, intenzita výzkumu a vývoje, atd.) Smysl pro měření dynamiky ekonomického vývoje má tempo růstu HDP v reálném vyjádření. Hlavní výhodou ukazatele HDP je možnost jeho vyjádření v peněžních jednotkách, které lze snadno sčítat a převádět mezi zeměmi a v čase. HDP je základní ukazatel pro mezinárodní srovnání a je snadno dostupný ve statistice srovnávaných zemí.

HDP vyjadřuje hrubou přidanou hodnotu v národním hospodářství, ale zahrnuje převážně tržní produkci a pouze část produkce netržní. Z tohoto důvodu nemůže být považován za indikátor celkového ekonomického výkonu. Bylo by třeba zkoumat nepeněžní faktory bohatství, kterými jsou například volný čas, dobré životní prostředí, nízká kriminalita, fungující instituce a další. Zásadní problémy HDP spočívají v nezohledňování stavu životního prostředí a hodnot volnočasových aktivit. Pokud je růst HDP doprovázen zhoršením životního

prostředí, důsledkem je nižší nárůst, případně i pokles ekonomického blahobytu. Identifikovat příspěvek životního prostředí pro ekonomický rozvoj společnosti umožňuje systém environmentálního a ekonomického účetnictví (SEEA), podrobněji např. Ritschelová et al. (2000). Stiglitz et al. (2009) na příkladu Francie, Finska a USA uvedl empirický odhad hodnoty práce pro sebe. Mimo uvedené zásadní problémy, existují i další spojené s měřením HDP, jako je úplnost zachycení (šedá ekonomika, modelování, odlišnost podnikového a národního účetnictví), oceňování (zejména u netržních transakcí), přepočty do stálých cen (kvalitativní očišťování, aplikace správných cenových indexů) a mezinárodní srovnatelnost.

## 7.2 Analyzovaná data HDP

Tato kapitola analyzuje HDP ve Spojených státech amerických. Konkrétně je analyzováno čtvrtletní tempo růstu HDP ve Spojených státech amerických (sezonně očištěno) od roku 1947 do roku 2016 (obr. 7.1). Byla zvolena analýza tempa růstu, neboť tato řada nevykazuje trend, na rozdíl od HDP, kde je naopak výrazný trend. Jedná se sice o jednu z nejdelších časových řad HDP, ale pořád to je pouze 278 hodnot. Nedostatečné množství dat je hlavní problém analýzy deterministického chaosu. Dalším problémem je kvalita dat. Standartní metodika založená na výpočtu Ljapunovových exponentů či korelační dimenze je nevhodná. Wolf et al. (1985) uvádí, že minimální délka dat pro výpočet největšího Ljapunovova exponentu by měla být:

$$N \in (10^{D_2}, 30^{D_2}) \quad (7.2.1)$$

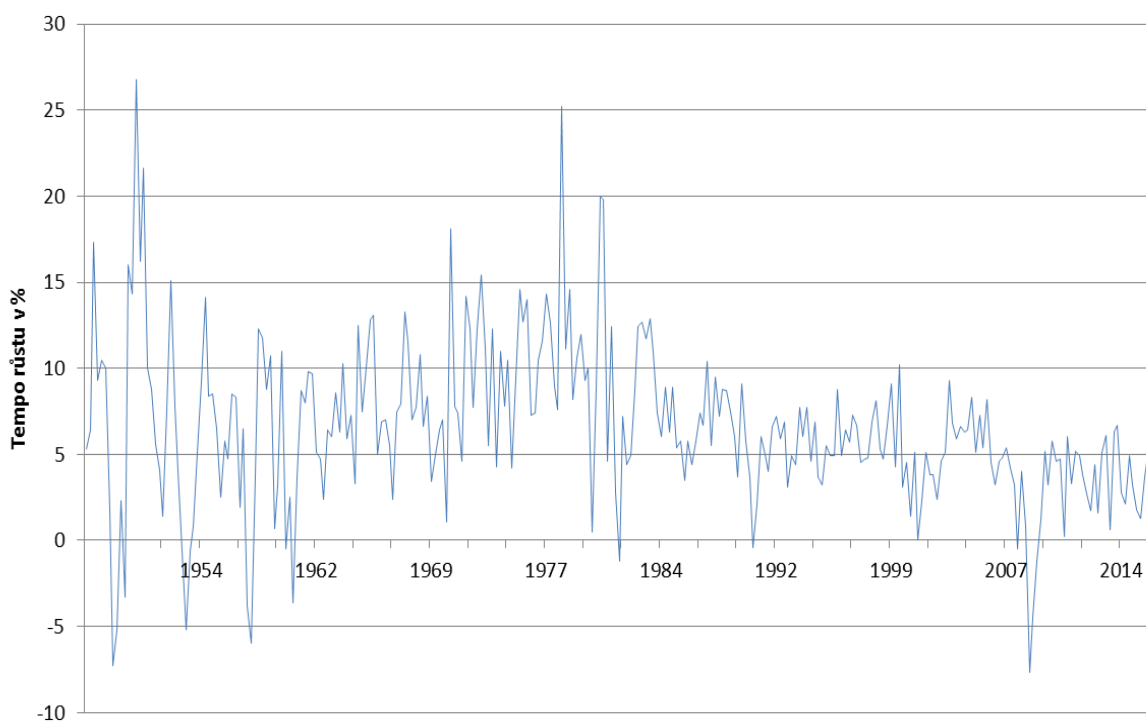
Pro systém  $D_2=3$  je to 1000 až 30000 dat. Eckmann et Ruelle (1992) prokázali, že pro výpočet korelační dimenze podle Grassberger et Procaccia (1983) je nutná časová řada o délce  $N$ , kde

$$\log N = \frac{D_2}{2} \log \frac{1}{\rho} \quad (7.2.2)$$

Kde  $\rho=S/\varepsilon$  je poměr rekurence. Výpočet těchto hodnot byl proveden, pokud vůbec byl možný, ale bez vypovídající schopnosti. Aguirre et Billings (1995) ukázali, že relevantní výsledky je možné získat i z časové řady o délce  $N=1000$ . Letellier et al. (2006) dokonce tvrdí, že za jistých předpokladů je možné učinit závěr o existenci chaosu z mnohem kratších časových řad o délce  $N = 100$ . Podstatou tohoto tvrzení je nalezení modelu, který následně může generovat delší časovou řadu. Asi nejperspektivnější metodou pro takto krátkou časovou řadu se zdá rekurentní analýza, která požaduje časové řady o délce řádově  $10^2$  (Marwan, 2011).

Střední hodnota	6,547
Medián	6,000
Modus	5,100
Směrodatná odchylka	4,736
Rozptyl výběru	22,434
Špičatost	2,441
Šikmost	0,512
Minimum	-7,700
Maximum	26,800
Počet	278

**Tab. 7.1.** Základní charakteristika zkoumaného souboru



**Obr. 7.1.** Čtvrtletní tempo růstu HDP ve Spojených státech amerických (sezonně očištěno) od roku 1947 do roku 2016

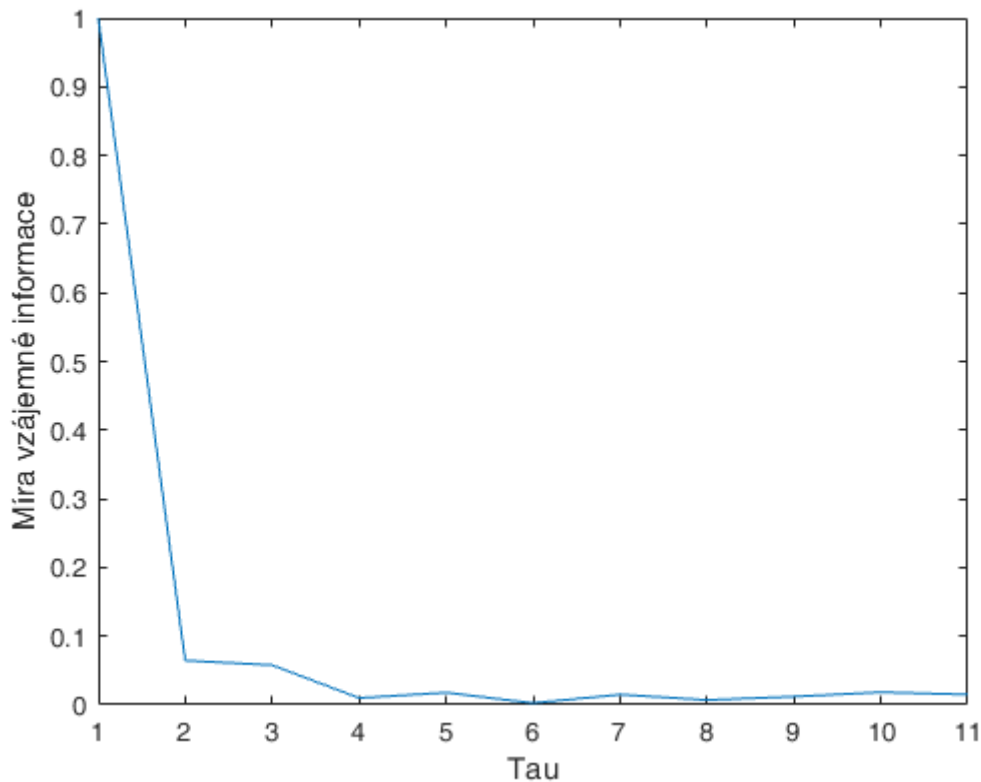
### 7.3 Empirická analýza HDP

Výpočty a analýzy, včetně grafického zpracování, jsou provedeny v prostředí MATLAB, MATHEMATICA, TISEAN a MS EXCEL. TISEAN je softwarový projekt

speciálně vyvinutý pro analýzu časových řad založený na teorii chaosu (Hegger, et al., 1999). Teoretickým podkladem pro tento software je práce Kanz et Schreiber (2004).

### 7.3.1 Rekonstrukce fázového prostoru HDP

Optimální hodnota časového zpoždění byla vypočtena pomocí míry vzájemné informace. Na základě popsané metodiky je důležité zjistit první minimum funkce  $I(\tau)$ . První minimum  $I(\tau)$  obsahuje největší množství informace, aniž bychom úplně ztratili korelaci mezi časovou řadou a časovou řadou posunutou o čas  $\tau$ . Z průběhu funkce  $I(\tau)$  bylo určena hodnota optimálního časového zpoždění  $\tau = 3$



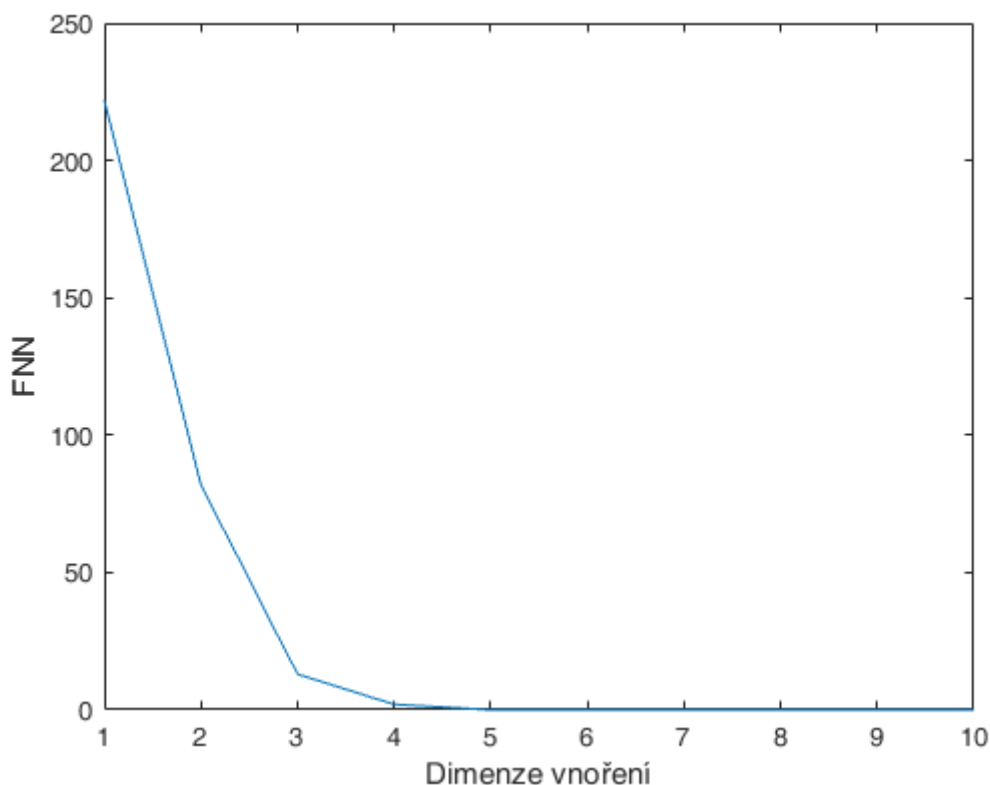
**Obr. 7.2.** Míra vzájemné informace u časové řady tempa růstu HDP

Optimální hodnota dimenze vnoření byla vypočtena pomocí metody nejbližších falešných sousedů. Podstatou metody je porovnání vzdálenosti dvou sousedů v určité dimenzi a v dimenzi o jednu větší. Pokud se jedná o falešné sousedy, bude jejich vzdálenost ve vyšší dimenzi tak velká, že již nebudou sousedy. Za dostatečnou dimenzi vnoření se bere hodnota, která snižuje počet falešných sousedů k nule. Dimenze vnoření je odhadnuta na  $m = 4$ .

Kříž (2014a) při analýze finského HDP dospěl přesně ke stejným hodnotám časového zpoždění a dimenze vnoření  $\tau = 3$  a  $m = 4$ . K podobným výsledkům dospěli Kříž et



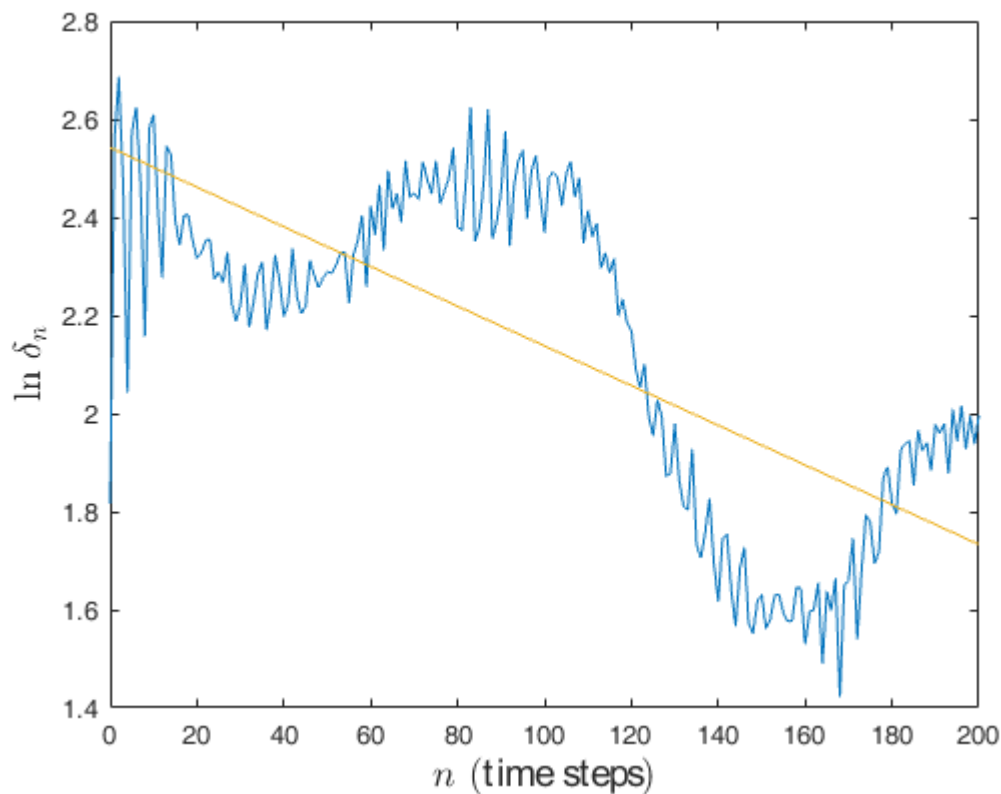
Kněžáčková (2014) při analýze HDP vybraných zemí EU. Kříž (2011) provedl rekonstrukci fázového prostoru u časové řady HDP v ČR.



**Obr. 7.3.** Podíl nejbližších falešných sousedů u časové řady tempa růstu HDP

### 7.3.2 Maximální Ljapunovův exponent HDP

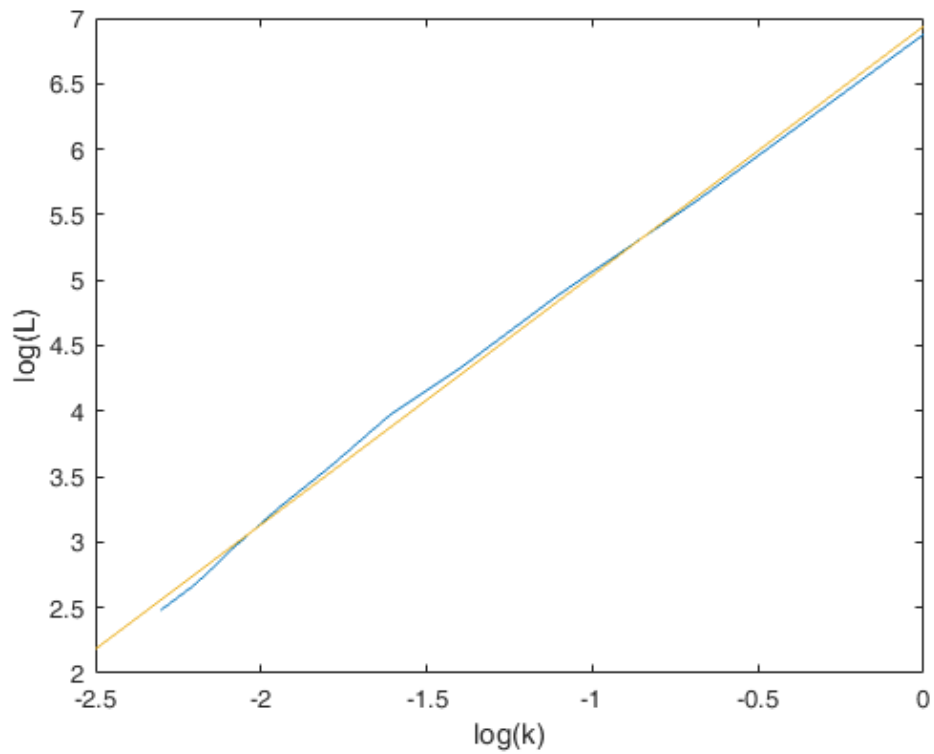
Ljapunovovy exponenty jsou čísla, která popisují divergenci blízkých trajektorií. Maximální Ljapunovův exponent hraje významnou roli v analýze dynamických systémů. Je-li alespoň jeden Ljapunovův exponent kladný, je to považováno za dostatečný signál, že se studovaný systém chová chaoticky. Pro odhad největšího Ljapunovova exponentu je použit Rosensteinův algoritmus (Rosenstein, et al., 1993). Rosensteinův algoritmus je založen na lineární regresi metodou nejmenších čtverců v grafu logaritmu divergence a času. Maximální Ljapunovův exponent pro časovou řadu koncentrací Hodnoty největšího Ljapunovova exponentu u tempa růstu HDP jsou určeny pouze zhruba z důvodů nejednoznačnosti oblasti vhodnou pro proložení lineárního trendu a samozřejmě z důvodů nedostatečného počtu dat. Přesto byl proveden výpočet největšího Ljapunovova exponentu, který byl negativní. Shintani et Linton (2003) analyzovali HDP a jejich odhad hodnoty Ljapunovova exponentu byl také záporný.



**Obr. 7.4.** Závislost logaritmu divergencece  $\lambda(\Delta t)$  na  $\Delta t$  u tempa růstu HDP. Směrnice proložené přímkou v nesaturované oblasti udává největší Ljapunovův exponent -0,004.

### 7.3.3 Fraktální dimenze HDP

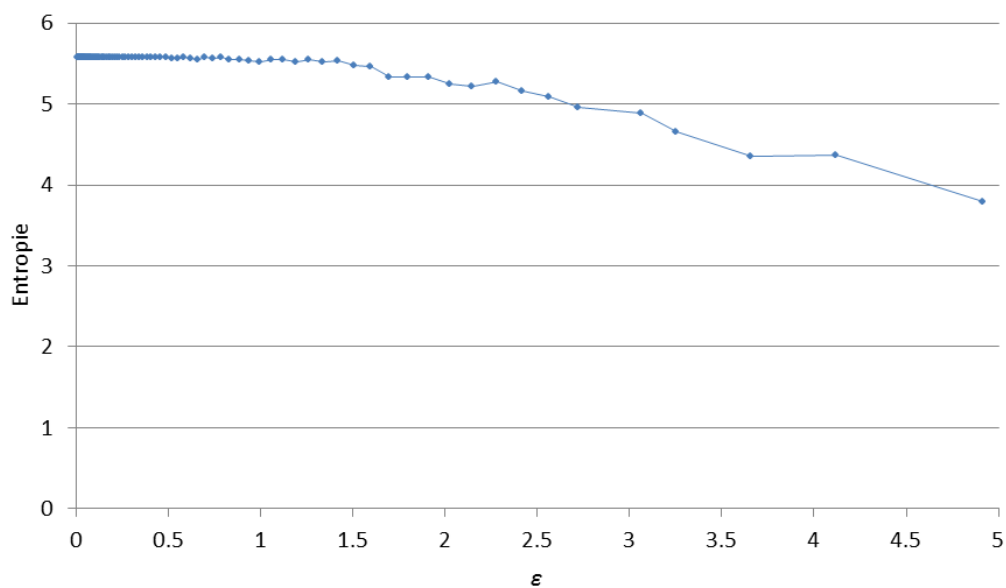
Výpočet korelační dimenze je založen na metodě vyvinuté Grassberger et Procaccia, (1983). Základem je výpočet korelačního integrálu  $C(\varepsilon)$ . Vzhledem k definici korelačního integrálu se nejedná o hladkou křivku, proto byl použit korelační integrál s Gaussovým jádrem  $C_G(\varepsilon)$ . Korelační dimenze se získá z log-log diagramu  $C_G(\varepsilon)$  vůči  $\varepsilon$ . Sklon křivek pro různé dimenze vnoření  $m$  udávají různé hodnoty korelační dimenze  $D_C$ . Vzhledem k nedostatečnému počtu dat není možné invarianty typu fraktální dimenze a entropie kvalifikovaně odhadnout.



**Obr. 7.5.** Závislost  $\log(L)$  vůči  $\log(k)$  u časové řady tempa růstu HDP. Směrnice lineárního trendu je hledaná Higuchiho dimenze 1,90.

### 7.3.4 Entropie HDP

Obecně lze počítat entropie různého řádu. Běžně se používá Kolmogorov-Sinai entropie a Shannonova, neboli informační entropie. Shannonova entropie pro časovou řadu



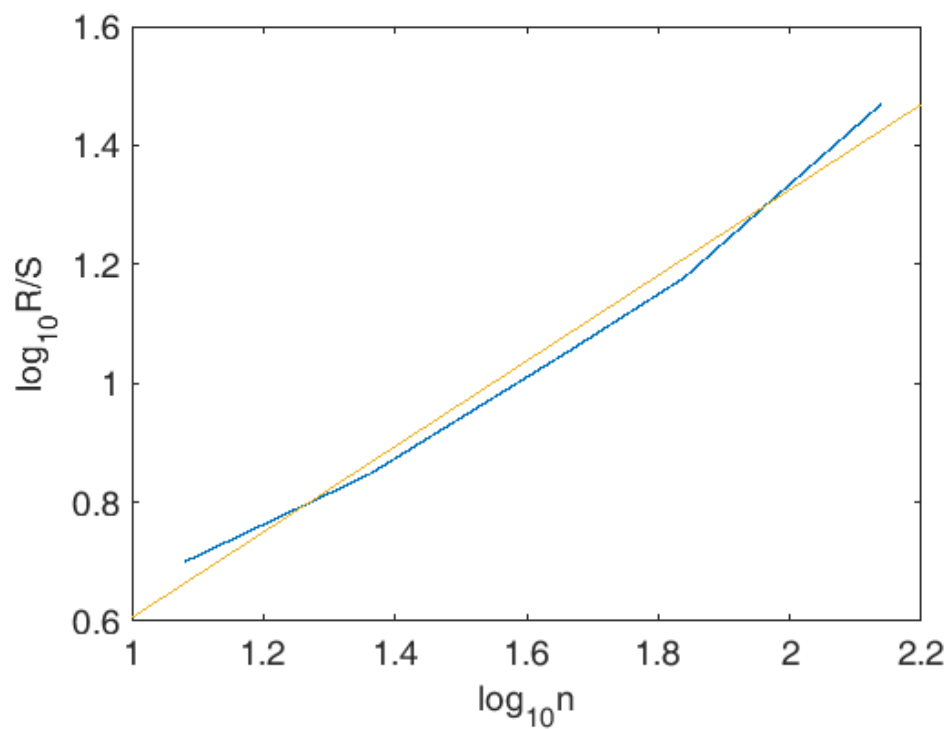
**Obr.7.6.** Závislost entropie  $H_2(\epsilon)$  vůči  $\epsilon$  konvergující k hodnotě 5,57.

### 7.3.5 Hurstův exponent HDP

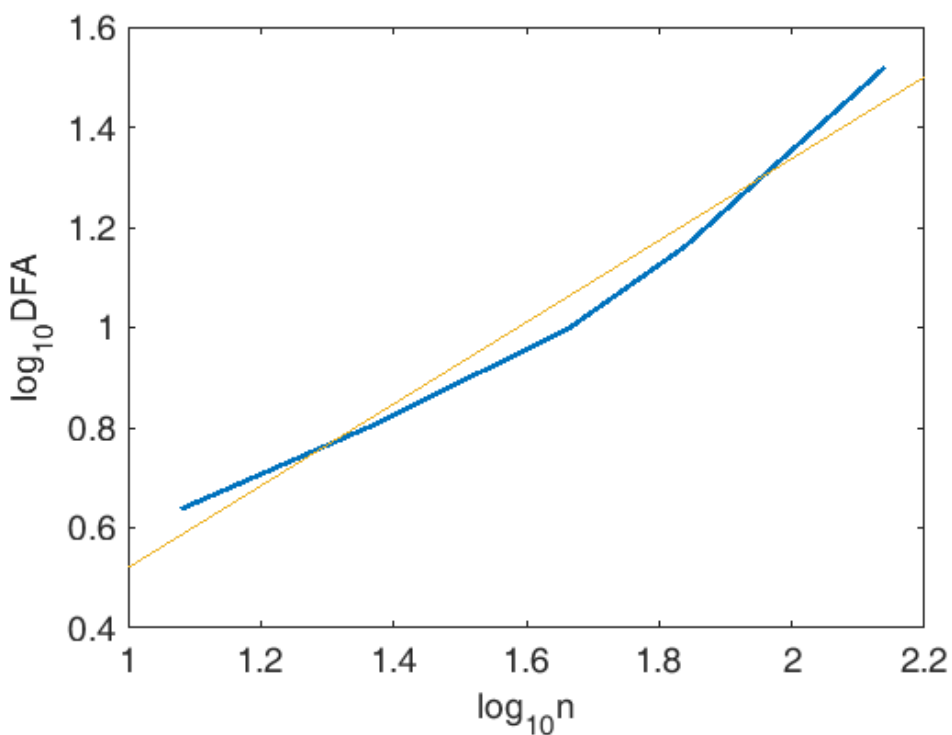
Hurstův exponent nám udává perzistentnost procesů, neboli nám říká, zdali se jedná o časovou řadu s dlouhodobou pamětí. Přes zmiňované problémy týkající se malého množství dat, byl proveden výpočet Hurstova koeficientu podle uvedených metod. Kromě GPH metody ostatní metody vrátily reálné hodnoty Hurstova koeficientu. Průměrná hodnota  $H = 0,836$  nám ukazuje, že tento proces leží skoro uprostřed mezi čistě náhodným a čistě deterministickým procesem. K podobným výsledkům dospěli Kříž et Kněžáčková (2014) při analýze HDP vybraných zemí EU, kdy průměrná hodnota Hurstova exponentu těchto zemí byla 0,844. Kříž (2014a) při analýze finského HDP dospěl k hodnotám Hurstova exponentu mezi 0,87 a 0,96. Jihanhua et al. (2003) pomocí Hurstova koeficientu analyzovali disparity regionálního ekonomického vývoje u čínské ekonomiky. Jejich výpočty ukazovaly na hodnoty Hurstova koeficientu pohybující mezi 0,504 a 0,722. Je vidět, že i přes nedostatek kvalitních dat jsou hodnoty Hurstova exponentu HDP různých zemí podobné.

Metoda	Odhad Hurstova koeficientu
R/S analýza	0,719
DFA	0,817
GPH	1,020
AWC	0,788
Aritmetický průměr	0,836
Směrodatná odchylka	0,112

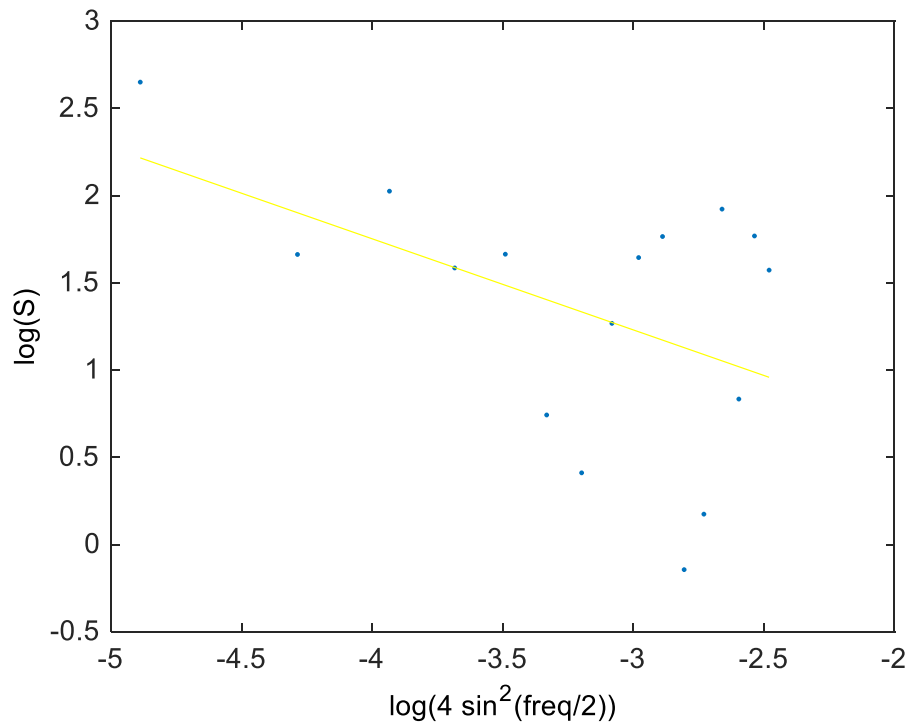
**Tab. 7.2.** Přehled výpočtu Hurstova koeficientu HDP podle jednotlivých metod



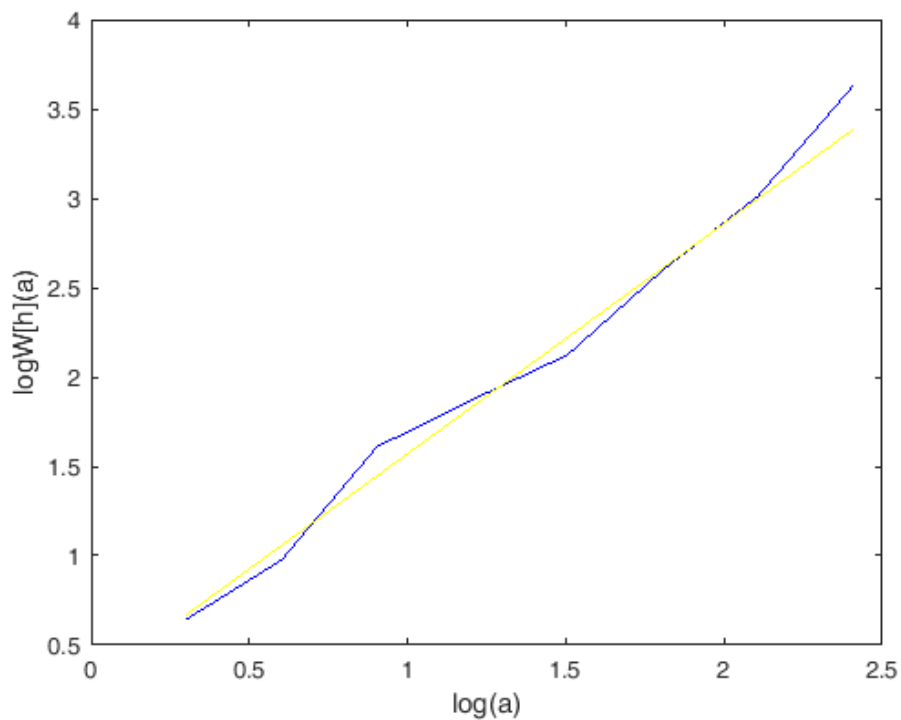
**Obr. 7.7.** R/S analýza tempa růstu HDP. Empirická hodnota Hurstova exponentu byla odhadnuta na 0,719.



**Obr. 7.8.** DFA analýza tempa růstu HDP. Empirická hodnota Hurstova exponentu byla odhadnuta na 0,817.



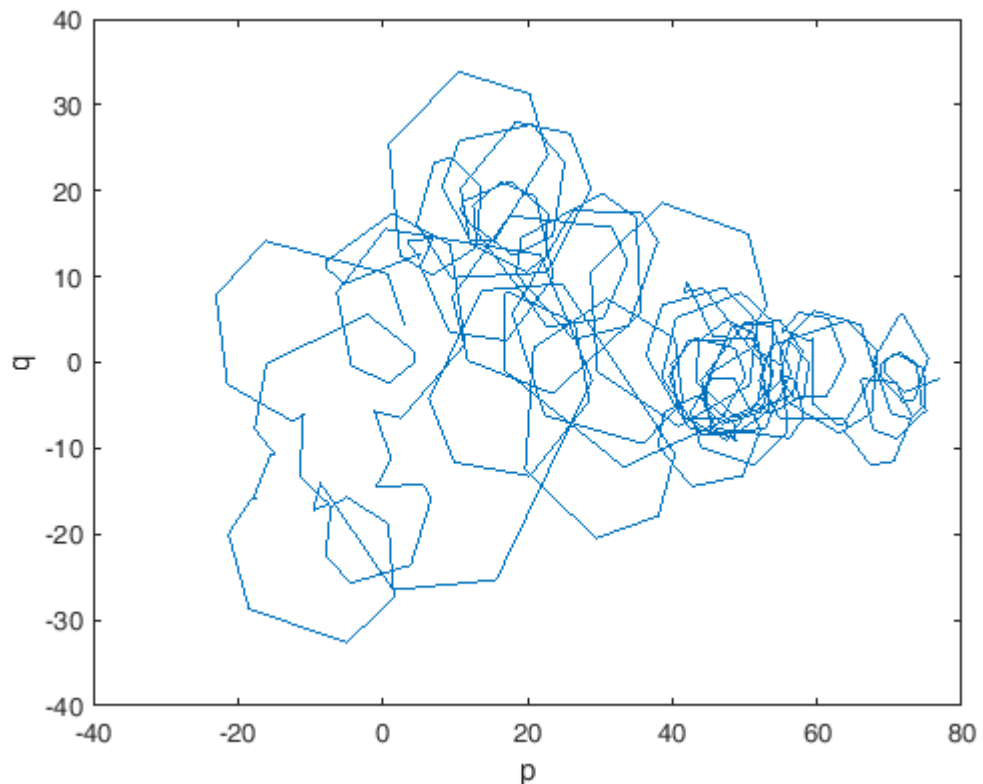
**Obr. 7.9.** Výkonové (Power) spektrum spotových cen v log-log grafu. Hodnota Hurstova koeficientu je je 1,02.



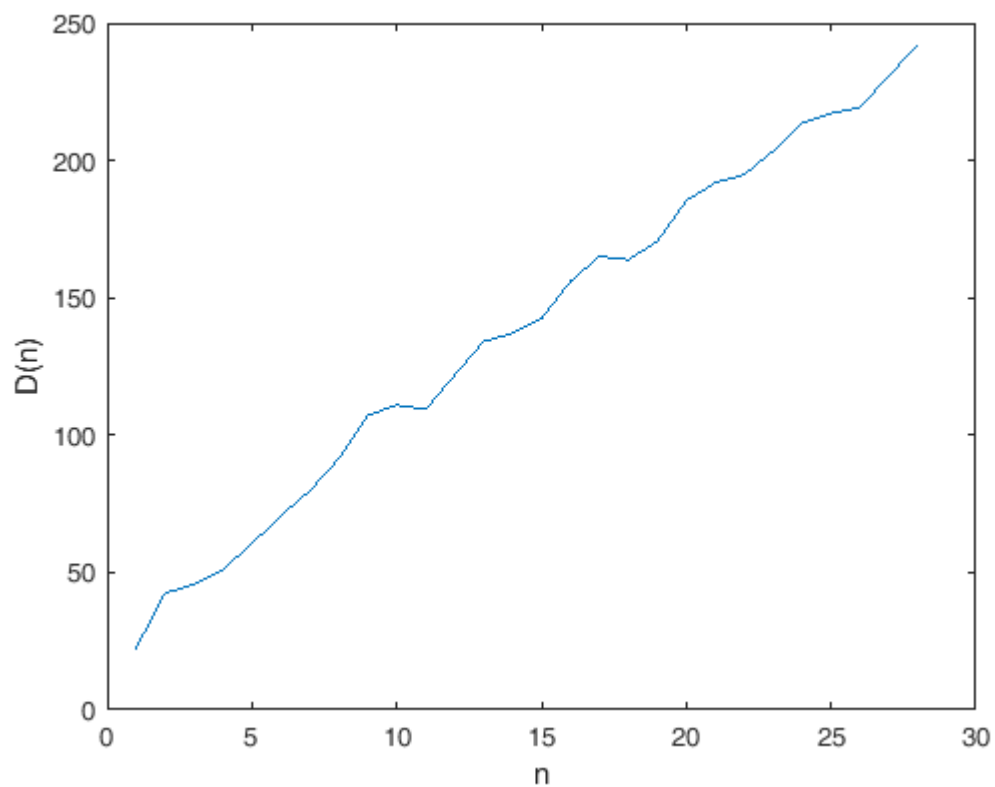
**Obr. 7.10.** AWC analýza. Závislost  $\log W[h](a)$  na  $\log a$ . Hodnota Hurstova koeficientu je 0,788.

### 7.3.6 Test 0-1 HDP

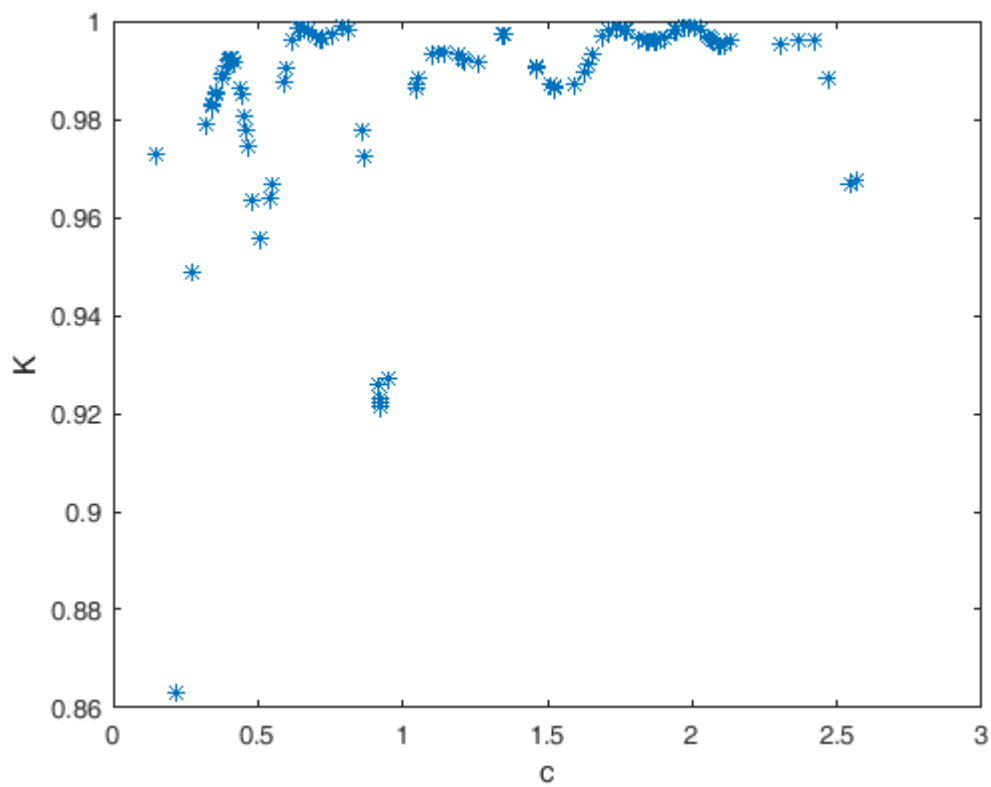
Před samotným použitím 0-1 testu je vhodné se podívat na závislost kosinové  $p_c(n)$  a sinové  $q_c(n)$  složky Fourierovy transformace. Alternativně je možné využít fraktální Fourierovu transformaci. Vzájemná závislost kosinové  $p_c(n)$  a sinové  $q_c(n)$  složky podle obr. 6.13 indikuje chaos viz srovnání s chaotickou dynamikou logistické rovnice s parametrem  $r=3,97$  (obr. 5.3). Další informaci je možné získat ze závislosti modifikovaného středního kvadratického posunu  $D(n)$  na  $n$ . Pokud modifikovaný střední kvadratický posunu  $D(n)$  diverguje s rostoucím  $n$ , pak je chaos pravděpodobně přítomen v tomto systému. Asymptotické tempo růstu  $K_c$  konverguje k hodnotě 1, což znamená přítomnost chaosu (Obr. 7.13.).



**Obr. 7.11.** Závislost proměnných  $p_c(n)$  a  $q_c(n)$ .



**Obr. 7.12.** Závislost modifikovaného středního kvadratického posunu  $D(n)$  na  $n$ .



**Obr. 7.13.** Asymptotické tempo růstu  $K_c$



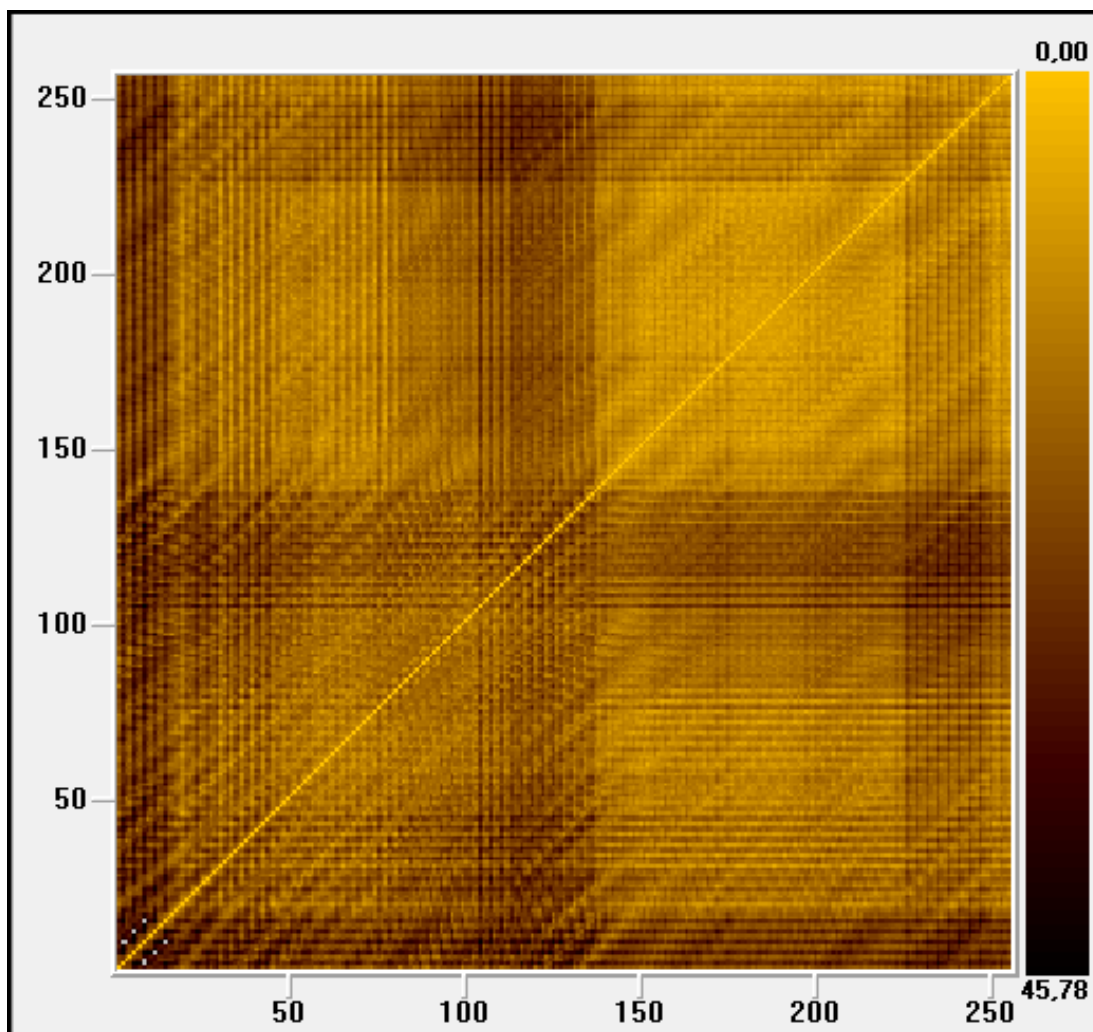
### 7.3.7 Rekurentní analýza HDP

Asi nejzajímavější výsledky jsou vidět v rekurentním grafu (obr. 7.14), který obsahuje diagonální, vertikální nebo horizontální linie. Vertikální nebo horizontální linie znamenají, že stavy setrvávají v jednom bodě nebo se jen málo mění od tohoto bodu, systém je tedy uvězněn v těchto bodech. Diagonální linie se vyskytuje v případě, když část trajektorie běží paralelně s jinou částí trajektorie, neboli trajektorie se vrací do stejné oblasti v různých časech. Z rekurentního grafu je možné vyčíst náznaky nepravidelných diagonálních struktur, které by znamenaly přítomnost složitého dynamického chování. Tyto linie indikují existenci nestabilních periodických orbit a jsou tedy charakteristickým znakem přítomnosti determinismu. Pokud v rekurentním grafu existují pouze tyto diagonální linie, jedná se pak o periodický signál. Délka tohoto úseku je určena dobou, jak dlouho jednotlivé části trajektorie setrvává v těchto oblastech. V případě, že vzdálenost mezi diagonálními liniemi je různá, značí to složitou komplexní dynamiku systému.

Kvantitativní rekurentní analýza tyto náznaky potvrdila (tab. 7.3). Nejvýznamnější je laminarita a míra determinismu. Laminarita *LAM* je definována jako podíl stavů tvořící vertikální úseky na celkovém počtu rekurentních stavů. Míra determinismu *DET* je definována jako podíl stavů tvořící diagonální úseky na celkovém počtu stavů. Podle výsledků kvantitativní rekurentní analýzy je míra rekurence poměrně malá, ale přítomná.

Ukazatel RQA	hodnota
RR	1.9
DET	13.1
LAM	27.9
TT	2.2
ENT	0.5
TREND	-15.3

**Tab. 7.3.** Výsledek kvantitativní rekurentní analýzy



Obr. 7.14. Rekurentní graf

## 7.4 *Shrnutí výsledků analýzy*

Tato kapitola se zabývá ověřením vypracované metodiky na příkladu hrubého domácího produktu. Časová řada HDP je typickým příkladem makroekonomické časové řady. Konkrétně je analyzováno čtvrtletní tempo růstu HDP ve Spojených státech amerických (sezonně očištěno) od roku 1947 do roku 2016. Byla zvolena analýza tempa růstu, neboť tato řada nevykazuje trend, na rozdíl od HDP, kde je naopak výrazný trend. Jedná se sice o jednu z nejdelších časových řad HDP, ale pořád to je pouze 278 hodnot. Nedostatečné množství dat je hlavní problém analýzy deterministického chaosu. Dalším problémem je kvalita dat.

Standartní metodika založená na výpočtu Ljapunovových exponentů či korelační dimenze je nevhodná. Přesto byl proveden výpočet největšího Ljapunovova exponentu, který byl negativní. Dále byla provedena analýza pomocí 0-1 testu, která potvrdila přítomnost chaosu. Bohužel u tak malého množství dat není možné posoudit relevantnost. Největší naděje se upírá k výsledkům rekurentní analýzy. Z rekurentního grafu je možné vyčíst náznaky nepravidelných diagonálních struktur, které by znamenaly přítomnost složitého dynamického chování. Kvantitativní rekurentní analýza tyto náznaky potvrdila. Chaotické projevy je možné vytušit z výsledku testu 0-1, výpočtu Hurstova koeficientu a z rekurentního grafu. Tím byl splněn cíl práce týkající se analyzování chaotických projevů u tempa růstu HDP v USA. Existuje pouze několik vědeckých prací zabývajících se deterministickým chaosem u HDP. Shintani et Linton (2003) analyzovali HDP a jejich odhad hodnoty Ljapunovova exponentu byl také záporný. Nicméně poukázali, že nemohou s jistotou vyloučit přítomnost deterministického chaosu. Kyrtsov et Vorlow (2005) aplikovali kvantitativní rekurentní analýzu na vybrané časové řady makroekonomických ukazatelů v USA a poukázali na nelineární dynamické sekvence, které by mohly být považovány i za chaotické. Kříž et Kněžáčková (2014) analyzovali tempo růstu HDP v několika vybraných státech EU. Kříž (2014a) při analýze finského HDP poprvé využil test 0-1 a potvrdil chaotické chování s výhradami.

## 8 Závěr a diskuse

Teorie chaosu způsobila změnu uvažování vědců a myslitelů v mnoha vědeckých disciplínách, včetně ekonomů. Dalo by se předpokládat, že teorie chaosu je přímo určená pro popis ekonomických systémů. Mnoho vědců se snažilo hlouběji prozkoumat chaos v ekonomických řadách. Na rozdíl od exaktních přírodních jevů je v ekonomii a jiných společenských disciplínách důkaz existence deterministického chaosu mnohem složitější. Teorie chaosu stimuluje hledání mechanismů, které generují pozorované úkazy v realitě, a minimalizuje roli exogenních šoků. V tomto smyslu by to mohlo znamenat posun ve vysvětlení ekonomických jevů, jako jsou výkyvy, nestabilita, recese a krize. Ukázalo se, že i klasické makroekonomické modely se mohou chovat za určitých podmínek chaoticky např. Gabisch (1984), Hommes (1991), Chiarella (1990), Medio et Gallo (1995). Deterministický chaos je přítomen v mnoha ekonomických modelech z důvodů přítomnosti nelinearit. V této práci a s odkazem na Kříž (2014b) je porovnáván Gabischův model s výsledky HDP v České republice. Porovnání je založeno na předpokladu, že hledaná funkce bude kubickou rovnicí s jedním nulovým kořenem s chaotickým projevem. Gabischův model je svou jednoduchostí spíše vhodný pro úvod do této problematiky, než k reálným simulacím. Problém spočívá ve volbě parametru spotřební funkce, kde chaotické chování vyžaduje, aby mocinná spotřební funkce měla mocninu vyšší než jedna, což odporuje ekonomické zkušenosti.

Tato disertační práce analyzovala data bez jakýchkoliv předchozích úprav. Obecně je doporučováno použít data bez výrazného trendu. Další otázkou je přítomnost šumu v datech. Existuje celá řada metodik jak se zbavit šumu uvedených např. v Kanz et al. (2004). Nicméně je třeba podotknout, že každý takový zásah na druhou stranu může zasáhnout do výkyvů plynoucí ze samé podstaty zkoumaného systému.

## 8.1 Metodika detekce deterministického chaosu

Základním cílem této disertační práce bylo vypracovat metodiku detekce deterministického chaosu v ekonomických časových řadách. Problémem je, že nízkodimenzionální chaos je obtížné detekovat a vícedimenzionální chaos je podobný náhodnému procesu. Mnoho ekonomů předpokládá, že nízkodimenzionální chaos se v ekonomii objevuje výjimečně a hodí se jen pro teoretické úvahy. Vzácná detekce nízkodimenzionálního chaosu v ekonomických řadách je zapříčiněna kontaminací bílým šumem a tváří se jako vícedimenzionální chaos. To ale neznamená, že nízkodimenzionální chaos neexistuje. Pochopit podstatu a nalézt univerzální rovnici světa je pořád nad naše síly, ale i kdybychom přes všechny naznačené obtíže toho dosáhli, nemohli bychom ji pravděpodobně vyřešit s rozumnou přesností a učinit tak relevantní dlouhodobou předpověď. Mnohdy nám nezbyvá nic jiného, než se pokusit popsat realitu pouze na základě několika málo nekvalitních dat. Je tedy ospravedlnitelné použít všechny známé teorie, nebo budovat vlastní pro popis reality a tvoření její předpovědi. Mocným nástrojem pro vytušení skrytých závislostí je analýza časových řad. Analýza časových řad je rozsáhlou kategorií, zahrnující klasické lineární metody, ale i nelineární techniky. Klasické statistické lineární metody jsou založeny na počtu pravděpodobnosti a náhodných veličinách. Zde je dobré si ujasnit co je to vlastně náhoda a vůbec jak si někdo může být jist, že je něco náhodné? Čistě náhodný proces je pouze matematická fikce. Klasické statistické lineární metody dobře fungují v „klidných lineárních oblastech“, ale nejsou schopny předpovědět, nebo namodelovat náhlé změny v časových řadách, se kterými je možné se v reálných systémech setkat.

Vypracovanou metodiku je možné shrnout do následujících kroků:

**Krok č. 1** je posouzení vhodnosti časové řady z různých hledisek. Mnohdy se stává, že u reálných dat některé hodnoty chybějí a pro účely dalších analýz je nutné se s tím vyrovnat. Mnohdy se je nutné doplnit chybějící hodnoty. V některých případech je možné chybějící hodnoty úplně ignorovat. Reálné ekonomické řady mohou obsahovat celou škálu šumů. Je nutné si uvědomit, že jakýkoliv zásah může ovlivnit charakter původní řady. Pro analýzu z hlediska teorie chaosu je vhodné co nejméně zasahovat do původní časové řady. Pokud to použitá metodika nevyžaduje, aby se do originálních časových řad spíše nezasahovalo. Někdy je vhodnější než samotná analýza původní časové řady, analyzovat časovou řadu odvozenou z původní časové řady. Pro účely zkoumání deterministického chaosu je vhodné analyzování tzv. měř dynamiky, které nám umožňují charakterizovat základní rysy "chování" časových

řad. Pro řady vykazující trend, především makroekonomické řady je vhodné analyzovat tempo růstu.

**Krok č. 2** je provedení rekonstrukce ve fázovém prostoru, které nám ukazuje nový pohled na danou časovou řadu. V případě dvou a tří dimenzionálního prostoru nám napoví graf o skrytých vlastnostech zkoumané časové řady. Toto zobrazení může ukázat skrytou podstatu dané časové řady. Podstatou rekonstrukce je Takensova věta, která transformuje problém predikce z extrapolace v čase do interpolace ve fázovém prostoru. Pro provedení rekonstrukce ve fázovém prostoru je nutné určit optimální hodnotu časového zpoždění a optimální hodnotu dimenze vnoření.

**Krok č. 3** spočívá v odhadu klasických invariantů systému tj. Ljapunovův exponent, korelační dimenze a Kolmogorova entropie. Konkrétní algoritmy výpočtu jsou uvedeny v předchozích kapitolách. Pokud je splněna klasická „Podmínka chaosu“, nebo-li pokud je Ljapunovův exponent kladný, korelační dimenze nabývá nízkých neceločíselných hodnot a Kolmogorova entropie je kladné konečné číslo, můžeme usuzovat, že daný systém je chaotický. Splnit klasickou „podmínku chaosu“ z reálných dat je mnohdy velmi komplikované. Nedostatečné množství dat je hlavní problém analýzy deterministického chaosu v reálných dynamických systémech. Standartní metodika založená na výpočtu Ljapunovových exponentů či korelační dimenze je nevhodná. Wolf et al. (1985) uvádí, že minimální délka dat pro výpočet největšího Ljapunovova exponentu by měla být  $N \in (10^{D_2}, 30^{D_2})$ . Pro systém  $D_2=3$  je to 1000 až 30000 dat.

**Krok č. 4** je výpočet Hurstova exponentu. Hurstův exponent  $H$  určuje míru chaotičnosti časové řady. Dokáže nejen rozlišit chaotickou a náhodnou časovou řadu, ale navíc je schopen u chaotické časové řady nalézt dlouhodobý paměťový cyklus. Hurstův exponent nabývá hodnot od 0 do 1. Časová řada se nazývá antiperezistentní, pokud hodnota Hurstova exponentu je nižší než 0,5. Čistě stochastický proces má hodnotu 0,5. Pokud hodnota Hurstova exponentu je vyšší než 0,5 nazývá se časová řada perzistentní a vykazuje dlouhodobou paměť. Hodnoty, blíží se krajním bodům ukazují na významnou deterministickou povahu procesu.

**Krok č. 5** spočívá v provedení nového testu 0-1 na detekci deterministického chaosu. Vstupem je časová řada a výstupem jedna skalární hodnota, jehož hodnota je mezi 0 a 1. Test 0-1 nezávisí na rekonstrukci ve fázovém prostoru, ale pracuje přímo s časovou řadou. Podstatou tohoto testu je zkoumání dynamiky středního kvadratického posunu. V případě, že se jedná o chaotické chování, roste střední kvadratický posun lineárně s časem. Alternativně

je vhodné použít metodu založenou na fraktální Fourierově transformaci, která rozšiřuje test 0-1 Gottwald et Melbourne (2004).

**Krok č. 6** je založen na využití topologické metody rekurentní analýzy. Rekurence je základní vlastností dynamických systémů, která může být využita pro analýzu vlastností systému ve fázovém prostoru. Cílem rekurentní analýzy je prokázání opakujících se vzorů a nestacionaritu časových řad. Toho se využívá ke studiu chaotických systémů, protože rekurence je důležitou vlastností chaotických systémů související s fraktální soběpodobností. Základními nástroji rekurentní analýzy jsou rekurentní graf (*RP*) a kvantitativní rekurentní analýza (*RQA*). Je nutné poznamenat, že tato metoda je vhodná pro některé makroekonomické časové řady s omezenou délkou, ale její využití pro analýzu finančních trhů je spíše sporadické.

**Krok č. 7** spočívá ve vyhodnocení výsledků jednotlivých metod popsaných v krocích č. 3,4,5,6. Jedná se o mix metrických, dynamických a topologických metod vhodných pro analýzu časových řad z hlediska teorie chaosu. Obecně platí, že výsledky uváděných testů jsou věrohodné, pokud jsou splněny předpoklady těchto testů. Nedostatečné množství dat je hlavní problém analýzy deterministického chaosu v reálných ekonomických dynamických systémech. Situace je zřejmá pokud všechny popsané metody ukazují shodně. V případě pokud uvedené metody neukazují shodně, není již situace jednoznačná a je nutné situaci detailněji analyzovat. Pokud je k dispozici dostatečné množství dat a jsou splněny všechny předpoklady pro výpočet klasických invariantů systému (tj. Ljapunovův exponent, korelační dimenze a Kolmogorova entropie), je výsledek věrohodný. Pokud je splněna klasická „Podmínka chaosu“, nebo-li pokud je Ljapunovův exponent kladný, korelační dimenze nabývá nízkých neceločíselných hodnot a Kolmogorova entropie je kladné konečné číslo, můžeme usuzovat, že je daný systém chaotický. Naopak u rekurentní analýzy se ukazuje, že je vhodná právě pro kratší (řádově  $10^2$  hodnot) ekonomické řady. U takto krátkých časových řad je výpočet klasických invariantů systému nevěrohodný.

## 8.2 *Vyhodnocení stanovených hypotéz*

V této disertační práci se pracovalo se dvěma hypotézami. První hypotéza zní: Časová řada spotových cen elektrické energie PHELIX má kvantifikovatelný chaotický projev. Byla provedena poměrně rozsáhlá analýza založená na metodách teorie chaosu. Pokud je Ljapunovův exponent kladný, korelační dimenze nabývá nízkých neceločíselných hodnot a Kolmogorova entropie je kladné konečné číslo, můžeme usuzovat, že daný systém je chaotický. Provedená analýza potvrdila předpoklady pro přítomnost chaosu v časových řadách spotových cen elektrické energie PHELIX. To potvrdil i 0-1 test poprvé představený Gottwald et Melbourne (2004). Tímto byla potvrzena první hypotéza a také byl splněn cíl práce týkající se prokázání kvantifikovatelných chaotických projevů ve spotových cenách elektrické energie PHELIX. Kříž et Kratochvíl (2014) poprvé aplikovali nový 0-1 chaos test na spotové ceny elektřiny a potvrdili jeho využitelnost. Následně He et al. (2015) použil tento test při analýze cen elektřiny v Austrálii a potvrdil přítomnost chaosu. Chaos byl zaznamenán u mnoha finančních časových řad např. Decoster et al. (1992). Přítomnost chaosu u časových řad cen elektrické energie byla potvrzena několika studii např. Cui et Song, (2008), Liu et al. (2005) v Nové Anglii, Bigdeli et Afshar (2009) u íránského trhu. Andragi et al. (2001) potvrdili silnou přítomnost nelinearity, ale jen slabou, resp. žádnou přítomnost chaosu.

Druhá hypotéza zní: Časová řada spotových cen elektrické energie PHELIX je perzistentní. Pro posouzení perzistentnosti, nebo-li dlouhodobého paměťového cyklu byl proveden výpočet Hurstova koeficientu. Hurstův exponent nabývá hodnot od 0 do 1. Časová řada se nazývá antiperzistentní, pokud hodnota Hurstova exponentu je nižší než 0,5. Čistě stochastický proces má hodnotu 0,5. Pokud hodnota Hurstova exponentu je vyšší než 0,5, nazývá se časová řada perzistentní a vykazuje dlouhodobou paměť. Hodnoty, blíží se krajním bodům ukazují na deterministickou povahu procesu. Uvádí se, že většina procesů v přírodě má charakter perzistentních procesů, což znamená, že je zde přítomna dlouhodobá paměť, která způsobuje trendy a cykly. Výpočet byl proveden čtyřmi rozdílnými metodami a u všech byla přesvědčivě dokázána perzistentnost. Průměrná hodnota Hurstova exponentu je 0,914. Tímto byla potvrzena druhá hypotéza a také splněn cíl práce týkající se prokázání dlouhodobé paměti u časové řady spotových cen elektrické energie PHELIX. Přítomnost dlouhodobé paměti ukazuje na neefektivnost tohoto trhu. Proto se mnoho prací primárně nezabývá detekcí chaosu u cen elektrické energie, ale zaměřuje se pouze na výpočet fraktální dimenze nebo Hurstova exponentu. Kristoufek et Lunackova (2013) analyzovali hodinové ceny elektřiny v České republice a prokázali silnou perzistentnost procesů. Alvarez-Ramirez



et Escarela-Perez (2010) podobně prokázali silnou perzistentnost u hodinových cen elektrické energie v kanadské Albertě a Ontariu. K opačnému výsledku došli Weron et Przybyłowicz (2000) při analýze hodinových cen elektrické energie u California Power Exchange (CalPX) a Swiss Electricity Prices (SWEP) v letech 1998 až 2000, kde hodnoty Hurstova exponentu jsou 0,428 (CalPX) a 0,529 (SWEP). K podobným hodnotám dospěl Simonsen (2003) u skandinávského Nord Pool a Norouzzadeh et al. (2007) u španělského Operador del Mercado Ibérico de Energía. Markantní rozdíly u jednotlivých trhů jsou způsobeny především již zmiňovanou rozdílnou efektivností těchto trhů. Je známa souvislost mezi efektivností kapitálového nebo komoditního trhu a fraktální dimenzí. Kristoufek et Vosvrda (2013, 2014) vyvinuli novou metodu měření efektivnosti kapitálových a komoditních trhů založenou na dlouhodobé i krátkodobé paměti a fraktální dimenzi. Obecně fraktální dimenze a Hurstův koeficient mohou být nezávislé veličiny, většinou se vychází se vztahu  $H+D=2$ , z čehož plyne závislost mezi efektivností kapitálového nebo komoditního trhu a Hurstovým exponentem.

### **8.3 Naplnění cílů práce**

Mimo hlavní cíl práce týkající se vypracování metodiky detekce deterministického chaosu v ekonomických časových řadách byly naplněny i ostatní stanovené cíle práce, které vycházejí z vypracované metodiky.

Cíl 2 nazvaný „Prokázání kvantifikovatelné chaotické projevy ve spotových cenách elektrické energie PHELIX.“ přímo plyne z přijetí hypotézy 1: „Časová řada spotových cen elektrické energie PHELIX má kvantifikovatelný chaotický projev.“ Vzhledem k dostatečnému množství dat a splnění všech předpokladů pro výpočet klasických invariantů je tento výsledek věrohodný.

Cíl 3 nazvaný „Prokázat dlouhodobou paměť u časové řady spotových cen elektrické energie PHELIX.“ přímo plyne z přijetí hypotézy 2: „Časová řada spotových cen elektrické energie PHELIX je perzistentní.“ U spotových cen elektřiny PHELIX byla prokázána poměrně silná perzistentnost. To je v souladu s obdobnou prací Kříž et Kratochvíl (2014), která analyzovala 10 000 dat ze stejného trhu.

Dále si disertační práce klade za cíl demonstrovat aplikaci metodiky deterministického chaosu na tempu růstu HDP v USA. Nedostatečné množství dat je hlavní problém analýzy deterministického chaosu u HDP. Standardní metodika založená na výpočtu Ljapunovových exponentů či korelační dimenze je nevhodná. Přesto byl proveden výpočet největšího Ljapunovova exponentu, který byl negativní. Dále byla provedena analýza pomocí 0-1 testu, která potvrdila přítomnost chaosu. Bohužel u tak malého množství dat není možné posoudit

relevantnost. Největší naděje se upírá k výsledkům rekurentní analýzy. Z rekurentního grafu je možné vyčíst náznaky nepravidelných diagonálních struktur, které by znamenaly přítomnost složitého dynamického chování. Kvantitativní rekurentní analýza tyto náznaky potvrdila. Chaotické projevy je možné vytušit z výsledku testu 0-1, výpočtu Hurstova koeficientu a z rekurentního grafu. Tím byl splněn cíl práce týkající se analyzování chaotických projevů u tempa růstu HDP v USA. Existuje pouze několik vědeckých prací zabývajících se deterministickým chaosem u HDP. Shintani et Linton (2003) analyzovali HDP a jejich odhad hodnoty Ljapunovova exponentu byl také záporný. Nicméně poukázali, že nemohou s jistotou vyloučit přítomnost deterministického chaosu. Kyrtsov et Vorlow (2005) aplikovali kvantitativní rekurentní analýzu na vybrané časové řady makroekonomických ukazatelů v USA a poukázali na nelineární dynamické sekvence, které by mohly být považovány i za chaotické. Kříž et Kněžáčková (2014) analyzovali tempo růstu HDP v několika vybraných státech EU. Kříž (2014a) při analýze finského HDP poprvé využil test 0-1 a potvrdil chaotické chování s výhradami.

Pro posouzení perzistentnosti, nebo-li dlouhodobé paměti je rozhodující hodnota Hurstova koeficientu. Přes zmiňované problémy týkající se malého množství dat, byl proveden výpočet Hurstova koeficientu podle uvedených metod. Průměrná hodnota  $H = 0,836$  nám ukazuje, že tento proces leží skoro uprostřed mezi čistě náhodným a čistě deterministickým procesem. Tím byl splněn cíl práce týkající se analyzování perzistentnosti u tempa růstu HDP v USA. K podobným výsledkům dospěli Kříž et Kněžáčková (2014) při analýze HDP vybraných zemí EU, kdy průměrná hodnota Hurstova exponentu těchto zemí byla 0,844. Kříž (2014a) při analýze finského HDP dospěl k hodnotám Hurstova exponentu mezi 0,87 a 0,96. Jihanhua et al. (2003) pomocí Hurstova koeficientu analyzovali disparity regionálního ekonomického vývoje u čínské ekonomiky. Jejich výpočty ukazovali na hodnoty Hurstova koeficientu pohybující mezi 0,504 a 0,722. Je vidět, že i přes nedostatek kvalitních dat, hodnoty Hurstova exponentu ukazují na perzistentnost.

## 8.4 *Přínosy a praktické využití práce*

Přínosem této dizertační práce je poukázání na perspektivní možnosti, které skýtá teorie chaosu pro ekonomii. A to jak na teoretické úrovni týkající se ekonomických modelů, tak i v oblasti praktické analýzy ekonomických časových řad. Současná metodika nám neumožňuje relevantní analýzu řad makroekonomických ukazatelů, ale je vhodná pro analýzu řad finančních ukazatelů. Letellierovi et al. (2006) pro detekci chaosu u slunečních skvrn dokonce stačila časová řada o délce  $N = 100$ , stačí k tomu jen vhodný trik. Je dost možné, že s rozvojem matematických či jiných teorií, bude objeven nějaký vhodný nástroj na bázi teorie chaosu využitelný pro časové řady makroekonomických ukazatelů.

Disertační práce se zabývá především analýzou časové řady spotových cen elektřiny z hlediska chaosu. Toto téma je v poslední době vzhledem k probíhající liberalizaci elektrického trhu a dynamické integraci obnovitelných zdrojů energie, vysoce aktuální. A právě díky těmto dvěma fenoménům současné energetiky je pro analýzu energetického trhu teorie chaosu obzvlášť vhodná. Většina obnovitelných zdrojů elektrické energie závisí na počasí, které může být jedním ze zdrojů chaotického chování. Harsha et Dahleh (2015) dokázali na příkladech USA, že optimální skladovací kapacita elektřiny může efektivně integrovat elektřinu z obnovitelných zdrojů do energetické soustavy bez výrazného zatížení přenosové soustavy. Chaotické invarianty mají souvislost s efektivností příslušného trhu viz. Kristoufek et Vosvrda (2013, 2014). V případě prokázání přítomnosti deterministického chaosu máme naději na alespoň krátkodobé předpovědi budoucnosti. Teorie chaosu se jeví jako využitelná pro konstrukce modelů pro predikce v energetice viz např. Liu et al. (2005), Bigdeli et Afshar (2009), Andragi et al. (2001). Ukazuje se, že správná aplikace metod založených na teorii chaosu může zaručit úspěšnější predikci, než klasické metody viz Zhang (2004).

Tato disertační práce a Kříž et Kratochvíl (2014) poprvé aplikovali nový 0-1 chaos test na spotové ceny elektřiny PHELIX a potvrdili jeho využitelnost. Byla prvně aplikována metoda detekce deterministického chaosu založená na fraktální Fourierovy transformaci, která přítomnost deterministického chaosu také potvrdila. Tato metoda založená na fraktální Fourierovy transformaci rozšiřuje test 0-1 autorů Gottwald et Melbourne (2004).

## 8.5 *Náměty pro další práci*

Tato disertační práce je odrazovým můstkem pro další výzkum teorie chaosu a jeho aplikace v reálném světě. Náměty pro další práci je možné rozčlenit do následujících směrů:

Detailněji prověřit možnosti aplikací lineárních integrálních transformací pro detekci deterministického chaosu. S rozvojem výpočetní techniky jde vývoj v této oblasti rychle dopředu. Optimalizovat jejich využití pro konkrétní časové řady.

Velkou výzvou jsou predikce založené na teorii chaosu inspirovanou přírodou. Snahou napodobit přírodu vznikly dva typy přístupů. Prvním jsou umělé neuronové sítě (ANN) napodobující činnost mozku a používané v praxi pro předpovědi nebo pro klasifikaci objektů na základě předem daných vstupních informací se známými odpověďmi. Druhým přístupem jsou genetické algoritmy používané hlavně pro řešení problémů učení a adaptace. Právě tento přístup by se mohl jevit zvláště vhodný pro aplikace v energetice a to nejen pro prognózu cen, ale i spotřeby elektrické energie.

Další výzvou je aplikovat Feigenbaumovu (1983) univerzalitu v reálných systémech světa. Není bez zajímavosti, že z mnoha ekonomických diskrétních modelů vyplyne právě logistická rovnice. A není bez zajímavosti, že v mnoha reálných systémech dochází k sérii zdvojování period podobně jako u logistické rovnice. S těmito vizemi souvisí mnoho praktických „detailů“ týkající se nalezení a optimalizace vhodných algoritmů.

Podle Smale (1998) je uvedení teorie chaosu do ekonomie jedním z 18. nejdůležitějších úkolů matematiky tohoto století. Konkrétně se jedná o 8. problém zabývající se rozšíření matematického modelu všeobecné teorie rovnováhy, který by zahrnoval cenové úpravy. Tento problém není čistě matematický, ale leží na rozhraní ekonomiky a matematiky.

Další výzkum v oblasti teorie chaosu musí být provázán s teorií komplexity. Podle teorie chaosu se mohou i jednoduché systémy projevovat složitě. Na druhé straně existuje teorie komplexity, podle které se složité systémy mohou chovat emergentně. Emergence znamená spontánní vznik makroskopických vlastností a struktur složitých systémů, které nejsou jasně viditelné z vlastností jednotlivých částí. Emergence je typickou vlastností všech systémů, výrazná je u komplexních systémů. Chaotické systémy jsou jistým typem komplexního systému. Teorie chaosu a teorie komplexity, složitost a jednoduchost jsou v podstatě dvě strany téže mince. To že spolu obě teorie úzce souvisejí, je dáno skutečností, že patří do teorie nelineární dynamiky.

## 9 Publikační činnost

### 9.1 Seznam vědeckých publikací souvisejících s tématem disertace

#### 9.1.1 Články v časopisech indexovaných v databázi Scopus nebo WoS

- Kříž, R. 2014. Finding chaos in Finnish GDP. *International Journal of Automation and Computing*, 11(3), 231-240. ISSN: 1476-8186.
- Kříž, R. 2011. Chaos in GDP. *Acta Polytechnica*, 51(5). 63-68. ISSN: 1210-2709.

#### 9.1.2 Ostatní publikace indexované v databázi Scopus nebo WoS

- Kříž, R., Lešáková, P. 2016. Prediction of NOX Concentration Time Series Using the Chaos Theory. In *Proceedings of the Second International Afro-European Conference for Industrial Advancement AECIA 2015*. Springer International Publishing. 465-475
- Kříž, R., Lešáková, P. 2016. Long memory in electricity price time series. In *3rd International Multidisciplinary Scientific Conference on Social Sciences and Arts SGEM 2016, Conference Proceedings*, ISBN 9786197105742 / ISSN 2367-5659, 24-31 August, 2016, Book 2 Vol. 3, 395-404.
- Kříž, R., Lešáková, P. 2016. Recurrence Quantification Analysis of Czech Macroeconomic Time Series. *3rd International Multidisciplinary Scientific Conference on Social Sciences and Arts SGEM 2016, Conference Proceedings*, ISBN 9786197105766 / ISSN 2367-5659, 24-31 August, 2016, Book 2 Vol. 5.
- Kříž, R. 2014. Porovnání českého HDP s Gabishovým modelem. In *Sborník recenzovaných příspěvků z mezinárodní konference Hradecké ekonomické dny 2014*, díl II. Hradec Králové: Gaudeamus. 99-105. ISBN 9788074353673.
- Kříž, R. 2014. Chaos in Nitrogen Dioxide Concentration Time Series and Its Prediction. In *Nostradamus 2014: Prediction, Modeling and Analysis of Complex Systems*. Springer International Publishing. 365-376. ISBN 978-3-319-07401-6.
- Kříž, R. 2013. Chaotic analysis of the GDP time series. In *Nostradamus 2013: Prediction, Modeling and Analysis of Complex Systems*. Springer International Publishing. 210. 353-362. ISSN: 2194-5357.
- Kříž, R. 2016. Nonlinear Prediction of the GDP Growth rate in the Globalized World. *Globalization and its socio-economic consequences*, 5, 1069.

### 9.1.3 Ostatní související publikace

- Kříž, R., Seinerová, K. 2016. Forecasting electricity prices using nonlinear method. 8th International Scientific Conference Managing and Modelling of Financial Risks, Ostrava
- Kříž, R., Šedek, P. 2015. The Prediction of Tropospheric Ozone Using a Radial Basis Function Network. In ISCS 2014: Interdisciplinary Symposium on Complex Systems. Springer International Publishing. 115-123. ISBN: 978-3-319-10758-5.
- Kříž, R., Kněžáčková, R. 2014. The Presence of Chaos in the GDP Growth Rate Time Series. Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM). 2014(2). 199-206. ISSN: 2241-0503.
- Kříž, R., Kratochvíl, Š. 2014. Analyses of the Chaotic Behavior of the Electricity Price Series. ISCS 2013: Interdisciplinary Symposium on Complex Systems. Springer Berlin Heidelberg. ISBN: 978-3-642-45437-0.
- Kříž, R., Šedek, P. 2014. Recurrence plots of electricity price series and the prediction of electricity prices using artificial neural networks. In: POSTER 2014 - 18th International Student Conference on Electrical Engineering. 18th International Student Conference on Electrical Engineering, Praha, 2014-05-15. Prague: Czech Technical University. p. 1-8. ISBN 978-80-01-05499-4.
- Kříž, R., Kratochvíl, Š. 2014. Detection of the chaotic behavior at the electricity. In: 12th WEC CENTRAL & EASTERN EUROPE REGIONAL ENERGY FORUM - FOREN 2014. Bukurešť, 2014-06-22/2014-06-26.
- Kříž, R., Kratochvíl, Š. 2013.. Is the electricity price series chaotic? In: POSTER 2013 - 17th International Student Conference on Electrical Engineering, Prague, 2013-05-16. Prague: Czech Technical University, 2013. ISBN 978-80-01-05242-6.
- Kříž, R. 2013. Chaotic Analysis of the United Kingdom GDP Growth Rate Time Series. In: QUAERE 2013. Interdisciplinární mezinárodní vědecká konference doktorandů a odborných asistentů QUAERE 2013, Hradec Králové, 2013-05-20/2013-05-24. Hradec Králové: Magnanimitas. p. 939-946. ISBN 978-80-905243-7-8
- Kříž, R. Chaotic Dynamics in Discrete Economic Models. 2012 In: POSTER 2012 - 16th International Student Conference on Electrical Engineering, Prague, 2012-05-17. Praha: Czech Technical University in Prague. p. 1-6. ISBN 978-80-01-05043-9.

- Kříž, R. Chaos in GDP. 2011. In: POSTER 2011 - 15th International Student Conference on Electrical Engineering, Praha, 2011-05-12. Praha: České vysoké učení technické v Praze, Fakulta elektrotechnická. p. 1-10. ISBN 978-80-01-04806-1.

## **9.2 Seznam vědeckých publikací nesouvisejících s tématem disertace**

### **9.2.1 Články v časopisech indexovaných v databázi Scopus nebo WoS**

- Baťa, R., Kříž, R. 2014. Saving Potential of Reused Batteries by Waste Production. Wseas Transactions on Environment and Development, 2014(10), 288-297. ISSN: 1790-5079.

### **9.2.2 Ostatní publikace**

- Kříž, R. a kol. 2013. Udržitelný rozvoj a veřejná správa. Žilina. GEORG - Juraj Štefún. 192 s. ISBN: 978-80-8154-047-9.

## 9.3 Citace

### 9.3.1 Google Scholar

Citační ohlasy článků autora s vyloučením autocitací podle databáze Google Scholar ze dne 30. 5. 2017:

- Kříž, R. 2014. Finding chaos in Finnish GDP. *International Journal of Automation and Computing*, 11(3), 231-240. ISSN: 1476-8186. **(4 citace)**
- Kříž, R. 2013. Chaotic analysis of the GDP time series. In *Nostradamus 2013: Prediction, Modeling and Analysis of Complex Systems*. Springer International Publishing. 210. 353-362. ISSN: 2194-5357. **(2 citace)**
- Kříž, R., Kratochvíl, Š. 2014. Analyses of the Chaotic Behavior of the Electricity Price Series. *ISCS 2013: Interdisciplinary Symposium on Complex Systems*. Springer Berlin Heidelberg. ISBN: 978-3-642-45437-0. **(2 citace)**
- Kříž, R. 2014. Chaos in Nitrogen Dioxide Concentration Time Series and Its Prediction. In *Nostradamus 2014: Prediction, Modeling and Analysis of Complex Systems*. Springer International Publishing. 365-376. ISBN 978-3-319-07401-6. **(1 citace)**

### 9.3.2 Scopus

Citační ohlasy článků autora s vyloučením autocitací podle databáze Scopus ze dne 30. 5. 2017:

- Kříž, R. 2013. Chaotic analysis of the GDP time series. In *Nostradamus 2013: Prediction, Modeling and Analysis of Complex Systems*. Springer International Publishing. 210. 353-362. ISSN: 2194-5357. **(2 citace)**
- Kříž, R. 2014. Finding chaos in Finnish GDP. *International Journal of Automation and Computing*, 11(3), 231-240. ISSN: 1476-8186. **(2 citace)**
- Kříž, R. 2014. Chaos in Nitrogen Dioxide Concentration Time Series and Its Prediction. In *Nostradamus 2014: Prediction, Modeling and Analysis of Complex Systems*. Springer International Publishing. 365-376. ISBN 978-3-319-07401-6. **(1 citace)**



## 10 Literatura

- Abarbanel, H. D., Brown, R., Sidorowich, J. J., Tsimring, L. S. 1993. The analysis of observed chaotic data in physical systems. *Reviews of modern physics*. 65(4). 1331.
- Abarbanel, H. D. I. 1996. *Analysis of Observed Chaotic Data*. Springer. New York. p. 272. ISBN: 9780387983721.
- Akhmet, M., Akhmetova, Z., Fen, M. O. 2014. Chaos in economic models with exogenous shocks. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 106, 95-108.
- Alvarez-Ramirez, J., Escarela-Perez, R. 2010. Time-dependent correlations in electricity markets. *Energy Economics*, 32(2), 269-277.
- Adrangi, B., Chatrath, A., Dhanda, K. K., Raffiee, K. 2001. Chaos in oil prices? Evidence from futures markets. *Energy Economics*, 23(4), 405-425.
- Annis, A. A., Lloyd, E. H. 1976. The expected value of the adjusted rescaled Hurst range of independent normal summands. *Biometrika*, 63(1), 111-116.
- Aguirre, L. A., Billings, S. A. 1995. Retrieving dynamical invariants from chaotic data using NARMAX models. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 5(02), 449-474.
- Arrow, K. J., Debreu, G. 1954. Existence of an equilibrium for a competitive economy. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 265-290.
- Arlt, J., Arltová, M., Rublíková, E. 2002. *Analýza ekonomických časových řad s příklady*. Vysoká škola ekonomická, Fakulta informatiky a statistiky.
- Basingthwaight, J. B. 1988. Physiological heterogeneity: fractals link determinism and randomness in structures and functions. *Physiology*. 3(1). 5-10.
- Beneš P. 2010. *Informace o informaci*. BEN - technická literatura, Praha. 123 s. ISBN 9788073002633.
- Benhabib, J., Day, R. H. 1981. Rational choice and erratic behaviour. *The Review of Economic Studies*, 48(3), 459-471.
- Bergson, H. 1910. *Time and free will – An essay on the immediate data of consciousness*. Translation: Pogson, F. N., George Alien Unwin Ltd. London.

- Bertenthal, I. B., Boker, S. M., Rose J. L. Dynamical analyses of postural development. [online]. Department of Psychology, The University of Virginia. [cit. 2015-02-10]. Dostupné z <http://people.virginia.edu/~smb3u/NASPSA9506a/node5.html>
- Beyer, W. 2015 Mandelbrot set. Wikipedia. [Online] 2015. Dostupné z [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/21/Mandel\\_zoom\\_00\\_mandelbrot\\_set.jpg](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/21/Mandel_zoom_00_mandelbrot_set.jpg)
- Bible: Písmo svaté Starého a Nového zákona. Český ekumenický překlad. 3. přeprac. vyd. Praha : Česká biblická společnost, 1993.
- Bigdeli, N., Afshar, K. 2009. Characterization of Iran electricity market indices with pay-as-bid payment mechanism. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 388(8), 1577-1592.
- Binter, R., Vácha, L. 2005. Local Stability and Bifurcations in Kaldor Model. *Acta Oeconomica Pragensia*, 2005(1), 10-20.
- Bohr, N. 1913. On the constitution of atoms and molecules. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 26(155), 857-875.
- Boeing, G. 2016. Visual Analysis of Nonlinear Dynamical Systems: Chaos, Fractals, Self-Similarity and the Limits of Prediction. *Systems*, 4(4), 37.
- Boltzmann, L. 1974. The second law of thermodynamics. In *Theoretical physics and philosophical problems* (pp. 13-32). Springer Netherlands.
- Box, G. E. P., Jenkins, G. M. 1970. *Time series analysis: forecasting and control*, 1976. ISBN: 0-8162-1104-3.
- Broock, W. A., Scheinkman, J. A., Dechert, W. D., LeBaron, B. 1996. A test for independence based on the correlation dimension. *Econometric reviews*, 15(3), 197-235.
- Ciarreta, A., Zarraga, A. 2010. Economic growth-electricity consumption causality in 12 European countries: A dynamic panel data approach. *Energy Policy*, 38(7), 3790-3796.
- Clark, C. 1932, *The National Income, 1924-31*, Macmillan, London, (167 pp.).
- Clausius, R. 1850. Über die bewegende Kraft der Wärme und die Gesetze, welche sich daraus für die Wärmelehre selbst ableiten lassen. *Annalen der Physik*, 155(3), 368-397.

- Condon, E. U. 1937. Immersion of the Fourier transform in a continuous group of functional transformations. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 23(3), 158-164.
- Coveney, P., Highfield, R. 1995. *Mezi chaosem a řádem. Hranice komplexity: Hledání řádu v chaotickém světě*. Mladá fronta, Praha. p. 440. ISBN: 80204090890
- Cui, H., Song, X. 2008. Research on electricity price forecasting based on chaos theory. In *Future Information Technology and Management Engineering, 2008. FITME'08. International Seminar on* (pp. 398-401). IEEE.
- De Broglie, L. 1923. Waves and quanta. *Nature*, 112, 540.
- Decoster, G. P., Labys, W. C., Mitchell, D. W. 1992. Evidence of chaos in commodity futures prices. *Journal of Futures Markets*, 12(3), 291-305.
- Devaney R., L., 1989. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. 2nd ed. Addison-Wesley. New York. p. 336. ISBN: 9780813340852.
- Descartes, R. 1637. *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences*, Leyden, Ian Maire.
- Eckmann, J. P., Kamphorst, S. O., Ruelle, D. 1987. Recurrence plots of dynamical systems. *EPL (Europhysics Letters)*, 4(9), 973.
- Eckmann, J. P., Ruelle, D. 1992. Fundamental limitations for estimating dimensions and Lyapunov exponents in dynamical systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 56(2-3), 185-187.
- Elliott, R. N., Douglas, D. C., Sherwood, M. W., Laidlaw, D. K., Sweet, P. W. K. 1948. *The wave principle*.
- Farmer, D. J., Sidorowich, J. J. 1987. Predicting chaotic time series. *Phys. Rev. Lett.* 59. 85-848.
- Feigenbaum, M. J. 1978. Quantitative Universality for a Class of Non-Linear Transformations. *Journal of Statistical Physics*. 19. 25–52.
- Feigenbaum, M. J. 1983. Universal behavior in nonlinear systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 7(1-3), 16-39.
- Fialová, H., Fiala, J. 2011. *Ekonomický výkladový slovník. A plus*.

- Field, M., Melbourne, I., Török, A. 2003. Decay of correlations, central limit theorems and approximation by Brownian motion for compact Lie group extensions. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 23(01), 87-110.
- Fraser, A. M., Swinney, H. L. 1986. Independent coordinates for strange attractors from mutual information. *Physical review A*. 33(2). 1134.
- Gabisch, G. 1984. Nonlinear models of business cycle theory. *Selected Topics in Operations Research and Mathematical Economics*, vol 226, pp. 205-222, Berlin: Springer Verlag. ISBN 9783540129189
- Geweke, J., Porter-Hudak, S. 1983. The estimation and application of long memory time series models. *Journal of time series analysis*, 4(4), 221-238.
- Gilmore, C. G. 1993. A new test for chaos. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 22(2), 209-237.
- Gleick, J. 1987. *Chaos: Making a New Science*. Cardinal. London. ISBN 0813340853
- Gleick, J. 1996. *Chaos: vznik nové vědy*. Překlad: Sedlář, J., Kamenická, R. Ando Publishing. Brno. 349 s. ISBN 8086047040.
- Gottwald, G. A., Melbourne, I. 2004. A new test for chaos in deterministic systems. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* (Vol. 460, No. 2042, pp. 603-611). The Royal Society.
- Gottwald, G. A., Melbourne, I. 2009. On the implementation of the 0–1 test for chaos. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 8(1), 129-145.
- Gottwald, G. A., Melbourne, I. 2016. The 0-1 Test for Chaos: A Review. In *Chaos Detection and Predictability* (pp. 221-247). Springer Berlin Heidelberg.
- Gödel, K. 1931. Diskussion zur Grundlegung der Mathematik. *Erkenntnis*, 2(1), 135-151.
- Grassberger, P., Procaccia, I. 1983. Characterization of strange attractors. *Physical review letters*. 50(5). 346.
- Grassberger, P., Procaccia, I. 1983b. Estimation of the Kolmogorov entropy from a chaotic signal. *Physical review A*, 28(4), 2591.

- Grebogi, C., Ott, E., Yorke, J. A. 1998. Chaos, strange attractors, and fractal basin boundaries in nonlinear dynamics. *Non-Linear Physics for Beginners: Fractals, Chaos, Pattern Formation, Solutions, Cellular Automata and Complex Systems*, 111-117.
- Hadamard, J. 1898. Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodesiques. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*. 4. 27-73.
- Hansen, Ch. 2015. Zhuangzi. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2015 Edition), Edward N. Zalta (ed.), [citované 2016-02-20]. Dostupné z <https://plato.stanford.edu/archives/fall2015/entries/zhuangzi/>
- Harsha, P. Dahleh, M. 2015. Optimal management and sizing of energy storage under dynamic pricing for the efficient integration of renewable energy. *IEEE Transactions on Power Systems*, 30(3), 1164-1181.
- Hartley, R. V. 1928. Transmission of information. *Bell Labs Technical Journal*, 7(3), 535-563.
- He, K., Xu, Y., Zou, Y., Tang, L. 2015. Electricity price forecasts using a Curvelet denoising based approach. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 425, 1-9.
- Hegger, R., Kantz, H. 1999. Improved false nearest neighbor method to detect determinism in time series data. *Physical Review E*, 60(4), 4970.
- Hegger, R., Kantz, H., Schreiber, T. 1999. Practical implementation of nonlinear time series methods: The TISEAN package. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 9(2). 413-435.
- Heisenberg, W. 1927. Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik. *Zeitschrift für Physik*, 43(3-4), 172-198.
- Henry, B., Lovell, N., Camacho, F. 2001. Nonlinear dynamics time series analysis. *Nonlinear biomedical signal processing: Dynamic analysis and modeling*. 2. 1-39.
- Higuchi, T. 1988. Approach to an irregular time series on the basis of the fractal theory. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 31(2), 277-283.
- Hodrick, R. J., Prescott, E. C. 1997. Postwar US business cycles: an empirical investigation. *Journal of Money, credit, and Banking*, 1-16.

- Holmes, K. 1998. The three-body problem. [online] The magazine of the Melbourne PC User Group. Australia. [citované 2015-02-10]. Dostupné z <http://www.melbpc.org.au/pcupdate/9812/9812article5.htm>
- Hommes, C. H. 1991. Chaotic dynamics in economic models: some simple case studies. Wolters-Noordhoff. ISBN 9789001401801.
- Horák, J., Krlín, L., Raidl, A. 2003. Deterministický chaos a jeho fyzikální aplikace. Academia. Praha. 437 s. ISBN: 9788020009104
- Hotař, V. 2008. Metodika popisu průmyslových dat pomocí fraktální geometrie. Liberec: Technická univerzita v Liberci, Fakulta strojní, 2008, ISBN 9788073724313.
- Hurst, H. E. 1951. Long-term storage capacity of reservoirs. Trans. Amer. Soc. Civil Eng. 116. 770-808.
- Huygens, C. (1690). *Traité de la lumière: où sont expliquées les causes de ce qui luy arrive dans la reflexion, & dans la refraction, et particulièrement dans l'etrange refraction du cystal d'Islande.* Chez Pierre vander Aa.
- Chiarella, C. 1990. The elements of a nonlinear theory of economic dynamics (Vol. 343). Springer. ISBN 3540526226
- Janeček, I., Kalus, R., Hrivňák, D. 2006. Kvantová atomová a jaderná fyzika. © Ostravská Univerzita v Ostravě, [Online]. [Citace: 10. 7. 2015.] Dostupné z <http://artemis.osu.cz/mmfyz/>
- Jianhua, X., Nanshan, A., Yan, L., Yong, C., Yiyang, L., Wenzhe, Y. 2003. Quantitative analysis on the disparity of regional economic development in China and its evolution from 1952 to 2000. *Regional development studies*, 9, 115-129.
- Kaldor, N. 1940. A model of the trade cycle. *The Economic Journal*, Vol.50, No.197, pp 78-92.
- Kaneko, K., Tsuda, I. 2001. *Complex Systems: Chaos and Beyond: A Constructive Approach With Applications in Life Sciences.* Springer-Verlag. Berlin Heidelberg. p. 273. ISBN: 9783540672029.
- Kantelhardt, J. W., Zschiegner, S. A., Koscielny-Bunde, E., Havlin, S., Bunde, A., Stanley, H. E. 2002. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 316(1), 87-114.

- Kantz, H. 1994. A robust method to estimate the maximal Lyapunov exponent of a time series. *Physics letters A*, 185(1), 77-87.
- Kantz, H. and Schreiber, T. 2004. *Nonlinear Time Series Analysis*. Cambridge University Press. Cambridge. 388 p. ISBN: 9780521529020.
- Kennel, M. B., Brown, R., Abarbanel, H. D. 1992. Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction. *Physical review A*. 45(6). 3403.
- Keynes, J. M. 1936. *The General Theory of Employment, Interest and Money*, Macmillan Cambridge University Press.
- Kodera, J., Van Quang, T. 2009. Vizuální nelineární rekurentní analýza a její aplikace na český akciový trh. *Politická ekonomie*. 3. 305.
- Kodera, J., Radová, J., Van Quang, T. 2012. A modification of Kaldor-Kalecki model and its analysis. 30th International Conference Mathematical Methods in Economics.
- Von Koch, H. 1904. Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire. *Arkiv för Matematik*, 1, 681-704.
- Kyrtsov, C., Vorlow, E. 2005. Complex dynamics in macroeconomics: A novel approach. In *New Trends in Macroeconomics* (pp. 223-238). Springer Berlin Heidelberg.
- Kristoufek, L., Lunackova, P. 2013. Long-term memory in electricity prices: Czech market evidence. arXiv preprint arXiv:1309.0582.
- Kristoufek, L., Vosvrda, M. 2013. Measuring capital market efficiency: Global and local correlations structure. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 392(1), 184-193.
- Kristoufek, L., Vosvrda, M. 2014. Measuring capital market efficiency: long-term memory, fractal dimension and approximate entropy. *The European Physical Journal B*, 87(7), 162.
- Kříž, R. 2011. Chaos in GDP. *Acta Polytechnica*, 51(5).
- Kříž, R. 2014a. Finding chaos in finnish gdp. *International Journal of Automation and Computing*, 11(3), 231-240.

- Kříž, R. 2014b. Porovnání českého HDP s Gabishovým modelem. In Sborník recenzovaných příspěvků z mezinárodní konference Hradecké ekonomické dny 2014, díl II. Hradec Králové: Gaudeamus. 99-105. ISBN 9788074353673.
- Kříž, R., Kněžáčková, R. 2014. The Presence of Chaos in the GDP Growth Rate Time Series. *Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM)*. 2014(2). 199-206. ISSN: 2241-0503.
- Kříž, R., Kratochvíl, Š. 2014. Analyses of the Chaotic Behavior of the Electricity Price Series. *ISCS 2013: Interdisciplinary Symposium on Complex Systems*. Springer Berlin Heidelberg. ISBN: 978-3-642-45437-0.
- Kuznets, S. S. 1971. *Economic growth of nations. Total Output and Production Structure* 363 p. ISBN 9780674493490
- Laplace P. S. marquis de. 1902. *A philosophical essay on probabilities*. J. Wiley.
- Lévy, P. 1953. Random functions: General theory with special references to Laplacian random functions, *University of California Publications in Statistics*, 1, pp. 331–390.
- Letellier, C., Aguirre, L. A., Maquet, J., Gilmore, R. 2006. Evidence for low dimensional chaos in sunspot cycles. *Astronomy & Astrophysics*, 449(1), 379-387.
- Li, T. Y., Yorke, J. A. 1975. Period three implies chaos. *American mathematical monthly*. 985-992.
- Liu, Z., Yang, H., Lai, M. 2005. Electricity price forecasting model based on chaos theory. In *Power Engineering Conference, 2005. IPEC 2005. The 7th International* (pp. 1-449). IEEE.
- Lorenz, E. N. 1963. Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of the atmospheric sciences*. 20(2). 130-141.
- Lorenz, H. W. 1993. *Nonlinear dynamical economics and chaotic motion* (Vol. 334). Berlin: Springer. ISBN 3540514139.
- Mandelbrot, B. B., Van Ness, J. W. 1968. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM review*. 10(4). 422-437.
- Mandelbrot, B. B. 1967. How long is the coast of Britain. *Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension*. *Science*. 156(3775). 636-638.
- Mandelbrot, B. B. 1982. *The fractal geometry of nature*. New York: W.H. Freeman and Co.



- Marwan, N. 2011. How to avoid potential pitfalls in recurrence plot based data analysis. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 21(04), 1003-1017.
- Marwan, N., Wessel, N., Meyerfeldt, U., Schirdewan, A., Kurths, J. 2002. Recurrence-plot-based measures of complexity and their application to heart-rate-variability data. *Physical review E*, 66(2), 026702.
- Martinerie, J. M., Albano, A. M., Mees, A. I., Rapp, P. E. 1992. Mutual information, strange attractors, and the optimal estimation of dimension. *Physical Review A*, 45(10), 7058.
- Maxwell, J. C. 1881. *A treatise on electricity and magnetism*. Clarendon press.
- May, R. M. 1976. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature* 261(5560). 459-467.
- Medio, A., Gallo, G. 1995. *Chaotic dynamics: Theory and applications to economics*. Cambridge University Press.
- Nelson, C. R., Plosser, C. R. 1982. Trends and random walks in macroeconomic time series: some evidence and implications. *Journal of monetary economics*, 10(2), 139-162.
- Newton, I. 1687. *Philosophiæ naturalis principia mathematica*. London.
- Newton, I. 1704. *Opticks: or a treatise of the reflexions, refractions, inflexions and colours of light*.
- Next Finance. 2007. Trh s elektrickou energií v Evropě. Energetická burza Praha. [Online] 2007. [Citace: 11. 11. 2016.] Dostupné z [https://www.pxe.cz/pxe\\_downloads/Info/pxe\\_analyza.pdf](https://www.pxe.cz/pxe_downloads/Info/pxe_analyza.pdf)
- Nusse, H., E., Hommes, C. 1990. H., Resolution of chaos with application to a modified Samuelson model. *Journal of Economic Dynamic and Control*, vol. 14.
- Norouzzadeh, P., Dullaert, Rahmani, B. 2007. Anti-correlation and multifractal features of Spain electricity spot market. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 380, 333-342.
- Packard, N. H., Crutchfield, J. P., Farmer, J. D., Shaw, R. S. 1980. Geometry from a time series. *Physical review letters*. 45(9). 712.

- Peng C. K., Buldyrev S. V., Goldberger A. L., Havlin S., Simons M., Stanley, H. E. 1993. Finite-size effects on long-range correlations: Implications for analyzing DNA sequences. *Physical Review E*, 47(5), 3730-3733.
- Peters, E. E. 1994. *Fractal market analysis: applying chaos theory to investment and economics* (Vol. 24). John Wiley & Sons.
- Poincaré, H. J. 1885. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. *Acta Mathematica*. 7(1). 259-380.
- Poincaré, H. J. 1890. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. Divergence des séries de M. Lindstedt. *Acta Mathematica*. 13. 1-270.
- Pokorný, P. 2008. Deterministický chaos – plod počítačové fyziky. *Československý časopis pro fyziku*. 58. 328.
- Prokšová, J., Dušperk, J. 2007. Nerovnovážná termodynamika a její aplikace. [Online] 2007. [Citace: 10. 2. 2015.] Dostupné z <http://nelterm.kof.zcu.cz/nerterm/ntuvod/uvod.htm>.
- Raidl, A. 2015. Deterministický chaos. [Online] 2015. [Citace: 10. 2 2015.] Dostupné z <http://www.raidl.cz/clanky/deterministicky-chaos.html>.
- Rényi, A. 1961. On measures of entropy and information. In *Proceedings of the fourth Berkeley symposium on mathematical statistics and probability* (Vol. 1, pp. 547-561).
- Richardson, L. F. 1926. Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*. 709-737.
- Ritschelová, I. 2000. Environmentální a ekonomické účetnictví. Teoreticko-metodologická východiska.
- Rosenstein, M. T., Collins, J. J., De Luca, C. J. 1993. A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 65(1). 117-134.
- Ruelle, D., Takens, F. 1971. On the nature of turbulence. *Communications in mathematical physics*, 20(3), 167-192.
- Sande, van de, A. Coastline paradox. [online]. [cit. 2015-02-10]. Dostupné z [http://en.wikipedia.org/wiki/Coastline\\_paradox](http://en.wikipedia.org/wiki/Coastline_paradox)

- Saltzman, B. 1962. Finite amplitude free convection as an initial value problem-I. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 19(4). 329-341.
- Savi, M. A. 2005. Chaos and order in biomedical rhythms. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 27(2). 157-169.
- Sato, S., Sano, M., Sawada, Y. 1987. Practical methods of measuring the generalized dimension and the largest Lyapunov exponent in high dimensional chaotic systems. *Progress of Theoretical Physics*, 77(1), 1-5.
- Schreiber, T. 1999. Interdisciplinary application of nonlinear time series methods. *Physics reports*, 308(1). 1-64.
- Schreiber, T., Schmitz, A. 2000. Surrogate time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 142(3), 346-382.
- Shintani, M., Linton, O. 2003. Is there chaos in the world economy? A nonparametric test using consistent standard errors. *International Economic Review*, 44(1), 331-357.
- Simonsen, I. 2003. Measuring anti-correlations in the Nordic electricity spot market by wavelets. *Physica A: Statistical Mechanics and its applications*, 322, 597-606.
- Simonsen, I., Hansen, A., Nes, O. M. 1998. Determination of the Hurst exponent by use of wavelet transforms. *Physical Review E*, 58(3), 2779.
- Smale, S. 1998. Mathematical problems for the next century. *The Mathematical Intelligencer*, 20(2). 7-15.
- Spahic, E., Balzer, G., Hellmich, B., & Munch, W. 2007. Wind energy storages-possibilities. In *Power Tech, 2007 IEEE Lausanne* (pp. 615-620). IEEE.
- Szydłowski, M., Krawiec, A. 2001. The Kaldor–Kalecki model of business cycle as a two-dimensional dynamical system. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 8(sup1), 266-271.
- Stewart, I. 2009. *Hraje Bůh kostky*. Praha: Argo/Dokořán. ISBN 9788025700242.
- Stiglitz, J., Sen, A., Fitoussi, J. P. 2009. The measurement of economic performance and social progress revisited. Reflections and overview. Commission on the Measurement of Economic Performance and Social Progress, Paris. Dostupné z <https://hal-sciencespo.archives-ouvertes.fr/hal-01069384>

- Takens, F. 1981. Detecting strange attractors in turbulence. In: Rand, D., Young, L., (eds.). Dynamical Systems and Turbulence. Springer Berlin Heidelberg. p. 366-381. ISBN: 9783540111719
- Ullmann, V. 1986. Gravitace, černé díry a fyzika prostoročasu. Československá astronomická společnost ČSAV.
- Uruba, V. 2009. Turbulence. Praha. ČVUT v Praze, Fakulta strojní. Praha. p. 141. ISBN: 9788001043301.
- Vítek, T., Starý, J., Antalík, D. 2010. Řád a chaos v archaických kulturách. Svět archaických kultur. Herrmann & synové. Praha. 224 s. ISBN 9788087054260.
- Walras, L. 1874. Eléments d'économie politique pure ou théorie de la richesse sociale. Lausanne, Paris.
- Weron R. 2002. Estimating long-range dependence: finite sample properties and confidence intervals. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 312(1), 285-299.
- Weron, R., Przybyłowicz, B. 2000. Hurst analysis of electricity price dynamics. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 283(3), 462-468.
- Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L., Vastano, J. A. 1985. Determining Lyapunov exponents from a time series. Physica D: Nonlinear Phenomena, 16(3), 285-317.
- Yamagata, H. Kaldor's Non-Linear Cycle. [Online] 2016. [Citace: 28. 12 2016.] Dostupné z <http://cruel.org/econthought/essays/multacc/kaldecyc.html#top>
- Zbilut, J. P., Webber, C. L. 1992. Embeddings and delays as derived from quantification of recurrence plots. Physics letters A, 171(3-4), 199-203.
- Zelinka, I., 2005. Aplikovaná informatika: aneb úvod do fraktální geometrie, buněčných automatů-- Vyd. 2., Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, Fakulta technologická.
- Zhang, J., Lam, K. C., Yan, W. J., Gao, H., Li, Y. 2004. Time series prediction using Lyapunov exponents in embedding phase space. Computers & Electrical Engineering, 30(1), 1-15.