



ZADÁNÍ BAKALÁ SKÉ PRÁCE

| | |
|--------------------------|-----------------------------------|
| Název: | Rekurzivn konstruovatelné grafy |
| Student: | Anežka Št pánková |
| Vedoucí: | RNDr. Ji ina Scholtzová, Ph.D. |
| Studijní program: | Informatika |
| Studijní obor: | Teoretická informatika |
| Katedra: | Katedra teoretické informatiky |
| Platnost zadání: | Do konce letního semestru 2016/17 |

Pokyny pro vypracování

Souvislé rekurentn zadané grafy jsou souvislé grafy, pro které existuje postup, jak ze zadaného grafu odvodit graf nový. V p edm tu BI-GRA jste se s jednoduchými rekurentními grafy setkali, vždy šly popsat lineárními rekurentními rovnicemi s konstantními koeficienty. Existuje klasifikace, která definuje t ídu rekurzivn konstruovatelných graf [1]. Podobn jako u graf v BI-GRA zjist te, zda lze n které z kategorií rekurzivn konstruovatelných graf popsat rekurentními rovnicemi.

1. Seznamte se s rekurentn zadanými grafy.
2. Seznamte se s rekurzivn konstruovatelnými grafy a nastudujte lánky o nich.
3. Vyberte si n které z kategorií rekurzivn konstruovatelných graf [1].
4. Pro vybrané kategorie najd te zp sob, jak je popsat využitím rekurentních rovnic.

Seznam odborné literatury

[1] Gross, Jonathan L., Jay Yellen, Ping Zhang. Handbook of Graph Theory, 2nd ed, Boca Raton: CRC, 2013. ISBN: 978-1-4398-8018-0

doc. Ing. Jan Janoušek, Ph.D.
vedoucí katedry

prof. Ing. Pavel Tvrdík, CSc.
d kan

V Praze dne 18. února 2016

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
KATEDRA TEORETICKÉ INFORMATIKY



Bakalářská práce

Rekurzivně konstruovatelné grafy

Anežka Štěpánková

Vedoucí práce: RNDr. Jiřina Scholtzová Ph.D.

12. května 2017

Poděkování

Děkuji vedoucí práce RNDr. Jiřině Scholtzové Ph.D., která mi ochotně vyšla vstříc s volbou tématu a v průběhu tvorby práce vždy dobře poradila a nasměrovala mne správným směrem. Děkuji také Michalovi Černému, Veronice Hrstkové a zbytku své rodiny, kteří mne podporovali po celou dobu studia i psaní této práce.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval(a) samostatně a že jsem uvedl(a) veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o etické přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona, ve znění pozdějších předpisů. V souladu s ust. § 46 odst. 6 tohoto zákona tímto uděluji nevýhradní oprávnění (licenci) k užití této mojí práce, a to včetně všech počítačových programů, jež jsou její součástí či přílohou, a veškeré jejich dokumentace (dále souhrnně jen „Dílo“), a to všem osobám, které si přejí Dílo užít. Tyto osoby jsou oprávněny Dílo užít jakýmkoli způsobem, který nesnižuje hodnotu Díla, a za jakýmkoli účelem (včetně užití k výdělečným účelům). Toto oprávnění je časově, teritoriálně i množstevně neomezené. Každá osoba, která využije výše uvedenou licenci, se však zavazuje udělit ke každému dílu, které vznikne (byť jen zčásti) na základě Díla, úpravou Díla, spojením Díla s jiným dílem, zařazením Díla do díla souborného či zpracováním Díla (včetně překladu), licenci alespoň ve výše uvedeném rozsahu a zároveň zpřístupnit zdrojový kód takového díla alespoň srovnatelným způsobem a ve srovnatelném rozsahu, jako je zpřístupněn zdrojový kód Díla.

V Praze dne 12. května 2017

.....

České vysoké učení technické v Praze

Fakulta informačních technologií

© 2017 Anežka Štěpánková. Všechna práva vyhrazena.

Tato práce vznikla jako školní dílo na Českém vysokém učení technickém v Praze, Fakultě informačních technologií. Práce je chráněna právními předpisy a mezinárodními úmluvami o právu autorském a právech souvisejících s právem autorským. K jejímu užití, s výjimkou bezúplatných zákonných licencí, je nezbytný souhlas autora.

0.0.1 Odkaz na tuto práci

Štěpánková, Anežka. *Rekurzivně konstruovatelné grafy*. Bakalářská práce. Praha: České vysoké učení technické v Praze, Fakulta informačních technologií, 2017.

Abstrakt

Cílem této práce je představit rekurentní grafy definované v BI-GRA a příslušné lineární rekurentní rovnice k těmto grafům. Dále seznámit se s třídami rekurzivně konstruovatelných grafů a podobně jako u BI-GRA grafů pro některé třídy rekurzivně konstruovatelných grafů najít odpovídající rovnice pro počet uzlů a hran. Vybrali jsme sedm tříd – stromy, sériově-paralelní grafy, k -stromy, parciální k -stromy, Halinovi grafy, kografy a treewidth- k grafy. Výsledkem práce je představení vybraných tříd, přehled rekurzivních konstrukcí, ukázky vybraných grafů a příslušné rekurentní rovnice.

Klíčová slova teorie grafů, rekurzivně konstruovatelné grafy, lineární rekurentní rovnice, stromy, sériově-paralelní grafy, k -stromy, parciální k -stromy, Halinovy grafy, kografy, stromová šířka grafu

Abstract

The aim of this work is to present the recurrent graphs defined in BI-GRA and the corresponding linear recurrent equations, which describe number of nodes and edges. Furthermore the recursively constructed graphs were introduced, and the appropriate recurrent equation were presented for some classes of recursively constructed graphs expressing the number of nodes and edges. This work is focused on seven classes – namely trees, serial-parallel graphs, k -trees, partial k -trees, Halin graphs, cographs, and treewidth- k graphs. The result of the work is the introduction of these classes, a list of recursive constructions of the graphs, examples of some graphs and the corresponding recurrent equation.

Keywords graph theory, recursively constructed graphs, linear recurrent equation, trees, series-parallel graphs, k -trees, partial k -trees, Halin graphs, cographs, treewidth of graph

Obsah

| | |
|---------------------------------------|----|
| Úvod | 1 |
| 1 Úvod do teorie grafů | 3 |
| 2 BI-GRA grafy | 9 |
| 3 Rekurzivně konstruovatelné grafy | 15 |
| 3.1 Stromy | 15 |
| 3.2 Sériově-paralelní grafy | 20 |
| 3.3 K -stromy | 27 |
| 3.4 Parciální k -stromy | 30 |
| 3.5 Halinovy grafy | 32 |
| 3.6 Kografy | 36 |
| 3.7 Treewidth- k grafy | 39 |
| Závěr | 43 |
| Literatura | 45 |
| A Seznam použitých značení | 49 |
| B Obsah přiloženého CD | 51 |

Seznam obrázků

| | | |
|-----|--|----|
| 2.1 | První ukázka dvou rekurentních grafů, které vzniknou pomocí čtyř kopií předchozího grafu a přidáním pěti hran. Základním grafem G_0 je graf triviální. | 9 |
| 2.2 | Druhá ukázka rekurentních grafů, které vzniknou pomocí tří kopií předchozího grafu a přidáním tří hran. Základní grafem G_0 je opět graf triviální. | 10 |
| 2.3 | Třetí ukázka rekurentních grafů, které vzniknou pomocí čtyř kopií předchozího grafu a přidáním čtyř hran. Základní grafem G_0 je opět graf triviální. | 11 |
| 2.4 | Čtvrtá ukázka rekurentních grafů, které vzniknou pomocí šesti kopií předchozího grafu a přidáním šesti hran. Základní grafem G_0 je opět graf triviální. | 12 |
| 2.5 | Ukázka izomorfních grafů, kdy očíslováním uzlů, podmínkou, že graf musí být souvislý a určením stupňů nově spojovaných uzlů, můžeme definovat požadovanou incidenci nových hran a tedy přesně požadovaný graf. | 13 |
| 2.6 | Ukázka grafu, kde jen očíslování uzlů, souvislost a určení stupňů nestačí pro definování incidence. Konkrétně nejsme schopni rozlišit, které dva uzly 3 mají být spojeny hranou. | 14 |
| 3.1 | Ukázka konstrukce stromu pomocí operace \oplus_2 . Zdroj [1] | 16 |

| | | |
|-----|--|----|
| 3.2 | Graf A zobrazuje graf, kterým je cesta a vznikne opakováním operace \oplus_2 . Graf B nazýváme hvězdice. Vznikne opakováním operace \oplus_1 . Graf C vznikne pravidelným střídáním operací \oplus_1 a \oplus_2 , kdy operaci \oplus_2 používáme při přidání i -tého uzlu pro i liché a operaci \oplus_1 pro i sudé. Graf D vznikne pravidelným střídáním operací \oplus_1 a \oplus_2 , kdy operaci \oplus_1 používáme při přidání i -tého uzlu pro i liché a operaci \oplus_2 pro i sudé. Graf E nazýváme housenka. Vznikne opakováním operace \oplus_1 k -krát, kdy k je počet „nohou“ následované jednou operací \oplus_2 pro přidání další části „tělíčka“. Graf D je konkrétním případem grafu, kdy $k = 1$ | 20 |
| 3.3 | První dva grafy ukazují rozdíl mezi grafem, které není sériově-paralelní (graf a) a takovým, který je sériově-paralelní (graf b) [1]. Graf a) není sériově-paralelní, protože obsahuje podgraf, který je homeomorfní s K_4 (v obrázku zvýrazněný). Pět obrázků níže ukazuje postup, jak je možné konečným počtem operací půlení hran z grafu K_4 tento zvýrazněný podgraf vytvořit. | 21 |
| 3.4 | Ukázky grafů vzniklých za použití sériové operace \odot_s , paralelní operace \odot_p a zavírací operace \odot_z . [1] | 22 |
| 3.5 | Graf A nazýváme cesta. Vznikne opakováním sériové operace \odot_s . Graf B, kterým je K_2 (jedna hrana a dva uzly), vznikne opakováním paralelní operace \odot_p . Graf C nazýváme hvězdice. Vznikne opakováním zavírací operace \odot_z . Graf D vznikne k -krát opakováním sériové operace \odot_s , kde k je délka kružnice a na závěr jednou paralelní operace \odot_p pro uzavření kružnice. Graf E se nazývá housenka. Vznikne střídáním k -krát zavírací operace \odot_z , kdy k je počet „nohou“ a jedenkrát sériové operace \odot_s pro přidání další části „tělíčka“. Graf F ukazuje kombinaci všech tří operací. Kdy byla která operace použita, je uvedeno přímo na obrázku. | 26 |
| 3.6 | Ukázka 3-stromu, kde čísla uzlů $0_1, 0_2, 0_3$ představují základní K_3 graf a ostatní pořadí uzlů, ve kterém byly připojovány. | 27 |
| 3.7 | A) Jako 2-klika (3. krok algoritmu) se vždy vezme $0_1, 0_2$. B) Jako 2-klika (3. krok algoritmu) se vždy vezme 0_1 a $n - 1$. C) Jako 2-klika (3. krok algoritmu) se poprvé vezme 0_1 a 0_2 a dále se vždy vezme $n - 1$ a $n - 2$. D) Jako 2-klika (3. krok algoritmu) se vezmou postupně dvojice: 0_1 a 0_2 , 1 a 0_2 , 2 a 0_2 a nakonec 1 a 2 . E) Tento graf se nazývá Goldner-Harary graf [20]. Jako 3-kliku jsme postupně vybírali trojice: $0_1, 0_2, 0_3$; $1, 0_2, 0_3$; $2, 0_2, 0_3$; $3, 0_2, 0_3$; $1, 2, 0_2$; $1, 2, 0_3$; $2, 3, 0_2$; $2, 3, 0_3$ | 30 |
| 3.8 | Obrázek A ukazuje zakázaný minor pro parciální 1-stromy, obrázek B pro parciální 2-stromy a obrázek C ukazuje zakázané minory pro parciální stromy. | 31 |
| 3.9 | Ukázka Halinova grafu [1] | 32 |

| | | |
|------|--|----|
| 3.10 | V prvním sloupečku je vždy ukázka Halinova grafu, ve druhém ukázka 3-stromu, ze kterého mohl být vytvořen a ve třetím graf, kde zvýrazněné hrany určují množinu T a ostatní hrany množinu C . Graf na obrázku A se nazývá 3-hranolový graf a graf na obrázku B 5-kolový graf. | 33 |
| 3.11 | Na levém obrázku je příklad kografu a na pravém obrázku je jeho označený strom, tedy ukázka, jak byl tento kograf konstruován. [1] | 36 |
| 3.12 | Ukázky kografů, které je možné vytvořit na dvou uzlech. | 38 |
| 3.13 | Ukázky kografů, které je možné vytvořit na třech uzlech. | 39 |
| 3.14 | Ukázky kografů, které je možné vytvořit na čtyřech uzlech. | 39 |
| 3.15 | Obrázek zobrazuje ukázku stromové dekompozice. Pro graf G na levém obrázku je jedna z možných množin uzlů tato: $X_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$, $X_2 = \{v_2, v_7, v_8\}$, $X_3 = \{v_2, v_3, v_7\}$, $X_4 = \{v_3, v_5, v_7\}$, $X_5 = \{v_3, v_4, v_5\}$, $X_6 = \{v_5, v_6, v_7\}$. Odpovídající strom T je na obrázku uprostřed a na obrázku vpravo jsou zobrazeny příslušné podgrafy grafu G indukované stanovenými dvojicemi $(\{X_i\}, T)$. Navíc G má stromovou šířku 2, a je to sériově-paralelní graf. [1] | 40 |

Seznam tabulek

| | | |
|-----|--|----|
| 3.1 | Přehled složitostí problémů uvedených v úvodu pro třídu stromů. . . | 17 |
| 3.2 | Přehled složitostí problémů uvedených v úvodu pro třídu sériově- paralelních grafů. | 22 |
| 3.3 | Přehled složitostí problémů uvedených v úvodu pro třídu k -stromů. | 28 |
| 3.4 | Přehled složitostí nalezení vlastností pro parciální k -stromy. | 31 |
| 3.5 | Přehled složitostí nalezení vlastností pro Halinovy grafy. | 33 |
| 3.6 | Přehled složitostí nalezení vlastností pro kografy. | 37 |
| 3.7 | Odhady nalezení stromových šířek. | 41 |
| 3.8 | Některé známé stromové šířky. | 41 |

Úvod

Teorie grafů je v matematice často rozebíraným tématem, ve kterém však zůstává mnoho nevyřešených problémů. Souvislé rekurentně zadané grafy jsou souvislé grafy, pro které existuje postup jak ze zadaného grafu odvodit graf nový, např. pomocí jeho kopií a přidáním nových hran. V předmětu BI-GRA (Grafové algoritmy a základy teorie složitosti) jsme se s jednoduchými rekurentními grafy již setkali. U těchto grafů jsme hledali popis jejich uzlů, hran a dalších vlastností pomocí lineárních rekurentních rovnic s konstantními koeficienty. Existuje také klasifikace [1], která definuje tzv. rekurzivně konstruovatelné grafy. Pro tyto grafy existuje rekurzivní postup, jak ze zadaného grafu vytvořit graf nový pomocí specificky definovaných operací.

V této práci představíme vybrané třídy rekurzivně konstruovatelných grafů a popíšeme rekurentní rovnice, které vyjadřují explicitní popis počtu uzlů a hran. Proto zanalyzujeme rekurentní grafy z BI-GRA a k nim příslušné rekurentní rovnice a na základě této analýzy zjistíme, zda je také možné pro rekurzivně konstruovatelné grafy nalézt lineární rekurentní rovnice, které by odpovídaly vybraným třídám těchto grafů. Výsledkem tedy bude popis vybraných tříd s ukázkami a příslušujícími lineárními rekurentními rovnicemi. Vzhledem k tomu, že materiály o rekurzivně konstruovatelných grafech jsou většinou v anglickém jazyce a stále se vyvíjejí (stěžejní kniha [1], ze které čerpáme, je z roku 2013), bude také jedním z cílů i vytvoření odpovídající české terminologie.

V práci jsou zahrnuty články, které zkoumají vybrané třídy z klasifikace [1]. Pokračováním práce by mohla být analýza složitějších vlastností těchto vybraných tříd a také představení a analýza nezařazených tříd z klasifikace.

Úvod do teorie grafů

Teorie grafů patří mezi matematické disciplíny, která zkoumá struktury zvané grafy. Grafy lze aplikovat v nejrůznějších oborech průmyslu a výzkumu, a také v mnoha problémech z praktického života. V této kapitole představíme základní pojmy z teorie grafů, které použijeme. Při definování těchto pojmů se opíráme o [1], [2] a [3].

Formálně je graf definován jako uspořádaná trojice $G = \langle E, V, \rho \rangle$, kde prvky množiny E jsou hranami grafu G , prvky neprázdné množiny V jsou uzly grafu G a zobrazení ρ , definované jako $\rho : E \mapsto V \times V$, nazýváme incidencí grafu G . My budeme pracovat jen s konečnými grafy, tj. E, V jsou konečné množiny. Navíc tyto grafy budou neorientované, souvislé a obyčejné.

V následujících definicích použijeme toto značení grafu $G = \langle E, V, \rho \rangle$ a budeme používat značení E_i, V_i, ρ_i pro množinu uzlů/hran/incidencí nějakého grafu G_i .

Typy grafů, hran a uzlů

- **Neorientovaný graf** – graf G definovaný výše je neorientovaný pokud (v_1, v_2) bereme ve významu $\{v_1, v_2\}$. Pro tento graf budeme zobrazení ρ chápat jako $\rho : E \mapsto \binom{V}{2}$.
- **Triviální graf** – graf, kterým je izolovaný uzel. Tedy $G = \langle \emptyset, \{v\}, \emptyset \rangle$.
- **Úplný graf** – obyčejný graf, ve kterém existuje hrana pro každou dvojici (různých) uzlů. Značíme K_n , kde n je počet uzlů.
- **Planární graf** – také se mu říká rovinný graf, pro který existuje takové rovinné nakreslení, že se žádné dvě hrany nekříží. Dané rovinné zakreslení grafu nám rozdělí rovinu na tzv. stěny. Jedna ze stěn je neomezená a nazývá se vnější. Rovinné zakreslení stromů má právě jednu stěnu (vnější).
- **Souvislý graf** – graf, mezi jehož dvěma libovolnými uzly existuje cesta.

- **k -souvislý graf** – graf je (vrcholově) k -souvislý, $k \in \mathbb{N}$, pokud po odebrání méně než k uzlů zůstane souvislý, ale po odebrání k už souvislý není. Souvislé grafy jsou tedy 1-souvislé grafy.
- **Bipartitní graf** – graf, jehož množinu vrcholů lze rozdělit na dvě disjunktní množiny tak, že žádné dva vrcholy z jedné množiny nejsou spojeny hranou. Tedy graf pro který platí $V = V_1 \cup V_2, V_1 \cap V_2 = \emptyset$ a dále $\rho(e) = \{u, v\}, \forall e \in E : u \in V_1 \wedge v \in V_2$. Platí-li navíc $\rho(e) = V_1 \times V_2$ (tedy v grafu existují všechny hrany s touto vlastností), nazývá se tento graf **úplný bipartitní graf**. Značí se $K_{m,n}$, kde m a n jsou velikosti obou partit.
- **Rovnoběžné (paralelní) hrany** – hrany, které spojují stejné dva uzly, tedy platí $\rho(e_1) = (u, v) = \rho(e_2)$. Graf s paralelními hranami nazýváme **multigraf**. Graf, který neobsahuje rovnoběžné hrany, nazýváme **prostý graf**.
- **Smyčka** – hrana, která vede z a do stejného uzlu. Píšeme $\rho(e) = (u, u)$ pro $u \in V$ a $e \in E$. Prostý graf bez smyček nazýváme **obyčejný graf**.
- **Tětiva** – neboli chordála, je hrana, která spojuje dva uzly v dané kružnici, ale není součástí této kružnice.
- **Sousední uzly** u, v – jakékoli dva uzly, které jsou spojené hranou, jsou sousední nebo též incidentní tj. $\exists e \in E : \rho(e) = (u, v)$.
- **Stupeň uzlu** – počet hran s ním incidujících, smyčka má stupeň 2. Platí, že součet stupňů všech uzlů je roven dvojnásobku počtu všech hran (princip sudosti).
- **Izolovaný uzel** – uzel, který neinciduje s žádnou hranou.
- **Cesta grafu** – posloupnost uzlů a hran $v_1 e_1 v_2 e_2 \dots e_{k-1} v_k$ kde $v_i \neq v_j, e_i \neq e_j$, pro libovolná různá $i, j \in \{1, \dots, k\}$.
- **Kružnice** – uzavřená cesta, kde $v_1 = v_k$.
- **Hamiltonovská kružnice** – kružnice v grafu G , která obsahuje všechny uzly grafu G .
- **Strom** – souvislý graf, který neobsahuje kružnice. Ekvivalentními vlastnostmi jsou:
 - mezi každými dvěma uzly existuje právě jedna cesta,
 - má přesně $|V| - 1$ hran a je souvislý,
 - je souvislý a odebráním jakékoli hrany přestane graf být souvislý,
 - neobsahuje kružnici a přidáním libovolné hrany vznikne jedna kružnice.

-
- **Kořenový strom** – je strom, který má jeden význačný vrchol r zvaný kořen. Všechny cesty v G jsou orientované z r do ostatních uzlů.
 - **Označený strom** – je strom konstrukce grafu G , který ukazuje pořadí operací, pomocí kterých byl graf G zkonstruován. Listy jsou uzly daného grafu G . Ostatní uzly stromu jsou postupně připojovány a označeny operací, která se provede s vybranými uzly.
 - **List** – uzel stromu, který má stupeň jedna.

Typy podgrafů

- **Podgraf** – graf $G' = \langle E', V', \rho' \rangle$ nazýváme podgrafem grafu G (zapisujeme $G' \subseteq G$), jestliže platí $(E' \subseteq E) \& (V' \subseteq V) \& \forall e \in E' : \rho'(e) = \rho(e)$.
- **Indukovaný podgraf** – je podgraf $G' = \langle E', V', \rho' \rangle$ grafu G , pro který platí, že $E' = E \cap \binom{V'}{2}$ a $\rho'(e) = \rho(e)$ pro každé $e \in E'$. Pro podgraf indukovaný množinou hran E' je definice obdobná.
- **Klika** – klikou grafu G nazýváme libovolný úplný podgraf grafu G .
- **Minor** – podgraf grafu G , který lze získat z G pomocí konečné posloupnosti operací odebrání a kontrakce hrany (viz níže).
- **Komponenta souvislosti grafu** – každý maximální souvislý podgraf grafu G .
- **Minimální separátor** – minimální separátor x, y je podgraf G' indukovaný co nejmenší množinou vrcholů $V' \subseteq V$, kde $x, y \notin V'$ a $\{x, y\} \notin E$, pro který platí, že $G \setminus G'$ má vyšší počet komponent souvislosti než G a x, y neleží ve stejné komponentě souvislosti.

Operace s hranami

- **Kontrakce hrany** – operace, kdy z grafu G odstraníme hranu e , která inciduje s uzly u, v . Po jejím provedení má graf G množinu hran $E \setminus e$ a incidující uzly se spojí. V případě obyčejných grafů, zanedbáváme násobné hrany a smyčky.
- **Odebrání hrany** – operace odebrání hrany e z grafu G . Množina hran je rovna $E(G - e) = E(G) - e$.
- **Půlení hran** – mějme hranu $e \in E, \rho(e) = \{u, v\}$. Operace půlení hrany je přidání nového uzlu w tak, že po jeho přidání nahradíme hranu $\{u, v\}$ dvěma novými hranami $\{u, w\}$ a $\{w, v\}$.

Podobnost a operace s grafy

- **Izomorfismus grafů** – je zobrazení $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$, kde $G_1 = \langle E_1, V_1, \rho_1 \rangle$ a $G_2 = \langle E_2, V_2, \rho_2 \rangle$ a pro které platí:
 - $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$ je bijekce,
 - $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ je bijekce,
 - φ zachovává incidenci, tzn. $\rho_1(e) = \{u, v\}$ pro libovolné $e \in E_1$ a $u, v \in V_1 \Leftrightarrow \rho_2(\varphi(e)) = \{\varphi(u), \varphi(v)\}$, pro libovolné $\rho(e) \in E_2$.
- **Homeomorfismus grafů** – grafy G_1 a G_2 nazveme homeomorfní (zapišujeme $G_1 \sim G_2$), jestliže jsou buď izomorfní, nebo je-li možné konečným počtem operací půlení hran v těchto grafech dosáhnout toho, že vzniklé grafy jsou izomorfní.
- **Sjednocení grafů** – operace značená $G = G_1 \cup G_2$, která definuje nový graf $G = \langle E, V, \rho \rangle$ takto:

$$\begin{aligned}V &= V_1 \cup V_2, \\E &= E_1 \cup E_2, \\ \rho &= \rho_1 \cup \rho_2\end{aligned}$$

a pro $\rho(e)$ platí:

$$\rho(e) = \begin{cases} \rho_1(e), & \text{pokud } e \in E_1, \\ \rho_2(e), & \text{pokud } e \in E_2. \end{cases}$$

- **Rozdíl grafu** – necht G_1 je podgrafem grafu G . Rozdílem grafů G a G_1 (značíme $G \setminus G_1$) nazýváme takový minimální graf $G_2 \subseteq G$, pro který platí $G = G_1 \cup G_2$.
- **Doplňk grafu** – nazývám graf $\overline{G} = K_n \setminus G$, tzn. graf vzniklý odečtením grafu G od úplného grafu s n uzly.

Vlastnosti grafu

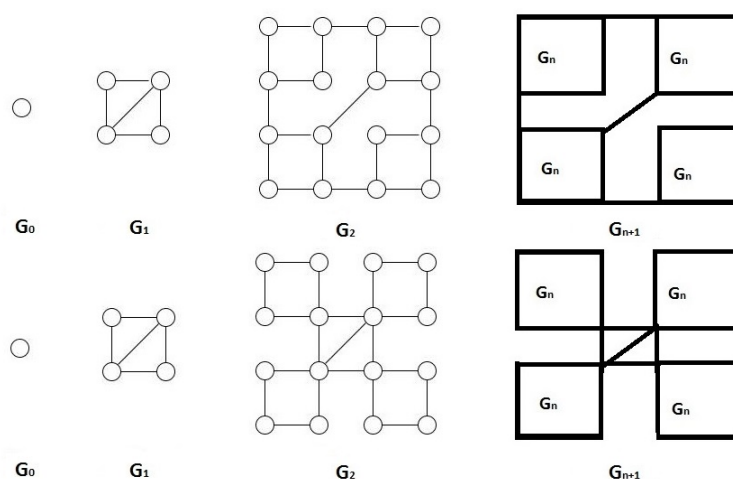
Následující vlastnosti charakterizují nějakým způsobem zadaný graf. Některé z uvedených problémů lze algoritmicky snadno určit, některé ale náleží do třídy problémů, které označujeme jako NP-úplné. Pro problémy z této třídy neznáme efektivní, tj. polynomiální, deterministický algoritmus, který by daný problém řešil. Jak ale uvedeme v této práci, pro jisté třídy grafů umíme tyto problémy řešit polynomiálním čase, někdy dokonce i v lineárním čase.

- **Vzdálenost mezi dvěma uzly** u, v – počet hran na nejkratší cestě z u do v .

-
- **Průměr grafu** – nejkratší vzdálenost dvou nejvzdálenějších uzlů grafu.
 - **Stromová dekompozice** – dvojice $(\{X_i \mid i \in I\}, T)$, kde $\{X_i \mid i \in I\}$ je množina podmnožin V s indexovou množinou I (tzv. systém podmnožin množiny V a indexové množiny I) a T je strom s množinou uzlů I takovou, že:
 - $\bigcup_{i \in I} X_i \in V$
 - pro všechny hrany $\{u, v\} \in E$ existuje prvek $i \in I$ a uzly $u, v \in X_i$
 - pro všechny trojice indexů $i, j, k \in I$ platí, že pokud j je na cestě mezi i a $k \in T$ potom $X_i \cap X_k \subseteq X_j$.
 - **Nezávislost grafu** – podmnožinu I uzlů grafu G nazýváme nezávislou, pokud mezi žádnými dvěma z jejích uzlů nevede hrana grafu G . Každý samostatně uvažovaný uzel (bez smyčky) tvoří nezávislou podmnožinu. Nezávislost grafu je velikost největší nezávislé množiny. Značíme ho $\alpha(G)$.
 - **Klikovost grafu** – klikovostí grafu G nazýváme takové maximální přirozené číslo n , pro které existuje klika $K_n \subseteq G$. Klikovost grafu značíme $\omega(G)$.
 - **Dominance grafu** – podmnožinu D uzlů grafu G nazýváme dominující, pokud D společně s množinou svých sousedů tvoří všechny uzly. Dominance grafu G je velikost nejmenší dominantní množiny. Značíme ji $\beta(G)$.
 - **Chromatické číslo grafu** – graf G nazýváme k -barevným, pokud lze všechny jeho uzly obarvit s použitím k různých barev tak, aby žádné dva sousední vrcholy neměly stejnou barvu. Chromatickým číslem grafu G nazýváme takové nejmenší přirozené číslo k pro než je graf G k -barevný. Barevnost grafu G značíme $\chi(G)$.

BI-GRA grafy

Rekurentní grafy, se kterými jsme se seznámili v předmětu Grafové algoritmy a základy teorie složitosti (BI-GRA), jsou takové grafy, které vznikají z jednoho základního grafu (typicky triviálního) a pomocí jeho k kopií, kdy $k > 1$, se vytváří grafy nové. Tyto grafy byly typicky zadané pomocí obrázků, ze kterých byla zřejmá správná rekurentní konstrukce. Jejich uzly, hrany a další vlastnosti je možné popsat lineárními rekurentními rovnicemi s konstantními koeficienty. Uvedme si několik příkladů takových grafů. Pro takto definované konstrukce zavedeme operaci $*$, kterým budeme zjednodušeně zapisovat níže popsanou konstrukci. První příklady grafů vzniknou ze čtyř kopií předchozího grafu přidáním pěti hran. Ukázky dvou neizomorfních grafů jsou na obrázku 2.1.



Obrázek 2.1: První ukázka dvou rekurentních grafů, které vzniknou pomocí čtyř kopií předchozího grafu a přidáním pěti hran. Základním grafem G_0 je graf triviální.

2. BI-GRÁ GRAFY

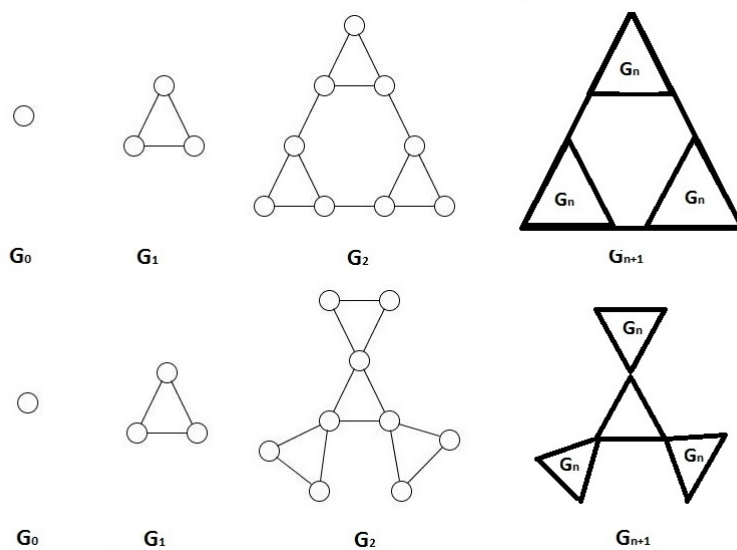
Grafům z obrázku 2.1 odpovídají následující rekurentní rovnice popisující počet hran a uzlů:

$$G_0 : \quad \begin{aligned} |V_0| &= 1, \\ |E_0| &= 0, \end{aligned}$$

a pro každé $n \geq 0$ máme rovnice:

$$G_{n+1} : \quad \begin{aligned} |V_{n+1}| &= 4 \cdot |V_n|, \\ |E_{n+1}| &= 4 \cdot |E_n| + 5. \end{aligned}$$

Druhou ukázkou jsou grafy na obrázku 2.2, které vzniknou ze tří kopií předchozího grafu přidáním tří hran.



Obrázek 2.2: Druhá ukáзка rekurentních grafů, které vzniknou pomocí tří kopií předchozího grafu a přidáním tří hran. Základní grafem G_0 je opět graf triviální.

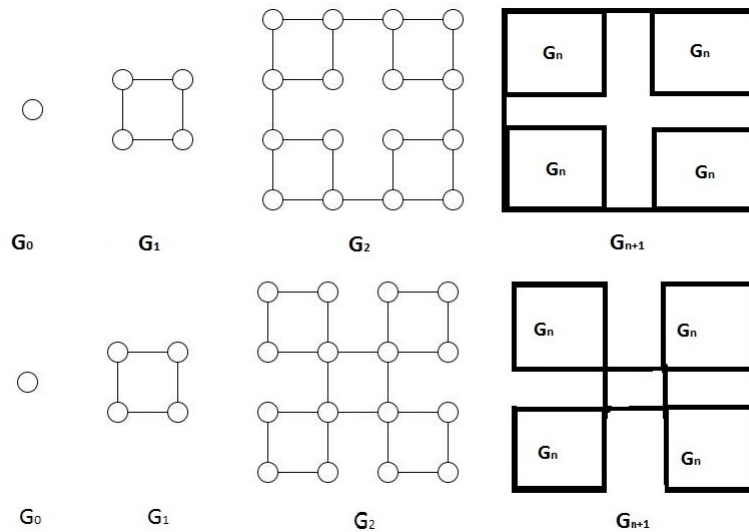
Grafům na obrázku 2.2 odpovídají následující rekurentní rovnice popisující počet hran a uzlů:

$$G_0 : \quad \begin{aligned} |V_0| &= 1, \\ |E_0| &= 0, \end{aligned}$$

a pro každé $n \geq 0$ máme rovnice:

$$G_{n+1} : \quad \begin{aligned} |V_{n+1}| &= 3 \cdot |V_n|, \\ |E_{n+1}| &= 3 \cdot |E_n| + 3. \end{aligned}$$

Třetí ukázkou jsou grafy na obrázku 2.3, které vzniknou ze čtyř kopií předchozího grafu přidáním čtyř hran.



Obrázek 2.3: Třetí ukáзка rekurentních grafů, které vzniknou pomocí čtyř kopií předchozího grafu a přidáním čtyř hran. Základní grafem G_0 je opět graf triviální.

Grafům na obrázku 2.3 odpovídají následující rekurentní rovnice popisující počet hran a uzlů:

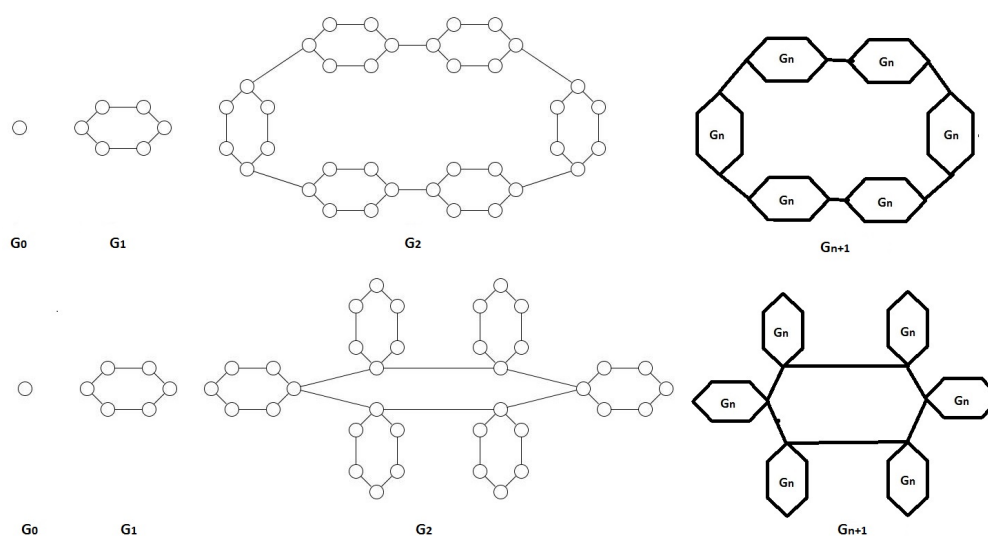
$$G_0 : \quad \begin{aligned} |V_0| &= 1, \\ |E_0| &= 0, \end{aligned}$$

2. BI-GRA GRAFY

a pro každé $n \geq 0$ máme rovnice:

$$\begin{aligned} G_{n+1} : |V_{n+1}| &= 4 \cdot |V_n|, \\ |E_{n+1}| &= 4 \cdot |E_n| + 4. \end{aligned}$$

Poslední ukázkou jsou grafy na obrázku 2.4, které vzniknou ze šesti kopií předchozího grafu přidáním šesti hran.



Obrázek 2.4: Čtvrtá ukáзка rekurentních grafů, které vzniknou pomocí šesti kopií předchozího grafu a přidáním šesti hran. Základní grafem G_0 je opět graf triviální.

Grafům na obrázku 2.4 odpovídají následující rekurentní rovnice popisující počet hran a uzlů:

$$\begin{aligned} G_0 : \quad |V_0| &= 1, \\ |E_0| &= 0, \end{aligned}$$

a pro každé $n \geq 0$ máme rovnice:

$$\begin{aligned} G_{n+1} : \quad |V_{n+1}| &= 6 \cdot |V_n|, \\ |E_{n+1}| &= 6 \cdot |E_n| + 6. \end{aligned}$$

Obecně můžeme rekurentní rovnice pro rekurentní grafy zapsat jako:

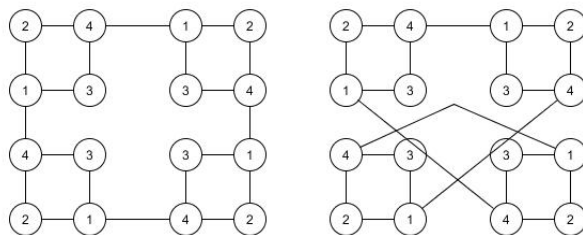
$$G_{n+1} = k * G_n + l, \text{ kde } k > 1, l \in \mathbb{Z}.$$

Pro počet hran a uzlů platí následující rovnice:

$$\begin{aligned} G_0 : \quad |V_0| &= 1, \\ |E_0| &= 0, \\ G_{n+1} : \quad |V_{n+1}| &= k \cdot |V_n|, \\ |E_{n+1}| &= k \cdot |E_n| + l. \end{aligned}$$

kde k vyjadřuje počet kopií předchozího grafu a l představuje počet přidaných hran ke spojení k kopií.

U všech příkladů jsme se záměrně vyhnuli vyjádření incidence. Důvodem bylo, že to není jednoduché přímo z rekurentního předpisu jako u $|V|$ a $|E|$. Z obrázku je rekurence zřejmá, ovšem její popis v ρ by potřeboval ještě nějaký parametr (informaci) navíc. U některých grafů by mohlo stačit očíslování uzlů, podmínkou zachování souvislosti a definicí stupňů nově spojovaných uzlů. Ukázka je na obrázku 2.5.

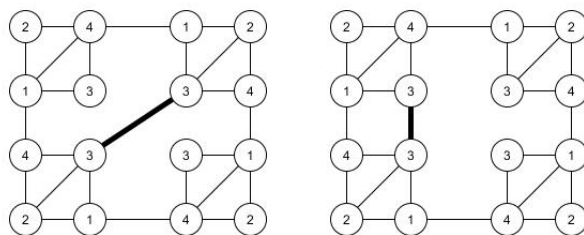


Obrázek 2.5: Ukázka izomorfních grafů, kdy očíslováním uzlů, podmínkou, že graf musí být souvislý a určením stupňů nově spojovaných uzlů, můžeme definovat požadovanou incidenci nových hran a tedy přesně požadovaný graf.

Zde bychom definovali, že každému uzlu 1 a 4 zvýšíme stupeň o 1 a to tak, že každý uzel 1 spojíme s jedním uzlem 4, který bude pro každý uzel 1 různý.

2. BI-GRA GRAFY

Také podmínku, že graf musí zůstat souvislý. Při dodržení těchto podmínek, při jakémkoli napojení získáme izomorfní grafy. Obecně tyto podmínky však stačit nemusí. Proto byly tyto grafy zadávané obrázkem. Nejednoznačnost incidence, kterou neodstraní ani očíslování, podmínka souvislosti a definice stupňů uzlů je zřejmá z příkladu na obrázku 2.6.



Obrázek 2.6: Ukázka grafu, kde jen očíslování uzlů, souvislost a určení stupňů nestačí pro definování incidence. Konkrétně nejsme schopni rozlišit, které dva uzly 3 mají být spojeny hranou.

Zde definujeme stejné podmínky jako pro graf na obrázku 2.5 a přidáme incidence mezi dvěma uzly 3, kterým zvýšíme stupeň o 1. Nejsme zde ale schopni rozlišit, které dva uzly 3 to mají být a mohou proto vzniknout dva různé grafy, které nejsou izomorfní. Zde by bylo třeba už nějakým způsobem rozlišovat jednotlivé kopie a definice zobrazení by tak byla velmi složitá. Tento přesný popis není cílem této práce.

Rekurzivně konstruovatelné grafy

Rekurzivně konstruovatelné grafy jsou definovány konečným souborem základních grafů a operací nebo operacemi, pomocí kterých se tvoří nové grafy. Každá operace je buď sloučení specifických vrcholů, přidání nových hran mezi specifické vrcholy, či přidání uzlů a hran na základě předem definovaných pravidel. Tyto grafy byly popsány v knize [1], odkud uvádíme jak definice, tak i některé příklady. Oproti rekurentním grafům z předchozí kapitoly jsou tyto třídy obecnější v tom smyslu, že v každém kroku můžeme použít libovolnou dvojici grafů dané třídy (nejen „ k kopií předchozího“).

Díky této obecnější definici se také studuje odpovídající stromový rozklad, který ukazuje, jak byl graf postupně vytvořen ze základních grafů. Základními grafy mohou být libovolné grafy, typicky začínáme s jednoduchými grafy, jako jsou jednoduzlový graf nebo dva uzly spojené hranou. První třídou klasifikace z [1], kterou si uvádíme, jsou stromy.

Struktura textu v následujících podkapitolách je následující. Představení a definice grafů, které do této třídy spadají spojené s ukázkou konstrukce, následované rešerší známých problémů a vlastností grafů této třídy. Dále uvádíme náš popis grafů z dané třídy, tj. popis incidence, počtu vrcholů a počtu hran v podobě rekurentních rovnic. Na konci každé z podkapitol jsou vybrané příklady grafů a jejich konstrukce.

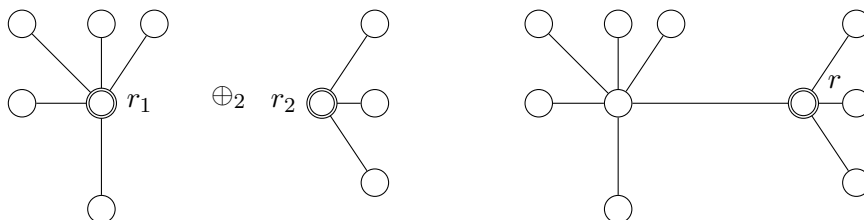
3.1 Stromy

Třída stromů je nejjednodušší z této klasifikace a odpovídá třídě všech stromů v teorii grafů (což ukážeme ve větě 1). Pro konstrukci stromů zavádíme značení \oplus , které bude zjednodušeně vyjadřovat konstrukci popsanou níže.

Induktivní definice stromů

- 1) Izolovaný uzel r je stromem s kořenem r , označme (G, r) .
- 2) Stromy s kořeny r_1, r_2 označme jako dvojice (G_1, r_1) a (G_2, r_2) . Potom $(G_1, r_1) \oplus (G_2, r_2)$ je strom (G, r) s kořenem r . Novým kořenem volíme r_1 nebo r_2 a odpovídající volbu budeme rozlišovat v operaci \oplus jako \oplus_1 pro $r = r_1$ a \oplus_2 pro $r = r_2$.

Formálně označuje dvojice (G, r) kořenový strom. Avšak specifikace význačného uzlu r je zde jen jako prostředek k využití rekurzivní konstrukce, nikoliv ve významu kořene z teorie grafů.



Obrázek 3.1: Ukázka konstrukce stromu pomocí operace \oplus_2 . Zdroj [1]

Vlastnosti charakterizující nějakým způsobem zadaný graf lze někdy algoritmicky snadno určit, některé ale náleží do třídy problémů, které označujeme jako NP-úplné. Pro problémy z této třídy neznáme efektivní, tj. polynomiální, deterministický algoritmus, který by daný problém řešil. Pro jisté třídy grafů v této práci umíme tyto problémy řešit v polynomiálním čase, někdy dokonce i v lineárním čase.

Uvedme si nyní přehledově složitosti algoritmů na určení některých vlastností stromů. Složitost dělíme do čtyř skupin:

- lineární, což znamená, že složitost této vlastnosti je shora omezena lineární funkcí,
- polynomiální, což znamená, že složitost této vlastnosti je shora omezena polynomiální funkcí,
- omezená, což znamená, že je známá funkce, která shora omezuje složitost této vlastnosti (a není to polynom),
- neomezená, což znamená, že není vyčíslena funkce, která by shora omezovala složitost této vlastnosti.

Tabulka 3.1 uvádí přehled vlastností stromů převzatý z [4].

| Problém | Složitost |
|----------------------------------|-----------|
| Průměr grafu | neomezená |
| Chromatické číslo | omezená |
| Klikovost grafu | omezená |
| Nezávislost grafu | neomezená |
| Dominance grafu | neomezená |
| Stromová šířka | neomezená |
| Izomorfismus dvou grafů | lineární |
| Existence hamiltonovské kružnice | lineární |
| Zařazení do dané třídy | lineární |

Tabulka 3.1: Přehled složitostí problémů uvedených v úvodu pro třídu stromů.

Na začátku této kapitoly jsme definovali dvě operace pro konstrukci stromů, operaci \oplus_1 s \oplus_2 . Pro obě operace platí následující incidence, rozdíl je jen ve výsledném vybrání kořene:

Mějme dva stromy $(G_1, r_1) = \langle E_1, V_1, \rho_1 \rangle$ a $(G_2, r_2) = \langle E_2, V_2, \rho_2 \rangle$, kde r_1 , resp. r_2 jsou kořeny. Pomocí operace přidání hrany (spojení kořenů novou hranou $\{r_1, r_2\}$) definujeme nový graf $G_1 \oplus G_2$ označený $(G, r) = \langle E, V, \rho \rangle$ takto:

$$\begin{aligned} V &= V_1 \cup V_2, \\ E &= E_1 \cup E_2 \cup \{r_1, r_2\}, \\ r &:= r_1 \text{ resp. } r_2, \end{aligned}$$

kde pro každou hranu v novém grafu $e \in E$ platí incidence $\rho : E \mapsto V \times V$:

$$\rho(e) = \begin{cases} \rho_1(e), & e \in E_1, \\ \rho_2(e), & e \in E_2, \\ \{r_1, r_2\}, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Nyní zde ještě doplníme důkaz, že stromy definované jako rekurzivně konstruovatelné grafy odpovídají stromům definovaným v kapitole 1.

Tvrzení 1. *Konstrukce \oplus zachovává vlastnosti stromů.*

Důkaz. Chceme dokázat, že graf $G = G_1 \oplus G_2$ je strom, tj. souvislý graf s $|V| - 1$ hranami a tedy je stromem podle definice 1. Dokážeme indukcí podle

3. REKURZIVNĚ KONSTRUOVATELNÉ GRAFY

pravidel konstrukce stromu:

- že počet hran G je $|V| - 1$:

1) ZK: Izolovaný uzel má $|V_0| - 1$ hran:

$$\begin{aligned} |V_0| &= 1, \\ |E_0| &= 0 \text{ a } |V_0| - 1 = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

2) IK: Jestliže máme dva stromy (G_1, r_1) , (G_2, r_2) pro které platí:

$$\begin{aligned} |V_1| &= m, & |E_1| &= m - 1, \\ |V_2| &= k, & |E_2| &= k - 1, \end{aligned}$$

potom graf $G = G_1 \oplus G_2$ má $|V| = n$ uzlů a $|E| = n - 1$ hran.

Důkaz. Počet uzlů $|V|$ i počet hran $|E|$ je odvozen z konstrukce $G_1 \oplus G_2$:

$$\begin{aligned} |V| &= |V_1| + |V_2| = m + k \\ |E| &= |E_1| + |E_2| + 1 \\ &= (m - 1) + (k - 1) + 1 \\ &= (m + k) - 1 \end{aligned}$$

□

- že \oplus zachovává souvislost:

1) ZK: Izolovaný uzel je souvislý graf.

2) IK: Jestliže G_1, G_2 jsou souvislé $\Rightarrow G_1 \oplus G_2$ je souvislý.

Víme, že pro každý strom platí, že mezi každou dvojicí uzlů existuje neorientovaná cesta. Pokud tato vlastnost platí pro oba stromy G_1 a G_2 , tak pokud přidáním jedné hrany mezi význačné uzly $r_1 \in V_1$ a $r_2 \in V_2$, vznikne cesta nejen mezi r_1, r_2 , ale také mezi libovolnými uzly $u \in V_1$ a $v \in V_2$, protože dle definice existuje cesta $u \rightarrow r_1$ a dále z $r_2 \rightarrow v$ a mezi r_1, r_2 je hrana.

□

Tvrzení 2. Každý strom má odvození v třídě stromů v rekurzivně konstruovatelných grafech popsaných v [1].

Důkaz. Chceme dokázat, že každý strom G je možné rozložit na posloupnost operací \oplus s příslušnými podgrafy G , neboli má odvození O .

- 1) ZK: Stromy s jedním uzlem mají triviální odvození.
- 2) IK: Předpokládejme, že máme odvození pro všechny stromy o k uzlech, $1 \leq k < n$. Máme-li strom s n uzly, pak odebráním libovolné hrany, kde uzly, mezi kterými jsme hranu odebrali, označíme r_1 a r_2 , dostaneme dva grafy G_1 s r_1 a G_2 s r_2 , které budou podle definice 1 také stromy a mají počet uzlů k, m , kde $(k + m = n)$. Podle IP mají tyto dva stromy odvození O_1 a O_2 , náš graf má pak odvození $O_1 \oplus O_2$.

□

Důsledek 1. Třída stromů z klasifikace rekurzivně konstruovatelných grafů tvoří třídu stromů z teorie grafů.

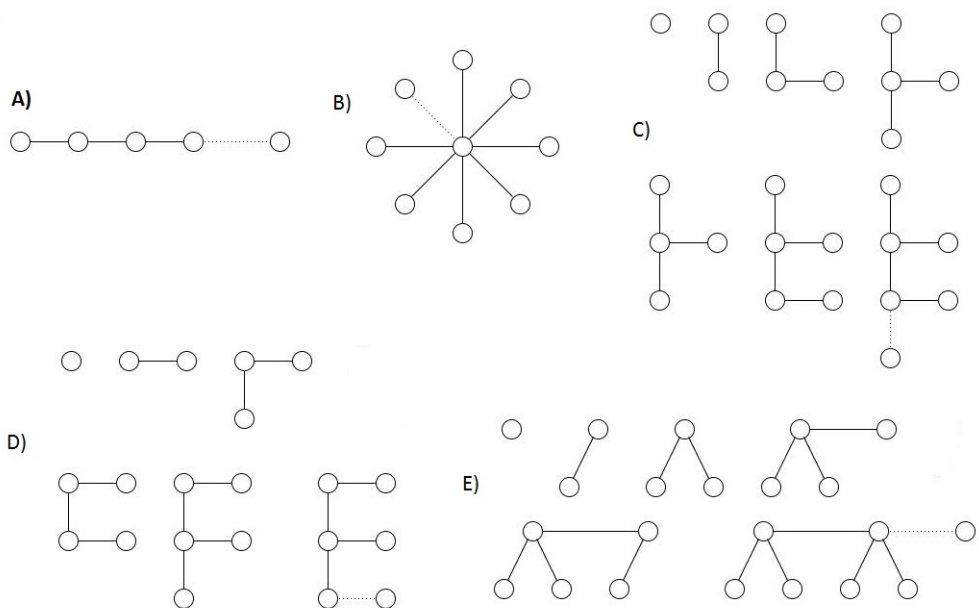
Jak jsme zjistili, je možné najít rekurentní rovnice, které vyjadřují počet uzlů a hran výsledného grafu G , který vznikne z předchozích grafů G_1 a G_2 použitím operace \oplus . Rekurentní rovnice jsou stejné pro oba typy této operace, tedy \oplus_1 i \oplus_2 , rozdíl je jen v jiném kořeni. Rekurentní rovnice odpovídající této konstrukci jsou následující:

$$\begin{aligned} G &\stackrel{\text{def}}{=} G_1 \oplus G_2 \\ |V| &= |V_1| + |V_2| \\ |E| &= |E_1| + |E_2| + 1, \end{aligned}$$

kde základním grafem je podle definice triviální graf. Pro něj platí:

$$\begin{aligned} |V_0| &= 1, \\ |E_0| &= 0. \end{aligned}$$

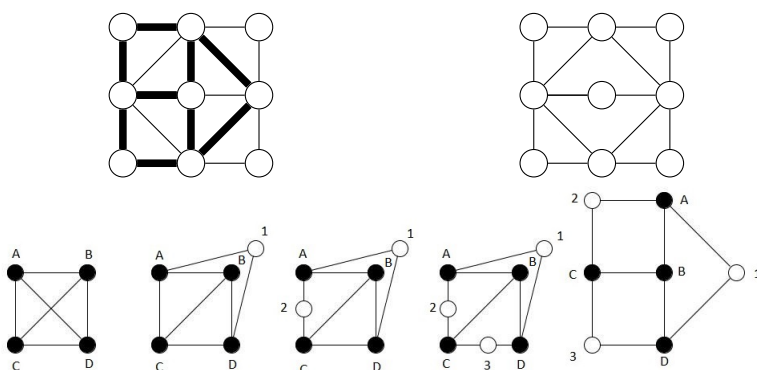
Dále uvedeme přehled vybraných základních grafů ze třídy stromů. V přehledu je uveden vždy obrázek a popis toho, jak se grafy liší v závislosti na tom, zda jsme použili operaci \oplus_1 nebo \oplus_2 . Všechny vybrané grafy vznikly induktivní konstrukcí z triviálního grafu a spojováním opět jen s triviálním grafem.



Obrázek 3.2: Graf A zobrazuje graf, kterým je cesta a vznikne opakováním operace \oplus_2 . Graf B nazýváme hvězdice. Vznikne opakováním operace \oplus_1 . Graf C vznikne pravidelným střídáním operací \oplus_1 a \oplus_2 , kdy operaci \oplus_2 používáme při přidání i -tého uzlu pro i liché a operaci \oplus_1 pro i sudé. Graf D vznikne pravidelným střídáním operací \oplus_1 a \oplus_2 , kdy operaci \oplus_1 používáme při přidání i -tého uzlu pro i liché a operaci \oplus_2 pro i sudé. Graf E nazýváme housenka. Vznikne opakováním operace \oplus_1 k -krát, kdy k je počet „nohou“ následované jednou operací \oplus_2 pro přidání další části „tělíčka“. Graf D je konkrétním případem grafu, kdy $k = 1$.

3.2 Sériově-paralelní grafy

Sériově-paralelní grafy jsou třídou rekurzivně konstruovatelných grafů popsané nerekurzivní vlastností – a to, že neobsahují jako svůj podgraf graf, který je homeomorfní grafu K_4 [1]. Příklad takového grafu je na obrázku 3.3. Pro konstrukci sériově-paralelních grafů zavedeme značení \odot , které bude zjednodušeně vyjadřovat konstrukce popsané níže.

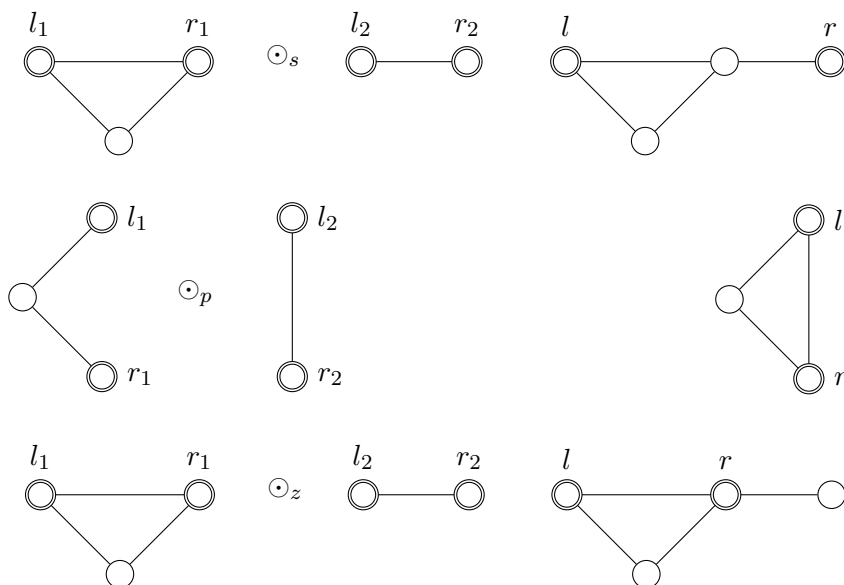


Obrázek 3.3: První dva grafy ukazují rozdíl mezi grafem, které není sériově-paralelní (graf a) a takovým, který je sériově-paralelní (graf b) [1]. Graf a) není sériově-paralelní, protože obsahuje podgraf, který je homeomorfní s K_4 (v obrázku zvýrazněný). Pět obrázků níže ukazuje postup, jak je možné konečným počtem operací půlení hran z grafu K_4 tento zvýrazněný podgraf vytvořit.

Induktivní definice sériově-paralelních grafů

Označme trojici (G, l, r) jako sériově-paralelní graf s význačnými uzly l a r :

- 1) Graf tvořený pouze dvěma vrcholy a jednou hranou, která je s nimi incidentní, je sériově-paralelní graf (G, l, r) .
- 2) Graf $G = G_1 \odot G_2$ je sériově-paralelní graf vzniklý ze sériově-paralelních grafů (G_1, l_1, r_1) , (G_2, l_2, r_2) , kde \odot je jednou z následujících operací:
 - **Sériová operace** – $(G_1, l_1, r_1) \odot_s (G_2, l_2, r_2)$ tvoří nový graf pomocí sloučení uzlů r_1 s l_2 a definuje nový graf (G, l, r) , kde $l = l_1$ a $r = r_2$.
 - **Paralelní operace** – $(G_1, l_1, r_1) \odot_p (G_2, l_2, r_2)$ tvoří nový graf pomocí sloučení uzlů l_1 s l_2 a r_1 s r_2 a definuje nový graf (G, l, r) , kde $l = l_1$ a $r = r_1$.
 - **Zavírací operace** – $(G_1, l_1, r_1) \odot_z (G_2, l_2, r_2)$ tvoří nový graf pomocí sloučení uzlů r_1 s l_2 a definuje nový graf (G, l, r) , kde $l = l_1$ a $r = r_1$.

Příklady použití operací \odot

 Obrázek 3.4: Ukázky grafů vzniklých za použití sériové operace \odot_s , paralelní operace \odot_p a zavírací operace \odot_z . [1]

Sériově-paralelní grafy jsou zajímavé tím, že některé algoritmicky obtížné problémy pro obecné grafy, pro ně umíme řešit v lineárním čase. Jsou to například minimální vrcholové pokrytí, maximální párování nebo pokrytí vrcholově disjunktními trojúhelníky, které se nepřekrývají. Znění těchto problémů najdete například v [5], kde je rozebráno i to, proč jsou lineární. Stejně jako v kapitole 3.1 uvádíme tabulku 3.2 s přehledem vlastností sériově-paralelních grafů převzatý z [6].

| Vlastnost | Složitost |
|----------------------------------|-----------|
| Průměr grafu | neomezená |
| Chromatické číslo | omezená |
| Klikovost grafu | omezená |
| Nezávislost grafu | neomezená |
| Dominance grafu | neomezená |
| Stromová šířka | omezená |
| Izomorfismus dvou grafů | lineární |
| Existence hamiltonovské kružnice | lineární |
| Zařazení do dané třídy | lineární |

Tabulka 3.2: Přehled složitostí problémů uvedených v úvodu pro třídu sériově-paralelních grafů.

Další zajímavou charakterizaci sériově-paralelních grafů uvádí Shinoda a kolektiv v práci [7]. Prokázali, že sériově-paralelní grafy mohou být zcela charakterizovány vlastností jejich kostry. Každá kostra tvoří DFS strom (graf tvořený hranami při provádění algoritmu průchodu do hloubky) k jedné z 2-izomorfních kopií grafu. Dva grafy jsou 2-izomorfní, pokud mají stejnou množinu hran a také stejnou množinu možných kružnic [7]. Důkaz v tomto článku je však pouze existenční. Oproti tomu článek uvedený v [8] poskytuje konstruktivní důkaz této vlastnosti. Sériově-paralelní grafy hrají významnou úlohu při analýze a syntéze elektrických sítí, komunikačních sítí a spínacích obvodů. Mohou být například použity při modelování elektrických sériově-paralelních obvodů a sítí. Při tomto modelování se využívá hlavně sériová a paralelní operace. Stejně jako [1] i jiné články při paralelní operaci umožňují vytvářet grafy s paralelními hranami. My se těmito grafy zabývat nechceme, proto jsme tuto definici upravili, tak aby odpovídala vytváření obyčejných grafů. Pro vytváření obvodů a sítí je však možnost paralelních hran podstatná.

Platí také, že třída stromů patří mezi sériově-paralelní grafy, které lze navíc podle [1] zkonstruovat pouze pomocí zavírací operace \odot_z . Tato operace je analogická operaci \oplus_1 . My ale konstruujeme stromy také pomocí operace \oplus_2 , která odpovídá sériové operaci. Jak je ale vidět, toto zjednodušení není v rozporu s tvrzením v [1].

Na začátku této kapitoly jsme definovali tři operace pro konstrukci sériově-paralelních grafů. Sériovou operaci \odot_s , paralelní operaci \odot_p a zavírací operaci \odot_z . Pro operaci platí následující vyjádření incidence:

- 1) Mějme graf $G_1 \odot_s G_2$ vytvořený ze dvou sériově-paralelních grafů (G_1, l_1, r_1) a (G_2, l_2, r_2) . Dále označme jako X množinu hran v (G_2, l_2, r_2) sousedících s l_2 ,

$$X = \{f \in E_2 \mid \rho_2(f) = \{l_2, x\}, \mid l_2, x \in V_2\},$$

a množinu nových hran v (G, l, r) označme U ,

$$U = \{e \in E \mid \rho(e) = \{r_1, x\}, \text{ pro každé } f \in X, \text{ kde } \rho_2(e) = \{l_2, x\}\}.$$

Potom nový graf $(G, l, r) = G_1 \odot_s G_2$ je konstruován takto:

$$\begin{aligned} V &= V_1 \cup V_2 \setminus \{l_2\}, \text{ splynutí uzlů } r_1 \text{ a } l_2 \\ E &= E_1 \cup (E_2 \setminus X) \cup U, \\ l &= l_1, \\ r &= r_2 \end{aligned}$$

3. REKURZIVNĚ KONSTRUOVATELNÉ GRAFY

a pro každou hranu v novém grafu definujeme incidenci $\rho : E \mapsto V \times V$:

$$\rho(e) = \begin{cases} \rho_1(e), & e \in E_1, \\ \rho_2(e), & e \in E_2 \setminus X, \\ \{r_1, x\}, & \text{pokud } \rho_2(e) = \{l_2, x\}. \end{cases}$$

- 2) Mějme graf $G_1 \odot_p G_2$ vytvořený ze dvou sériově-paralelních grafů (G_1, l_1, r_1) a (G_2, l_2, r_2) . Dále označme jako X množinu hran v (G_2, l_2, r_2) sousedících s l_2 nebo r_2 ,

$$X = \{f \in E_2 \mid (\rho_2(f) = \{l_2, x\} \vee \rho_2(f) = \{r_2, y\})\},$$

a množinu nových hran v grafu (G, l, r) označme U ,

$$U = \{e \in E \mid \rho(e) = \{l_1, x\} \vee \rho(e) = \{r_1, y\}\},$$

pro každé $f \in X$ pokud $\rho_2(f) = \{l_2, x\}$ nebo $\rho_2(e) = \{r_2, x\}$.

Potom nový graf $(G, l, r) = G_1 \odot_p G_2$ je konstruován takto:

$$\begin{aligned} V &= V_1 \cup V_2 \setminus \{l_2, r_2\}, \text{ splynutí uzlů } l_1 \text{ s } l_2 \text{ a } r_1 \text{ s } r_2 \\ E &= E_1 \cup (E_2 \setminus X) \cup U, \\ l &= l_1, \\ r &= r_1 \end{aligned}$$

a pro každou hranu v novém grafu definujeme incidenci $\rho : E \mapsto V \times V$:

$$\rho(e) = \begin{cases} \rho_1(e), & e \in E_1 \setminus \{l_1, r_1\}, \\ \rho_2(e), & e \in E_2 \setminus X, \\ \{l_1, x\}, & \text{pokud } \rho_2(e) = \{l_2, x\}, \\ \{r_1, y\}, & \text{pokud } \rho_2(e) = \{r_2, y\}, \\ \{l_1, r_1\}, & \text{pokud } \rho_1(e) = \{l_1, r_1\} \text{ nebo } \rho_2(e) = \{l_2, r_2\}. \end{cases}$$

- 3) Mějme graf $G_1 \odot_z G_2$ vytvořený ze dvou sériově-paralelních grafů (G_1, l_1, r_1) a (G_2, l_2, r_2) . Spojení odpovídá operaci 1), ale zůstanou jiné význačné uzly. Označme jako X množinu hran v (G_2, l_2, r_2) sousedících s l_2 ,

$$X = \{f \in E_2 \mid \rho_2(f) = \{l_2, x\}\}$$

a množinu nových hran v grafu (G, l, r) označme U ,

$$U = \{e \in E \mid \rho(e) = \{r_1, x\}\}, \text{ pro každé } f \in X \text{ pokud } \rho_2(f) = \{l_2, x\}.$$

Potom nový graf $(G, l, r) = \langle E, V, \rho \rangle$ je konstruován takto:

$$\begin{aligned} V &= V_1 \cup V_2 \setminus \{l_2\}, \text{ splynutí uzlů } r_1 \text{ a } l_2 \\ E &= E_1 \cup (E_2 \setminus X) \cup U, \\ l &= l_1, \\ r &= r_1 \end{aligned}$$

a pro každou hranu v novém grafu $e \in E$ definujeme incidenci $\rho : E \mapsto V \times V$:

$$\rho(e) = \begin{cases} \rho_1(e), & e \in E_1 \\ \rho_2(e), & e \in E_2 \setminus X, \\ \{r_1, x\}, & \text{pokud } \rho_2(e) = \{l_2, x\}. \end{cases}$$

Analogicky pro situaci kdy ponecháme uzel l_2 a zanikne uzel r_1 .

Jak jsme zjistili i pro třídu sériově-paralelních grafů existují rekurentní rovnice vyjadřující počet uzlů a hran výsledného grafu G , který vznikne z grafů G_1 a G_2 použitím operací $\odot_s, \odot_p, \odot_z$. Rekurentní rovnice se v závislosti na použité operaci liší a jsou následující:

Rekurentní rovnice odpovídající sériové operaci:

$$\begin{aligned} G &\stackrel{\text{def}}{=} G_1 \odot_s G_2 \text{ viz její definice} \\ |V| &= |V_1| + |V_2| - 1 \\ |E| &= |E_1| + |E_2| \end{aligned}$$

Rekurentní rovnice odpovídající paralelní operaci:

$$\begin{aligned} G &\stackrel{\text{def}}{=} G_1 \odot_p G_2 \text{ viz její definice} \\ |V| &= |V_1| + |V_2| - 2 \\ |E| &= |E_1| + |E_2| - (\delta_{r_1, l_1} \cdot \delta_{r_2, l_2}) \end{aligned}$$

kde pro $\delta_{i,j}$ platí:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{pokud neexistuje hrana mezi uzly } i, j, \\ 1, & \text{pokud existuje hrana mezi uzly } i, j. \end{cases}$$

Rekurentní rovnice odpovídající závírací operaci:

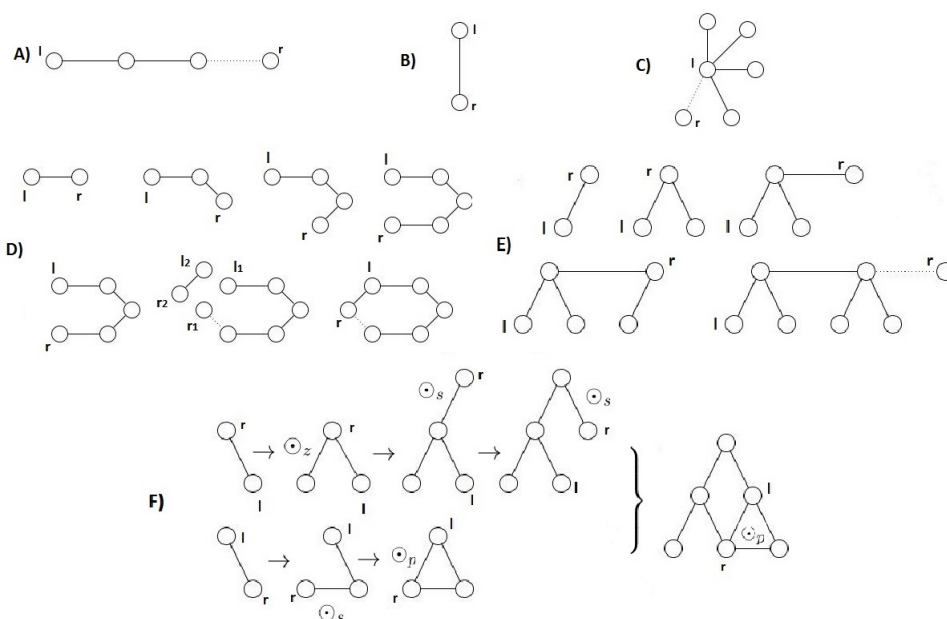
$$\begin{aligned} G &\stackrel{\text{def}}{=} G_1 \odot_z G_2 \text{ viz její definice} \\ |V| &= |V_1| + |V_2| - 1 \\ |E| &= |E_1| + |E_2|. \end{aligned}$$

3. REKURZIVNĚ KONSTRUOVATELNÉ GRAFY

Základním grafem je podle definice graf o dvou uzlech a jedné hraně. Pro něj platí:

$$\begin{aligned} |V_0| &= 2, \\ |E_0| &= 1. \end{aligned}$$

Dále uvedeme přehled vybraných grafů ze třídy sériově-paralelních grafů. Nejprve uvedeme grafy, které vznikají ze základního grafu, dva uzly spojené hranou, u kterých nekombinujeme operace a vždy používáme jen jeden typ. Dále uvedeme ukázky grafů, u kterých kombinujeme vždy jen dvě operace a nakonec jednu ukázkou grafu, u kterého používáme všechny tři operace. U všech grafů uvedených v přehledu vycházíme ze základního grafu a prvním krokem konstrukce je vždy spojení dvou základních grafů o dvou uzlech a jedné hraně.



Obrázek 3.5: Graf A nazýváme cesta. Vznikne opakováním sériové operace \odot_s . Graf B, kterým je K_2 (jedna hrana a dva uzly), vznikne opakováním paralelní operace \odot_p . Graf C nazýváme hvězdice. Vznikne opakováním zavírací operace \odot_z . Graf D vznikne k -krát opakováním sériové operace \odot_s , kde k je délka kružnice a na závěr jednou paralelní operace \odot_p pro uzavření kružnice. Graf E se nazývá housesenka. Vznikne střídáním k -krát zavírací operace \odot_z , kdy k je počet „nohou“ a jedenkrát sériové operace \odot_s pro přidání další části „tělíčka“. Graf F ukazuje kombinaci všech tří operací. Kdy byla která operace použita, je uvedeno přímo na obrázku.

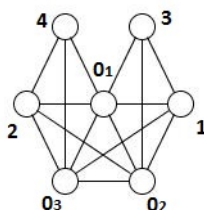
3.3 K -stromy

K -stromy je třída rekurzivně konstruovatelných grafů, která je pro dané přirozené číslo k popsána nerekurzivní vlastností, že žádný z grafů této třídy neobsahuje K_{k+2} podgraf, a že všechny jeho minimální separátory vytvářejí K_k [9]. Současně také platí, že třída stromů z podkapitoly 3.1 patří do této třídy mezi 1-stromy [1]. Pro konstrukci k -stromů zavedeme značení \odot . Toto značení bude zjednodušeně vyjadřovat následující konstrukci k -stromů.

Induktivní definice k -stromů

- 1) Každý úplný graf K_k s k uzly je k -strom, $k \geq 1$.
- 2) Je-li G_1 k -stromem s n uzly ($n \geq k$), pak přidáním nového uzlu a k hran k nějakému K_k v G_1 již obsaženém, vznikne také k -strom.

Ukázka konstrukce k -stromu



Obrázek 3.6: Ukázka 3-stromu, kde čísla uzlů $0_1, 0_2, 0_3$ představují základní K_3 graf a ostatní pořadí uzlů, ve kterém byly připojovány.

Třída k -stromů je třídou, o které donedávna nebylo známo příliš věcí (pro obecné k , na příklad pro 2-stromy jsou články už z 60.let). Například uvedeme charakteristiku k -stromů z článku [10]: Pokud G je graf s alespoň $k + 1$ uzly, potom G je k -strom právě tehdy, když G neobsahuje žádný K_{k+2} -minor, neobsahuje žádnou kružnici bez tětiny o délce alespoň čtyři a G je k -souvislý. Tato charakteristika je o něco přesnější než charakteristika uvedená v úvodu této kapitoly, neboť během dalšího zkoumání se zjistilo, že k -stromy konstruované podle výše uvedené definice obsahují méně podgrafů, než bylo původně popsáno.

Dalším zajímavým problémem bylo určení počtu různých k -stromů na zadaném počtu uzlů, který sice byl vyřešen v r. 1968, ale pouze pro očíslované 2-stromy [11], kde očíslování stromů znamená nějaké pevně dané oindexování jeho uzlů. Pro obecné $k > 2$ zůstala tato otázka nevyřešena až do r. 2012, kdy Gainer-Dewar [12] vyčíslil funkci, která počet (neočíslovaných) k -stromů

3. REKURZIVNĚ KONSTRUOVATELNÉ GRAFY

stanovuje. Článek [13] uvádí jednodušší podobu této funkce.

U třídy k -stromů však stále zůstává mnoho zajímavých problémů, které nejsou uspokojivě vyřešeny. Jedním z problémů je například obarvení k -stromu, kde $k > 2$, jak ukazuje článek [14]. Detailní analýza těchto zkoumaných problémů by mohla být pokračováním této práce.

Podobně jako v kapitole 3.1 uvádíme tabulku 3.3 s přehledem vlastností k -stromů s pevně daným k převzatý z [15].

| Problém | Složitost |
|----------------------------------|--------------|
| Průměr grafu | neomezená |
| Chromatické číslo | omezená |
| Klikovost grafu | omezená |
| Nezávislost grafu | neomezená |
| Dominance grafu | neomezená |
| Stromová šířka | omezená |
| Izomorfismus dvou grafů | polynomiální |
| Existence hamiltonovské kružnice | lineární |
| Zařazení do dané třídy | lineární |

Tabulka 3.3: Přehled složitostí problémů uvedených v úvodu pro třídu k -stromů.

Na začátku této kapitoly jsme definovali operaci \otimes pro konstrukci k -stromů. Pro operaci platí následující vyjádření incidence:

Graf $G_1 \otimes G_2$ označený $G = (E, V, \rho)$ vyjadřuje konstrukci k -stromů, kde $G_1 = \langle E_1, V_1, \rho_1 \rangle$ je libovolný k -strom a $G_2 = \langle \emptyset, \{v_2\}, \emptyset \rangle$ a je definovaná takto:

$$\begin{aligned}
 V &= V_1 \cup \{v_2\}, \\
 E &= E_1 \cup X, \text{ kde definujeme } X \text{ jako množinu } k \text{ nových hran:} \\
 X &= \{\{v_2, x\} \mid v_2 \in V_2, x \in K_k \subseteq G_1\} \\
 \rho &= \rho_1 \cup X,
 \end{aligned}$$

pro $\rho(e)$ platí:

$$\rho(e) = \begin{cases} \rho_1(e), & \text{pokud } e \in E_1. \\ \{v_2, x\}, & \text{pro } v_2 \in V_2, \text{ a každé } x \in K_k, \text{ zvoleného } K_k \subseteq G_1. \end{cases}$$

Přehled vybraných grafů z této třídy začneme algoritmem, který vytvoří k -strom. Budeme pokračovat přehledem 2-stromů, protože jak už jsme zmiňovali dříve, 1-stromy jsou klasické stromy, tudíž bychom mohli vygenerovat stejné grafy.

U 2-stromů jsme vybrali základní grafy, které se liší v konstrukci tím, že je dáno, s jakými dvěma uzly je nový graf spojen.

Nakonec přehledu uvádíme jeden obrázek 3-stromu. 3-stromy obecně jsou již složitější na konstrukci a tudíž méně názorné v nákresu.

Algoritmus pro konstrukci k -stromů

KROK 1) Vezmeme základní K_k graf a nastavíme n na 1.

KROK 2) Uzly K_k označíme 0_i kde $i = 1, 2, \dots, k$.

KROK 3) Vybereme nějakou k -kliku K_k v G .

KROK 4) Přidáme nový uzel a označíme ho n (n je počet do té chvíle přidaných uzlů).

KROK 5) Nový uzel n spojíme hranou s každým uzlem vybrané k -kliky K_k (k hran celkem).

KROK 6) $n := n + 1$.

KROK 7) Opakujeme krok 3 až 6 dokud nemáme požadovaný graf.

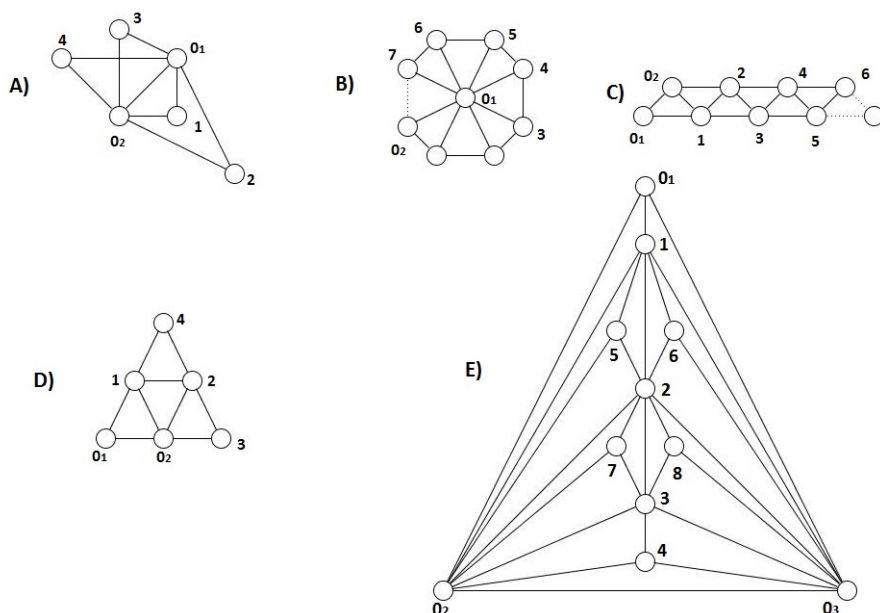
U všech grafů uvedených v přehledu jsme vycházeli z daného vybraného K_k grafu a prvním krokem konstrukce je spojení izolovaného uzlu s K_k grafem pomocí k hran.

Po prozkoumání této třídy jsme našli rekurentní rovnice, kterými je možné popsat přesný počet uzlů a hran výsledného grafu G , který vznikne z grafů G_1 a G_2 , kdy G_2 je izolovaný uzel, použitím operace \odot . Rekurentní rovnice jsou následující:

$$\begin{aligned} G &\stackrel{\text{def}}{=} G_1 \odot G_2 \quad \text{viz její definice} \\ |V| &= |V_1| + 1 \\ |E| &= |E_1| + k, \end{aligned}$$

kde základním grafem je podle definice K_k graf. Pro něj platí:

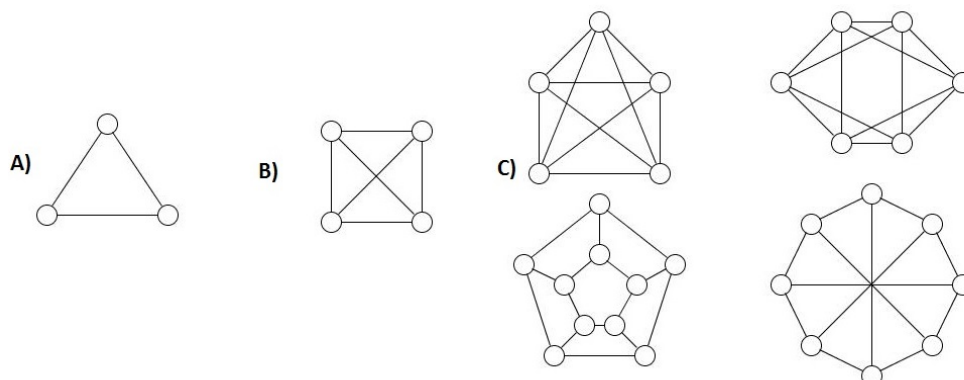
$$\begin{aligned} |V_0| &= k, \\ |E_0| &= \binom{k}{2}, \end{aligned}$$



Obrázek 3.7: A) Jako 2-klika (3. krok algoritmu) se vždy vezme $0_1, 0_2$.
 B) Jako 2-klika (3. krok algoritmu) se vždy vezme 0_1 a $n - 1$.
 C) Jako 2-klika (3. krok algoritmu) se poprvé vezme 0_1 a 0_2 a dále se vždy vezme $n - 1$ a $n - 2$.
 D) Jako 2-klika (3. krok algoritmu) se vezmou postupně dvojice: 0_1 a 0_2 , 1 a 0_2 , 2 a 0_2 a nakonec 1 a 2 .
 E) Tento graf se nazývá Goldner-Harary graf [20]. Jako 3-kliku jsme postupně vybírali trojice: $0_1, 0_2, 0_3$; $1, 0_2, 0_3$; $2, 0_2, 0_3$; $3, 0_2, 0_3$; $1, 2, 0_2$; $1, 2, 0_3$; $2, 3, 0_2$; $2, 3, 0_3$.

3.4 Parciální k -stromy

Parciální k -stromy jsou definovány jako všechny podgrafy grafu ze třídy k -stromů. Jak uvedeme později v kapitole 3.7, mohou být definovány i pomocí stromové šířky grafu. Přesto, že jsou pouze podtřídou, jsou velmi důležité, protože mnoho NP-úplných problémů je řešitelných v polynomiálním čase, pokud se omezíme na parciální k -stromy s omezenou hodnotou k . Navíc mají vazbu i na další třídy definované v této klasifikaci. Stromy patří mezi parciální 1-stromy, sériově-paralelní grafy mezi paralelní 2-stromy, Halinovy grafy mezi parciální 3-stromy a treewidth- k odpovídají parciálním k -stromům. Pro každé k ve třídě parciálních k -stromů navíc můžeme definovat množinu tzv. zakázaných minorů, tedy minory, které graf nesmí obsahovat, aby patřil do konkrétní třídy parciálních k -stromů. Na obrázku 3.8 uvedeme příklady z [1] pro $k = 1, 2, 3$.



Obrázek 3.8: Obrázek A ukazuje zakázaný minor pro parciální 1-stromy, obrázek B pro parciální 2-stromy a obrázek C ukazuje zakázané minory pro parciální stromy.

Z obrázku 3.8 vidíme, že pro parciální 1-stromy je zakázaný graf K_3 a zároveň víme, že do této třídy patří stromy. Z toho je velmi dobře viditelné, proč je graf K_3 zakázaný, neboť ve stromu nelze přidat žádnou hranu, aniž by zůstal bez kružnic, tedy pokud bychom ji přidali, vznikne graf K_3 . U parciálních 2-stromů je zakázaný graf K_4 a zároveň víme, že sem patří sériově-paralelní grafy a z definice víme, že nesmí jako minor obsahovat K_4 .

Podobně jako v kapitole 3.1 uvádíme tabulku 3.4 s přehledem vlastností parciálních k -stromů s pevně daným k převzatý z [16].

| Problém | Složitost |
|----------------------------------|--------------|
| Průměr grafu | neomezená |
| Chromatické číslo | omezená |
| Klikovost grafu | omezená |
| Nezávislost grafu | neomezená |
| Dominance grafu | neomezená |
| Stromová šířka | omezená |
| Izomorfismus dvou grafů | polynomiální |
| Existence hamiltonovské kružnice | lineární |
| Zařazení do dané třídy | lineární |

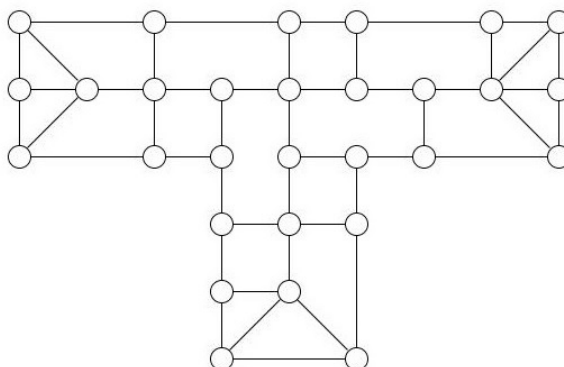
Tabulka 3.4: Přehled složitostí nalezení vlastností pro parciální k -stromy.

Po prozkoumání třídy parciálních k -stromů jsme zjistili, že přesné vyjádření počtu uzlů a hran pomocí jednoduchých rekurentních rovnic není triviální úkol, neboť parciální k -stromy jsou definovány jako všechny podgrafy k -stromů a těch je velké množství, protože můžeme vybrat jakékoli uzly s jakýmkoli hranami a není tedy možné přesně definovat, kolik uzlů a hran zrovna odebíráme.

3.5 Halinovy grafy

Halinův graf je planární graf mající alespoň čtyři uzly a jehož množina hran E může být rozdělena jako $E = \langle T, C \rangle$, kde T je strom, kde každý uzel má stupeň jedna nebo větší než dva (tedy žádný uzel nemá stupeň 2) a C je kružnice složená ze všech listů stromu T .

Halinovy grafy jsou obsaženy ve třídě parciálních 3-stromů a jsou tedy dvě možnosti konstrukce. Buď jako strom, kterému spojíme listy do kružnice a nebo jako 3-strom, kterému odebereme potřebný počet hran. Halinovy grafy nejsou uzavřeny na podgrafy, tedy některé podgrafy Halinových grafů nejsou Halinovy grafy [1]. Halinovy grafy jsou navíc Hamiltonovské grafy, tedy mají Hamiltonovskou kružnici. Navíc zůstávají Hamiltonovské i po odebrání jakéhokoli jednoho uzlu. Jsou 3-souvislé, nejsou bipartitní a obsahují jako svůj podgraf K_3 [17]. Vlastnost, že obsahují jako podgraf K_3 je velmi dobře viditelná, neboť jsou tvořeny jako strom, do kterého na konci přidáme hrany mezi listy. Z 1 však víme, že přidáním jakékoli hrany do stromu vznikne právě podgraf K_3 . Stejně jako na ostatních třídách jsou prozkoumané složitosti nalezení vlastností uvedených v úvodu. Složitosti pro Halinovy grafy ukazuje tabulka 3.5 [18].



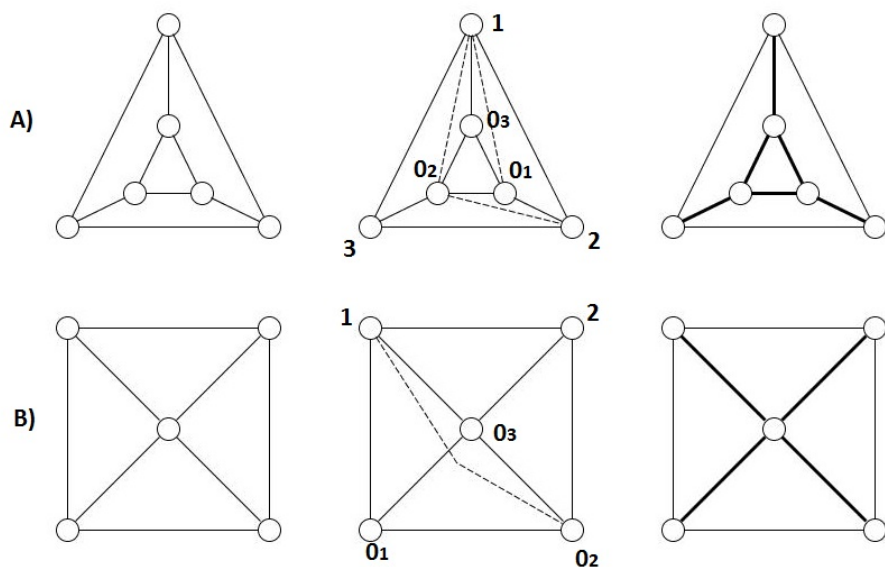
Obrázek 3.9: Ukázka Halinova grafu [1]

Pro Halinovy grafy existují dva lineární algoritmy, pomocí kterých můžeme rozhodnout, zda graf patří mezi Halinovy grafy. Syslo a Proskurowski ukázali, že graf s n uzly a m hranami je Halinův graf právě tehdy, když je planární, 3-souvislý a vnější stěna sousedí se všemi vnitřními stěnami. Všechny tyto podmínky mohou být zkontrolovány v lineárním čase. [19] Fomin a Thilikos zjistili, že v Halinově grafu existuje vnější stěna s nejméně $n/2 + 1$ vrcholy a každý planární graf má čtyři takové stěny [19].

| Problém | Složitost |
|----------------------------------|-----------|
| Průměr grafu | neznámá |
| Chromatické číslo | omezená |
| Klikovost grafu | omezená |
| Nezávislost grafu | neomezená |
| Dominance grafu | neznámá |
| Stromová šířka | omezená |
| Izomorfismus dvou grafů | lineární |
| Existence hamiltonovské kružnice | lineární |
| Zařazení do dané třídy | lineární |

Tabulka 3.5: Přehled složitostí nalezení vlastností pro Halinovy grafy.

V následujícím přehledu uvádíme ukázky Halinových grafů. Nejprve uvádíme vybraný Halinův graf, dále 3-strom ze kterého vznikne daný graf a nakonec graf s označením, které hrany tvoří množinu T a které C . Patří tam například n -kolové grafy (1 centrální uzel a n na obvodním „kole“) a 3-hranolový graf [17].



Obrázek 3.10: V prvním sloupečku je vždy ukázka Halinova grafu, ve druhém ukázka 3-stromu, ze kterého mohl být vytvořen a ve třetím graf, kde zvýrazněné hrany určují množinu T a ostatní hrany množinu C . Graf na obrázku A se nazývá 3-hranolový graf a graf na obrázku B 5-kolový graf.

Jak jsme definovali na začátku kapitoly, existují dva způsoby jak vytvořit Halinův graf. Prvním způsobem je vytvoření jako parciální 3-strom. Pro tuto konstrukci nebudeme uvádět rekurentní rovnice, neboť je to stejný problém jako v kapitole 3.4. Druhým způsobem je vytvoření stromu, který nemá žádný uzel stupně 2 a spojit jeho listy do kružnice. Pro tuto konstrukci definujeme operaci \oplus_h , která bude vyjadřovat spojení dvou stromů, stejně jako v kapitole 3.1, kde označení h znamená, že k těmto stromům na závěr přidáme kružnici přes všechny listy. Máme grafy $G_1 = \langle E_1, V_1, \rho_1 \rangle$ a $G_2 = \langle E_2, V_2, \rho_2 \rangle$, kde $E_1 = \langle T_1, C_1 \rangle$ a $E_2 = \langle T_2, C_2 \rangle$. Význačné uzly, přes které budeme pomocí operace \oplus_h stromy spojovat, můžeme vybrat několika způsoby:

- a) Jako význačné uzly v grafu G_1 i v grafu G_2 vybereme vnitřní uzly. Přidáním hrany mezi tyto dva uzly nemůže vzniknout kružnice (spojuje dva stromy) ani uzel stupně 2 (stupně uzlů jsme zvýšili), proto i výsledný graf bude Halinův graf.
- b) Jako význačné uzly vybereme list z G_1 a vnitřní uzel z G_2 . Protože list má stupeň jedna, přidáním hrany mezi tyto dva uzly, vznikne z listu uzel stupně 2. Víme však, že Halinův graf nesmí obsahovat takovýto uzel. Tato konstrukce tedy není korektní pro vytvoření Halinova grafu. (Obdobně kdybychom vybrali vnitřní uzel z G_1 a list z G_2).
- c) Jako význačné uzly v G_1 i v G_2 vybereme listy. Stejně jako ve variantě b), přidáním hrany k listu vznikne uzel stupně 2, v tomto případě vzniknou dokonce dva takové uzly. Tedy ani tato konstrukce není korektní.
- d) Další možností je přidat nové listy. Připojíme-li je k vnitřnímu uzlu, jeho stupeň tím jen zvýšíme, ale nevytvoříme kružnici. Tedy dostaneme Halinův graf.
- e) Nové listy připojujeme k listu. Toto je možné pouze pokud k tomuto listu připojíme alespoň dva nové, aby výsledný stupeň byl alespoň tři.

Máme tedy tři možnosti jak vytvářet Halinovy grafy pomocí operace \oplus_h . Incidence při této konstrukci pro množinu T bude stejná jako při operaci \oplus , která byla popsána v kapitole o stromech 3.1. Pro zbylé hrany z množiny C dodefinujeme zobrazení takto:

- a) z množiny C_1 vybereme libovolnou hranu a její krajní uzly označíme x_1 a y_1 . Totéž v množině C_2 , kde krajní uzly označíme x_2 a y_2 . Nová kružnice $C = C_1 \setminus e_1 \cup C_2 \setminus e_2 \cup \{f_1, f_2\}$, kde $\rho_1(e_1) = \{x_1, y_1\}$, $\rho_2(e_2) = \{x_2, y_2\}$, $\rho(f_1) = \{x_1, x_2\}$ a $\rho(f_2) = \{y_1, y_2\}$. Neboli odebereme hranu z každé kružnice a nahradíme je dvěma hranami, které tyto dvě kružnice propojí.

- d) Z definice víme, že Halinovy grafy jsou planární grafy. Zároveň víme, že jeho hrany můžeme rozdělit na množinu T (strom) a C (kružnice). Také platí, že rovinné zakreslení stromu má pouze jednu stěnu. Proto když mu spojíme listy do kružnice, budou všechny jeho vnitřní stěny sousedit se stěnou vnější. Tedy když připojíme nový list, musíme ho vždy umístit do některé z vnitřních stěn. Označme e hranu mezi touto vnitřní a vnější stěnou a její krajní uzly označme u, v . Nově připojovaný list označíme w . Kružnice C pak vznikne z C_1 tak, že odebereme hranu e a nahradíme ji hranami f_1 a f_2 , kde $\rho(f_1) = \{u, w\}$ a $\rho(f_2) = \{w, v\}$.
- e) List ke kterému připojujeme nové uzly u, v označíme w . Dále označíme x, z sousední uzly w v kružnici C_1 . Z C_1 odebereme hrany e_1, e_2 , kde $\rho_1(e_1) = \{x, w\}$ a $\rho_1(e_2) = \{w, z\}$ a nahradíme je třemi hranami f_1, f_2, f_3 , kde $\rho(f_1) = \{x, u\}$, $\rho(f_2) = \{u, v\}$ a $\rho(f_3) = \{v, z\}$.

Vzhledem k tomu, že máme tři možnosti konstrukce, máme i tři varianty rekurentních rovnic vyjadřujících přesný počet uzlů a hran po provedení dané operace. Pro variantu a platí následující:

$$\begin{aligned} G &\stackrel{\text{def}}{=} G_1 \oplus_h G_2 \text{ viz její definice} \\ |V| &= |V_1| + |V_2| \\ |E| &= |E_1| + |E_2| + 1 \end{aligned}$$

Pro variantu d platí:

$$\begin{aligned} G &\stackrel{\text{def}}{=} G_1 \oplus_h G_2 \text{ viz její definice} \\ |V| &= |V_1| + 1 \\ |E| &= |E_1| + 2 \end{aligned}$$

Pro variantu e platí:

$$\begin{aligned} G &\stackrel{\text{def}}{=} G_1 \oplus_h G_2 \text{ viz její definice} \\ |V| &= |V_1| + 2 \\ |E| &= |E_1| + 3 \end{aligned}$$

a pro všechny je základním grafem podle definice Halinův graf na čtyřech uzlech. Pro něj platí:

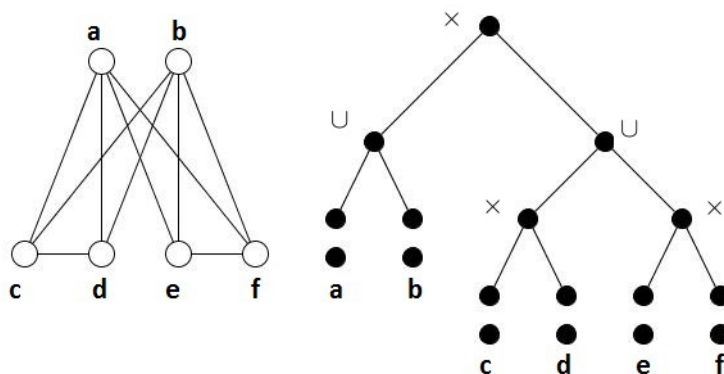
$$\begin{aligned} |V_0| &= 4, \\ |E_0| &= 6, \end{aligned}$$

3.6 Kografy

Kografy jsou grafy, které jsou vytvořeny z izolovaného uzlu, tedy z K_1 za pomoci operace sjednocení grafů nebo operace tzv. křížového součinu grafů definované níže. Jsou nejmenší třídou grafů, která je uzavřená na doplněk a sjednocení grafů, a současně obsahuje K_1 [1]. Tedy doplněk jakéhokoli kografu je také kograf a sjednocení dvou kografů je také kograf. Kografy byly popsány nezávisle několika autory již v 70. letech 20. století. Nejčastěji jsou zmiňovány Lerchs (1971) [21], Seinsche (1974) [22], Sumner (1974) [23] a Jung (1978) [24]. Mají jednoduchý stromový rozklad, reprezentován v podobě označeného stromu, který se dá využít k efektivnímu řešení některých algoritmických problémů, které jsou složitější na obecných grafech. Například rozeznání jestli jsou dva kografy izomorfní je možné v lineárním čase díky porovnání, zda jsou jejich označené stromy izomorfní.

Induktivní definice kografů

- 1) Izolovaný uzel je kograf.
- 2) Pokud G_1 a G_2 jsou kografy, potom $G = G_1 \cup G_2$ je kograf.
- 3) Pokud G_1 a G_2 jsou kografy, potom $G = G_1 \otimes G_2$, provedeno jako sjednocení vrcholů G_1 a G_2 a přidání všech hran e , tak že $\rho(e) = (v_1, v_2)$, kde $v_1 \in V_1$ a $v_2 \in V_2$.



Obrázek 3.11: Na levém obrázku je příklad kografu a na pravém obrázku je jeho označený strom, tedy ukázka, jak byl tento kograf konstruován. [1]

Kografy splňují několik podmínek, které je ekvivalentně definují [25]:

- 1) V každém indukovaném podgrafu H grafu G je průnik jakékoliv maximální kliky a jakékoliv maximální nezávislé množiny právě jeden vrchol.

- 2) Každý netriviální podgraf grafu G má alespoň jednu dvojici uzlů, která má stejnou množinu sousedů.
- 3) Doplněk každého netriviálního souvislého podgrafu grafu G je nesouvislý.
- 4) Každý souvislý podgraf grafu G má průměr nejvýše dva.
- 5) G neobsahuje cestu délky čtyři jako indukovaný podgraf.

Počet neizomorfních kografů na n uzlech vyjádřený jako funkce $a(n)$ se asymptoticky blíží číslu $\frac{3,561^n}{n^{3/2}} \cdot 0,2$ [26] a pro prvních několik n je vyčíslen takto: $a(1) = 1$, $a(2) = 2$, $a(3) = 4$, $a(4) = 10$, $a(5) = 24$, $a(6) = 66$, $a(7) = 180$, $a(8) = 522$ a $a(9) = 1532$. Jak je vidět, také platí, že pro každé n větší než jedna je počet kografů vždy sudý [25]. Podobně jako v kapitole 3.1 uvádíme tabulku 3.6 s přehledem vlastností kografů převzatý z [27].

| Problém | Složitost |
|----------------------------------|-----------|
| Průměr grafu | omezená |
| Chromatické číslo | neomezená |
| Klikovost grafu | neomezená |
| Nezávislost grafu | neomezená |
| Dominance grafu | neomezená |
| Stromová šířka | neomezená |
| Izomorfismus dvou grafů | lineární |
| Existence hamiltonovské kružnice | lineární |
| Zařazení do dané třídy | lineární |

Tabulka 3.6: Přehled složitostí nalezení vlastností pro kografy.

Na začátku této kapitoly jsme definovali dvě operace pro konstrukci kografů – sjednocení a křížový součin. Operace sjednocení je definovaná v kapitole o stromech 1 včetně vyjádření incidence. Zde se zaměříme pouze na popis incidence pro operaci křížového součinu.

Mějme graf $G_1 \otimes G_2$ vytvořený ze dvou kografů kde $G_1 = \langle E_1, V_1, \rho_1 \rangle$ a $G_2 = \langle E_2, V_2, \rho_2 \rangle$ a je definovaná takto:

$$\begin{aligned}
 V &= V_1 \cup V_2, \\
 E &= E_1 \cup E_2 \cup X, \\
 \rho &= \rho_1 \cup \rho_2 \cup (todo),
 \end{aligned}$$

pro $\rho(e)$ platí:

$$\rho(e) = \begin{cases} \rho_1(e), & \text{pokud } e \in E_1, \\ \rho_2(e), & \text{pokud } e \in E_2. \end{cases}$$

3. REKURZIVNĚ KONSTRUOVATELNÉ GRAFY

Zkoumáním této třídy jsme našli rekurentní rovnice, kterými je možné popsat přesný počet uzlů a hran kografu G , který vznikne z grafů G_1 a G_2 , použitím operace \cup a \otimes . Rekurentní rovnice pro operaci \cup jsou následující:

$$\begin{aligned} G &\stackrel{\text{def}}{=} G_1 \cup G_2 \text{ viz její definice} \\ |V| &= |V_1| + |V_2| \\ |E| &= |E_1| + |E_2|, \end{aligned}$$

kde základním grafem je izolovaný uzel. Pro něj platí:

$$\begin{aligned} |V_0| &= 1, \\ |E_0| &= 0. \end{aligned}$$

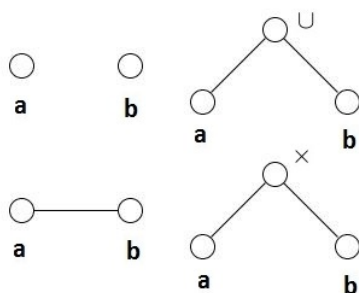
Rekurentní rovnice pro operaci \otimes jsou následující:

$$\begin{aligned} G &\stackrel{\text{def}}{=} G_1 \otimes G_2 \text{ viz její definice} \\ |V| &= |V_1| + |V_2| \\ |E| &= |E_1| + |E_2| + |V_1| \cdot |V_2|, \end{aligned}$$

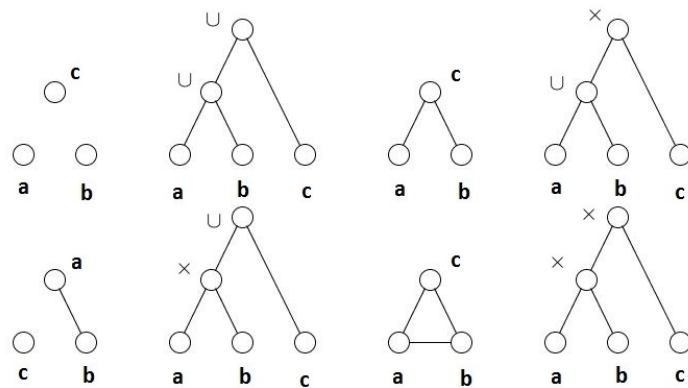
kde základním grafem je izolovaný uzel. Pro něj platí:

$$\begin{aligned} |V_0| &= 1, \\ |E_0| &= 0. \end{aligned}$$

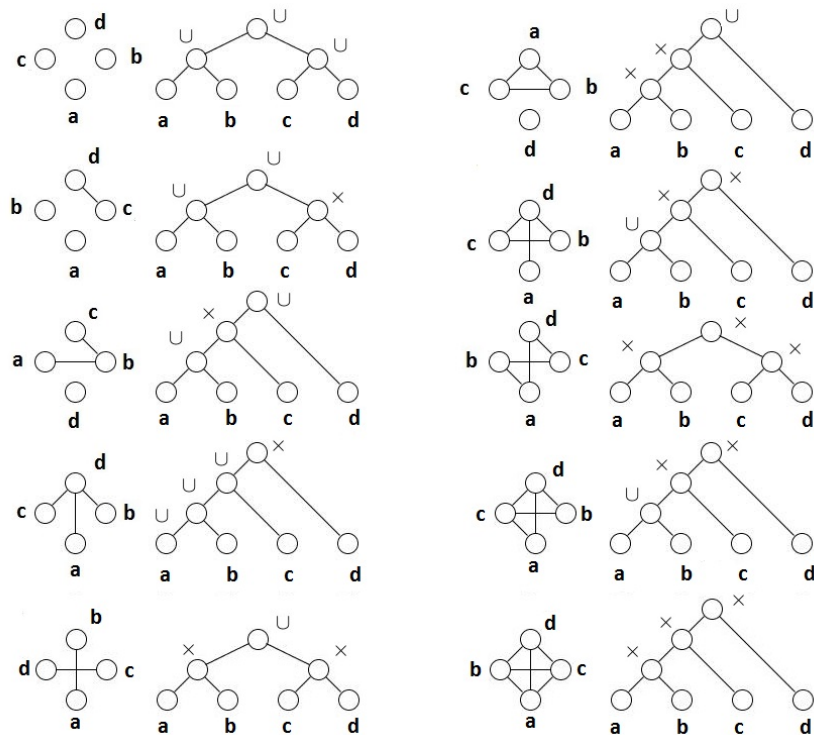
Jako ukázky jsme vybrali kografy, které je možné vytvořit pomocí kombinací operací sjednocení a křížového součinu na dvou uzlech, obrázek 3.12, třech uzlech 3.13 a čtyřech uzlech 3.14.



Obrázek 3.12: Ukázky kografů, které je možné vytvořit na dvou uzlech.



Obrázek 3.13: Ukázky kografů, které je možné vytvořit na třech uzlech.



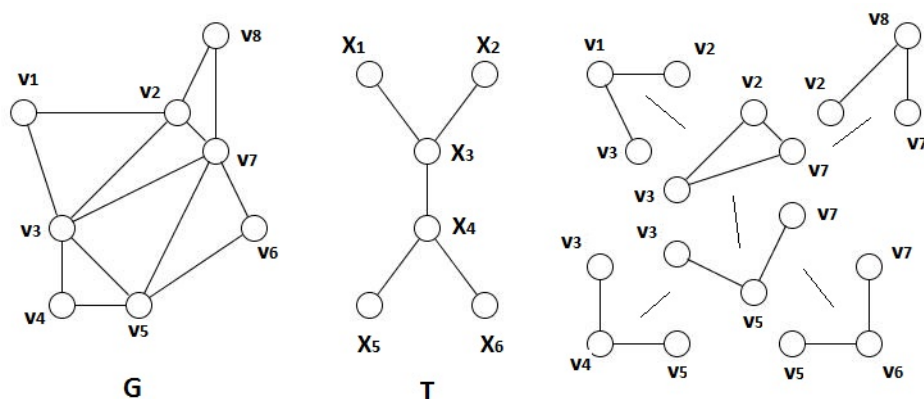
Obrázek 3.14: Ukázky kografů, které je možné vytvořit na čtyřech uzlech.

3.7 Treewidth- k grafy

Třída treewidth- k grafů je důležitou třídou této klasifikace neboť je zodpovědná za vznik této klasifikace [1]. Od ostatních uvedených tříd se však liší, neboť nemá definovaný induktivní postup konstrukce. Grafy do této klasifikace zařazujeme dle stromové šířky, kterou zkoumáme na zkonstruovaném grafu.

3. REKURZIVNĚ KONSTRUOVATELNÉ GRAFY

Koncept stromové šířky byl původně představen Umbertem Bertelem a Francescem Brioschim v roce 1972 pod názvem *dimenze* [29]. Dále byla znovu použita Rudolfem Halinem v roce 1976 při zkoumání společných vlastností s jiným parametrem grafu, tzv. Hadwigerovým číslem [30]. Později byla ještě jednou popsána Neilem Robertsonem a Paulem Seymourem v roce 1984 a od té doby byla zkoumána ještě mnohokrát (uvedme například [31, 32, 33]). Grafy do této třídy zařazujeme na základě šířky dané stromové dekompozice definované v 1, která se měří jako velikost největší množiny v daném stromové rozkladu bez jedné, tj. $\max_{i \in I} \{|X_i| - 1\}$ pro dané I . Stromová šířka grafu G je minimální šířka vybraná přes všechny stromové dekompozice grafu G . Graf je *treewidth- k* pokud jeho stromová šířka je nejvýše k . Triviálně každý graf G má stromovou dekompozici na jednotlivé uzly (vlastně reprezentuje graf G samotný - *treewidth-1*). Nás ale zajímá stromová dekompozice grafu, kde indexová množina I je co nejmenší. Bohužel určení, zda stromová šířka daného grafu je nejvýše dané číslo k , je obecně NP-úplný problém. Pro některé grafy v této práci definované však umíme stromovou šířku najít i v lineárním čase. Takové uvádíme v tabulce 3.7. V tabulce 3.8 pak uvádíme některé známé stromové šířky.



Obrázek 3.15: Obrázek zobrazuje ukázkou stromové dekompozice. Pro graf G na levém obrázku je jedna z možných množin uzlů tato: $X_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$, $X_2 = \{v_2, v_7, v_8\}$, $X_3 = \{v_2, v_3, v_7\}$, $X_4 = \{v_3, v_5, v_7\}$, $X_5 = \{v_3, v_4, v_5\}$, $X_6 = \{v_5, v_6, v_7\}$. Odpovídající strom T je na obrázku uprostřed a na obrázku vpravo jsou zobrazeny příslušné podgrafy grafu G indukovaný stanovenými dvojicemi $(\{X_i\}, T)$. Navíc G má stromovou šířku 2, a je to sériově-paralelní graf. [1]

| Typ grafu | Čas nalezení stromové šířky |
|------------------------------------|-----------------------------|
| Stromy | lineární |
| Sériově-paralelní grafy | lineární |
| Halinovy grafy | lineární |
| Kografy | polynomiální |
| Bipartitní grafy | NP-úplné |
| Kružnice | polynomiální |
| Grafy se stromovou šířkou $\leq k$ | lineární |

Tabulka 3.7: Odhady nalezení stromových šířek.

| Typ grafu | Stromová šířka |
|---------------------------------|----------------|
| Stromy | 1 |
| Halinovy grafy | ≤ 3 |
| Sériově-paralelní grafy | 2 |
| Úplný graf s n uzly K_n | $n - 1$ |
| Úplný bipartitní graf $K_{m,n}$ | $\min(m, n)$ |

Tabulka 3.8: Některé známé stromové šířky.

Podstatným důvodem proč se zabývat stromovou dekompozicí je, že pokud máme stromovou dekompozici grafu a jeho stromovou šířku ohraničenou nějakou konstantou k , je možné řešit problémy, které jsou složité pro libovolné grafy, v polynomiálním nebo lineárním čase [34]. Jak jsme již zmiňovali v kapitole parciálních k -stromů 3.4, je zde i vztah mezi treewidth- k grafy a parciálními k -stromy. Platí, že graf má stromovou šířku nejvýše k , právě když je to parciální k -strom [1]. Tento vztah zjednodušuje řešení některých NP-úplných problémů pro treewidth- k grafy.

Jak jsme již zmiňovali v úvodu této kapitoly, tato třída se od ostatních liší, neboť pro ni nejsou definované žádné konstrukční operace, stromová šířka se zjišťuje již na výsledném grafu. Z tohoto důvodu jsme pro tuto třídu nehledali rekurentní rovnice.

Závěr

Zadáním práce bylo seznámit se s rekurentně zadanými grafy probíranými v předmětu BI-GRA. Dále se seznámit s třídami rekurzivně konstruovatelných [1] grafů a následně zjistit, zda k vybraným třídám rekurzivně konstruovatelných grafů je možné najít odpovídající rekurentní rovnice, stejně jako u rekurentních grafů. Rekurentní grafy jsme představili a vybrali ukázky konkrétních grafů i s příslušnými rekurentními rovnicemi. Z tříd rekurzivně konstruovatelných grafů jsme si vybrali sedm tříd, které jsme zanalyzovali a rekurzivní konstrukce těchto grafů jsme popsali příslušnými rekurentními rovnicemi. Tyto vybrané třídy jsou stromy, sériově-paralelní grafy, k -stromy rozšířené o související parciální k -stromy, Halinovy grafy, kografy a treewidth- k grafy.

Navíc jsme uvedli přehled konstrukcí jednoduchých grafů z vybraných tříd. Grafy v přehledu jsme konstruovali z těch nejjednodušších základních grafů, kterými byly buď triviální graf nebo K_2 , a ukázali jsme rozdílnost výsledných grafů na základě jednotlivých operací.

Pokračováním mé práce by mohla být analýza dalších tříd rekurzivně konstruovatelných grafů a prozkoumání, zda i pro tyto další třídy je možné nalézt odpovídající rekurentní rovnice. Zajímavé by dále bylo zkoumat, do které z tříd rekurzivně konstruovatelných grafů by bylo možné zařadit rekurentní grafy z BI-GRA.

Také by bylo možné zabývat se algoritmy a jejich případným zrychlením pro některé třídy v [1]. Dalším pokračováním této práce by mohla být analýza složitějších vlastností tříd grafů z této klasifikace.

Literatura

- [1] GROSS, J. L.; YELLEN, J.; ZHANG, P. *Handbook of Graph Theory*. 2.vydání. Florida-Boca Raton: CRC Press, 2014. ISBN 978-1-4398-8018-0
- [2] KOLÁŘ, J. *Teoretická informatika*. Praha: ČVUT, 2009. ISBN 978-80-01-04331-8
- [3] Graph Theory. Wolfram Researcher, Inc. 1999–2016. [cit. 2016-05-11] Dostupné z <http://mathworld.wolfram.com/topics/GraphTheory.html>.
- [4] Graphclass: Tree. [cit. 2017-05-07] Dostupné z http://www.graphclasses.org/classes/gc_342.html
- [5] TAKAMIZAWA, K.; NISHIZEKI, T.; SAITO, N. *Linear-Time Computability of Combinatorial Problems on Series-Parallel Graphs*. Journal of the Association for Computing Machinery, Vol. 29, No.3, 1982, p. 623–641.
- [6] Graphclass: Series-parallel. [cit. 2017-05-07] Dostupné z http://www.graphclasses.org/classes/gc_275.html
- [7] SHINODA, S.; CHEN W. K.; YASUDA, T.; KAJITANI Y.; MAYEDA W. *A necessary and sufficient condition for any tree of a connected graph to be a DFS-tree of one of its 2-isomorphic Graphs*. IEEE International Symposium on Circuits and Systems, New Orleans, LA, Vol. 4, 1990, p. 2841–2844.
- [8] SYSLO, M. *Series-parallel graphs and depth-first search trees*. IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. 31, no. 12, 1984, p. 1029–1033.
- [9] PROSKUROWSKI, A.; SYSLOT, M. M. *Volume 7 of the series Computing Supplementum: Efficient Computations in Tree-Like Graphs*. 1990, p. 1–15.

- [10] ZENG, D.; YIN J.. *On a characterization of k -trees*. Czechoslovak Mathematical Journal, 2015. 65(140), 361–365.
- [11] FOWLER, T.; GESSEL, I.; LABELLE, P.; LEROUX, P. *The specification of 2-trees*, Adv. in Appl. Math. 28(2)(2002) 145–168.
- [12] GAINER-DEWAR, A. Γ -species and the enumeration of k -trees, Electron. J. Combin. 19(4)(2012) p. 45.
- [13] GAINER-DEWAR A.; GESSEL I. M. *Counting unlabeled k -trees*. Journal of Combinatorial Theory, Series A, 2014. 177–193.
- [14] BOROWIECKA-OLSZEWSKA, M.; DRGAS-BURCHARDT, E.; HALUSZCZAK, M. *On the structure and deficiency of k -trees with bounded degree*. Journal Discrete Applied Mathematics, Volume 201 Issue C, 2016, 24–37.
- [15] Graphclass: K-tree, fixed k . [cit. 2017-05-07] Dostupné z http://www.graphclasses.org/classes/gc_594.html
- [16] Graphclass: Partial k -tree, fixed k . [cit. 2017-05-07] Dostupné z http://www.graphclasses.org/classes/gc_595.html
- [17] Halin Graph. Wolfram Researcher, Inc. 1999–2017. [cit. 2017-05-07] Dostupné z <http://mathworld.wolfram.com/HalinGraph.html>
- [18] Graphclass: Halin. [cit. 2017-05-07] Dostupné z http://www.graphclasses.org/classes/gc_198.html
- [19] EPSTEIN, D.; *Simple Recognition of Halin Graphs and Their Generalizations*. Journal of Graph Algorithms and Applications, 20(2), 2016, p. 323–346.
- [20] Goldner-Harary Graph. Wolfram Researcher, Inc. 1999–2016. [cit. 2016-05-11] Dostupné z <http://mathworld.wolfram.com/Goldner-HararyGraph.html>.
- [21] LERCHS, H. *On cliques and kernels*. Tech. Report, Dept. of Comp. Sci. Univ. of Toronto. 1971.
- [22] SEINSCHKE, D. *On a property of the class of n -colorable graphs*, Journal of Combinatorial Theory, Series B, 16 (2). 1974. 191—193.
- [23] SUMNER, D. P. *Dacey graphs*. Journal of the Australian Mathematical Society, 18 (4). 1974.
- [24] JUNG, H. A. *On a class of posets and the corresponding comparability graphs*. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 24 (2). 1978. p. 125—133.

-
- [25] Cograph. Wolfram Researcher, Inc. 1999-2017. [cit. 2017-05-07] Dostupné z <http://mathworld.wolfram.com/Cograph.html>
- [26] The On-line Encyclopedia of integer sequences. [cit. 2017-05-09] Dostupné z <http://oeis.org/A000084>
- [27] Graphclass: cographs. [cit. 2017-05-07] Dostupné z http://www.graphclasses.org/classes/gc_151.html
- [28] Treewidth. Wolfram Researcher, Inc. 1999-2017. [cit. 2017-03-04] Dostupné z <http://mathworld.wolfram.com/Treewidth.html>.
- [29] BERTELÉ, U.; BRIOSCHI, F. *Nonserial Dynamic Programming*. Academic Press, 1972. ISBN 0-12-093450-7
- [30] HALIN, R. *S-functions for graphs*. Journal of Geometry 8, 1976, 171–186.
- [31] ROBERTSON, N.; SEYMOUR P. D. *Graph minors. II. Algorithmic aspects of treewidth*. J.Algorithms 7, 1986, p. 309–322.
- [32] ROBERTSON, N.; SEYMOUR P. D. *Graph minors. V. Excluding a planar graph*. J. Combin, Theory Series B 41, 1986. 92–114.
- [33] ROBERTSON, N.; SEYMOUR P. D. *Graph minors. X. Obstructions to tree-decomposition*. J. Combin, Theory Series B 89. 2003. 43–76.
- [34] BODLAENDER, H. L. *A tourist guide through treewidth*. Developments in Theoretical Science. Vol. 1, 1994.

Seznam použitých značení

- * označení pro vytvoření k kopií grafu
- \oplus_1 spojení dvou stromů, $r = r_1$
- \oplus_2 spojení dvou stromů, $r = r_2$
- \odot_s sériová operace pro sériově-paralelní grafy
- \odot_p paralelní operace pro sériově-paralelní grafy
- \odot_z zavírací operace pro sériově-paralelní grafy
- \oslash operace pro k -stromy, připojení jednoho izolovaného uzlu k hranami
- \otimes operace křížový součin pro kografy
- \oplus_h operace pro zvětšení Halinova grafu
- K_k Označení pro úplný graf s k uzly.
- $K_{n,m}$ Označení pro úplný bipartitní graf s n uzly v jedné a m uzly druhé v partitě.

Obsah přiloženého CD

| | |
|--------------------------------------|--|
| readme.txt..... | stručný popis obsahu CD |
| src | |
| ├ BP_Štěpánková_Anežka_2017.zdrojová | forma práce ve formátu L ^A T _E X |
| ├ picturec..... | obrázky k práci |
| text | text práce |
| ├ BP_Štěpánková_Anežka_2017.pdf..... | text práce ve formátu PDF |
| └ ZZP.pdf | zadání práce ve formátu PDF |