



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

---

Fakulta stavební  
Katedra betonových a zděných konstrukcí

## **KROUCENÍ ŽELEZOBETONOVÝCH PRVKŮ**

## **TORSION OF REINFORCED CONCRETE MEMBERS**

Bakalářská práce

Studijní program: Stavební inženýrství  
Studijní obor: Konstrukce pozemních staveb

Vedoucí práce: Doc. Ing. Jitka Vašková, CSc.

Jan Vesecký

---

Praha 2017







## ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

### I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

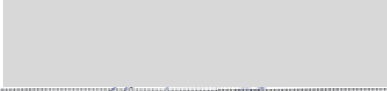
Příjmení: <u>Vesecký</u>	Jméno: <u>Jan</u>	Osobní číslo: <u>424438</u>
Zadávací katedra: <u>K133 - Katedra betonových a zděných konstrukcí</u>		
Studijní program: <u>SI - Stavební inženýrství</u>		
Studijní obor: <u>C - Konstrukce pozemních staveb</u>		

### II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce: <u>Kroucení železobetonových prvků</u>	
Název bakalářské práce anglicky: <u>Torsion of Reinforced Concrete Members</u>	
Pokyny pro vypracování: <ul style="list-style-type: none"><li>- příklady prvků železobetonových konstrukcí, které jsou typicky namáhány kroucením</li><li>- postupy návrhu prvků namáhaných kroucením včetně aplikace výpočetních programů</li><li>- analýza vlivu kroucení na napjatost včetně nesymetrických průřezů</li><li>- výsledky a vlivy na vyztužování prvků</li></ul>	
Seznam doporučené literatury:	
Jméno vedoucího bakalářské práce: <u>doc. Ing. Jitka Vašková, CSc.</u>	
Datum zadání bakalářské práce: <u>20.2.2017</u>	Termín odevzdání bakalářské práce: <u>28.5.2017</u> <small>Údaj uveďte v souladu s datem v časovém plánu příslušného ak. roku</small>
	
<u>Podpis vedoucího práce</u>	<u>Podpis vedoucího katedry</u>

### III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

*Beru na vědomí, že jsem povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je nutné uvést v bakalářské práci a při citování postupovat v souladu s metodickou příručkou ČVUT „Jak psát vysokoškolské závěrečné práce“ a metodickým pokynem ČVUT „O dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací“.*

<u>20.2.2017</u>	
<u>Datum převzetí zadání</u>	<u>Podpis studenta(ky)</u>





## PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

V Praze dne 29. 05. 2017

.....

Jan Vesecký



## PODĚKOVÁNÍ

Děkuji paní Doc. Ing. Jitce Vaškové CSc. za její odborné vedení nejenom v průběhu zpracování bakalářské práce, za její vstřícný přístup, cenné rady a náměty.

Dále chci poděkovat svým rodičům za jejich velkou podporu a trpělivost v průběhu celého studia.

V neposlední řadě bych rád poděkoval všem svým přátelům za to, že při mě stáli i v těžkých chvílích a vždy mi pomohli vidět věci z lepší stránky.



## ABSTRAKT

Práce je zaměřena na problematiku kroucení železobetonových prutových prvků. V úvodu jsou popsány typické případy, při kterých ke kroucení dochází. Dále je podrobněji popsáno několik normových návrhových postupů a na příkladech porovnány hodnoty momentů únosnosti, které jednotlivé postupy udávají. Pozornost je věnována jednotlivým fázím chování kroucených železobetonových prvků a optimální volbě úhlu sklonu tlakových diagonál s ohledem na požadovanou plochu výztuže. Pomocí zjednodušeného kritéria je proveden odhad vlivu vázaného kroucení na celkovou napjatost.

Práce se zároveň zabývá analýzou kroucení ve výpočetních programech, především numerickým výpočtem průřezových charakteristik, rozkladem na složky volného a vázaného kroucení a modelováním prvků s nesymetrickým průřezem s rozdílnou polohou těžiště a středu smyku.

Pro doplnění jsou v závěru formou příloh uvedeny vzorové výpočty podle jednotlivých návrhových postupů. Informativně je zároveň provedeno odvození analytického vztahu modulu průřezu v kroucení obdélníku.

## KLÍČOVÁ SLOVA

kroucení, železobetonové prvky, návrhové postupy, příhradová analogie, nesymetrické průřezy, střed smyku, deplanace, numerická analýza



## **ABSTRACT**

The thesis deals with the issue of torsion of reinforced concrete members. In the introduction, there are described typical cases, where torsion occur. In addition, several standard design procedures are described in detail, and the values of the torsional strength given by each procedure are presented and compared in the examples. Attention is paid to individual phases of the behavior of reinforced concrete members subjected to torsion and optimal choice of angle of inclination of the compression diagonals with respect to minimum area of reinforcement required. Using a simplified criterion, an estimate of the effect of warping torsion on the overall strain is made.

The work also deals with the analysis of torsion in computational programs, mainly numerical computation of cross-sectional characteristics, decomposition of the uniform and warping torsion and modeling of elements with asymmetric cross-section with different position of center of gravity and shear center.

In addition, in the form of the annexes, the sample calculations are presented for each design procedure. Simultaneously, the equation for torsional section modulus of the rectangle is derived.

## **KEYWORDS**

torsion, reinforced concrete members, design procedures, space truss analogy, asymmetric cross-sections, shear center, warping, numerical analysis





# OBSAH

PROHLÁŠENÍ .....	5
PODĚKOVÁNÍ .....	7
ABSTRAKT .....	9
OBSAH .....	13
SEZNAM ZKRATEK .....	16
TERMÍNY A DEFINICE .....	16
ZNAČKY .....	18
<b>1 ÚVOD.....</b>	<b>23</b>
1.1 Předmluva.....	23
1.2 Obsah práce .....	23
1.3 Motivace .....	24
1.4 Cíle bakalářské práce.....	25
1.5 Komentář ke značení veličin a materiálovým vlastnostem .....	25
<b>2 ŽELEZOBETONOVÉ PRVKY NAMÁHANÉ KROUCENÍM .....</b>	<b>27</b>
2.1 Monolitické prvky pozemních staveb .....	27
2.1.1 Krajní stropní průvlaky .....	27
2.1.2 Průvlak s konzolovou deskou .....	29
2.1.3 Nesymetricky zatížené vnitřní průvlaky .....	29
2.1.4 Schodiště se středovou schodnicí .....	30
2.1.5 Nesymetricky umístěné stěnové jádro.....	30
2.2 Prefabrikované prvky pozemních staveb .....	31
2.2.1 Krajní stropní průvlaky s ozubem .....	31
2.2.2 Nesymetricky zatížené vnitřní průvlaky .....	32
2.2.3 Průvlak s nepřímo uloženou konzolou .....	33
2.2.4 Půdorysně zakřivený nosník .....	33
2.3 Mostní a inženýrské konstrukce .....	34
2.3.1 Most zatížený dopravou v jednom pruhu.....	34
2.3.2 Půdorysně zakřivený předpjatý most .....	35
2.4 Běžné průběhy vnitřního krouticího momentu.....	35
2.4.1 Konzoly.....	36
2.4.2 Nosníky.....	36
<b>3 NÁVRHOVÉ POSTUPY PRO KROUCENÉ ŽELEZOBETONOVÉ PRVKY.....</b>	<b>39</b>
3.1 Kroucení prutových prvků z pohledu teorie pružnosti.....	40
3.1.1 Základní veličiny pro analýzu kroucení .....	41
3.1.2 Rozdělení průřezů podle chování při kroucení .....	41
3.1.3 Volné kroucení.....	43
3.1.4 Deplanační funkce - $\psi$ .....	44
3.1.5 Moment tuhosti ve volném kroucení - $I_t$ .....	44
3.1.6 Modul průřezu v kroucení - $W_t$ .....	48
3.1.7 Vázané kroucení .....	51
3.1.8 Výsečová souřadnice - $\omega$ .....	51
3.1.9 Střed smyku - $C$ .....	52
3.1.10 Výsečový moment setrvačnosti - $I_\omega$ .....	52
3.1.11 Výpočet napětí od vázaného kroucení.....	52
3.1.12 Nezávislost průřezových charakteristik na natočení souřadného systému... 53	53

3.2	Chování kroucených železobetonových prvků.....	54
3.2.1	Fáze 1: plný průřez bez trhlin .....	55
3.2.2	Fáze 2: průřez s trhlínami .....	55
3.2.3	Fáze 3: zplastizování výztuže .....	56
3.3	NP1: Příhradová analogie .....	56
3.3.1	Základní pravidla pro příhradové modely .....	56
3.3.2	Model pro prvek namáhaný čistým kroucením .....	57
3.3.3	Krouticí moment na mezi kluzu výztuže - $T_{Rd,s}$ .....	59
3.3.4	Omezení modelu a závěrečné poznámky .....	60
3.4	NP2: ČSN EN 1992-1-1.....	60
3.4.1	Úhel sklonu tlakových diagonál - $\theta$ .....	61
3.4.2	Návrhová pevnost betonu v tahu - $f_{ctd}$ .....	62
3.4.3	Návrhová pevnost betonu v tlaku - $f_{cd}$ .....	62
3.4.4	Návrhová mez kluzu podélné/smykové výztuže - $f_{yd}/f_{ywd}$ .....	63
3.4.5	Součinitel stavu napětí v tlačném pásu - $\alpha_{cw}$ .....	63
3.4.6	Analogický tenkostěnný dutý průřez.....	64
3.4.7	Limitní rozměry obdélníkového průřezu .....	65
3.4.8	Krouticí moment při vzniku trhlin - $T_{Rd,c}$ .....	66
3.4.9	Krouticí moment na mezi únosnosti - $T_{Rd,max}$ .....	67
3.4.10	Krouticí moment na mezi kluzu smykové výztuže - $T_{Rd,s}$ .....	68
3.4.11	Podélná výztuž na kroucení - $\Sigma A_{sl}$ .....	69
3.4.12	Konstrukční zásady pro výztuž na kroucení.....	70
3.4.13	Souhrn návrhu kroucených prvků dle EC2-1-1 .....	73
3.4.14	Vázané kroucení dle EC2-1-1 .....	73
3.5	NP3: ACI 318-11 .....	73
3.5.1	Redukční součinitele .....	74
3.5.2	Převod jednotek.....	74
3.5.3	Úhel sklonu tlakových diagonál - $\theta$ .....	75
3.5.4	Návrhová pevnost betonu v tahu dle ACI 318-11 .....	75
3.5.5	Ekvivalentní tenkostěnná trubka.....	76
3.5.6	Krouticí moment při vzniku trhlin - $T_{Rd,c}$ .....	77
3.5.7	Krouticí moment na mezi únosnosti - $T_{Rd,max}$ .....	77
3.5.8	Krouticí moment na mezi kluzu smykové výztuže - $T_{Rd,s}$ .....	78
3.5.9	Podélná výztuž na kroucení - $\Sigma A_{sl}$ .....	78
3.5.10	Souhrn návrhu kroucených prvků dle ACI 813-11.....	79
3.5.11	Doplňková pravidla .....	79
3.6	NP4: ČSN 73 1201.....	80
3.6.1	Modifikační součinitele .....	80
3.6.2	Krouticí moment při vzniku trhlin - $T_{Rd,c}$ .....	80
3.6.3	Krouticí moment na mezi únosnosti - $T_{Rd,max}$ .....	81
3.6.4	Ekvivalentní krouticí moment od posouvající síly - $T_{tq}$ .....	81
3.6.5	Krouticí moment na mezi kluzu výztuže - $T_{Rd,s}$ .....	82
3.6.6	Úhel sklonu tlakových diagonál - $\theta$ .....	82
3.6.7	Souhrn návrhu kroucených prvků dle ČSN 73 1201 .....	83
3.7	Další návrhové postupy .....	83
3.7.1	Teorie zkoseného ohybu (skew bending theory).....	83
3.7.2	Účinný vnější plášť (effective outer shell).....	84
3.8	Vázané kroucení dle ČSN EN 1992-2.....	85
3.8.1	Princip výpočtu dle sendvičového modelu.....	85
3.8.2	Zjednodušený sendvičový model pro vázané kroucení .....	86

3.9	Kroucení dle ČSN EN 1993-1-1 (informativní) .....	86
3.9.1	Parametr tuhosti prutu při kroucení - $K_t$ .....	87
<b>4</b>	<b>POROVNÁNÍ NÁVRHOVÝCH POSTUPŮ.....</b>	<b>89</b>
4.1	Odhad vlivu vázaného kroucení.....	89
4.1.1	Parametr tuhosti prutu při kroucení běžných železobetonových prvků .....	89
4.2	Únosnost na mezi vzniku trhlin.....	91
4.2.1	Porovnání EC2-1-1 s teorií pružnosti .....	92
4.3	Návrh a posouzení výztuže pro prvek obdélníkového průřezu .....	93
4.3.1	Návrh výztuže .....	94
4.3.2	Posouzení průřezu a výztuže, porovnání výsledků.....	95
4.4	Optimalizace volby úhlu $\theta$ .....	96
4.4.1	Výpočet bez zohlednění kotevních délek .....	97
4.4.2	Výpočet se zohledněním kotevních délek.....	98
<b>5</b>	<b>ANALÝZA KROUCENÍ VE VÝPOČETNÍCH PROGRAMECH .....</b>	<b>101</b>
5.1	Numerický výpočet průřezových charakteristik a přesnost řešení .....	101
5.1.1	Kruhový průřez .....	102
5.1.2	Čtvercový průřez.....	104
5.1.3	Obdélníkový průřez ( $h/b = 2,5$ ).....	106
5.2	Uvážení deplanace ve výpočtu.....	108
5.2.1	7. stupeň volnosti.....	108
5.2.2	Rozklad celkového krouticího momentu.....	109
5.3	Modelování prvků s nesympetrickým průřezem .....	110
5.3.1	Těžiště a střed smyku průřezu tvaru L .....	110
5.3.2	Posun systémové osy prvku .....	112
5.3.3	Poznámka k průřezovým charakteristikám .....	113
<b>6</b>	<b>ZÁVĚR.....</b>	<b>115</b>
6.1	Zhodnocení splnění cílů práce.....	115
6.2	Souhrn nejdůležitějších poznatků .....	116
6.3	Náměty na rozšíření práce .....	116
<b>PŘÍLOHA A</b>	<b>Výztuž na kroucení pro obdélníkový průřez dle EC2-1-1 .....</b>	<b>117</b>
<b>PŘÍLOHA B</b>	<b>Posouzení obdélníkového průřezu dle ACI 318-11 .....</b>	<b>121</b>
<b>PŘÍLOHA C</b>	<b>Posouzení obdélníkového průřezu dle ČSN 73 1201 .....</b>	<b>124</b>
<b>PŘÍLOHA D</b>	<b>Posouzení obdélníkového průřezu dle příhradové analogie .....</b>	<b>127</b>
<b>PŘÍLOHA E</b>	<b>Vztahy pro ATDP základních geometrických útvarů .....</b>	<b>129</b>
<b>PŘÍLOHA F</b>	<b>Odvození vztahu pro modul průřezu v kroucení obdélníku.....</b>	<b>132</b>
LITERATURA.....		135
SOFTWARE .....		137

## SEZNAM ZKRATEK

ATDP	analogický tenkostěnný dutý průřez
EC2	ČSN EN 1992
EC2-1-1	ČSN EN 1992-1-1 ed. 2
EC2-2	ČSN EN 1992-2
ACI	American Concrete Institute
MKP	metoda konečných prvků
NP	návrhový postup

## TERMÍNY A DEFINICE

### ČISTÉ KROUCENÍ

Namáhání prvku výhradně krouticím momentem bez vlivu ostatních namáhání.

### VOLNÉ KROUCENÍ

Kroucení, při kterém není bráněno deplanaci.

### VÁZANÉ KROUCENÍ

Kroucení, při kterém je bráněno deplanaci.

### DEPLANACE

Ztráta rovinnosti průřezu.

### ÚZKÝ OBDÉLNÍK

Obdélník, pro který platí přibližně  $h/b \geq 2$ . V takovém případě lze uvažovat zjednodušené vztahy pro výpočet tuhosti v kroucení.

### TENKÝ OBDÉLNÍK

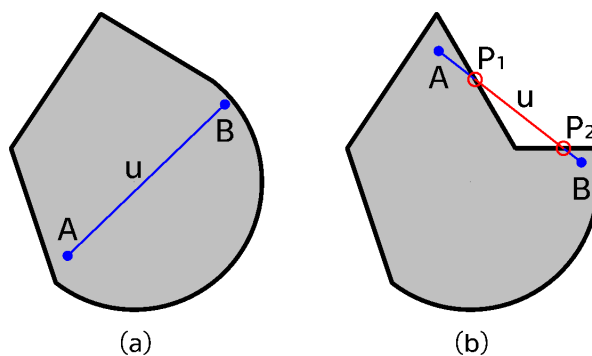
Obdélník, pro který platí přibližně  $h/b \geq 10$ . V takovém případě lze uvažovat velmi zjednodušené vztahy pro výpočet tuhosti v kroucení.

### KONVEXNÍ PRŮŘEZ

Průřez, pro který platí, že žádná úsečka spojující 2 libovolné vnitřní body neprotne hranice tohoto průřezu, viz obr. 1.

### NEKONVEXNÍ PRŮŘEZ

Průřez, pro který některé úsečky spojující 2 libovolné vnitřní body protnou hranice tohoto průřezu, viz obr. 1.



obr. 1 - typy průřezů; (a) konvexní, (b) nekonvexní

### PŘEVYZTUŽENÝ PRVEK

Železobetonový prvek s vysokým stupněm vyztužení, u něhož dojde k drcení betonu před dosažením meze kluzu výztuže.

### TORZNÍ

Jiné označení pro výraz krouticí.

## ZNAČKY

### PÍSMENA LATINSKÉ ABECEDY

A	$m^2$	celková plocha průřezu uvnitř vnějšího okraje, včetně ploch vnitřních otvorů
$A_k$	$m^2$	plocha omezená střednicemi spojených stěn průřezu, včetně ploch vnitřních otvorů
	$m^2$	plocha uzavřená spojnici os podélných prutů
	$m^2$	plocha uzavřená smykovým tokem
	$m^2$	plocha funkčního jádra průřezu
$A_{k,0}$	$m^2$	plocha ohraničená osou vnějších třmíneků
$A_{sl}$	$m^2$	plocha podélné výztuže
$\Sigma A_{sl}$	$m^2$	celková průřezová plocha podélné výztuže na kroucení
$\Sigma A_{sl,req}$	$m^2$	požadovaná celková průřezová plocha podélné výztuže na kroucení
$\Sigma A_{sl,1}$	$m^2$	průřezová plocha podélné výztuže na kroucení na jednotku obvodu $u_k$
$A_{sw}$	$m^2$	plocha smykové výztuže
b	m	šířka průřezu
	m	kratší strana obdélníkového průřezu
B	$Nm^2$	bimoment
d	m	účinná výška průřezu
$d_v$	m	průměr kružnice vepsané pravidelnému mnohoúhelníku
D	m	průměr kružnice
E	Pa	modul pružnosti v tahu, v tlaku
$E_{cm}$	Pa	sečnový modul pružnosti betonu
f	N/m	spojitá síla
$f_{ck}$	Pa	charakteristická válcová pevnost betonu v tlaku
$f_{cd}$	Pa	návrhová válcová pevnost betonu v tlaku
$f_{ctk,0.05}$	Pa	charakteristická pevnost betonu v dostředném tahu (5 % kvantil)
$f_{ctd}$	Pa	návrhová pevnost betonu v tahu
$f_{yk}$	Pa	charakteristická mez kluzu podélné výztuže
$f_{yd}$	Pa	návrhová mez kluzu podélné výztuže
$f_{ywk}$	Pa	charakteristická mez kluzu smykové výztuže
$f_{ywd}$	Pa	návrhová mez kluzu smykové výztuže
F	N	osamělá síla
G	Pa	modul pružnosti ve smyku
h	m	výška průřezu
	m	delší strana obdélníkového průřezu

H	Pa	modul zpevnění
$I_p$	$m^4$	polární moment setrvačnosti
$I_t$	$m^4$	moment tuhosti ve volném kroucení
$I_\omega$	$m^6$	výsečový moment setrvačnosti
k	-	koeficient průřezu
$k_i$	-	koeficient momentu tuhosti v prostém kroucení obdélníku
$k_t$	$Nm^2$	tuhost prutu ve volném kroucení
$k_w$	-	koeficient modulu průřezu v kroucení obdélníku
$k_\tau$	-	koeficient maximálního smykového napětí vyvolaného kroucením obdélníku
$K_t$	-	bezrozměrný parametr tuhosti prutu při kroucení
L	m	délka prvku
$m_x$	Nm	vnější krouticí moment
$M_i$	Nm	moment okolo osy i
$M_x$	Nm	vnitřní krouticí moment (ekvivalent T)
n	-	střížnost smykové výztuže
N	-	poměr delší a kratší strany obdélníkového průřezu ( $N = h/b$ )
$N_{Ed}$	N	normálová síla v průřezu od zatížení nebo předpětí
s	m	osová vzdálenost třmíneků
$s_i$	m	podélná osová vzdálenost sestav třmínekové výztuže
$s_{i,req}$	m	požadovaná podélná osová vzdálenost sestav třmínekové výztuže
$s_t$	m	příčná osová vzdálenost větví třmíneků
t	m	tloušťka (obecně)
	N/m	smykový tok
$t_{ef}$	m	účinná tloušťka stěny ATDP
T	Nm	vnitřní krouticí moment (ekvivalent $M_x$ )
$T_{Ed}$	Nm	působící návrhový krouticí moment
		návrhová hodnota celkového krouticího momentu
$T_{Rk,c}$	Nm	charakteristická hodnota krouticího momentu při vzniku trhlin
$T_{Rk,s}$	Nm	charakteristický krouticí moment, který může převzít smyková výztuž na mezi kluzu
$T_{Rd,c}$	Nm	krouticí moment při vzniku trhlin
	Nm	návrhová hodnota krouticího momentu při vzniku trhlin
$T_{Rd,s}$	Nm	návrhový krouticí moment, který může převzít smyková výztuž na mezi kluzu
	Nm	krouticí moment na mezi kluzu výztuže
$T_{Rd,s,k}$	Nm	návrhový krouticí moment, který může převzít konstrukční smyková výztuž na mezi kluzu

$T_{Rd,u}$	Nm	návrhový krouticí moment, který může převzít smyková výztuž na mezi únosnosti
$T_{Rd,max}$	Nm	návrhový krouticí moment na mezi únosnosti
$T_{tq}$	Nm	ekvivalentní krouticí moment od posouvající síly
$u$	m	vnější obvod průřezu
$u, v, w$	m	posuny ve směru osy $x, y, z$
$u_k$	m	obvod plochy $A_k$
$u_{k,0}$	m	obvod plochy $A_{k,0}$
$V_{Ed}$	N	návrhová hodnota posouvající síly
$V_{Ed,i}$	N	ekvivalentní smyková síla od kroucení v $i$ -té stěně ATDP
$V_{Ed,t}$	N	návrhová posouvající síla zvýšená o vliv kroucení
$V_{Rd,c}$	N	návrhová hodnota únosnosti ve smyku od posouvající síly
$V_{Rd,max}$	Pa	návrhová hodnota maximální posouvající síly, kterou prvek může přenést, omezená rozdrčením tlakových diagonál
$W_y$	$m^3$	modul průřezu v ohybu okolo osy $y$
$W_t$	$m^3$	modul průřezu v kroucení
$W_{tf}$	$m^3$	modul průřezu v kroucení nejmasivnější části účinného průřezu
$z_i$	m	délka střednice $i$ -té stěny ATDP
$z$	m	rameno vnitřních sil

## PÍSMENA ŘECKÉ ABECEDY A OSTATNÍ ZNAČKY

$\alpha$	$^\circ$	úhel
	$^\circ$	úhel, který svírá smyková výztuž s podélnou osou prvku
$\alpha_{cc}$	-	součinitel, kterým se zohledňují dlouhodobé účinky na pevnost v tlaku a nepříznivé účinky vyplývající ze způsobu zatěžování
$\alpha_{ct}$	-	součinitel, kterým se zohledňují dlouhodobé účinky na pevnost v tahu a nepříznivé účinky vyplývající ze způsobu zatěžování
$\alpha_{cw}$	-	součinitel stavu napětí v tlačném pásu
$\gamma_b$	-	součinitel podmínek působení betonu
$\gamma_c$	-	dílčí součinitel betonu
$\gamma_s$	-	dílčí součinitel betonářské oceli
$\theta$	$^\circ$	úhel sklonu tlakových diagonál
	rad/m	poměrné zkroucení
$k_n$	-	součinitel normálové síly
$\lambda$	m	charakteristický rozměr průřezu
	-	modifikační faktor



$\mu$	-	účinnost (obecně)
$\mu_t$	-	míra využití tlakových diagonál od kroucení
$\nu$	-	Poissonův součinitel
	-	redukční součinitel pevnosti betonu při porušení smykem
$\sigma$	Pa	normálové napětí (obecně)
$\sigma_i$	Pa	normálové napětí působící ve směru osy i
$\sigma_{mi,max}$	Pa	maximální normálové napětí vyvolané ohybem okolo osy i
$\tau$	Pa	smykové napětí (obecně)
$\tau_{t,i}$	Pa	smykové napětí od krouticího momentu v i-té stěně ATDP
$\tau_{ij}$	Pa	smykové napětí působící v rovině kolmé k ose i, ve směru osy j
$\tau_{t,max}$	Pa	maximální smykové napětí vyvolané kroucením
$\phi$	-	součinitel redukované pevnosti
$\varphi$	rad	úhel pootočení
$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$	rad	pootočení okolo osy x, y, z
$\omega$	m <sup>2</sup>	výsečová souřadnice
$\Omega$	m <sup>2</sup>	dvojnásobek plochy uzavřené střednicí stěn tenkostěnného průřezu
$\emptyset_{sw}$	m	profil smykové výztuže

## INDEXY

$X_k$	charakteristická hodnota veličiny X
$X_d$	návrhová hodnota veličiny X
$X_{min}$	minimální hodnota veličiny X
$X_{max}$	maximální hodnota veličiny X
$^1X$	veličina X vyvolaná volným kroucením
$^2X$	veličina X vyvolaná vázaným kroucením
$X_{EC}$	hodnota veličiny X stanovená na základě ČSN EN 1992
$X_{ACI}$	hodnota veličiny X stanovená na základě ACI 318-11
$X_{el}$	hodnota veličiny X stanovená na základě teorie pružnosti
$X_{MKP}$	hodnota veličiny X stanovená metodou konečných prvků



# 1 ÚVOD

## 1.1 Předmluva

Prutové prvky mohou být obecně vystaveny čtyřem základním druhům namáhání:

- osovému tahu/tlaku;
- prostému ohybu;
- smyku od posouvající síly;
- kroucení.

Kroucení lze dále dělit na prosté, tzv. St. Venantovo, vyvozující smyková napětí v rovině průřezu avázané, někdy též nazýváno ohybové, vyvozující normálová napětí a druhotná smyková napětí (např. [24]).

Právě vliv kroucení bývá při návrhu železobetonových prvků často podceňován a zanedbáván a výztuž je dimenzována pouze na vlivy ostatních druhů namáhání. Pro uvažování kroucení však existuje hned několik důvodů. Jednak i relativně malé hodnoty krouticího momentu vyvozují v železobetonovém prvku významná napětí [30]. Dále některé konstrukční prvky, např. okrajové prefabrikované průvlaky skeletových systémů, ve většině případů přímo vyžadují návrh výztuže na kroucení, neboť vznikající smyková napětí přesahují pevnost betonu v tahu. Zároveň je třeba vzít v úvahu omezení a doplňkové zásady (poloha a tvar smykové i podélné výztuže, kotevní délky aj.), které s sebou návrh na kroucení přináší.

Rozsáhlý experimentální a teoretický výzkum železobetonových prvků vystavených smykovému napětí od krouticího momentu a/nebo posouvající síly započal v 60. letech 20. století [8] [11]. Na základě výsledků měření bylo navrženo několik výpočetních postupů, z nichž některé byly zakotveny do norem pro navrhování konstrukcí.

## 1.2 Obsah práce

Kapitola 2 podává přehled železobetonových prvků, které jsou typicky namáhány kroucením. Část kapitoly je zároveň věnována průběhům krouticího momentu pro různá statická schémata konstrukcí.

V kapitole 3 jsou představeny postupy, které lze použít pro návrh železobetonových prvků namáhaných kroucením. V úvodu kapitoly je uveden nezbytný teoretický základ z teorie pružnosti a dále jsou popsány postupy dle metody příhradové analogie, ČSN EN 1992-1-1, ACI 318-11 a ČSN 73 1201. Závěr kapitoly je věnován stanovení vlivu vázaného kroucení a případný návrh výztuže na tento typ namáhání.

Porovnání jednotlivých návrhových postupů je provedeno v kapitole 4.

Zásady modelování kroucených železobetonových prvků ve výpočetních programech a porovnání výsledků analýzy metodou konečných prvků s analytickým řešením jsou uvedeny v kapitole 5.

Součástí je zároveň několik příloh, které doplňují a rozšiřují jednotlivé kapitoly. Na přiloženém CD lze nalézt veškeré výpočty prováděné v tabulkovém procesoru a soubory s výpočetními modely, které jsou prezentovány v této práci.

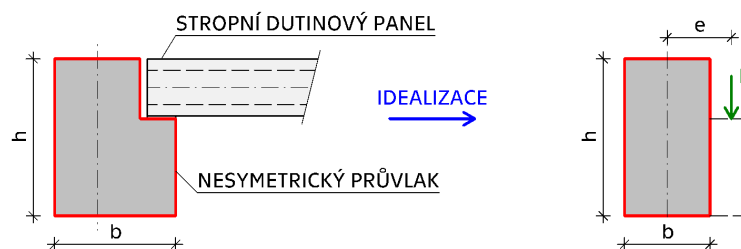
Práce je zaměřena především na problematiku čistého kroucení, tedy kroucení bez interakce s ostatními typy namáhání. Kombinace s posouvající silou, ohybem či osovou silou je zmíněna pouze v některých dílčích odstavcích a podrobněji je popsána např. v [8], [11], případně v rámci jednotlivých norem [2], [10], [14], [16].

Zároveň se předpokládá vyztužení betonářskou ocelí, kroucení předpjatých betonových prvků není v této práci blíže zkoumáno.

### 1.3 Motivace

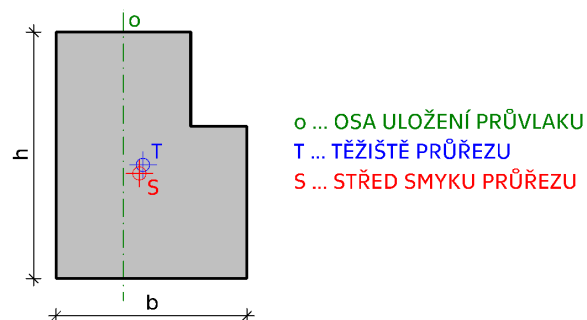
Námět na téma bakalářské práce vychází z návrhu konstrukce výrobní haly, kterou jsem řešil v rámci předmětu Projekt 2C. Předmět je vyučován v 7. semestru studia oboru Konstrukce pozemních staveb Fakulty stavební ČVUT v Praze.

Jedním z navrhovaných prvků konstrukčního systému haly byl průvlak nesymetrického průřezu tvaru L, podporující předpjaté stropní dutinové panely (obr. 1.1). Ty vlivem excentrického uložení vyvozovaly zatížení konstantním spojitým krouticím momentem. Pro návrh výztuže na kroucení byl použit model analogického tenkostěnného dutého průřezu dle EC2-1-1, který je ovšem vhodný především pro jednoduché konvexní průřezy. Pro složené průřezy tato norma doporučuje složitější postup, který v rámci zmíněného projektu nebyl použit. Zjednodušeně byl celý průřez nahrazen obdélníkem se zanedbáním ozubu.



obr. 1.1- idealizace nesymetrického průvlaku pro návrh výztuže na kroucení v rámci Projektu 2C

Modelování průvlaku tvaru L ve výpočetním programu navíc odhalilo problém při nahrazení geometrie těžišťovou osou (střednicí), která se vlivem nesymetrie průřezu neshoduje s polohou středu smyku ani s osou uložení průvlaku na podporující konstrukce, v tomto případě sloupy (obr. 1.2).



obr. 1.2- rozdílná poloha těžiště, středu smyku a osy uložení průvlaku s průřezem tvaru L

## 1.4 Cíle bakalářské práce

Prvním z cílů této bakalářské práce je uvedení přehledu různých návrhových postupů a výpočetních modelů pro prvky namáhané kroucením.

Druhým cílem je porovnání výsledků jednotlivých výpočetních postupů při návrhu výztuže pro prvky symetrického i nesymetrického tvaru průřezu. Zároveň je zkoumán vliv vázaného kroucení na celkovou napjatost.

Posledním cílem je porovnání výsledků založených na analytických vztazích s výsledky výpočetních programů založených na metodě konečných prvků.

## 1.5 Komentář ke značení veličin a materiálovým vlastnostem

Jelikož je v rámci jednotlivých návrhových postupů pro železobetonové konstrukce užíváno rozdílné značení veličin, je pro přehlednost a sjednocení veškeré značení v této práci převedeno na systém používaný v ČSN EN 1992-1-1 [16], případně ČSN EN 1992-2 [18]. Původní značení je ponecháno pouze u veličin, které jsou unikátní pro jeden z návrhových postupů a nemají přímý ekvivalent v EC2.

Pro účely srovnávacích výpočtů (uvedených především v kapitole 4) jsou uvažovány ve všech návrhových postupech jednotné charakteristické vlastnosti betonu a betonářské oceli dle ČSN EN 1992-1-1 [16], ČSN EN 206 [22] a ČSN EN 10080 [15].

Zároveň jsou uvažovány jednotné návrhové hodnoty mechanických vlastností materiálů získané z charakteristických hodnot pomocí dílčích součinitelů spolehlivosti dle EC2-1-1. V případě, že některý z návrhových postupů doporučuje omezení mechanických vlastností, je tato skutečnost uvedena v poznámce, ale pro srovnávací výpočty není uvažována.

Veškeré součinitele, upravující dále vlastnosti materiálů, které nezavádí EC2, jsou předpokládány hodnotou 1, pokud není uvedeno jinak.



## 2 ŽELEZOBETONOVÉ PRVKY NAMÁHANÉ KROUCENÍM

Většina vodorovných železobetonových prvků (např. trámy, průvlaky, vazníky) je vystavena svislému příčnému zatížení. Důsledkem toho je prvek namáhán posouvající silou a ohybovým momentem. Na účinky těchto namáhání je zpravidla dostatečně vyztužen. Zjednodušeně lze konstatovat, že podélná výztuž přenáší napětí od ohybu, zatímco příčná výztuž (běžně ve formě třmínků) přenáší smyk od posouvající síly.

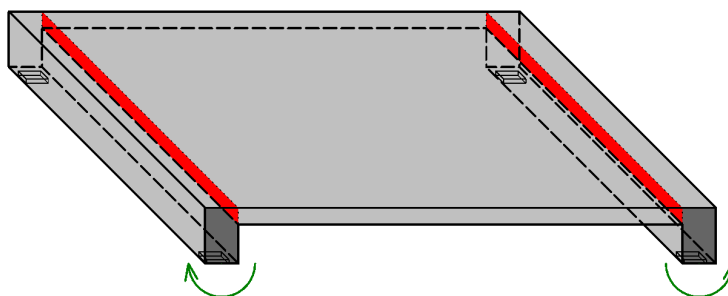
Ne vždy je ovšem věnována dostatečná pozornost skutečnosti, že pokud příčné zatížení neprochází středem smyku prvku a/nebo prvek slouží jako podpora jiné ohýbané konstrukci, dochází k jeho kroucení. Přestože mohou být účinky kroucení v některých případech zanedbatelné, měl by být jejich vliv na napjatost v průřezu vždy ověřen, např. pomocí vztahu (3.82) resp. (3.83).

Nelze-li účinky kroucení zanedbat, musí být výztuž na ohyb a smyk od posouvající síly doplněna dalšími podélnými pruty a třmínky, které účinky kroucení přenesou. Návrhu této výztuže se podrobně věnují podkapitoly 3.3 až 3.6. Zároveň je nezbytné zajistit odpovídajícím způsobem přenos krouticího momentu do navazujících konstrukcí, tedy musí být zamezeno možnosti volného otáčení prvku okolo vlastní osy.

Následující řádky podávají přehled železobetonových prvků a konstrukcí, které jsou typicky vystaveny kroucení. Pro názornost jsou některé příklady doplněny výstupy z výpočetního programu [F], které znázorňují deformovaný tvar konstrukce<sup>1</sup>. Nejedná se o kompletní výčet kroucených prvků. Například není uvedeno kroucení vysokých průvlaků náchylných na ztrátu příčné stability, které blíže popisují Bachmann a Steinle [1] aj.

### 2.1 Monolitické prvky pozemních staveb

#### 2.1.1 Krajní stropní průvlaky



obr. 2.1 - schéma monolitického stropu s krajními průvlaky

<sup>1</sup> Deformovaný tvar konstrukce byl stanoven lineárně pružnou analýzou se zanedbáním vlivu trhlin a deplanace průřezu. Jedná se proto o přibližný deformovaný tvar. Velikost deformace je pro viditelnost několiknásobně zvětšena.

Krajní stropní průvlaky jsou typickým příkladem jednostranně zatížených prvků. Vnější kroucí moment odpovídá ohybovému momentu na desce v místě napojení na průvlak (červeně vyznačené řezy na obr. 2.1). Ohybový moment na desce přitom závisí na tuhosti průvlaku ve volném kroucení ( $k_t$ )<sup>2</sup>:

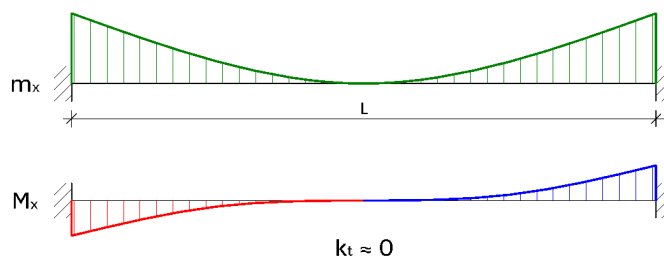
$$k_t = \frac{G \cdot I_t}{L} \quad (2.1)$$

kde  $L$  je délka průvlaku a význam ostatních veličin je podrobně vysvětlen v podkapitole 3.1

Lze uvažovat dva extrémní případy:

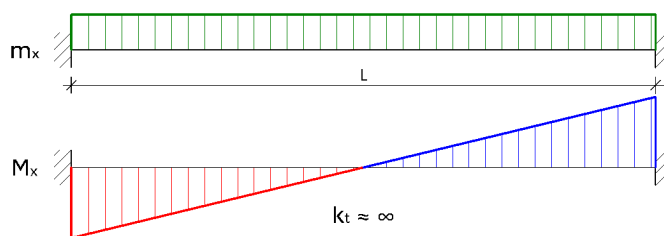
- $k_t \approx 0$  torzně poddajný průvlak;
- $k_t \approx \infty$  torzně tuhý průvlak.

V prvním případě se stropní deska uprostřed rozpětí průvlaku chová jako prostě podepřená, neboť průvlak nebrání jejímu natočení. Vnější kroucí moment je proto v tomto místě nulový a postupně narůstá směrem k okrajům průvlaku, kde je natočení desky bráněno více, až do limitního stavu dokonalého vetknutí. Maximální (návrhový) vnitřní kroucí moment je menší než v případě torzně tuhého průvlaku, neboť většina vnějšího kroucího momentu působí na okrajích, viz obr. 2.2.



obr. 2.2 - průběh vnějšího ( $m_x$ ) a vnitřního ( $M_x$ ) kroucího momentu na krajním průvlaku s  $k_t \approx 0$

V druhém případě průvlak po celé své délce brání natočení a stropní deska se ve všech místech chová jako dokonale vetknutá. Vnější kroucí moment působící na průvlak je proto konstantní. Maximální vnitřní kroucí moment je větší než v prvním případě, viz obr. 2.3.

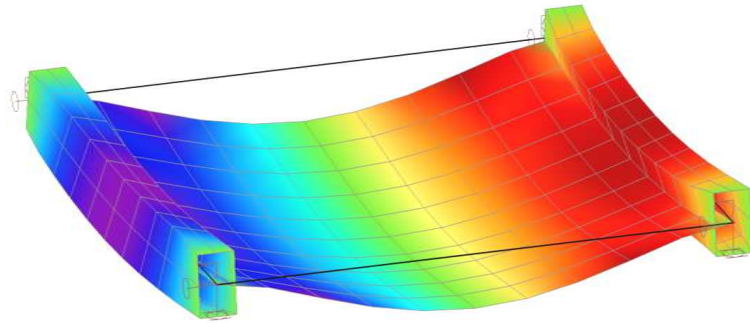


obr. 2.3 - průběh vnějšího a vnitřního kroucího momentu na krajním průvlaku s  $k_t \approx \infty$

<sup>2</sup> Podpory musí bránit natočení průvlaku okolo vlastní osy.

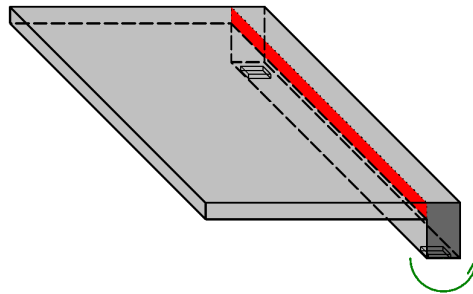


Tuhost skutečných průvlaků se nachází mezi těmito dvěma extrémy. S rostoucí hodnotou  $k_t$  se průběh vnitřního kroučícího momentu postupně mění z parabolického na lineární.



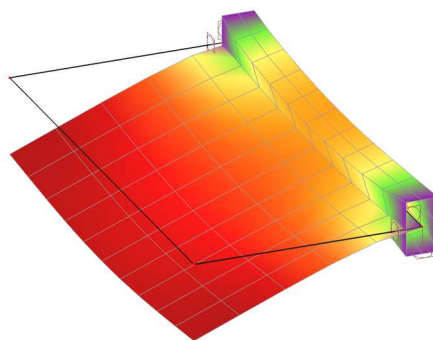
obr. 2.4 - deformovaný tvar kroucených krajních průvlaků

### 2.1.2 Průvlak s konzolovou deskou



obr. 2.5 - schéma průvlaku s konzolovou deskou

Průvlak s konzolovou deskou je obdobou krajních stropních průvlaků. Vnější kroučící moment opět odpovídá ohybovému momentu na desce v červěně vyznačeném řezu na obr. 2.5, jehož průběh je závislý na tuhosti průvlaku ve volném kroucení.



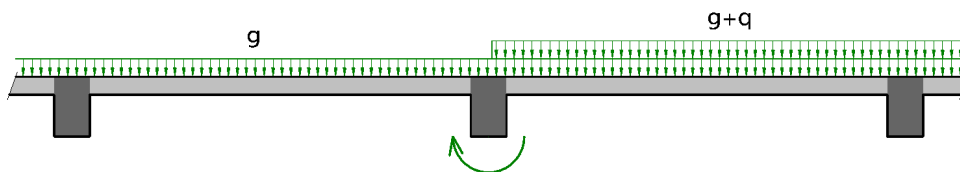
obr. 2.6 - deformovaný tvar průvlaku s konzolovou deskou

### 2.1.3 Nesymetricky zatížené vnitřní průvlaky

Vnitřní průvlaky podporující spojitě stropní desky ve většině případů nejsou namáhány kroucením, případně může být jeho vliv zanedbán. Ke kroucení ovšem dochází pokud:

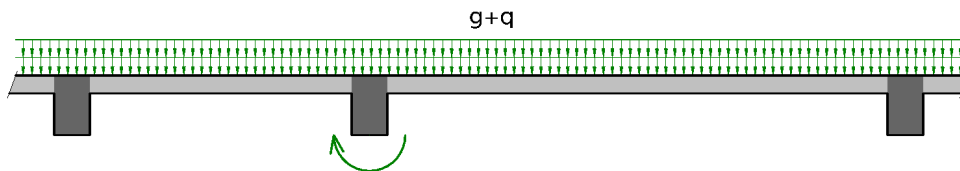
- v každém poli desky působí jiné zatížení;
- rozpětí polí jsou rozdílná;
- dochází ke kombinaci obou případů.

První případ by měl být uvažován při návrhu všech spojitých desek. Přenos účinků krouticího momentu lze ovšem většinou přisoudit výztuži, která je navržena na ohybový moment a posouvající sílu v průvltaku pro případ plného zatížení v obou polích desky. Jelikož při rozdílném zatížení desek není tato výztuž plně využita, může působit jako výztuž na kroucení.



obr. 2.7 - vnitřní průvltak kroucený vlivem rozdílného zatížení spojitě desky

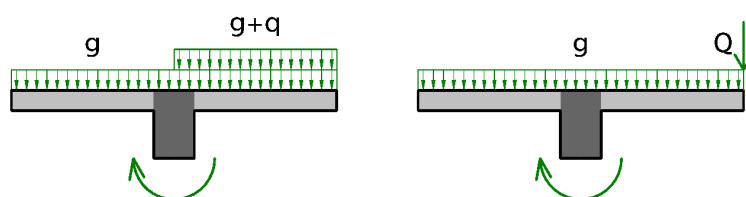
Ve druhém případě dochází ke kroucení průvltaku vždy i při plném zatížení v obou polích desky. Vliv kroucení proto není možné zanedbat.



obr. 2.8 - vnitřní průvltak kroucený vlivem rozdílných rozpětí spojitě desky

### 2.1.4 Schodiště se středovou schodnicí

Schodnicové schodiště může být vyrobeno jako monolitické nebo jako prefabrikované. V obou případech dochází ke kroucení při nesymetrickém zatížení, viz obr. 2.9.



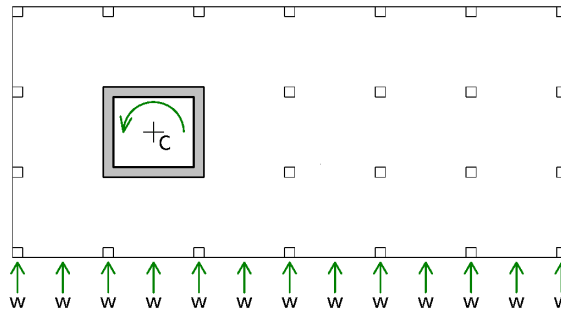
obr. 2.9 - příklady zatěžovacích stavů schodnicového schodiště, při kterých dochází ke kroucení

### 2.1.5 Nesymetricky umístěné stěnové jádro

Stěnová jádra jsou standardní konstrukcí vícepodlažních budov zajišťující jejich vodorovnou tuhost. Pokud jádro není možné umístit do místa výslednice zatížení větrem, dochází k jeho kroucení. Podle tvaru lze stěnová jádra dělit na:

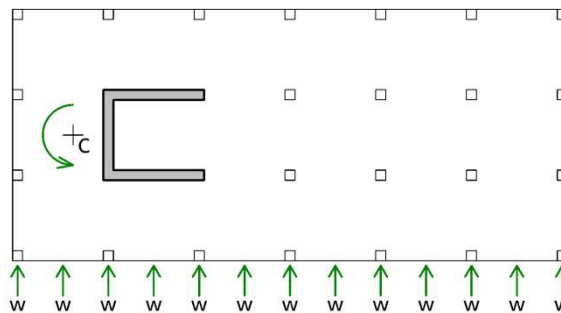
- uzavřená (s malými otvory, které lze zanedbat);
- otevřená.

Uzavřená stěnová jádra jsou vystavena téměř výhradně volnému kroucení (viz podkapitola 3.1.3) a zpravidla se výrazně nedeformují.



obr. 2.10 - půdorysné schéma uzavřeného stěnového jádra

Otevřená stěnová jádra jsou naproti tomu vystavena nezanedbatelnému vlivu vázaného kroucení (viz podkapitola 3.1.7). Deformují se výrazně více než uzavřená stěnová jádra a navíc střed smyku leží vně jádra, čímž může být zvětšeno rameno, na kterém působí výslednice zatížení od větru, jak je patrné z obr. 2.11.



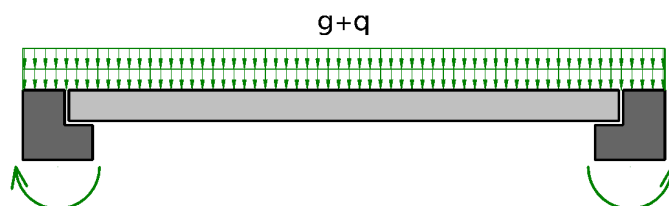
obr. 2.11 - půdorysné schéma otevřeného stěnového jádra

Návrh výztuže stěn jádra na účinky kroucení nelze provést pomocí návrhových postupů pro prutové prvky, které jsou popsány v této práci (kapitola 3). Kroucení se v tomto případě obvykle převádí na rovinné napětí v dílčích stěnách jádra a výztuž se navrhuje podle deskostěnových modelů, které jsou velmi stručně popsány v podkapitole 3.8.1. Podrobný návrh stěnových jader je popsán např. v [1].

Vliv kroucení na celkovou napjatost obecně závisí na poměru mezi krouticím momentem a svislou silou působící ve stěnovém jádru. Čím větší je svislé zatížení jádra, tím menší je vliv kroucení.

## 2.2 Prefabrikované prvky pozemních staveb

### 2.2.1 Krajiní stropní průvlaky s ozubem

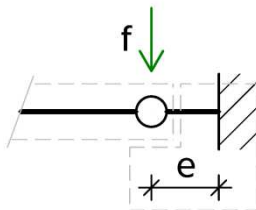


obr. 2.12 - schéma krajiní stropních průvlaků s ozubem

Krajní prefabrikované stropní průvlaky jsou analogické k monolitické variantě. Nejčastěji mají průřez tvaru L, který umožňuje zapustit stropní desky (panely) a tím snížit celkovou tloušťku stropu, viz obr. 2.12.

Hlavní rozdíl v působení oproti monolitickým průvlakům vychází z kloubového uložení stropních panelů. Vnější krouticí moment je z toho důvodu konstantní po celé délce průvlaku, nezávisle na jeho tuhosti  $k_t$ . Velikost vnějšího krouticího momentu je dána součinem síly ( $f$ ) od stropní desky ramene ( $e$ ) ke středu smyku, na kterém tato síla působí:

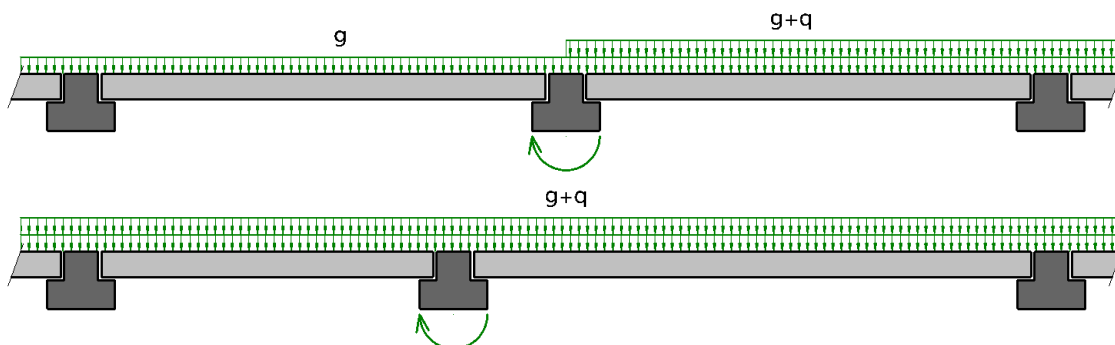
$$m_x = f \cdot e \cong \text{konst.} \quad (2.2)$$



obr. 2.13 - zjednodušené schéma uložení stropních panelů na krajní průvlak

Průběh vnitřního krouticího momentu je poté lineární, stejně jako na obr. 2.3. Krouticí momenty lze redukovat pomocí speciálních zakotvení, viz [5].

## 2.2.2 Nesymetricky zatížené vnitřní průvlaky



obr. 2.14 - nesymetricky zatížené vnitřní prefabrikované průvlaky

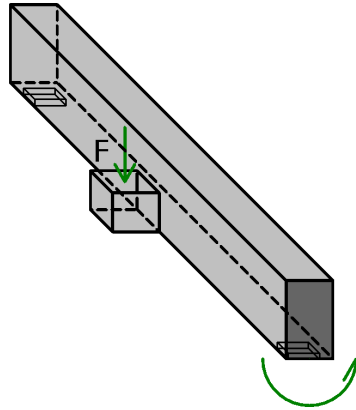
Vnitřní prefabrikované průvlaky mají nejčastěji průřez tvaru obráceného T. Ke kroucení dochází, podobně jako u monolitických průvlaků, v případě rozdílného zatížení sousedních desek, jejich různého rozpětí nebo kombinací obou případů.

Prefabrikované průvlaky jsou často vyrobeny z betonů vyšších pevnostních tříd (např. C45/55), které mají mimo jiné vyšší pevnost v tahu ( $f_{ctd}$ ). Proto je pravděpodobnější, že nevzniknou trhliny vlivem kroucení a postačí navrhnout konstrukční výztuž (viz vztah (3.80)).

Pokud je kroucení způsobeno rozdílným zatížením desek, je opět možné přisoudit přenos jeho účinků již navržené výztuži na ohyb a posouvající sílu.

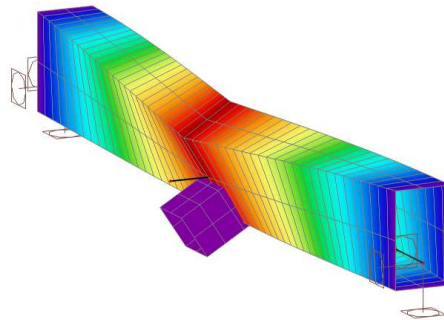
### 2.2.3 Průvlak s nepřímo uloženou konzolou

Jako nepřímo uložená konzola se označuje krátká konzola, která je "zavěšená" za spodní část průvlaku. Samotná oblast v okolí konzoly musí být posuzována jako poruchová (neboli D-oblast) pomocí metody příhradové analogie nebo nelineárního výpočtu ve výpočetním programu (podrobněji viz [5]).



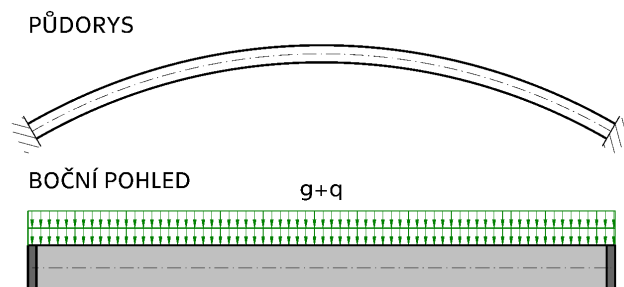
obr. 2.15- schéma průvlaku s nepřímo uloženou konzolou

Vysoká náročnost návrhu nepřímo uložené konzoly nemění nic na skutečnosti, že průvlak je jako celek kroucený, přičemž průběh vnitřního krouticího momentu je po délce až na znaménko, které se mění v místě konzoly, přibližně konstantní, viz podkapitola 2.4.2.



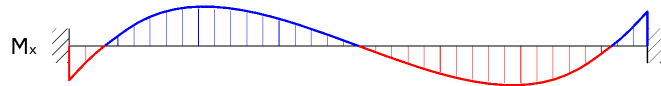
obr. 2.16 - deformovaný tvar průvlaku s nepřímo uloženou konzolou (velká míra zjednodušení)

### 2.2.4 Půdorysně zakřivený nosník

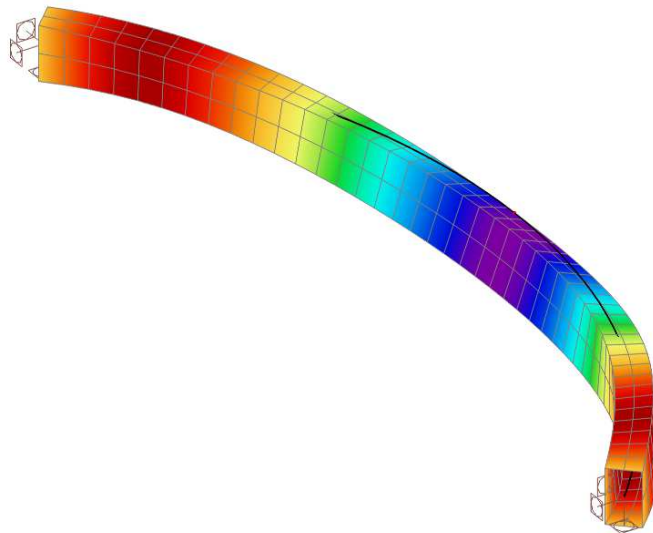


obr. 2.17 - statické schéma půdorysně zakřiveného nosníku

Půdorysně zakřivený nosník není běžnou součástí pozemních staveb, ale jeho použití může být vyžádáno např. architektonickým zaměrem. Teoreticky může být vyroben jako prefabrikovaný i monolitický. Návrh výztuže pro tento prvek je obecně náročný. Z hlediska analýzy kroucení je důležité, že maximální vnitřní kroucí moment vzniká přibližně ve čtvrtině délky nosníku.



obr. 2.18 - průběh vnitřního kroucího momentu na půdorysně zakřiveném nosníku

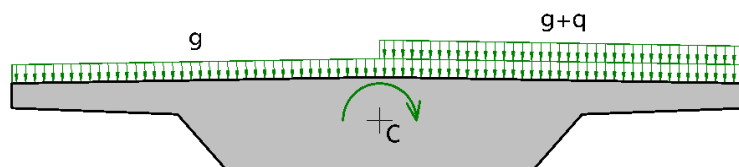


obr. 2.19 - deformovaný tvar půdorysně zakřiveného nosníku

## 2.3 Mostní a inženýrské konstrukce

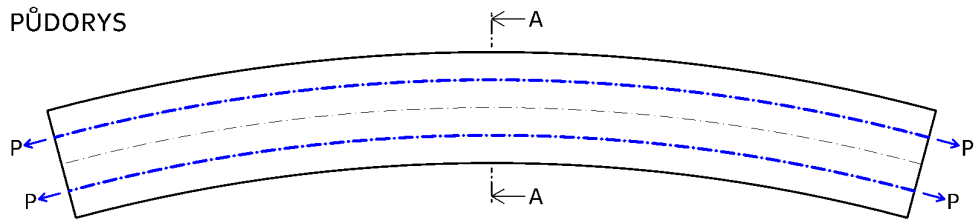
### 2.3.1 Most zatížený dopravou v jednom pruhu

Železobetonové mosty jsou navrhovány především jako silniční, s dvoupruhovým nebo vícepruhovým provozem. Mimo jiné musí být posouzen i zatěžovací stav, při kterém je jeden jízdní pruh plně vytížen dopravou, zatímco v ostatních pruzích je uvažována pouze vlastní tíha a ostatní stálé zatížení mostu. Pokud není tento jízdní pruh v ose mostu, dochází ke kroucení celé konstrukce, viz obr. 2.20.



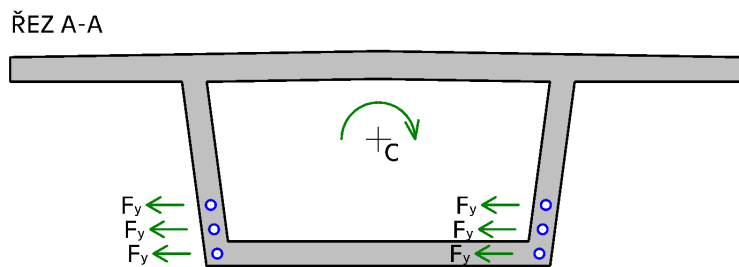
obr. 2.20 - schématický příčný řez trémovým mostem; zatížení jednoho pruhu dopravou

### 2.3.2 Půdorysně zakřivený předpjatý most



obr. 2.21 - půdorysné schéma půdorysně zakřiveného předpjatého mostu, modře vyznačeny předpínací kabely

Půdorysně zakřivené mosty mají nejčastěji tvar kruhového oblouku nebo klotoidy. Jsou vystaveny kroucení už vlivem samotného zakřivení (viz podkapitola 2.2.4). Navíc jsou ve většině případů předpjaté, čímž vzniká přídavný kroučící moment od vodorovné složky předpětí s výjimkou případu centrického předpětí. Předpínací kabely jsou standardně vedeny v parabolických drahách tak, aby vyrovnávaly svislé zatížení. Vnější kroučící moment od předpětí je proto proměnný po délce mostu. Největší hodnoty dosahuje uprostřed rozpětí, kde je excentricita předpínacích kabelů největší.



obr. 2.22 - schématický příčný řez uprostřed rozpětí půdorysně zakřiveného komorového mostu; zelenými šipkami vyznačena vodorovná složka předpětí

Z porovnání s deformovaným tvarem půdorysně zakřiveného nosníku (obr. 2.19) je patrné, že se deformace od kroucení uprostřed rozpětí sčítají.

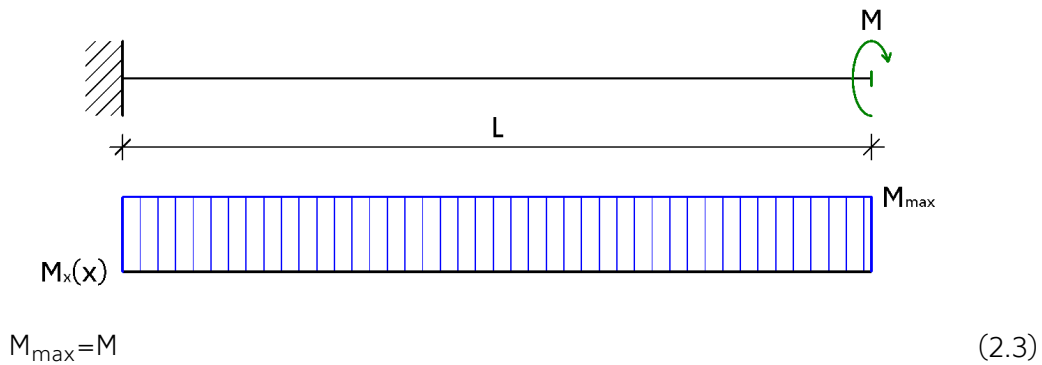
## 2.4 Běžné průběhy vnitřního kroučícího momentu

Z příkladů kroucených konstrukcí uvedených výše je patrné, že pro velkou část případů lze stanovit průběh vnitřního kroučícího momentu na základních statických schématech. Jednoduché modely jsou důležité pro prvotní odhad i pro možnost kontroly správnosti výsledků z komplexních počítačových modelů.

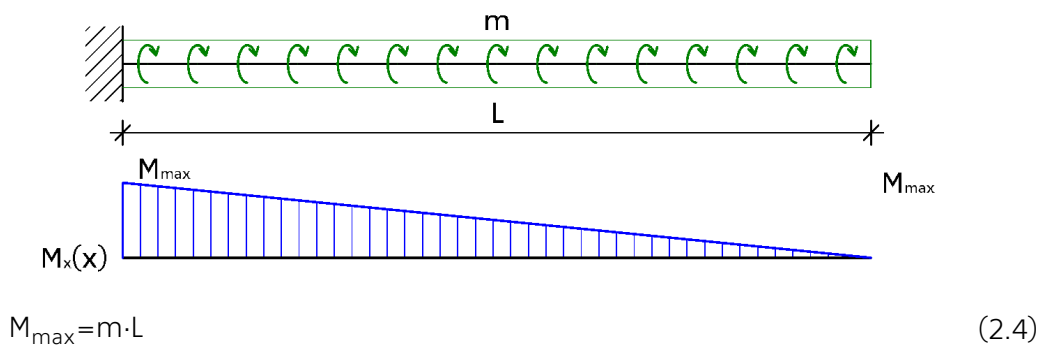
Za povšimnutí nepochybně stojí, že průběh vnitřního kroučícího momentu se na základních schématech tvarově shoduje s průběhem posouvající síly. Ve většině skutečných konstrukcí dochází k interakci kroucení a smyku od posouvající síly. V nejvíce namáhaných průřezích proto působí jak maximální vnitřní kroučící moment, tak maximální posouvající síla. Krajiní vazby zakreslené na následujících schématech znázorňují typ okrajové podmínky v kroucení okolo vlastní osy ( $\varphi_x$ ).

## 2.4.1 Konzoly

### KONZOLA ZATÍŽENÁ OSAMĚLÝM KROUTICÍM MOMENTEM

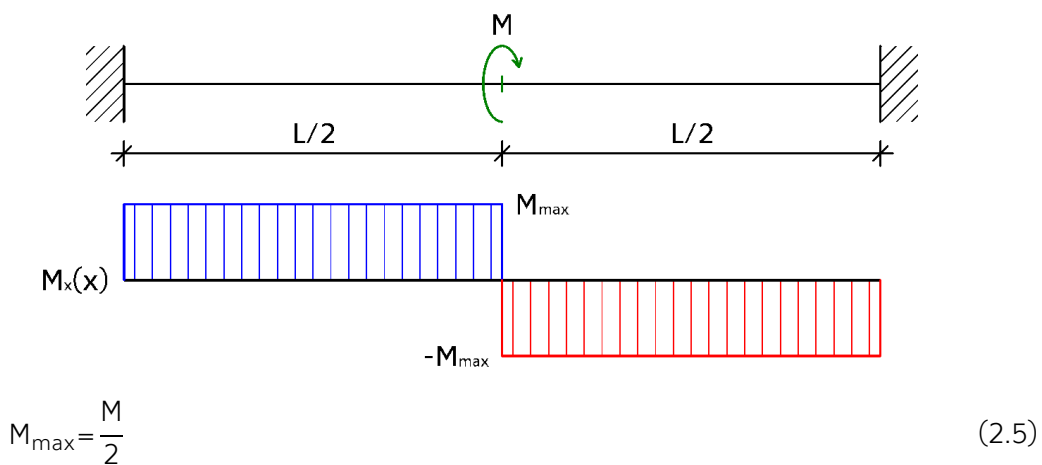


### KONZOLA ZATÍŽENÁ SPOJITÝM KROUTICÍM MOMENTEM



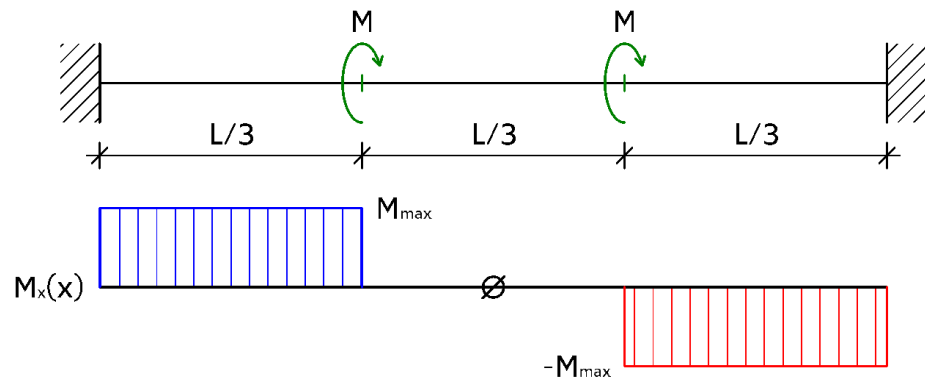
## 2.4.2 Nosníky

### NOSNÍK ZATÍŽENÝ OSAMĚLÝM KROUTICÍM MOMENTEM UPROSTŘED



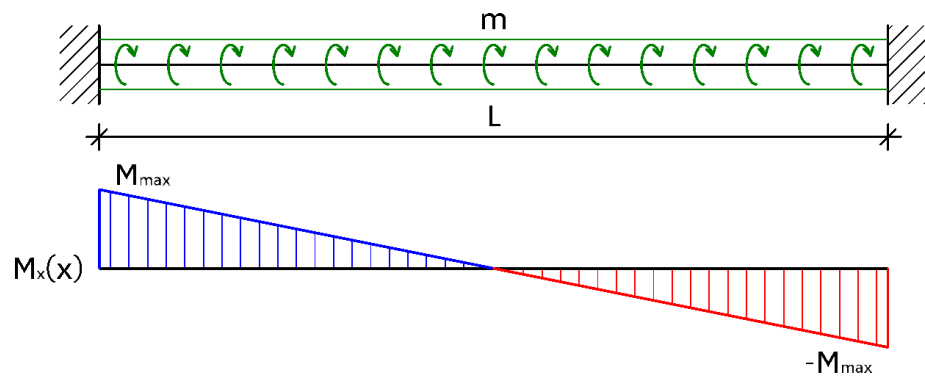


NOSNÍK ZATÍŽENÝ DVĚMA OSAMĚLÝMI KROUTICÍMI MOMENTY



$$M_{max} = M \quad (2.6)$$

NOSNÍK ZATÍŽENÝ SPOJITÝM KROUTICÍM MOMENTEM



$$M_{max} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot L \quad (2.7)$$



### 3 NÁVRHOVÉ POSTUPY PRO KROUCENÉ ŽELEZOBETONOVÉ PRVKY

Při návrhu železobetonových prvků, na rozdíl od homogenních izotropních materiálů, jako je např. ocel, nelze užít pouze základních rovnic teorie pružnosti, které by dokázaly popsat závislost mezi zatížením a deformacemi v celém rozsahu pracovního diagramu. Důvodů je několik, např.:

- odlišné mechanické vlastnosti výztuže a betonu;
- rozdílná pevnost betonu v tlaku a tahu;
- výrazný pokles tuhosti prvku po vzniku trhlin;
- obecně nelineární pracovní diagram betonu.

Pro prvky vystavené jednoosé napjatosti (tlak, tah, prostý ohyb), kdy v průřezu vzniká pouze normálové napětí ( $\sigma_x$ ), byly vyvinuty v zásadě jednoduché postupy, založené na rovnováze mezi napětím ve výztuži a v betonu, případně na únosnosti samotné výztuže pro prvky vystavené tahu.

Při namáhání kroucením ovšem vznikají podobně jako při zatížení posouvající silou smyková napětí ( $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ ) a jednoosá napjatost se mění na rovinnou [9]. Teorie, které dostatečně přesně vystihují skutečné chování kroucených železobetonových prvků, byly vyvinuty až v druhé polovině 20. století. Lessing v roce 1959 prezentoval teorii zkoseného ohybu (skew bending theory), která je stručně popsána v podkapitole 3.7. Následně v roce 1971 Lampert a Thürlimann [8] navrhli teorii vycházející z příhradové analogie (strut and tie method), podpořenou rozsáhlým experimentálním výzkumem nosníků namáhaných kroucením a kroucením v kombinaci s ohybem, které se věnuje podkapitola 3.3.

Největší část této kapitoly je věnována návrhovým postupům pro kroucené železobetonové prvky dle různých národních a mezinárodních norem, které více či méně vychází z výše popsaných teorií. Nejprve je představen postup dle evropské normy ČSN EN 1992-1-1 [16], na základě které jsou v současné době navrhovány železobetonové konstrukce v České republice. Dále je popsán návrhový postup dle normy ACI 318-11 [2], [10], platné na území USA. Pro srovnání je zároveň uveden postup podle dnes již neplatné ČSN 73 1201 [14], která byla v ČR nahrazena právě normou EC2-1-1.

Hlavním cílem této práce je porovnání výsledků zmíněných návrhových postupů, a to především únosnosti prvků. Proto je podrobně popsán pouze postup dle EC2 (podkapitola 3.4). U ostatních návrhových postupů (podkapitoly 3.5 a 3.6) jsou uvedeny jen vztahy potřebné pro návrh výztuže a stanovení únosnosti. Podrobnostem, jako např. konstrukčním zásadám, zde již není věnována pozornost.

Všechny zmíněné postupy jsou určeny výhradně pro návrh železobetonových prutových prvků. Metodám řešení deskostěnových konstrukcí, vystavených kroucení (včetně vázaného), se stručně věnuje podkapitola 3.8. Přibližné kritérium pro stanovení vlivu vázaného kroucení je zároveň představeno v podkapitole 3.9.

Každý návrhový postup zavádí vlastní značení veličin podle zvyklostí v dané zemi nebo regionu. Pro sjednocení jsou všechny veličiny, které mají v návrhových postupech stejný význam, značeny podle EC2.

Přestože bylo zmíněno, že samotná teorie pružnosti neposkytuje dostatečný model pro návrh kroucených železobetonových prvků, je třeba v úvodu popsat závěry, které z ní vyplývají.

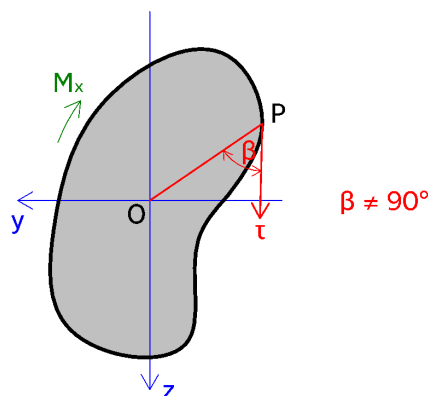
### 3.1 Kroucení prutových prvků z pohledu teorie pružnosti

Následující text vychází především z prací [3], [6], [7], [9], [13], [24], [25], [26].

Prutový prvek je takový, pro který jeden rozměr (délka) převládá nad ostatními. Napětí a deformace takového prvku lze poté s dostatečnou přesností stanovit na modelu reprezentovaném střednicí a průřezovými charakteristikami.

Ke kroucení dochází, pokud je prut zatížen přímo kroučícím momentem ( $m_x$ ), tedy momentem otáčejícím prut okolo jeho vlastní osy, nebo pokud výslednice příčného zatížení neprochází středem smyku průřezu.

Kroucení obecně způsobuje smyková napětí v průřezu. Jelikož pro většinu průřezů zároveň platí, že smykové napětí není ve všech bodech kolmé k průvodiči OP, spojujícímu střed smyku s libovolným bodem na okraji (viz obr. 3.1), dochází k deplanaci (ztrátě rovinnosti) [6].



obr. 3.1 - obecný průřez a příčina deplanace (překresleno z [6])

Může-li průřez volně deplanovat, dojde pouze k jeho deformaci z původní roviny, ale nevzniknou žádná druhotná napětí. Potom se jedná o kroucení volné a celkový kroučící moment je roven kroučícímu momentu od volného kroucení ( $^1M_x$ ). Je-li ovšem deplanaci bráněno, např. některými z těchto způsobů [24]:

- vetknutím koncového průřezu;
- změnou geometrie průřezu po délce;
- změnou materiálu (modulu pružnosti) po délce;
- změnou působícího kroučícího momentu (nekonstantní průběh  $M_x$ );

jedná se o kroucení vázané, při kterém vznikají normálová a druhotná smyková napětí způsobená bimomentem (B) a momentem od vázaného kroucení ( $^2M_x$ ). Celkový kroučící moment, stejně jako celková smyková napětí, je součtem složek volného a vázaného kroucení:

$$M_x = {}^1M_x + {}^2M_x \quad (3.1)$$

$$\tau_{xy} = {}^1\tau_{xy} + {}^2\tau_{xy} \quad (3.2)$$

$$\tau_{xz} = {}^1\tau_{xz} + {}^2\tau_{xz} \quad (3.3)$$

Krouticí momenty ve vztahu (3.1) jsou obecně proměnné po délce prutu (souřadnice  $x$ ) a smyková napětí ve vztazích (3.2) a (3.3) závisí na všech prostorových souřadnicích ( $x, y, z$ ). Pro přehlednost není tato skutečnost explicitně uvedena.

Převládající způsob kroucení velmi závisí na geometrii průřezu. Zatímco některé průřezy téměř nedeplanují a jsou tak vystaveny výhradně volnému kroucení, jiné deplanují výrazně a rozhoduje u nich vázané kroucení.

### 3.1.1 Základní veličiny pro analýzu kroucení

Jednou ze základních úloh teorie pružnosti je nalezení rovnic, které popisují vztah mezi vnějším zatížením, vnitřními silami, přetvořením a přemístěním. Proto je nezbytné definovat veličiny, potřebné pro popis chování kroucených prutů:

- vnější krouticí moment  $m_x$  [Nm],
- vnitřní krouticí moment  $M_x$  [Nm],
- poměrné zkroucení  $\theta$  [rad/m],
- pootočení  $\varphi_x$  [rad].

Vztahy mezi těmito veličinami popisují statické, materiálové a geometrické rovnice. Jejich podoba se liší pro volné a vázané kroucení a je uvedena dále.

### 3.1.2 Rozdělení průřezů podle chování při kroucení

Pro účely analýzy kroucení lze průřezy rozdělit na 3 základní typy:

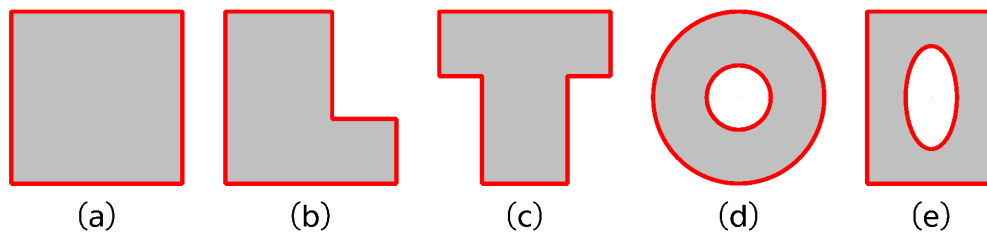
- masivní (plné a duté);
- tenkostěnné otevřené;
- tenkostěnné uzavřené.

Účinky kroucení jsou pro jednotlivé typy průřezů velmi rozdílné.

#### a) MASIVNÍ PRŮŘEZY

Jako masivní plné označujeme všechny průřezy, které mají tvar základních geometrických útvarů (kruh, čtverec, obdélník, trojúhelník,  $n$ -úhelník atd.), vznikly složením z několika těchto základních útvarů nebo mají obecný tvar a žádný rozměr výrazně nepřevládá nad ostatními. Příklady jsou zobrazeny na obr. 3.2.

Pokud mají zároveň vnitřní otvor/otvory, jedná se o průřezy masivní duté za předpokladu, že je velikost otvoru malá vzhledem k celkové velikosti průřezu. Pokud není tato podmínka splněna, pak je vhodné takové průřezy uvažovat jako tenkostěnné uzavřené, viz c).



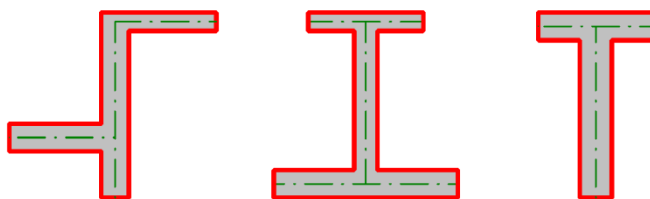
obr. 3.2 - masivní průřezy (a,b,c) plné, (d,e) duté

Pro masivní průřezy obecně platí, že u nich převládá kroucení volné. Nedochází k výrazné deplanaci a tuhost v kroucení je úměrná jejich polárnímu momentu setrvačnosti.

### b) TENKOSTĚNNÉ OTEVŘENÉ PRŮŘEZY

Tenkostěnné otevřené průřezy jsou tvořeny několika navzájem propojenými tenkými obdélníky, tj. obdélníky, u nichž výška výrazně převládá nad šířkou. Jednotlivé tenké obdélníky jsou nazývány větvemi tenkostěnného průřezu. Netvoří uzavřenou křivku, ale naopak mají volné konce.

Geometrii lze nahradit střednicí a tloušťkou jednotlivých větví, viz obr. 3.3.



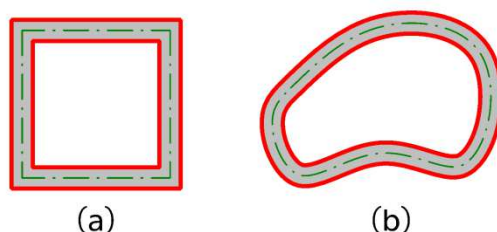
obr. 3.3 - příklady tenkostěnných otevřených průřezů

U tenkostěnných otevřených průřezů převládá kroucení vázané. Velmi výrazně deplanují a již při malých hodnotách krouticího momentu v nich vznikají značná napětí. Důležitou charakteristikou těchto průřezů je poloha středu smyku.

### c) TENKOSTĚNNÉ UZAVŘENÉ PRŮŘEZY

Podobně jako tenkostěnné otevřené průřezy jsou i tenkostěnné uzavřené průřezy tvořeny několika vzájemně spojenými tenkými obdélníky, které ale tvoří uzavřenou křivku, případně se jedná o průřezy obecného tvaru s tenkou stěnou. Tím se výrazně mění jejich chování.

Geometrii lze opět nahradit střednicí a tloušťkou jednotlivých větví, případně funkcí popisující tloušťku po délce střednice, viz obr. 3.4.



obr. 3.4 - tenkostěnné uzavřené průřezy (a) pravidelné, (b) obecné

Tenkostěnné uzavřené průřezy jsou namáhány téměř výhradně volným kroucením. Jejich tuhost v kroucení je úměrná ploše, kterou uzavírá střednice.

### 3.1.3 Volné kroucení

Kroucení prutů, které mohou volně deplanovat, popsal Saint-Venant již roku 1855. Při volném kroucení vznikají 2 složky smykových napětí v rovině průřezu ( $\tau_{xy}$  a  $\tau_{xz}$ ). Z věty o vzájemnosti smykových napětí zároveň vyplývá, že stejně velká napětí musí vznikat i po délce prutu ( $\tau_{yx}$  a  $\tau_{zx}$ ). Z toho je zřejmé, že volné kroucení představuje problém rovinné napjatosti [9].

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_x & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_x \end{pmatrix}$$

tenzor napětí - červeně vyznačeny nenulové členy při volném kroucení

Pro stanovení hodnot těchto napětí je nezbytné znát následující průřezové a materiálové charakteristiky:

- moment tuhosti ve volném kroucení  $I_t$   $[m^4]$ ;
- modul průřezu v kroucení  $W_t$   $[m^3]$ ;
- modul pružnosti ve smyku  $G$   $[Pa]$ .

Na rozdíl od průřezových charakteristik, potřebných například pro osově namáhaný prut či prut namáhaný ohybem, je určení  $I_t$  a  $W_t$  poměrně náročné, neboť je nezbytné nejprve nalézt řešení deplanační funkce.

Modul pružnosti ve smyku ( $G$ ) je definován známým vztahem:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad (3.4)$$

kde  $E$  je modul pružnosti v tahu, v tlaku  
 $\nu$  Poissonův součinitel

Základním vztahem, který propojuje veličiny z podkapitoly 3.1.1, je diferenciální rovnice volného kroucení, viz např. [24]:

$$G \cdot I_t \cdot \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} = 0 \quad (3.5)$$

kde  $G \cdot I_t$  je tuhost průřezu ve volném kroucení, vyjadřující odpor průřezu proti pootočení od volného kroucení

Na pravé straně rovnice se nachází nulová funkce, neboť k čistě volnému kroucení může docházet jen v případě konstantního vnitřního krouticího momentu ( $M_x$ ), který lze stanovit integrací vnějšího krouticího momentu ( $m_x$ ) po délce prutu. Vztah popisující obecné kroucení je uveden v podkapitole 3.1.7.

### 3.1.4 Deplanační funkce - $\psi$

Jak již bylo řečeno, většina průřezů ztrácí při kroucení rovinnost. Hodnotu posunu jednotlivých bodů průřezu z původní roviny v závislosti na poměrném zkroucení vyjadřuje právě deplanační funkce ( $\psi$ ), lze tedy psát [24]:

$$u(x,y,z)=\theta \cdot \psi(y,z) \quad (3.6)$$

kde  $u(x,y,z)$  je posun ve směru osy prvku

Deplanační funkce je definována jako řešení parciální diferenciální rovnice:

$$\frac{\partial^2 \psi(y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi(y,z)}{\partial z^2} = \Delta \psi(y,z) = 0 \quad (3.7)$$

kde  $\Delta$  je Laplaceův operátor  
 $\psi(y,z)$  deplanační funkce

Okrajová podmínka je přitom dána požadavkem aby smykové napětí na okraji průřezu působilo ve směru tečny [6]. Je tedy předepsána normálová derivace deplanační funkce:

$$\frac{\partial \psi(y,z)}{\partial n} = n_y \cdot z - n_z \cdot y = 0 \quad (3.8)$$

kde  $n$  je normála k okraji průřezu

Právě vlivem této okrajové podmínky se stává stanovení průřezových charakteristik kroucených prutů velmi obtížnou úlohou. Analytické řešení deplanační funkce lze nalézt jen pro velmi omezené množství průřezů. Pro obecné a složené průřezy je nezbytné použití numerických metod.

### 3.1.5 Moment tuhosti ve volném kroucení - $I_t$

Mírou odporu průřezu proti kroucení je moment tuhosti ve volném kroucení, který lze pro obecný průřez stanovit ze vztahu:

$$I_t = \iint \left( y^2 + z^2 + \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot y - \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot z \right) dA \quad (3.9)$$

kde  $dA$  je diferenciál plochy průřezu

Tento vztah lze dále upravit na:

$$I_t = \iint (y^2 + z^2) dA + \iint \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot y - \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot z \right) dA = I_p + \iint \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot y - \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot z \right) dA \quad (3.10)$$

kde  $I_p$  je polární moment setrvačnosti

Je zřejmé, že moment tuhosti ve volném kroucení závisí na polárním momentu setrvačnosti, který lze stanovit jako součet dvou kolmých axiálních momentů setrvačnosti a na příspěvku závislém na prvních derivacích deplanační funkce.



Lze dokázat, že hodnota tohoto příspěvku od deplanace je vždy záporná nebo nejméně rovna nule. Proto pro všechny průřezy platí:

$$I_t \leq I_p \quad (3.11)$$

Míru vlivu deplanace na pokles tuhosti průřezu při volném kroucení lze poté vyjádřit zavedením bezrozměrného koeficientu  $\rho$  jako poměru mezi polárním momentem setrvačnosti a momentem tuhosti ve volném kroucení:

$$\rho = \frac{I_t}{I_p} \quad (3.12)$$

Dále jsou uvedeny vztahy pro některé základní tvary průřezů, které byly definovány v podkapitole 3.1.2.

### KRUH, MEZIKRUŽÍ, TENKOSTĚNNÁ TRUBKA

Pro průřezy tvaru kruhu jako jedině platí, že smyková napětí jsou ve všech bodech kolmá na průvodič OP, jak bylo uvedeno v úvodu podkapitoly 3.1. V důsledku toho je deplanační funkce ve všech bodech průřezu nulová a nedochází k deplanaci, průřez se pouze zkrátí ve své rovině. Pro tyto průřezy tedy platí  $I_t = I_p$  a lze tak postupně vyjádřit:

moment tuhosti ve volném kroucení kruhu v závislosti na poloměru ( $r$ ):

$$I_t = I_p = I_z + I_y = \frac{\pi}{4} \cdot r^4 + \frac{\pi}{4} \cdot r^4 = \frac{\pi}{2} \cdot r^4 \quad (3.13)$$

moment tuhosti ve volném kroucení mezikruží v závislosti na vnitřním poloměru ( $r$ ) a vnějším poloměru ( $R$ ):

$$I_t = \frac{\pi}{2} \cdot R^4 - \frac{\pi}{2} \cdot r^4 = \frac{\pi}{2} \cdot (R^4 - r^4) = \frac{\pi}{2} \cdot R^4 \cdot \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^4 \right] \quad (3.14)$$

moment tuhosti ve volném kroucení tenkostěnné trubky, tj. mezikruží, pro které platí, že tloušťka stěny ( $s$ ) je výrazně menší než vnitřní poloměr ( $r$ ):

$$I_t \approx 2 \cdot \pi \cdot r^3 \cdot s \quad (3.15)$$

Na první pohled se může nepochybně zdát, že zkoumání průřezů tvaru kruhu nemá pro železobetonové prvky hlubší opodstatnění, neboť jediný konstrukční prvek takového průřezu je sloup, který nebývá namáhán kroucením.

Kruhové průřezy ovšem nachází své uplatnění ve výzkumné oblasti pro zjištění materiálových vlastností betonu, viz např. experimenty na tenkostěnné trubce z vláknobetonu provedené Ráčkem a Kadlecem [35], [36]. S výhodou se využívá jedinečné vlastnosti nulové deplanace při kroucení, kterou nemá žádný jiný průřez.

Moment tuhosti v kroucení kruhového průřezu může zároveň sloužit jako vhodné měřítko tuhosti ostatních průřezů, neboť je nejefektivnějším průřezem při namáhání kroucením, jelikož má nejvyšší tuhost na jednotku plochy průřezu.

## ELIPSA

Eliptický průřez již deplanuje, ale vztah pro  $I_t$  lze vyjádřit v uzavřeném tvaru:

$$I_t = \pi \cdot \frac{a^3 \cdot b^3}{a^2 + b^2} \quad (3.16)$$

kde  $a$  je delší poloosa elipsy  
 $b$  kratší poloosa elipsy

Dosazením lze snadno dokázat, že pro případ  $a = b$ , tedy kruh, vztah (3.16) přechází na vztah (3.13).

## OBDELNÍK, ÚZKÝ OBDELNÍK, TENKÝ OBDELNÍK

Obdélník patří mezi nejběžnější tvary železobetonových průřezů vůbec. Přesto se ukazuje, že i pro takto jednoduchý geometrický útvar je řešení deplanační funkce velmi náročné a přesný výraz pro moment tuhosti ve volném kroucení není dokonce možné vyjádřit v uzavřeném tvaru:

$$I_t = \frac{1}{3} \cdot b^3 \cdot h \cdot \left[ 1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{b}{h} \cdot \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \cdot \tanh\left(\frac{n \cdot \pi \cdot h}{2 \cdot b}\right) \right] \quad (3.17)$$

kde  $b$  je šířka obdélníkového průřezu ( $b \leq h$ )  
 $h$  výška obdélníkového průřezu

Nekonečná geometrická řada ze vztahu (3.17) nicméně velmi rychle konverguje k hodnotě 1 při poměru mezi výškou a šířkou  $h/b \geq 2$ . Průřez splňující tuto podmínku lze označit jako úzký obdélník a při zaokrouhlení členu  $192/\pi^5 \cong 0,627$  můžeme zjednodušit vztah na:

$$I_t \approx \frac{1}{3} \cdot b^3 \cdot h \cdot \left( 1 - 0,627 \frac{b}{h} \right) \quad (3.18)$$

Pokud poměr mezi výškou a šířkou dále roste, lze přibližně od hodnoty  $h/b \geq 10$  uvažovat tenký obdélník a vztah (3.18) dále zjednodušit na:

$$I_t \approx \frac{1}{3} \cdot b^3 \cdot h \quad (3.19)$$

Vztah (3.19) je třeba používat s opatrností, neboť nadhodnocuje skutečný moment tuhosti ve volném kroucení a analytický vztah (3.17) konverguje k této hodnotě až pro poměr  $h/b \rightarrow \infty$ .

## ČTVEREC

Čtverec je speciálním případem obdélníku. Při dosazení  $b = h$  do vztahu (3.17) vychází:

$$I_t \cong 0,1406 \cdot b^4 \quad (3.20)$$

## OBEČNÝ MASIVNÍ PRŮŘEZ

Pro složitější tvary průřezů než výše uvedené je stanovení analytického výrazu pro  $I_t$  často nemožné, zvláště pokud se jedná o průřezy složené. Přesto lze pro velmi hrubý odhad použít následující vztah:

$$I_t \cong \frac{A^4}{40 \cdot I_p} \quad (3.21)$$

kde  $A$  je plocha průřezu

## TENKOSTĚNNÝ OTEVŘENÝ PRŮŘEZ

Jak bylo uvedeno v podkapitole 3.1.2, tenkostěnné otevřené průřezy se skládají z několika vzájemně spojených tenkých obdélníků. Moment tuhosti ve volném kroucení lze jednoduše vyjádřit jako součet příspěvků jednotlivých větví, kde  $\delta_n$  je tloušťka  $n$ -té větve:

$$I_t \approx \frac{1}{3} \cdot \sum_n \delta_n^3 \cdot h_n \quad (3.22)$$

## TENKOSTĚNNÝ UZAVŘENÝ PRŮŘEZ

Pro tento typ průřezu tvoří tenké stěny uzavřenou křivku a moment tuhosti ve volném kroucení lze na rozdíl od (3.22) vyjádřit v závislosti na ploše uzavřené střednicí stěn:

$$I_t = \frac{\Omega^2}{\oint \frac{1}{\delta(s)} ds} \quad (3.23)$$

kde  $\Omega$  dvojnásobek plochy uzavřené střednicí stěn  
 $\delta(s)$  funkce udávající tloušťku stěny po délce křivky  $s$   
 $s$  křivka vymezená střednicí stěn

### 3.1.6 Modul průřezu v kroucení - $W_t$

Při návrhu konstrukcí obvykle není důležitý celý průběh napětí, ale pouze jeho maximální hodnota, která se porovná s pevností materiálu. Pokud je napětí nižší než pevnost materiálu, pak zvolený průřez vyhovuje požadavku únosnosti<sup>3</sup>.

K odvození vztahů pro kroucené prvky lze jako analogii použít známý vztah maximálního normálového napětí od ohybu:

$$\sigma_{my,max} = \frac{M_y}{W_y} \quad (3.24)$$

kde  $\sigma_{my,max}$  je maximální normálové napětí vyvolané ohybem okolo osy y  
 $M_y$  ohybový moment okolo osy y  
 $W_y$  modul průřezu v ohybu okolo osy y

Zavedením momentu od volného kroucení ( $^1M_x$ ), modulu průřezu v kroucení ( $W_t$ ) a nahrazením normálového napětí za smykové, lze vztah (3.24) přepsat na:

$$\tau_{t,max} = \frac{^1M_x}{W_t} \quad (3.25)$$

kde  $\tau_{t,max}$  je maximální smykové napětí vyvolané volným kroucením

Modul průřezu v kroucení je tedy velmi důležitou průřezovou charakteristikou a v případě železobetonových prvků slouží ke stanovení hodnoty krouticího momentu, při které vzniknou trhliny.

Zcela obecně lze  $W_t$  stanovit v závislosti na momentu tuhosti ve volném kroucení (podobně jako lze stanovit  $W_y$  v závislosti na axiálním momentu setrvačnosti):

$$W_t = \frac{I_t}{k \cdot \lambda} \quad (3.26)$$

kde  $k$  je koeficient průřezu  
 $\lambda$  charakteristický rozměr průřezu

Koeficient průřezu je závislý na průběhu smykového napětí. Pro charakteristický rozměr průřezu obecně platí, že se jedná o menší z rozměrů průřezu. Podobně jako v podkapitole 3.1.5 lze nyní vyjádřit modul průřezu v kroucení pro základní typy průřezů.

#### KRUH

$$W_t = \frac{\pi}{2} \cdot r^3 \quad (3.27)$$

<sup>3</sup> U železobetonových prvků začínají při dosažení pevnosti betonu v tahu vznikat trhliny a účinky zatížení jsou dále přenášeny výztuží, viz podkapitola 3.2.2.

**MEZIKRUŽÍ**

$$W_t = \frac{\pi}{2} \cdot R^3 \cdot \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^4 \right] \quad (3.28)$$

**TENKOSTĚNNÁ TRUBKA**

$$W_t \approx 2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot s \quad (3.29)$$

**ELIPSA**

$$W_t = \frac{\pi}{2} \cdot b^2 a \quad (3.30)$$

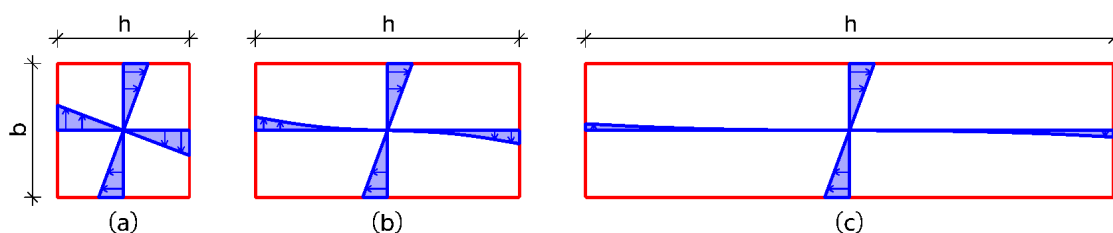
kde  $b$  je kratší poloosa elipsy

**OBDÉLNÍK**

$$W_t = \frac{\pi^2}{24} \cdot b^2 \cdot h \cdot \frac{1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{b}{h} \cdot \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \cdot \tanh\left(\frac{n \cdot \pi \cdot h}{2 \cdot b}\right)}{\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \left[ 1 - \frac{1}{\cosh\left(\frac{n \cdot \pi \cdot h}{2 \cdot b}\right)} \right]} \quad (3.31)$$

kde  $b$  je šířka obdélníkového průřezu ( $b \leq h$ )

Odvození tohoto složitěho vztahu je uvedeno v PŘÍLOZE F, nebo podrobně v [13]. Průběh napětí ve směru hlavních os obdélníkového průřezu pro různý poměr stran je zobrazen na obr. 3.5. Je důležité upozornit, že maximální smykové napětí vzniká uprostřed delších stran, naopak v kratších stranách při rostoucím poměru  $h/b$  klesá. Pro tenký obdélník je prakticky nulové, což je základním předpokladem vztahů pro tenkostěnné otevřené průřezy.



obr. 3.5 - průběh smykového napětí od kroucení pro obdélníkový průřez s různým poměrem stran  $h/b$ ; (a) 1/1, (b) 2/1 (idealizováno), (c) 4/1 (idealizováno)

**ÚZKÝ OBDÉLNÍK**

Vztah (3.31) lze pro úzký obdélník zjednodušit podle [2] na:

$$W_t \approx \frac{1}{3} b^2 h \cdot \left( 1 - 0,627 \cdot \frac{b}{h} \right) \quad (3.32)$$

nebo podle [4] na:

$$W_t \approx b^2 \cdot h \frac{1}{3 + 2 \cdot \frac{b}{h}} \quad (3.33)$$

### TENKÝ OBDÉLNÍK

V případě tenkého obdélníku lze uvažovat limitní hodnotu (3.31) pro  $h/b \rightarrow \infty$ :

$$W_t \approx \frac{1}{3} \cdot b^2 \cdot h \quad (3.34)$$

### ČTVEREC

Dosazením  $b=h$  do (3.31) vychází:

$$W_t \approx 0,2082 \cdot b^3 \quad (3.35)$$

### TENKOSTĚNNÝ OTEVŘENÝ PRŮŘEZ

U tenkostěnných otevřených průřezů lze vztah pro modul průřezu v kroucení odvodit ze vztahu pro maximální smykové napětí v  $n$ -té větvi:

$$\tau_{t,max,n} = \frac{^1M_x}{I_k} \cdot \delta_n \quad (3.36)$$

kde  $I_k$  je moment tuhosti ve volném kroucení celého průřezu

Ze vztahu vyplývá, že celkové největší smykové napětí musí působit ve větvi s největší tloušťkou  $\delta_{max}$ . Vztah pro modul průřezu je proto:

$$W_t = \frac{I_k}{\delta_{max}} \quad (3.37)$$

### TENKOSTĚNNÝ UZAVŘENÝ PRŮŘEZ

U uzavřených tenkostěnných průřezů se předpokládá, že smykový tok podél střednice je konstantní. Podobně jako pro otevřené průřezy lze modul průřezu v kroucení odvodit ze vztahu (známého též jako Bredtův vzorec) pro maximální smykové napětí v místě s tloušťkou stěny  $\delta_n$ :

$$\tau_{t,max,n} = \frac{t_t}{\delta_n} = \frac{^1M_x}{\Omega \cdot \delta_n} \quad (3.38)$$

V tomto případě, na rozdíl od (3.36), vzniká celkově největší smykové napětí v místě s nejmenší tloušťkou stěny  $\delta_{min}$ . Vztah pro modul průřezu je proto:

$$W_t = \Omega \cdot \delta_{min} \quad (3.39)$$

### 3.1.7 Vázané kroucení

Kroucení prutů, u kterých je deplanaci bráněno, zkoumal v první polovině 20. stol. Vlasov a roku 1940 představil teorii vázaného kroucení. Podobně jako při volném kroucení vznikají dvě dvojice sdružených smykových napětí ( ${}^2\tau_{xy}, {}^2\tau_{yx}, {}^2\tau_{xz}$  a  ${}^2\tau_{zx}$ ). Zároveň ale vzniká normálové napětí ( $\sigma_x$ ) jako důsledek bránění deplanaci, které je obecně rozděleno nerovnoměrně po průřezu.

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_x & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_x \end{pmatrix}$$

tenzor napětí - červeně vyznačeny nenulové členy při vázaném kroucení

Pro stanovení hodnot těchto napětí je nezbytné znát následující průřezové a materiálové charakteristiky:

- výsečová souřadnice  $\omega$  [m<sup>2</sup>];
- výsečový moment setrvačnosti  $I_\omega$  [m<sup>6</sup>];
- modul pružnosti v tahu, v tlaku  $E$  [Pa].

Při zkoumání vázaného kroucení je navíc nezbytné nalézt důležitý bod, okolo kterého se celý průřez otáčí. Nazývá se střed smyku (C).

Vztah, který propojuje základní veličiny z podkapitoly 3.1.1, tedy diferenciální rovnice vázaného kroucení, viz např. [33], lze psát ve tvaru:

$$E \cdot I_\omega \cdot \frac{\partial^4 \varphi_x}{\partial x^4} = m_x \quad (3.40)$$

kde  $E \cdot I_\omega$  je tuhost průřezu ve vázaném kroucení, vyjadřující odpor průřezu proti pootočení a deplanaci od vázaného kroucení

Tento vztah lze spojit s rovnicí (3.5) a získat diferenciální rovnici popisující obecné kroucení, viz opět [33]:

$$E \cdot I_\omega \cdot \frac{\partial^4 \varphi_x}{\partial x^4} - G \cdot I_t \cdot \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} = m_x \quad (3.41)$$

### 3.1.8 Výsečová souřadnice - $\omega$

Výsečová souřadnice  $\omega$  je charakteristikou průřezu analogickou k souřadnicím  $y, z$ , která udává dvojnásobek plochy opsané průvodičem vedeným mezi pólem a hlavním počátkem směrem k posuzovanému bodu průřezu. Pokud zvolený pól není středem smyku, pak výsečovou souřadnici označujeme jako pomocnou  $\omega^p$ .

Analytické stanovení výsečové souřadnice je možné pouze pro tenkostěnné průřezy, kde geometrii nahrazujeme střednicí jednotlivých větví. Průběh  $\omega$  je důležitý především pro otevřené tenkostěnné průřezy, neboť u nich je vliv vázaného kroucení rozhodující.

Výsečová souřadnice a pomocná výsečová souřadnice jsou nezbytné pro nalezení středu smyku a stanovení průběhu normálového napětí od vázaného kroucení.

### 3.1.9 Střed smyku - C

Střed smyku je definován jako bod, kterým prochází výslednice všech smykových napětí působících v průřezu [9]. Pro tenkostěnné průřezy lze jeho polohu obecně stanovit z pomocné výsečové souřadnice. Ta slouží k výpočtu pomocných výsečových deviačních momentů  $I_{\omega y}^p$ ,  $I_{\omega z}^p$  a axiálních momentů setrvačnosti  $I_y$ ,  $I_z$ . Z jejich podílu lze určit posun (opravu) polohy zvoleného pólu tak, aby se stal pólem hlavním, tedy středem smyku:

$$c_y = \frac{I_{\omega y}^p}{I_y} \quad (3.42)$$

$$c_z = \frac{I_{\omega z}^p}{I_z} \quad (3.43)$$

kde  $c_y$  je posun pólu ve směru osy y  
 $c_z$  posun pólu ve směru osy z

Pro dvouose symetrické průřezy není třeba polohu středu smyku určovat výpočtem, neboť je shodná s polohou těžiště průřezu. Pokud má průřez alespoň jednu osu symetrie, pak lze dokázat, že střed smyku bude ležet na této ose a výpočet lze zjednodušit na hledání jediného posunu (3.42) nebo (3.43).

Pro stanovení středu smyku masivních průřezů je třeba použít numerický výpočet (pokud se nejedná o dvouose symetrický průřez).

Poloha středu smyku je klíčová především pro nesymetrické průřezy, jelikož je odlišná od polohy těžiště. Krouticí moment, na který bude prvek dimenzován, je nezbytné stanovit nikoli vzhledem k těžišti, ale ke středu smyku (viz [9] a [33]). Pouze pokud výslednice vnějších příčných sil prochází středem smyku, není průřez kroucen [26].

### 3.1.10 Výsečový moment setrvačnosti - $I_{\omega}$

Jakmile známe polohu středu smyku, můžeme stanovit průběh výsečové souřadnice, kterou již neoznačujeme jako pomocnou. Parametrem tuhosti ve vázaném kroucení je výsečový moment setrvačnosti, který lze vyjádřit ze vztahu:

$$I_{\omega} = \iint \omega^2 dA \quad (3.44)$$

U tenkostěnných průřezů lze vztah převést na integraci po křivce (střednici) a hodnotu  $I_{\omega}$  určit analyticky. Pro masivní průřezy je třeba opět použít přibližné numerické metody.

### 3.1.11 Výpočet napětí od vázaného kroucení

Průřezové charakteristiky stanovené v podkapitolách 3.1.8 a 3.1.10 jsou nezbytné pro stanovení průběhu napětí od vázaného kroucení v průřezu. Nejprve je ale



nutné definovat vztahy pro bimoment ( $B$  [ $\text{Nm}^2$ ]) a moment od vázaného kroucení ( ${}^2M_x$  [ $\text{Nm}$ ]):

$$B = -E \cdot I_\omega \cdot \frac{d\theta}{dx} \quad (3.45)$$

$${}^2M_x = \frac{dB}{dx} = -E \cdot I_\omega \cdot \frac{d^2\theta}{dx^2} \quad (3.46)$$

Nyní lze stanovit normálová ( $\sigma_{t,x}$ ) a druhotná smyková ( ${}^2\tau_{t,xi}$ ) napětí způsobená vázaným kroucením:

$$\sigma_{t,x} = \frac{B}{I_\omega} \cdot \omega \quad (3.47)$$

$${}^2\tau_{t,xs,n} = \frac{{}^2M_x \cdot S_\omega}{\delta_n \cdot I_\omega} \quad (3.48)$$

kde  $S_\omega$  je statický výsečový moment oddělené části průřezu  
 $\delta_n$  tloušťka n-té větve průřezu

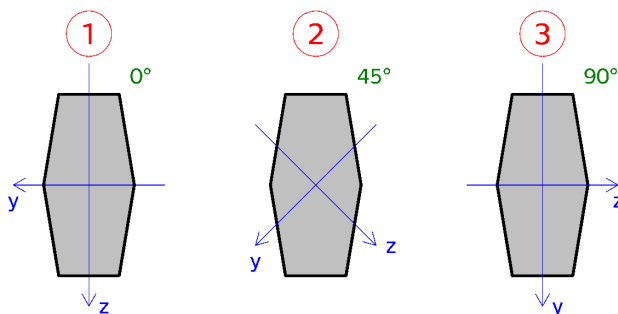
Vztah (3.48) platí pouze pro tenkostěnné průřezy. Při výpočtu druhotného smykového napětí na masivním průřezu je třeba použít numerické řešení.

### 3.1.12 Nezávislost průřezových charakteristik na natočení souřadného systému

Na rozdíl od většiny ostatních průřezových charakteristik (např. axiálních momentů setrvačnosti) jsou průřezové charakteristiky pro analýzu kroucených prutů nezávislé (invariantní) na zvoleném souřadném systému.

Pro obecný průřez z obr. 3.6 lze proto postupně psát:

$$\begin{aligned} I_{t,1} &= I_{t,2} = I_{t,3} \\ W_{t,1} &= W_{t,2} = W_{t,3} \\ I_{\omega,1} &= I_{\omega,2} = I_{\omega,3} \end{aligned}$$

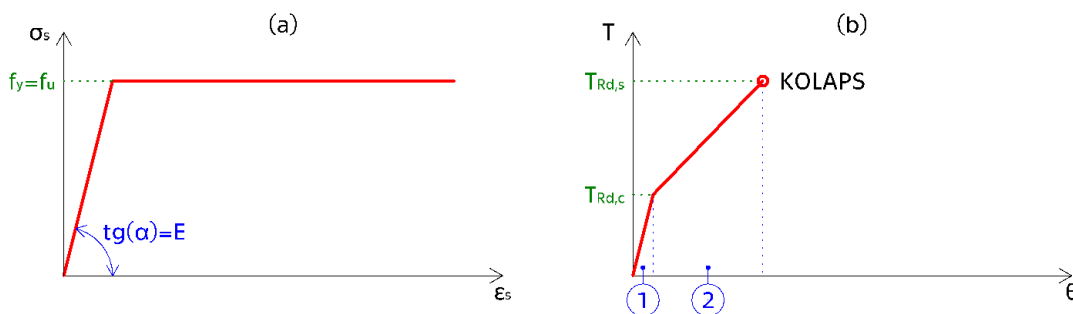


obr. 3.6 - příklady natočení souřadného systému pro obecný průřez

## 3.2 Chování kroucených železobetonových prvků

Závislost mezi působícím zatížením a přetvořením není pro železobetonové prvky obecně lineární. V případě krouceného prvku se chování mění v závislosti na velikosti krouticího momentu ( $T$ )<sup>4</sup>. Nejvyšší tuhosti průřez dosahuje před vznikem trhlin, poté tuhosti skokově klesá. Pokud se předpokládá pružnoplastický pracovní diagram výztuže bez zpevnění, pak závislost poměrného zkroucení ( $\theta$ ) na krouticím momentu zobrazuje obr. 3.7:

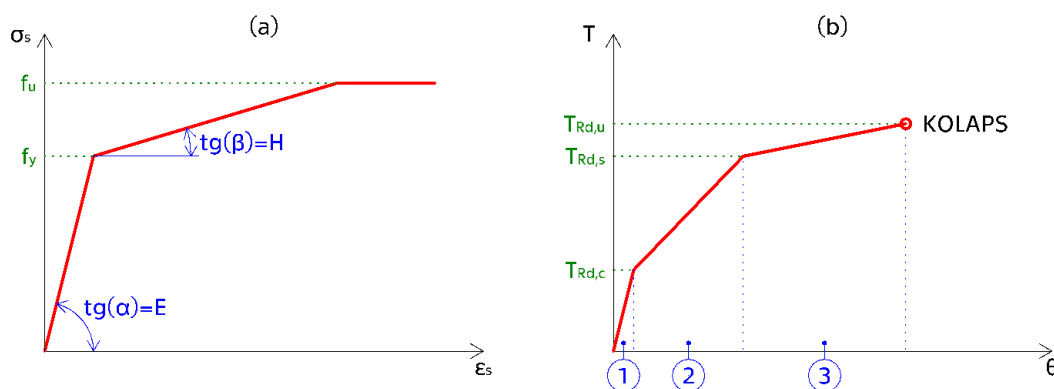
kde  $f_y$  je mez kluzu výztuže, shodná s mezí pevnosti  $f_u$   
 $T_{Rd,c}$  krouticí moment při vzniku trhlin  
 $T_{Rd,s}$  krouticí moment, který může převzít smyková výztuž na mezi kluzu.



obr. 3.7 - (a) pružnoplastický pracovní diagram výztuže bez zpevnění; (b) odpovídající idealizovaný T- $\theta$  diagram krouceného železobetonového prvku (převzato z [2])

Z obrázku je patrné, že ke kolapsu konstrukce dochází okamžikem dosažení meze kluzu výztuže. Skutečná konstrukce je ale ještě schopná přenést malý přírůstek krouticího momentu, přestože dochází k značnému rozevírání trhlin, neboť výztuž vykazuje zpevnění. Takové chování zobrazuje obr. 3.8:

kde  $H$  je modul zpevnění (viz např. [3])  
 $T_{Rd,u}$  krouticí moment, který může převzít smyková výztuž na mezi únosnosti



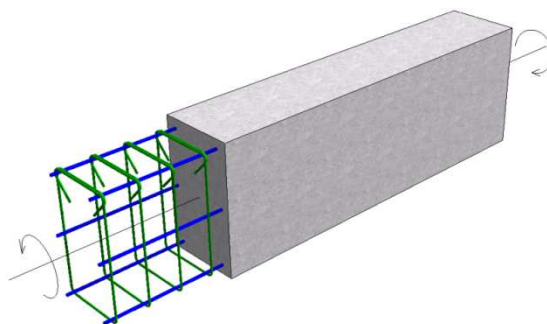
obr. 3.8 - (a) pružnoplastický pracovní diagram výztuže se zpevněním; (b) odpovídající idealizovaný T- $\theta$  diagram krouceného železobetonového prvku

Z uvedeného vyplývá, že chování prvku lze rozdělit do 3 fází, které jsou popsány dále.

<sup>4</sup> Zatímco v teorii pružnosti je zvykem značit krouticí moment  $M_x$ , při analýze železobetonových prvků je běžnější označení  $T$ . Význam je ekvivalentní, platí  $M_x = T$ .

### 3.2.1 Fáze 1: plný průřez bez trhlin

Pokud krouticí moment nepřekročí jistou kritickou hodnotu (viz vztah (3.50)), vzdoruje kroucení celý železobetonový průřez, přičemž výztuž není prakticky využita (viz [2]). Za takového stavu lze pro analýzu prvku použít vztahy z teorie pružnosti, viz podkapitola 3.1.



obr. 3.9 - kroucený železobetonový prvek před vznikem trhlin

Vyjádříme-li moment tuhosti ve volném kroucení průřezu se zanedbáním vlivu výztuže (dle vztahů z podkapitoly 3.1.5), můžeme stanovit poměrné zkroucení prvku jako:

$$\theta = \frac{T}{G \cdot I_t} \quad (3.49)$$

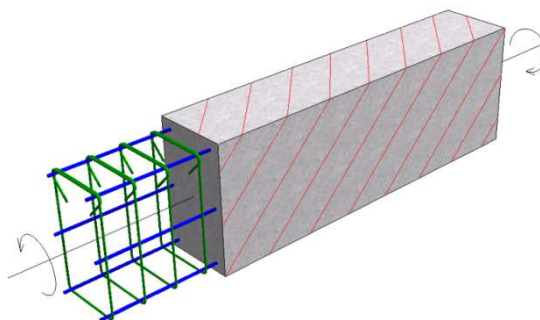
kde  $T$  je působící krouticí moment

### 3.2.2 Fáze 2: průřez s trhlinami

Okamžikem vzniku trhlin se chování prvku značně mění. Hodnotu krouticího momentu, při kterém k tomu dochází, lze přibližně stanovit dosazením návrhové pevnosti betonu v tahu ( $f_{ctd}$ ) do vztahu (3.25) [4]:

$$T_{Rd,c} = W_t \cdot f_{ctd} \quad (3.50)$$

Trhliny vznikají po obvodu průřezu ve tvaru šroubovice se sklonem přibližně  $45^\circ$  k ose prvku (viz obr. 3.10). Sklon se může měnit v závislosti na poměru plochy svislé a podélné výztuže (viz podkapitola 3.3). Tuhost celého prvku značně klesá a na přenosu krouticího momentu se podílí téměř výhradně výztuž tvořená jak svislými třmínky, tak podélnými pruty.



obr. 3.10 - kroucený železobetonový prvek s trhlinami (idealizováno)

Pro popis chování v této fázi již není možné použít základní vztahy z teorie pružnosti. Vhodné je použití modelu příhradové analogie (viz podkapitola 3.3).

V případě, že prvek není vyztužen na účinky kroucení, dochází v okamžiku dosažení  $T_{Rd,c}$  k náhlému kolapsu.

Vztah pro poměrné zkroucení již nelze vyjádřit jednoduše jako v rovnici (3.49) a je třeba použít nepřímý výpočet založený na hodnotách protažení výztuže. Podrobnosti lze nalézt např. v [2].

### 3.2.3 Fáze 3: zplastizování výztuže

Únosnost prvku v kroucení je ve všech návrhových postupech omezena okamžikem zplastizování výztuže. Hodnotu krouticího momentu  $T_{Rd,s}$ , při kterém takový stav nastane, lze nalézt v následujících podkapitolách.

Jak již bylo řečeno, skutečná výztuž po překročení meze kluzu vykazuje jisté zpevnění a prvek tak zkolabuje až při dosažení krouticího momentu  $T_{Rd,u}$ . Pro srovnání viz obr. 3.7a obr. 3.8.

Pokud je prvek převyztužen, může nastat stav, kdy výztuž ještě nedosáhla meze kluzu, ale dochází k tlakovému porušení betonu (tzv. drcení tlakových diagonál). Takové porušení je náhlé a není provázeno výraznou deformací. Všechny prvky by měly být navrženy tak, aby tento stav nemohl nastat.

## 3.3 NP1: Příhradová analogie

Model příhradové analogie byl poprvé představen Rauschem roku 1929 jako vhodný nástroj pro analýzu oblastí železobetonových konstrukcí, kde není splněna Bernoulliho hypotéza o rovinnosti a kolmosti průřezu po deformaci (tzv. D-oblasti). Příhradová analogie se uplatní např. v místě podpor, v blízkosti soustředěných sil nebo při rovinné napjatosti. Základní pravidla pro tvorbu těchto modelů lze nalézt v EC2-1-1 [16], podrobně se problematikou zabývá např. Kohoutková [5]. Prostorový příhradový model pro prutové prvky namáhané kroucením, ohybem nebo osovou silou vyvinuli Lampert a Thürlimann [8].

### 3.3.1 Základní pravidla pro příhradové modely

Na rozdíl od oblastí s lineárním rozdělením přetvoření neexistuje pro D-oblasti zpravidla pouze jediný správný příhradový model popisující dokonale chování konstrukce v daném místě. Aby se model co nejvíce blížil skutečnosti, měl by vystihovat především průběh hlavních tahových a tlakových napětí. Příhradové modely sestávají ze tří základních prvků.

#### TÁHLA

Představují výztuž železobetonového prvku. Únosnost táhel je omezena dosažením meze kluzu.

## VZPĚRY

Představují tlačené betonové diagonály. Dle geometrie se dělí na:

- vzpěry s rovnoběžnými vlákny;
- vějířové vzpěry;
- baňkovité vzpěry.

Únosnost vzpěr v oblastech s příčným tlakovým napětím nebo bez příčného napětí je omezena pevností betonu v tlaku:

$$\sigma_{Rd,max} = f_{cd} \quad (3.51)$$

V oblastech s trhlinami je nutné únosnost redukovat součinitelem  $v'$ :

$$v' = 1 - \frac{f_{ck}}{250} \quad (3.52)$$

kde  $f_{ck}$  je charakteristická válcová pevnost betonu v tlaku v MPa

a výsledná únosnost je:

$$\sigma_{Rd,max} = 0,6 \cdot v' \cdot f_{cd} \quad (3.53)$$

## STYČNÍKY

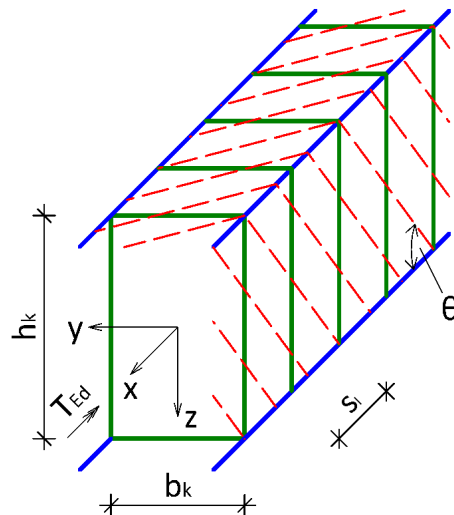
Styčníky jsou místa, ve kterých se stýkají táhla a vzpěry. Lze je dělit na tři základní typy:

- CCC;
- CCT;
- CTT,

kde C značí připojení tlačného prutu (vzpěry), zatímco T připojení taženého prutu (táhla). Únosnost jednotlivých typů se liší, podrobně viz např. [5] nebo [16].

### 3.3.2 Model pro prvek namáhaný čistým kroucením

Model byl navržen Lampertem a Thürlimannem [8]. Sestává z příčných táhel představujících třmínky s podélnou osovou vzdáleností  $s_1$  a z podélných táhel představujících podélnou výztuž koncentrovanou do rohů třmínků. Takový model tvoří sám o sobě kinematický mechanismus. Ke stabilizaci slouží betonové tlakové diagonály se sklonem  $\theta$  vzhledem k podélné ose prvku. Úhel  $\theta$  má stejnou hodnotou pro všechny hrany průřezu.



obr. 3.11 - model náhradní příhradoviny pro kroucený prvek (převzato z [8])

Jelikož má takto definovaný model (viz obr. 3.11) nekonečné množství řešení v závislosti na sklonu tlakových diagonál, zavádí se doplňková podmínka, aby došlo k zplastizování třmíneků i podélné výztuže ve stejném okamžiku, čímž je z množiny řešení vybráno jediné a úhel  $\theta$  je závislý na poměru příčné a podélné výztuže. Zároveň se předpokládá, že prvek není převyztužen, a proto nedojde k drcení betonu. V mezním plastickém stavu, který představuje únosnost celého modelu, proto nedochází k disipaci energie v tlakových diagonálách, ale pouze v táhlech.

Pro stanovení mezního plastického stavu zavádí Jirásek [3] součinitel zatížení ( $\mu$ ), který vyjadřuje násobek současného zatížení, při kterém je dosaženo právě mezního plastického stavu konstrukce. Pro prut zatížený výhradně kroučícím momentem lze součinitel zatížení vyjádřit jednoduše ve tvaru:

$$\mu = \frac{T_0}{T} \quad (3.54)$$

kde  $T_0$  je hodnota kroučícího momentu, při které je dosaženo mezního plastického stavu  
 $T$  je současná hodnota kroučícího momentu

Jirásek dále uvádí:

### ZÁKLADNÍ VĚTA MEZNÍ PLASTICKÉ ANALÝZY

"Pro libovolný staticky přípustný součinitel zatížení  $\mu_s$  a libovolný kinematicky přípustný součinitel zatížení  $\mu_k$  platí nerovnost  $\mu_s \leq \mu_k$ ."

Popisuje též 2 možné postupy pro stanovení součinitele zatížení, který odpovídá meznímu plastickému stavu  $\mu_0$ :

### STATICKÁ VĚTA MEZNÍ PLASTICKÉ ANALÝZY (DOLNÍ ODHAD):

"Součinitel zatížení v mezním plastickém stavu je největší ze všech staticky přípustných součinitelů. Libovolný staticky přípustný součinitel je tedy jeho dolním odhadem."

$$\mu_0 = \max(\mu_s) \quad (3.55)$$

### KINEMATICKÁ VĚTA MEZNÍ PLASTICKÉ ANALÝZY (HORNÍ ODHAD):

"Součinitel zatížení v mezním plastickém stavu je nejmenší ze všech kinematically přípustných součinitelů. Libovolný kinematically přípustný součinitel je tedy jeho horním odhadem."

$$\mu_0 = \min(\mu_k) \quad (3.56)$$

Dle teorie plasticity je tedy možné těmito dvěma postupy nalézt únosnost příhradového modelu.

### 3.3.3 Krouticí moment na mezi kluzu výztuže - $T_{Rd,s}$

Odvození řešení dle statické a kinematically věty mezní plastické analýzy pro prvek obdélníkového průřezu lze nalézt v [8], řešení může být rozšířeno i na obecný průřez. Vztah pro největší staticky přípustný a nejmenší kinematically přípustný krouticí moment, a tedy krouticí moment na mezi kluzu výztuže je dán následovně:

$$T_{Rd,s} = 2 \cdot A_k \cdot \sqrt{\frac{A_{sw} \cdot f_{ywd}}{s_l} \cdot \frac{\Sigma A_{sl} \cdot f_{yd}}{u_k}} \quad (3.57)$$

- kde
- $A_k$  je plocha uzavřená spojnici os podélných prutů
  - $A_{sw}$  plocha jedné větve třmínku
  - $f_{ywd}$  návrhová mez kluzu betonářské smykové výztuže
  - $s_l$  podélná osová vzdálenost sestav třmínkové výztuže
  - $\Sigma A_{sl}$  celková průřezová plocha podélné výztuže na kroucení
  - $f_{yd}$  návrhová mez kluzu podélné výztuže
  - $u_k$  obvod plochy  $A_k$

Úhel sklonu tlakových diagonál je jednoznačně určen poměrem mezi podélnou a příčnou výztuží:

$$\operatorname{tg}(\theta) = \sqrt{\frac{A_{sw} \cdot f_{ywd}}{s_l} \cdot \frac{u_k}{\Sigma A_{sl} \cdot f_{yd}}} \quad (3.58)$$

$$\theta = \arctg \left( \sqrt{\frac{A_{sw} \cdot f_{ywd}}{s_l} \cdot \frac{u_k}{\Sigma A_{sl} \cdot f_{yd}}} \right) \quad (3.59)$$

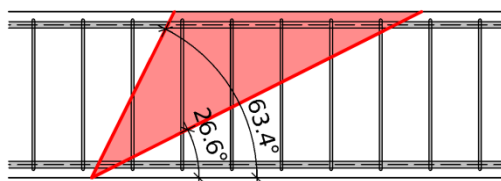
Pro speciální případ  $A_{sw} f_{ywd} u_k = \Sigma A_{sl} f_{yd} \cdot s_l$  platí  $\theta = 45^\circ$ .

### 3.3.4 Omezení modelu a závěrečné poznámky

Z experimentálních testů i teoretických úvah vyplývá, že výrazná nerovnováha mezi podélným a příčným vyztužením může způsobit takový sklon tlakových diagonál, při kterém dojde k drčení betonu před dosažením meze kluzu výztuže [8]. Proto se úhel  $\theta$  omezuje na interval:

$$0,5 < \text{tg}(\theta) < 2,0 \quad (3.60)$$

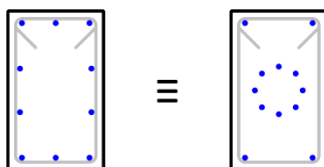
$$26,6^\circ < \theta < 63,4^\circ \quad (3.61)$$



obr. 3.12 - grafická interpretace omezení úhlu  $\theta$  pro model příhradové analogie

Při vyjádření množství výztuže na jednotku délky prvku jako funkce úhlu  $\theta$  lze derivováním nalézt minimum této funkce [8]. Minimum nastává pro úhel  $\theta = 45^\circ$ . Je proto vhodné volit takové vyztužení, které se blíží této hodnotě.

Z rovnováhy sil rohového detailu příhradového modelu vyplývá, že pro konstantní krouticí moment je podélná složka síly v tlakových diagonálách vyrovnána silou v podélné výztuži nezávisle na poloze této výztuže uvnitř průřezu [8]. Pro tento speciální případ konstantního krouticího momentu lze proto podélnou výztuž na kroucení provést jakýmkoli způsobem z obr. 3.13.



obr. 3.13 - nezávislost polohy podélné výztuže pro  $T = \text{konst}$  (převzato z [8])

Pokud je prvek kromě krouticího momentu namáhán zároveň ohybovým momentem, je možné v tlačené oblasti redukovat plochu podélné výztuže na kroucení úměrně působící tlakové síle.

Představený příhradový model lze aplikovat pouze na prvky s masivním nebo tenkostěnným uzavřeným průřezem (viz podkapitola 3.1.2), u kterého jsou všechny rozměry stejného řádu a trhliny tak vzniknou po celém obvodu průřezu. Pro tenkostěnné otevřené průřezy, kde vázané kroucení dosahuje stejných nebo vyšších hodnot než volné kroucení a trhliny vznikají jen na delších hranách průřezu tento model použít nelze.

## 3.4 NP2: ČSN EN 1992-1-1

Norma ČSN EN 1992-1-1 ed. 2 - Navrhování betonových konstrukcí - Obecná pravidla a pravidla pro pozemní stavby [16] z roku 2011 představuje základní



dokument pro návrh konstrukcí ze železobetonu v České republice a ostatních zemích Evropské unie.

Pro stanovení účinků kroucení doporučuje norma převést skutečný průřez na analogický tenkostěnný dutý průřez (dále ATDP) s konstantním smykovým tokem (viz podkapitola 3.1.6). Návrh výztuže na smyk od kroucení se provádí na základě analogie se smykem od posouvající síly.

Před samotným návrhem je vhodné definovat některé základní veličiny:

- |  |                  |       |
|--|------------------|-------|
| • úhel sklonu tlakových diagonál             | $\theta$         | [°];  |
| • návrhová pevnost betonu v tahu             | $f_{ctd}$        | [Pa]; |
| • návrhová pevnost betonu v tlaku            | $f_{cd}$         | [Pa]; |
| • návrhová mez kluzu podélné/smykové výztuže | $f_{yd}/f_{ywd}$ | [Pa]; |
| • součinitel stavu napětí v tlačném pásu     | $\alpha_{cw}$    | [-].  |

### 3.4.1 Úhel sklonu tlakových diagonál - $\theta$

V podkapitole 3.3.3 bylo odvozeno, že úhel sklonu tlakových diagonál je jednoznačně určen poměrem mezi podélnou a příčnou výztuží (3.59). V případě, že je cílem tuto výztuž navrhnout, je nezbytné provést inverzní postup a nejprve úhel  $\theta$ , resp. kotangens tohoto úhlu, odhadnout.

Norma omezuje volbu na interval:

$$1,0 \leq \cotg(\theta) \leq 2,5 \quad (3.62)$$

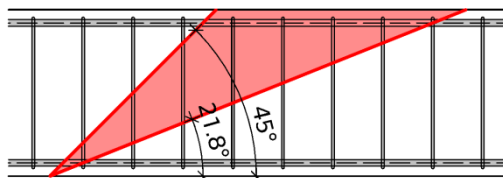
$$45^\circ \geq \theta \geq 21,8^\circ \quad (3.63)$$

Národní příloha normy [17] upřesňuje toto omezení v závislosti na osově síle, která spolupůsobí s kroučícím momentem.

Pro prvky s výraznou tlakovou silou ( $N \ll 0$ ):

$$1,0 \leq \cotg(\theta) \leq 2,5 \quad (3.64)$$

$$45^\circ \geq \theta \geq 21,8^\circ \quad (3.65)$$

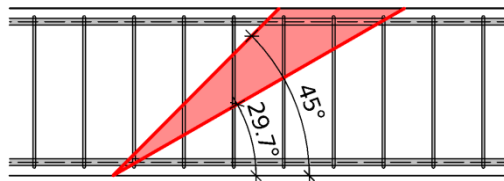


obr. 3.14 - grafická interpretace omezení úhlu  $\theta$  dle NA EC2-1-1 ( $N \ll 0$ )

Pro prvky bez výrazné osově síly ( $N \cong 0$ ):

$$1,0 \leq \cotg(\theta) \leq 1,75 \quad (3.66)$$

$$45^\circ \geq \theta \geq 29,7^\circ \quad (3.67)$$

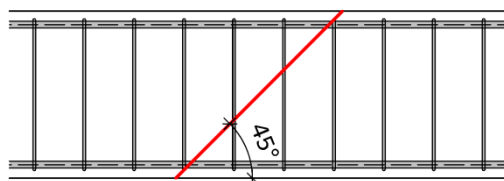


obr. 3.15 - grafická interpretace omezení úhlu  $\theta$  dle NA EC2-1-1 ( $N \cong 0$ )

Pro prvky s výraznou tahovou silou ( $N \gg 0$ ):

$$\cotg(\theta)=1,0 \quad (3.68)$$

$$\theta=45^\circ \quad (3.69)$$



obr. 3.16 - grafická interpretace omezení úhlu  $\theta$  dle NA EC2-1-1 ( $N \gg 0$ )

Pokud dochází k interakci se smykem od posouvající síly, je vhodné zvolit jednotný úhel  $\theta$ . Poté je možné pro návrh prvku účinky obou druhů namáhání sečíst.

### 3.4.2 Návrhová pevnost betonu v tahu - $f_{ctd}$

Trhliny v železobetonovém prvku namáhaném kroucením vznikají přibližně v okamžiku, kdy smykové napětí dosáhne v některém místě průřezu pevnosti betonu v tahu [4]. Návrhová hodnota se stanoví ze vztahu:

$$f_{ctd} = \frac{\alpha_{ct} \cdot f_{ctk,0.05}}{\gamma_C} \quad (3.70)$$

kde  $\alpha_{ct}$  je součinitel, kterým se zohledňují dlouhodobé účinky na pevnost v tahu a nepříznivé účinky vyplývající ze způsobu zatěžení<sup>5</sup>  
 $f_{ctk,0.05}$  charakteristická pevnost betonu v dostředném tahu (5 % kvantil)  
 $\gamma_C$  dílčí součinitel betonu

### 3.4.3 Návrhová pevnost betonu v tlaku - $f_{cd}$

Únosnost tlakových diagonál je přímo úměrná pevnosti betonu v tlaku. Návrhová hodnota se stanoví ze vztahu:

$$f_{cd} = \frac{\alpha_{cc} \cdot f_{ck}}{\gamma_C} \quad (3.71)$$

<sup>5</sup> Doporučená hodnota pro ČR je 1.

kde  $\alpha_{cc}$  je součinitel, kterým se zohledňují dlouhodobé účinky na pevnost v tlaku a nepříznivé účinky vyplývající ze způsobu zatěžování<sup>6</sup>  
 $f_{ck}$  charakteristická válcová pevnost betonu v tlaku

### 3.4.4 Návrhová mez kluzu podélné/smykové výztuže - $f_{yd}/f_{ywd}$

V podkapitole 3.3.3 bylo odvozeno, že únosnost prvku v kroucení po vzniku trhlin je omezena mezí kluzu výztuže. Návrhová hodnota meze kluzu pro podélnou a smykovou výztuž se stanoví ze vztahů:

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_S} \quad (3.72)$$

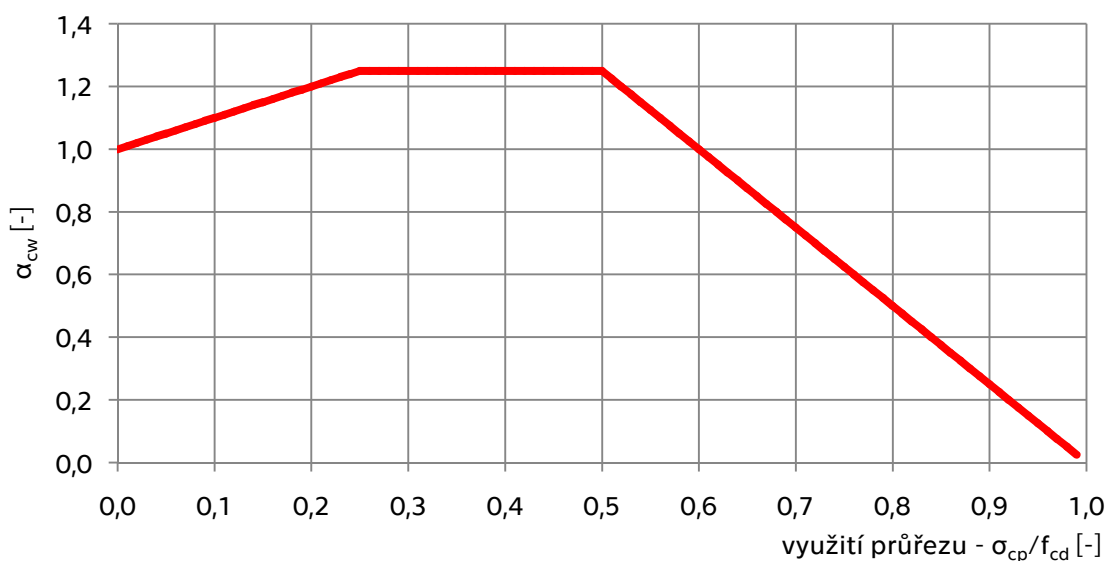
$$f_{ywd} = \frac{f_{ywk}}{\gamma_S} \quad (3.73)$$

kde  $f_{yk}$  charakteristická mez kluzu podélné výztuže  
 $f_{ywk}$  charakteristická mez kluzu smykové výztuže  
 $\gamma_S$  dílčí součinitel betonářské oceli

### 3.4.5 Součinitel stavu napětí v tlačném pásu - $\alpha_{cw}$

V případě, že je prvek namáhán kromě kroucení také tlakovou normálovou silou od vnějšího zatížení nebo předpětí, je třeba upravit únosnost tlakových diagonál pomocí součinitele  $\alpha_{cw}$ , jehož hodnota je dle míry využití průřezu v tlaku stanovena v [16].

Průběh součinitele pro využití průřezu v intervalu 0-99 % zobrazuje graf 3.1. Je patrné, že pokud tlaková síla nepřekročí 60 % pevnosti betonu, dochází ke zvýšení únosnosti tlakových diagonál. Za touto mezí únosnost naopak klesá.



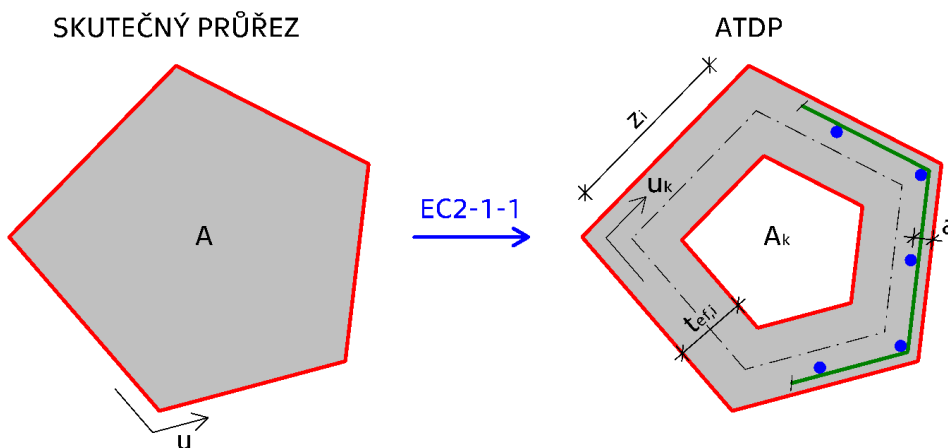
graf 3.1 - průběh  $\alpha_{cw}$

<sup>6</sup> Doporučená hodnota pro ČR je 1.

### 3.4.6 Analogický tenkostěnný dutý průřez

Únosnost průřezu v kroucení lze dle EC2-1-1 vypočítat na ATDP s konstantním uzavřeným smykovým tokem, který pro masivní průřez vychází z poměru plochy a obvodu průřezu, pro tenkostěnné uzavřené průřezy je ATDP shodný se skutečným průřezem. Postup převodu skutečného průřezu na ATDP je zobrazen na obr. 3.17. Základní charakteristiky ATDP jsou definovány následovně:

- A plocha skutečného průřezu uvnitř vnějšího okraje, včetně ploch vnitřních otvorů
- u vnější obvod průřezu
- $t_{ef,i}$  účinná tloušťka i-té stěny ATDP, stanovená dle (3.74) s omezením dle (3.75)
- $z_i$  délka střednice i-té stěny ATDP
- $A_k$  plocha omezená střednicemi stěn ATDP, včetně ploch vnitřních otvorů
- $u_k$  obvod plochy  $A_k$ , stanovený jako součet všech  $z_i$



obr. 3.17 - převod skutečného průřezu na ATDP (převzato z [16])

Tloušťka stěn ATDP se stanoví podle vztahu (3.74) s omezením podle (3.75):

$$t_{ef,i} = \frac{A}{u} \quad (3.74)$$

$$2 \cdot a \leq t_{ef,i} \leq t_{skut,i} \quad (3.75)$$

- kde  $a$  vzdálenost mezi vnějším okrajem ATDP a osou podélné výztuže
- $t_{skut,i}$  skutečná tloušťka i-té stěny v případě dutého nebo tenkostěnného uzavřeného průřezu

Pro plný masivní průřez je tloušťka stěny ATDP konstantní.

Složené masivní nekonvexní průřezy (např. tvaru T nebo L) je vhodné rozdělit na sérii dílčích průřezů a každý modelovat jako samostatný ATDP. Rozdělení působícího krouticího momentu na dílčí průřezy má být úměrné jejich tuhosti v kroucení před vznikem trhlin (viz vztah (3.81)). Celková únosnost průřezu je součtem únosností dílčích průřezů.

### 3.4.7 Limitní rozměry obdélníkového průřezu

Před posouzením průřezu je vhodné nejprve ověřit, zda lze ATDP použít pro obdélníkový průřez<sup>7</sup> s libovolným poměrem stran. Tedy zda nemůže nastat stav, kdy tloušťka stěny  $t_{ef}$  bude větší než polovina kratší strany obdélníku  $b/2$ . V takovém případě by došlo k překrývání stěn ATDP a model by nebyl vhodný.

Při zavedení poměru mezi výškou a šířkou obdélníkového průřezu:

$$N = \frac{h}{b} \quad (3.76)$$

lze vyjádřit tloušťku stěny ATDP libovolného obdélníku za použití vztahů z podkapitoly 3.4.6 následovně:

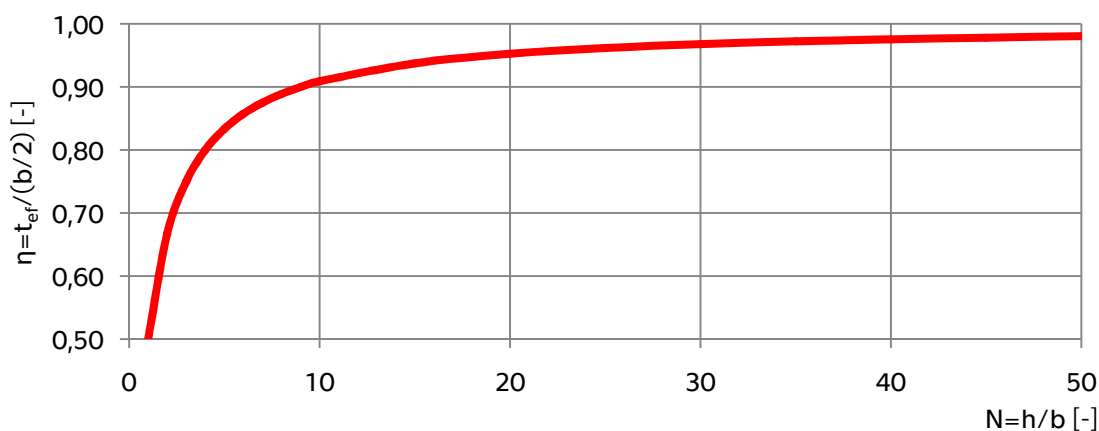
$$\begin{aligned} A &= b \cdot h = N \cdot b^2 \\ u &= 2 \cdot (b+h) = 2 \cdot b \cdot (1+N) \\ t_{ef} &= \frac{A}{u} = \frac{N \cdot b^2}{2 \cdot b \cdot (1+N)} = \frac{b}{2} \cdot \frac{N}{1+N} \end{aligned} \quad (3.77)$$

Využití poloviny šířky obdélníkového průřezu ( $\eta$ ) v závislosti na tloušťce stěny ATDP se vypočte:

$$\eta = \frac{t_{ef}}{\frac{b}{2}} = \frac{\frac{b}{2} \cdot \frac{N}{1+N}}{\frac{b}{2}} = \frac{N}{1+N} \quad (3.78)$$

Pro poměr  $h/b \rightarrow \infty$  tento vztah konverguje k hodnotě:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (\eta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{N}{1+N} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{\frac{N}{N}}{\frac{1}{N} + \frac{N}{N}} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{0+1} \right) = 1 \quad (3.79)$$

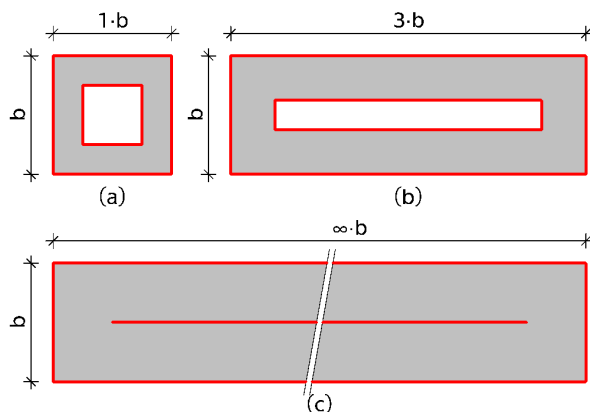


graf 3.2 - využití poloviny šířky obdélníkového průřezu v závislosti na tloušťce stěny ATDP pro různý poměr  $h/b$

<sup>7</sup> neboť nejčastější tvar průřezu železobetonových kroucených prvků je právě obdélník

Z limitního vztahu (3.79) vyplývá, že využití průřezu pro žádný poměr stran obdélníku nepřekročí hodnotu 1, tedy 100 %. Model ATDP je tedy použitelný pro libovolný obdélníkový průřez. Závislost znázorňuje graf 3.2 a obr. 3.18.

Je možné předpokládat, že podobný závěr platí pro všechny konvexní masivní průřezy. V případě nekonvexních masivních průřezů (např T nebo L) může k překrývání stěn ATDP dojít v tenkých částech průřezu, proto je nezbytné dělení na dílčí průřezy, jak bylo popsáno v podkapitole 3.4.6.



obr. 3.18 - ATDP (vyznačen šedou barvou) pro různý poměr  $h/b$   
(a) 1/1 - čtverec, (b) 3/1, (c)  $\infty/1$

### 3.4.8 Krouticí moment při vzniku trhlin - $T_{Rd,c}$

V podkapitole 3.2.2 byl odvozen analytický vztah pro moment při vzniku trhlin podle teorie pružnosti.

Za předpokladu, že kroucený prvek má přibližně obdélníkový plný průřez, je možné dle EC2-1-1 využít alternativní postup stanovení  $T_{Rd,c}$ , založený na charakteristikách ATDP:

$$T_{Rd,c} = t_{ef} \cdot 2 \cdot A_k \cdot f_{ctd} \quad (3.80)$$

Z porovnání se vztahem (3.50) je zřejmé, že součin  $t_{ef} \cdot 2 \cdot A_k$  má význam modulu průřezu v kroucení, který je pro přehlednost označen indexem EC:

$$W_{t,EC} = t_{ef} \cdot 2 \cdot A_k \quad (3.81)$$

Je vhodné poznamenat, že vztah (3.81) lze u složených průřezů použít jako kritérium pro rozdělení celkového krouticího momentu na dílčí průřezy.

Předpokládá se, že v železobetonovém prvku nevzniknou trhliny pouze tehdy, pokud je splněna podmínka:

$$\frac{T_{Ed}}{T_{Rd,c}} \leq 1,0 \quad (3.82)$$

kde  $T_{Ed}$  je působící návrhový krouticí moment

Poté postačuje splnění požadavku na minimální vyztužení (viz podkapitola 3.4.12).

Je-li prvek namáhán zároveň posouvající silou, nevzniknou trhliny, pouze pokud je splněna interakční podmínka:

$$\frac{T_{Ed}}{T_{Rd,c}} + \frac{V_{Ed}}{V_{Rd,c}} \leq 1,0 \quad (3.83)$$

kde  $V_{Ed}$  je návrhová hodnota posouvající síly  
 $V_{Rd,c}$  návrhová hodnota únosnosti ve smyku od posouvající síly [16]

### 3.4.9 Krouticí moment na mezi únosnosti - $T_{Rd,max}$

Jedním ze způsobů porušení železobetonového prvku namáhané kroucením je drcení tlakových diagonál. V podkapitole 3.2.3 již bylo uvedeno, že prvek musí být navržen tak, aby tento stav nenastal a místo toho se porušil zplastizováním výztuže a jejím nadměrným protažením. K drcení tlakových diagonál dojde právě v okamžiku dosažení krouticího momentu na mezi únosnosti, který se stanoví:

$$T_{Rd,max} = 2 \cdot v \cdot \alpha_{cw} \cdot f_{cd} \cdot A_k \cdot t_{ef} \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \quad (3.84)$$

kde  $v$  je redukční součinitel pevnosti betonu při porušení smykem, který se vypočte dle (3.85)

$$v = 0,6 \cdot \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) \quad (3.85)$$

Dosažením vztahu pro sinus dvojnásobného argumentu:

$$\sin(2\theta) = 2 \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) \quad (3.86)$$

Ize rovnici (3.84) zjednodušit na:

$$T_{Rd,max} = v \cdot \alpha_{cw} \cdot f_{cd} \cdot A_k \cdot t_{ef} \cdot \sin(2\theta) \quad (3.87)$$

Aby k drcení tlakových diagonál nedošlo, musí být splněna podmínka:

$$\frac{T_{Ed}}{T_{Rd,max}} \leq 1,0 \quad (3.88)$$

V případě interakce se smykem od posouvající síly se vztah opět rozšiřuje o další člen:

$$\frac{T_{Ed}}{T_{Rd,max}} + \frac{V_{Ed}}{V_{Rd,max}} \leq 1,0 \quad (3.89)$$

kde  $V_{Rd,max}$  návrhová hodnota maximální posouvající síly, kterou prvek může přenést, omezená rozdrčením tlakových diagonál [16]

Pokud není splněn vztah (3.88), případně (3.89), lze nejprve změnit zvolenou hodnotu úhlu  $\theta$ . Únosnost tlakových diagonál roste se zvyšujícím se úhlem. Pokud podmínka nevyhoví ani pro limitní případ  $\theta = 45^\circ$  ( $\cotg(\theta) = 1,0$ ), je nezbytné zvětšit rozměry průřezu nebo použít beton vyšší pevnostní třídy. Přidáním výztuže nelze zvýšit únosnost tlakových diagonál.

### 3.4.10 Krouticí moment na mezi kluzu smykové výztuže - $T_{Rd,s}$

Je-li hodnota působícího návrhového krouticího momentu  $T_{Ed}$  v intervalu mezi  $T_{Rd,c}$  a  $T_{Rd,max}$ , musí být navržena výztuž, která tento moment bezpečně přenesou. Stejně jako ve vztahu (3.38) pro obecný tenkostěnný uzavřený průřez platí i pro ATDP, že konstantní smykový tok je roven podílu působícího krouticího momentu a dvojnásobku plochy uzavřené střednicí stěn. Smykové napětí od čistého kroucení v  $i$ -té stěně se poté stanoví:

$$\tau_{t,i} = \frac{T_{Ed}}{2 \cdot A_k \cdot t_{ef,i}} \quad (3.90)$$

Zároveň lze vyjádřit ekvivalentní smykovou sílu, která by svými účinky nahradila účinky smykového napětí od kroucení:

$$V_{Ed,i} = \tau_{t,i} \cdot t_{ef,i} \cdot z_i \quad (3.91)$$

Dosazením z (3.90) lze vztah upravit na:

$$V_{Ed,i} = \frac{T_{Ed}}{2 \cdot A_k \cdot t_{ef,i}} \cdot t_{ef,i} \cdot z_i = \frac{T_{Ed} \cdot z_i}{2 \cdot A_k} \quad (3.92)$$

Ekvivalentní smyková síla je tedy nezávislá na tloušťce stěny ATDP. Přitom nabývá maximální hodnoty ve stěně s nejdélší střednicí  $z_{max}$ :

$$V_{Ed,max} = \frac{T_{Ed} \cdot z_{max}}{2 \cdot A_k} \quad (3.93)$$

Pro návrh příčné výztuže (třmínků) na účinky kroucení lze využít stejné vztahy jako pro návrh příčné výztuže na účinky posouvající síly. Do vztahu pro požadovanou podélnou osovou vzdálenost sestav třmínkové výztuže:

$$s_{l,req} \leq \frac{A_{sw}}{V_{Ed}} \cdot z \cdot f_{ywd} \cdot \cotg(\theta) \quad (3.94)$$

kde  $A_{sw}$  je plocha smykové výztuže  
 $V_{Ed}$  návrhová hodnota posouvající síly  
 $z$  rameno vnitřních sil



je možné dosadit maximální ekvivalentní smykovou sílu z (3.93):

$$S_{I,req} \leq \frac{A_{sw}}{V_{Ed,max}} \cdot z \cdot f_{ywd} \cdot \cotg(\theta) = \frac{A_{sw}}{\frac{T_{Ed} \cdot z_{max}}{2 \cdot A_k}} \cdot z \cdot f_{ywd} \cdot \cotg(\theta) \quad (3.95)$$

Pokud se dále předpokládá, že délka nejdelší střednice stěny ATDP se přibližně rovná ramenu vnitřních sil:

$$z_{max} \cong z \quad (3.96)$$

Ize vztah (3.95) upravit do konečné podoby, vhodné pro návrh odstupu třmíneků na účinky čistého kroucení:

$$S_{I,req} \leq \frac{A_{sw}}{T_{Ed}} \cdot 2 \cdot A_k \cdot f_{ywd} \cdot \cotg(\theta) \quad (3.97)$$

Návrhový krouticí moment na mezi kluzu smykové výztuže je následně možné vyjádřit ve tvaru:

$$T_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{S_l} \cdot 2 \cdot A_k \cdot f_{ywd} \cdot \cotg(\theta) \quad (3.98)$$

Je vhodné zároveň stanovit návrhový krouticí moment, který může převzít konstrukční smyková výztuž na mezi kluzu:

$$T_{Rd,s,k} = \frac{A_{sw}}{S_{l,max}} \cdot 2 \cdot A_k \cdot f_{ywd} \cdot \cotg(\theta) \quad (3.99)$$

kde  $S_{l,max}$  maximální podélná osová vzdálenost sestav třmínekové výztuže, viz podkapitola 3.4.12

Pokud dochází k interakci smyku od kroucení a posouvající síly, lze účinky superponovat za předpokladu stejného sklonu tlakových diagonál. Příčnou výztuž pak lze navrhnout dvěma způsoby:

- sečtením účinků od kroucení a posouvající síly;
- oddělenými návrhy zvlášť na účinky kroucení a zvlášť na účinky posouvající síly.

### 3.4.11 Podélná výztuž na kroucení - $\Sigma A_{sl}$

V podkapitole 3.3.3 bylo odvozeno, že na přenosu účinků kroucení se podílí kromě třmíneků také podélná výztuž, která vyrovnává vodorovnou složku síly vznikající v tlakových diagonálách. Dle EC2-1-1 se má plocha podélné výztuže na kroucení  $\Sigma A_{sl}$  stanovit ze vztahu:

$$\Sigma A_{sl} \geq \frac{T_{Ed}}{2 \cdot A_k \cdot f_{yd}} \cdot u_k \cdot \cotg(\theta) \quad (3.100)$$

Podélná výztuž má být rovnoměrně rozmístěna po obvodu průřezu, přičemž se pro malé průřezy připouští koncentrování prutů pouze do rohů. Pro stanovení množství výztuže v jednotlivých stěnách ATDP je výhodné definovat plochu podélné výztuže na kroucení na jednotku obvodu  $u_k$ :

$$\Sigma A_{sl,1} = \frac{\Sigma A_{sl}}{u_k} = \frac{T_{Ed}}{2 \cdot A_k \cdot f_{yd}} \cdot \cotg(\theta) \quad (3.101)$$

Pro stěnu se střednicí délky  $z_i$  lze poté jednoduše stanovit požadovanou plochu podélné výztuže:

$$\Sigma A_{sl,i} = \Sigma A_{sl,1} \cdot z_i \quad (3.102)$$

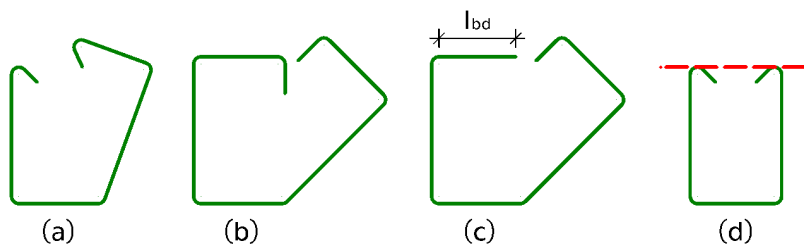
Množství podélné výztuže lze redukovat v tlacených pásech úměrně příslušné tlakové síle, v tažených pásech se naopak podélná výztuž na kroucení přidá k ostatní výztuži.

### 3.4.12 Konstrukční zásady pro výztuž na kroucení

Splnění konstrukčních zásad pro výztuž na kroucení je vyžadováno u všech prvků vystavených krouticímu momentu včetně případů, kdy není překročena hodnota  $T_{Rd,c}$ . Zároveň se předpokládá, že při dodržení konstrukčních zásad je šířka trhlin dostatečně omezena a není ji třeba ověřovat přímým výpočtem.

Základní konstrukční zásadou pro výztuž na kroucení je, aby byla umístěna uvnitř ATDP, v opačném případě ji nelze započítat.

Třmínky, které mohou obecně svírat úhel  $\alpha$  s podélnou osou prvku v rozmezí  $45^\circ$  až  $90^\circ$ , musí být v případě návrhu na účinky kroucení vždy kolmé, tedy  $\alpha = 90^\circ$ . Navíc musí být vždy uzavřené a kotvené pomocí přesahů nebo koncových háků, viz obr. 3.19. V případě nosníku spolupůsobícího s deskou (T-průřez) je přípustný tvar (d) zobrazený na obr. 3.19. Alternativně lze konce třmínek svařit k sobě.



obr. 3.19 - doporučené tvary třmínek na kroucení  
(a) háky, (b) ohyby, (c) plná délka přesahu, (d) doplnění podélnou výztuží desky

Dále je třeba splnit následující geometrické zásady:

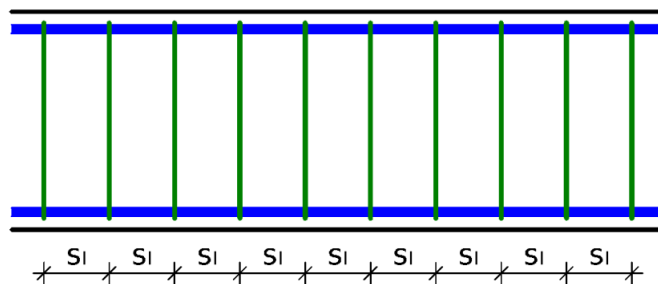
- minimální podélná osová vzdálenost sestav třmínkové výztuže;
- maximální podélná osová vzdálenost sestav třmínkové výztuže;
- maximální příčná osová vzdálenost větví třmínek;
- maximální osová vzdálenost podélných prutů.

### MINIMÁLNÍ PODÉLNÁ OSOVÁ VZDÁLENOST SESTAV TŘMÍNKOVÉ VÝZTUŽE

Podélná osová vzdálenosti sestav třmínkové výztuže je graficky znázorněna na obr. 3.20. Zásada minimální vzdálenosti vychází z požadavku na zajištění duktility [4]:

$$s_{l,\min} = \frac{A_{sw} \cdot f_{ywd}}{0,5 \cdot v \cdot f_{cd} \cdot t_{ef}} \quad (3.103)$$

kde  $v$  se stanoví dle (3.85)



obr. 3.20 - podélná osová vzdálenost sestav třmínkové výztuže  $s_l$

### MAXIMÁLNÍ PODÉLNÁ OSOVÁ VZDÁLENOST SESTAV TŘMÍNKOVÉ VÝZTUŽE

První z podmínek vychází z požadavku na minimální stupeň vyztužení [4]:

$$s_{l,\max,1} = \frac{A_{sw} \cdot f_{ywK}}{0,08 \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot t_{ef}} \quad (3.104)$$

Druhá podmínka je upravený vztah, platný pro třmínky na smyk od posouvající síly. Platí  $\cotg(\alpha) = \cotg(90) = 0$ :

$$s_{l,\max,2} = 0,75 \cdot d \cdot [1 + \cotg(\alpha)] = 0,75 \cdot d \quad (3.105)$$

kde  $d$  je účinná výška průřezu, kterou lze přibližně odhadnout jako  $0,9 \cdot h$

Třetí podmínka je horním omezením vztahu (3.105), které je požadováno národní přílohou EC2-1-1 [17]:

$$s_{l,\max,3} = 400 \text{ mm} \quad (3.106)$$

Čtvrtá podmínka je doplňková, požadovaná výhradně pro výztuž na kroucení

$$s_{l,\max,4} = \frac{u}{8} \quad (3.107)$$

Poslední podmínka je také určena výhradně pro výztuž na kroucení. Udává, že by osová vzdálenost třmínků neměla překročit menší z rozměrů průřezu. To lze symbolicky zapsat:

$$s_{l,\max,5} = \min(b; h; d_v; \lambda) \quad (3.108)$$

kde  $b$  je šířka obdélníkového průřezu  
 $h$  výška obdélníkového průřezu  
 $d_v$  průměr kružnice vepsané průřezu tvaru pravidelného mnohoúhelníku  
 $\lambda$  charakteristický rozměr nepravidelného průřezu

Výslednou podmínku pro maximální osovou vzdálenost sestav třmínkové výztuže lze nakonec stanovit jako nejmenší z hodnot (3.104) až (3.108):

$$s_{l,max} = \min(s_{l,max,i}) \quad (3.109)$$

Na základě výsledků několika návrhů výztuže na kroucení pro obdélníkový průřez lze konstatovat, že zásada (3.104) není ve většině případů rozhodující pro běžné konstrukční prvky pozemních staveb.

Zásada (3.105) se uplatní především u prvků namáhaných kombinací kroucení a ohybu. Pro případ čistého kroucení není vhodná a pro některé průřezy, jako například plochý obdélník, může být příliš omezující.

Zároveň je možné dokázat, že ze zásad (3.107) a (3.108) je pro obdélníkový průřez s poměrem stran  $h/b < 3$  rozhodující zásada (3.107). Pro větší poměr naopak rozhoduje (3.108).

### MAXIMÁLNÍ PŘÍČNÁ OSOVÁ VZDÁLENOST VĚTVÍ TŘMÍNKŮ

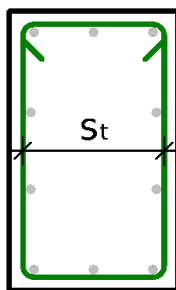
Příčná osová vzdálenost větví třmínků je graficky znázorněna na obr. 3.21. Je nutné splnit následující dvě podmínky pro maximální vzdálenost:

$$s_{t,max,1} = 0,75 \cdot d \quad (3.110)$$

$$s_{t,max,2} = 600 \text{ mm} \quad (3.111)$$

Výsledná podmínka se poté stanoví jako nejmenší z hodnot (3.110) a (3.111):

$$s_{t,max} = \min(s_{t,max,i}) \quad (3.112)$$



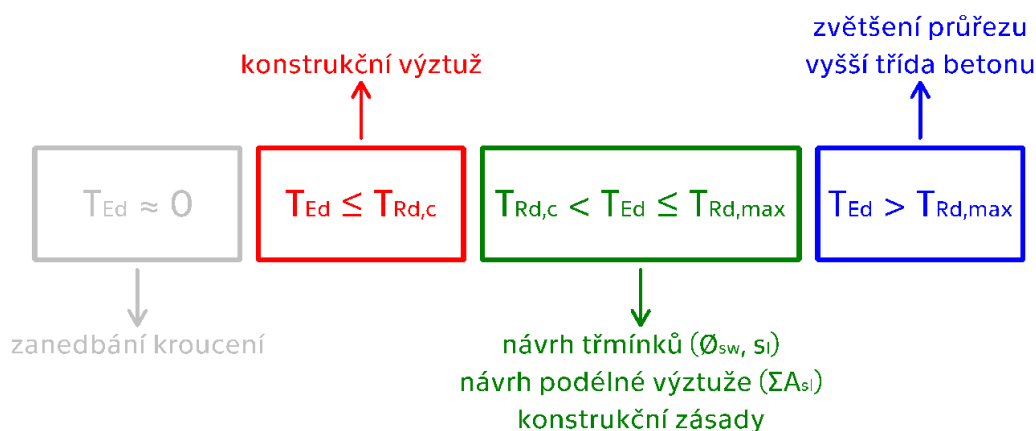
obr. 3.21 - příčná osová vzdálenost větví třmínků  $s_t$

### MAXIMÁLNÍ OSOVÁ VZDÁLENOST PODÉLNÝCH PRUTŮ

Osová vzdálenost podélných prutů nemá překročit hodnotu 350 mm. Pruty mají být zároveň uspořádány tak, aby byl alespoň jeden prut v každém rohu průřezu.

### 3.4.13 Souhrn návrhu kroucených prvků dle EC2-1-1

Přehledný souhrn návrhového postupu udává následující diagram:



obr. 3.22 - diagram návrhu dle EC2-1-1

### 3.4.14 Vázané kroucení dle EC2-1-1

Norma EC2-1-1 neuvádí podrobný postup návrhu pro prvky namáhané vázaným kroucením. Stanovuje pouze obecná pravidla:

"Pro uzavřené tenkostěnné průřezy a plné průřezy lze vázané kroucení běžně zanedbat." [16]

"U otevřených tenkostěnných průřezů může být nutné uvažovat vázané kroucení. Pro velmi štíhlé průřezy má být výpočet proveden na základě modelu nosníku konečnými prvky a v ostatních případech na základě modelu náhradní příhradoviny. Ve všech případech má být návrh proveden podle návrhových pravidel pro ohyb s podélnou normálovou silou a pro namáhání smykem." [16]

Podrobnější pravidla udává norma EC2-2, viz podkapitola 3.7.

## 3.5 NP3: ACI 318-11

ACI 318-11<sup>8</sup>: Building Code Requirements for Structural Concrete<sup>9</sup> tvoří souhrn minimálních požadavků pro návrh železobetonových konstrukcí. Norma je vydávána organizací American Concrete Institute<sup>10</sup> a je používána v USA a některých dalších zemích. Následující text vychází především z publikací [2] a [10].

Návrhový postup je, podobně jako v EC2-1-1, založen na převedení skutečného průřezu na náhradní průřez, nazývaný ekvivalentní tenkostěnná trubka (equivalent thin-walled tube). Stanovení jeho základních charakteristik se částečně odlišuje od EC2-1-1.

<sup>8</sup> V současné době je vydána nejnovější verze normy ACI 318-14, která ovšem nepřináší žádné změny v návrhu kroucených železobetonových prvků oproti ACI 318-11 (viz [38]).

<sup>9</sup> Volně lze přeložit jako: požadavky stavebních předpisů pro konstrukční beton.

<sup>10</sup> Americký betonářský institut

### 3.5.1 Redukční součinitele

Podle ACI 318-11 jsou všechny výpočty prováděny se základními, neboli charakteristickými vlastnostmi materiálů. Výsledky jsou následně přenásobeny součinitelem redukované pevnosti ( $\phi$ ), čímž jsou získány návrhové hodnoty. Součinitel redukované pevnosti nabývá různých hodnot dle typu namáhání. Pro návrh na účinky kroucení a smyku od posouvající síly se má uvažovat:

$$\phi=0,75 \quad (3.113)$$

Charakteristická pevnost betonu (v tlaku i tahu) má být navíc redukována modifikačním faktorem ( $\lambda$ ) v případě, že je konstrukce navržena z lehkého betonu. Pro beton běžné objemové hmotnosti se má uvažovat:

$$\lambda=1,0 \quad (3.114)$$

### 3.5.2 Převod jednotek

Základní vztahy v ACI 318-11 používají americké běžné jednotky (U.S. customary units). Jelikož v některých vztazích vystupuje veličina:

$$\sqrt{f'_c} \equiv \sqrt{f_{ck}} \quad (3.115)$$

kde  $f'_c$  je označení pro pevnost betonu v tlaku dle ACI 318-11  
 $f_{ck}$  ekvivalentní označení dle EC2-1-1, tedy charakteristická válcová pevnost betonu v tlaku (viz [32])

je třeba zavést převodní koeficient mezi pevnostmi udávanou v jednotkách psi<sup>11</sup> a pevnostmi udávanou v jednotkách MPa (měrný systém SI). Jelikož platí:

$$1 \text{ psi} \cong 0,006895 \text{ MPa} \cong \frac{1}{144} \text{ MPa} \quad (3.116)$$

musí zároveň platit převodní vztah pro (3.115):

$$1 \cdot \sqrt{f_{ck}} \text{ v psi} \cong 0,083036 \cdot \sqrt{f_{ck}} \text{ v MPa} \cong \frac{1}{12} \cdot \sqrt{f_{ck}} \text{ v MPa} \quad (3.117)$$

Všechny vztahy, uvedené dále v této podkapitole, platí za předpokladu uvažování pevnosti materiálů v MPa. V případě použití jiných jednotek je nutné vztahy upravit (viz např. převodní tabulka v [2]).

<sup>11</sup> pound per square inch

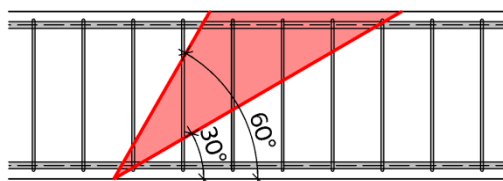
### 3.5.3 Úhel sklonu tlakových diagonál - $\theta$

V úvodu návrhu dle ACI 318-11 je třeba zvolit úhel sklonu tlakových diagonál. Volbu je třeba provést v následujícím rozmezí:

$$0,58 \leq \cotg(\theta) \leq 1,73 \quad (3.118)$$

$$60^\circ \geq \theta \geq 30^\circ \quad (3.119)$$

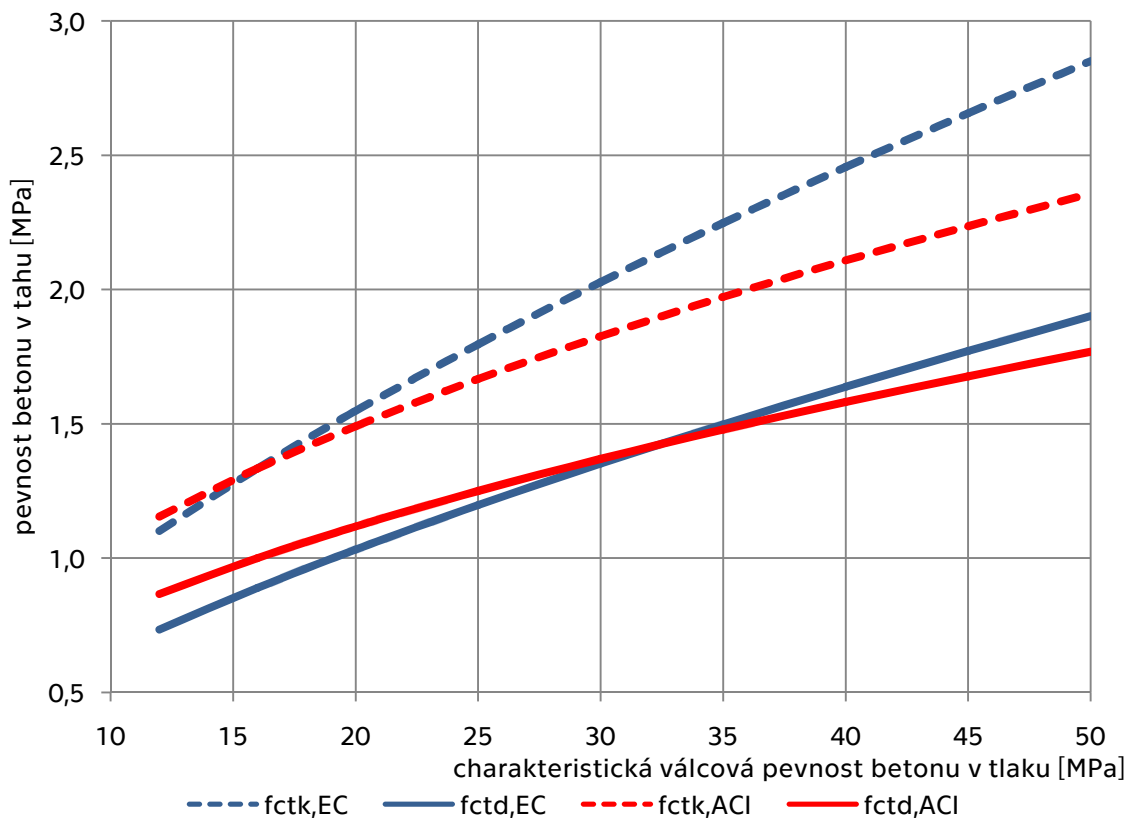
Doporučuje se volit  $\theta$  přibližně  $45^\circ$  ( $\cotg(\theta) \approx 1$ ).



obr. 3.23 - grafická interpretace omezení úhlu  $\theta$  dle ACI 318-11

### 3.5.4 Návrhová pevnost betonu v tahu dle ACI 318-11

Pevnost betonu v tahu vychází, podobně jako v EC2-1-1, z pevnosti betonu v tlaku, ovšem vztah je odlišný a pro některé pevnostní třídy (uvažované dle [16]) se výsledné pevnosti liší o více než 10 %.



graf 3.3 - pevnost betonu v tahu v závislosti na válcové pevnosti v tlaku (dle EC a ACI)

Vztahy pro charakteristickou a návrhovou pevnost betonu v tahu jsou uvedeny dále. Pro přehlednost jsou opatřeny indexy EC a ACI a je uvažována rovnost (3.115). Výsledné hodnoty pro pevnostní třídy C12/15 - C50/60 znázorňuje graf 3.3.

$$f_{ctk,EC} = 0,21 \cdot \sqrt[3]{f_{ck}^2} \quad (3.120)$$

$$f_{ctk,ACI} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{f_{ck}} \quad (3.121)$$

kde  $f_{ctk,i}$  je charakteristická pevnost betonu v dostředném tahu (5 % kvantil)

$$f_{ctd,EC} = 0,14 \cdot \sqrt[3]{f_{ck}^2} \quad (3.122)$$

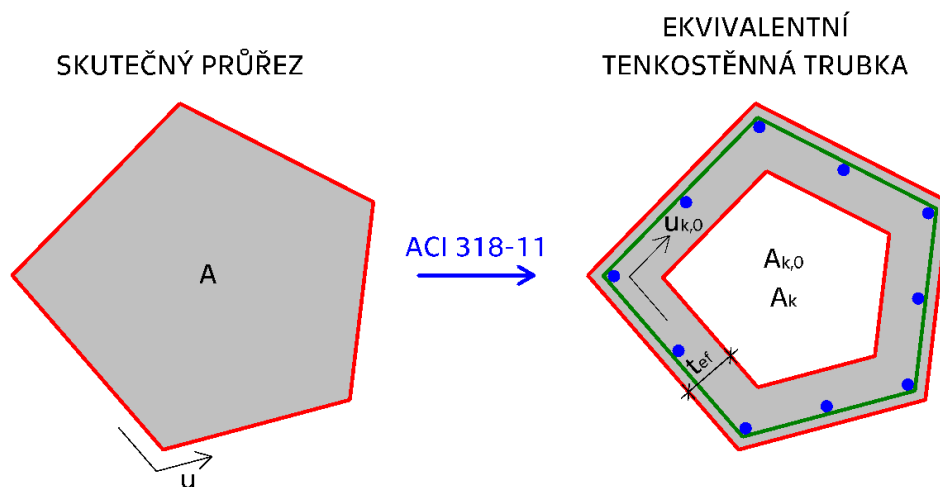
$$f_{ctd,ACI} = \phi \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{f_{ck}} = 0,75 \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{f_{ck}} = 0,25 \cdot \sqrt{f_{ck}} \quad (3.123)$$

kde  $f_{ctd,i}$  je návrhová pevnost betonu v tahu (při namáhání kroucením nebo smykem od posouvající síly)

### 3.5.5 Ekvivalentní tenkostěnná trubka

Ekvivalentní tenkostěnná trubka nahrazuje skutečný průřez a slouží k návrhu kroucených prvků. Geometrie trubky pro obecný masivní plný průřez je znázorněna na obr. 3.24. Jejími základními charakteristikami jsou:

- A plocha skutečného průřezu uvnitř vnějšího okraje, včetně ploch vnitřních otvorů
- u vnější obvod průřezu
- $t_{ef}$  tloušťka stěny ekvivalentní tenkostěnné trubky, stanovená dle (3.124)
- $A_{k,0}$  plocha ohraničená osou vnějších třmíneků
- $A_k$  plocha uzavřená smykovým tokem, stanovená dle (3.125) případně (3.126)
- $u_{k,0}$  obvod plochy  $A_{k,0}$



obr. 3.24 - převod skutečného průřezu na ekvivalentní tenkostěnnou trubku



Tloušťka  $t_{ef}$  je definována jako:

$$t_{ef} = 0,75 \cdot \frac{A}{u} \quad (3.124)$$

Plocha uzavřená smykovým tokem se má stanovit buď ze vztahu (3.125) nebo, pokud není předem známá poloha vnějších třmínků, odhadem pomocí vztahu (3.126):

$$A_k = 0,85 \cdot A_{k,0} \quad (3.125)$$

$$A_k \cong \frac{2}{3} \cdot A \quad (3.126)$$

### 3.5.6 Krouticí moment při vzniku trhlin - $T_{Rd,c}$

Charakteristická hodnota krouticího momentu při vzniku trhlin se stanoví ze vztahu:

$$T_{Rk,c} = \frac{2}{3} \cdot A_k \cdot t_{ef} \cdot \lambda \cdot \sqrt{f_{ck}} \quad (3.127)$$

Návrhová hodnota se získá vynásobením součinitelem redukované pevnosti:

$$T_{Rd,c} = \phi \cdot T_{Rk,c} \quad (3.128)$$

Předpokládá se, že pokud působící návrhový krouticí moment  $T_{Ed}$  nepřekročí 25 % této hodnoty, nedojde k výraznému snížení pevnosti na účinky ostatních typů namáhání. Kroucení lze tedy zcela zanedbat pokud:

$$T_{Ed} \leq \frac{1}{4} \cdot T_{Rd,c} \quad (3.129)$$

V opačném případě není možné předpokládat, že samotný plný betonový průřez dokáže krouticí moment přenést a musí být navržena výztuž na kroucení.

### 3.5.7 Krouticí moment na mezi únosnosti - $T_{Rd,max}$

Norma přímo nedefinuje vztah pro krouticí moment na mezi únosnosti. Namísto toho musí rozměry průřezu vyhovovat následující nerovnosti, která platí pro případ čistého kroucení. V případě interakce se smykem od posouvající síly musí být levá strana nerovnice rozšířena o další člen, viz např. [2].

$$\frac{T_{Ed} \cdot u_{k,0}}{1,7 \cdot A_{k,0}^2} \leq \phi \cdot \left( \frac{1}{6} \cdot \lambda \cdot \sqrt{f_{ck}} + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{f_{ck}} \right) \quad (3.130)$$

Je patrné, že levá strana vztahu představuje napětí v průřezu vyvolané působícím návrhovým krouticím momentem, zatímco pravá strana udává únosnost průřezu.

Úpravou nerovnice (3.130) je možné vyjádřit bezrozměrný parametr  $\mu_t$ , udávající míru využití tlakových diagonál od kroucení:

$$\mu_t = \frac{\frac{T_{Ed} \cdot u_{k,0}}{1,7 \cdot A_{k,0}^2}}{\phi \cdot \left( \frac{1}{6} \cdot \lambda \cdot \sqrt{f_{ck}} + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{f_{ck}} \right)} \quad (3.131)$$

A krouticí moment na mezi únosnosti poté musí být roven hodnotě:

$$T_{Rd,max} = \frac{T_{Ed}}{\mu_t} \quad (3.132)$$

V případě, že není splněn vztah (3.130), je opět nezbytné zvětšit rozměry průřezu nebo použít beton vyšší pevnostní třídy.

### 3.5.8 Krouticí moment na mezi kluzu smykové výztuže - $T_{Rd,s}$

Pokud je hodnota působícího návrhového kroutícího momentu  $T_{Ed}$  v intervalu  $0,25 \cdot T_{Rd,c}$  až  $T_{Rd,max}$ , je třeba navrhnout výztuž na kroucení. Podélná osová vzdálenost sestav třímínkové výztuže se stanoví jako:

$$s_{l,req} \geq \frac{A_{sw}}{\frac{T_{Ed}}{\phi}} \cdot 2 \cdot A_k \cdot f_{ywk} \cdot \cotg(\theta) \quad (3.133)$$

Charakteristická mez kluzu smykové výztuže ( $f_{ywk}$ ) nemá být uvažována vyšší než:

$$f_{ywk} \leq 413,7 \text{ MPa} = 60\,000 \text{ psi} \quad (3.134)$$

Charakteristický krouticí moment na mezi únosnosti lze poté vyjádřit ze vztahu (3.133) jako:

$$T_{RK,s} = \frac{A_{sw}}{s_l} \cdot 2 \cdot A_k \cdot f_{ywk} \cdot \cotg(\theta) \quad (3.135)$$

A jeho návrhová hodnota se stanoví:

$$T_{Rd,s} = \phi \cdot T_{RK,s} \quad (3.136)$$

### 3.5.9 Podélná výztuž na kroucení - $\Sigma A_{sl}$

Celková průřezová plocha podélné výztuže na kroucení se stanoví ze vztahu:

$$\Sigma A_{sl,req} \geq \frac{A_{sw}}{s_l} \cdot u_{k,0} \cdot \frac{f_{ywk}}{f_{yk}} \cdot \cotg^2(\theta) \quad (3.137)$$

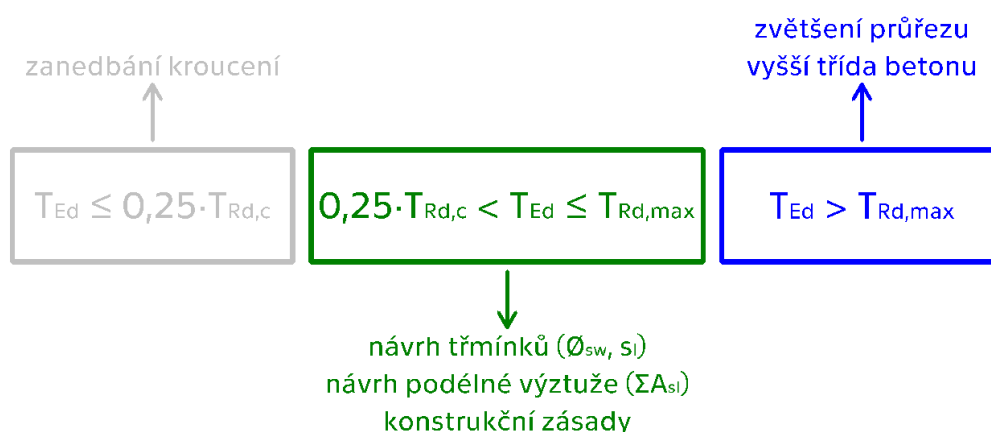
kde  $f_{yk}$  je charakteristická mez kluzu podélné výztuže

Zároveň lze opět definovat plochu podélné výztuže na kroucení na jednotku obvodu  $u_{k,0}$ :

$$\Sigma A_{sl,1} = \frac{\Sigma A_{sl}}{u_{k,0}} = \frac{A_{sw}}{s_l} \cdot \frac{f_{ywk}}{f_{yk}} \cdot \cotg^2(\theta) \quad (3.138)$$

### 3.5.10 Souhrn návrhu kroucených prvků dle ACI 813-11

Přehledný souhrn návrhového postupu udává následující diagram. Konstrukční zásady lze nalézt např. v [2] nebo [10].



obr. 3.25 - diagram návrhu dle ACI 318-11

### 3.5.11 Doplnková pravidla

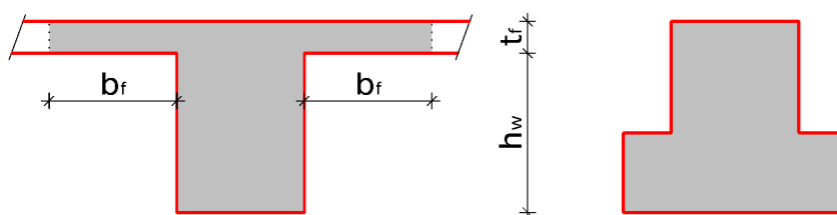
Norma uvádí jednoznačná pravidla pro návrh na účinky kroucení pro nekonvexní masivní průřezy s ozuby (T, L nebo I) a nosníky se spolupůsobící monolitickou železobetonovou deskou.

Při výpočtu se má uvažovat část spolupůsobící desky vzdorující kroucení, omezená výškou viditelné části nosníku ( $h_w$ ) nebo čtyřnásobkem vlastní tloušťky ( $t_f$ ), viz obr. 3.28.

$$b_f = \min(h_w; 4 \cdot t_f) \quad (3.139)$$

kde  $b_f$  je uvažovaná šířka spolupůsobící desky vzdorující kroucení

V případě nosníků s ozuby se započítává celý ozub. Podmínkou pro oba případy je, aby uvažovaná část byla dostatečně vyztužená na účinky kroucení.



obr. 3.26 - části průřezů vzdorující kroucení dle ACI 318-11 (šedá oblast)

V ACI 318-11 se zároveň uvádí, že návrhový krouticí moment  $T_{Ed}$  má být stanoven v průřezu vzdáleném o účinnou výšku průřezu ( $d$ ) od líce podpory, tedy stejným způsobem, jakým se stanovuje návrhová posouvající síla  $V_{Ed}$ .

### 3.6 NP4: ČSN 73 1201

Norma ČSN 73 1201 - Navrhování betonových konstrukcí [14] stanovovala pravidla pro navrhování konstrukcí ze železobetonu v České republice až do roku 2006, kdy byla nahrazena evropskou normou ČSN EN 1992-1-1 (viz podkapitola 3.4).

Na rozdíl od norem popsaných v předchozích podkapitolách se při návrhu prvku na účinky kroucení dle ČSN 73 1201 stanovují průřezové charakteristiky na tzv. účinném průřezu v kroucení. Pro většinu konvexních masivních průřezů je účinný průřez v kroucení shodný se skutečným průřezem. U nekonvexních průřezů se započítává část přírub či ozubů. Podrobná pravidla pro stanovení účinného průřezu v kroucení jsou uvedena přímo v textu normy.

Ve vztazích pro krouticí moment při vzniku trhlin a návrhový krouticí moment na mezi únosnosti se norma odkazuje na teorii pružnosti (viz podkapitola 3.1). Návrh výztuže je proveden podle metody příhradové analogie (viz podkapitola 3.3).

#### 3.6.1 Modifikační součinitele

Ve vztazích normy ČSN 73 1201 se uplatňuje součinitel normálové síly ( $\kappa_n$ ) upravující únosnost betonového průřezu v závislosti na působící osově síle. Pro účely této práce se dále uvažuje:

$$\kappa_n = 1,0 \quad (3.140)$$

Tato hodnota platí pro  $N = 0$ . Podrobnější pravidla pro ostatní případy lze nalézt v [14].

Návrhová pevnost betonu se má dále upravit součinitelem podmínek působení ( $\gamma_b$ ). Ten se stanoví jako součin dílčích součinitelů. Pro účely této práce se tento součinitel rovněž dále uvažuje hodnotou 1:

$$\gamma_b = 1,0 \quad (3.141)$$

#### 3.6.2 Krouticí moment při vzniku trhlin - $T_{Rd,c}$

Krouticí moment při vzniku trhlin se stanoví, podobně jako v teorii pružnosti (viz (3.50)), ze vztahu:

$$T_{Rd,c} = W_t \cdot \kappa_n \cdot \gamma_b \cdot f_{ctd} \quad (3.142)$$

Modul průřezu v kroucení  $W_t$  se přitom stanoví na účinném průřezu se zanedbáním výztuže podle vztahů z podkapitoly 3.1.6. U průřezu s přírubami se uvažuje maximálně 1,5 násobek modulu průřezu v kroucení nejmasivnější části.

Účinky kroucení lze zcela zanedbat, pokud působící návrhový krouticí moment nepřekročí třetinu hodnoty  $T_{Rd,c}$ :

$$T_{Ed} \leq \frac{1}{3} \cdot T_{Rd,c} \quad (3.143)$$

### 3.6.3 Krouticí moment na mezi únosnosti - $T_{Rd,max}$

Podobně jako ACI 318-11, ani ČSN 73 1201 neuvádí přímo vztah pro krouticí moment na mezi únosnosti. Rozměry prvku dimenzovaného na čisté kroucení, musí splňovat podmínku:

$$\frac{T_{Ed}}{\frac{1}{3} \cdot W_t \cdot \gamma_b \cdot f_{cd}} \leq 1,0 \quad (3.144)$$

V případě interakce se smykem od posouvající síly je nutné vztah rozšířit o další člen, viz [14]. Z nerovnosti (3.144) je zřejmé, že levá strana odpovídá přímo využití tlakových diagonál a jmenovatel zlomku je hledaným krouticím momentem na mezi únosnosti:

$$T_{Rd,max} = \frac{1}{3} \cdot W_t \cdot \gamma_b \cdot f_{cd} \quad (3.145)$$

Návrhová pevnost betonu v tlaku, včetně součinitele podmínek působení, se má uvažovat nejvýše:

$$\gamma_b \cdot f_{cd} \leq 18 \text{ MPa} \quad (3.146)$$

Pokud není splněna podmínka (3.144), musí být zvětšeny rozměry průřezu nebo je třeba použít beton vyšší pevnostní třídy.

### 3.6.4 Ekvivalentní krouticí moment od posouvající síly - $T_{tq}$

Pokud dochází k interakci kroucení a smyku od posouvající síly, lze vyjádřit ekvivalentní krouticí moment od posouvající síly:

$$T_{tq} = 0,5 \cdot \frac{W_t}{W_{tf}} \cdot V_{Ed} \cdot \lambda \quad (3.147)$$

kde  $W_t$  je modul průřezu v kroucení celého účinného průřezu  
 $W_{tf}$  modul průřezu v kroucení nejmasivnější části účinného průřezu  
 $V_{Ed}$  návrhová hodnota posouvající síly  
 $\lambda$  charakteristický rozměr průřezu, definovaný v [14]

Jsou-li zároveň splněny podmínky:

$$T_{Ed} \leq \frac{1}{3} \cdot T_{Rd,c} \quad (3.148)$$

$$T_{Ed} \leq T_{tq} \quad (3.149)$$

je možné vyjádřit vliv kroucení zvýšenou hodnotou posouvající síly ( $V_{Ed,t}$ ) a prvek dále navrhovat podle pravidel pro smyk od posouvající síly, která jsou podrobně popsána v normě.

$$V_{Ed,t} = V_{Ed} \cdot \left( 1 + 1,5 \cdot \frac{T_{Ed}}{T_{tq}} \right) \quad (3.150)$$

### 3.6.5 Kroucí moment na mezi kluzu výztuže - $T_{Rd,s}$

Návrh výztuže na kroucení vychází z modelu příhradové analogie. Výztuž je proto třeba nejdříve odhadnout. Kroucí moment na mezi kluzu výztuže je dán vztahem:

$$T_{Rd,s} = 2 \cdot A_k \cdot \sqrt{\frac{\Sigma A_{sl} \cdot f_{yd}}{u_k} \cdot \frac{A_{sw} \cdot f_{ywd}}{s_l}} \quad (3.151)$$

kde  $A_k$  plocha funkčního jádra průřezu  
 $u_k$  obvod plochy  $A_k$

Funkční jádro tvoří nejmasivnější část účinného průřezu, včetně vnitřních otvorů, ohraničené spojnicí os podélných prutů. Příklady stanovení funkčního jádra pro různé průřezy lze nalézt v [14].

Navržená výztuž na kroucení vyhovuje, pokud je splněna podmínka:

$$T_{Ed} \leq T_{Rd,s} \quad (3.152)$$

### 3.6.6 Úhel sklonu tlakových diagonál - $\theta$

Při výpočtu dle vztahu (3.151) lze započítat pouze výztuž, která splňuje podmínku:

$$0,5 \leq \frac{A_{sw} \cdot f_{ywd}}{\Sigma A_{sl} \cdot f_{yd}} \cdot \frac{u_k}{s_l} \leq 2,0 \quad (3.153)$$

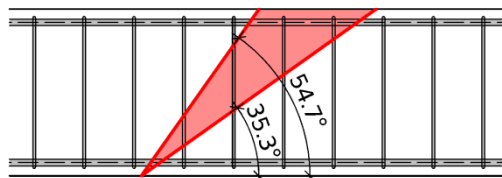
Z porovnání se vztahem (3.58) vyplývá, že prostřední člen (3.153) odpovídá  $\text{tg}^2(\theta)$ . Podmínku lze proto následně přepsat na:

$$0,5 \leq \text{tg}^2(\theta) \leq 2,0 \quad (3.154)$$

$$0,707 \leq \text{tg}(\theta) \leq 1,414 \quad (3.155)$$

$$35,3^\circ \leq \theta \leq 54,7^\circ \quad (3.156)$$

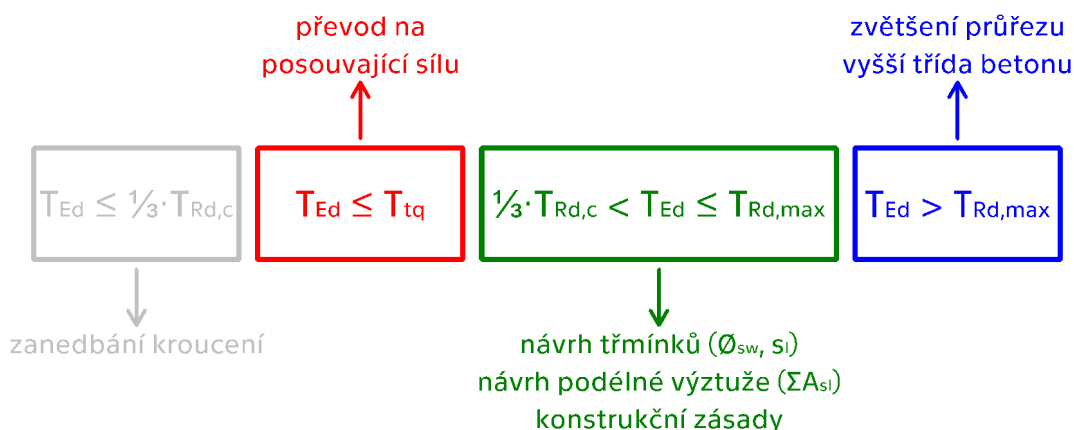
Stojí za povšimnutí, že podmínka (3.154) se liší od podmínky (3.60) druhou mocninou u funkce tangens. V důsledku toho je omezení pro úhel sklonu tlakových diagonál (3.156) mnohem přísnější.



obr. 3.27 - grafická interpretace omezení úhlu  $\theta$  dle ČSN EN 73 1201

### 3.6.7 Souhrn návrhu kroucených prvků dle ČSN 73 1201

Přehledný souhrn návrhového postupu udává následující diagram. Konstruktivní zásady lze nalézt v [14].



obr. 3.28 - diagram návrhu dle ČSN 73 1201

## 3.7 Další návrhové postupy

Na předchozích stranách byly popsány hlavní návrhové postupy, užívané pro návrh kroucených železobetonových prvků. V této podkapitole jsou stručně popsány další dva postupy, které byly pro tuto problematiku vyvinuty:

- teorie zkoseného ohybu;
- účinný vnější plášť.

### 3.7.1 Teorie zkoseného ohybu (skew bending theory)

Tato teorie byla poprvé představena Lessingem roku 1959 a posléze rozvíjena dalšími autory. Je určena především pro prvky vystavené kroucení v interakci s ohybem. Předpokládá se porušení podél osy rovnoběžné s delší stranou průřezu se sklonem  $45^\circ$  k podélné ose prvku. V průřezu vznikne tlačená a tažená oblast, přičemž k selhání dojde v tažené oblasti.

Na základě této teorie pro obdélníkový plný průřez platí následující vztahy (viz [2] a [29]). Jsou platné při uvažování pevnosti materiálů v MPa.

$$T_{Rd,c} = \frac{1}{3} \cdot b^2 \cdot h \cdot \frac{5}{8} \cdot \sqrt{f_{ck}} = \frac{5}{24} \cdot b^2 \cdot h \cdot \sqrt{f_{ck}} \quad (3.157)$$

$$T_{c,k} = 0,2 \cdot \frac{b^2 \cdot h}{\sqrt{b}} \cdot \sqrt{f_{ck}} \quad (3.158)$$

$$T_{s,k} = \frac{\alpha_1 \cdot b \cdot h \cdot A_{sw} \cdot f_{yk}}{s_l} \quad (3.159)$$

$$T_{Rk,cs} = T_{c,k} + T_{s,k} \quad (3.160)$$

$$T_{Rd,cs} = \phi \cdot T_{Rk,s} \quad (3.161)$$

kde	$T_{c,k}$	je charakteristická hodnota krouticího momentu, kterou může přenést beton po vzniku trhlin
	$T_{s,k}$	charakteristická hodnota krouticího momentu, kterou může přenést výztuž po vzniku trhlin
	$T_{Rk,cs}$	charakteristická hodnota krouticího momentu přenášeného výztuží a betonem
	$T_{Rd,cs}$	návrhová hodnota krouticího momentu přenášeného výztuží a betonem
	$\alpha_1$	součinitel tvaru průřezu
	$\phi$	součinitel redukované pevnosti, uvažovaný stejnou hodnotou jako ve vztahu (3.113)

Součinitel tvaru průřezu se má stanovit experimentálně nebo přibližně ze vztahu:

$$\alpha_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{b} \leq 1,5 \quad (3.162)$$

### 3.7.2 Účinný vnější plášť (effective outer shell)

Tento model byl navržen Lampertem a Thurlimannem [8] v roce 1972 jako alternativa k metodě příhradové analogie. Základní myšlenkou, podobně jako v EC2-1-1 a ACI 318-11, je nahrazení skutečného masivního průřezu za průřez uzavřený tenkostěnný. Vychází se z předpokladu, že vnitřní část masivního průřezu není téměř účinná v kroucení a většinu krouticího momentu přebírá vnější vrstva.

Tloušťka pláště se má stanovit jako:

$$t = \min\left(\frac{D}{6}; \frac{D_0}{5}\right) \quad (3.163)$$

kde	$D$	je průměr největší kružnice vepsané do skutečného průřezu
	$D_0$	je průměr největší kružnice vepsané do oblasti ohraničené spojnicí os podélných prutů



Smykové napětí ( $\tau$ ) v plášti od kroucení se stanoví ze vztahu:

$$\tau = \frac{T_{Ed}}{2 \cdot A_k \cdot t} \quad (3.164)$$

kde  $A_k$  je plocha uzavřená spojnicí os podélných prutů

Pro porovnání viz rovnice (3.38) a (3.90). Normálové napětí ( $\sigma$ ) v tlakových diagonálách se poté stanoví:

$$\sigma = \frac{-\tau}{\sin(\theta) \cdot \cos(\theta)} = \frac{-2 \cdot \tau}{\sin(2\theta)} \quad (3.165)$$

Další podrobnosti výpočtu lze nalézt v [8].

## 3.8 Vázané kroucení dle ČSN EN 1992-2

Norma ČSN EN 1992-2 - Navrhování betonových konstrukcí - Betonové mosty - Navrhování a konstrukční zásady [18] rozšiřuje obecná pravidla definovaná v EC2-1-1. Norma uvádí kromě klasického postupu pro volné kroucení také postup pro prvky namáhané vázaným kroucením. Konkrétně pro segmentové konstrukce (mosty) z prefabrikovaných komorových prvků bez vnitřní soudržné výztuže.

Doporučuje se konstrukci převést na tzv. sendvičový model, tedy uvažovat jednotlivé stěny komorového průřezu jako deskostěnové prvky a provést návrh na kombinaci ohybu a smyku od posouvající síly a kroucení.

Jelikož se tato práce zabývá především prutovými prvky s masivními průřezy, které nelze převést na sendvičový model, je postup popsán pouze stručně. Podrobnosti lze nalézt v [18].

### 3.8.1 Princip výpočtu dle sendvičového modelu

Sendvičový model se uplatňuje pro návrh skořepinových prvků s trhlinami<sup>12</sup>, u kterých obecně působí osm složek vnitřních sil:

- 3 stěnové složky;
- 3 deskové složky;
- 2 složky posouvajících sil.

Skořepinový prvek se poté myšleně rozdělí na tři vrstvy (sendvič). Vnější vrstvy přenášejí účinky od stěnových a deskových vnitřních sil. Vnitřní vrstva přenáší účinky od složek posouvajících sil.

Vnější vrstvy mají být navrženy jako membránové prvky podle příloh uvedených v normě. Vnitřní vrstva má být navržena podle běžných pravidel pro prvek

<sup>12</sup> Trhliny v sendvičovém prvku nevznikají, pokud žádné z hlavních napětí ( $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ ) na různých úrovních po tloušťce prvku není vyšší než návrhová pevnost betonu v tahu. Prakticky se má posoudit podmínka vycházející z trojosé teorie plasticity (viz např. [Jirásek 2]), uvedená v normě. Pokud je podmínka splněna, je požadováno pouze posouzení, zda minimální hlavní napětí nepřesahuje návrhovou pevnost betonu v tlaku.

namáhaný smykem od posouvající síly. Má se uvažovat hlavní smyk a jeho hlavní směr.

### 3.8.2 Zjednodušený sendvičový model pro vázané kroucení

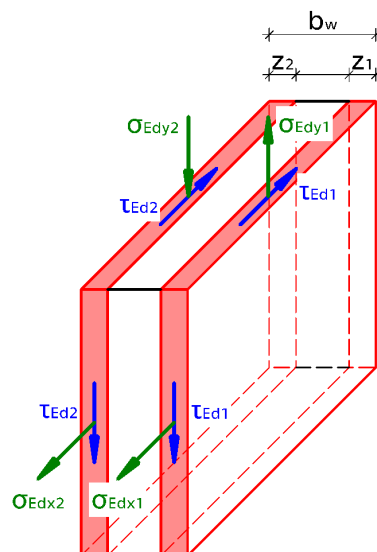
V případě, že ve stěnách komorových nosníků vzniká pouze smyk a příčný ohyb, lze některé složky vnitřních sil sendvičového modelu uvažovat konstantní hodnotou po délce.

Na základě tohoto předpokladu dochází k zjednodušení sendvičového modelu pouze na 2 vrstvy (viz obr. 3.29). V každé vrstvě vznikají 3 napětí (2 normálová a 1 sdružené smykové), která lze zapsat v maticové formě:

$$\overline{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} \sigma_{Edx1} & \tau_{Ed1} \\ \tau_{Ed1} & \sigma_{E dy1} \end{pmatrix} \quad (3.166)$$

$$\overline{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} \sigma_{Edx2} & \tau_{Ed2} \\ \tau_{Ed2} & \sigma_{E dy2} \end{pmatrix} \quad (3.167)$$

Návrh je založen na iteračním postupu, při kterém je optimalizována tloušťka obou sendvičových vrstev. Výpočet má být proveden podle pravidel pro membránové prvky podle příloh uvedených v normě.



obr. 3.29 - zjednodušený sendvičový model (překresleno z [16])

## 3.9 Kroucení dle ČSN EN 1993-1-1 (informativní)

Norma ČSN EN 1993-1-1 [20] udává obecná pravidla pro navrhování ocelových konstrukcí. V této práci je uvedena, neboť definuje mnohem podrobněji pravidla pro interakci volného a vázaného kroucení. Především ale tato norma uvádí kritérium, podle kterého lze rozhodnout, zda je vliv vázaného kroucení zanedbatelný, či nikoli.

### 3.9.1 Parametr tuhosti prutu při kroucení - $K_t$

Bezrozměrný parametr  $K_t$  je nepřímo úměrný vlivu vázaného kroucení. Uplatňuje se při výpočtu opravného součinitele ( $\kappa$ ), podle kterého se rozkládají účinky příčného zatížení na složky volného a vázaného kroucení. Stanoví se ze vztahu:

$$K_t = L \cdot \sqrt{\frac{G \cdot I_t}{E \cdot I_\omega}} \quad (3.168)$$

Norma dále uvádí, že v případě oboustranně prostě podepřeného nosníku<sup>13</sup> se má při hodnotách:

- $K_t \leq 1$  zcela zanedbat účinek volného kroucení;
- $1 < K_t < 15$  uvažovat interakce volného a vázaného kroucení;
- $K_t \geq 15$  zcela zanedbat účinek vázaného kroucení.

Parametr tuhosti prutu při kroucení je závislý na poměru tuhostí průřezu ve volném a vázaném kroucení  $I_t/I_\omega$  (viz podkapitoly 3.1.3 a 3.1.7). Dále stojí za povšimnutí, že hodnota parametru  $K_t$  je přímo úměrná délce nosníku ( $L$ ). To je v souladu s tvrzením z podkapitoly 3.1, že vázané kroucení vzniká mimo jiné vlivem vetknutí koncového průřezu. Čím vzdálenější tyto koncové vazby bránící deplaci jsou, tím menší je vliv vázaného kroucení.

Modul pružnosti ve smyku se vypočte podle vztahu (3.4). Dosazením  $\nu = 0,2$  pro beton bez trhlin,  $\nu = 0$  pro beton s trhlinami [16] a  $\nu = 0,3$  pro ocel [20] vychází přibližné hodnoty:

- $G = 0,42 \cdot E$  pro beton bez trhlin;
- $G = 0,50 \cdot E$  pro beton s trhlinami;
- $G = 0,38 \cdot E$  pro ocel (informativní).

Ve vztahu (3.168) je zároveň vhodné pro další výpočty zavedením substitute:

$$\frac{G}{E} = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} = \frac{1}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad (3.169)$$

zredukovat počet proměnných z pěti na čtyři:

$$K_t = L \cdot \sqrt{\frac{1}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot \frac{I_t}{I_\omega}} \quad (3.170)$$

<sup>13</sup> Prostě podepřený z hlediska možnosti volného natočení v ohybu. V podporách musí být zajištěn přenos krouticího momentu do navazujících konstrukcí.



## 4 POROVNÁNÍ NÁVRHOVÝCH POSTUPŮ

V přechodí kapitole byly popsány postupy pro návrh a posouzení výztuže kroucených prvků. Porováním výsledků, které tyto postupy poskytují, jsou uvedeny na následujících řádcích.

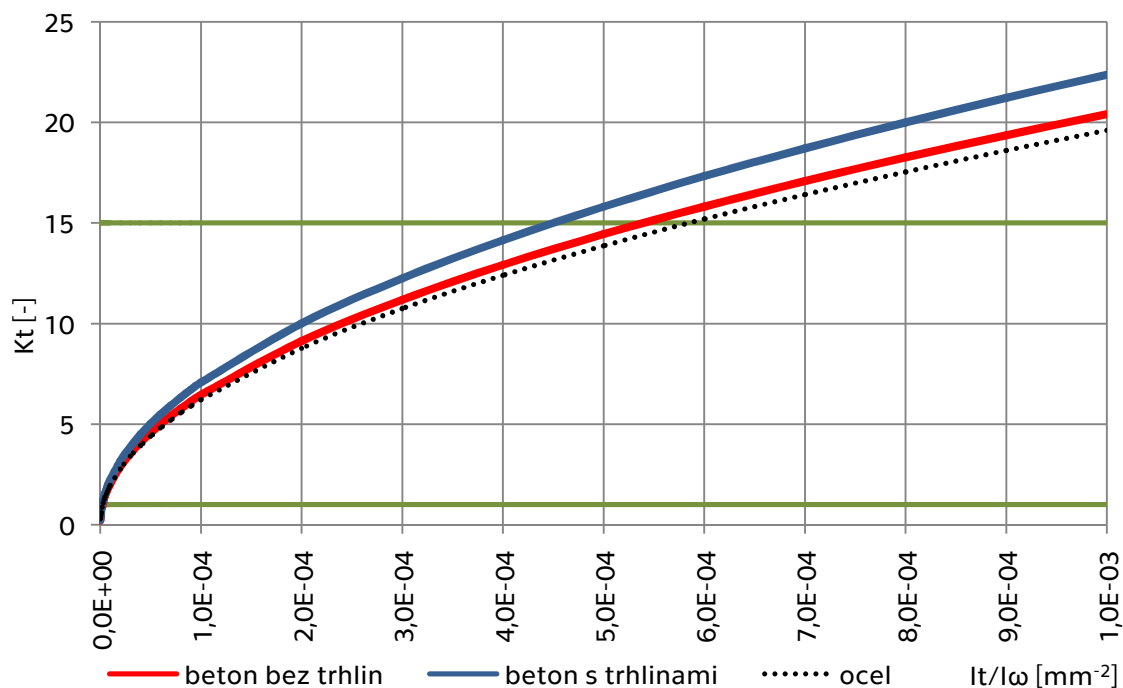
Před návrhem samotné výztuže je zkoumána míra vlivu vázaného kroucení a je posouzeno, zda musí být zohledněno při analýze běžných železobetonových prvků s masivním průřezem. V další části jsou porovnány výsledky výpočtu krouticího momentu při vzniku trhlin podle EC2-1-1 a teorie pružnosti. Následuje porovnání návrhových postupů z kapitoly 3 a v závěru je stanoven optimální úhel sklonu tlakových diagonál s ohledem na minimální potřebnou plochu výztuže.

### 4.1 Odhad vlivu vázaného kroucení

Všechny prvky nekruhového průřezu, u kterých je bráněno deplanaci, jsou vystaveny vázanému kroucení. Míru vlivu na celkové napětí v porovnání s volným kroucením lze odhadnout pomocí kritéria parametru tuhosti v kroucení  $K_t$ , viz podkapitola 3.9.1.

#### 4.1.1 Parametr tuhosti prutu při kroucení běžných železobetonových prvků

Ze vztahu (3.168) resp. (3.170) vyplývá, že u prvku dané délky a materiálu závisí  $K_t$  pouze na poměru průřezových charakteristik  $I_t/I_\omega$ . Tuto závislost pro nosník délky  $L=1000$  mm a různé materiály znázorňuje následující graf.



graf 4.1 - závislost parametru  $K_t$  na poměru  $I_t/I_\omega$  pro nosník délky 1000 mm

Jak již bylo uvedeno, pro prostě podepřený nosník jsou rozhodující dvě hodnoty parametru  $K_t$ . Pokud je hodnota vyšší než 15, lze vázané kroucení zcela zanedbat. Pokud je naopak hodnota nižší než 1, zanedbává se volné kroucení. Poměr  $I_t/I_\omega$ , při kterém je těchto hodnot dosaženo, vyplývá z tab. 4.1, přičemž se vychází z upraveného vztahu (3.170):

$$\frac{I_t}{I_\omega} = \left(\frac{K_t}{L}\right)^2 \cdot 2 \cdot (1 + \nu) \quad (4.1)$$

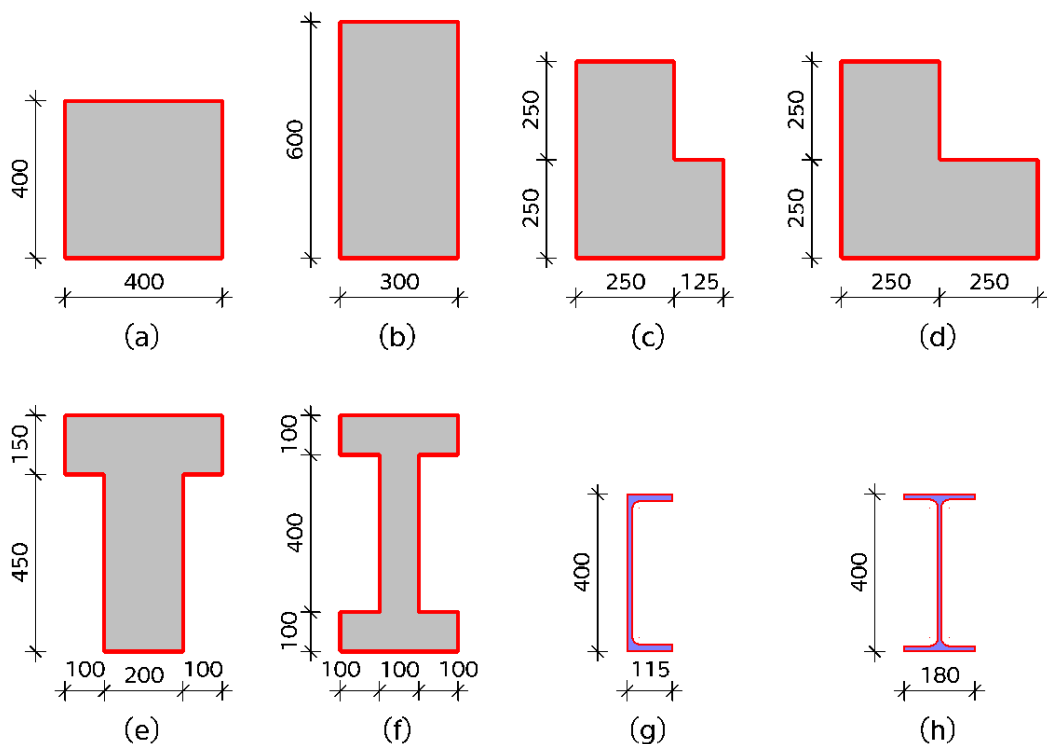
NOSNÍK DÉLKY L = 1000 mm				NOSNÍK DÉLKY L = 5000 mm			
materiál	$\nu$	$K_t$	$I_t/I_\omega$	materiál	$\nu$	$K_t$	$I_t/I_\omega$
	[-]	[-]	[mm <sup>-2</sup> ]		[-]	[-]	[mm <sup>-2</sup> ]
beton bez trhlin	0,2	15	5,4E-04	beton bez trhlin	0,2	15	2,2E-05
		1	2,4E-06			1	9,6E-08
beton s trhlinami	0,0	15	4,5E-04	beton s trhlinami	0,0	15	1,8E-05
		1	2,0E-06			1	8,0E-08
ocel	0,3	15	5,9E-04	ocel	0,3	15	2,3E-05
		1	2,6E-06			1	1,0E-07

tab. 4.1 - rozhodující poměr  $I_t/I_\omega$  pro nosník délky 1000 mm a 5000 mm

Pro nosník z betonu bez trhlin lze tedy vázané kroucení zanedbat pokud:

- $I_t/I_\omega \geq 5,4 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^{-2}$  při délce  $L = 1000 \text{ mm}$ ;
- $I_t/I_\omega \geq 2,2 \cdot 10^{-5} \text{ mm}^{-2}$  při délce  $L = 5000 \text{ mm}$ .

Poměr  $I_t/I_\omega$  pro průřezy běžných železobetonových prvků zakreslených na obr. 4.1 je uveden v tab. 4.2. Informativně jsou zároveň posouzeny 2 válcované ocelové profily. Pro každý průřez je stanovena délka, při které platí  $K_t=15$ .



obr. 4.1 - posuzované průřezy

Hodnoty  $I_t$  a  $I_\omega$  jsou stanoveny numerickým výpočtem v programu Scia Engineer, viz podkapitola 5.1. Hodnoty pro ocelové profily jsou převzaty z [12]. Lze dokázat, že poměr  $I_t/I_\omega$  není konstantní pro průřezy, které vzniknou pouhým zvětšením nebo zmenšením původního průřezu. Například pro čtverec o délce strany 100 mm je poměr jiný než pro čtverec o délce strany 200 mm. Uvedené hodnoty jsou tedy platné výhradně pro průřezy s rozměry dle obr. 4.1.

průřez		$I_t/I_\omega$	Kt (L=1000 mm)	Kt (L=5000 mm)	L (Kt=15)
ozn.	geometrie	[mm <sup>-2</sup> ]	[-]	[-]	[mm]
(a)	čtverec	7,7E-03	56,5	282,3	266
(b)	obdélník	2,5E-04	10,3	51,3	1463
(c)	tvar L 1	3,1E-04	11,4	56,9	1318
(d)	tvar L 2	1,7E-04	8,4	42,1	1780
(e)	tvar T	9,4E-05	6,3	31,3	2400
(f)	tvar I	3,6E-05	3,9	19,3	3879
(g)	UPE 400	3,7E-06	1,2	6,0	12587
(h)	IPE 400	1,0E-06	0,6	3,2	23689

tab. 4.2 - parametr  $K_t$  a délka, při které lze zanedbat vázané kroucení pro průřezy z obr. 4.1; zelená - zanedbatelné vázané kroucení; modrá - interakce volného a vázaného kroucení; červená - převládající vázané kroucení

Z výsledků vyplývá, že vázané kroucení může být významné pro krátké železobetonové nosníky. Při délce prvku větší než 4 m lze u všech posuzovaných železobetonových průřezů vázané kroucení zcela zanedbat. Průřezy (b) - (f) z obr. 4.1 se nejčastěji uplatňují jako průvlaky nebo vazníky v pozemních stavbách. Jejich délka je běžně větší než 6 m.

Podobně lze analyzovat i prvky s trhlinami, ovšem je třeba zohlednit skokovou změnu tuhosti průřezu při vzniku trhlin.

## 4.2 Únosnost na mezi vzniku trhlin

Návrhové postupy uvedené v kapitole 3 udávají vztahy pro stanovení kroucího momentu při vzniku trhlin ( $T_{Rd,c}$ ), viz rovnice (3.80), (3.128) a (3.142). Odlišnost vztahů vychází především z rozdílné definice náhradního průřezu, který jednotlivé postupy používají pro návrh prvku namáhaného kroucením. Hodnotu  $T_{Rd,c}$ , kterou lze považovat za správnou, udává vztah (3.50) odvozený z teorie pružnosti, který je pro přehlednost uveden znovu:

$$T_{Rd,c} = W_t \cdot f_{ctd} \quad (4.2)$$

Dále jsou porovnány výsledky výpočtu dle EC2-1-1 s výsledky výpočtu dle teorie pružnosti pro různé průřezy. Jelikož návrhová pevnost betonu v tahu  $f_{ctd}$  je materiálovou vlastností nezávislou na průřezu, lze výpočet zjednodušit na stanovení hodnoty modulu průřezu v kroucení  $W_t$ .

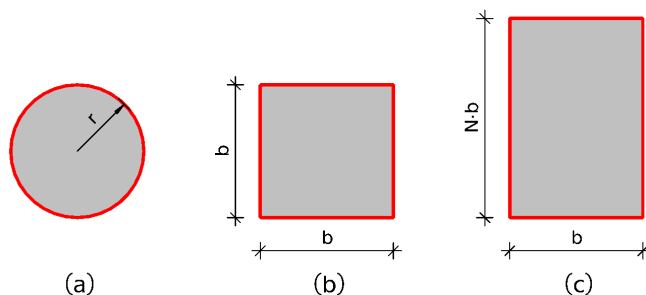
### 4.2.1 Porovnání EC2-1-1 s teorií pružnosti

Modul průřezu v kroucení dle EC2-1-1 ( $W_{t,EC}$ ) a dle teorie pružnosti ( $W_{t,el}$ ) se stanoví na základě vztahů (3.81) resp. (3.26), které jsou zde taktéž pro připomenutí opět uvedeny:

$$W_{t,EC} = t_{ef} \cdot 2 \cdot A_k \quad (4.3)$$

$$W_{t,el} = \frac{I_t}{k \cdot \lambda} \quad (4.4)$$

kde  $t_{ef}$ ,  $A_k$ ,  $I_t$ ,  $k$ ,  $\lambda$  jsou charakteristiky skutečného průřezu resp. ATDP definované v kapitole 3



obr. 4.2 - posuzované průřezy

Přesná podoba vztahů pro základní geometrické útvary je odvozena v PŘÍLOZE E ( $W_{t,EC}$ ) a v podkapitole 3.1.6 ( $W_{t,el}$ ). Porovnání výsledků je provedeno pro průřez tvaru kruhu, čtverce a obdélníku s proměnným poměrem  $h/b$ . Značení veličin je patrné z obr. 4.2. Přehled vztahů pro tyto průřezy je uveden v tab. 4.3.

ozn.	geometrie	$W_{t,EC}$	$W_{t,el}$
(a)	kruh	$\frac{9 \cdot \pi}{16} \cdot r^3 = 0,5625 \cdot \pi \cdot r^3$	$\frac{\pi}{2} \cdot r^3 = 0,5 \cdot \pi \cdot r^3$
(b)	čtverec	$\frac{9}{32} \cdot b^3 = 0,2513 \cdot b^3$	$0,2082 \cdot b^3$
(c)	obdélník	$\frac{N^2 \cdot b^3}{(1+N)} \cdot \left(1 - \frac{N}{2 \cdot (1+N)}\right) \cdot \left(1 - \frac{N}{2 \cdot (1+N)}\right)$	vztah (3.31) kde $h=N \cdot b$

tab. 4.3 - přehled vztahů pro modul průřezu v kroucení dle EC2-1-1 a teorie pružnosti

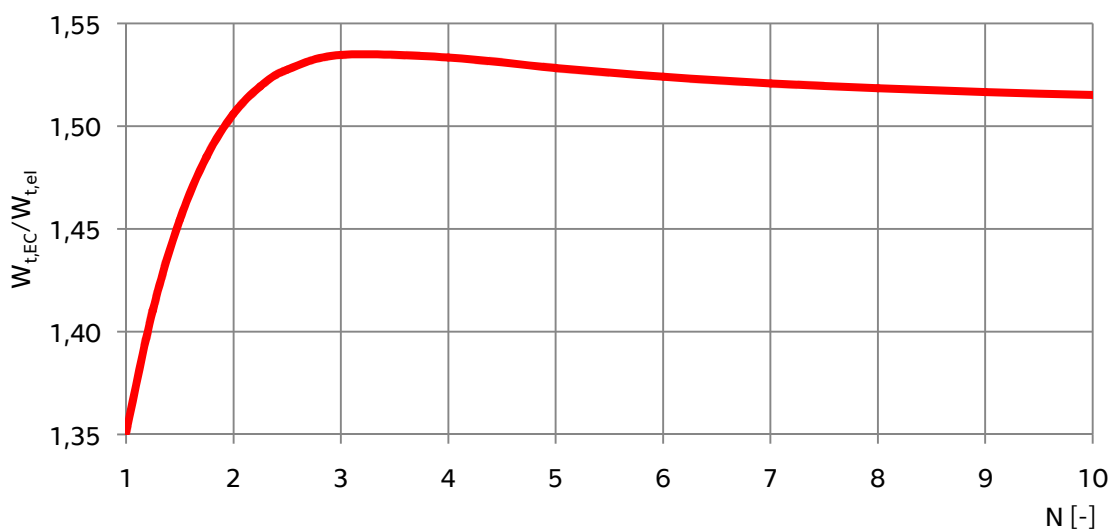
ozn.	geometrie	$W_{t,EC}/W_{t,el}$
(a)	kruh	1,13
(b)	čtverec	1,35
(c)	obdélník (N=1,5)	1,45
	obdélník (N=2)	1,51
	obdélník (N=5)	1,53
	obdélník (N=10)	1,52

tab. 4.4 - porovnání výsledků dle EC2-1-1 a teorie pružnosti



Porovnání je provedeno poměrem mezi hodnotou dle EC2-1-1 a teorie pružnosti ( $W_{t,EC}/W_{t,el}$ ). Výsledky jsou uvedeny v tab. 4.4.

Je zcela zřejmé, že hodnoty modulu průřezu v kroucení stanovené dle EC2-1-1 jsou nadhodnocené. V případě obdélníkového průřezu je výsledek až o více než 50 % vyšší než analytické řešení dle teorie pružnosti. Celý průběh  $W_{t,EC}/W_{t,el}$  pro obdélníkový průřez v rozmezí  $1 \leq N \leq 10$  znázorňuje graf 4.2.



graf 4.2 - průběh  $W_{t,EC}/W_{t,el}$  pro obdélník v závislosti na poměru stran

Z uvedených skutečností lze učinit jednoznačný závěr, že posouzení vzniku trhlin vlivem kroucení, dle výpočtu doporučeného v EC2-1-1, je výrazně na straně nebezpečné. Proto lze namísto normového postupu doporučit jako vhodnější výpočet založený na teorii pružnosti, pokud lze pro daný průřez stanovit  $W_{t,el}$ <sup>14</sup>.

Je vhodné připomenout, že dle EC2-1-1 se doporučuje stanovit  $T_{Rd,c}$  pomocí vztahu (3.80) jen pro přibližně obdélníkové plné průřezy. Bez důkazu lze uvést, že v případě dutých průřezů (např. dutý obdélník) by narůstal poměr  $W_{t,EC}/W_{t,el}$  ještě více, než pro plný průřez. Důvodem je započítání dutiny do plochy  $A_k$ , viz definice v podkapitole 3.4.6.

### 4.3 Návrh a posouzení výztuže pro prvek obdélníkového průřezu

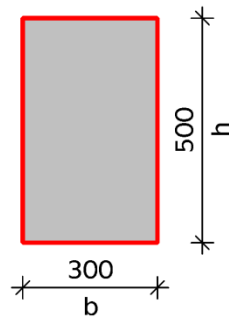
Výpočet je proveden dle čtyř návrhových postupů popsaných v kapitole 3. Podrobný postup lze nalézt v přílohách na konci této práce:

- ČSN EN 1992-1-1                      PŘÍLOHA A;
- ACI 318-11                              PŘÍLOHA B;
- ČSN 73 1201                            PŘÍLOHA C;
- příhradová analogie                  PŘÍLOHA D.

<sup>14</sup> Výpočetní programy založené na MKP často nabízí numerický výpočet momentu tuhosti v kroucení ( $I_t$ ) pro libovolný průřez, viz podkapitola 5.1. Ne vždy ale umožňují výpočet  $W_{t,el}$ .

Hlavním účelem výpočtů je porovnání výsledků jednotlivých návrhových postupů. Proto jsou provedeny pro jednotný obdélníkový průřez (viz obr. 4.3) a zároveň pro jednotné vstupní parametry:

- $T_{Ed}=40$  kNm;
- $\theta = 39,8^\circ \rightarrow \cotg(\theta) = 1,2$  (optimální volba - viz podkapitola 4.4)
- beton C30/37;
- betonářská výztuž B500B.



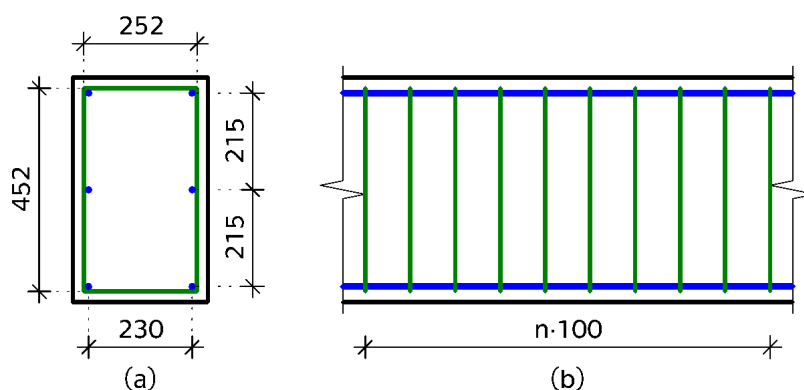
obr. 4.3 - posuzovaný obdélníkový průřez

### 4.3.1 Návrh výztuže

Návrh výztuže na kroucení je proveden dle návrhového postupu EC2-1-1 (podkapitola 3.4). Předpokládá se krycí vrstva tloušťky 20 mm. Ve výpočtu byly ověřeny všechny konstrukční zásady (viz podkapitola 3.4.12) a byla navržena následující výztuž:

- příčná třmínky  $\text{Ø}8/100$  mm;
- podélná: pruty  $6 \times \text{Ø}14$  mm.

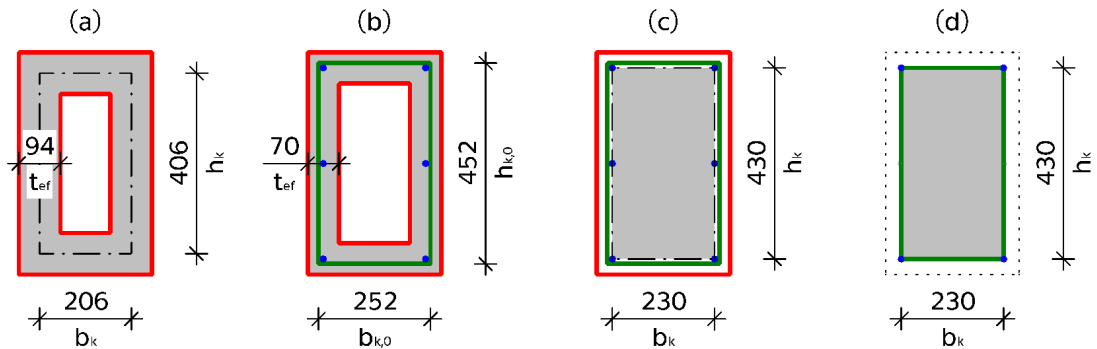
Podélné pruty jsou rovnoměrně rozmístěny po obvodu třmínku. Navržená výztuž je schématicky zakreslena na následujícím obrázku.



obr. 4.4 - schéma výztuže obdélníkového průřezu

### 4.3.2 Posouzení průřezu a výztuže, porovnání výsledků

Posouzení průřezu a výztuže je provedeno dle výše uvedených návrhových postupů. Jednotlivé náhradní průřezy nahrazující skutečný obdélníkový průřez znázorňuje následující obrázek.

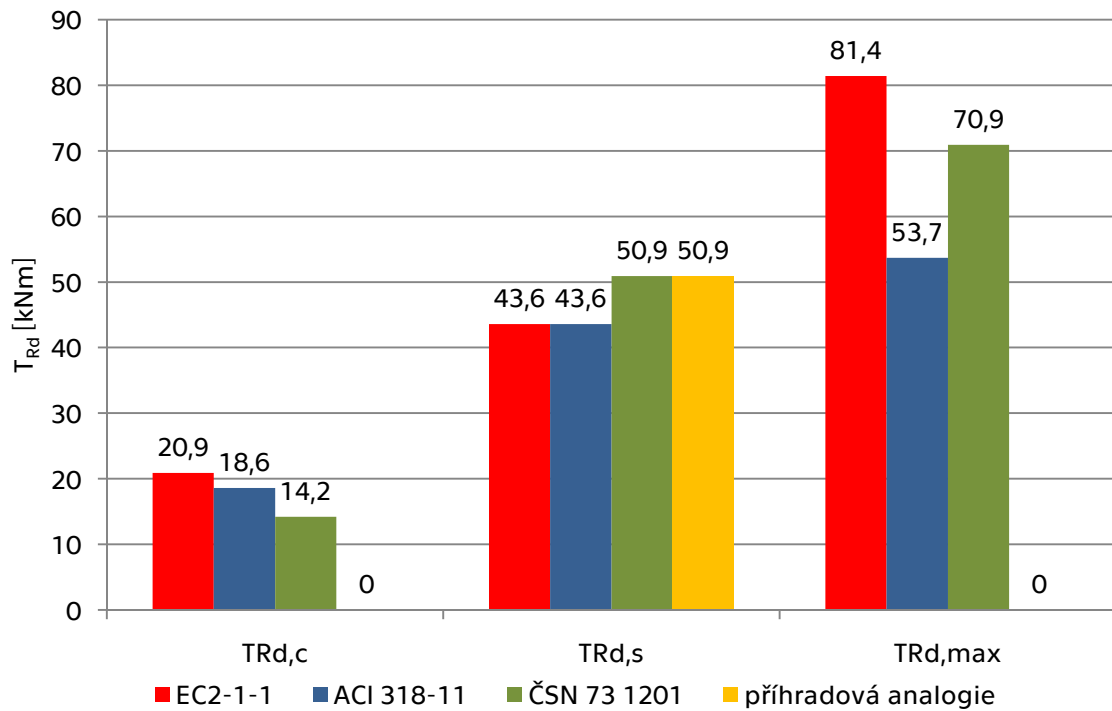


obr. 4.5 - náhradní průřezy; (a) EC2-1-1: ATDP, (b) ACI 318-11 ekvivalentní tenkostěnná trubka, (c) ČSN 73 1201: funkční jádro průřezu, (d) model náhradní příhradoviny

Výpočtem byly stanoveny následující veličiny<sup>15</sup> rozhodující o přechodu mezi jednotlivými fázemi chování prvku ve smyslu podkapitoly 3.2:

- $T_{Rd,c}$  krouticí moment při vzniku trhlin;
- $T_{Rd,s}$  krouticí moment na mezi kluzu výztuže;
- $T_{Rd,max}$  návrhový krouticí moment na mezi únosnosti.

Výsledky výpočtu dle jednotlivých návrhových postupů znázorňuje graf 4.3.



graf 4.3 - výsledné hodnoty pro jednotlivé návrhové postupy

<sup>15</sup> Model příhradové analogie umožňuje stanovit pouze krouticí moment na mezi kluzu výztuže  $T_{Rd,s}$ . Ostatní veličiny pro tento návrhový postup nejsou definovány.

## KROUTICÍ MOMENT PŘI VZNIKU TRHLIN

Nejnižší hodnotu krouticího momentu při vzniku trhlin udává postup dle ČSN 73 1201. Při porovnání vztahu (3.142) se vztahem (3.50) je ovšem zřejmé, že pro  $\kappa_n = \gamma_b = 1,0$  se jedná právě o analytické řešení dle teorie pružnosti, které lze označit za přesné. V podkapitole 4.2 bylo odvozeno, že postup dle EC2-1-1 je výrazně na straně nebezpečné (v tomto případě o 47 %). Z uvedených výsledků je ovšem patrné, že i postup dle ACI 318-11 značně nadhodnocuje analytickou hodnotu (v tomto případě o 31 %). Z uvedeného lze vyvodit, že náhradní tenkostěnné průřezy nejsou bezpečné pro stanovení krouticího momentu při vzniku trhlin a je vhodnější provádět výpočet pomocí vztahů z teorie pružnosti.

## KROUTICÍ MOMENT NA MEZI KLUZU VÝZTUŽE

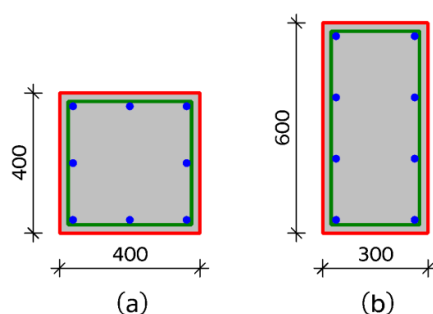
V případě krouticího momentu na mezi kluzu výztuže udávají naopak náhradní tenkostěnné průřezy hodnoty na straně bezpečné. To je způsobeno skutečností, že uvažovaná plocha  $A_k$  je zpravidla menší, než plocha uzavřená spojnicí os podélných prutů, jak předpokládá příhradová analogie, která popisuje skutečný mezní plastický stav krouceného prvku.

V případě postupu dle ACI 318-11 vzniká nesoulad mezi plochou  $A_k$  uzavřenou smykovým tokem a obvodem  $u_{k,0}$ , který představuje délku vnějších třmíneků a je větší než teoretický obvod plochy  $A_k$ . V důsledku toho vychází větší požadovaná plocha podélné výztuže, jak je patrné z výpočtu v PŘÍLOZE B.

## NÁVRHOVÝ KROUTICÍ MOMENT NA MEZI ÚNOSNOSTI

Hodnoty návrhového krouticího momentu na mezi únosnosti vykazují značný rozptyl mezi jednotlivými postupy. Nejnižší hodnoty udává ACI 318-11, zatímco nejvyšší vychází dle EC2-1-1. Rozdíl mezi maximální a minimální hodnotou je pro tento případ 52 %.

## 4.4 Optimalizace volby úhlu $\theta$



obr. 4.6 - posuzované průřezy; (a) čtverec, (b) obdélník  $h/b=2$

V podkapitole 3.4.1 bylo uvedeno, že dle EC2-1-1 je možné úhel sklonu tlakových diagonál  $\theta$  volit v rozmezí  $21,8^\circ$  až  $45^\circ$ , resp.  $\cotg(\theta)$  v rozmezí 1,0 až 2,5. Je vhodné připomenout, že při rostoucím úhlu  $\theta$ :

- roste únosnost tlakových diagonál;
- roste stupeň vyztužení příčnou výztuží (klesá podélná osová vzdálenost třmíneků);

- klesá stupeň vyztužení podélnou výztuží.

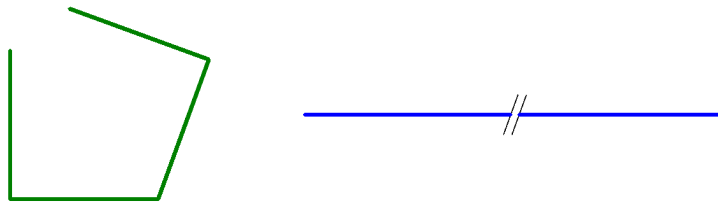
Množství příčné a podélné výztuže se tedy plynule mění se změnou úhlu sklonu tlakových diagonál. Z následujících grafů vyplývá, že celkové množství potřebné výztuže není konstantní a proto je vhodné optimalizovat volbu úhlu  $\theta$  takovým způsobem, aby byla potřebná plocha výztuže minimální. Optimalizační úloha je provedena na základě návrhového postupu dle EC2-1-1 pro dva průřezy z obr. 4.6.

Je přijmuto několik zjednodušujících předpokladů:

- při návrhu výztuže nerozhodují konstrukční zásady;
- jedná se o čisté kroucení bez interakce s jiným namáháním;
- ohyby třmínek jsou uvažovány jako ostré rohy;
- podélné pruty nejsou napojovány;
- působící návrhový kroucí moment  $T_{Ed}=50$  kNm a platí  $T_{Rd,c} < T_{Ed} \leq T_{Rd,max}$ ;
- $\varnothing_{sw}=8$  mm,  $A_{sw}=50$  mm<sup>2</sup>;
- beton: C30/37,  $\gamma_c=1,5$ ; výztuž: B500B,  $\gamma_s=1,15$ ;  $c_{nom}=20$  mm.

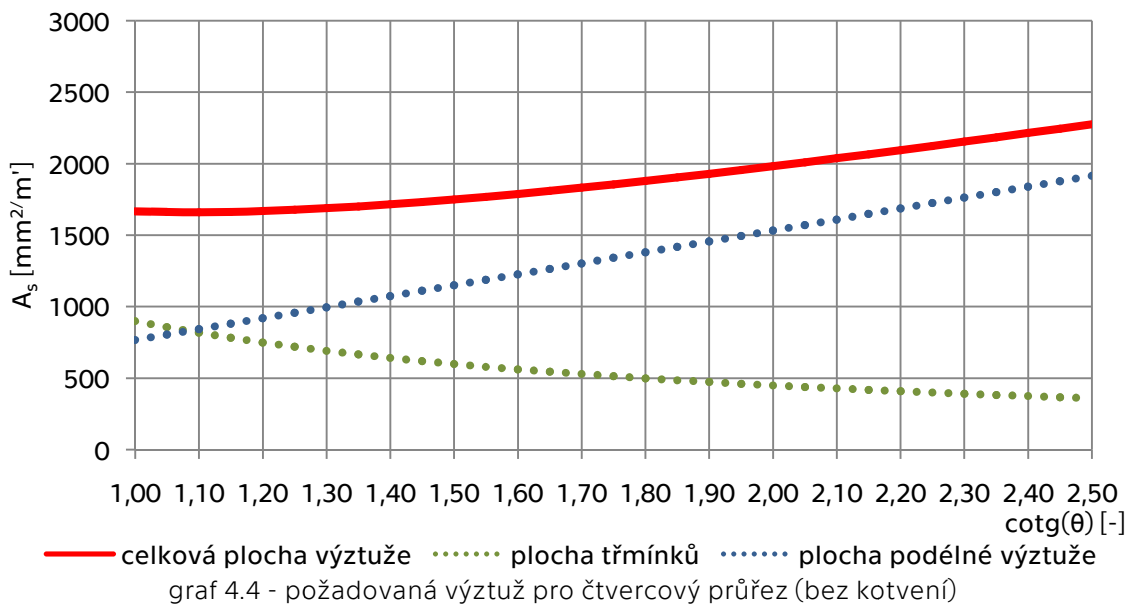
#### 4.4.1 Výpočet bez zohlednění kotevních délek

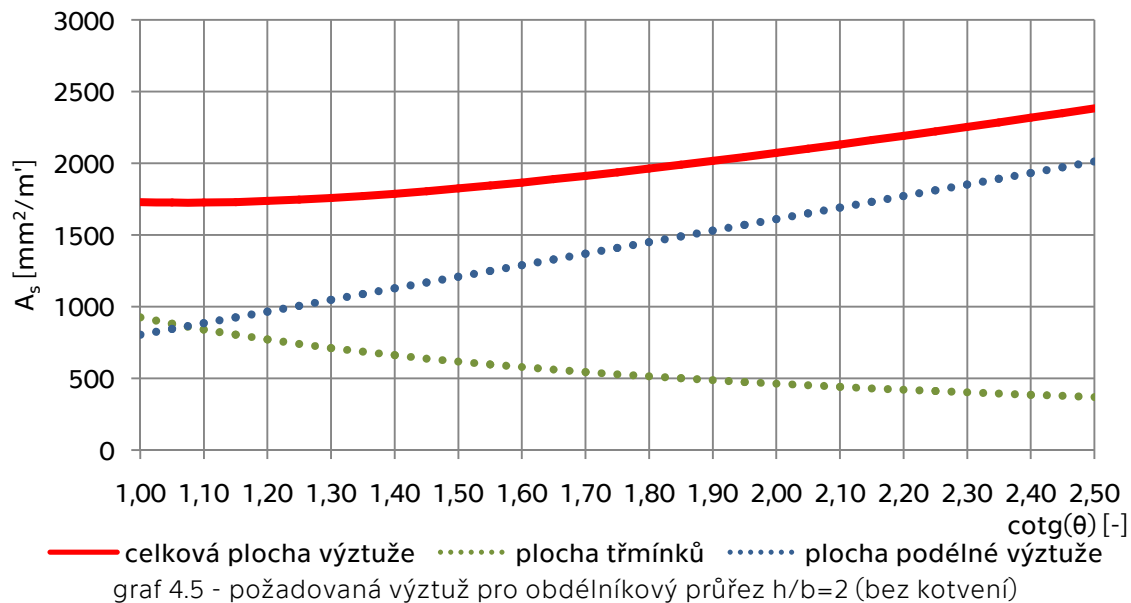
V první části je proveden výpočet optimálního úhlu  $\theta$  bez uvažování kotvení třmínek a podélných prutů. Jejich idealizovaný tvar je zobrazen na obr. 4.7.



obr. 4.7 - tvar třmínek a podélných prutů bez kotvení

Následující grafy znázorňují celkovou požadovanou plochu výztuže a dílčí požadované plochy výztuže pro posuzované průřezy v závislosti na  $\cotg(\theta)$ . Plocha výztuže je vztažena na 1 m' prutu.





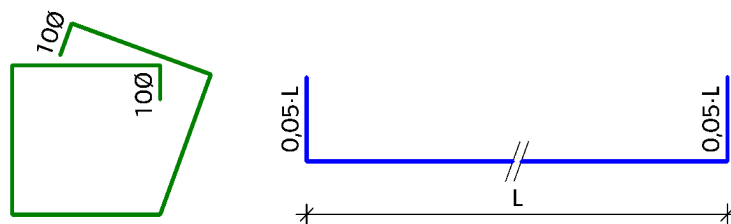
U obou průřezů nastává minimum přibližně pro  $\cotg(\theta) = 1,10$ , tj.  $\theta \approx 42^\circ$ . Výsledek je v souladu s tvrzením z podkapitoly 3.3.4, že analytické řešení minima požadované výztuže pro model příhradové analogie nastává při úhlu  $\theta = 45^\circ$ .

Z grafů je patrné, že minimum vždy nastává v okamžiku, kdy jsou si požadované plochy podélné a příčné výztuže rovny.

#### 4.4.2 Výpočet se zohledněním kotevních délek

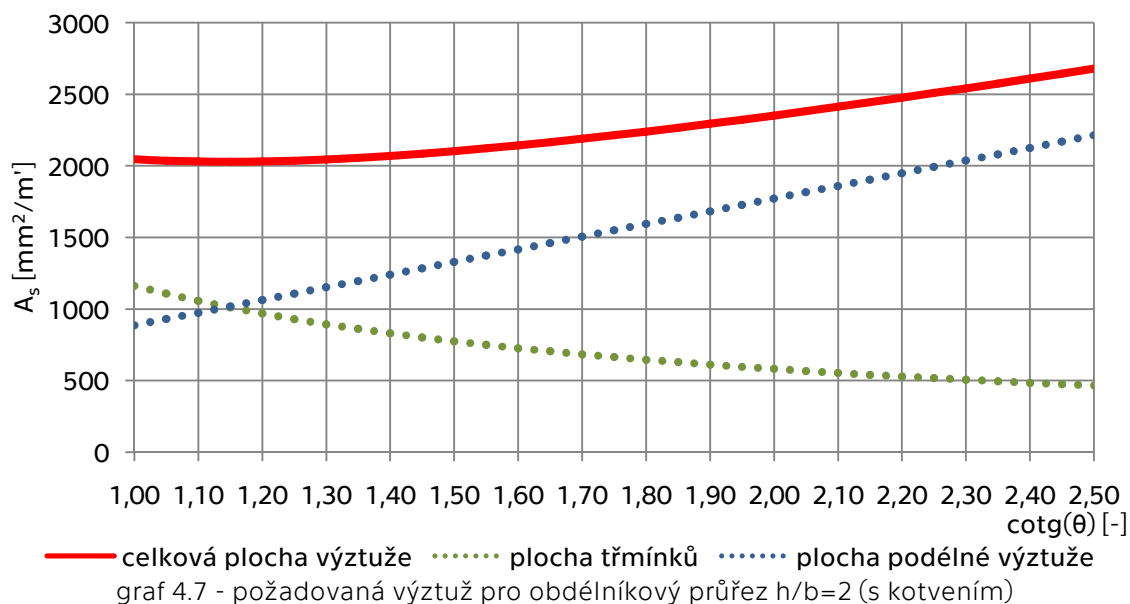
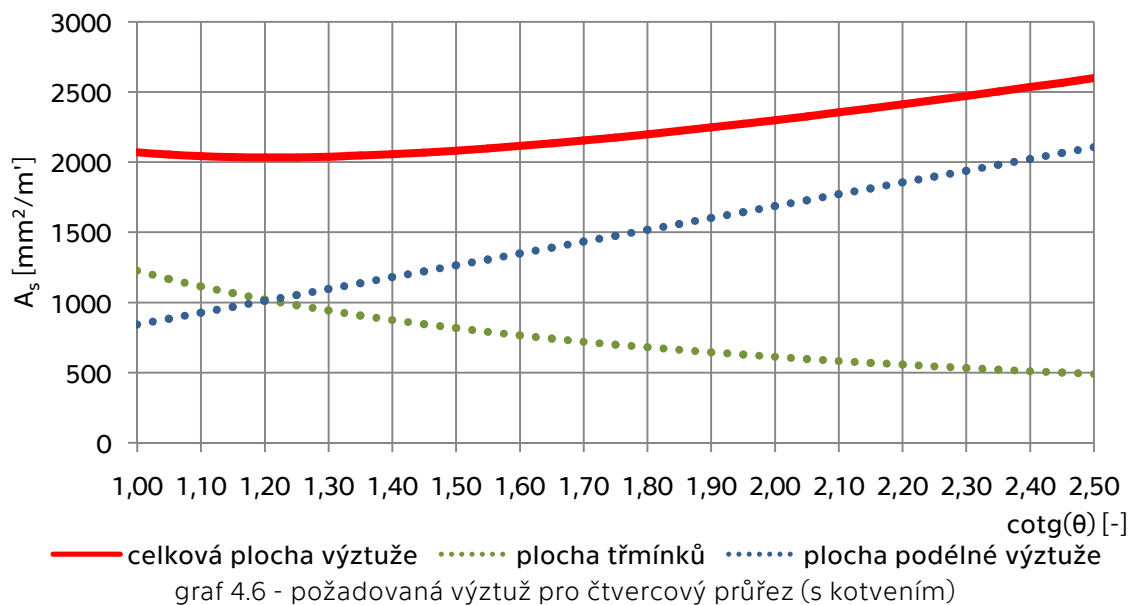
V druhé části bude ve výpočtu zohledněna skutečnost, že třmínky i podélná výztuž musí být dostatečně zakotveny, podrobně viz podkapitola 3.4.12. Ve výpočtu jsou uvažovány tyto předpoklady:

- třmínky jsou uzavřené podle obr. 4.8a délka ohybů je  $10 \cdot \varnothing$ ;
- podélné pruty jsou opatřeny koncovými ohyby o délce 5 % z délky prutu.



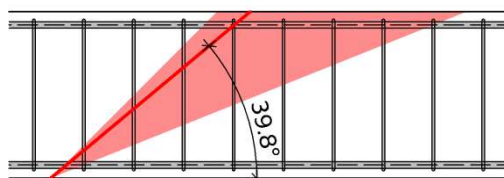
obr. 4.8 - tvar třmínků a podélných prutů s kotvením

Výsledky výpočtu opět znázorňují následující grafy.



Oproti předchozím výsledkům se při uvážení kotvení minimum mírně posouvá k hodnotě přibližně  $\cotg(\theta) = 1,20$  ( $\theta \approx 39,8^\circ$ ). Výsledky pro čtvercový a obdélníkový průřez se prakticky neliší.

Z uvedeného vyplývá, že při návrhu výztuže na kroucení pro prvek s obdélníkovým průřezem, je optimální volba  $\cotg(\theta) \approx 1,2$ .



obr. 4.9 - optimální volba úhlu  $\theta$  pro kroucený prvek obdélníkového průřezu a vějíř všech přípustných úhlů dle EC2-1-1





## 5 ANALÝZA KROUCENÍ VE VÝPOČETNÍCH PROGRAMECH

Výpočetní modely jsou nedílnou součástí návrhu většiny konstrukcí. Pokud jsou některé prvky krouceny, je nezbytné dodržet některá dodatečná pravidla nad rámec běžné analýzy tahu, tlaku nebo ohybu, která budou diskutována dále.

Obecně platí, že výsledky stanovené na celkovém komplexním modelu by měly být vždy ověřeny na jednoduchém modelu dílčího prvku nebo výseku konstrukce. Pro prvotní odhad je navíc vhodné využít ruční výpočet a předpokládaný průběh vnitřních sil, konkrétně kroutících momentů, stanovit např. podle schémat z podkapitoly 2.4.

Pro analýzu kroucení nelze využít výpočetní programy určené pro dvourozměrné prutové modely, které předpokládají pouze 3 stupně volnosti -  $u$ ,  $w$ ,  $\varphi_x$ . Kroucení je problémem rovinné napjatosti, proto musí být prutové prvky modelovány jako trojrozměrné.

Tato kapitola je zaměřena na problematiku numerického výpočtu průřezových charakteristik, metody umožňující zohlednění deplanace a pravidla modelování prvků s nesymetrickým průřezem.

### 5.1 Numerický výpočet průřezových charakteristik a přesnost řešení

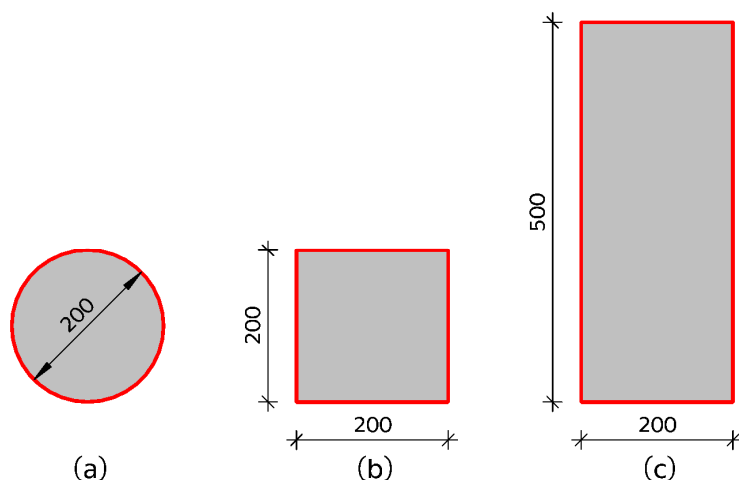
Výpočetní programy umožňují stanovit průřezové charakteristiky potřebné pro analýzu kroucení ( $I_t$ ,  $\omega$ ,  $C$ ,  $I_\omega$ ) libovolného průřezu. Výpočet se provádí rozdělením průřezu na síť konečných prvků a převodem integrálních vztahů (3.9) a (3.44) na soustavu algebraických rovnic v uzlových bodech sítě, zapsaných v maticové podobě. Hustotu sítě ( $\delta$ ) lze definovat jako poměr charakteristického rozměru průřezu ( $\lambda$ ) a velikosti konečného prvku ( $a$ ):

$$\delta = \frac{\lambda}{a} \quad (5.1)$$

Číselně se tedy jedná o počet prvků, na které je průřez rozdělen ve směru svého charakteristického rozměru. Z teorie MKP vyplývá, že pro nekonečnou hustotu sítě ( $\delta = \infty$ ) výsledek výpočtu konverguje k analytickému řešení. Takovéto hustoty ovšem ze zřejmých důvodů nelze dosáhnout, neboť lze řešit pouze matice s konečným počtem členů. Řešení soustavy algebraických rovnic obecně představuje problém s náročností  $n^3$ , kde  $n$  je počet řádků čtvercové matice. Výpočet lze pro matice se speciálními vlastnostmi (symetrické, pozitivně definitní, pásové) do jisté míry urychlit, případně lze použít iterační metody (viz [27]).

Pro všechny případy ale narůstá náročnost výpočtu nelineárně vzhledem k hustotě sítě. Proto je vhodné přibližně stanovit minimální počet prvků, na které je nutně průřez rozdělit tak, aby byl výsledek dostatečně přesný a zároveň výpočet proběhl v co nejkratším čase.

Na následujících stranách je proveden numerický výpočet průřezových charakteristik pomocí software Scia Engineer [F] pro základní tvary masivních průřezů (kruh, čtverec, obdélník) s rozměry dle obr. 5.1.



obr. 5.1 - analyzované průřezy; (a) kruh, (b) čtverec, (c) obdélník  $h/b=2,5$

Je porovnán moment tuhosti ve volném kroucení stanovený numerickou analýzou<sup>16</sup>  $I_{t,MKP}$  s analytickým řešením podle teorie pružnosti  $I_{t,el}$  v závislosti na hustotě sítě. Dále je sledována konvergence numerického výpočtu výsečového momentu setrvačnosti  $I_{\omega,MKP}$ , průběhy normované výsečové souřadnice  $\omega$  a jednotkových smykových napětí  $\tau_{xy}$  a  $\tau_{xz}$  v průřezu.

### 5.1.1 Kruhový průřez

Charakteristickým rozměrem kruhového průřezu je jeho průměr (D):

$$\lambda = D \quad (5.2)$$

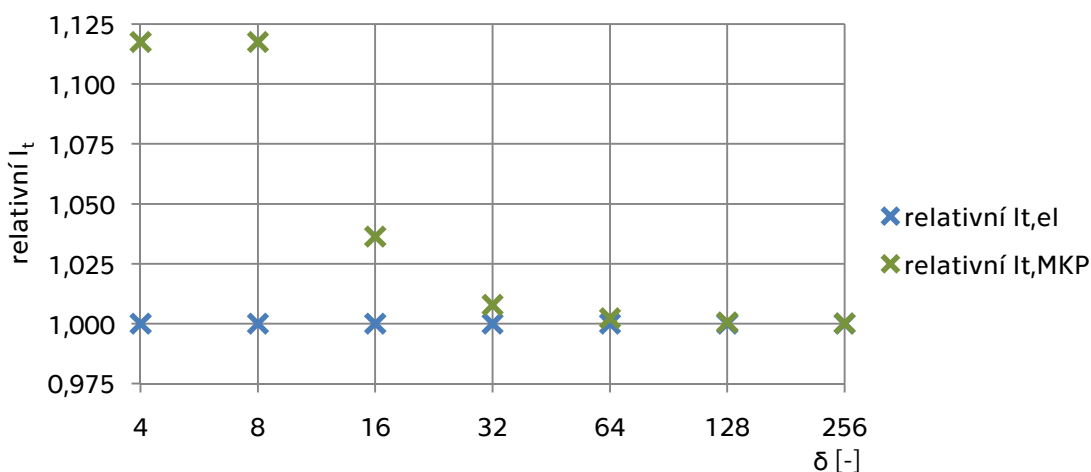
Analyticky lze stanovit jeho moment tuhosti ve volném kroucení podle vztahu (3.13). Relativní výsledek numerického výpočtu zobrazuje graf 5.1, přičemž platí:

$$\text{relativní } I_{t,el} = \frac{I_{t,el}(\delta)}{I_{t,el}} \equiv 1 \quad (5.3)$$

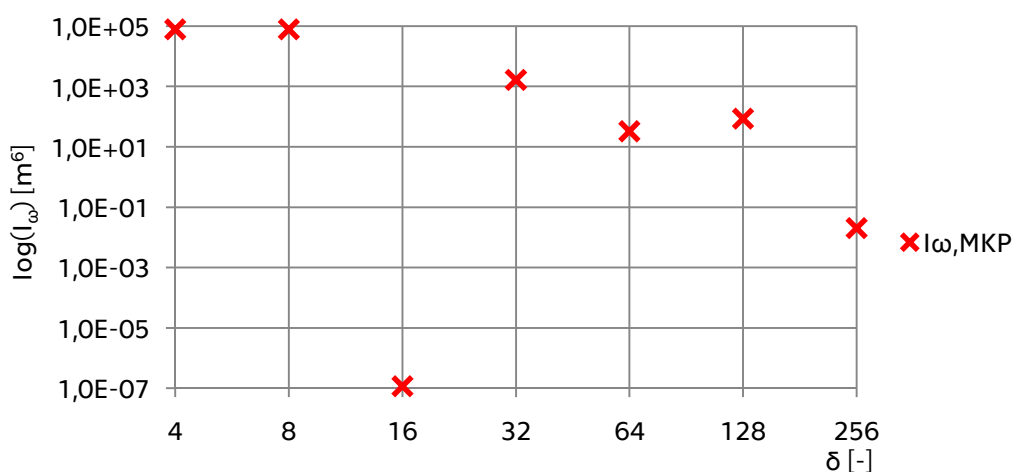
$$\text{relativní } I_{t,MKP} = \frac{I_{t,MKP}(\delta)}{I_{t,el}} \quad (5.4)$$

Jedná se tedy o normované hodnoty vzhledem k analytickému řešení a proto je vztah (5.3) indenticky roven 1 pro libovolnou hustotu sítě. Z grafu vyplývá, že při  $\delta=16$  se hodnoty začínají přibližovat a při  $\delta=64$  jsou obě řešení prakticky totožná. Numerický výpočet konverguje shora a výsledky jsou tedy pro malou hustotu sítě na straně nebezpečné.

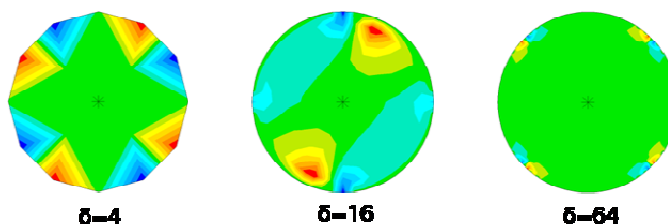
<sup>16</sup> Výpočetní programy většinou nabízí odhad momentu tuhosti ve volném kroucení pro případ, že není proveden numerický výpočet průřezových charakteristik. Důvodem je především stabilita výpočtu. Odhad pro masivní průřezy vychází z přibližného vztahu (3.21) nebo pro základní geometrické útvary z analytických výrazů uvedených v podkapitole 3.1.5.

graf 5.1 - kruhový průřez - přesnost stanovení  $I_t$  v závislosti na hustotě sítě

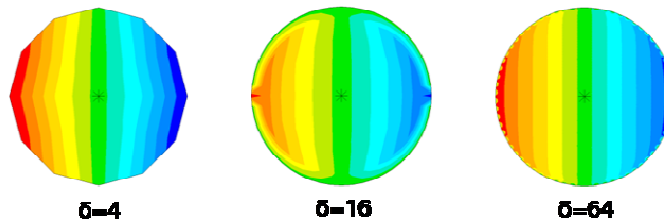
Výsledek numerického výpočtu výšečového momentu setrvačnosti zobrazuje graf 5.2. V podkapitole 3.1.5 bylo uvedeno, že kruhový průřez jako jediný nedeplanuje, proto při kroucení nevznikají žádná druhotná napětí a samotná definice  $I_\omega$  pro takový průřez postrádá význam. To dokazuje i numerický výpočet, ze kterého vyplývá, že výsledek osciluje ve velkém rozsahu hodnot bez viditelné konvergence i pro velkou hustotu sítě.

graf 5.2 - kruhový průřez - hodnota  $I_{\omega,MKP}$  v závislosti na hustotě sítě

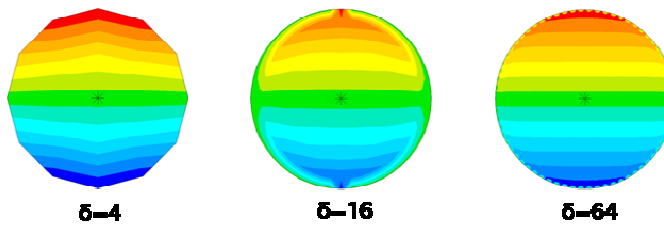
Průběh normované výšečové souřadnice na obr. 5.2, který je ukazatelem míry deplanace průřezu (viz vztah (3.47)) potvrzuje, že u kruhového průřezu skutečně nedochází ke ztrátě rovinnosti vlivem kroucení. Zelená oblast značí  $\omega=0$ . Výsledek je dostatečně přesný přibližně při hustotě sítě  $\delta=64$ .

obr. 5.2 - kruhový průřez - normovaná výšečová souřadnice  $\omega$  při různé hustotě sítě

Smyková napětí od kroucení jsou po průřezu rozdělena lineárně s nulovou hodnotou ve středu a s maximální hodnotou na okraji. Z obr. 5.3 a obr. 5.4 je patrné, že pro nízkou hustotu sítě (speciálně  $\delta=16$ ) je výsledek numerického výpočtu značně nepřesný a dokonce předpokládá nulové napětí v tenké vrstvě u okraje průřezu. Pro  $\delta=64$  se už výsledek blíží skutečnosti, přičemž červená barva značí maximální kladnou hodnotu, modrá barva maximální zápornou hodnotu a zelená barva nulové napětí.



obr. 5.3 - kruhový průřez - jednotkové napětí  $\tau_{xy}$  při různé hustotě sítě



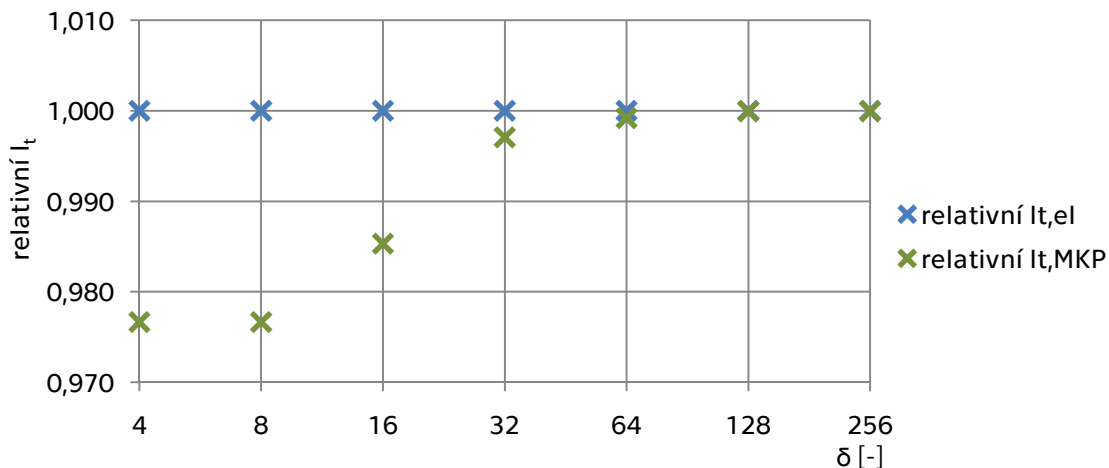
obr. 5.4 - kruhový průřez - jednotkové napětí  $\tau_{xz}$  při různé hustotě sítě

### 5.1.2 Čtvercový průřez

Charakteristickým rozměrem čtvercového průřezu je délka jeho strany (b):

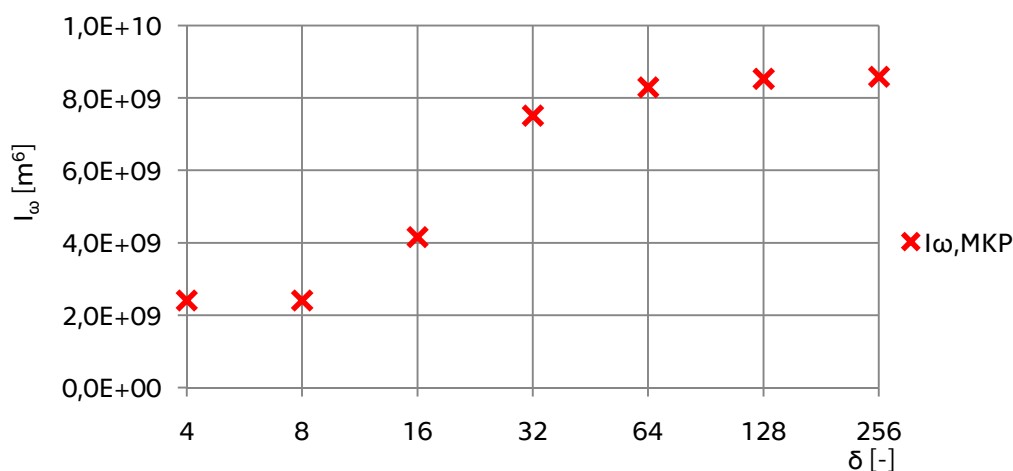
$$\lambda=b \quad (5.5)$$

Analyticky lze stanovit jeho moment tuhosti ve volném kroucení podle vztahu (3.20). Relativní výsledek numerického výpočtu zobrazuje graf 5.3, ze kterého vyplývá, že se hodnoty blíží analytickému řešení i pro nízkou hustotu sítě ( $\delta=4$ ) a pro  $\delta=32$  se již téměř neliší. Numerický výpočet konverguje zdola a je proto vždy na straně bezpečné.



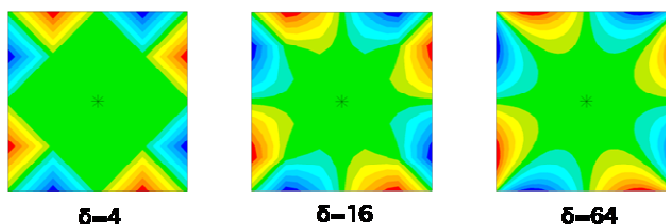
graf 5.3 - čtvercový průřez - přesnost stanovení  $I_t$  v závislosti na hustotě sítě

Hodnota výšečového momentu setrvačnosti vychází při nízké hustotě sítě značně podhodnocená. Je patrné, že se výsledek blíží k limitní hodnotě při  $\delta=64$ , viz graf 5.4.



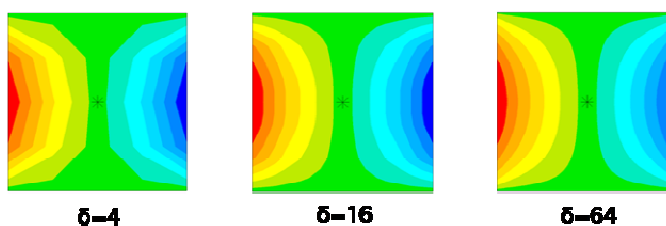
graf 5.4 - čtvercový průřez - hodnota  $I_{\omega, MKP}$  v závislosti na hustotě sítě

U čtvercového průřezu, na rozdíl od kruhu, již k deplanaci dochází. Průběh normované výšečové souřadnice zobrazuje obr. 5.5. Je vidět, že nejvíce deplanují oblasti na okraji v blízkosti rohů (červená a modrá barva). Při  $\delta=16$  je již výsledek poměrně přesný.

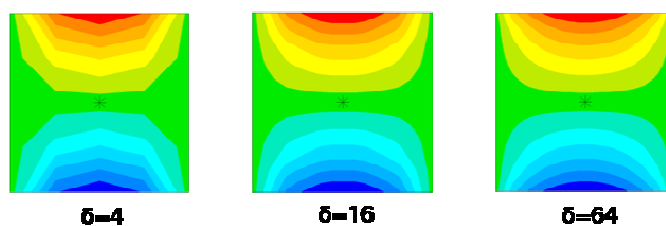


obr. 5.5 - čtvercový průřez - normovaná výšečová souřadnice při různých hustotách sítě

Smyková napětí jsou ve směru hlavních os průřezu rozdělena lineárně. Podobně jako v případě kruhu (pro porovnání viz obr. 3.5 (a)). Tomuto předpokladu odpovídá numerické řešení i při nízké hustotě sítě.



obr. 5.6 - čtvercový průřez - jednotkové napětí  $\tau_{xy}$  při různých hustotách sítě



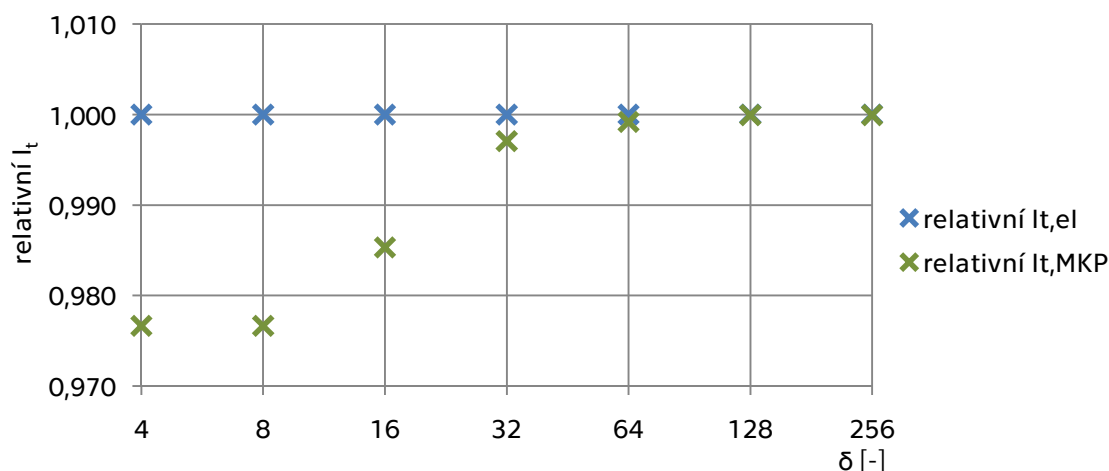
obr. 5.7 - čtvercový průřez - jednotkové napětí  $\tau_{xz}$  při různých hustotách sítě

### 5.1.3 Obdélníkový průřez ( $h/b = 2,5$ )

Charakteristickým rozměrem obdélníkového průřezu je jeho šířka ( $b$ ):

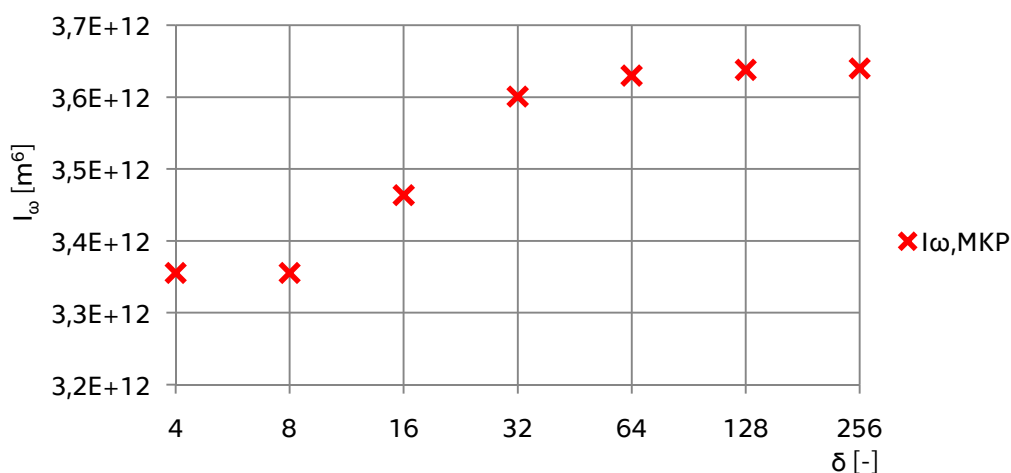
$$\lambda = b \quad (5.6)$$

Analyticky lze stanovit jeho moment tuhosti ve volném kroucení podle vztahu (3.17). Relativní výsledek numerického výpočtu zobrazuje graf 5.5, ze kterého vyplývá, že se hodnoty, podobně jako u čtvercového průřezu, blíží skutečnost i při nízké hustotě sítě ( $\delta=4$ ) a při  $\delta=32$  se již téměř neliší. Numerický výpočet opět konverguje zdola a je proto vždy na straně bezpečné.



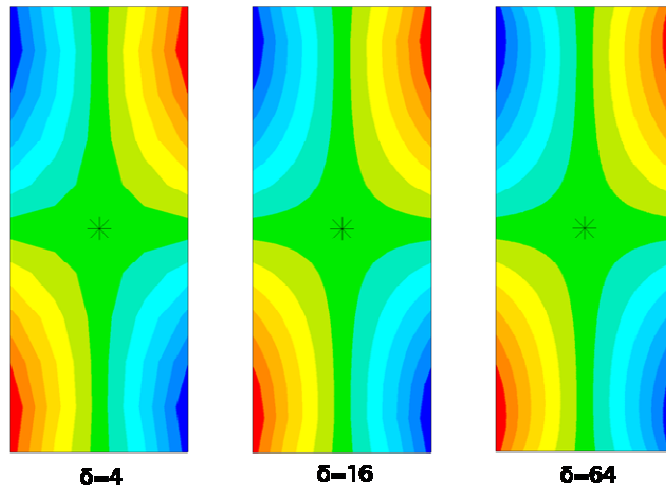
graf 5.5 - obdélníkový průřez ( $h/b = 2,5$ ) - přesnost stanovení  $I_t$  v závislosti na hustotě sítě

Výšečový moment setrvačnosti je při nízké hustotě sítě značně podhodnocen, ale při  $\delta=32$  se již blíží limitní hodnotě.



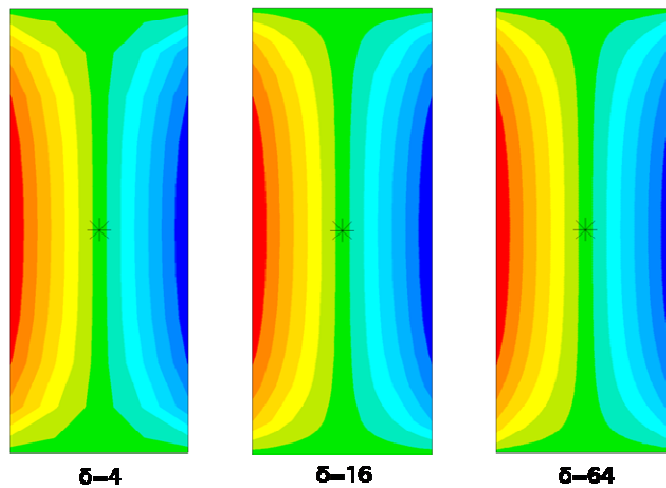
graf 5.6 - obdélníkový průřez ( $h/b = 2,5$ ) - hodnota  $I_{\omega,MKP}$  v závislosti na hustotě sítě

Obdélníkový průřez deplanuje výrazněji než průřez čtvercový. Z obr. 5.8 je patrné, že ke ztrátě rovinnosti dochází nejvíce v oblasti rohů. Dostatečně přesného výsledku je dosaženo i při minimální hustotě sítě.

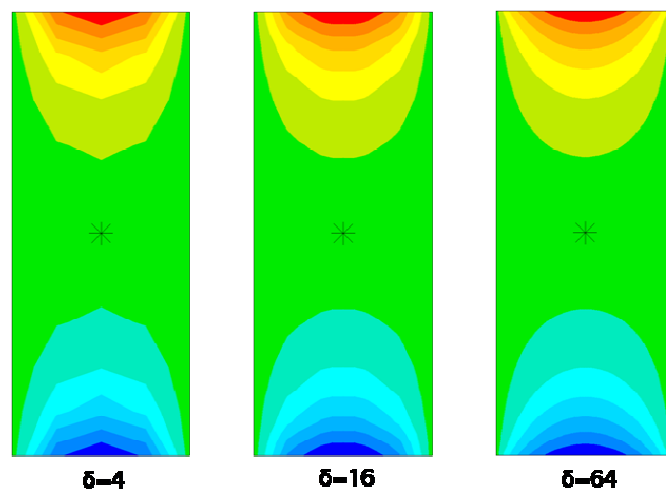


obr. 5.8 - obdélníkový průřez ( $h/b = 2,5$ )  
normovaná výšečová souřadnice pro různou hustotu sítě

Jak bylo uvedeno v podkapitole 3.1.6, největší smykové napětí vzniká uprostřed delších stran průřezu. V kratších stranách pro rostoucí poměr  $h/b$  postupně klesá a stává se zanedbatelným. Výsledek numerického výpočtu je velmi přesný i při minimální hustotě sítě (pro porovnání viz obr. 3.5).



obr. 5.9 - obdélníkový průřez ( $h/b = 2,5$ ) - jednotkové napětí  $\tau_{xy}$  pro různou hustotu sítě



obr. 5.10 - obdélníkový průřez ( $h/b = 2,5$ ) - jednotkové napětí  $\tau_{xz}$  pro různou hustotu sítě

## 5.2 Uvážení deplanace ve výpočtu

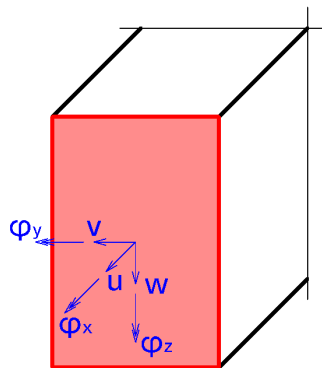
Většina komerčních výpočetních programů založených na MKP [B], [D], [F] nezohledňuje při běžném výpočtu vliv deplanace a tedy ani vliv vázaného kroucení. Všechny průřezy jsou uvažovány jako dokonale tuhá tělesa (resp. plochy), které mají v prostoru šest stupňů volnosti:

- 3 posuny  $u, v, w$ ;
- 3 pootočení  $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ .

Mohou se tedy libovolně posouvat a pootáčet, ale nikoli deformovat samy o sobě, jejich rovinnost zůstává vždy zachována. Těmto šesti deformacím odpovídá šest vnitřních sil:

- 1 normálová síla  $N$ ;
- 2 posouvající síly  $V_z, V_y$ ;
- 3 momenty  $M_x, M_y, M_z$ .

Krouticí moment  $M_x$  je tedy celkový a není rozdělen na složku volného a vázaného kroucení. Dále budou popsány 2 postupy používané ve výpočetních programech, kterými lze rozdělení krouticího momentu docílit.



obr. 5.11 - průřez se 6 stupni volnosti

### 5.2.1 7. stupeň volnosti

Tento postup využívají např. programy Dlubal RFEM [B] nebo Midas Gen [D]. Principem je přidání dalšího stupně volnosti ( $\omega$ ), který umožňuje průřezu pružné chování. Přípustné deformace průřezuse sedmi stupni volnosti jsou:

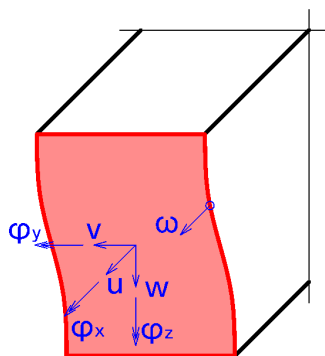
- 3 posuny  $u, v, w$ ;
- 3 pootočení  $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ ;
- 1 deplanace  $\omega$

Na základě znalosti deplanace lze stanovit osm složek vnitřních sil (viz [31]):

- 1 normálová síla  $N$ ;
- 2 posouvající síly  $V_z, V_y$ ;
- 4 momenty  ${}^1M_x, {}^2M_x, M_y, M_z$ ;
- 1 bimoment  $B$

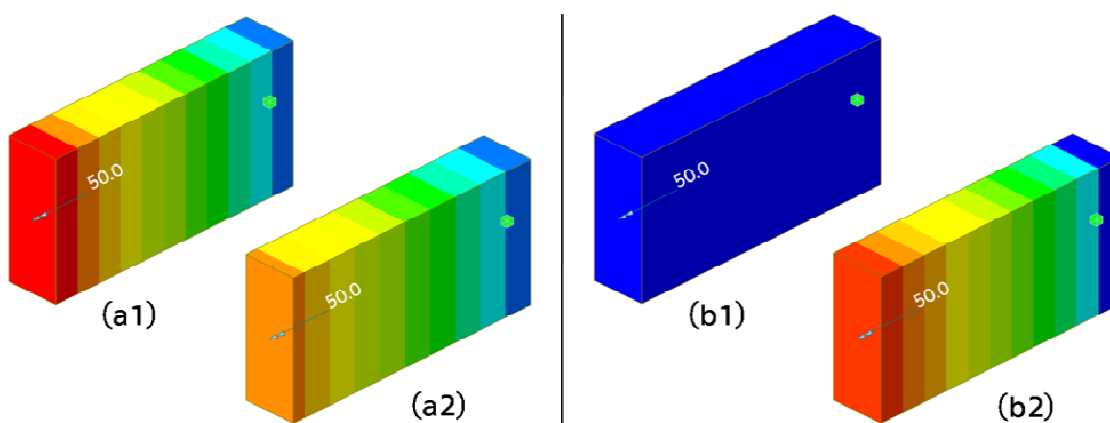
Celkový krouticí moment musí zůstat zachován tak, aby byla splněna rovnice (3.1).





obr. 5.12 - průřez se 7 stupni volnosti

Zároveň je možné stanovit deformaci způsobenou volným kroucením a deformaci způsobenou vázaným kroucením, viz obr. 5.13. Je nutné upozornit, že postup se sedmi stupni volnosti má v některých výpočetních programech (např. [B]) omezení, které umožňuje jeho použití pouze při analýze ocelových průřezů.



obr. 5.13 - deformace od (a) volného a (b) vázaného kroucení (software Midas Gen);  
modrá barva značí nulovou deformaci, červená maximální deformaci;  
(1) průřez se 6 stupni volnosti, (2) průřez se 7 stupni volnosti

## 5.2.2 Rozklad celkového krouticího momentu

Zjednodušený postup, který využívá např. program Scia Engineer [F], spočívá v uvažování dvou základních okrajových podmínek:

- zcela zamezená deplanace;
- zcela volná deplanace;

přičemž se předpokládá průřez pouze se šesti stupni volnosti (obr. 5.11). Z uvedených okrajových podmínek lze vytvořit tzv. tři standardní situace [37], pro které jsou stanoveny analytické vztahy k rozložení celkového krouticího momentu na  $^1M_x$ ,  $^2M_x$  a  $B$ .

Podobně jako v předchozím případě i tento postup může být ve výpočetních programech omezen výhradně na analýzu ocelových (resp. tenkostěnných) průřezů.

## 5.3 Modelování prvků s nesymetrickým průřezem

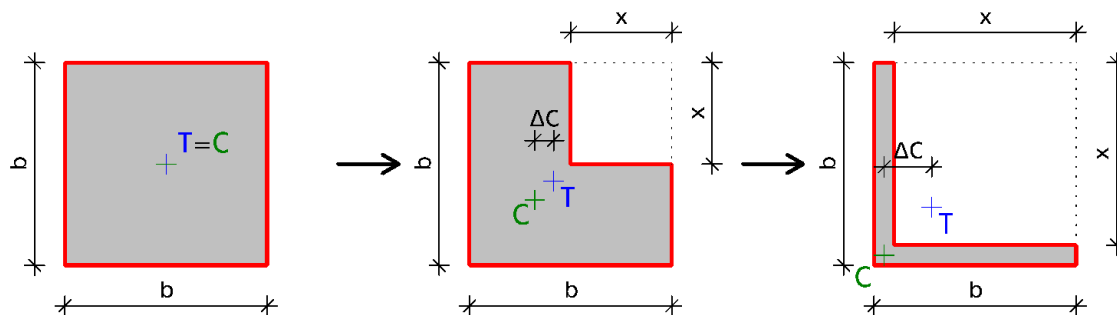
Prvky s nesymetrickým průřezem<sup>17</sup> jsou nejčastěji využívány u prefabrikovaných staveb (viz podkapitola 2.2). Nesymetrie je ve většině případů způsobena ozuby a konzolami, které rozšiřují základní, zpravidla obdélníkový průřez a umožňují uložení dalších prefabrikovaných konstrukcí.

Hlavním problémem těchto prvků z hlediska kroucení je rozdílnost polohy těžiště a středu smyku. Výpočetní programy reprezentují prutové prvky jejich střednicí, která je definována jako spojnice těžišť průřezů po délce prutu. Nahrazení střednicí je výhodné pro nejčastější typy namáhání (především pro tlak a ohyb), neboť k těžišti průřezu jsou vztaženy průřezové charakteristiky jako centrální momenty setrvačnosti, poloměry setrvačnosti nebo jádro průřezu.

Z hlediska kroucení ovšem není nejdůležitějším bodem průřezu jeho těžiště, ale střed smyku, neboť (celkový) vnější krouticí moment od příčného zatížení musí být stanoven právě k tomuto bodu, jak bylo již uvedeno v podkapitole 3.1.9.

### 5.3.1 Těžiště a střed smyku průřezu tvaru L

Průřez tvaru L patří mezi nejčastěji využívané nesymetrické železobetonové průřezy. Uplatňuje se jako prefabrikovaný krajní stropní průvlak (viz podkapitola 2.2.1). Proto je dále na tomto průřezu zkoumána rozdílnost polohy těžiště a středu smyku v závislosti na velikosti ozubu. Parametrický výpočet je proveden na průřezu, u kterého se předpokládá, že přechází z původního tvaru čtverce postupným vytvářením výřezu do dvou jeho stran až v tenkostěnný L-průřez. Vývoj tvaru průřezu znázorňuje obr. 5.14.

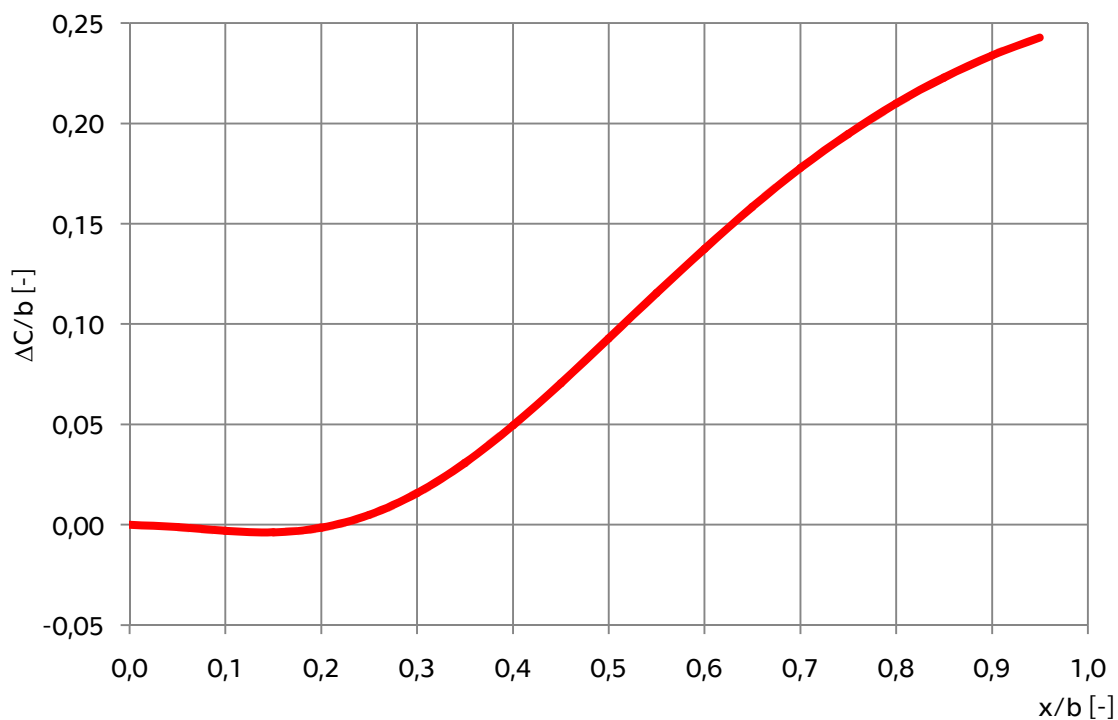


obr. 5.14 - přechod ze čtvercového průřezu na tenkostěnný L-průřez

Výpočet polohy těžiště a středu smyku je proveden numericky pomocí programu Scia Engineer [F] s hustotou sítě<sup>18</sup>  $\delta = 100$  pro  $x/b \leq 0,65$ , resp.  $\delta = 200$  pro  $x/b > 0,65$ . Charakteristickým rozměrem ( $\lambda$ ) je délka strany ( $b$ ) původního čtvercového průřezu. Výsledky výpočtu jsou uvedeny v bezrozměrných veličinách jako poměr k délce strany, viz graf 5.7.

<sup>17</sup> Především zcela nesymetrické průřezy. Prvky s jednou osou symetrie (např. T) jsou zpravidla namáhány příčným zatížením působícím rovnoběžně s touto osou a netýká se jich proto problematika posunu středu smyku, neboť ten leží právě na ose symetrie.

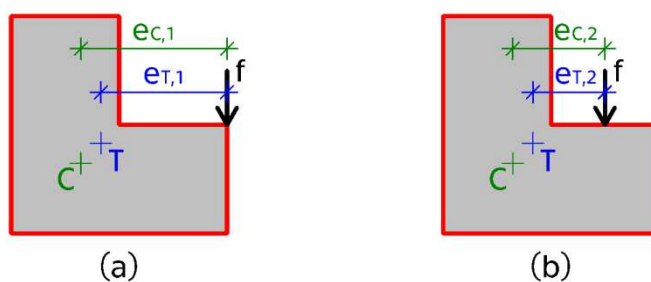
<sup>18</sup> Viz vztah (5.1).



graf 5.7 - relativní vzdálenost od středu smyku k těžišti průřezu tvaru L v závislosti na  $x/b$

Zároveň je stanoven relativní poměr mezi vnějším kroučícím momentem stanoveným ke středu smyku ( $m_{x,C,i}$ ) a vnějším kroučícím momentem stanoveným k těžišti ( $m_{x,T,i}$ ), viz graf 5.8. Předpokládá se, že příčné zatížení působí ve dvou polohách (viz obr. 5.15):

- $i=1$  okraj ozubu s rameny  $e_{C,1}$  resp.  $e_{T,1}$ ;
- $i=2$  střed ozubu s rameny  $e_{C,2}$  resp.  $e_{T,2}$ .

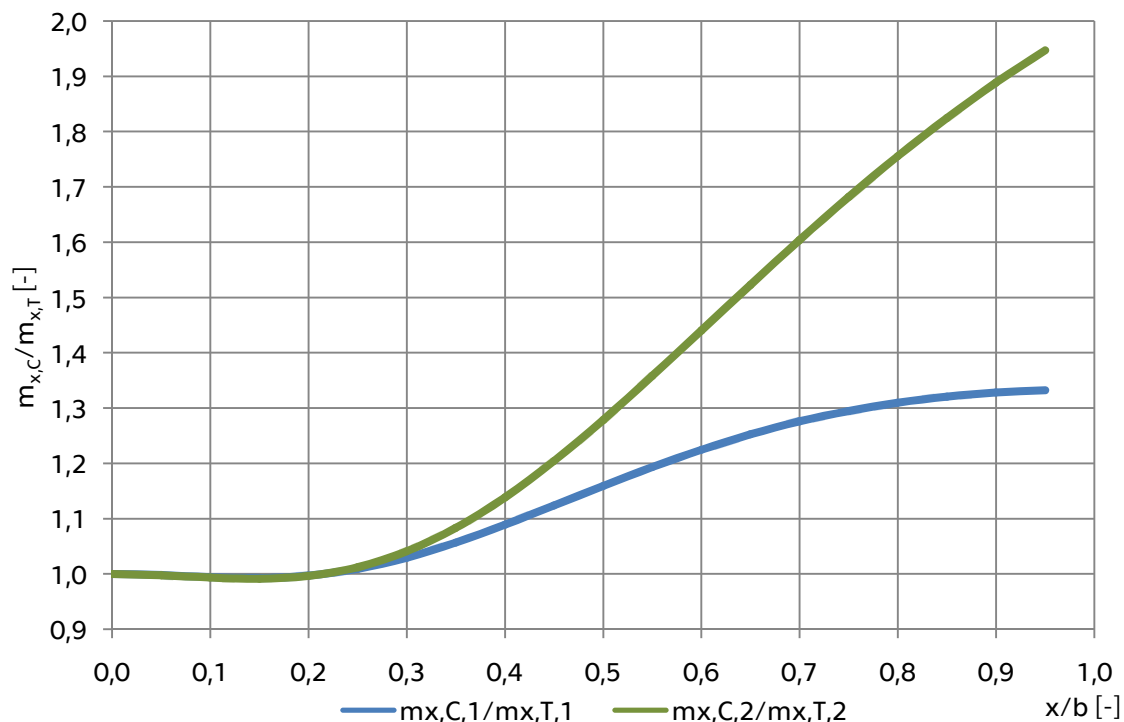


obr. 5.15 - působíště zatížení a ramena sil na průřezu s poměrem  $x/b = 0,5$ ;  
(a) okraj ozubu, (b) střed ozubu

Vnější kroučící momenty se stanoví podle vztahů:

$$m_{x,C,i} = f \cdot e_{C,i} \quad (5.7)$$

$$m_{x,T,i} = f \cdot e_{T,i} \quad (5.8)$$



graf 5.8 - poměr mezi vnějším kroučícím momentem stanoveným ke středu smyku a vnějším kroučícím momentem stanoveným k těžišti průřezu tvaru L v závislosti na  $x/b$

Z grafů vyplývá, že pokud výřez ve čtvercovém průřezu nepřekračuje přibližně 25 % délky jeho strany, pak je poloha středu smyku téměř totožná s polohou těžiště. S rostoucí velikostí zářezu se ale poloha začíná lišit až do limitní hodnoty přibližně  $0,25 \cdot b$ . Vlivem toho narůstá poměr mezi momenty  $m_{x,C,i}$  a  $m_{x,T,i}$ . V případě, že síla působí uprostřed ozubu, je rozdíl momentů pro limitní případ téměř dvojnásobný.

V současnosti se při rozvoji vysokohodnotných betonů a vláknobetonů začínají uplatňovat konstrukce s průřezy, které je prakticky možné označit jako tenkostěnné (viz např. mostovka lávky v Čelákovících tl. 60 mm [34]). Pro běžné aplikace lze ale z posuzovaných variant L-průřezu považovat za běžný přibližně průvlak s poměrem  $x/b=0,5$  (viz obr. 5.15). Pro tento průřez platí:

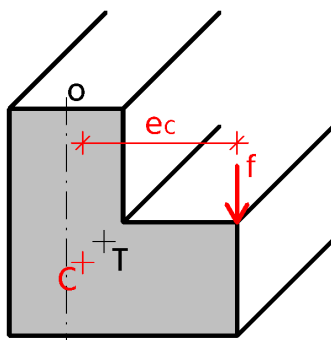
- střed smyku je od těžiště vzdálen o hodnotu  $0,09 \cdot b$
- kroučící moment ke středu smyku je o 16/28 % větší než k těžišti, pokud síla působí na okraji/uprostřed ozubu

Rozdíl v namáhání průřezu je tedy značný a měl být ve výpočtu zohledněn.

### 5.3.2 Posun systémové osy prvku

Výpočetní programy umožňují změnit polohu osy prvku, ke které budou stanoveny účinky zatížení. Analýza nesymetrického L-průřezu ukázala, že posun středu smyku významně mění výsledné kroučící momenty. V podkapitole 4.1 bylo přibližným výpočtem odvozeno, že vázané kroucení nezpůsobuje významná napětí v železobetonových prvcích s masivním průřezem délky větší než 4 m. Proto lze považovat za vhodný následující postup (viz obr. 5.16):

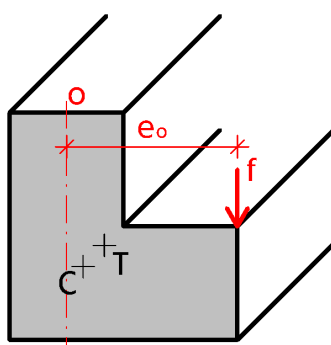
- posunutí systémové osy prvku do středu smyku;
- stanovení krouticího momentu běžnou analýzou se 6 stupni volnosti;
- návrh a posouzení výztuže dle postupů uvedených v kapitole 3.



obr. 5.16- prvek se systémovou osou ve středu smyku

Poloha středu smyku L-průřezu se zároveň blíží poloze osy uložení prvku (o). Proto lze konzervativně použít i alternativní postup (viz obr. 5.17):

- posunutí systémové osy prvku do osy uložení;
- stanovení krouticího momentu běžnou analýzou se 6 stupni volnosti;
- návrh a posouzení výztuže dle postupů uvedených v kapitole 3.



obr. 5.17 - prvek se systémovou osou v ose uložení

### 5.3.3 Poznámka k průřezovým charakteristikám

V podkapitole 5.1, byla porovnávána přesnost výpočtu průřezových charakteristik pro základní geometrické útvary. Je třeba upozornit na skutečnost, že odhad momentu tuhosti ve volném kroucení  $I_t$  dle vztahu (3.21), který výpočetní programy provádí před provedením numerického výpočtu, výrazně nadhodnocuje skutečnou hodnotu  $I_t$  pro nesymetrické průřezy.

Např. pro průřez tvaru L, s poměrem  $x/b = 0,5$  (obr. 5.15), vychází hodnota odhadu  $I_t$  o 73 % vyšší než hodnota stanovená numerickým výpočtem. To znamená, že pootočení prvku s tímto průřezem při namáhání kroucením vychází pouze jako 58 % skutečné hodnoty. Nepřesné stanovení deformace prutu může přitom značně ovlivnit výsledný průběh krouticího momentu, viz podkapitola 2.1.1. Numerický výpočet průřezových charakteristik je proto u nesymetrických průřezů vhodné provádět vždy.



## 6 ZÁVĚR

Problematika kroucení železobetonových prvků je rozsáhlá. Vychází jak z teorie pružnosti, která popisuje stav před vznikem trhlin, tak z teorie plasticity, která poskytuje nástroje pro nalezení mezního plastického stavu náhradního příhradového modelu tvořeného výztuží a betonovými diagonálami. Náročnost analýzy kroucených prvků je dále umocněna skutečností, že celkové účinky kroucení jsou součtem kroucení volného a vázaného, přičemž míra vlivu prvního či druhého jmenovaného velmi výrazně závisí na tvaru průřezu.

Modely vyvinuté pro návrh prutových prvků jsou v zásadě použitelné pouze pro případ převládajícího volného kroucení. Vázané kroucení lze zohlednit ve výpočtu pouze za cenu převodu úlohy na trojrozměrnou napjatost, jak je uvedeno v podkapitole 3.8.

Návrhové postupy doporučené normami vycházejí zpravidla z modelu příhradové analogie (viz podkapitola 3.3), jehož únosnost je omezena dosažením meze kluzu podélných a příčných prutů. Zároveň ale tyto postupy uplatňují poznatky z teorie pružnosti a skutečný průřez převádějí na náhradní uzavřený tenkostěnný (viz podkapitoly 3.4 a 3.5) nebo se přímo na teorii pružnosti odkazují (viz podkapitola 3.6) tak, aby bylo možné posoudit vznik trhlin v betonu a jeho případné drcení.

### 6.1 Zhodnocení splnění cílů práce

Železobetonovým prvkům typicky namáhaným kroucením je věnována kapitola 2. Na 11 příkladech monolitických a prefabrikovaných konstrukcí pozemních i mostních staveb jsou představeny příčiny vzniku kroucení a stručně zhodnocen jeho vliv v porovnání s ostatními typy namáhání.

Návrhové postupy pro kroucené železobetonové prvky jsou podrobně popsány v kapitole 3, a to od základních vztahů vyplývajících z teorie pružnosti a plasticity, přes normové modely pro návrh výztuže na kroucení, až po pokročilé postupy umožňující zohlednění vázaného kroucení.

Výsledky jednotlivých návrhových postupů jsou porovnány v kapitole 4. Vycházejí ze vzorových příkladů, které jsou zařazeny formou příloh, viz str. 117.

Analýza vlivu kroucení (především vázaného) na napjatost je provedena jednak v podkapitole 4.1 a zároveň v podkapitole 5.2. Problematika rozdílné polohy středu smyku a těžiště nesymetrických průřezů je zkoumána v podkapitole 5.3.

Modelování kroucených železobetonových prvků je věnována kapitola 5 se zaměřením na numerický výpočet průřezových charakteristik, způsoby zavedení deplanace do výpočetního modelu a již zmíněné modelování prvků s nesymetrickým průřezem.

Na základě výše uvedeného lze považovat cíle práce za splněné.

## 6.2 Souhrn nejdůležitějších poznatků

Práce se zabývá mnoha tématy souvisejícími s kroucením železobetonových prvků. Za nejdůležitější a nejzajímavější závěry z ní vyplývající, lze označit:

- Všechny zde uvedené normové návrhové postupy pro kroucené železobetonové prvky (EC2-1-1, ACI 318-11, ČSN 73 1201) vycházejí z modelu příhradové analogie.
- Postupy, ve kterých je nahrazen skutečný průřez uzavřeným tenkostěnným (EC2-1-1, ACI 318-11) výrazně nadhodnocují krouticí moment při vzniku trhlin. Výsledky jsou na straně nebezpečná až o 50 % v porovnání s analytickým řešením dle teorie pružnosti.
- Optimální volba úhlu  $\theta$  pro obdélníkový průřez s ohledem na minimální požadovanou plochu výztuže na kroucení je přibližně  $40^\circ$  ( $\cotg(\theta)=1,2$ ).
- Krouticí moment stanovený k těžišti nesymetrického průřezu může být o desítky procent nižší než správně stanovený krouticí moment ke středu smyku.
- Z přibližného výpočtu vyplývá, že u krátkých železobetonových prvků ( $L < 4$  m) může vznikat nezanedbatelné napětí od vázaného kroucení.
- Výpočetní programy běžně neuvažují vliv vázaného kroucení. Zohlednění deplanace vyžaduje dodatečná nastavení.
- Při numerickém výpočtu průřezových charakteristik je vhodné volit hustotu sítě v rozmezí  $50 \leq \delta \leq 100$ . Takové dělení sítě zajišťuje spolehlivé výsledky a zároveň není časově náročné.
- Při analýze kroucených prvků s nekonvexním průřezem je nutné použít numerický výpočet průřezových charakteristik vždy. Odhad dle teorie pružnosti udává výsledky o několik desítek procent na straně nebezpečné.

## 6.3 Náměty na rozšíření práce

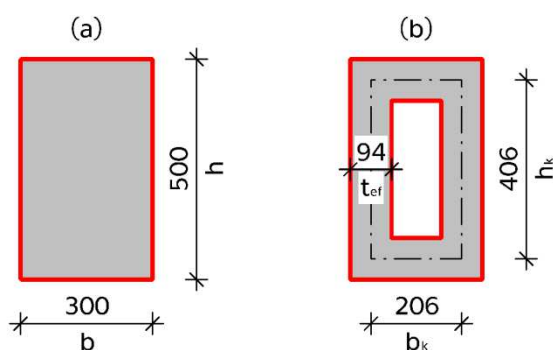
Z poznatků získaných ze zpracování této práce vyplývá, že některá témata je vhodné dále blíže zkoumat. Patří mezi ně například:

- Podrobné vyhodnocení míry vlivu vázaného kroucení u krátkých železobetonových prvků.
- Změna tuhosti prvku v kroucení po vzniku trhlin. Průřezové charakteristiky pro průřez s trhlínami.
- Aplikování uvedených výpočetních postupů na železobetonové duté masivní průřezy, případně uzavřené tenkostěnné průřezy a porovnání výsledků.
- Užití metody dílčích průřezů dle EC2-1-1 a s ní související problematika konstrukčních zásad pro malé průřezy.
- Vliv torzní tuhosti průvlaku na průběh krouticího momentu vyvolaného spolupůsobící monolitickou deskou.



## PŘÍLOHA A Výztuž na kroucení pro obdélníkový průřez dle EC2-1-1

Výpočet je proveden na základě postupu z podkapitoly 3.4. Rozměry průřezu jsou patrné z obr. A.1 (a). Předpokládá se, že prvek je namáhán čistým kroucením a působící návrhový krouticí moment je konstantní po celé délce. Prvek je dostatečně dlouhý tak, aby bylo možné zanedbat vliv vázaného kroucení ve smyslu závěrů z podkapitoly 4.1. Poloha středu smyku obdélníkového průřezu je totožná s polohou těžiště, proto se neuplatní doporučení pro stanovení krouticího momentu na zvětšeném rameni z podkapitoly 5.3.



obr. A.1 - (a) posuzovaný obdélníkový průřez, (b) analogický tenkostěnný dutý průřez

### VNITŘNÍ SÍLY

$$T_{Ed} = 40 \text{ kNm}$$

### GEOMETRIE SKUTEČNÉHO PRŮŘEZU A ATDP

$$b = 300 \text{ mm}$$

$$h = 500 \text{ mm}$$

$$A = b \cdot h = 300 \cdot 500 = 150000 \text{ mm}^2$$

$$u = 2 \cdot (b + h) = 2 \cdot (300 + 500) = 1600 \text{ mm}$$

$$t_{ef} = \frac{A}{u} = \frac{150000}{1600} = 94 \text{ mm}$$

$$b_k = b - t_{ef} = 300 - 94 = 206 \text{ mm}$$

$$h_k = h - t_{ef} = 500 - 94 = 406 \text{ mm}$$

$$A_k = b_k \cdot h_k = 206 \cdot 406 = 83636 \text{ mm}^2$$

$$u_k = 2 \cdot (b_k + h_k) = 2 \cdot (206 + 406) = 1224 \text{ mm}$$

### VOLBA ÚHLU SKLONU TLAKOVÝCH DIAGONÁL

$$\theta = 39,8^\circ$$

(viz podkapitola 4.4 - Optimalizace volby úhlu  $\theta$ )

$$\cotg(\theta) = \cotg(39,8^\circ) = 1,2$$

$$\sin(2\theta) = \sin(2 \cdot 39,8^\circ) = 0,98$$

**MATERIÁLOVÉ VLASTNOSTI****BETON: C30/37**

$$f_{ck}=30 \text{ MPa}$$

$$f_{ctk,0.05}=2.0 \text{ MPa}$$

$$\gamma_C=1,5$$

$$\alpha_{cc}=1,0$$

$$\alpha_{ct}=1,0$$

$$f_{cd}=\frac{\alpha_{cc}\cdot f_{ck}}{\gamma_C}=\frac{1,0\cdot 30}{1,5}=20 \text{ MPa}$$

$$f_{ctd}=\frac{\alpha_{ct}\cdot f_{ctk,0.05}}{\gamma_C}=\frac{1,0\cdot 2.0}{1,5}=1,33 \text{ MPa}$$

**BETONÁŘSKÁ VÝZTUŽ: B500B**

$$f_{yk}=f_{ywk}=500 \text{ MPa}$$

$$\gamma_S=1,15$$

$$f_{yd}=f_{ywd}=\frac{f_{yk}}{\gamma_S}=\frac{f_{ywk}}{\gamma_S}=\frac{500}{1,15}=434,8 \text{ MPa}$$

$$c_{nom}=20 \text{ mm}$$

**KROUTICÍ MOMENT PŘI VZNIKU TRHLIN**

$$T_{Rd,c}=t_{ef}\cdot 2\cdot A_k\cdot f_{ctd}=94\cdot 2\cdot 83636\cdot 1,33\cdot 10^{-6}=20,9 \text{ kNm}$$

$$\frac{T_{Ed}}{T_{Rd,c}}=\frac{40}{20,9}=1,91 \not\leq 1,0$$

**NEVYHOVUJE** - dochází ke vzniku trhlin, je třeba dimenzovat výztuž

**NÁVRHOVÝ KROUTICÍ MOMENT NA MEZI ÚNOSNOSTI**

$$v=0,6\cdot\left(1-\frac{f_{ck}}{250}\right)=0,6\cdot\left(1-\frac{30}{250}\right)=0,528$$

$$\alpha_{cw}=1,0 \quad (\text{předpokládá se } N_{Ed}=0)$$

$$T_{Rd,max}=v\cdot\alpha_{cw}\cdot f_{cd}\cdot A_k\cdot t_{ef}\cdot \sin(2\theta)=0,528\cdot 1,0\cdot 20\cdot 83636\cdot 94\cdot 0,98\cdot 10^{-6}=81,4 \text{ kNm}$$

$$\frac{T_{Ed}}{T_{Rd,max}}=\frac{40}{81,4}=0,49 \leq 1,0$$

**VYHOVUJE** - nedochází k drcení tlakových diagonál

**NÁVRH SMYKOVÉ VÝZTUŽE**

$$\emptyset_{sw}=8 \text{ mm}$$

$$n=1$$

$$A_{sw} = n \cdot \frac{\pi \cdot \varnothing_{sw}^2}{4} = 1 \cdot \frac{\pi \cdot 8^2}{4} = 50 \text{ mm}^2$$

$$s_{l,req} \leq \frac{A_{sw}}{T_{Ed}} \cdot 2 \cdot A_k \cdot f_{ywd} \cdot \cotg(\theta) = \frac{50}{40 \cdot 10^6} \cdot 2 \cdot 83636 \cdot 434,8 \cdot 1,2 = 109 \text{ mm}$$

NÁVRH: **TŘMÍNKY Ø8/100 mm**

### NÁVRHOVÝ KROUTICÍ MOMENT NA MEZI KLUZU SMYKOVÉ VÝZTUŽE

$$T_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{s_l} \cdot 2 \cdot A_k \cdot f_{ywd} \cdot \cotg(\theta) = \frac{50}{100} \cdot 2 \cdot 83636 \cdot 434,8 \cdot 1,2 \cdot 10^{-6} = 43,6 \text{ kNm}$$

$$\frac{T_{Ed}}{T_{Rd,s}} = \frac{40}{43,6} = 0,92 \leq 1,0$$

**VYHOVUJE** - smyková výztuž přenese působící návrhový krouticí moment

### NÁVRH PODÉLNÉ VÝZTUŽE NA KROUCENÍ

$$\Sigma A_{s_l,req} \geq \frac{T_{Ed}}{2 \cdot A_k \cdot f_{yd}} \cdot u_k \cdot \cotg(\theta) = \frac{40 \cdot 10^6}{2 \cdot 83636 \cdot 434,8} \cdot 1224 \cdot 1,2 = 808 \text{ mm}^2$$

NÁVRH: **6xØ14 mm** -  $\Sigma A_{s_l} = 924 \text{ mm}^2$ , pruty rovnoměrně rozmístěné po obvodu

### KONSTRUKČNÍ ZÁSADY

#### MINIMÁLNÍ PODÉLNÁ OSOVÁ VZDÁLENOST SESTAV TŘMÍNKOVÉ VÝZTUŽE

$$s_{l,min} = \frac{A_{sw} \cdot f_{ywd}}{0,5 \cdot v \cdot f_{cd} \cdot t_{ef}} = \frac{50 \cdot 434,8}{0,5 \cdot 0,528 \cdot 20 \cdot 94} = 44 \text{ mm} \leq 100 \text{ mm} = s_l$$

**VYHOVUJE**

#### MAXIMÁLNÍ PODÉLNÁ OSOVÁ VZDÁLENOST SESTAV TŘMÍNKOVÉ VÝZTUŽE

$$s_{l,max,1} = \frac{A_{sw} \cdot f_{ywk}}{0,08 \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot t_{ef}} = \frac{50 \cdot 500}{0,08 \cdot \sqrt{30} \cdot 94} = 607 \text{ mm}$$

$$d \cong 0,9 \cdot h = 0,9 \cdot 500 = 450 \text{ mm}$$

$$s_{l,max,2} = 0,75 \cdot d = 0,75 \cdot 450 = 338 \text{ mm}$$

$$s_{l,max,3} = 400 \text{ mm}$$

$$s_{l,max,4} = \frac{u}{8} = \frac{1600}{8} = 200 \text{ mm}$$

$$s_{l,max,5} = \min(b; h) = \min(300; 500) = 300 \text{ mm}$$

$$s_{l,max} = \min(s_{l,max,i}) = s_{l,max,4} = 200 \text{ mm} \geq 100 \text{ mm} = s_l$$

**VYHOVUJE**

#### MAXIMÁLNÍ PŘÍČNÁ OSOVÁ VZDÁLENOST VĚTVÍ TŘMÍNKŮ

$$s_{t,max,1} = 0,75 \cdot d = 0,75 \cdot 450 = 338 \text{ mm}$$

$$s_{t,max,2} = 600 \text{ mm}$$

$$s_{t,max} = \min(s_{t,max,i}) = s_{t,max,1} = 338 \text{ mm}$$

**VYHOVUJE**

### MAXIMÁLNÍ OSOVÁ VZDÁLENOST PODÉLNÝCH PRUTŮ

$$s_{sl,max} = 350 \text{ mm}$$

**VYHOVUJE**

### NÁVRHOVÝ KROUTICÍ MOMENT NA MEZI KLUZU KONSTRUKČNÍ VÝZTUŽE

$$T_{Rd,s,k} = \frac{A_{sw}}{s_{l,max}} \cdot 2 \cdot A_k \cdot f_{ywd} \cdot \cot(\theta) = \frac{50}{200} \cdot 2 \cdot 83636 \cdot 434,8 \cdot 1,2 \cdot 10^{-6} = 21,8 \text{ kNm}$$

$$\frac{T_{Rd,c}}{T_{Rd,s}} = \frac{20,9}{21,8} = 0,96 \leq 1,0$$

**VYHOVUJE** - únosnost konstrukční výztuže je vyšší než moment při vzniku trhlin

### SOUHRN VÝSLEDKŮ

příčná výztuž: TŘMÍNKY Ø8/100 mm

podélná výztuž: PRUTY 6×Ø14 mm

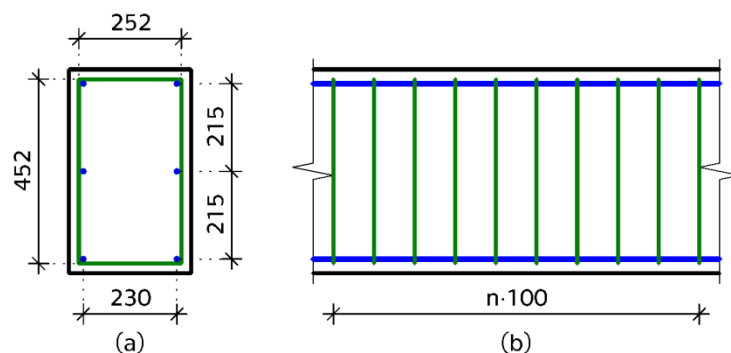
$$T_{Rd,c} = 20,9 \text{ kNm}$$

$$T_{Rd,max} = 81,4 \text{ kNm}$$

$$T_{Rd,s} = 43,6 \text{ kNm}$$

$$T_{Rd,s,k} = 21,8 \text{ kNm}$$

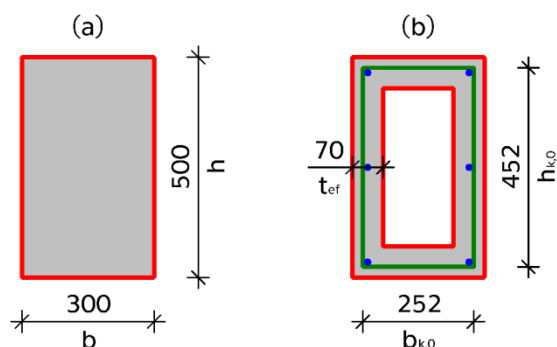
### SCHÉMA NAVRŽENÉ VÝZTUŽE



obr. A.2 - schéma navržené výztuže; (a) příčný řez, (b) podélný řez

## PŘÍLOHA B Posouzení obdélníkového průřezu dle ACI 318-11

Výpočet je proveden na základě postupu z podkapitoly 3.5. Návrh průřezu a jeho vyztužení na kroucení bylo provedeno v PŘÍLOZE A. Všechny vstupní parametry zůstávají shodné. Průřez je dále pouze posouzen na základě postupu dle ACI 318-11. Výpočet je proveden v jednotkách soustavy SI, pevnostní třída betonu a betonářské výztuže je uvažována podle EC2-1-1. Konstrukční zásady nejsou ověřovány.



obr. B.1 - (a) posuzovaný obdélníkový průřez, (b) ekvivalentní tenkostěnná trubka

### VNITŘNÍ SÍLY

$$T_{Ed}=40 \text{ kNm}$$

### GEOMETRIE SKUTEČNÉHO PRŮŘEZU A EKVIVALETNÍ TENKOSTĚNNÉ TRUBKY

$$b=300 \text{ mm}$$

$$h=500 \text{ mm}$$

$$A=b \cdot h=300 \cdot 500=150000 \text{ mm}^2$$

$$u=2 \cdot (b+h)=2 \cdot (300+500)=1600 \text{ mm}$$

$$t_{ef}=0,75 \cdot \frac{A}{u}=0,75 \cdot \frac{150000}{1600}=70 \text{ mm}$$

$$b_{k,0}=252 \text{ mm}$$

$$h_{k,0}=452 \text{ mm}$$

$$A_{k,0}=b_{k,0} \cdot h_{k,0}=252 \cdot 452=113904 \text{ mm}^2$$

$$A_k=0,85 \cdot A_{k,0}=0,85 \cdot 113904=96818 \text{ mm}^2$$

$$u_{k,0}=2 \cdot (b_{k,0}+h_{k,0})=2 \cdot (252+452)=1408 \text{ mm}$$

### ÚHEL SKLONU TLAKOVÝCH DIAGONÁL

$$\theta=39,8^\circ$$

$$\cotg(\theta)=\cotg(39,8^\circ)=1,2$$

## MATERIÁLOVÉ VLASTNOSTI

### BETON: C30/37

$$f_{ck}=30 \text{ MPa}$$

### BETONÁŘSKÁ VÝZTUŽ: B500B

$$f_{yk}=f_{ywk}=500 \text{ MPa}^{19}$$

### REDUKČNÍ SOUČINITELE

$$\begin{aligned} \phi &= 0,75 && (\text{návrh na účinky kroucení}) \\ \lambda &= 1,0 && (\text{beton běžné objemové hmotnosti}) \end{aligned}$$

### KROUTICÍ MOMENT PŘI VZNIKU TRHLIN

$$T_{Rk,c} = \frac{2}{3} \cdot A_k \cdot t_{ef} \cdot \lambda \cdot \sqrt{f_{ck}} = \frac{2}{3} \cdot 96818 \cdot 70 \cdot 1,0 \cdot \sqrt{30} \cdot 10^{-6} = 24,7 \text{ kNm}$$

$$T_{Rd,c} = \phi \cdot T_{Rk,c} = 0,75 \cdot 24,7 = 18,6 \text{ kNm}$$

$$\frac{1}{4} \cdot T_{Rd,c} = \frac{1}{4} \cdot 18,6 = 4,6 \text{ kNm} \not\geq 40 \text{ kNm} = T_{Ed}$$

**NEVYHOVUJE** - kroucení nelze zanedbat

### NÁVRHOVÝ KROUTICÍ MOMENT NA MEZI ÚNOSNOSTI

$$\mu_t = \frac{\frac{T_{Ed} \cdot u_{k,0}}{1,7 \cdot A_{k,0}^2}}{\phi \cdot \left( \frac{1}{6} \cdot \lambda \cdot \sqrt{f_{ck}} + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{f_{ck}} \right)} = \frac{\frac{40 \cdot 10^6 \cdot 1408}{1,7 \cdot 113904^2}}{0,75 \cdot \left( \frac{1}{6} \cdot 1,0 \cdot \sqrt{30} + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{30} \right)} = 0,745$$

$$T_{Rd,max} = \frac{T_{Ed}}{\mu_t} = \frac{40}{0,745} = 53,7 \text{ kNm}$$

**VYHOVUJE** - nedochází k drcení tlakových diagonál

### NÁVRHOVÝ KROUTICÍ MOMENT NA MEZI KLUZU SMYKOVÉ VÝZTUŽE

$$A_{sw} = 50 \text{ mm}^2 \quad (\text{viz PŘÍLOHA A})$$

$$s_l = 100 \text{ mm} \quad (\text{viz PŘÍLOHA A})$$

$$T_{Rk,s} = \frac{A_{sw}}{s_l} \cdot 2 \cdot A_k \cdot f_{ywk} \cdot \cot(\theta) = \frac{50}{100} \cdot 2 \cdot 96818 \cdot 500 \cdot 1,2 \cdot 10^{-6} = 58,1 \text{ kNm}$$

$$T_{Rd,s} = \phi \cdot T_{Rk,s} = 0,75 \cdot 58,1 = 43,6 \text{ kNm}$$

$$\frac{T_{Ed}}{T_{Rd,s}} = \frac{40}{43,6} = 0,92 \leq 1,0$$

<sup>19</sup> Omezení charakteristické meze kluzu smykové výztuže dle vztahu (3.134) není uvažováno.

**VYHOVUJE** - navržená smyková výztuž je dostačující

### PODÉLNÁ VÝZTUŽ NA KROUCENÍ

$$\Sigma A_{sl,req} \geq \frac{A_{sw}}{s_l} \cdot u_{k,0} \cdot \frac{f_{yw,k}}{f_{yk}} \cdot \cotg^2(\theta) = \frac{50}{100} \cdot 1408 \cdot \frac{500}{500} \cdot 1,2^2 = 1014 \text{ mm}^2$$

$$\Sigma A_{sl} = 924 \text{ mm} \quad (\text{viz PŘÍLOHA A})$$

$$\frac{\Sigma A_{sl,req}}{\Sigma A_{sl}} = \frac{1014}{924} = 1,10 \not\leq 1,0$$

**NEVYHOVUJE** - navrženou plochu podélné výztuž by bylo třeba zvětšit

### SOUHRN VÝSLEDKŮ

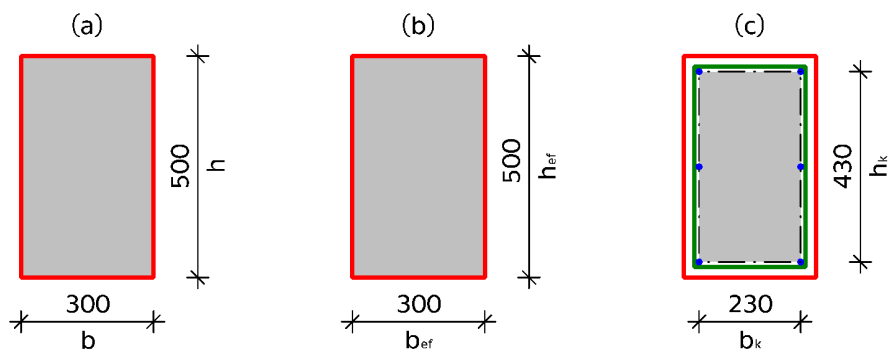
$$T_{Rd,c} = 18,6 \text{ kNm}$$

$$T_{Rd,max} = 53,7 \text{ kNm}$$

$$T_{Rd,s} = 43,6 \text{ kNm}$$

## PŘÍLOHA C Posouzení obdélníkového průřezu dle ČSN 73 1201

Výpočet je proveden na základě postupu z podkapitoly 3.6. Návrh průřezu a jeho vyztužení na kroucení bylo provedeno v PŘÍLOZE A. Všechny vstupní parametry zůstávají shodné. Průřez je dále pouze posouzen na základě postupu dle ČSN 73 1201. Pevnostní třída betonu a betonářské výztuže je uvažována podle EC2-1-1. Konstrukční zásady nejsou ověřovány. Účinný průřez v kroucení pro obdélník je shodný se skutečným průřezem, viz [14].



obr. C.1 - (a) posuzovaný obdélníkový průřez, (b) účinný průřez v kroucení, (c) funkční jádro průřezu (šedá výplň)

### VNITŘNÍ SÍLY

$$T_{Ed} = 40 \text{ kNm}$$

$$V_{Ed} = 0 \text{ kN}$$

### GEOMETRIE ÚČINNÉHO PRŮŘEZU V KROUCENÍ A FUNKČNÍHO JÁDRA

$$b_{ef} = 300 \text{ mm}$$

$$h_{ef} = 500 \text{ mm}$$

$$N = \frac{h_{ef}}{b_{ef}} = \frac{500}{300} = 1,67$$

$$k_W = k_{Wf}(N) = k_{Wf}(1,67) = 0,2365 \quad (\text{viz PŘÍLOHA X, tab. Y})$$

$$W_t = W_{tf} = k_{Wf} \cdot b_{ef}^2 \cdot h_{ef} = 0,2365 \cdot 300^2 \cdot 500 = 10,64 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

$$b_k = 230 \text{ mm}$$

$$h_k = 430 \text{ mm}$$

$$A_k = b_k \cdot h_k = 230 \cdot 430 = 98900 \text{ mm}^2$$

$$u_k = 2 \cdot (b_k + h_k) = 2 \cdot (230 + 430) = 1320 \text{ mm}$$

### MATERIÁLOVÉ VLASTNOSTI

**BETON: C30/37**

$$f_{ck} = 30 \text{ MPa}$$



$$f_{ctk,0.05}=2.0 \text{ MPa}$$

$$\gamma_C=1,5$$

$$\alpha_{cc}=1,0$$

$$\alpha_{ct}=1,0$$

$$f_{cd}=\frac{\alpha_{cc}\cdot f_{ck}}{\gamma_C}=\frac{1,0\cdot 30}{1,5}=20 \text{ MPa}$$

$$f_{ctd}=\frac{\alpha_{ct}\cdot f_{ctk,0.05}}{\gamma_C}=\frac{1,0\cdot 2.0}{1,5}=1,33 \text{ MPa}$$

### BETONÁŘSKÁ VÝZTUŽ: B500B

$$f_{yk}=f_{ywk}=500 \text{ MPa}$$

$$\gamma_S=1,15$$

$$f_{yd}=f_{ywd}=\frac{f_{yk}}{\gamma_S}=\frac{f_{ywk}}{\gamma_S}=\frac{500}{1,15}=434,8 \text{ MPa}$$

### KROUTICÍ MOMENT PŘI VZNIKU TRHLIN

$$k_n=1,0 \quad (\text{předpokládá se } N_{Ed}=0)$$

$$\gamma_b=1,0 \quad (\text{viz podkapitola 3.6.1})$$

$$T_{Rd,c}=W_t\cdot k_n\cdot \gamma_b\cdot f_{ctd}=10,64\cdot 10^6\cdot 1,0\cdot 1,0\cdot 1,33\cdot 10^{-6}=14,2 \text{ kNm}$$

$$\frac{1}{3}\cdot T_{Rd,c}=\frac{1}{3}\cdot 14,2=4,7 \text{ kNm} \not\geq 40 \text{ kNm}=T_{Ed}$$

**NEVYHOVUJE** - kroucení nelze zanedbat

### NÁVRHOVÝ KROUTICÍ MOMENT NA MEZI ÚNOSNOSTI

$$T_{Rd,max}=\frac{1}{3}\cdot W_t\cdot \gamma_b\cdot f_{cd}=\frac{1}{3}\cdot 10,64\cdot 10^6\cdot 1,0\cdot 20\cdot 10^{-6}=70,9 \text{ kNm}^{20}$$

$$\frac{T_{Ed}}{T_{Rd,max}}=\frac{40}{70,9}=0,56\leq 1,0$$

**VYHOVUJE** - nedochází k drcení tlakových diagonál

### EKVIVALENTNÍ KROUTICÍ MOMENT OD POSOUVAJÍCÍ SÍLY

$$\lambda=b_{ef}=300 \text{ mm}$$

$$T_{tq}=0,5\cdot \frac{W_t}{W_{tf}}\cdot V_{Ed}\cdot \lambda=0,5\cdot \frac{10,64\cdot 10^6}{10,64\cdot 10^6}\cdot 0\cdot 300\cdot 10^{-3}=0 \text{ kNm}$$

$$T_{Ed}=40 \text{ kNm} \not\leq 0 \text{ kNm}=T_{tq}$$

**NEVYHOVUJE** - krouticí moment nelze převést na ekvivalentní posouvající sílu

<sup>20</sup> Omezení návrhové pevnosti betonu se součinitelem podmínek dle vztahu (3.146) není uvažováno.

### KROUTICÍ MOMENT NA MEZI KLUZU VÝZTUŽE

$$A_{sw}=50 \text{ mm}^2 \quad (\text{viz PŘÍLOHA A})$$

$$s_l=100 \text{ mm} \quad (\text{viz PŘÍLOHA A})$$

$$\Sigma A_{s_l}=924 \text{ mm} \quad (\text{viz PŘÍLOHA A})$$

$$T_{Rd,s}=2 \cdot A_k \cdot \sqrt{\frac{\Sigma A_{s_l} \cdot f_{yd}}{u_k} \cdot \frac{A_{sw} \cdot f_{ywd}}{s_l}} = 2 \cdot 98900 \cdot \sqrt{\frac{924 \cdot 434,8}{1320} \cdot \frac{50 \cdot 434,8}{100}} \cdot 10^{-6} = 50,9 \text{ kNm}$$

$$\frac{T_{Ed}}{T_{Rd,s}} = \frac{40}{50,9} = 0,79 \leq 1,0$$

**VYHOVUJE** - navržená výztuž na kroucení je dostačující

### OMEZENÍ POMĚRU MEZI PŘÍČNOU A PODÉLNOU VÝZTUŽÍ

$$0,5 \leq \frac{A_{sw} \cdot f_{ywd}}{\Sigma A_{s_l} \cdot f_{yd}} \cdot \frac{u_k}{s_l} \leq 2,0 \Leftrightarrow 0,5 \leq \frac{50 \cdot 434,8}{924 \cdot 434,8} \cdot \frac{1320}{100} \leq 2,0 \Leftrightarrow 0,5 \leq 0,7 \leq 2,0$$

**VYHOVUJE** - veškerou výztuž lze započítat

### SOUHRN VÝSLEDKŮ

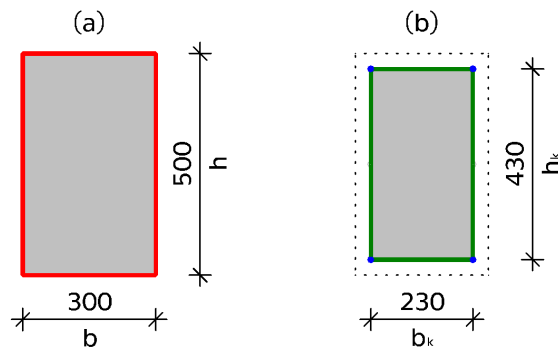
$$T_{Rd,c}=14,2 \text{ kNm}$$

$$T_{Rd,max}=70,9 \text{ kNm}$$

$$T_{Rd,s}=50,9 \text{ kNm}$$

## PŘÍLOHA D Posouzení obdélníkového průřezu dle příhradové analogie

Výpočet je proveden na základě postupu z podkapitoly 3.3. Návrh průřezu a jeho vyztužení na kroucení bylo provedeno v PŘÍLOZE A. Všechny vstupní parametry zůstávají shodné. Průřez je dále pouze posouzen na základě postupu dle metody příhradové analogie. Pevnostní třída betonářské výztuže je uvažována dle EC2-1-1.



obr. D.1 - (a) posuzovaný obdélníkový průřez, (b) model náhradní příhradoviny

### VNITŘNÍ SÍLY

$$T_{Ed} = 40 \text{ kNm}$$

### GEOMETRIE MODELU NÁHRADNÍ PŘÍHRADOVINY

$$b_k = 230 \text{ mm}$$

$$h_k = 430 \text{ mm}$$

$$A_k = b_k \cdot h_k = 230 \cdot 430 = 98900 \text{ mm}^2$$

$$u_k = 2 \cdot (b_k + h_k) = 2 \cdot (230 + 430) = 1320 \text{ mm}$$

### MATERIÁLOVÉ VLASTNOSTI

#### BETONÁŘSKÁ VÝZTUŽ: B500B

$$f_{yk} = f_{ywk} = 500 \text{ MPa}$$

$$\gamma_S = 1,15$$

$$f_{yd} = f_{ywd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_S} = \frac{f_{ywk}}{\gamma_S} = \frac{500}{1,15} = 434,8 \text{ MPa}$$

### KROUTICÍ MOMENT NA MEZI KLUZU VÝZTUŽE

$$A_{sw} = 50 \text{ mm}^2 \quad (\text{viz PŘÍLOHA A})$$

$$s_l = 100 \text{ mm} \quad (\text{viz PŘÍLOHA A})$$

$$\Sigma A_{s_l} = 924 \text{ mm}^2 \quad (\text{viz PŘÍLOHA A})$$

$$T_{Rd,s} = 2 \cdot A_k \cdot \sqrt{\frac{A_{sw} \cdot f_{ywd}}{s_l} \cdot \frac{\Sigma A_{sl} \cdot f_{yd}}{u_k}} = 2 \cdot 98900 \cdot \sqrt{\frac{50 \cdot 434,8}{100} \cdot \frac{924 \cdot 434,8}{1320}} \cdot 10^{-6} = 50,9 \text{ kNm}$$

$$\frac{T_{Ed}}{T_{Rd,s}} = \frac{40}{50,9} = 0,79 \leq 1,0$$

**VYHOVUJE** - navržená výztuž na kroucení je dostačující

### SKUTEČNÝ ÚHEL SKLONU TLAKOVÝCH DIAGONÁL

Při výpočtu dle EC2-1-1 a ACI 318-11 byl úhel sklonu tlakových diagonál zvolen hodnotou  $\theta = 39,8^\circ$ . Skutečně navržená výztuž ale úhel mění.

$$\theta = \arctg \left( \sqrt{\frac{A_{sw} \cdot f_{ywd}}{s_l} \cdot \frac{u_k}{\Sigma A_{sl} \cdot f_{yd}}} \right) = \arctg \left( \sqrt{\frac{50 \cdot 434,8}{100} \cdot \frac{1320}{924 \cdot 434,8}} \right) = \arctg(0,845) = 40,2^\circ$$

$$26,6^\circ < \theta < 63,4^\circ \Leftrightarrow 26,6^\circ < 40,2^\circ < 63,4^\circ$$

**VYHOVUJE**

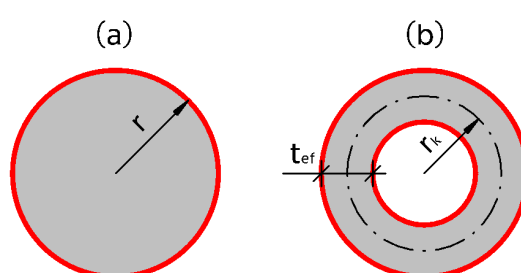
### SOUHRN VÝSLEDKŮ

$$T_{Rd,s} = 50,9 \text{ kNm}$$

## PŘÍLOHA E Vztahy pro ATDP základních geometrických útvarů

Analogický tenkostěnný dutý průřez slouží jako náhradní model skutečného průřezu doporučený normou EC2-1-1 pro návrh a posouzení výztuže kroucených prvků. Obecné vztahy pro stanovení charakteristik ATDP libovolného průřezu jsou uvedeny v podkapitole 3.4.6. V této příloze jsou odvozeny vztahy, které lze použít pro stanovení charakteristik ATDP základních geometrických útvarů: kruhu, čtverce a obdélníku. Zároveň je uveden vztah pro  $W_{t,EC}$ , tj. veličiny která má význam modulu průřezu v kroucení při použití modelu ATDP, viz rovnice (3.81).

### KRUHOVÝ PRŮŘEZ



obr. E.1 - (a) kruhový průřez, (b) odpovídající ATDP

$$A = \pi \cdot r^2$$

$$u = 2 \cdot \pi \cdot r$$

$$t_{ef} = \frac{A}{u} = \frac{\pi \cdot r^2}{2 \cdot \pi \cdot r} = \frac{r}{2}$$

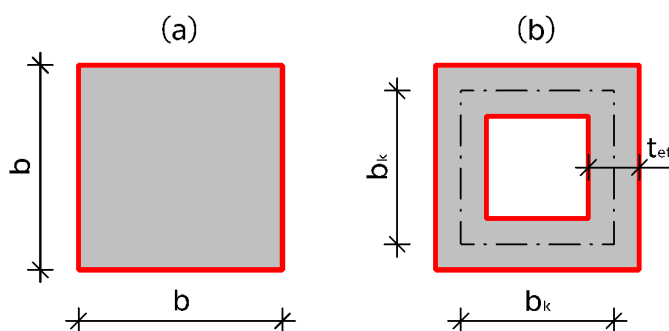
$$r_k = r - \frac{t_{ef}}{2} = r - \frac{r}{4} = \frac{3}{4} \cdot r$$

$$A_k = \pi \cdot r_k^2 = \pi \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot r\right)^2 = \frac{9}{16} \cdot \pi \cdot r^2$$

$$u_k = 2 \cdot \pi \cdot r_k = 2 \cdot \pi \cdot \frac{3}{4} \cdot r = \frac{3}{2} \cdot \pi \cdot r$$

$$W_{t,EC} = 2 \cdot A_k \cdot t_{ef} = 2 \cdot \frac{9}{16} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \frac{r}{2} = \frac{9}{16} \cdot \pi \cdot r^3$$

### ČTVERCOVÝ PRŮŘEZ



obr. E.2 - (a) čtvercový průřez, (b) odpovídající ATDP

$$A=b^2$$

$$u=4 \cdot b$$

$$t_{ef} = \frac{A}{u} = \frac{b^2}{4 \cdot b} = \frac{b}{4}$$

$$b_k = b - t_{ef} = b - \frac{b}{4} = \frac{3}{4} \cdot b$$

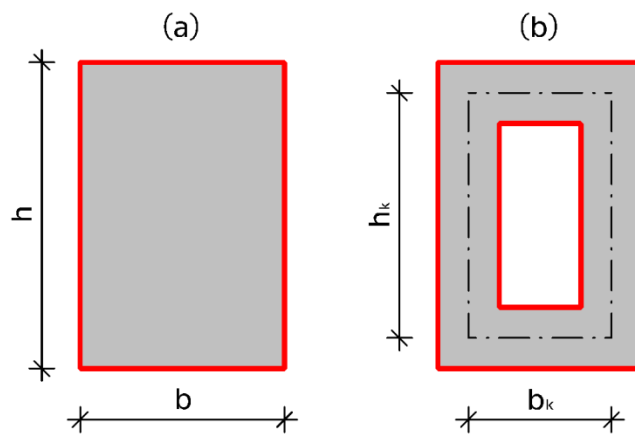
$$A_k = b_k^2 = \left(\frac{3}{4} \cdot b\right)^2 = \frac{9}{16} \cdot b^2$$

$$u_k = 4 \cdot b_k = 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot b = 3 \cdot b$$

$$W_{t,EC} = 2 \cdot A_k \cdot t_{ef} = 2 \cdot \frac{9}{16} \cdot b^2 \cdot \frac{b}{4} = \frac{9}{32} \cdot b^3$$

### OBDELNÍKOVÝ PRŮŘEZ

- definovaný délkou obou stran (b, h)



obr. E.3 - (a) obdélníkový průřez (b, h), (b) odpovídající ATDP

$$A=b \cdot h$$

$$u=2 \cdot (b+h)$$

$$t_{ef} = \frac{A}{u} = \frac{b \cdot h}{2 \cdot (b+h)}$$

$$b_k = b - t_{ef} = b - \frac{b \cdot h}{2 \cdot (b+h)}$$

$$h_k = h - t_{ef} = h - \frac{b \cdot h}{2 \cdot (b+h)}$$

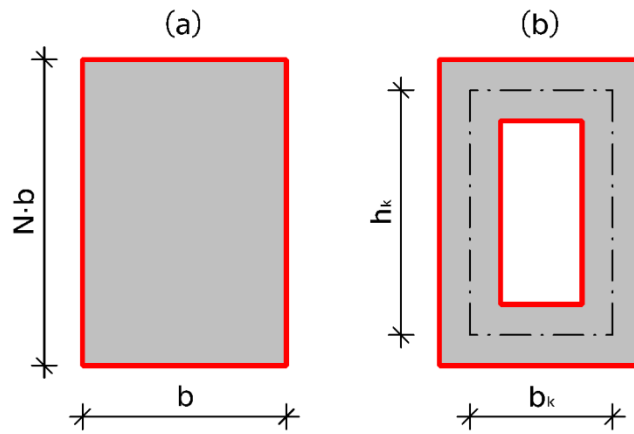
$$A_k = b_k \cdot h_k = \left(b - \frac{b \cdot h}{2 \cdot (b+h)}\right) \cdot \left(h - \frac{b \cdot h}{2 \cdot (b+h)}\right)$$

$$u_k = 2 \cdot (b_k + h_k) = 2 \cdot \left(b + h - \frac{b \cdot h}{b+h}\right)$$

$$W_{t,EC} = 2 \cdot A_k \cdot t_{ef} = \left(b - \frac{b \cdot h}{2 \cdot (b+h)}\right) \cdot \left(h - \frac{b \cdot h}{2 \cdot (b+h)}\right) \cdot \frac{b \cdot h}{b+h}$$

## OBDELNÍKOVÝ PRŮŘEZ

- definovaný délkou kratší strany a poměrem stran ( $b, N$ )



obr. E.4 - (a) obdélníkový průřez ( $b, N$ ), (b) odpovídající ATDP

$$A = b \cdot N \cdot b = N \cdot b^2$$

$$u = 2 \cdot (b + N \cdot b) = 2 \cdot b \cdot (1 + N)$$

$$t_{ef} = \frac{A}{u} = \frac{N \cdot b^2}{2 \cdot b \cdot (1 + N)} = \frac{N \cdot b}{2 \cdot (1 + N)}$$

$$b_k = b - t_{ef} = b \cdot \left(1 - \frac{N}{2 \cdot (1 + N)}\right)$$

$$h_k = h - t_{ef} = N \cdot b \cdot \left(1 - \frac{1}{2 \cdot (1 + N)}\right)$$

$$A_k = b_k \cdot h_k = N \cdot b^2 \cdot \left(1 - \frac{N}{2 \cdot (1 + N)}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2 \cdot (1 + N)}\right)$$

$$u_k = 2 \cdot (b_k + h_k) = 2 \cdot b \cdot \left[\left(1 - \frac{N}{2 \cdot (1 + N)}\right) + N \cdot \left(1 - \frac{1}{2 \cdot (1 + N)}\right)\right]$$

$$W_{t,EC} = 2 \cdot A_k \cdot t_{ef} = \frac{N^2 \cdot b^3}{1 + N} \cdot \left(1 - \frac{N}{2 \cdot (1 + N)}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2 \cdot (1 + N)}\right)$$

## PŘÍLOHA F Odvození vztahu pro modul průřezu v kroucení obdélníku

Následující odvození vztahu (3.31) vychází z [13], [24] a navazuje na závěry z podkapitoly 3.1. Ve všech vztazích se předpokládá  $b \leq h$ .

Modul průřezu v kroucení pro libovolný průřez lze vyjádřit:

$$W_t = \frac{{}^1M_x}{\tau_{t,\max}} \quad (\text{F.1})$$

Vnitřní krouticí moment  ${}^1M_x$  je možné určit ze vztahu:

$${}^1M_x = G \cdot I_t \cdot \theta \quad (\text{F.2})$$

z kterého lze moment tuhosti ve volném kroucení pro obdélníkový průřez obecně zapsat jako:

$$I_t = k_1 \cdot b^3 \cdot h \quad (\text{F.3})$$

kde  $k_1$  je koeficient momentu tuhosti v prostém kroucení obdélníku

Maximální smykové napětí od volného kroucení  $\tau_{t,\max}$  lze pro obdélníkový průřez obecně vyjádřit jako:

$$\tau_{t,\max} = k_t \cdot G \cdot \theta \cdot b \quad (\text{F.4})$$

kde  $k_t$  je koeficient maximálního smykové napětí vyvolaného kroucením obdélníku

Dosazením (F.2), (F.3) a (F.4) do vztahu (F.1) získáme obecný vztah pro modul průřezu v kroucení pro obdélník:

$$W_t = \frac{G \cdot k_1 \cdot b^3 \cdot h \cdot \theta}{k_t \cdot G \cdot \theta \cdot b} = \frac{k_1 \cdot b^2 \cdot h}{k_t} \quad (\text{F.5})$$

Vztah (F.5) závisí na dvou, zatím neznámých, koeficientech vyjadřujících vliv deplanace a průběhu smykového napětí v průřezu. Timoshenko [13] uvádí pro tyto dva koeficienty následující vztahy s nekonečnými geometrickými řadami, odvozené na základě tzv. membránové analogie:

$$k_1 = \frac{1}{3} \cdot \left[ 1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{b}{h} \cdot \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \cdot \tanh\left(\frac{n \cdot \pi \cdot h}{2 \cdot b}\right) \right] \quad (\text{F.6})$$



$$k_t = \frac{8}{\pi^2} \cdot \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \left[ 1 - \frac{1}{\cosh\left(\frac{n \cdot \pi \cdot h}{2 \cdot b}\right)} \right] \quad (\text{F.7})$$

Vztahy (F.6) a (F.7) lze spojit zavedením koeficientu modulu průřezu v kroucení obdélníku  $k_W$ :

$$k_W = \frac{k_l}{k_t} \quad (\text{F.8})$$

a vztah (F.5) dále zobecnit na:

$$W_t = k_W \cdot b^2 \cdot h \quad (\text{F.9})$$

Rozepsáním a úpravami lze koeficient modulu průřezu v kroucení vyjádřit ve tvaru:

$$k_W = \frac{\pi^2}{24} \cdot \frac{1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{b}{h} \cdot \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \cdot \tanh\left(\frac{n \cdot \pi \cdot h}{2 \cdot b}\right)}{\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \left[ 1 - \frac{1}{\cosh\left(\frac{n \cdot \pi \cdot h}{2 \cdot b}\right)} \right]} \quad (\text{F.10})$$

Zavedením poměru mezi delší a kratší stranou obdélníků:

$$N = \frac{h}{b} \quad (\text{F.11})$$

Lze počet proměnných ve vztahu (F.10) snížit ze dvou na jednu:

$$k_W = \frac{\pi^2}{24} \cdot \frac{1 - \frac{192}{N \cdot \pi^5} \cdot \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \cdot \tanh\left(\frac{n \cdot \pi \cdot N}{2}\right)}{\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \left[ 1 - \frac{1}{\cosh\left(\frac{n \cdot \pi \cdot N}{2}\right)} \right]} \quad (\text{F.12})$$

Nyní lze konečně dosazením (F.10) do vztahu (F.9) vyjádřit hledaný analytický vztah pro modul průřezu v kroucení obdélníku:

$$W_t = \frac{\pi^2}{24} \cdot \frac{1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{b}{h} \cdot \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \cdot \tanh\left(\frac{n \cdot \pi \cdot h}{2 \cdot b}\right)}{\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \left[ 1 - \frac{1}{\cosh\left(\frac{n \cdot \pi \cdot h}{2 \cdot b}\right)} \right]} \cdot b^2 \cdot h \quad (\text{F.13})$$

Nebo po zavedení substituce (F.11):

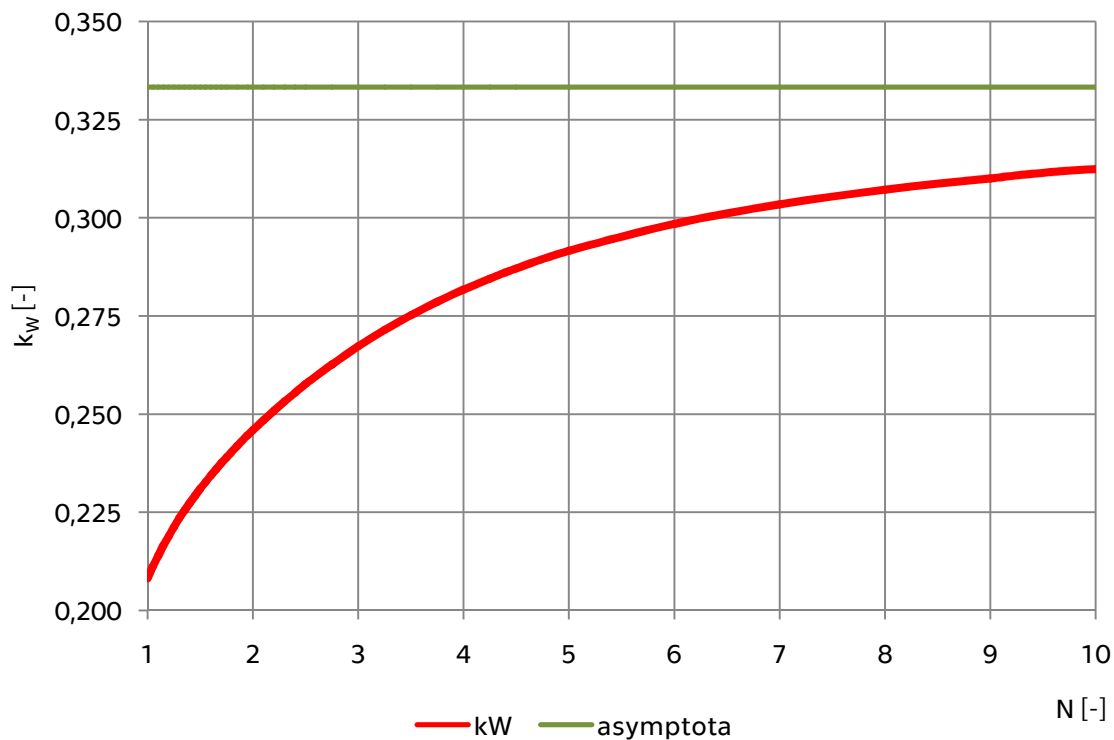
$$W_t = \frac{\pi^2}{24} \cdot \frac{1 - \frac{192}{N \cdot \pi^5} \cdot \frac{b}{h} \cdot \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \cdot \tanh\left(\frac{n \cdot \pi \cdot N}{2}\right)}{\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \left[ 1 - \frac{1}{\cosh\left(\frac{n \cdot \pi \cdot N}{2}\right)} \right]} \cdot N \cdot b^3 \quad (\text{F.14})$$

Tabulka F.1 udává hodnoty koeficientu modulu průřezu v kroucení obdélníku  $k_w$  dle vztahu (F.12), pro vybrané poměry stran  $N = h/b$ . Průběh  $k_w$  zároveň znázorňuje graf F.1 v intervalu  $1 \leq N \leq 10$ . Vztah konverguje k hodnotě  $k_w(N=\infty) = 1/3$ .

Výsledky jsou stanoveny pro prvních 100 členů geometrické řady v čitateli a prvních 1000 členů geometrické řady ve jmenovateli<sup>21</sup>.

N	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35	1,40
$k_w$	0,2082	0,2112	0,2140	0,2166	0,2190	0,2213	0,2234	0,2255	0,2274
N	1,45	1,50	1,55	1,60	1,65	1,70	1,75	1,85	1,95
$k_w$	0,2292	0,2310	0,2327	0,2344	0,2360	0,2375	0,2390	0,2419	0,2446
N	2,00	2,10	2,20	2,30	2,40	2,50	2,75	3,00	3,25
$k_w$	0,2459	0,2485	0,2509	0,2532	0,2555	0,2576	0,2627	0,2673	0,2714
N	3,50	3,75	4,00	4,25	4,50	5	6	7	8
$k_w$	0,2752	0,2786	0,2817	0,2845	0,2871	0,2916	0,2984	0,3034	0,3071
N	9	10	20	30	40	50	100	1000	$\infty$
$k_w$	0,3101	0,3124	0,3229	0,3264	0,3281	0,3292	0,3313	0,3332	0,3333

tab. F.1 - hodnoty  $k_w$  pro vybrané poměry stran  $N=h/b$



graf F.1 - průběh  $k_w$  v intervalu  $1 \leq N \leq 10$

<sup>21</sup> Geometrická řada v čitateli konverguje rychleji k limitní hodnotě, jelikož obsahuje člen  $1/n^5$ .

## LITERATURA

## PUBLIKACE

- [1] BACHMANN H., STEINLE A.; Precast Concrete Structures (English edition); Berlin: HillerMedien, 2011; ISBN 978-3-433-02960-2
- [2] HASSOUN M. N., AL-MANASEER A.; Structural concrete - Theory and design; 4th edition; Hoboken: Wiley, 2008; ISBN 978-0-470-17094-6
- [3] JIRÁSEK M., ZEMAN J.; Přetváření a porušování materiálů - Dotvarování, plasticita, lom a poškození; 2. vydání; Praha: Česká technika, 2012; ISBN 978-80-01-05064-4
- [4] KOHOUTKOVÁ A., PROCHÁZKA J., VAŠKOVÁ J.; Navrhování železobetonových konstrukcí - Příklady a postupy; Praha: Česká technika, 2014; ISBN 978-80-01-05587-8
- [5] KOHOUTKOVÁ A., PROCHÁZKA J., ŠMEJKAL J.; - Modelování a vyztužování betonových prvků - Lokální modely železobetonových konstrukcí; 2. dotisk 1. vydání; Praha: Česká technika, 2016; ISBN 978-80-01-05329-4
- [6] kolektiv; Pružnost a pevnost II.; dotisk; Praha: České vysoké učení technické v Praze, 1985
- [7] KONVALINKA P. a kolektiv; Analýza stavebních konstrukcí - Příklady [elektronické skriptum]; revize 23.10.2014
- [8] LAMPERT P., THÜRLIMANN B.; Ultimate Strength and Design of Reinforced Concrete Beams in Torsion and Bending; Basel: Birkhäuser, 1972; ISBN 3-7643-0631-9
- [9] MICHALEC J. a kolektiv; Pružnost a pevnost I.; 1. dotisk 3. vydání; Praha: Česká technika, 2010; ISBN 978-80-01-04224-3
- [10] NILSON A. H., DARWIN D., DOLAN C. W.; Design of concrete structures; 14th edition; New York: McGraw-Hill, 2010; ISBN 978-0-07-329349-3
- [11] PETERSSON T.; Shear and torsion in reinforced concrete beams; Stockholm: National Swedish Institute for Building Research, 1972; ISBN 91-540-2049-2
- [12] SOKOL Z., WALD F.; Ocelové konstrukce - Tabulky; 2. dotisk 2. přepracovaného vydání; Praha: Česká technika, 2013; ISBN 978-80-01-04655-5
- [13] TIMOSHENKO S. P., GOODIER J. N.; Theory of Elasticity; 2nd edition; New York: McGraw-Hill, 1951; Engineering societies monographs

## NORMY

- [14] ČSN 73 1201; Navrhování betonových konstrukcí; Praha: Vydavatelství úřadu pro normalizaci a měření, srpen 1986
- [15] ČSN EN 10080; Ocel pro výztuž do betonu - Svařitelná betonářská ocel - Všeobecně; Praha: ČNI, prosinec 2005
- [16] ČSN EN 1992-1-1 ed. 2; Navrhování betonových konstrukcí - Část 1-1: Obecná pravidla a pravidla pro pozemní stavby; Praha: ÚNMZ, červenec 2011
- [17] ČSN EN 1992-1-1 NA ed. A; Design of concrete structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings; Praha: ÚNMZ, listopad 2016
- [18] ČSN EN 1992-2; Navrhování betonových konstrukcí - Část 2: Betonové mosty - Navrhování a konstrukční zásady; Praha: ÚNMZ, květen 2007

- [19] ČSN EN 1992-2 NA ed. A; Design of concrete structures - Part 2: Concrete bridges - Design and detailing rules; Praha: ÚNMZ, říjen 2014
- [20] ČSN EN 1993-1-1 ed. 2; Navrhování ocelových konstrukcí - Část 1-1: Obecná pravidla a pravidla pro pozemní stavby; Praha: ÚNMZ, červenec 2011
- [21] ČSN EN 1993-1-1 NA ed. A; Design of steel structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings; Praha: ÚNMZ, červen 2016
- [22] ČSN EN 206+A1; Beton - Specifikace, vlastnosti, výroba a shoda; Praha: ÚNMZ, květen 2017

## PŘEDNÁŠKY

- [23] ELLIOTT K. S.; The Design of Precast Concrete Framed Structures, Lecture X [tištěná přednáška]; Nottingham University
- [24] JIRÁSEK M.; Pružnost a pevnost, 9. přednáška [elektronická přednáška]; Fakulta stavební ČVUT v Praze, 1. prosince 2014
- [25] KONVALINKA P.; Analýza konstrukcí, 3. přednáška [elektronická přednáška]; Fakulta stavební ČVUT v Praze, 16. října 2015
- [26] KONVALINKA P.; Analýza konstrukcí, 4. přednáška [elektronická přednáška]; Fakulta stavební ČVUT v Praze, 23. října 2015
- [27] KRUIS J.; Numerické metody v inženýrských úlohách, 1.-3. přednáška [elektronická přednáška]; Fakulta stavební ČVUT v Praze, říjen 2016
- [28] VAŠKOVÁ J.; Betonové a zděné konstrukce 1, 4. přednáška [elektronická přednáška]; Fakulta stavební ČVUT v Praze, 2015

## OSTATNÍ

- [29] BUYUKOZTURK O.; 1.054/1.541 Mechanics and Design of Concrete Structures (3-0-9), Outline 10, Torsion, Shear, and Flexure; Massachusetts Institute of Technology, jaro 2004. Dostupné z: [https://ocw.mit.edu/courses/civil-and-environmental-engineering/1-054-mechanics-and-design-of-concrete-structures-spring-2004/lecture-notes/Outline\\_10.pdf](https://ocw.mit.edu/courses/civil-and-environmental-engineering/1-054-mechanics-and-design-of-concrete-structures-spring-2004/lecture-notes/Outline_10.pdf)
- [30] CSIKÓS Á., HEGEDŰS I.; Torsion of reinforced concrete beams; In: 2nd Int. PhD Symposium in Civil Engineering 1998 Budapest [online]; Dostupné z: <http://fib.bme.hu/proceedings/csikos.pdf>
- [31] DLUBAL SOFTWARE S.R.O.; Rozšíření RF-/STEEL Warping Torsion. Analýza klopení a prostorového vzpěru obecnou metodou s analýzou vázaného kroucení. Dostupné z: <https://www.dlubal.com/cs/produkty/pridavne-moduly-pro-rfem-a-rstab/ocelove-a-hlinikove-konstrukce/rf-steel-warping-torsion>
- [32] HAWILEH R.A., MALHAS F.A., RAHMAN A.; Comparison between ACI 318-05 and Eurocode 2 (EC2-94) in flexural concrete design; In: Structural Engineering & Mechanics, srpen 2009. Dostupné z: [https://www.researchgate.net/publication/264177604\\_Comparison\\_between\\_ACI\\_318-05\\_and\\_Eurocode\\_2\\_EC2-94\\_in\\_flexural\\_concrete\\_design](https://www.researchgate.net/publication/264177604_Comparison_between_ACI_318-05_and_Eurocode_2_EC2-94_in_flexural_concrete_design)
- [33] HOOGENBOOM P.C.J.; Vlasov torsion theory, 2006. Dostupné z: [http://homepage.tudelft.nl/p3r3s/b16\\_chap7.pdf](http://homepage.tudelft.nl/p3r3s/b16_chap7.pdf)
- [34] KALNÝ M.; Lávka přes Labe v Čelákovících; Časopis stavebnictví, ročník 2015, číslo 06-07, str. 8-13; ISSN 1802-2030

- 
- [35] RÁČEK V., KADLEC L.; Fibre concrete tubes in pure shear mode; In: PhD Workshop, Department of Concrete and Masonry Structures, May 22, 2015 [CD]; Prague, 2015
- [36] RÁČEK V., KADLEC L.; New experiments - Fibre concrete tubes in pure shear mode; In: PhD Workshop, Department of Concrete and Masonry Structures, May 27, 2016 [CD]; Prague, 2016
- [37] SCIA Engineer 16 Help. Dostupné z: <http://help.scia.net/16.0/en/index.htm>
- [38] Transition Key - ACI 318-11 to ACI 318-14 and ACI 318.2-14, Building Code Requirements for Structural Concrete; American Concrete Institute, 2014. Dostupné z: [https://www.concrete.org/Portals/0/Files/PDF/318-14\\_CrossReference\\_2011to2014.pdf](https://www.concrete.org/Portals/0/Files/PDF/318-14_CrossReference_2011to2014.pdf)

## SOFTWARE

- [A] Allplan 2017-0-5 (studentská verze) společnosti Nemetschek
- [B] Dlubal RFEM 5.07 (studentská verze) společnosti Dlubal Software GmbH
- [C] MathCAD Prime 3.1 (studentská verze) společnosti PTC
- [D] Gen 2017 v1.1 (studentská verze) společnosti Midas Information Technology
- [E] MS Office 2007 společnosti Microsoft
- [F] Scia Engineer 16.0.108 (studentská verze) společnosti Nemetschek