

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V
PRAZE

FAKULTA STROJNÍ

**Jednorozměrný model průtoku radiálním
kompresorem**

Diplomová Práce



Autor:
Vedoucí:
Rok:

Bc. Filip ŠOCHMAN
Doc. Ing. Jiří FÜRST Ph.D.
2017

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Šochman** Jméno: **Filip** Osobní číslo: **397257**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávající katedra/ústav: **Ústav technické matematiky**
Studijní program: **Strojní inženýrství**
Studijní obor: **Matematické modelování v technice**

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

Jednorozměrný model průtoku radiálním kompresorem

Název diplomové práce anglicky:

Onedimensional model of flow through a radial compressor

Pokyny pro vypracování:

- Popište princip fungování turbodmychadla a speciálně radiálního kompresoru.
- Popište základní principy modelování v mechanice tekutin.
- Sestavte jednorozměrný model nevazkého proudění v konfiguraci vhodné pro simulaci průtoku radiálním kompresorem založený na Eulerových rovnicích pro stlačitelné proudění.
- Sestavte a odlaďte program pro řešení výsledných rovnic pomocí metody konečných objemů. Pomocí tohoto programu určete parametry prodových polí ve zvolené geometrii radiálního kompresoru.

Seznam doporučené literatury:

TORO, Eleuterio. The HLLC Riemann Solver.
NOŽIČKA, Jiří. Základy Termomechaniky. Praha: nakladatelství ČVUT
KADRNOŽKA, Jaroslav. Tepelné turbíny a turbokompresory I - základy teorie a výpočtů

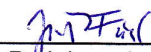
Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

doc. Ing. Jiří Fürst Ph.D., ústav technické matematiky FS

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

Datum zadání diplomové práce: **18.04.2017** Termín odevzdání diplomové práce: **18.08.2017**

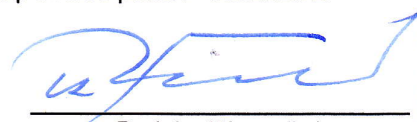
Platnost zadání diplomové práce: _____



Podpis vedoucí(ho) práce



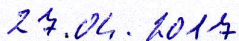
Podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry



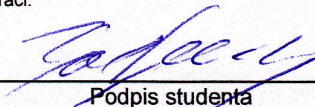
Podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací.
Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.



Datum převzetí zadání



Podpis studenta

Anotační list

<i>Autor</i>	Bc. Filip ŠOCHMAN
<i>Vedoucí</i>	Doc. Ing. Jiří FÜRST Ph.D.
<i>Název Práce</i>	Jednorozměrný model průtoku radiálním kompresorem
<i>Anglický název</i>	Onedimensional model of flow through a radial compressor
<i>Akademický rok</i>	2016/2017
<i>Obor studia</i>	Matematické modelování v technice
<i>Ústav</i>	Ú12101 Ústav technické matematiky
<i>Bibliografické údaje</i>	Počet stran- 97
	Počet obrázků- 100
	Počet tabulek- 1
	Počet Příloh- 6

Anotace

Tato práce se zabývá prouděním v radiálním kompresoru. V této práci je stručně popsán princip turbodmychadla a jeho souvislost s radiálním kompresorem. Je zde proveden rozbor konstrukce klíčových prvků radiálního kompresoru a fyzikálních jevů souvisejících s prouděním v radiálním kompresoru. Dále jsou zde představeny základní vztahy mechaniky tekutin a termomechaniky. V rámci této práce byl vyvinut program, který je založený na numerickém řešení Eulerových rovnic pro stlačitelnou tekutinu. Dále je zde věnována pozornost numerickému aparátu, který byl v tomto programu implementován. Jsou zde prezentovány HLL, HLLC, AUSM a AUSM+ numerické toky. Hlavní část této práce je věnována prezentaci výsledků proudových polí veličin, které byly získány pomocí tohoto programu.

Klíčová slova

Turbodmychadlo; radiální kompresor; Eulerovy rovnice; Metoda konečných objemů; HLL, HLLC, AUSM a AUSM+ numerické toky; kompresorová mapa

Abstract

This paper deal with flow through a radial compressor. In this paper is described a turbocharger and the role of radial compressor within. There is performed an analysis of the construction of the key parts of a radial compressor and the physical phenomenons related to flow through a radial compressor. There are also derived basic equations of fluid mechanics and thermodynamics. In this work was developed solver based on the numerical solution of Euler's equations for compressible fluid. The special attention is paid to the implementation of numerical mathematics into this solver. There are presented HLL, HLLC, AUSM and AUSM+ numerical flux. The main part of this work is dedicated to presentation of results of physical quantities, which were obtained with this solver.

Keywords

Turbocharger; radial compressor; Euler's equations; Finite volume method; HLL, HLLC, AUSM, AUSM+ numerical flux; compressor map

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci s názvem „Jednorozměrný model průtoku radiálním kompresorem“ vypracoval samostatně pod vedením Doc. Ing. Jiřího Fürsta, Ph.D. a s použitím zdrojů uvedených na konci mé diplomové práce.

V Praze dne 10. června 2017

Filip Šochman

Poděkování

Tímto bych chtěl poděkovat vedoucímu této práce Doc. Ing. Jiřímu Fürstovi, Ph.D. za poskytnutí potřebné literatury, informací a podkladů k věcnému ale i k formálnímu provedení této práce, zejména však za poskytnutý čas, připomínky, rady a v neposlední řadě za korekci. Toto vše pro mne bylo velkým přínosem k dokončení této práce. Dále bych chtěl poděkovat své rodině za neskonalou podporu po dobu celého mého studia.

Obsah

Úvod	1
1 Turbodmychadlo	3
1.1 Historie	4
1.2 Ložisková skříň	5
1.3 Turbína	6
2 Radiální kompresor	7
2.1 Kompresorové kolo	8
2.2 Difuzor	10
2.3 Voluta	12
2.4 Průběh komprese	14
2.5 Kompresorová mapa	15
2.6 Stabilita kompresoru	17
3 Teoretické základy proudění	19
3.1 Bezrozměrná kritéria	19
3.2 Ideální plyn	20
3.3 Zákon zachování	21
3.4 Rovnice kontinuity	22
3.5 Energetická rovnice	23
3.6 Konstitutivní rovnice	23
3.7 Navierova-Stokesova rovnice	24
4 Fyzikální pozadí	25
4.1 Eulerovy rovnice v kartézských souřadnicích	25
4.2 Vlastnosti Eulerových rovnic	26
4.3 Řešené rovnice	27
4.4 Návrhové výpočty	30
5 Numerická matematika	32
5.1 Konvergence	32
5.2 Konzistence	32
5.3 Stabilita	33
5.4 Laxova věta o ekvivalenci	33

5.5	Metoda konečných objemů	34
5.6	HLL numerický tok	35
5.7	HLLC numerický tok	36
5.8	AUSM numerický tok	36
5.9	AUSM+ numerický tok	37
5.10	Laxův-Friedrichův numerický tok	38
5.11	CFL podmínka	38
6	Simulace	39
6.1	Geometrie	39
6.2	Výpočet rezidua	40
6.3	Materiál	42
6.4	Síť	42
6.5	Přehled řešených variant	42
6.6	Varianta I.	44
6.7	Varianta II.	50
6.8	Varianta III.	56
6.9	Varianta IV.	64
6.10	Varianta V.	71
6.11	Varianta VI.	81
6.12	Shrnutí výsledků	90
	Závěr	92
	Reference	93
	Přílohy	98

Seznam obrázků

1.1	Schéma turbodmychadla [42]	3
1.2	Průřez turbodmychadlem [43]	4
1.3	Patent na turbodmychadlo z roku 1905 [44]	4
1.4	Ložisková skříň turbodmychadla [45]	5
1.5	Turbína [46]	6
2.1	Otevřené kompresorové kolo [47]	9
2.2	Uzavřené kompresorové kolo [48]	9
2.3	Kontury relativního Machova čísla v proudovém poli na výstupu z rotoru [52]	10
2.4	Rozdělení difuzorů, a) bezlopatkový difuzor b) lopatkový difuzor [53]	11
2.5	Vstup do difuzoru, a) odsazený z jedné strany, b) odsazený z obou stran, c) odsazený z obou stran, d) konstantní plocha průřezu [53]	12
2.6	Konstrukce voluty [49]	13
2.7	Poměr A/R [50]	14
2.8	Průběh komprese v radiálním kompresoru v h, s diagramu	15
2.9	Kompresorová mapa [45]	16
2.10	Principiální zobrazení pumpáže [56]	17
2.11	Rotační odtržení [57]	18
3.1	Kontrolní objem [55]	22
6.1	Geometrie, modře je zobrazena vnitřní řídicí křivka, červeně je zobrazena vnější řídicí křivka	40
6.2	Úhel α	41
6.3	Průběh ploch průřezů	41
6.4	Síť	42
6.5	Průběh hustoty u varianty I.	45
6.6	Průběh statického tlaku u varianty I.	45
6.7	Průběh celkového tlaku u varianty I.	46
6.8	Průběh Machova čísla u varianty I.	46
6.9	Průběh statické teploty u varianty I.	47
6.10	Průběh celkové teploty u varianty I.	47
6.11	Průběh hmotnostního toku u varianty I.	48
6.12	Průběh radiální rychlosti u varianty I.	48
6.13	Průběh axiální rychlosti u varianty I.	49
6.14	Průběh rezidua u varianty I.	49

6.15 Průběh hustoty u varianty II.	51
6.16 Průběh statického tlaku u varianty II.	51
6.17 Průběh celkového tlaku u varianty II.	52
6.18 Průběh Machova čísla u varianty II.	52
6.19 Průběh statické teploty u varianty II.	53
6.20 Průběh celkové teploty u varianty II.	53
6.21 Průběh hmotnostního toku u varianty II.	54
6.22 Průběh radiální rychlosti u varianty II.	54
6.23 Průběh tangenciální rychlosti u varianty II.	55
6.24 Průběh axiální rychlosti u varianty II.	55
6.25 Průběh rezidua u varianty II.	56
6.26 Úhel β	57
6.27 Průběh hustoty u varianty III.	58
6.28 Průběh statického tlaku u varianty III.	58
6.29 Průběh celkového tlaku u varianty III.	59
6.30 Průběh Machova čísla u varianty III.	59
6.31 Průběh statické teploty u varianty III.	60
6.32 Průběh celkové teploty u varianty III.	60
6.33 Průběh hmotnostního toku u varianty III.	61
6.34 Průběh radiální rychlosti u varianty III.	61
6.35 Průběh tangenciální rychlosti u varianty III.	62
6.36 Průběh axiální rychlosti u varianty III.	62
6.37 Průběh úhlu β u varianty III. (absolutní úhel je značen plnou čarou, relativní čárkovanou)	63
6.38 Průběh rezidua u varianty III.	63
6.39 Průběh hustoty u varianty IV.	65
6.40 Průběh statického tlaku u varianty IV.	65
6.41 Průběh celkového tlaku u varianty IV.	66
6.42 Průběh Machova čísla u varianty IV.	66
6.43 Průběh statické teploty u varianty IV.	67
6.44 Průběh celkové teploty u varianty IV.	67
6.45 Průběh hmotnostního toku u varianty IV.	68
6.46 Průběh radiální rychlosti u varianty IV.	68
6.47 Průběh tangenciální rychlosti u varianty IV.	69
6.48 Průběh axiální rychlosti u varianty IV.	69
6.49 Průběh úhlu β u varianty IV. (absolutní úhel je značen plnou čarou, relativní čárkovanou)	70
6.50 Průběh rezidua u varianty IV.	70
6.51 Nová geometrie radiálního kompresoru	71
6.52 Průběh ploch průřezů	72
6.53 Průběh úhlu β	72
6.54 Průběh hustoty u varianty V.	74
6.55 Průběh statického tlaku u varianty V.	74
6.56 Průběh celkového tlaku u varianty V.	75
6.57 Průběh Machova čísla u varianty V.	75

6.58 Průběh statické teploty u varianty V.	76
6.59 Průběh celkové teploty u varianty V.	76
6.60 Průběh hmotnostního toku u varianty V.	77
6.61 Průběh radiální rychlosti u varianty V.	77
6.62 Průběh tangenciální rychlosti u varianty V.	78
6.63 Průběh axiální rychlosti u varianty V.	78
6.64 Průběh úhlu β u varianty V. (absolutní úhel je značen plnou čarou, relativní čárkovanou)	79
6.65 Průběh rezidua u varianty V.	79
6.66 Kompresorová mapa varianty V. bez voluty	80
6.67 Kompresorová mapa varianty V. s volutou	81
6.68 Tloušťka lopatky v závislosti na její bezrozměrné délce	82
6.69 Průběh ploch průřezů	82
6.70 Průběh hustoty u varianty VI.	84
6.71 Průběh statického tlaku u varianty VI.	84
6.72 Průběh celkového tlaku u varianty VI.	85
6.73 Průběh Machova čísla u varianty VI.	85
6.74 Průběh statické teploty u varianty VI.	86
6.75 Průběh celkové teploty u varianty VI.	86
6.76 Průběh hmotnostního toku u varianty VI.	87
6.77 Průběh radiální rychlosti u varianty VI.	87
6.78 Průběh tangenciální rychlosti u varianty VI.	88
6.79 Průběh axiální rychlosti u varianty VI.	88
6.80 Průběh úhlu β u varianty VI. (absolutní úhel je značen plnou čarou, relativní čárkovanou)	89
6.81 Průběh rezidua u varianty VI.	89
6.82 Kompresorová mapa varianty VI. bez voluty	90
6.83 Kompresorová mapa varianty VI. s volutou	91

Seznam tabulek

6.1	Vlastnosti plynného média	42
-----	-------------------------------------	----

Použité značení

α	úhel odklonu proudění od axiálního směru	$[rad]$
β	úhel zakřivení lopatek	$[rad]$
γ	izoentropický mocnitel	$[-]$
λ	tepelná vodivost	$[W.m^{-1}.K^{-1}]$
μ	dynamická viskozita	$[Pa.s]$
ν	kinematická viskozita	$[m^2.s^{-1}]$
ω	úhlová rychlost	$[rad.s^{-1}]$
ρ	hustota	$[kg.m^{-3}]$
φ	průtokový koeficient	$[-]$
ζ	součinitel skluzu	$[-]$
A	plocha	$[m^2]$
b	příčný rozměr protékaného kanálu	$[m]$
c_p	měrná tepelná kapacita při stálém tlaku	$[J.kg^{-1}.K^{-1}]$
c_v	měrná tepelná kapacita při stálém objemu	$[J.kg^{-1}.K^{-1}]$
e	měrná vnitřní energie	$[J.kg^{-1}]$
h	měrná entalpie	$[J.kg^{-1}]$
m	hmotnost	$[kg]$
n	látkové množství	$[kmol]$
p	tlak	$[Pa]$
R	univerzální plynová konstanta	$[J.kmol^{-1}.K^{-1}]$
r	měrná plynová konstanta	$[J.kg^{-1}.K^{-1}]$

T	teplota	$[K]$
t	čas	$[s]$
u	rychlost ve směru osy x	$[m.s^{-1}]$
u_r	rychlost v radiálním směru	$[m.s^{-1}]$
u_z	rychlost ve směru osy z	$[m.s^{-1}]$
u_φ	rychlost v oběžném směru	$[m.s^{-1}]$
V	objem	$[m^3]$
v	rychlost ve směru osy y	$[m.s^{-1}]$
w	rychlost ve směru osy z	$[m.s^{-1}]$
z	počet lopatek	$[-]$

Úvod

Radiální kompresory se používají v aplikacích, kde je požadován spojitý průtok stlačovaného média. Na tyto stroje je kladen požadavek vysoké účinnosti, ale i širokého pracovního rozsahu. Tyto dvě vlastnosti lze jen těžko skloubit dohromady, a proto se vždy hledá vhodný kompromis dle účelu dané aplikace. Hlavními částmi radiálních kompresorů jsou kompresorové kolo, difuzor a voluta. Tato práce se především zaměřuje na problematiku kompresorového kola a difuzoru.

K dosažení špičkové termomechanické účinnosti spalovacích motorů je nutné, aby směs, která vstupuje do spalovacího prostoru, měla vysoký tlak. Z tohoto důvodu jsou v současnosti téměř všechny spalovací motory osazeny turbodmychadlem. Hlavními částmi turbodmychadla jsou turbína a radiální kompresor. Právě radiální kompresor je zodpovědný za stlačení vzduchu, který proudí do spalovací komory. Proud vzduchu nejprve vstupuje do kompresorového kola, kde je urychlen a stlačen. Poté pokračuje do difuzoru a následně vstupuje proud vzduchu do voluty. Ve volutě je stlačený vzduch shromážděn a je dále veden do potrubní soustavy. Je nutné, aby proudění potrubní soustavou probíhalo s minimálními ztrátami, jelikož je žádoucí, aby se stlačenému vzduchu zachovala tlaková i kinetická energie. [11]

Matematické rovnice, které popisují obecné fyzikální jevy jsou většinou tak komplexní, že bez dodatečného zjednodušení není možné nalézt jejich analytické řešení. A právě výsledky získané řešením rovnic, které bez zjednodušení popisují realitu, jsou kritické pro technickou praxi a výzkum a vývoj s ní spojený. Nicméně řešení takových rovnic je v současné době možné získat pouze aproximačními metodami numerické matematiky. Numerická matematika zažila bouřlivý rozvoj po vynálezu počítače. Moderní výpočetní technika totiž umožnila testovat teoretické poznatky numerické matematiky na složitých příkladech. Použití numerické matematiky v praxi dalo vzniknout novému vědeckému oboru v oblasti mechaniky tekutin, a to *Computational fluid dynamics* neboli CFD. [1]

CFD je definována jako numerická analýza systémů zahrnujících proudění tekutin a výměnu tepla. V současné době je snaha v průmyslové praxi nahrazovat drahé experimenty numerickými simulacemi. Navíc numerické simulace jsou schopny postihnout i jevy, které se dají jen obtížně experimentálně měřit. CFD se stalo nepostradatelnou součástí výzkumu nových průmyslových zařízení a výrobků. V leteckém průmyslu bychom dnes jen těžko hledali projekt, jehož součástí by CFD nebylo. Navzdory úspěchům, které CFD v posledních letech zaznamenalo, je nutné si připustit, že ještě není vše ideální a v mnohých oblastech numerických simulací existují potíže, které se podle mnohých ještě pár let nepodaří vyřešit.

V turbulentním proudění při vysokém Reynoldsově čísle není možné v současné době použít přímou numerickou simulaci (Direct numerical simulation) neboli DNS a to z důvodu velkého výpočetního výkonu, který je k takovému výpočtu nezbytný. I přesto, že DNS je v současné době využitelná v průmyslu jen okrajově, hraje ve výzkumu na akademické půdě klíčovou roli. CFD přispívá ke zlepšení našich znalostí o turbulenci, astronomických jevech a obecně o problémech, při kterých je obtížné nebo zcela nemožné experimentální měření. [2] [1]

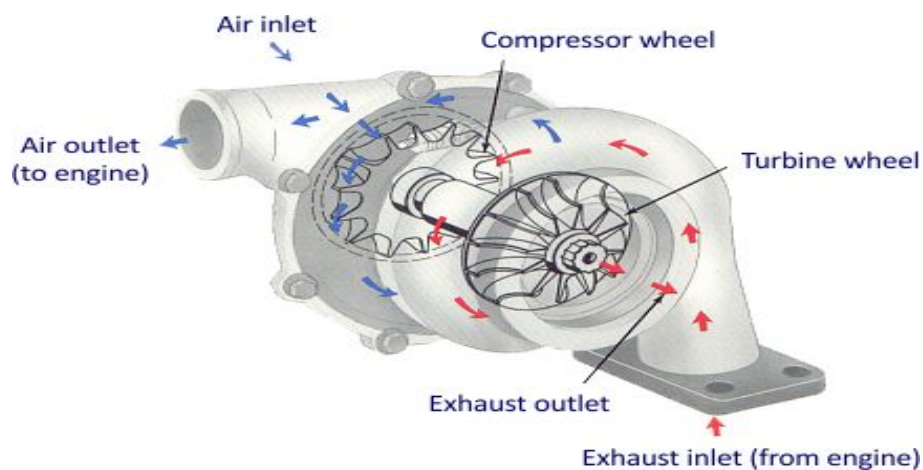
Tato diplomová práce si klade za cíl vyvinout v programovacím jazyce C++ nástroj pro simulaci 1D proudění průchodu plynu radiálním kompresorem turbodmychadla, s jehož pomocí bude možné rychle získat výsledky, které by se pomocí 3D simulace v komerčních programech typu Ansys CFX, anebo STAR-CCM+ počítaly několik dnů až týdnů dlouho. Jako médium se předpokládá nevazký ideální plyn. Proudění plynného média skrze radiální kompresor bude simulováno pomocí Eulerových rovnic pro stlačitelný plyn. Autor si je vědom velkého zjednodušení, které s sebou přináší 1D nástroj, který predikuje chování plynného média v tak složité geometrii, kterou představuje radiální kompresor. Nicméně tento nástroj může být užitečný na začátku vývoje, kdy je nutné rychle srovnávat varianty, s cílem vybrat ty nejlepší geometrie, na kterých bude poté provedena 3D numerická simulace.

V první části této práce bude představeno turbodmychadlo a stručně popsána jeho konstrukce a historie. Dále bude popsána souvislost mezi turbodmychadlem a radiálním kompresorem. V druhé části budou formulovány důležité zákony termomechaniky a mechaniky tekutin. V další části se tato práce věnuje popsání vztahů a jejich vlastností, které jsou použity při psaní programu, který bude v rámci této práce vyvinut. Dále zde budou formulovány základní vztahy numerické matematiky. V této kapitole budou taktéž představeny numerické metody, které budou následovně využity při programování této simulace. V neposlední řadě budou v této práci popsány základní fyzikální děje v radiálním kompresoru. V závěru práce budou vyhodnoceny výsledky, které budou získány pomocí vyvinutého programu.

Kapitola 1

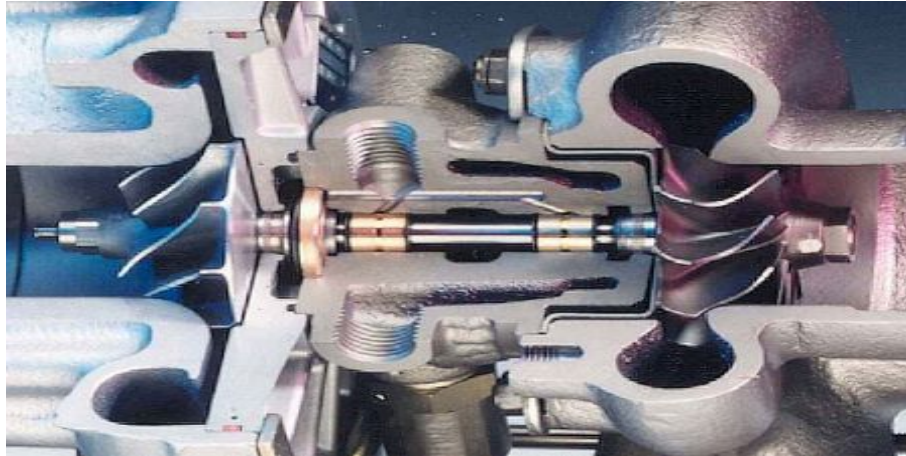
Turbodmychadlo

Turbodmychadla jsou ve velké míře využívána v automobilovém průmyslu, protože s jejich pomocí je možné dosáhnout vyššího výkonu motoru bez nutnosti zvýšení jmenovitého obsahu motoru. Historicky byla turbodmychadla užívána především v automobilovém sportu. Dnes je situace docela jiná, přísnější ekologické předpisy nutí výrobce motorů stavět stále úspornější a ekologičtější pohonné jednotky. Z toho důvodu jsou motory s menším jmenovitým obsahem osazovány turbodmychadly, což vede k zachování jmenovitého výkonu, ale i ke snížení spotřeby a emisí. Základní myšlenkou turbodmychadla je využití energie výfukových spalin. [3]



Obrázek 1.1: Schéma turbodmychadla [42]

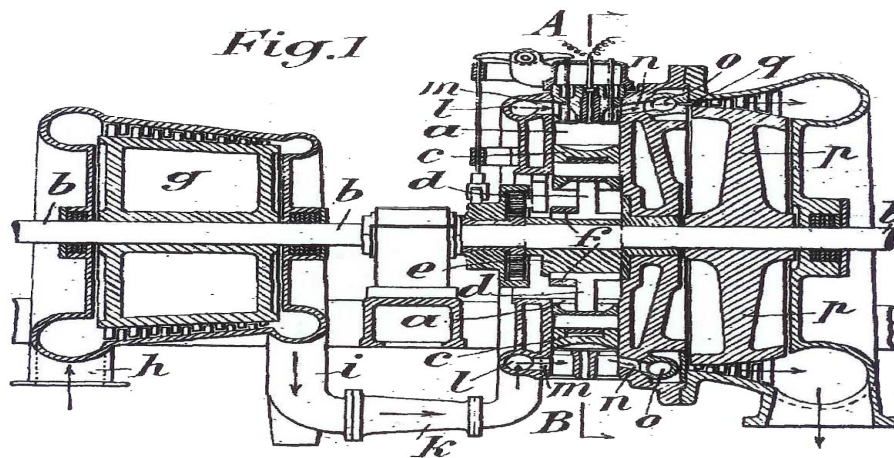
Jak je vidět na obrázku č. (1.1), skládá se turbodmychadlo ze dvou hlavních částí, a to z turbíny a radiálního kompresoru. Hustota vzduchu se při průchodu rotujícím kompresorovým kolem zvyšuje. Výsledkem toho je vyšší hmotnostní průtok vzduchu, který může být dopraven do spalovací komory. To vede ke vzniku větší síly, která vzniká pod pístem při spalování. Tím se generuje větší moment a tím pádem i výkon. Spalováním palivové směsi ve válci vznikají výfukové plyny, které pohánějí turbínové kolo. Na obrázku č. (1.2) je vidět, že turbínové a kompresorové kolo jsou napevno spojeny hřídelí. [3]



Obrázek 1.2: Průřez turbodmychadlem [43]

1.1 Historie

Myšlenka přepřívání je stejně stará jako stroje poháněné motorem s vnitřním spalováním. Už v letech 1885 až 1896 Gottlieb Daimler a Rudolf Diesel zkoumali možnost zvýšení výkonu a snížení spotřeby využitím přepřívání. Ale až v roce 1925 postavil první úspěšný prototyp turbodmychadla švýcarský inženýr Alfred Büchi. Tento počín se počítá za postupný vstup přepřívání do automobilového průmyslu. Nicméně prvotní užití turbodmychadla se omezilo pouze na velké motory. V roce 1938 byl turbodmychadlem osazen první sériově vyráběný nákladní automobil.



Obrázek 1.3: Patent na turbodmychadlo z roku 1905 [44]

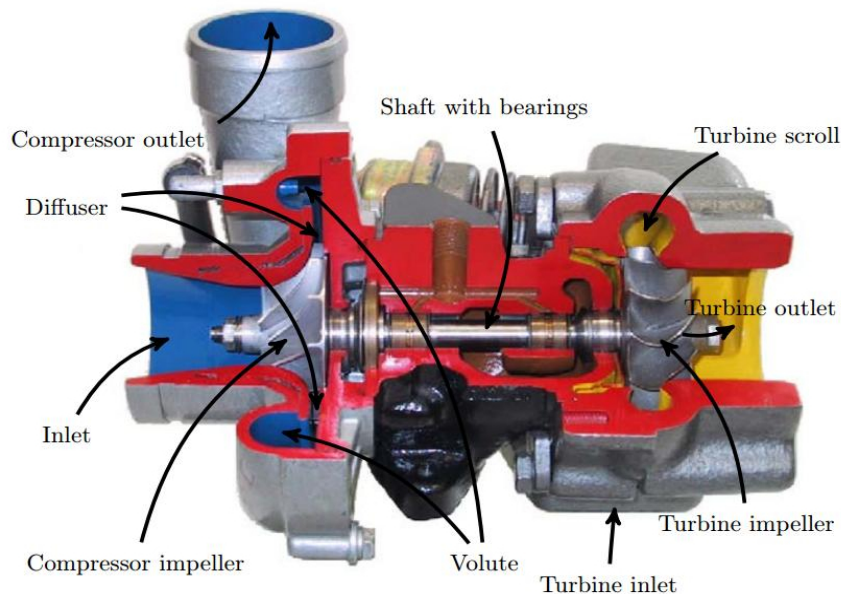
První osobní sériově vyráběné automobily sjely z výrobní linky až v letech 1962/63. Byly to Chevrolet Corvair Monza a Oldsmobile Jetfire. Navzdory výkonnostnímu nárůstu u jejich motorů se rychle přestaly prodávat, a to především kvůli jejich špatné spolehlivosti.

Po první ropné krizi v roce 1973 se využití turbodmychadla razantně rozšířilo a to především u dieselových motorů. K dalšímu vzestupu přepřínování přispěly přísnější emisní normy v 80. letech. To vedlo k tomu, že dnes je téměř každý nákladní automobil přepřínovaný.

K opravdovému průlomů v používání turbodmychadel u osobních automobilů došlo v roce 1978, kdy byl na trh uveden Mercedes Benz 300SD následovaný Volkswagen Golf Turbodiesel v roce 1981. Dnes neslouží přepřínování primárně k výkonnostním cílům, ale především ke snížení spotřeby paliva, respektive ke snížení emisí. [4]

1.2 Ložisková skříň

Nedílnou součástí každého turbodmychadla jsou ložisková skříň, ložiska a hřídel. Ložiska jsou uložena ve středu ložiskové skříně a vytvářejí podporu pro hřídel, která umožňuje přenos výkonu z turbínového kola na kompresorové. Většinou se užívají kluzná ložiska, ale existují i turbodmychadla s valivými ložisky. Ložiska jsou mazána olejem, který snižuje tření, ale zároveň i chladí turbodmychadlo. Někdy je použito i přídatné vodní chlazení, zejména u vysoko výkonných aplikací. [6]



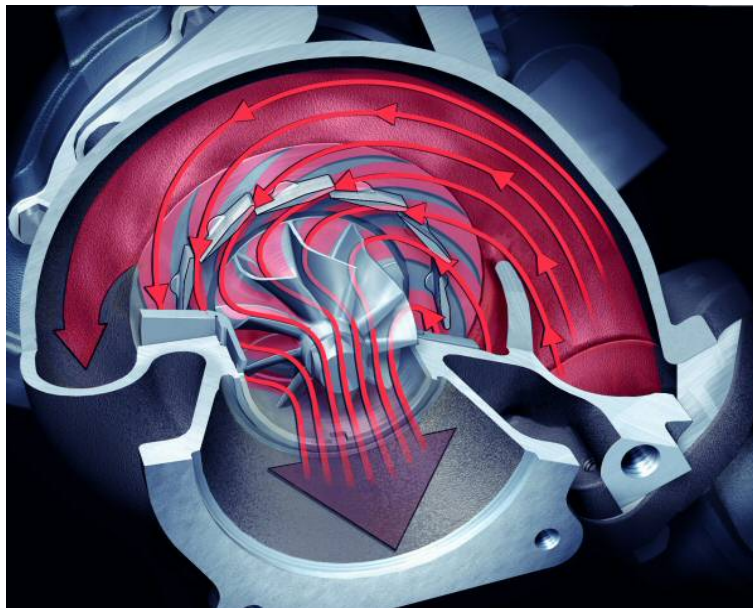
Obrázek 1.4: Ložisková skříň turbodmychdla [45]

1.3 Turbína

Radiální turbína je důležitou součástí turbodmychadla. Skládá se z turbínové skříně a rotoru. Hlavní funkcí turbínové skříně je změnit směr proudu výfukových plynů tak, aby pod vhodným úhlem proudily do rotorové části turbíny. Další funkcí turbínové skříně je přeměna části tlakové energie výfukových plynů na kinetickou energii. Turbínová skříň může být osazena variabilními lopatkami. Kvůli vysokým teplotám výfukových plynů se turbínové skříň odlévají z litiny. [7]

Další částí turbíny je rotor. Rotor turbíny se skládá z lopatek, které jsou vhodně tvarovány tak, aby byly schopny efektivně využít energii výfukových plynů. Vysoké teploty výfukových plynů a velké otáčky způsobují velké napětí v materiálu. Z toho důvodu se rotor odlévá z odolných inkonelových slitin. [8]

Úlohou turbíny je recyklovat energii výfukových plynů, která by jinak nevyužita unikala do atmosféry. Výfukové plyny proudí turbínovým kolem, které je tímto pohybem roztáčeno. Získaná energie je skrze hřídel přenášena na kompresorové kolo. Pro regulaci množství výfukových plynů proudících do turbíny se používá obtokový ventil. Další možností, jak regulovat množství spalin proudících do turbíny, je využití variabilní geometrie. [6]



Obrázek 1.5: Turbína [46]

Kapitola 2

Radiální kompresor

Téměř ve všech turbodmychadlech se nachází radiální kompresor. Turbodmychadla mohou být taktéž osazena axiálním kompresorem, ale tyto aplikace se omezují na letecký průmysl, anebo generátorové motory. Radiální kompresor se skládá z kompresorového kola, někdy zvaného oběžné kolo, z difuzoru a z voluty. Tvar těchto součástí se v současnosti optimalizuje pomocí výpočetní techniky. Bylo zjištěno, že pro dosažení vysoké účinnosti je nutné se především zaměřit na optimalizaci tvaru kompresorového kola. [5]

Radiální kompresory jsou užity v širokém spektru průmyslových aplikací. Jedná se především o aplikace ke stlačení plynného média, anebo o jeho dopravu. V automobilovém průmyslu se radiální kompresor používá ke zvýšení tlaku vzduchu, který vstupuje do spalovacího prostoru motoru. Proud vzduchu, který je do kompresoru nasáván, proudí nejprve v axiálním směru. Tento vzduch se shromáždí na vstupu do kompresoru, poté je potrubním systémem veden na kompresorové kolo. Kompresorové kolo se skládá z mnoha lopatek, které rotují s vysokou úhlovou rychlostí a tím přenášejí do nasávaného vzduchu energii. Maximální otáčky kompresorového kola v automobilovém průmyslu mohou dosahovat hodnoty až 200 000 RPM. Zvýšení tlaku vede ke zvýšení hustoty vzduchu a tím se zvýší přísun kyslíku do spalovací komory. To zapříčiní, že může být spáleno více paliva. Tímto se dosáhne zvýšení výkonu motoru až o 50% při zachování stejného zdvihového objemu. Navíc dojde ke snížení spotřeby paliva. Negativním důsledkem stlačení nasávaného vzduchu je nárůst jeho teploty. Nárůst teploty naopak působí pokles hustoty, viz rovnice č. (3.2.1). Nárůst teploty se dá částečně regulovat použitím mezichladiče. [29] [6]

Jako příklad zde uvedeme kompresor turbodmychadla, které se používá v automobilovém průmyslu. Požadavky pro malé radiální kompresory, které jsou užity v automobilovém průmyslu, jsou velice ambiciózní. Je požadována široká pracovní oblast a vysoká efektivita, což jsou zdánlivě dva odporující požadavky. Při vývoji špičkového radiálního kompresoru se musí brát v potaz problémy typu: složitá 3D struktura proudového pole, ztrátové mechanismy, vzájemná interakce kompresorového kola a difuzoru a mnohé další problémy. V automobilovém průmyslu je většinou požadován hmotnostní tok skrze radiální kompresor do $0.1 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$ a stlačení do 2.5 u benzínových, respektive do 3.0 u dieselových motorů. Toho se většinou docílí použitím kompresorového kola s průměrem do 70 mm při otáčkách 120 000 – 180 000 rpm. [29]

Přenos energie a proudění ve stupni radiálního kompresoru jsou sledovány na středním proudovém vláknu (střednici). Na střednici je dále předpokládáno, že rychlosti nabývají středních hodnot zjištěných z rovnice kontinuity a z dalších kinematických vztahů. Pro střední průměr na vstupu do dmyhadlového kola platí

$$d_{m1} = \sqrt{\frac{d_{i1}^2 + d_{a1}^2}{2}}, \quad (2.0.1)$$

kde d_{i1} je průměr na vnitřní řídicí křivce a d_{a1} je průměr na vnější řídicí křivce. Vztah č. (2.0.1) je důsledkem toho, aby na kolmém průřezu ke střednici byla plocha mezi střednicí a vnější řídicí křivkou stejná jako plocha mezi střednicí a vnitřní řídicí křivkou. [31]

V programu, který byl v rámci této práce vyvinut, bylo nicméně učiněno zjednodušení a za střednici se považuje křivka, jejíž kolmá vzdálenost k vnější řídicí křivce je stejná jako kolmá vzdálenost k vnitřní řídicí křivce.

2.1 Kompresorové kolo

Kompresorové kolo je bezesporu nejdůležitější část radiálního kompresoru, pokud totiž nemá vysokou účinnost a široký pracovní rozsah, tak je téměř nemožné, aby kompresor jako celek tyto dvě vlastnosti měl. Kompresorové kolo je umístěno na stejné hřídeli s turbínou a přenáší energii, kterou turbína získá z výfukových plynů, do vzduchu, který je nasáván do motoru. Naprostá většina kompresorových kol je dnes vyráběna ze slitin hliníku. Výroba se provádí tlakovým litím, anebo 5-osým frézováním. Vlivem optimalizace se v současnosti skládá kompresorové kole ze složitých tvarových ploch. [5] [9]

Konstrukce

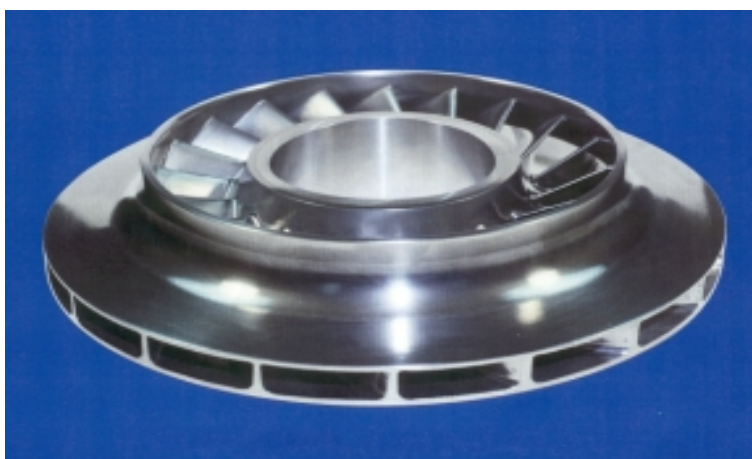
Konstrukci kompresorového kola rozlišujeme podle typů lopatek a podle toho, jestli je kolo uzavřené, anebo otevřené. Podle typu lopatek celkem rozlišujeme tři základní konstrukce kompresorových kol, a to s dopředu zakřivenými lopatkami, s dozadu zakřivenými lopatkami a s přímými radiálními lopatkami. Kola s přímými radiálními a s dopředu zakřivenými lopatkami jsou schopné vytvořit vysoké stlačení, ale kvůli jejich nízké účinnosti se dnes už téměř nevyrábí. [9]

Uzavřené kompresorové kolo

Uzavřené kompresorové kolo je vybaveno krytem, viz obrázek č. (2.2), který zabraňuje při provozu proudění přes lopatky. To má za následek vysokou účinnost. Naopak ve srovnání s otevřeným kolem není schopno dosáhnout vysokého stlačení. [9]



Obrázek 2.1: Otevřené kompresorové kolo [47]



Obrázek 2.2: Uzavřené kompresorové kolo [48]

Otevřené kompresorové kolo

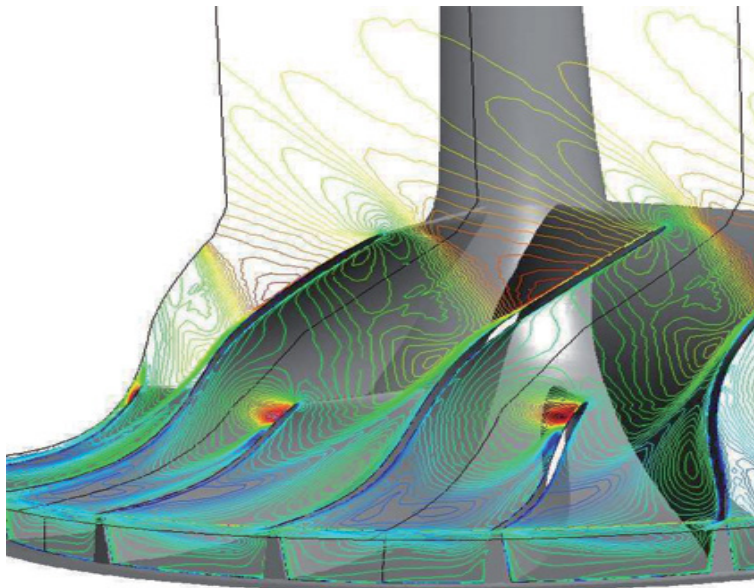
Na rozdíl od uzavřeného kompresorového kola není otevřené kompresorové kolo vybaveno krytem, který by zabraňoval proudění stlačovaného média mezerou mezi lopatky a kompresorovou skříní (tzv. nadlopatková vůle), viz obrázek č. (2.1). Proto má toto kolo nižší účinnost, ale na druhou stranu může dosahovat vysokého stlačení. [9]

Kompresorové kolo s dozadu zakřivenými lopatkami

Ve většině soudobých radiálních kompresorů v turbodmychadlech se používají výhradně dozadu zakřivené lopatky. Nejsou sice schopné vytvořit vysoké stlačení v porovnání s ostatními typy lopatek, ale zato disponují vysokou účinností. [10]

2.2 Difuzor

Difuzor je umístěn za kompresorovým kolem a před volutou, jak je možné vidět na obrázku č. (2.6). Difuzor je navržen k tomu, aby se v něm pomocí expanze transformovala kinetická energie proudového pole na energii tlakovou. Jelikož se plocha průřezu kanálu zvětšuje, tak dochází v souladu s rovnicí kontinuity ke zpomalování proudu. Jak rotor, tak i voluta silně ovlivňují chování proudového pole uvnitř difuzoru, a proto by neměl být difuzor navrhován bez přihlédnutí k ostatním částem turbokompresoru.



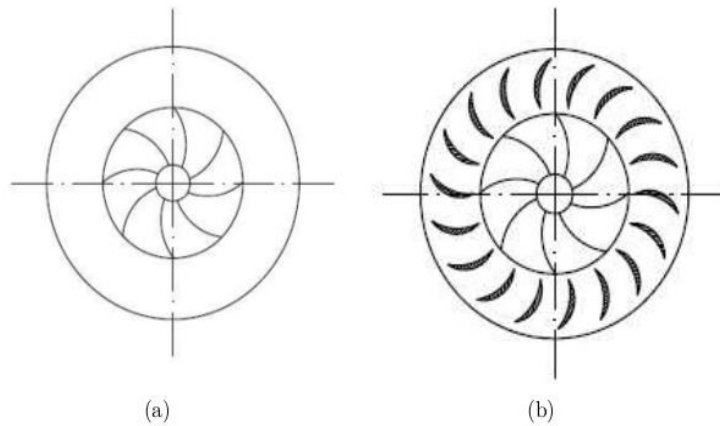
Obrázek 2.3: Kontury relativního Machova čísla v proudovém poli na výstupu z rotoru [52]

Proudové pole opouštějící rotor kompresoru je silně nehomogenní, jak je možné vidět na obrázku č. (2.3). V proudovém poli opouštějící rotor jsou oblasti, kde je malá složka radiální rychlosti u_r a silná přítomnost turbulence a vysoké ztráty. Tato oblast se nachází blízko

podtlakové strany lopatky rotoru. Naopak blízko přetlakové strany lopatky rotoru je proud relativně stabilní a jsou zde nízké tlakové ztráty. Tento jev je způsoben vířivým prouděním uvnitř rotoru. Interakce mezi rotorem a difuzorem má silný vliv na únik proudu nadlopatkovou vůlí a tudíž na ztráty, ucpání a nárůsty a poklesy tlaku. Nehomogenita proudového pole na výstupu z rotoru stoupá se zvětšující se nadlopatkovou vůlí.

Konstrukce

Kompresorové difuzory se rozdělují do dvou hlavních skupin, a to na bezlopatkové difuzory a na lopatkové difuzory, jak je vidět na obrázku č. (2.4). Bezlopatkové difuzory mají širší provozní rozsah, ale nižší účinnost a nižší koeficient nárůstu tlaku.



Obrázek 2.4: Rozdělení difuzorů, a) bezlopatkový difuzor b) lopatkový difuzor [53]

Bezlopatkový difuzor

Bezlopatkový difuzor se skládá ze dvou paralelních stěn. Vstup do difuzoru může být zkosený nebo odsazený. Různé druhy bezlopatkových difuzorů je možné vidět na obrázku č. (2.5). Nejdůležitější návrhová kritéria u bezlopatkového difuzoru jsou poměrná šířka difuzoru a poměr vstupního a výstupního průměru. V bezlopatkovém difuzoru platí následující vztahy.

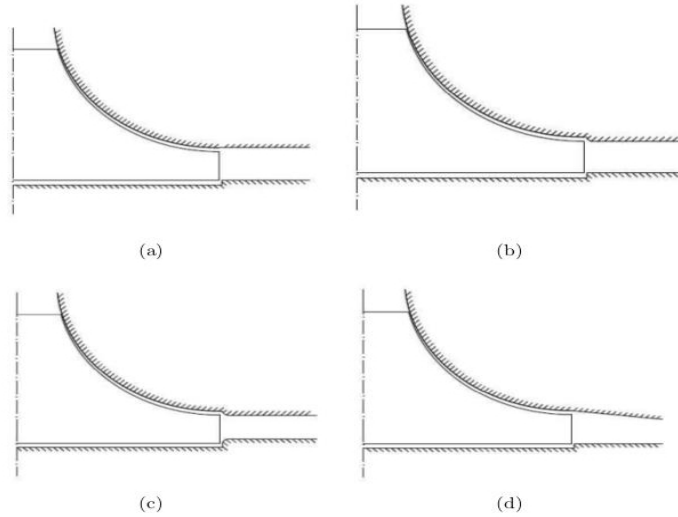
$$ru_{\varphi} = konst. \quad (2.2.1)$$

$$\dot{m} = 2\pi r b \rho u_r \quad (2.2.2)$$

V difuzoru můžeme definovat absolutní úhel proudu a poměrnou šířku difuzoru. Absolutní úhel proudu je definován takto

$$\tan \beta = \frac{u_{\varphi}}{u_r}. \quad (2.2.3)$$

A poměrná šířka difuzoru je definována následovně



Obrázek 2.5: Vstup do difuzoru, a) odsazený z jedné strany, b) odsazený z obou stran, c) odsazený z obou stran, d) konstantní plocha průřezu [53]

$$\varepsilon = \frac{b_{out}}{d_{out}}. \quad (2.2.4)$$

Poměrná šířka difuzoru má velmi významný efekt na kritický úhel proudu. Kritický úhel proudu je maximální úhel proudu na vstupu do difuzoru. Zmenšením poměrné šířky difuzoru může být proud více tangenciální bez toho, aby hrozilo ucpání kompresoru. Delší difuzor vyžaduje radiálnější proudění, aby se kompresor udržel ve stabilním provozním stavu. Což jsou dvě protikladná tvrzení, a proto musí být difuzor navrhnout tak, aby nehrozilo ani ucpání kompresoru ani ztráta stability.

Lopátkový difuzor

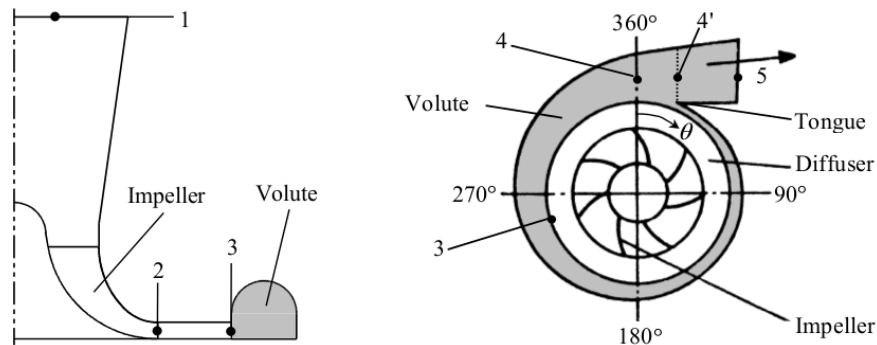
Lopátkové difuzory můžeme dělit podle více kritérií. Lopátkové difuzory mohou být přímé nebo se zakřivenou střednicí. Mohou být buďto s pevnými nebo natáčivými lopatkami. Natáčivé lopatky umožňují rozsáhlou regulaci. Dalším důležitým kritériem lopátkových difuzorů je poměr mezi délkou lopatky l a roztečí lopatek s , v anglické literatuře označovaný jako "solidity". Nechť je definován takto. [21]

$$\vartheta = \frac{l}{s} \quad (2.2.5)$$

2.3 Voluta

Na obr. č. (2.6) je vidět šedě označená voluta ve dvou řezech. Část mezi fázemi 3 a 4 slouží ke shromáždění proudu vzduchu vycházejícího z difuzoru, část mezi fázemi 4 a 5 je výstupní kužel. Začátek výstupního kužele mezi fázemi 4 a 4' je částečně spojen s difuzorem skrze otvor jazyka. Části voluty mezi fázemi 3 a 4 a výstupním kuželem musí být vyšetřovány společně,

nicméně chování proudu ve výstupním kuželu nezáleží pouze na chování proudového pole mezi fázemi 3 a 4, ale je taktéž silně ovlivněno oblastí jazyka.



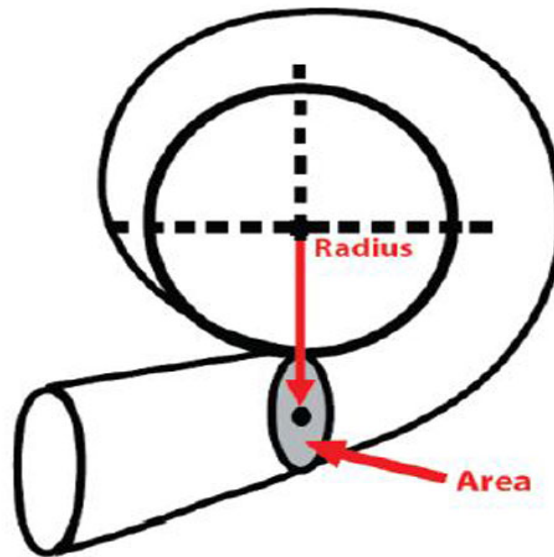
Obrázek 2.6: Konstrukce voluty [49]

Voluta se často navrhuje 1D výpočtem, při kterém se zanedbává tření a proudění se považuje za nestlačitelné. Průchod proudu vzduchu volutou se uvažuje s konstantní rychlostí. Tudíž plocha průřezu se musí lineárně zvětšovat podle rovnice kontinuity s přibývajícím hmotnostním průtokem, který je ideálně rovnoměrně distribuován po obvodu difuzoru. V takovém případě je statický tlak konstantní po obvodu difuzoru. Když ale kompresor pracuje mimo návrhový bod a protéká jím menší hmotnostní průtok než v návrhovém bodě, tak to vede ke snižování rychlosti ve volutě a naopak k nárůstu statického tlaku. Naopak, pokud kompresorem protéká větší hmotnostní průtok než v návrhovém bodě, tak se rychlost proudu ve volutě zvyšuje a statický tlak klesá. Tato rychlostní a tlaková nerovnoměrnost se může objevit i v návrhovém bodě, pokud je voluta špatně navržena. Působením rychlostních a tlakových nerovnoměrností vznikají v difuzoru a na lopatkách kompresorového kola oscilace, což vede ke snížení účinnosti kompresoru a ke zvýšení hlučnosti kompresoru. Stabilní pracovní rozsah je rovněž zmenšen. Radiální síly na rotoru a nestacionární síly na lopatkách rotoru vznikají taktéž působením těchto nerovnoměrností. Účinky tlakových a rychlostních nerovnoměrností jdou částečně snížit lopatkami užitými v difuzoru. [11]

Vliv poměru A/R na volutu

Na rozdíl od voluty turbínové skříně má výraz č. (2.3.1) pro volutu kompresorové skříně na výkon kompresoru menší vliv. Nicméně skříně s velkou hodnotou A/R se používají pro aplikace s nízkým stlačením a naopak skříně s malou hodnotou A/R se používají pro aplikace s vysokým stlačením. [19]

$$\psi = \frac{A_{out}}{R_{out}} \quad (2.3.1)$$

Obrázek 2.7: Poměr A/R [50]

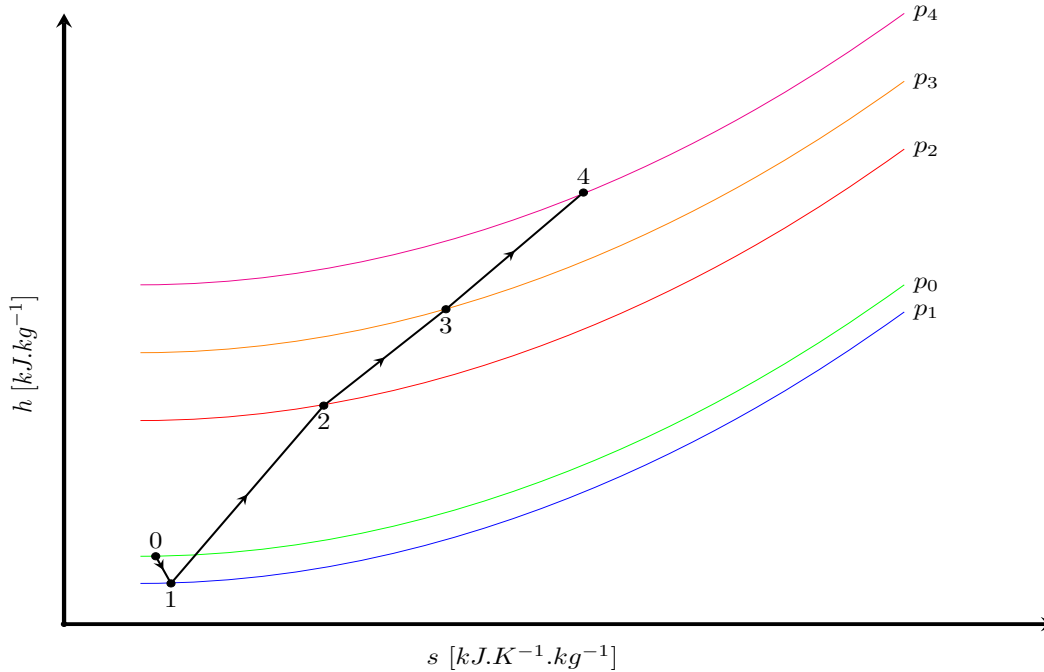
Plocha průřezů voluty

U správně navržené voluty se plocha průřezu po obvodu lineárně zvětšuje tak, aby statický tlak byl po obvodu konstantní a proud vzduchu byl rovnoměrně distribuován do voluty. Mimo návrhový bod je tomu jinak a stav, kdy jsou provozní parametry kompresoru mimo návrhový bod mají mnoho vlivů na rotor a difuzor, jak bylo popsáno výše. Ukazuje se, že nejvyšší účinnosti dosahuje kompresor, když jsou plochy průřezů o 10 – 15% menší než je tomu u modelu, který zanedbává tření. [11]

2.4 Průběh komprese

Na obr. č. (2.8) je zobrazen průběh komprese v jednostupňovém radiálním kompresoru v h, s diagramu. Statický tlak p_0 je klidový tlak okolí před vstupem do přívodního potrubí. Vlivem třecích ztrát klesne statický tlak před vstupem do oběžného kola na hodnotu p_1 . Tato ztráta je většinou zanedbatelně malá. V oběžném kole dojde k přenosu energie do proudícího média, a tím pádem na výstupu z oběžného kola vzroste statický tlak na hodnotu p_2 . Statický tlak dále stoupá v difuzoru až na hodnotu p_3 . V ideálně navržené volutě by měl statický tlak zůstat konstantní, ale většinou se voluta navrhuje tak, aby v ní došlo k mírné expanzi. Tím se zabrání, že v nenávrhových režimech nebude docházet ve volutě k poklesu statického tlaku.

[31]

Obrázek 2.8: Průběh komprese v radiálním kompresoru v h, s diagramu

2.5 Kompresorová mapa

Výkon turbodmychadla je většinou zobrazen pro potřeby snadného srovnání v podobě turbínové a kompresorové mapy. V těchto mapách jsou užity korigované proměnné. Užití korigovaných proměnných je velmi důležité, protože jinak by byla daná mapa platná jenom pro podmínky za jakých byla příslušná data naměřena, což by velmi ztížilo výkonnostní srovnávání turbodmychadel. [6]

V kompresorové mapě jsou použity 4 proměnné, a to korigovaný hmotnostní tok, tlakový poměr, korigované otáčky kompresorového kola a adiabatická účinnost kompresoru. Korigovaný hmotnostní tok je dán vztahem

$$\dot{m}_{c,corr} = \dot{m}_c \frac{\sqrt{\frac{T_{c,in}}{T_{c,r}}}}{\frac{p_{c,in}}{p_{c,r}}}, \quad (2.5.1)$$

kde \dot{m}_c je reálný hmotnostní tok, který protéká kompresorem. $T_{c,in}$ a $p_{c,in}$ jsou celková teplota a celkový tlak na vstupu do kompresoru. Teplota T_r a tlak p_r jsou referenční hodnoty, za které se většinou volí teplota a tlak okolí. Stlačení je dáno vztahem

$$\Pi_c = \frac{p_{c,out}}{p_{c,in}}, \quad (2.5.2)$$

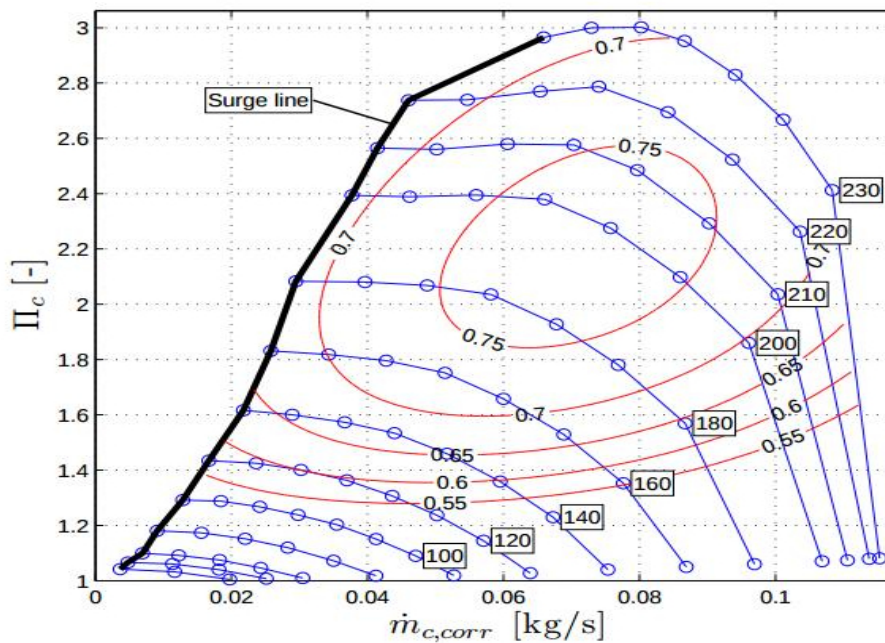
kde $p_{c,out}$ je celkový tlak na výstupu z kompresoru. Korigované otáčky kompresorového kola jsou definovány jako

$$N_{c,corr} = N_c \frac{1}{\sqrt{\frac{T_{c,in}}{T_{c,r}}}}, \quad (2.5.3)$$

kde N_c jsou reálné otáčky kompresorového kola. Adiabatická účinnost kompresoru je dána vztahem

$$\eta_c = \frac{\Pi_c^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1}{\frac{T_{c,out}}{T_{c,in}} - 1}. \quad (2.5.4)$$

Body naměřené se stejnými korigovanými otáčkami jsou spojené a tvoří linku, která se nazývá rychlostní větev, viz obrázek č. (2.9). Rychlostní větev se skládá z mnoha bodů s různým stlačením a korigovaným hmotnostním tokem. Adiabatická účinnost kompresoru je taktéž měřena pro každý bod. Korigovaný hmotnostní tok je měřen v rozsahu linie pumpáže do linie ucpání.



Obrázek 2.9: Kompressorová mapa [45]

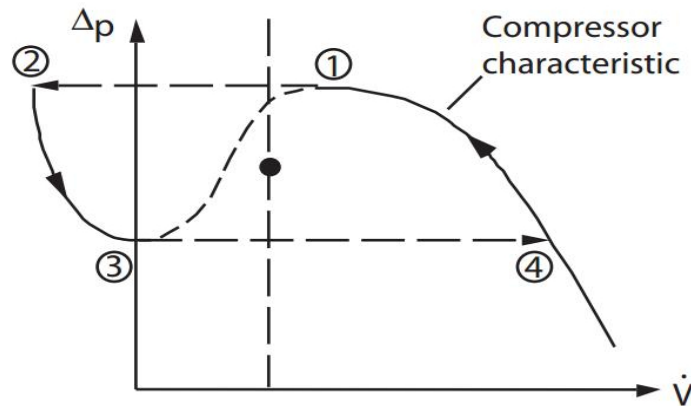
Linie pumpáže stejně jako linie ucpání jsou hranicemi stability kompresoru. V kompresoru při pumpáži dochází k odtržení proudu od lopatek, pokud hmotnostní tok klesne pod určitou úroveň. Hodnota hmotnostního toku poté osciluje a tyto oscilace mohou vést i ke zničení kompresoru nebo i celého turbodmychadla. K ucpání dochází při vysokých hodnotách hmotnostního toku a značí to, že někde v kompresoru byla dosažena rychlosti zvuku. [6]

2.6 Stabilita kompresoru

Stabilita proudění v kompresoru závisí na interakci kompresoru samotného se vstupem a výstupem. Při provozu kompresoru se mohou objevit při nízkém hmotnostním toku nestability jako pumpáž, anebo rotační odtržení proudu. Tyto nestability mohou způsobit zničení kompresoru, tudíž se kompresory mohou provozovat pouze při parametrech proudění, při kterých tyto nestability nehrozí. Tedy operační podmínky kompresoru jsou při nízkém hmotnostním toku omezeny pumpáží. Při vysokém hmotnostním toku jsou operační podmínky omezeny ucpáním. [29]

Pumpáž

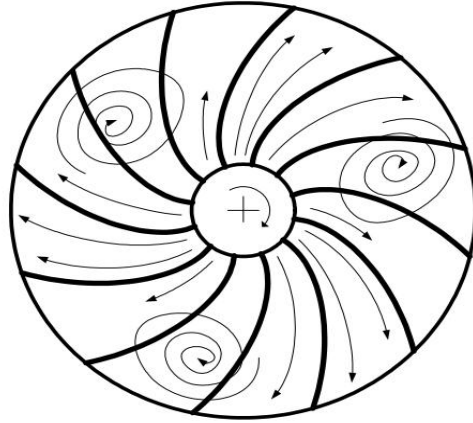
Pumpáž je dynamická nestabilita, která postihuje celý kompresor. Výsledkem pumpáže je oscilace tlaku a hmotnostního toku v protifázi. Kmitání hmotnostního toku je tak velké, že se objeví zpětné proudění, viz obrázek č. (2.10). Cyklus začíná v (1), kde se proudění stane nestabilním. Hmotnostní tok poté překmitne do zpětného proudění (2), protože už tlak nemůže růst. Dále, jak tlak klesá, se proudění přesouvá po záporné kompresorové charakteristice do nulového hmotnostního toku (3). Pak následuje překmit do pozice (4) a proudění se po kladné kompresorové charakteristice přesune zpět do (1) a celý cyklus se opakuje. [29]



Obrázek 2.10: Principiální zobrazení pumpáže [56]

Rotační odtržení

Jako rotační odtržení označujeme aerodynamickou nestabilitu v kompresoru. Po obvodu dmyhadlového kola se kvůli odtrhávání proudu od lopatek tvoří oblasti, kde proud stagnuje, viz obrázek č. (2.11). Takové oblasti se pohybují s rychlostí 10-90% úhlové rychlosti dmyhadlového kola ve směru rotace. Tyto oblasti způsobují redukcii, anebo až úplné zastavení proudu. Výsledkem je poté vibrační a tepelné namáhání lopatek dmyhadlového kola. [30] Matematicky lze rotační odtržení popsat následovně. Necht' pro absolutní oběžnou rychlost platí vztah



Obrázek 2.11: Rotační odtržení [57]

$$u_\varphi = \zeta \left(\omega r + \sqrt{u_r^2 + u_z^2} \tan \beta \right), \quad (2.6.1)$$

kde ζ je součinitel skluzu, ω je úhlová rychlost rotoru a r je poloměr. [31]

Stodolův vztah

Součinitel skluzu lze určit mnoha způsoby, jedním z nich je Stodolův vztah. Necht' pro něj na výstupu z kompresorového kola platí následující vztah

$$\hat{\zeta} = 1 - \frac{\pi \cos \beta}{z (1 + \varphi \tan \beta)}, \quad (2.6.2)$$

kde z je počet lopatek rotoru a φ je průtokový součinitel, pro nějž platí

$$\varphi = \frac{u_r}{\omega r}. \quad (2.6.3)$$

[31]

Jelikož vztah č. (2.6.2) byl odvozen pro výstup z kompresorového kola, předpokládáme v simulaci, která byla v rámci této práce provedena, lineární progresi součinitele skluzu, tudíž pro něj po délce lopatky platí vztah

$$\zeta = \epsilon \hat{\zeta}, \quad (2.6.4)$$

kde $\epsilon = 0$ na začátku a $\epsilon = 1$ na konci lopatky.

Kapitola 3

Teoretické základy proudění

V této kapitole budou uvedeny základní zákonitosti proudění tekutiny obecnou geometrií. Tekutina je plynná, anebo kapalná substance, která není schopna odolávat vnějším silám (tekutina s volným povrchem není schopna přenášet tlakovou nebo tahovou sílu). Dle definice mají tekutiny nulovou tuhost. Důsledkem je, že v každém vnitřním bodě kapaliny je nulová smyková složka napětí (tj. $\sigma_{ij} = 0$ pro $i \neq j$) pokud je kapalina v rovnovážném stavu. Jakýkoliv vnější silový účinek (např. tlakový rozdíl, gravitace atd.) na tekutinu způsobí proudění. [1] [12]

Tekutiny rozdělujeme na kapaliny a plyny. Kritériem pro rozdělení tekutin na kapaliny a plyny je stlačitelnost, neboli změna objemu při zachování stejné hmotnosti. Plyny považujeme za stlačitelné a kapaliny za nestlačitelné. Důsledkem toho je, že plyny mění svoji hustotu působením vnějších sil a kapaliny nikoliv (změna hustoty u kapalin může ale nastat vlivem změny teploty). Pokud v praktických aplikacích platí $Ma < 0.3$, tak považujeme i proudění plynů za nestlačitelné. [1] [12]

3.1 Bezrozměrná kritéria

Machovo číslo

$$Ma = \frac{u}{a}$$

Reynoldsovo číslo

Reynoldsovo číslo je podobnostní číslo, které vyjadřuje poměr mezi setrvačnou a třecí silou v tekutině, potom platí

$$Re = \frac{uL_{char}}{\nu}$$

[14]

3.2 Ideální plyn

Za ideální plyn můžeme považovat např. suchý vzduch při normálních teplotách. Pro ideální plyn platí, že se řídí přesně a neomezeně stavovými rovnicemi. [16]

Stavové rovnice ideálního plynu

$$\begin{aligned}pv &= rT & (3.2.1) \\pV &= mrT \\pV &= nRT,\end{aligned}$$

kde univerzální plynová konstanta $R = 8314,41 \text{ J.kmol}^{-1}.\text{K}^{-1}$ je společná všem plynům. Dále pro ideální plyn platí konstantnost měrné tepelné kapacity při konstantním objemu, tj. $c_v = \text{konst.}$ Pro ideální plyn platí taktéž, že je nevazký, tj. $\nu \approx 0$, nedá se zkapalnit a jeho vnitřní energie je funkcí pouze teploty, tj. $E = E(T)$. [16] [13]

Izoentropický mocnitel

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (3.2.2)$$

Mayerův vztah pro ideální plyn

$$c_p - c_v = r \quad (3.2.3)$$

Dále jako důsledek rovnice č. (3.2.3) a č. (3.2.2) platí

$$c_p = \frac{r\gamma}{\gamma - 1}, \quad (3.2.4)$$

$$c_v = \frac{r}{\gamma - 1}. \quad (3.2.5)$$

Rychlost zvuku

$$a = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma r T} \quad (3.2.6)$$

[16]

Celková teplota

Pokud uvažujeme stlačitelné proudění, tak výraz pro celkovou teplotu nabývá hodnoty

$$T_c = T_s \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 \right). \quad (3.2.7)$$

U proudění, kde můžeme předpokládat $c_p = konst.$ (většinou nestlačitelné proudění), se výraz pro celkovou teplotu zjednoduší na

$$T_c = T_s + \frac{u^2}{2c_p}, \quad (3.2.8)$$

[15]

kde výraz

$$\frac{u^2}{2c_p} \quad (3.2.9)$$

nazýváme dynamickou teplotou. Přestože má výraz č. (3.2.9) fyzikální rozměr teploty, z termodynamického hlediska se o teplotu nejedná. [16]

Celkový tlak

Uvažujme stlačitelné proudění, potom pro celkový tlak můžeme psát

$$p_c = p_s \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}. \quad (3.2.10)$$

U nestlačitelné tekutiny pro celkový tlak platí výraz

$$p_c = p_s + \rho \frac{u^2}{2}. \quad (3.2.11)$$

[15]

Hugoniotova věta

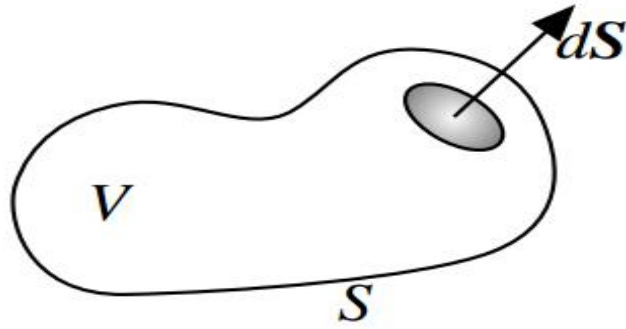
$$\frac{dA}{A} = \frac{du}{u} (Ma^2 - 1) \quad (3.2.12)$$

[16]

3.3 Zákon zachování

Uvažujme libovolný kontrolní objem V uzavřený plochou S . Nechť \mathbf{n} je vnější normála k ploše S , potom platí $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$, viz obrázek č. (3.1). Označme jakoukoliv veličinu, která se v rámci objemu V může měnit, ϕ . Veličina ϕ se může v rámci objemu V měnit pouze tokem skrze hranici S nebo vznikem, respektive zánikem uvnitř objemu V .

Nechť \mathbf{F} je tok (např. vedení tepla) veličiny ϕ hranicí S , aniž uvažujeme transport prouděním tekutiny. Proto označme tok skrze hranici S , který je uskutečněn transportem prouděním tekutiny, jako $\phi \mathbf{u}$, kde \mathbf{u} je vektor rychlosti proudění. A nechť H je vnitřní zdroj, respektive propad veličiny ϕ . Poté rovnice zachování nabývá tvaru



Obrázek 3.1: Kontrolní objem [55]

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \phi \, dV = - \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS - \int_{\partial\Omega} \phi \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS + \int_{\Omega} H \, dV. \quad (3.3.1)$$

Nechť funkce ϕ , \mathbf{u} a \mathbf{F} jsou spojitě a diferencovatelné v objemu V , potom se můžou plošné integrály nahradit objemovými pomocí Gaussovy-Ostrogradského věty, viz vztah č.(5.5.1). Potom dostáváme

$$- \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS - \int_{\partial\Omega} \phi \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS = - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{F} + \phi \mathbf{u}) \, dV. \quad (3.3.2)$$

A protože se objem V a ani plocha S vzhledem k souřadnému systému nepohybují, můžeme psát

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \phi \, dV = \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial t} \, dV. \quad (3.3.3)$$

Těmito úpravami nabývá rovnice č. (3.3.2) tvaru

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{F} + \phi \mathbf{u}) - H \, dV = 0. \quad (3.3.4)$$

A jelikož objem V je libovolný, může být rovnice č. (3.3.4) naplněna jenom pokud platí

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{F} + \phi \mathbf{u}) - H = 0. \quad (3.3.5)$$

Rovnice č. (3.3.5) poté představuje obecný vztah pro rovnice zachování v mechanice kontinua. [17]

3.4 Rovnice kontinuity

Stlačitelná tekutina

Pro odvození rovnice kontinuity vyjdeme z rovnice č. (3.3.5). V dané rovnici nahradíme libovolnou veličinu ϕ hustotou ρ , takže $\phi = \rho$. Zároveň platí $\mathbf{F} = 0$, protože hmotnostní

tok může být realizován pouze transportem a $H = 0$, protože hmota nemůže vznikat a ani zanikat. Poté rovnice kontinuity nabývá tvaru

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (3.4.1)$$

Nestlačitelná tekutina

Pro nestlačitelnou tekutinu platí, že $\rho = konst.$, a proto se rovnice kontinuity zjednoduší na tvar

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (3.4.2)$$

[17]

3.5 Energetická rovnice

Pro odvození energetické rovnice vyjdeme opět z rovnice č. (3.3.5). Nechť množství tepla na jednotku objemu je $\phi = \rho c_p T$. Teplotní tok je dle Fourierova zákona a při uvažování radiace $\mathbf{F} = -\lambda \nabla T + \Phi$, kde Φ je radiační teplotní tok. Po dosazení nabývá energetická rovnice tvaru

$$\frac{\partial (\rho c_p T)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho c_p T \mathbf{u}) = \nabla \cdot \lambda \nabla T - \nabla \cdot \Phi + H. \quad (3.5.1)$$

[17]

3.6 Konstitutivní rovnice

Rovnice č. (3.7.1) platí v každém bodě kontinua. Nicméně pro řešitelnost je vyžadováno omezení vztahem mezi napětím a rychlostí, anebo mezi napětím a posunutím.

Stlačitelná tekutina

Pokud uvažujeme stlačitelnou, Newtonskou tekutinu, tak pro napětí platí

$$\sigma_{ij} = - \left(p + \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right). \quad (3.6.1)$$

Nestlačitelná tekutina

Pokud uvažujeme nestlačitelnou, newtonskou tekutinu, tak pro napětí platí

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right). \quad (3.6.2)$$

[18]

3.7 Navierova-Stokesova rovnice

Zákon zachování hybnosti

Zákon zachování hybnosti lze odvodit stejně jako v předchozích případech z rovnice č. (3.3.5). Nechť hybnost jednotky objemu je $\phi = \rho \mathbf{u}$. Tok hybnosti poté nabývá velikosti napětí $\mathbf{F} = -\boldsymbol{\sigma}$ (napětí $\boldsymbol{\sigma}$ je tenzor 2. řádu). Objemovým zdrojem hybnosti je v tomto případě vnější zrychlení \mathbf{a} (většinou se jedná o gravitační zrychlení \mathbf{g}), a proto platí $H = \rho \mathbf{a}$. Pak můžeme psát

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{a}, \quad (3.7.1)$$

anebo v indexovovém zápisu

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho a_i. \quad (3.7.2)$$

Stlačitelná tekutina

Abychom odvodili Navierovu-Stokesovu rovnici pro stlačitelnou tekutinu, tak nejprve zanedbáme vnější zrychlení v rovnici č. (3.7.2) a pak do stejnojmenné rovnice dosadíme konstitutivní rovnici č. (3.6.1), poté výsledná rovnice nabývá tvaru

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(p + \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right). \quad (3.7.3)$$

Nestlačitelná tekutina

Pro odvození Navierovy-Stokesovy rovnice nestlačitelného média opět zanedbáme vnější zrychlení v rovnici č. (3.7.2) a poté do ní dosadíme konstitutivní rovnici č. 3.6.2, dále při úpravách využijeme rovnici kontinuity pro nestlačitelnou tekutinu. Tím se nám výsledná rovnice zjednoduší na tvar

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}. \quad (3.7.4)$$

[17]

Kapitola 4

Fyzikální pozadí

Eulerovy rovnice jsou systémem nelineárních parciálních rovnic hyperbolického typu popisující proudění stlačitelné nevazké tekutiny. Tento systém rovnic vznikne z rovnice kontinuity, Navierovy-Stokesovy rovnice a Energetické rovnice za předpokladu neexistence vazkých efektů v proudící tekutině, tzn. $\mu = 0$. Dále je zanedbán přenos tepla a jeho vznik, respektive propad v uvažovaném objemu. [34] [36]

Absence vazkosti způsobuje, že tento fyzikální model dobře simuluje reálné proudění tekutiny pouze v oblastech, které se nenacházejí v blízkosti stěn. Jelikož v důsledku nulové vazkosti nedochází vlivem stěny k zastavení proudění. Dalším důsledkem nulové vazkosti je absence turbulence. [1]

4.1 Eulerovy rovnice v kartézských souřadnicích

Uvažujme Eulerovy rovnice v kartézských souřadnicích v 3D případě, poté můžeme psát

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} = 0, \quad (4.1.1)$$

kde vektory \mathbf{W} , \mathbf{F} a \mathbf{G} nabývají hodnot

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (E + p)u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ (E + p)v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho wu \\ \rho wv \\ \rho w^2 + p \\ (E + p)w \end{pmatrix},$$

kde

$$E = \rho e. \quad (4.1.2)$$

Pokud předpokládáme proudění ideálního plynu, tak pro tlak platí

$$p = (\gamma - 1) \left(E - \rho \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right). \quad (4.1.3)$$

4.2 Vlastnoti Eulerových rovnic

Uvažujeme Eulerovy rovnice v kartézských souřadnicích v 1D případě, potom platí

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0. \quad (4.2.1)$$

Takový systém PDR lze zapsat v kvazilineárním tvaru

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + A(\mathbf{W}) \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0. \quad (4.2.2)$$

kde $A(\mathbf{W})$ je jakobián tok \mathbf{F} , neboli

$$A(\mathbf{W}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{W}} \quad (4.2.3)$$

a matice A pak nabývá pro případ ideálního plynu hodnoty

$$A(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(\gamma - 3)u^2 & (\gamma - 3)u & \gamma - 1 \\ \frac{1}{2}(\gamma - 1)u^3 - hu & h - (\gamma - 1)u^2 & \gamma u \end{pmatrix},$$

kde pro měrnou entalpii platí

$$h = \frac{E + p}{\rho}. \quad (4.2.4)$$

Přímým výpočtem lze určit vlastní čísla λ_i matice $A(\mathbf{W})$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= u - a \\ \lambda_2 &= a \\ \lambda_3 &= u + a \end{aligned}$$

a jim odpovídající vlastní vektory

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ u - a \\ h - ua \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \rho 1 \\ u \\ \frac{1}{2}u^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ u + a \\ h + ua \end{pmatrix}.$$

O systému PDR č. (4.2.1) řekneme, že je hyperbolický, jelikož všechny vlastní čísla λ_i matice $A(\mathbf{W})$ jsou reálná a matici $A(\mathbf{W})$ lze zapsat v diagonalizovaném tvaru $A(\mathbf{W}) = R\Lambda R^{-1}$, kde matice R je sestavena z vlastních vektorů matice $A(\mathbf{W})$ a matice Λ nabývá hodnoty

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

4.3 Řešené rovnice

Eulerovy rovnice v cylindrických souřadnicích nabývají tvaru

$$\frac{\partial(r\mathbf{W}_r)}{\partial t} + \frac{\partial(r\mathbf{F}_r)}{\partial r} + \frac{\partial\mathbf{G}_r}{\partial\varphi} + \frac{\partial(r\mathbf{H}_r)}{\partial z} = \sum \mathbf{P}_i, \quad (4.3.1)$$

kde vektory \mathbf{P}_i jsou tzv. zdrojové členy, které závisí na dané geometrii a použitých fyzikálních modelech (síla na lopatku, ztrátový model atd.) a vektory \mathbf{W} , \mathbf{F} a \mathbf{G} nabývají hodnot

$$\mathbf{W}_r = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_r \\ \rho u_\varphi \\ \rho u_z \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_r = \begin{pmatrix} \rho u_r \\ \rho u_r^2 + p \\ \rho u_r u_\varphi \\ \rho u_r u_z \\ (E + p)u_r \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_r = \begin{pmatrix} \rho u_\varphi \\ \rho u_\varphi u_r \\ \rho u_\varphi^2 + p \\ \rho u_\varphi u_z \\ (E + p)u_\varphi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_r = \begin{pmatrix} \rho u_z \\ \rho u_z u_r \\ \rho u_z u_\varphi \\ \rho u_z^2 + p \\ (E + p)u_z \end{pmatrix}.$$

Pokud předpokládáme proudění ideálního plynu, tak pro tlak platí

$$p = (\gamma - 1) \left(E - \rho \frac{u_r^2 + u_\varphi^2 + u_z^2}{2} \right). \quad (4.3.2)$$

Kvazi-1D Eulerovy rovnice v křivočaré souřadnici

Pokud uvažujeme ve výpočtu hodnotu vektoru G_r konstantní pro $\varphi \in [0; 2\pi]$, tak v rovnici č. (4.3.1) platí $\frac{\partial\mathbf{G}_r}{\partial\varphi} = 0$. Rovnici č. (4.3.1) můžeme navíc rozšířit výrazem $2\pi b$, kde b je příčný rozměr protékaného kanálu. Po těchto úpravách dostáváme

$$\frac{\partial(A\mathbf{W}_r)}{\partial t} + \frac{\partial(A\mathbf{F}_r)}{\partial r} + \frac{\partial(A\mathbf{H}_r)}{\partial z} = \sum \mathbf{Q}_i, \quad (4.3.3)$$

kde $A = 2\pi r b$ a vektory \mathbf{Q}_i jsou zdrojové členy, které budou vysvětleny níže.

Rovnici č. (4.3.3) můžeme dále převést do křivočaré souřadnice s , která je daná střední čarou radiálního kompresoru, viz obr. č. (6.1). Poté tato rovnice nabývá tvaru

$$\frac{\partial(A\tilde{\mathbf{W}}_r)}{\partial t} + \frac{\partial(A\tilde{\mathbf{F}}_r)}{\partial s} = \sum \tilde{\mathbf{Q}}_i, \quad (4.3.4)$$

kde pro vektory $\tilde{\mathbf{W}}_r$ a $\tilde{\mathbf{F}}_r$ platí

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{W}}_r &= \mathbf{W}_r \\ \tilde{\mathbf{F}}_r &= \mathbf{F}_r t_1 + \mathbf{G}_r t_2 + \mathbf{H}_r t_3. \end{aligned}$$

Vektor \mathbf{t} je jednotkový (tj. $|\mathbf{t}| = 1$) a je tečný na střednici kompresoru. Dále pro něj platí, že $t_2 = 0$, jelikož střednice leží v rovině $r - z$.

Proměnná geometrie

Pokud uvažujeme proměnnou geometrii, nabývá pravá strana rovnice č. (4.3.4) tvaru

$$\sum \tilde{\mathbf{Q}}_i = \tilde{\mathbf{Q}}_1, \quad (4.3.5)$$

kde zdrojový člen $\tilde{\mathbf{Q}}_1$ je

$$\tilde{\mathbf{Q}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial A}{\partial s} p \mathbf{t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

[25]

Účinnek proudu na protékaný kanál

Proto abychom mohli simulovat proudění, které proudí ve směru křivočaré souřadnice s , musíme určit sílu, která nutí tekutinu proudit v kanálu (tj. nahradit stěny kanálu silou). Tato síla působí ve směru vektoru \mathbf{m} , který je jednotkový, leží v rovině $r - z$ a je kolmý na střednici (tzn. $\mathbf{m} \cdot \mathbf{t} = 0$). Poté tato omezující síla nabývá tvaru

$$\mathbf{F}_m = F_c \mathbf{m}, \quad (4.3.6)$$

kde F_c je omezující síla kanálu (odvození viz kapitola **Síla na lopatku**). Zdrojový člen poté nabývá tvaru

$$\sum \tilde{\mathbf{Q}}_i = \tilde{\mathbf{Q}}_1 + \tilde{\mathbf{Q}}^*, \quad (4.3.7)$$

kde pro $\tilde{\mathbf{Q}}^*$ platí vztah

$$\tilde{\mathbf{Q}}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{F}_m A \\ 0 \end{pmatrix}.$$

[35]

Nicméně tento vzorec není explicitně v programu použit. V programu byl proud do správného směru promítnut pomocí vektoru \mathbf{t}

$$\tilde{\mathbf{u}} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{t}. \quad (4.3.8)$$

Coriolisova a odstředivá síla

Pokud je oběžná složka rychlosti nenulová tj. $u_\varphi \neq 0$, tak je nutné uvažovat i Coriolisovu a odstředivou sílu. Zdrojový člen poté nabývá tvaru

$$\sum \tilde{\mathbf{Q}}_i = \tilde{\mathbf{Q}}_1 + \tilde{\mathbf{Q}}_2, \quad (4.3.9)$$

kde $\tilde{\mathbf{Q}}_2$ je

$$\tilde{\mathbf{Q}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho \frac{u_\varphi^2}{r} A \\ -\rho \frac{u_r u_\varphi}{r} A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

[25]

Síla na lopatku

Pokud uvažujeme rotorové lopatky, tak je nutné určit sílu, kterou tyto lopatky působí na proudové pole. Necht' relativní rychlost \mathbf{u}^* nabývá tvaru

$$\mathbf{u}^* = \tilde{\mathbf{u}} - (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \begin{pmatrix} u_r \\ u_\varphi - \omega r \\ u_z \end{pmatrix}. \quad (4.3.10)$$

Potom hybnost proudu, který proudí ve směru lopatek, nabývá hodnoty

$$\rho \mathbf{u}_b^* = \rho \mathbf{u}^* + \Delta t \mathbf{F}_n. \quad (4.3.11)$$

Dále platí

$$\mathbf{n} \cdot \rho \mathbf{u}_b^* = 0, \quad (4.3.12)$$

kde \mathbf{n} je normála k lopatce oběžného kola. Z rovnice č. (4.3.12) vyplývá, že

$$\mathbf{n} \cdot \rho \mathbf{u}^* + \mathbf{n} \cdot \Delta t \mathbf{F}_n = 0. \quad (4.3.13)$$

Necht' pro sílu \mathbf{F}_n platí

$$\mathbf{F}_n = F_b \mathbf{n}, \quad (4.3.14)$$

potom rovnici č. (4.3.13) můžeme přepsat do tvaru

$$\mathbf{n} \cdot \rho \mathbf{u}^* + \Delta t F_b \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (4.3.15)$$

Pro sílu F_b pak platí následovný vztah

$$F_b = -\frac{\rho \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^*}{\Delta t}. \quad (4.3.16)$$

Zdrojový člen poté nabývá tvaru

$$\sum \tilde{\mathbf{Q}}_i = \tilde{\mathbf{Q}}_1 + \tilde{\mathbf{Q}}_2 + \tilde{\mathbf{Q}}_3, \quad (4.3.17)$$

kde pro $\tilde{\mathbf{Q}}_3$ platí vztah

$$\tilde{\mathbf{Q}}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{F}_n A \\ \mathbf{F}_n \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) A \end{pmatrix}. \quad (4.3.18)$$

[35]

Ztrátový model

Pokud uvažujeme ztrátový model, tak zdrojový člen poté nabývá tvaru

$$\sum \tilde{\mathbf{Q}}_i = \tilde{\mathbf{Q}}_1 + \tilde{\mathbf{Q}}_2 + \tilde{\mathbf{Q}}_3 + \tilde{\mathbf{Q}}_4, \quad (4.3.19)$$

kde $\tilde{\mathbf{Q}}_4$ je

$$\tilde{\mathbf{Q}}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -K A t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.3.20)$$

kde \mathbf{n} je normálový vektor směru proudění. Ačkoliv v obecném 3D případě je odpor prostředí obecně v každém směru jiný, můžeme v 1D případě uvažovat anizotropii odporu prostředí a tím pádem k popisu odporu prostředí postačuje jediná veličina K . Pro K pak platí vztah [31]

$$K = \frac{1}{2} \zeta \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}, \quad (4.3.21)$$

kde

$$\zeta = \frac{\theta}{l}, \quad (4.3.22)$$

kde l je vhodný délkový rozměr části kompresoru, v němž je θ konstatní. Koeficient θ je obecně velmi komplikované určit, viz [31] a [41]. V této práci se spokojíme s tím, že koeficient θ předepíšeme jako vhodnou konstantu, která bude rozdílná pro jednotlivé části radiálního kompresoru.

4.4 Návrhové výpočty

Pokud budeme uvažovat v difuzoru izoentropickou expanzi můžeme použít následující vztahy, podle kterých je možné spočítat exaktní řešení 1D proudění jak v dýze tak i difuzoru.

Průběh Machova čísla

$$\frac{A^*}{A} = \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} Ma \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2 \right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}, \quad (4.4.1)$$

kde A^* je kritický průřez dýzy, resp. difuzoru. Pokud v rovnici č. (4.4.1) uvažujeme suchý vzduch, tzn. ($\gamma = 1.4$), můžeme ji přepsat do následujícího tvaru. Této skutečnosti bude využito i v rovnicích č. (4.4.3 - 4.4.6).

$$\frac{A_{in}}{A} = \frac{216}{125} Ma \left(1 + \frac{Ma^2}{5}\right)^{-3} \quad (4.4.2)$$

Za předpokladu, že se z rovnice č. (4.4.1) zjistí průběh Machova čísla v celém difuzoru, je možné dopočítat i průběhy následujících veličin.

Průběh teploty

$$\frac{T}{T_0} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2\right)^{-1} = \left(1 + \frac{Ma^2}{5}\right)^{-1}, \quad (4.4.3)$$

Průběh tlaku

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = \left(1 + \frac{Ma^2}{5}\right)^{-\frac{7}{2}}, \quad (4.4.4)$$

Průběh hustoty

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2\right)^{-\frac{1}{\gamma - 1}} = \left(1 + \frac{Ma^2}{5}\right)^{-\frac{5}{2}}, \quad (4.4.5)$$

Průběh rychlosti zvuku

$$\frac{a}{a_0} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(1 + \frac{Ma^2}{5}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.4.6)$$

kde indexem 0 označujeme klidový stav před vstupem do dýzy.

[23] [12]

Kapitola 5

Numerická matematika

V této kapitole jsou definovány základní matematické pojmy a přístupy numerické matematiky, které jsou použity při řešení našeho problému.

5.1 Konvergence

Nechť je dána diferenciální rovnice v operátorovém tvaru

$$L(u) = f, \quad (5.1.1)$$

jejímž přesným řešením je u^* . Nechť spojitou úlohu aproximuje numerické schéma s krokem h , poté u_h je numerické řešení této rovnice získané danou numerickou metodou. Poté pro celkovou chybu platí vztah

$$\|\varepsilon_h\| = \|u^* - u_h\|. \quad (5.1.2)$$

Pokud platí

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\varepsilon_h\| = 0, \quad (5.1.3)$$

tak říkáme, že numerické řešení u_h konverguje k přesnému řešení u^* . [34] [36]

5.2 Konzistence

Uvažujme diferenciální rovnici v operátorovém tvaru, viz rovnice č. (5.1.1), jejímž přesným řešením je u^* . Nechť spojitá úloha je aproximována numerickou metodou s krokem h . Poté pro danou numerickou metodu platí vztah v operátorovém tvaru

$$L_h(u) = f_h. \quad (5.2.1)$$

Poté lokální chybu aproximace můžeme vyjádřit jako

$$\|\tau_h\| = \|L_h(u^*) - L(u^*)\|. \quad (5.2.2)$$

Numerické schéma je s danou spojitou úlohou konzistentní právě tehdy, když platí

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\tau_h\| = 0. \quad (5.2.3)$$

[34] [36]

5.3 Stabilita

Nechť je u_h numerické řešení získané aproximací spojitě úlohy danou numerickou metodou v operátorovém tvaru, viz rovnice č. (5.2.1), s definovanou počáteční podmínkou v operátorovém tvaru

$$P(u) = \varphi_h \quad (5.3.1)$$

a s definovanými okrajovými podmínkami v operátorovém tvaru

$$H(u) = \psi_h. \quad (5.3.2)$$

Dále upravíme rovnici č. (5.2.1) na rovnici

$$L_h(u) = \tilde{f}_h, \quad (5.3.3)$$

s definovanou počáteční podmínkou v operátorovém tvaru

$$P(u) = \tilde{\varphi}_h \quad (5.3.4)$$

a s definovanými okrajovými podmínkami v operátorovém tvaru

$$H(u) = \tilde{\psi}_h. \quad (5.3.5)$$

Nechť \tilde{u}_h je numerické řešení získané aproximací spojitě úlohy danou numerickou metodou v operátorovém tvaru, viz rovnice č. (5.3.3), pro které platí $\|u_h - \tilde{u}_h\| < \varepsilon$, kde $\varepsilon > 0$. Pokud pro každé $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ a zároveň pro libovolná f_h , \tilde{f}_h , ϕ_h , $\tilde{\phi}_h$, ψ_h , $\tilde{\psi}_h$ platí, že

$$\begin{aligned} \|f_h - \tilde{f}_h\| &< \alpha \\ \|\phi_h - \tilde{\phi}_h\| &< \beta \\ \|\psi_h - \tilde{\psi}_h\| &< \gamma. \end{aligned}$$

Pak řekneme, že zvolená numerická metoda je stabilní. [34] [36] [26]

5.4 Laxova věta o ekvivalenci

Pro lineární metody je konzistence a stabilita nutnou a zároveň postačující podmínkou konvergence (tato věta je cyklicky zaměnitelná, tzn. libovolná vlastnost je důsledkem těch zbývajících). [34]

5.5 Metoda konečných objemů

V této kapitole je ukázáno odvození metody konečných objemů.

Gaussova-Ostrogradského věta

Nechť Ω je omezená, souvislá a otevřená množina v \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, se spojitou po částech hladkou hranicí $\partial\Omega$. Nechť $\mathbf{f}(u)$ má na $\bar{\Omega}$ spojitě první derivaci a je taktéž integrovatelná, potom platí

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{f}(u) dV = \int_{\partial\Omega} \mathbf{f}(u) \cdot \mathbf{n} dS, \quad (5.5.1)$$

kde \mathbf{n} je vnější normála k Ω . [40]

Odvození

Odvození si ukážeme pro rovnici

$$u_t + \nabla \cdot \mathbf{f}(u) = 0, \quad (5.5.2)$$

kde

$$\mathbf{f}(u) = \begin{pmatrix} f(u) \\ g(u) \\ h(u) \end{pmatrix}.$$

Nechť u , \mathbf{f} jsou spojitě a po částech hladké funkce na Ω , které jsou integrovatelné a mají spojitě první derivace na $\bar{\Omega}$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Nechť je buňka, kde je prováděna diskretizace označena i a všichni její sousedi j , potom můžeme psát

$$\int_{\Omega_i} u_t + \nabla \cdot \mathbf{f}(u) dV = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_i} u(\mathbf{x}, t) dV + \int_{\partial\Omega_i} \mathbf{f}(u) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (5.5.3)$$

Dále si definujeme střední hodnotu objemového integrálu v rovnici č. (5.5.3)

$$U_i(t) = \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} u(\mathbf{x}, t) dV. \quad (5.5.4)$$

Poté upravíme plošný integrál v téže rovnici

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} \mathbf{f}(u) \cdot \mathbf{n} dS &= \sum_j \int_{\partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j} \mathbf{f}(u) \cdot \mathbf{n} dS \\ \sum_j \int_{\partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j} \mathbf{f}(u) \cdot \mathbf{n} dS &\approx \sum_j S_{ij} F_{ij}, \end{aligned} \quad (5.5.5)$$

kde F_{ij} je tok skrze společnou hranici buněk. S_{ij} je velikost společné hranice definované jako

$$S_{ij} = |\partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j|. \quad (5.5.6)$$

Po úpravě rovnice č. (5.5.3) dostaneme výchozí tvar pro metodu konečných objemů

$$\frac{dU_i(t)}{dt} = -\frac{1}{|\Omega_i|} \sum_j S_{ij} F_{ij}. \quad (5.5.7)$$

Z rovnice č. (5.5.7) je vidět, že se jedná o diferenciální rovnici prvního řádu, která se dá následně snadno řešit (např. Eulerovou metodou). Řešením Eulerovou metodou dostáváme následující tvar

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \sum_j S_{ij} F_{ij}. \quad (5.5.8)$$

Pro 1D problém se rovnice č. (5.5.8) zjednoduší na tvar

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n \right). \quad (5.5.9)$$

[27] [38]

5.6 HLL numerický tok

$$\mathbf{W}_t + \mathbf{F}(\mathbf{W})_x = 0, \quad (5.6.1)$$

Pro soustavu 1D Eulerových rovnic existují 3 charakteristiky, viz rovnice č. (5.6.1), ale v HLL schématu jsou zohledněny pouze 2

$$S_l = \min(u_l - a_l, u_r - a_r) \quad (5.6.2)$$

$$S_r = \max(u_l + a_l, u_r + a_r). \quad (5.6.3)$$

Důsledkem toho mohou pro rovnici č. (5.6.1) nastat tři situace. Proudění může buďto proudit nadzvukovou rychlostí v kladném směru, tedy $u_l, u_r > 0$ a zároveň $|u_l|, |u_r| \geq a$, pro zvolené charakteristiky tudíž platí $S_l, S_r > 0$. Pokud ale bude proudění proudit nadzvukovou rychlostí v opačném směru, tedy $u_l, u_r < 0$ a zároveň $|u_l|, |u_r| \geq a$, tak pro zvolené charakteristiky bude tudíž platit $S_l, S_r < 0$. Dále může nastat situace, kdy je proudění podzvukové v libovolném směru.

Pro vektorový tok mezi hranicemi buněk platí následující vztahy

$$\mathbf{F}^* = \begin{cases} \mathbf{F}_l & S_l \geq 0 \\ \frac{S_r \mathbf{F}_l - S_l \mathbf{F}_r + S_r S_l (\mathbf{W}_r - \mathbf{W}_l)}{S_r - S_l} & S_l \leq 0 \leq S_r \\ \mathbf{F}_r & S_r \leq 0 \end{cases},$$

kde vektory označené indexy l resp. r jsou vektory, viz rovnice č. (5.6.1), na levé resp. pravé straně hranice mezi buňkami. [24]

5.7 HLLC numerický tok

Pro HLLC numerický tok uvažujeme všechny 3 charakteristiky 1D Eulerových rovnic, viz rovnice č. (5.6.1). Pro první dvě charakteristiky použijeme stejné vztahy jako pro HLL numerický tok, viz rovnice č. (5.6.2) a (5.6.3). Pro poslední charakteristiku použijeme následující vztah

$$S^* = \frac{p_r - p_l + \rho_l u_l (S_l - u_l) - \rho_r u_r (S_r - u_r)}{\rho_l (S_l - u_l) - \rho_r (S_r - u_r)}. \quad (5.7.1)$$

Pro vektorový tok mezi hranicemi buněk poté platí následující vztahy

$$\mathbf{F}^* = \begin{cases} \mathbf{F}_l & S_l \geq 0 \\ \frac{S^*(S_l \mathbf{W}_l - \mathbf{F}_l) + S_l p^* \mathbf{D}^*}{S_l - S^*} & S_l \geq 0 \geq S^* \\ \frac{S^*(S_r \mathbf{W}_r - \mathbf{F}_r) + S_r p^* \mathbf{D}^*}{S_r - S^*} & S^* \geq 0 \geq S_r \\ \mathbf{F}_r & S_r \leq 0 \end{cases},$$

kde pro tlak na hranici buněk platí vztah

$$p^* = \frac{p_l + p_r + \rho_l (S_l - u_l)(S^* - u_l) + \rho_r (S_r - u_r)(S^* - u_r)}{2} \quad (5.7.2)$$

a pro vektor \mathbf{D}^* platí

$$\mathbf{D}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ S^* \end{pmatrix}.$$

[24]

5.8 AUSM numerický tok

Zde ukážeme výpočet AUSM numerického toku pro rovnici č. (5.6.1). Prvním krokem pro výpočet AUSM numerického toku je určení Machova čísla na rozhraní sousedních buněk. Nechť pro Machova čísla dvou sousedních buněk platí vztah

$$Ma_l = \frac{u_l}{a_l}, \quad Ma_r = \frac{u_r}{a_r}. \quad (5.8.1)$$

Pak Machovo číslo na rozhraní dvou buněk vypočteme pomocí vztahu

$$Ma^* = \mathcal{M}^+(Ma_l) + \mathcal{M}^-(Ma_r), \quad (5.8.2)$$

kde \mathcal{M}^\pm jsou funkce, pro které, aby aproximovali Ma^* , platí několik předpokladů, viz [39]. V této práci je uvažujeme ve tvaru

$$\mathcal{M}^\pm(Ma) = \begin{cases} \frac{1}{2}(Ma \pm |Ma|) & |Ma| > 1 \\ \pm \frac{1}{4}(Ma \pm 1)^2 \pm \frac{1}{8}(Ma^2 - 1)^2 & |Ma| \leq 1 \end{cases}. \quad (5.8.3)$$

Obdobně jako Ma na rozhraní dvou buněk se vypočte i tlak

$$p^* = \mathcal{P}^+(Ma_l)p_l + \mathcal{P}^-(Ma_r)p_r, \quad (5.8.4)$$

kde funkce \mathcal{P}^\pm vhodně aproximují tlak na hranici mezi dvěma buňkami, i pro ně platí několik předpokladů, viz [39]. V této práci nabývají tvaru

$$\mathcal{P}^\pm(Ma) = \begin{cases} \frac{(Ma \pm |Ma|)}{2Ma} & |Ma| > 1 \\ \frac{1}{4}(Ma \pm 1)^2 (2 \mp Ma) & |Ma| \leq 1 \end{cases}. \quad (5.8.5)$$

Poté pro numerický tok hranicí mezi dvěma buňkami platí

$$\mathbf{F}^* = \frac{1}{2}(Ma^*(a_l\Psi_l + a_r\Psi_r) - |Ma^*|(a_r\Psi_r - a_l\Psi_l)) + p^*\mathbf{D}^*, \quad (5.8.6)$$

kde pro vektory Ψ_l , Ψ_r a \mathbf{D}^* platí

$$\Psi_l = \begin{pmatrix} \rho_l \\ \rho_l u_l \\ \rho_l H_l \end{pmatrix}, \quad \Psi_r = \begin{pmatrix} \rho_r \\ \rho_r u_r \\ \rho_r H_r \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

[39]

5.9 AUSM+ numerický tok

Proces odvození AUSM+ numerického toku je téměř shodný s odvozením AUSM numerického toku. Z toho důvodu si zde uvedeme pouze odlišnosti těchto dvou schémat. Pro rychlost zvuku na hranici dvou buněk platí

$$a^* = \frac{a_l + a_r}{2}. \quad (5.9.1)$$

Potom pro Machovo číslo v sousedních buňkách platí

$$Ma_l = \frac{u_l}{a^*}, \quad Ma_r = \frac{u_r}{a^*}. \quad (5.9.2)$$

Oproti AUSM jsou rozdílné \mathcal{P}^\pm funkce, pro něž platí

$$\mathcal{P}^\pm(Ma) = \begin{cases} \frac{1}{2}(Ma \pm \text{sign}(Ma)) & |Ma| > 1 \\ \frac{1}{4}(Ma \pm 1)^2 (2 \mp Ma) \pm \frac{3}{16}(Ma^2 - 1)^2 & |Ma| \leq 1 \end{cases}. \quad (5.9.3)$$

Poté pro numerický tok hranic mezi dvěma buňkami platí

$$\mathbf{F}^* = \frac{1}{2}a^*(Ma^*(\Psi_l + \Psi_r) - |Ma^*(\Psi_r - \Psi_l)|) + p^*\mathbf{D}^*. \quad (5.9.4)$$

[39]

5.10 Laxův-Friedrichův numerický tok

Opět vyjdeme z rovnice č. (5.6.1). Poté numerický tok pro Laxovo-Friedrichsovo schéma v konzervativní podobě nabývá hodnoty

$$\mathbf{F}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_l + \mathbf{F}_r) - \frac{\xi\Delta x}{2\Delta t}(\mathbf{W}_r - \mathbf{W}_l). \quad (5.10.1)$$

Toto schéma je 1. řádu přesnosti, je velmi disipativní a platí pro něj CFL podmínka stability. Numerická vazkost tohoto schéma lze regulovat vhodně zvoleným parametrem ξ . [32]

5.11 CFL podmínka

CFL podmínka je nutnou podmínkou pro stabilitu numerického schéma. CFL podmínka pro soustavu 1D Eulerových rovnic je splněna pokud platí následující vztah

$$\frac{|\lambda_{max}|\Delta t}{\Delta x} \leq 1, \quad (5.11.1)$$

kde λ_{max} je charakteristika s nejvyšší číselnou hodnotou, tudíž platí

$$|\lambda_{max}| = \max(|u + a|, |u - a|, |u|). \quad (5.11.2)$$

[33]

Kapitola 6

Simulace

V této části budou představeny výsledky, které byly získány numerickou simulací daného problému. Všechny výsledky byly získány pomocí programu, který byl v rámci této práce vyvinut. Řešení je uvažováno na osově symetrické oblasti $\Omega \subset \{[r, \varphi, z]; r_{in} < r < r_{out}; 0 < \varphi < 2\pi; z_{in} < z < z_{out}\}$ (pozn. schématický náčrt řešené oblasti viz obr. č. (6.1)). Postupně jsou zde předkládány výsledky simulací podle toho, jak probíhal vývoj výpočetního programu.

6.1 Geometrie

Geometrie, na které bylo simulováno proudění, je zobrazena na obrázku č. (6.1). Z tohoto obrázku je patrné, že v simulaci není zahrnuta voluta.

Definice úhlů

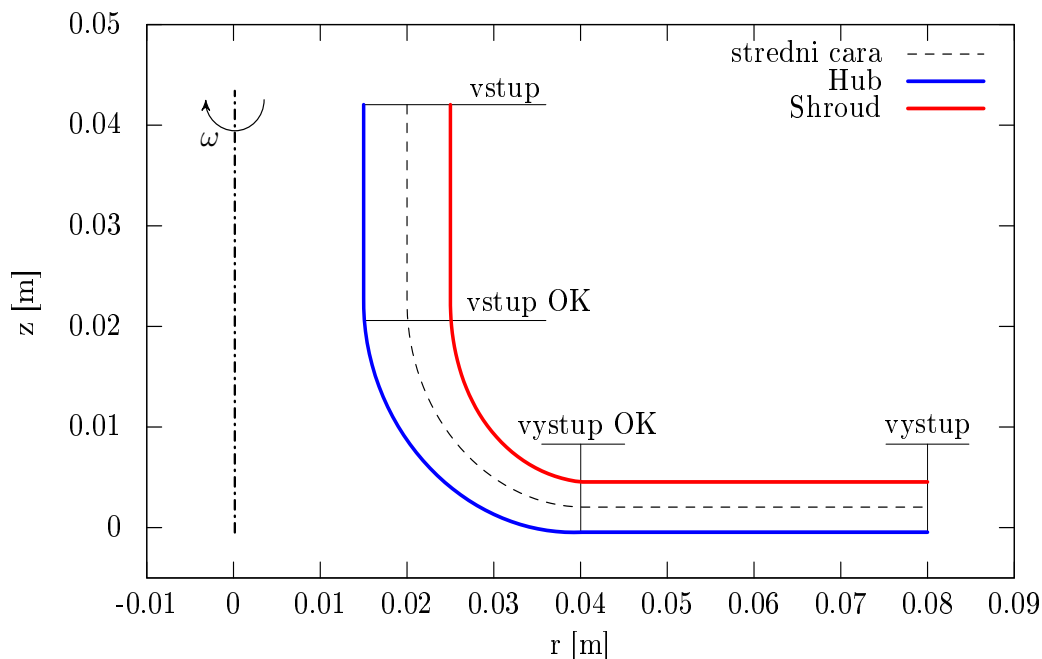
Jelikož se jedná o 1D simulaci je úhlem α definován tvar protékaného kanálu. Úhel α je definován následovně

$$\alpha = \arctan\left(\frac{u_r}{u_z}\right). \quad (6.1.1)$$

Úhlem β je definován odklon proudu v tangenciálním směru (tj. pokud $u_\varphi \neq 0$, tak $\beta \neq 0$). Pokud v modelu nepředpokládáme odklon proudu od lopatek, viz rovnice č. (2.6.1), kopíruje úhel β konstrukční úhel lopatek. Pro úhel β platí následující definice

$$\beta = \arctan\left(\frac{u_\varphi}{\sqrt{u_z^2 + u_r^2}}\right). \quad (6.1.2)$$

U reálných lopatek kompresorového kola se definuje ještě úhle γ , který odpovídá odchylce střední roviny lopatky od roviny $z - r$ na výstupu z kompresorového kola. Velikost úhlu γ je důsledkem toho, že obecně nemusí být definice úhlu β stejná na dolní a horní řídící křivce kompresorového kola.



Obrázek 6.1: Geometrie, modře je zobrazena vnitřní řídicí křivka, červeně je zobrazena vnější řídicí křivka

Průběh zvoleného úhlu α v závislosti na křivočaré souřadnici s je zobrazen na obr. č. (6.2). Z průběhu úhlu vyplývá, že za trajektorii střednice kompresorového kola byla zvolena kruhová trajektorie. Ve skutečném kompresorovém kole tomu tak není, nicméně trajektorie střednice se kruhové trajektorii přibližuje.

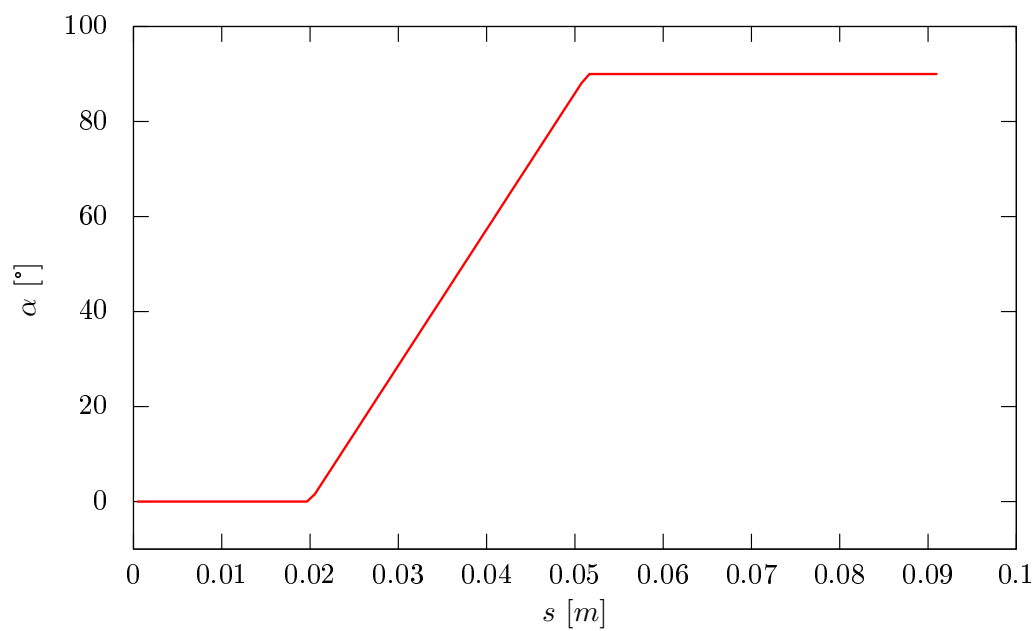
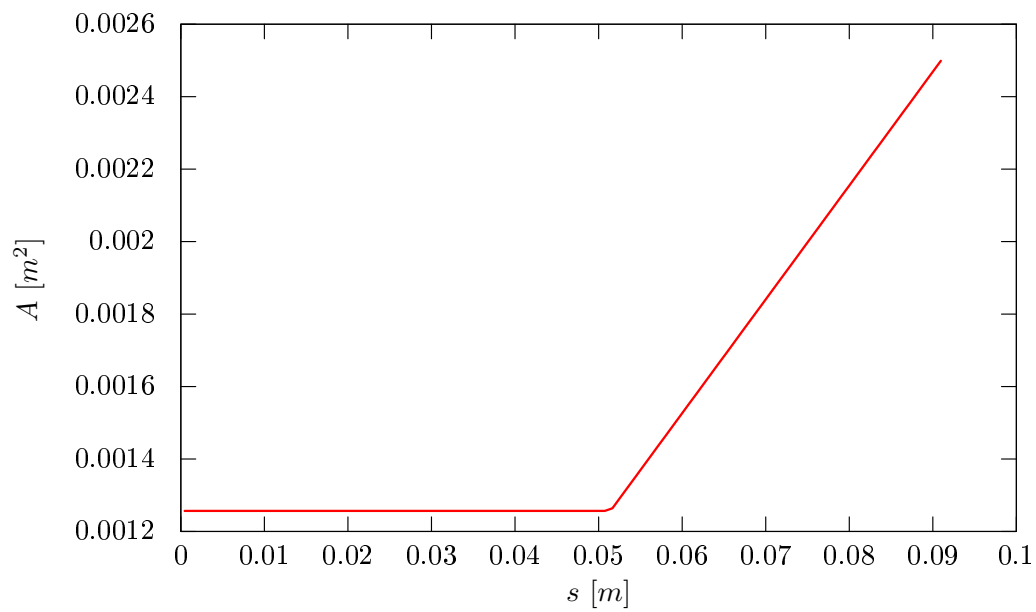
Plocha průřezů

Pro simulaci proudění byl zvolen průběh ploch průřezů v závislosti na křivočaré souřadnici s zobrazený na obr. č. (6.3). Ze zobrazeného průběhu vyplývá, že plocha průřezů zůstává konstantní až do vstupu do difuzoru.

6.2 Výpočet rezidua

V každé simulace, která je zde představena se hledá stacionární řešení (tj. $\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = 0$). K tomu abychom mohli posoudit, zdali numerické řešení konverguje ke stacionárnímu řešení dané PDR, pozorujeme průběh rezidua. Pokud reziduum splní vhodné kritérium, prohlásí se nalezené numerické řešení za stacionární řešení dané PDR (Pozor samotná konvergence nepostačuje k tomu, abychom prohlásili nalezené řešení za stacionární řešení dané PDR). V této práci se používá následující definice rezidua

$$rez = \max \left(\ln |\mathbf{W}^{n+1} - \mathbf{W}^n| \right). \quad (6.2.1)$$

Obrázek 6.2: Úhel α 

Obrázek 6.3: Průběh ploch průřezů

6.3 Materiál

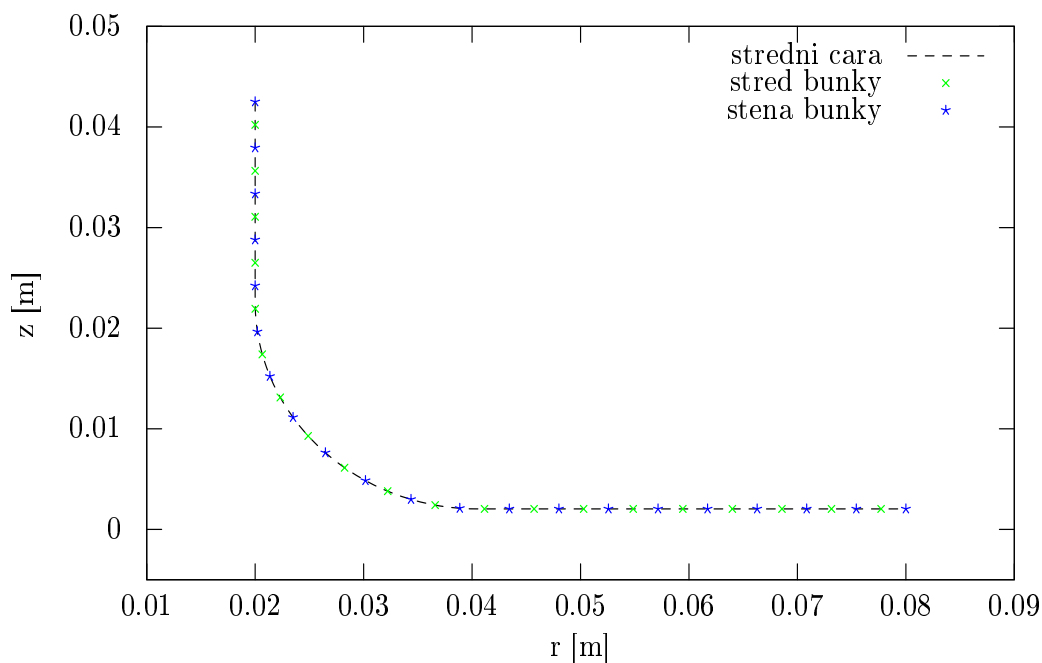
Jako plynné médium byl použit model ideálního plynu s následujícími vlastnostmi. V případě vzduchu zachycuje model ideálního plynu realitu velmi dobře. Z toho důvodu je tento model také běžně používán u simulací, které navíc zohledňují i vazkost vzduchu.

γ	r
1.4 [-]	287.04 [$J.kg^{-1}.K^{-1}$]

Tabulka 6.1: Vlastnosti plynného média

6.4 Síť

Jako síť byla použita uniformní 1D síť, přičemž střednice průtočné části kompresoru byla rozdělena na n buněk.



Obrázek 6.4: Síť

6.5 Přehled řešených variant

1. Proudění zjednodušenou geometrií bez lopatek
2. Proudění s nenulovou tangenciální složkou rychlosti
3. Proudění s přidáním lopatek nulové tloušťky

4. Proudění zohledňující otrhávání proudu podél lopatky
5. Proudění reálnou geometrií
6. Proudění se ztrátami a s lopatkami nenulové tloušťky

6.6 Varianta I.

Simulace tohoto případu byla provedena na síti se 100 buňkami, viz obr. č. (6.4). Parametr regulující numerickou vazkost u LF numerického toku byl zvolen na hodnotu $\xi = 0.3$. Exaktní řešení bylo získáno pomocí rovnic č. (4.4.3 - 4.4.6). V této simulaci nebyly uvažovány rotorové lopatky.

Počáteční podmínky

Počáteční podmínky byly zvoleny na celé oblasti sítě následovně

$$\begin{aligned} T_{s,0} &= 273.15 \text{ K}, \\ p_{s,0} &= 101\,325 \text{ Pa}, \\ u_{r,0} &= 0 \text{ m.s}^{-1}, \\ u_{\varphi,0} &= 0 \text{ m.s}^{-1}, \\ u_{z,0} &= 0 \text{ m.s}^{-1}. \end{aligned}$$

Okrajové podmínky

Na vstupu do kompresoru byly zvoleny následující okrajové podmínky

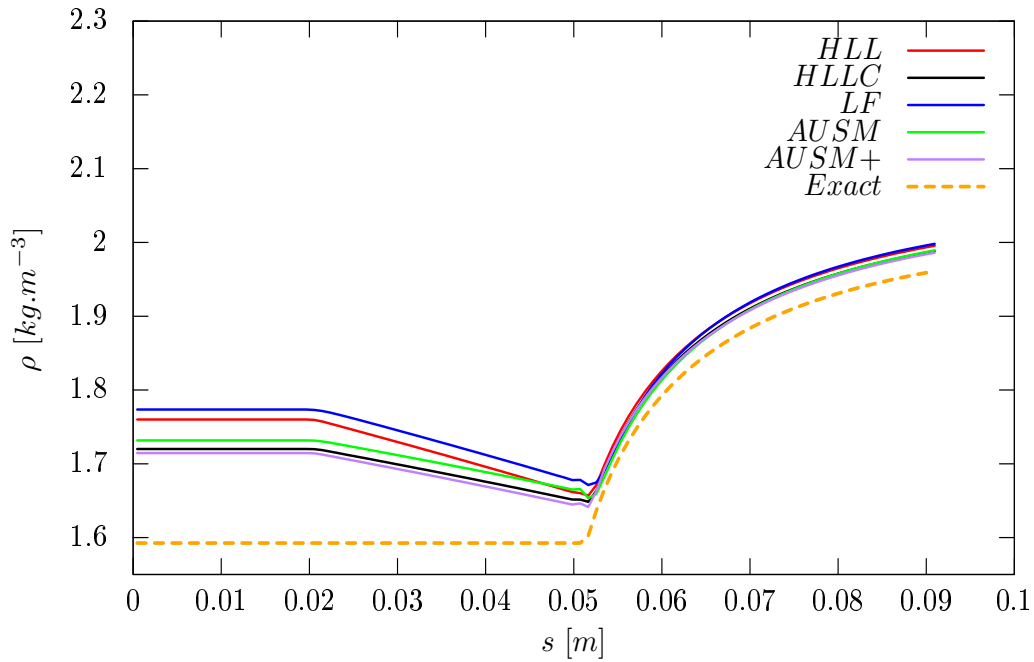
$$\begin{aligned} \dot{m}_{c,in} &= 0.5 \text{ kg.s}^{-1}, \\ T_{s,in} &= 298.15 \text{ K}, \\ \alpha &= 0^\circ, \\ \beta &= 0^\circ. \end{aligned}$$

Na výstupu byla zvolena následující okrajová podmínka

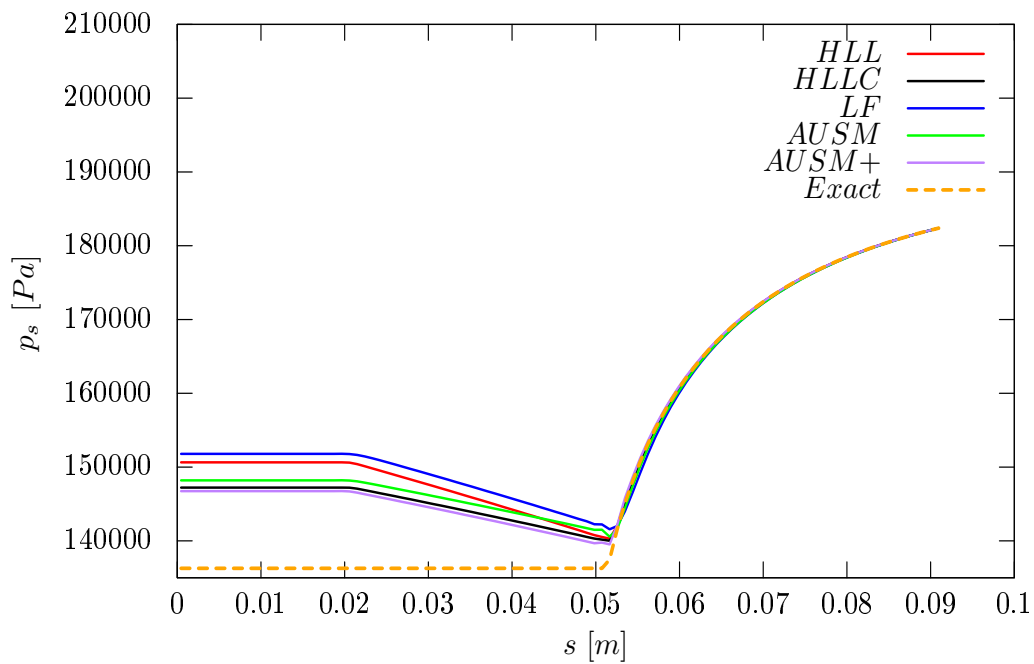
$$p_{s,out} = 182\,385 \text{ Pa}.$$

Výsledky

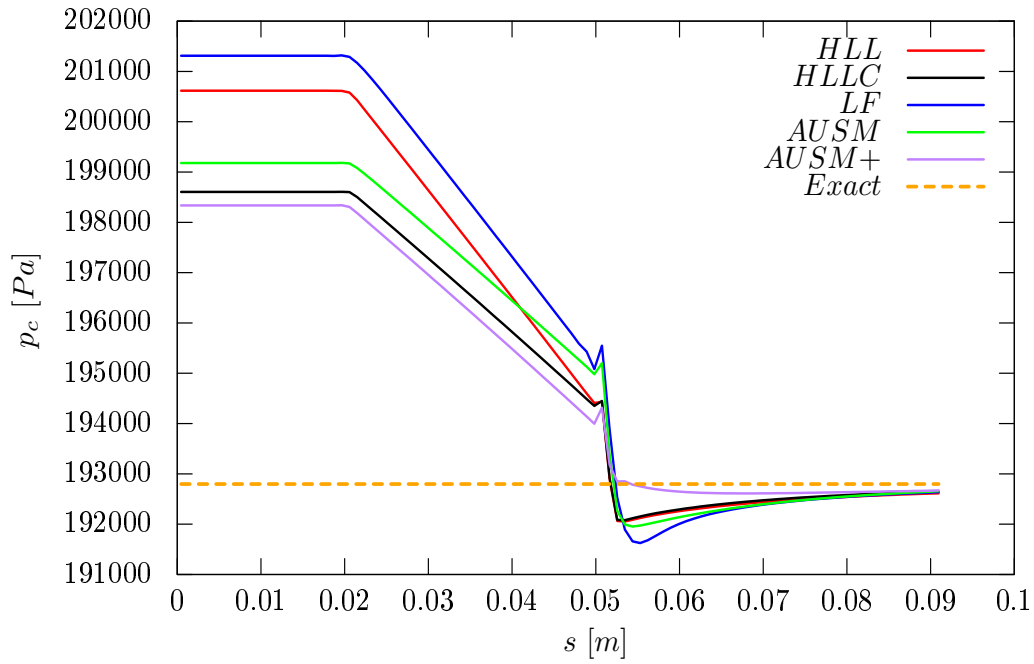
Ačkoliv jsou plochy průřezů konstantní, statický tlak klesá až do okamžiku, kdy se plochy průřezů začnou rozšiřovat, viz. obr. č. (6.6). Tento jev je způsoben tlakovou ztrátou změnou směru (v tomto případě numerickou vazkostí a zaokrouhlovací chybou). Celkový tlak klesá, viz obr. č. (6.7), protože do systému není přiváděna žádná energie. Z průběhu rezidua, viz obr. č. (6.14), vyplývá, že numerická simulace zkonvergovala velice dobře a rychle. Exaktní řešení průběhu tlaků se mírně liší od numericky vypočtených dat, viz obr. č. (6.7) a (6.6). Tato odchylka je způsobena tím, že při výpočtu exaktního řešení nebyla uvažována změna směru proudění. Z obr. č. (6.5-6.14) je patrné, že u použitých numerických toků nedochází k žádné signifikantní odchylce a tudíž nebylo prokázáno, že by nějaká z použitých numerických metod byla k řešení daného problému nevhodná. Nicméně největší odchylku od exaktního řešení vykazuje LF metoda.



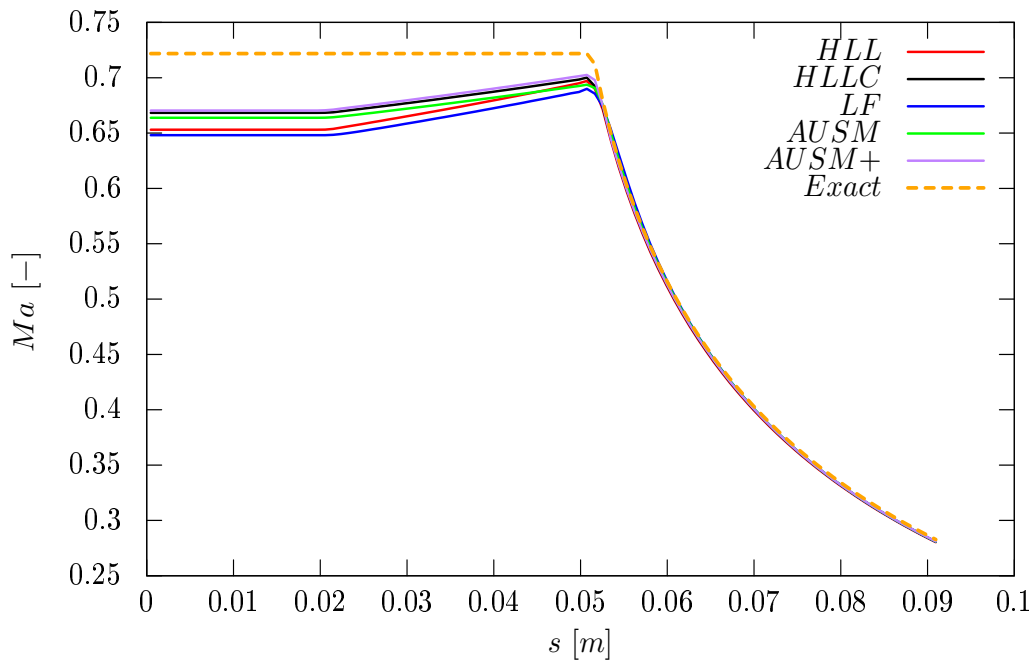
Obrázek 6.5: Průběh hustoty u varianty I.



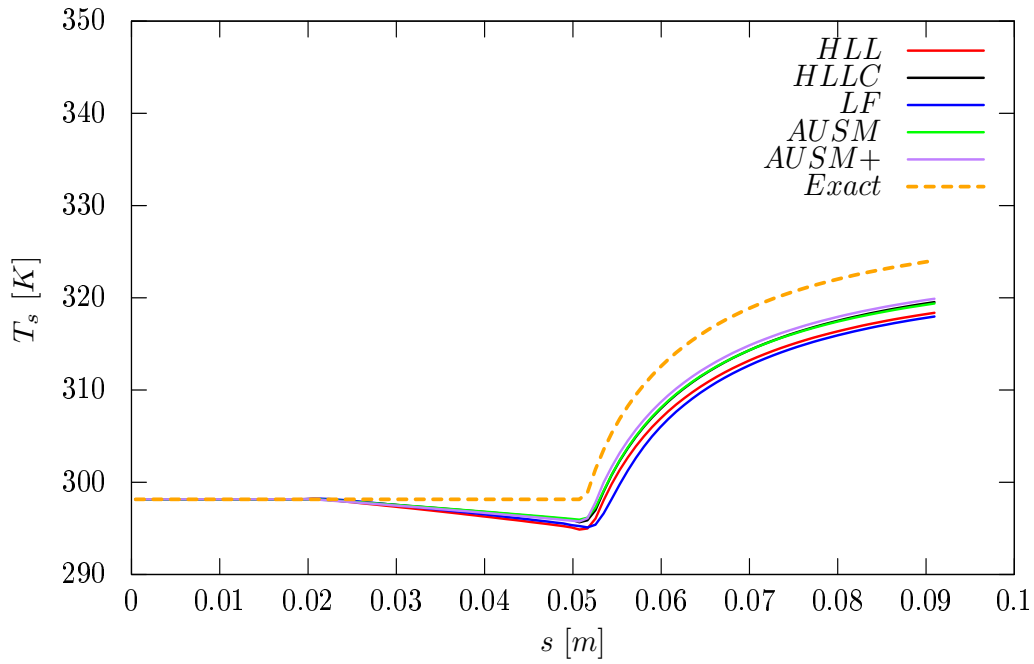
Obrázek 6.6: Průběh statického tlaku u varianty I.



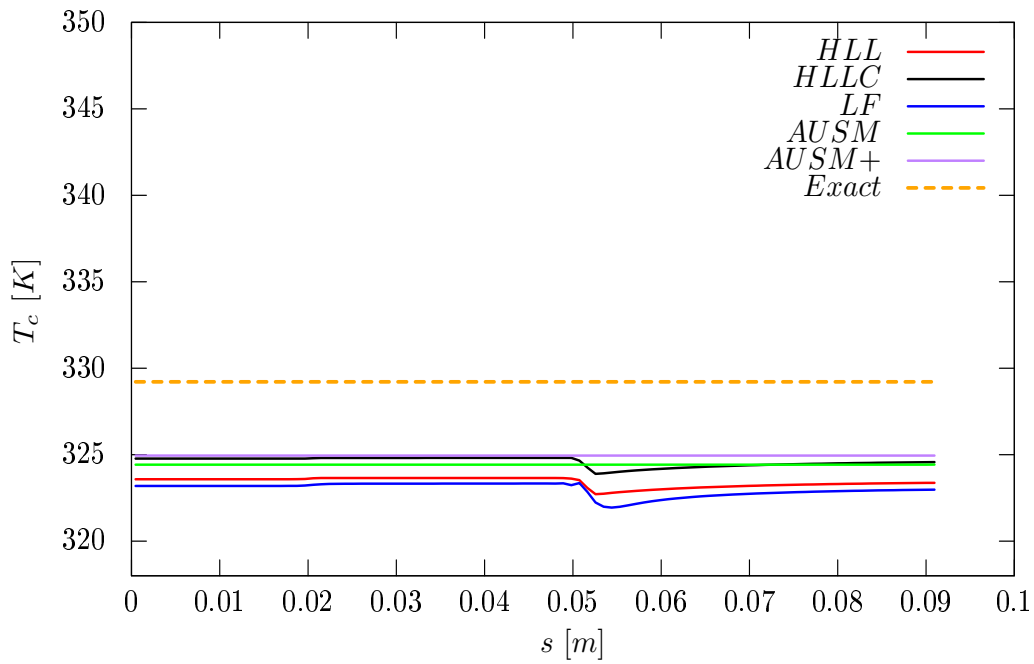
Obrázek 6.7: Průběh celkového tlaku u varianty I.



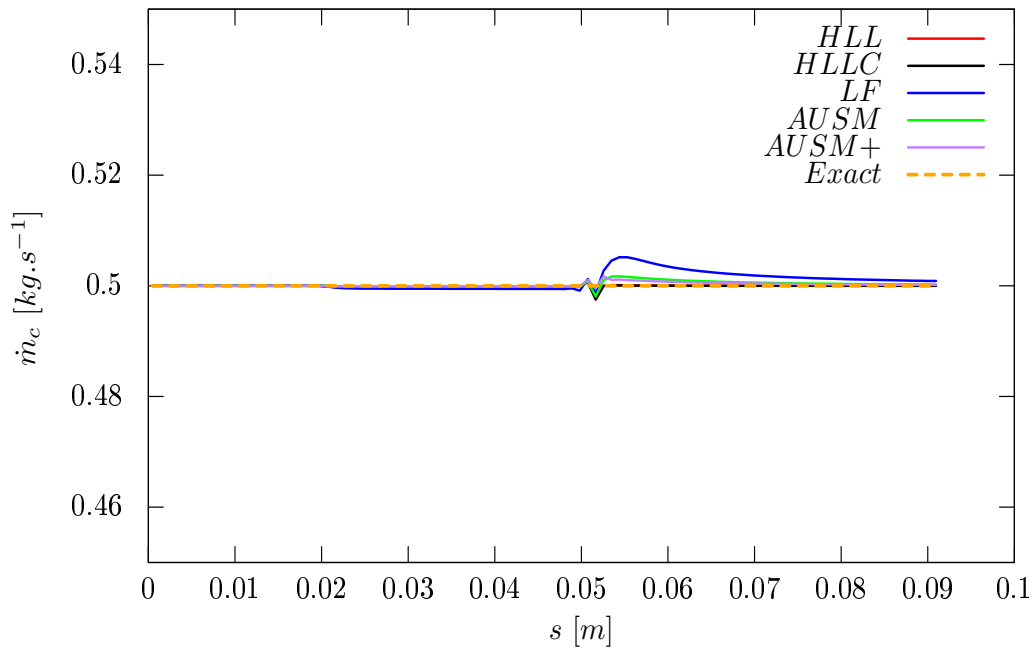
Obrázek 6.8: Průběh Machova čísla u varianty I.



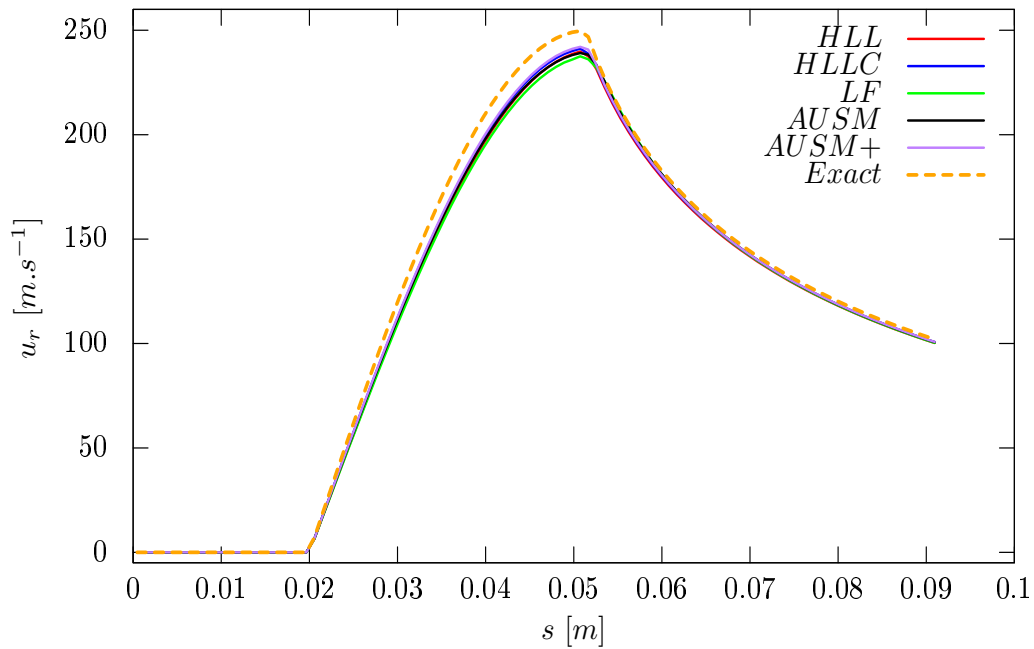
Obrázek 6.9: Průběh statická teploty u varianty I.



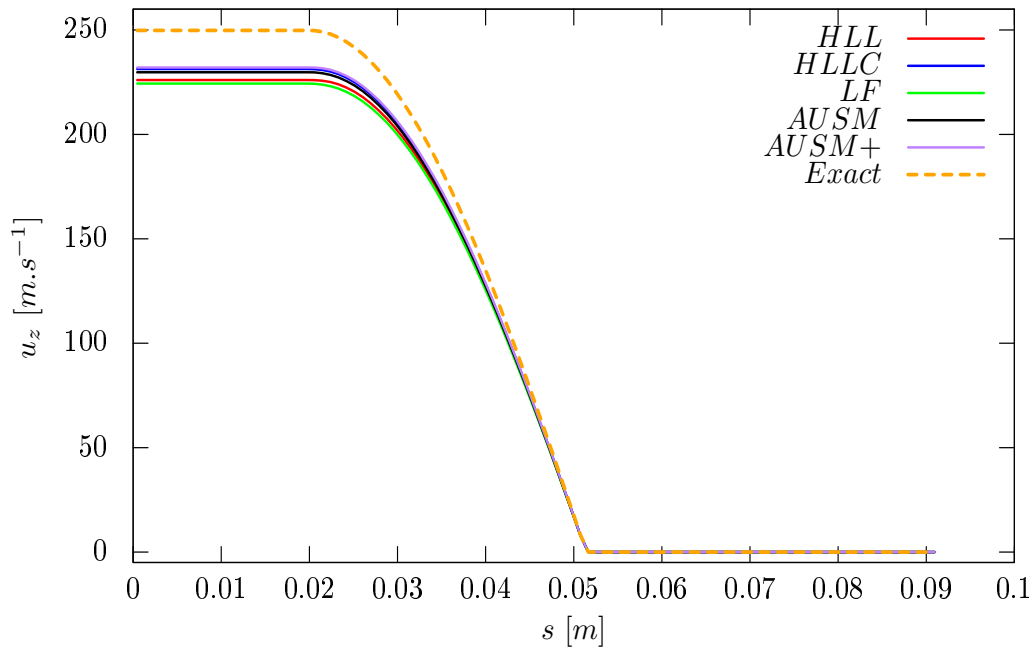
Obrázek 6.10: Průběh celkové teploty u varianty I.



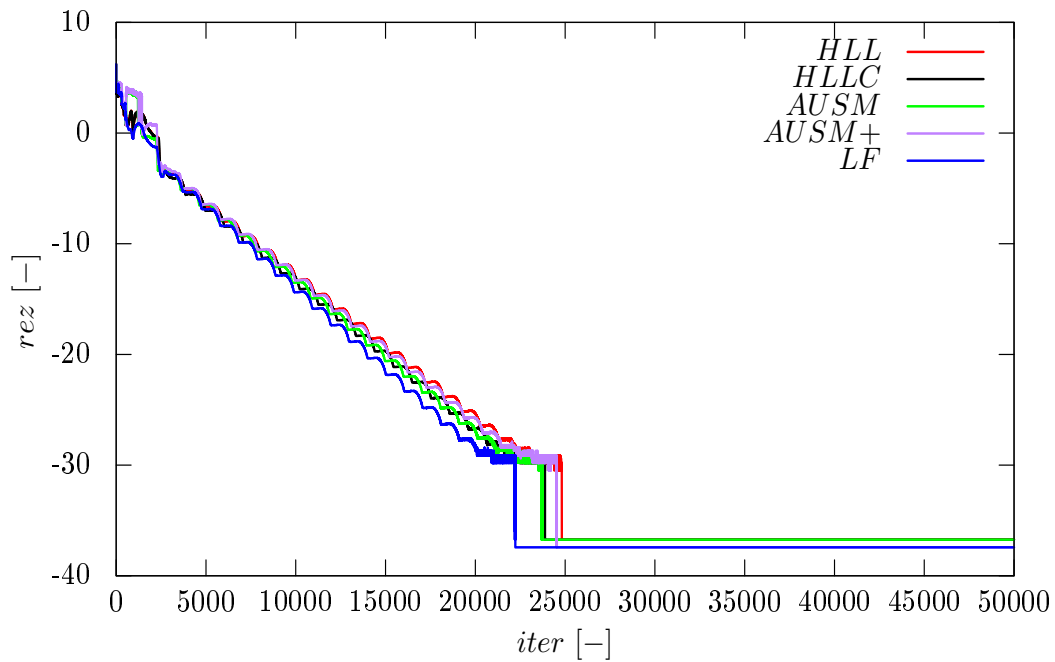
Obrázek 6.11: Průběh hmotnostního toku u varianty I.



Obrázek 6.12: Průběh radiální rychlosti u varianty I.



Obrázek 6.13: Průběh axiální rychlosti u varianty I.



Obrázek 6.14: Průběh rezidua u varianty I.

6.7 Varianta II.

V tomto případě byla použita uniformní 1D síť s $n = 100$ buňkami, viz obr. č. (6.4). Parametr regulující numerickou vazkost u LF numerického toku byl zvolen na hodnotu $\xi = 0.3$. Ani v tomto případě nebyly uvažovány rotorové lopatky. Naopak byla změněna okrajová podmínka na vstupu do kompresoru tak, aby proud do kompresoru vstupoval pod určitým úhlem. Tato změna se projevila na struktuře simulačního programu, jelikož musel být uvažován jiný zdrojový člen, viz rovnice č. (4.3.9).

Počáteční podmínky

Počáteční podmínky byly zvoleny na celé oblasti sítě následovně

$$\begin{aligned} T_{s,0} &= 273.15 \text{ K}, \\ p_{s,0} &= 101\,325 \text{ Pa}, \\ u_{r,0} &= 0 \text{ m.s}^{-1}, \\ u_{\varphi,0} &= 0 \text{ m.s}^{-1}, \\ u_{z,0} &= 0 \text{ m.s}^{-1}. \end{aligned}$$

Okrajové podmínky

Na vstupu do kompresoru byly zvoleny následující okrajové podmínky

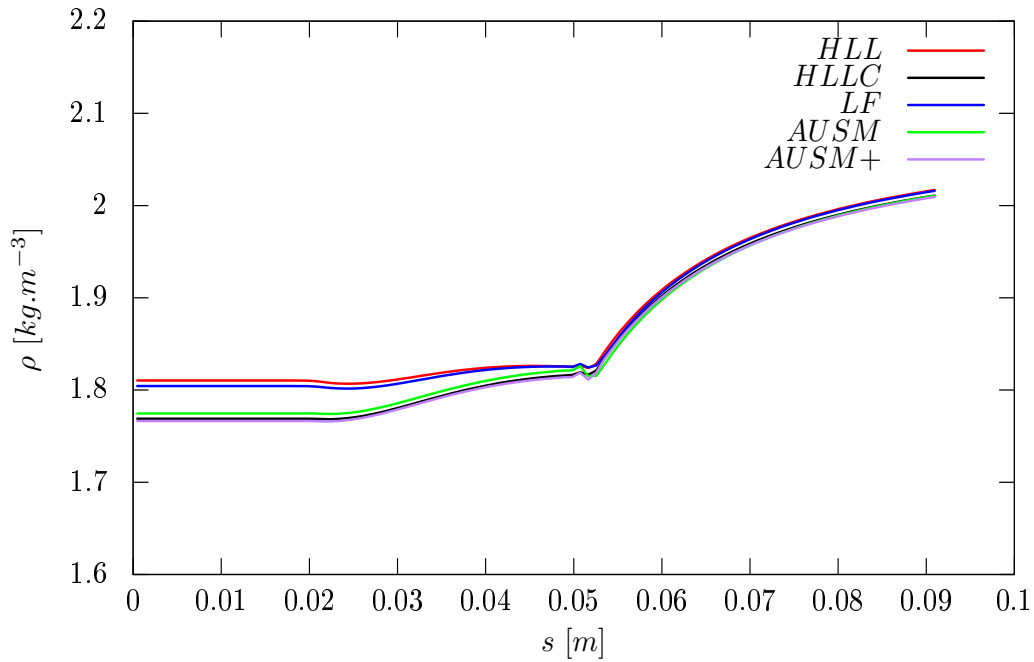
$$\begin{aligned} \dot{m}_{c,in} &= 0.5 \text{ kg.s}^{-1}, \\ T_{s,in} &= 298.15 \text{ K}, \\ \alpha &= 0^\circ, \\ \beta &= 30^\circ. \end{aligned}$$

Na výstupu byla zvolena následující okrajová podmínka

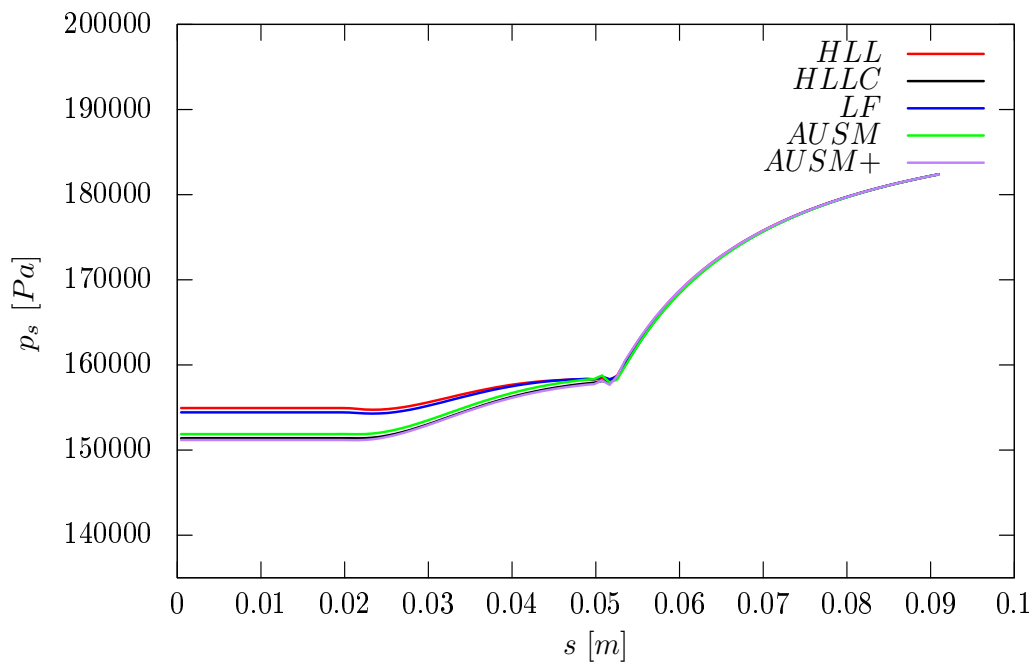
$$p_{s,out} = 182\,385 \text{ Pa}.$$

Výsledky

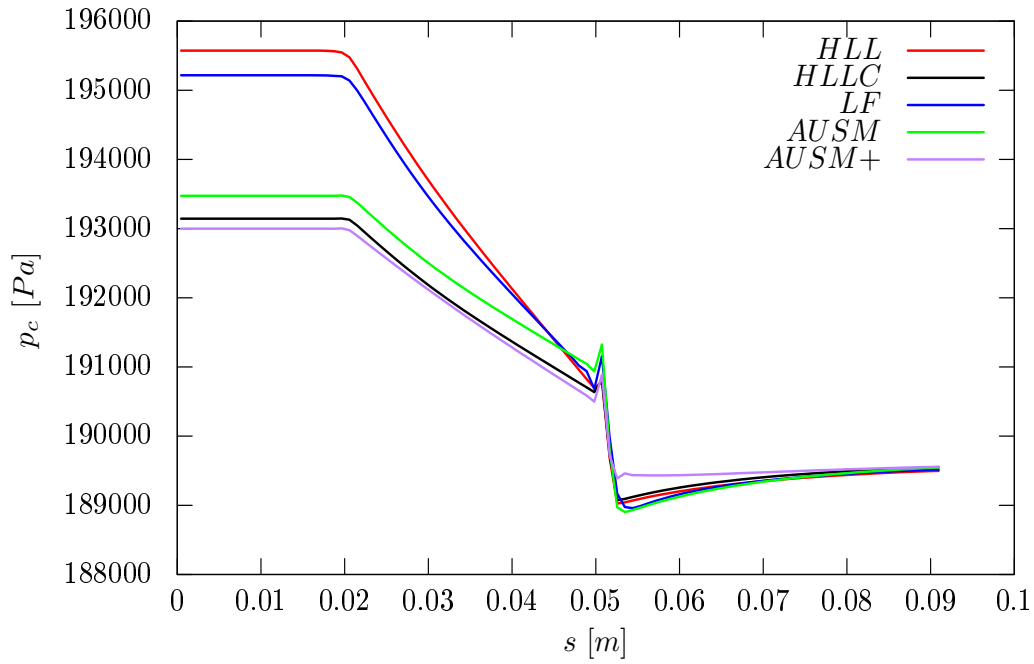
Ani u výsledků simulace varianty II. nedošlo k žádným velkým rozdílům mezi použitými metodami. Nicméně i zde se objevuje ztráta tlaku změnou směru jako u případu I., viz obr. č. (6.16). Jelikož ani u tohoto případu není do systému přiváděna žádná externí energie, projevuje se zde pokles celkového tlaku, viz obr. č. (6.17). V tomto případě byla simulována situace, kdy proud nevstupuje do geometrie kolmo, nýbrž pod úhlem β a z toho důvodu se objevuje v této simulaci i oběžná složka rychlosti u_{φ} , viz obr. č. (6.23). I v tomto případě došlo k rychlé a dobré konvergenci numerické metody, viz obr. č. (6.25). Jelikož v tomto případě nedošlo k signifikantnímu rozdílu mezi jednotlivými metodami, tak ani u této simulace není možné prohlásit, že nějaká konkrétní metoda je pro ni nevhodná.



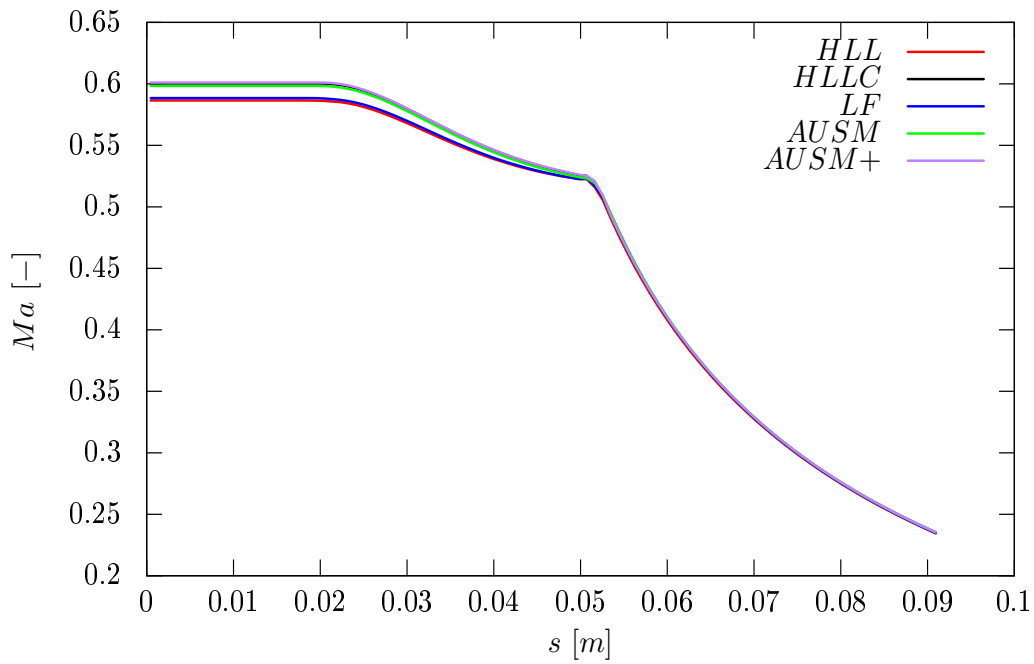
Obrázek 6.15: Průběh hustoty u varianty II.



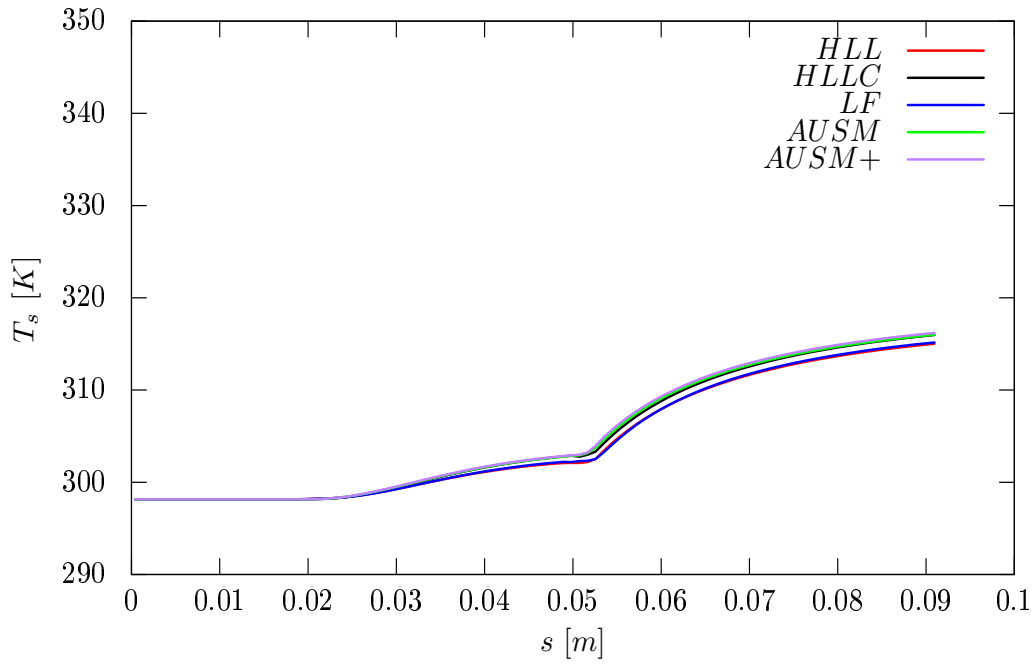
Obrázek 6.16: Průběh statického tlaku u varianty II.



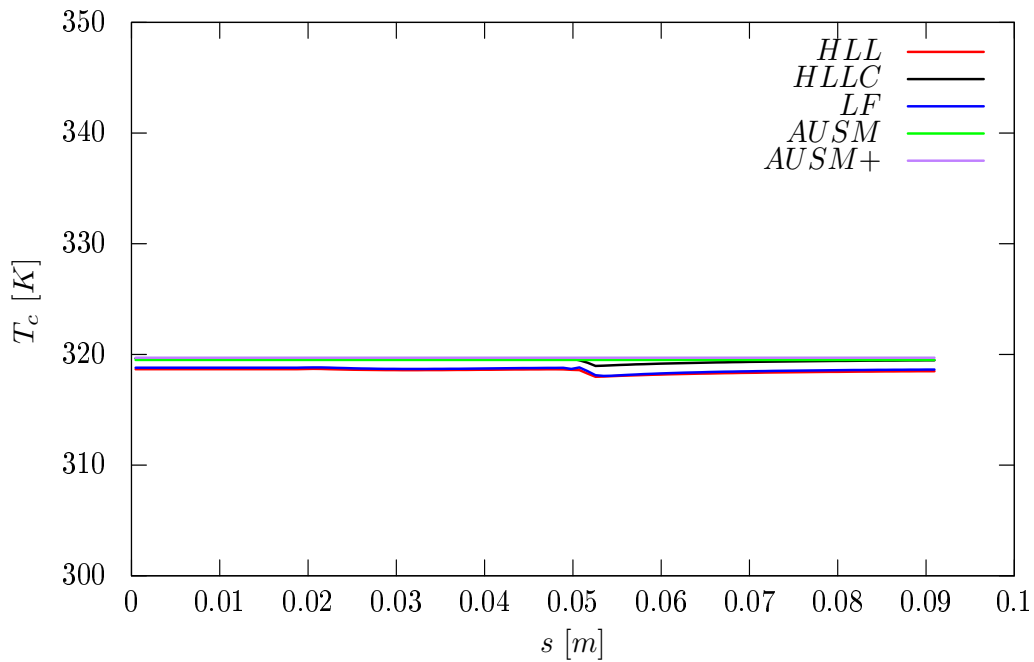
Obrázek 6.17: Průběh celkového tlaku u varianty II.



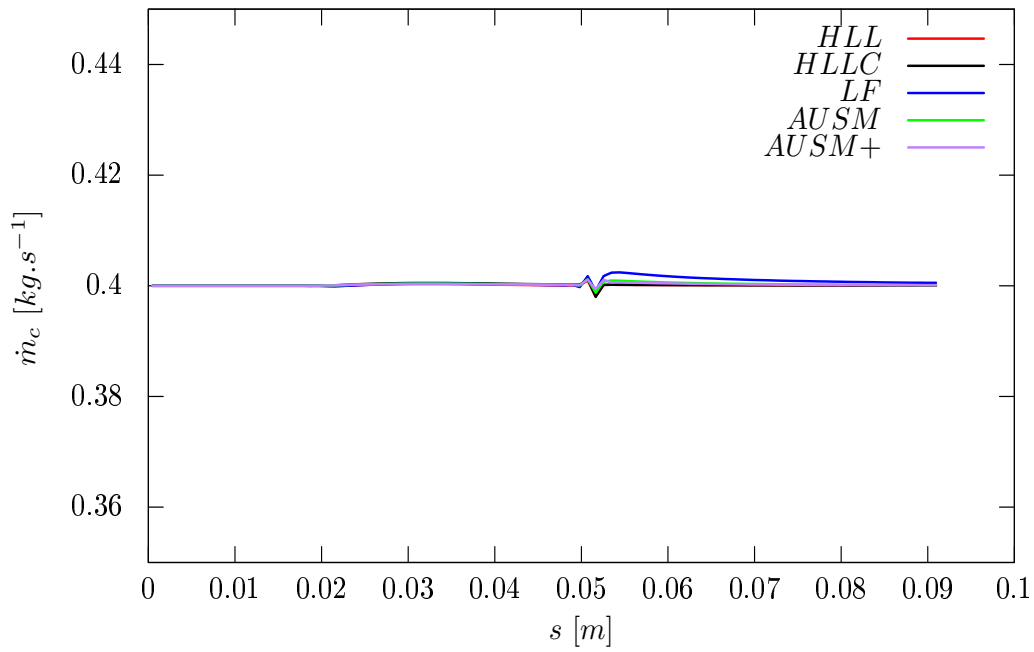
Obrázek 6.18: Průběh Machova čísla u varianty II.



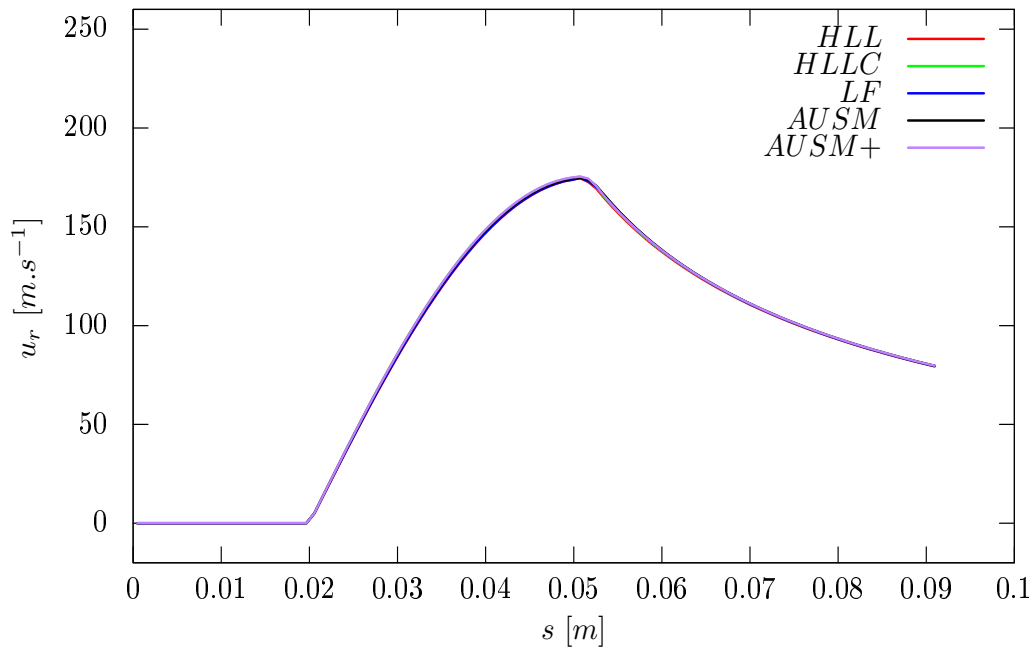
Obrázek 6.19: Průběh statické teploty u varianty II.



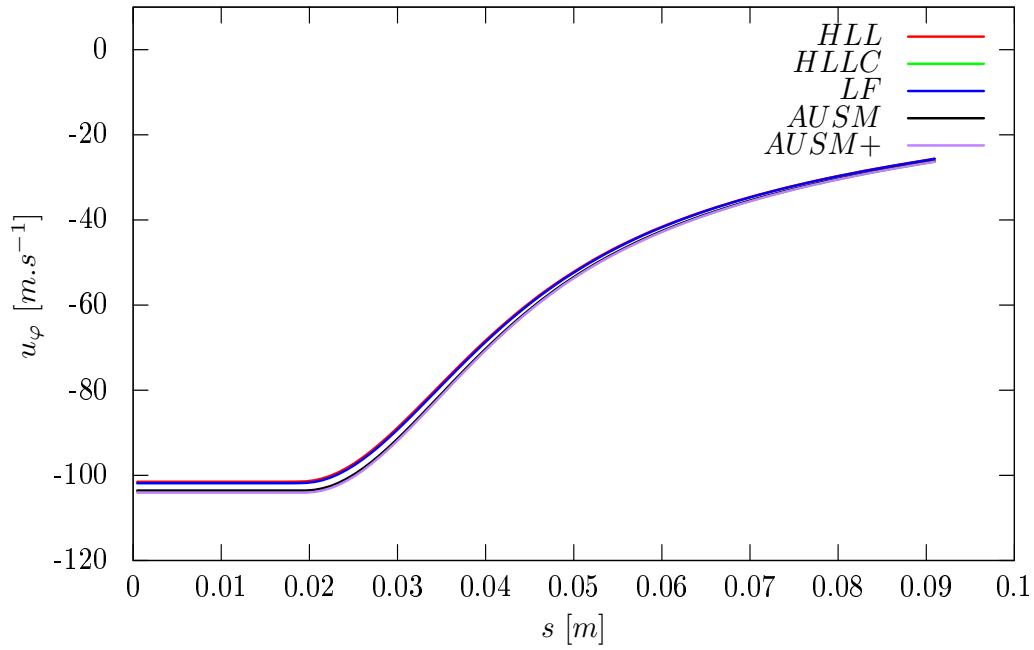
Obrázek 6.20: Průběh celkové teploty u varianty II.



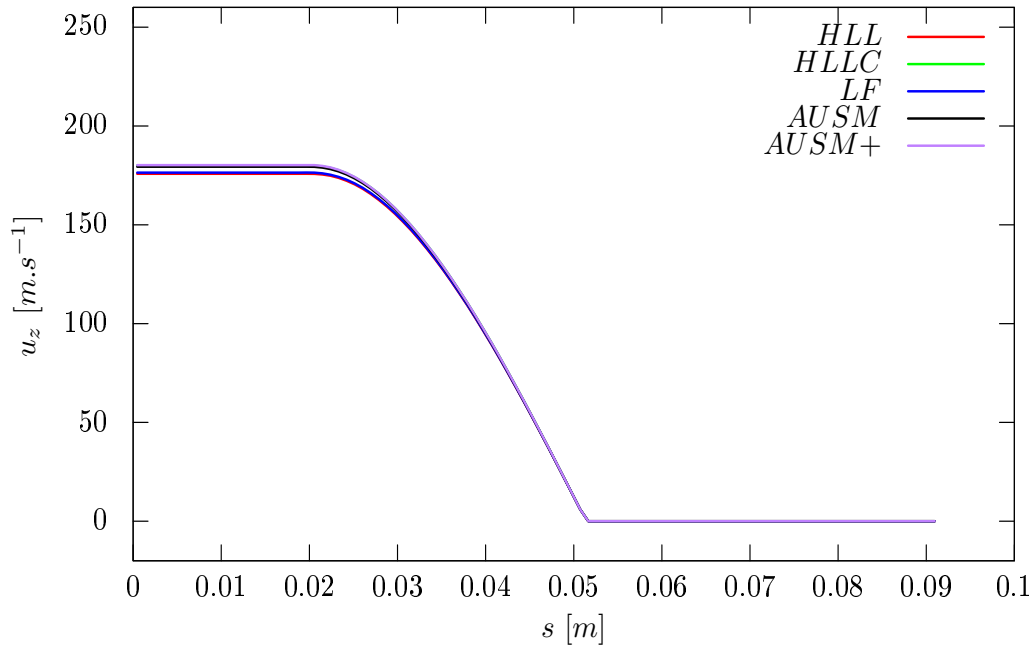
Obrázek 6.21: Průběh hmotnostního toku u varianty II.



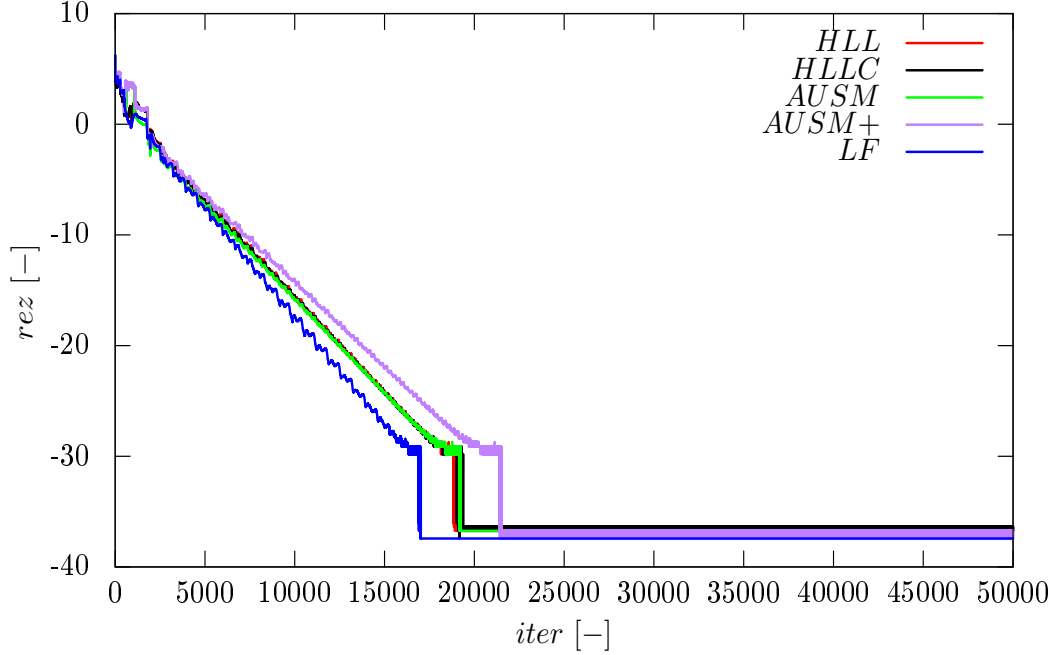
Obrázek 6.22: Průběh radiální rychlosti u varianty II.



Obrázek 6.23: Průběh tangenciální rychlosti u varianty II.



Obrázek 6.24: Průběh axiální rychlosti u varianty II.



Obrázek 6.25: Průběh rezidua u varianty II.

6.8 Varianta III.

V tomto případě byla použita uniformní 1D síť s $n = 100$ buňkami, viz obr. č. (6.4). Rotor byl roztočen na otáčky $\omega = 100\,000 \text{ rpm}$. V této simulaci byly uvažovány lopatky s nulovou tloušťkou. Parametr regulující numerickou vazkost u LF numerického toku byl zvolen na hodnotu $\xi = 0.3$. Skutečnost, že v tomto případě uvažujeme rotorové lopatky rotující s nenulovou úhlovou rychlostí, vedla ke změně zdrojového členu v řešených rovnicích, viz rovnice č. (4.3.17).

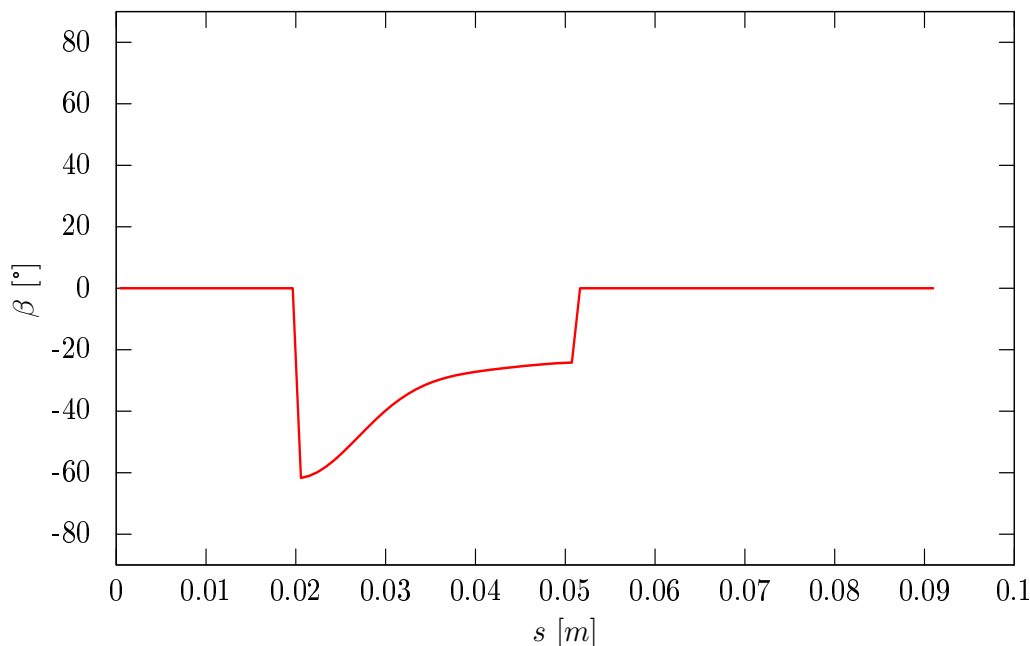
Změna geometrie

Byly přidány rotorové lopatky, které jsou určeny úhlem β , viz obr. č. (6.26) a které vynucují proudění v oběžném směru právě pod úhlem β .

Počáteční podmínky

Počáteční podmínky byly zvoleny na celé oblasti sítě následovně

$$\begin{aligned}
 T_{s,0} &= 273.15 \text{ K}, \\
 p_{s,0} &= 101\,325 \text{ Pa}, \\
 u_{r,0} &= 0 \text{ m.s}^{-1}, \\
 u_{\varphi,0} &= 0 \text{ m.s}^{-1}, \\
 u_{z,0} &= 0 \text{ m.s}^{-1}.
 \end{aligned}$$

Obrázek 6.26: Úhel β

Okrajové podmínky

Na vstupu do kompresoru byly zvoleny následující okrajové podmínky

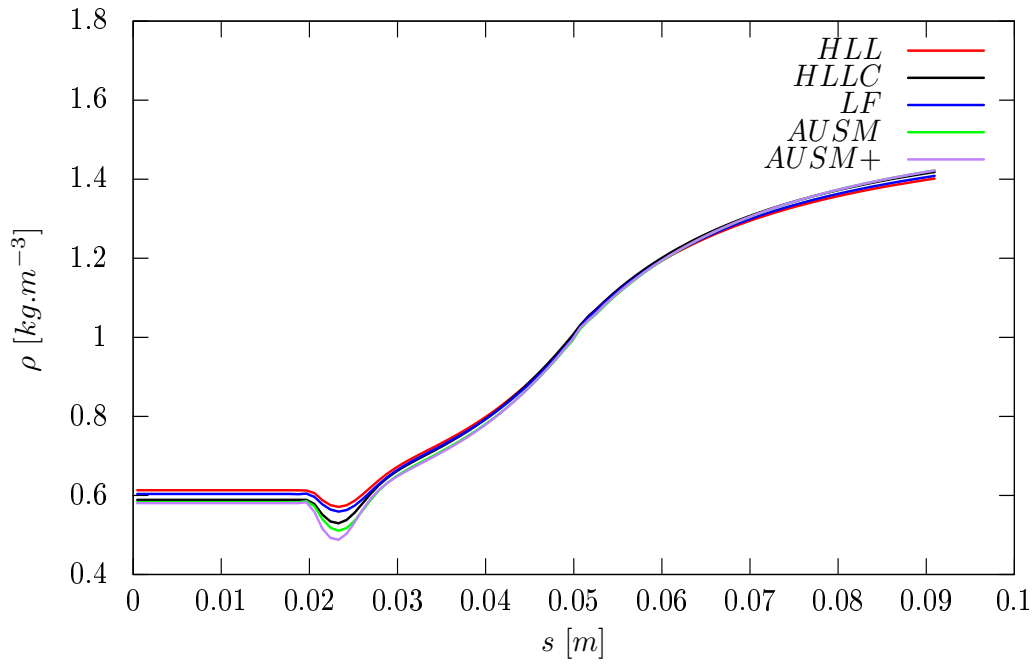
$$\begin{aligned}\dot{m}_{c,in} &= 0.1 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}, \\ T_{s,in} &= 298.15 \text{ K}, \\ \alpha &= 0^\circ, \\ \beta &= 0^\circ.\end{aligned}$$

Na výstupu byla zvolena následující okrajová podmínka

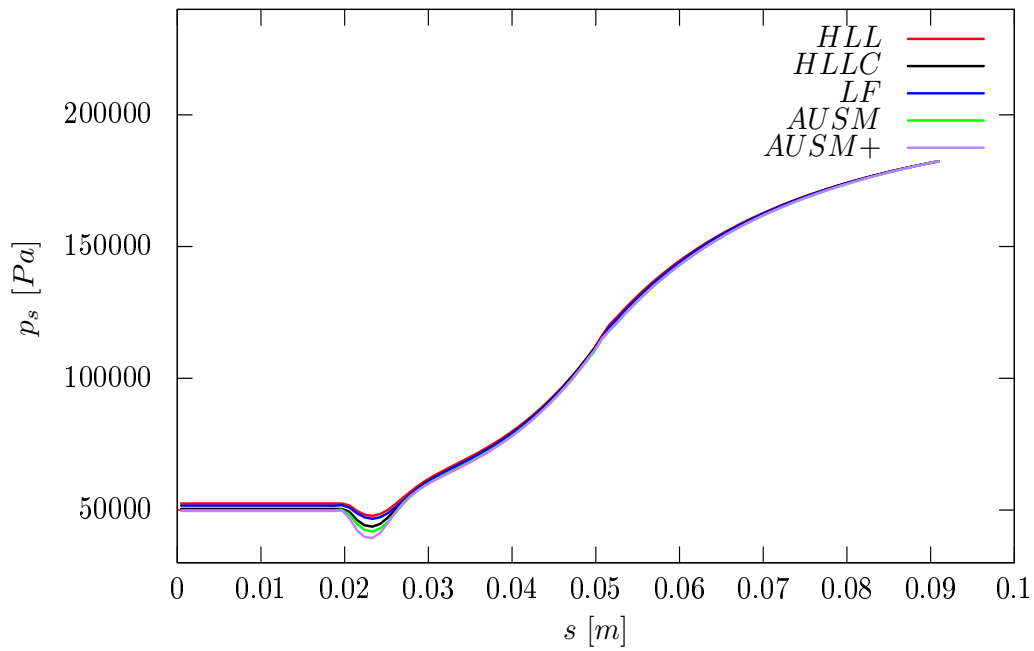
$$p_{s,out} = 182\,385 \text{ Pa}.$$

Výsledky

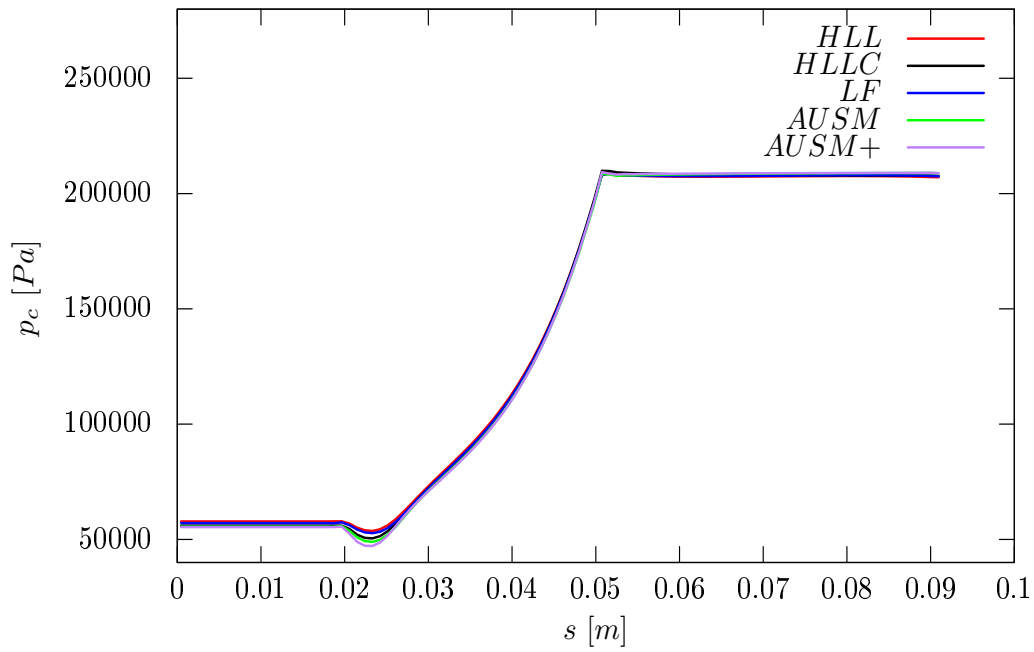
V případě III. se všechny získané výsledky velice dobře shodují. Jelikož je do systému dodávána energie, můžeme pozorovat nárůst celkového tlaku, viz obr. č. (6.29). V difuzoru je poté celkový tlak konstantní, protože neuvažujeme ztrátový model. Z obr. č. (6.38) vyplývá, že numerická simulace zkonvergovala relativně rychle a dobře. Na obr. č. (6.37) je dobře patrné, že proud jde skutečně ve směru určeném lopatkami. Na průběhu hmotnostního toku, viz obr. č. (6.33), je vidět, že schémata typu AUSM (AUMS+) simulují daný problém nejpřesněji. Na všech výsledcích této simulace je v oblasti vstupu do oběžného kola pozorovatelná oscilace v řešení. Tento jev je způsoben nevhodným náběžným úhlem na lopatky. Tato skutečnost by v praxi znamenala ztrátu účinnosti kompresoru.



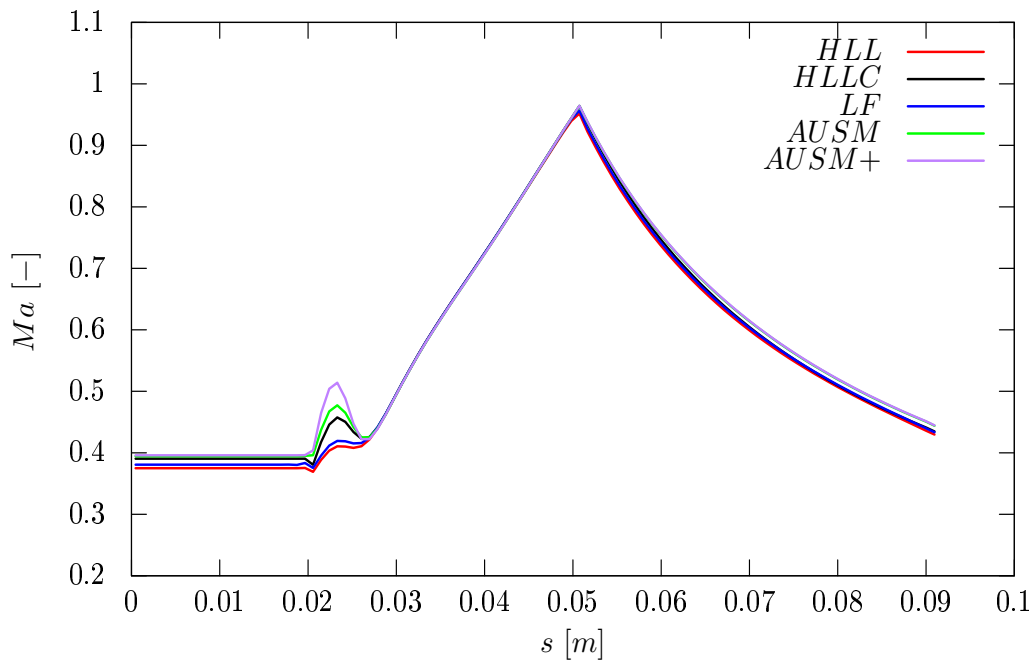
Obrázek 6.27: Průběh hustoty u varianty III.



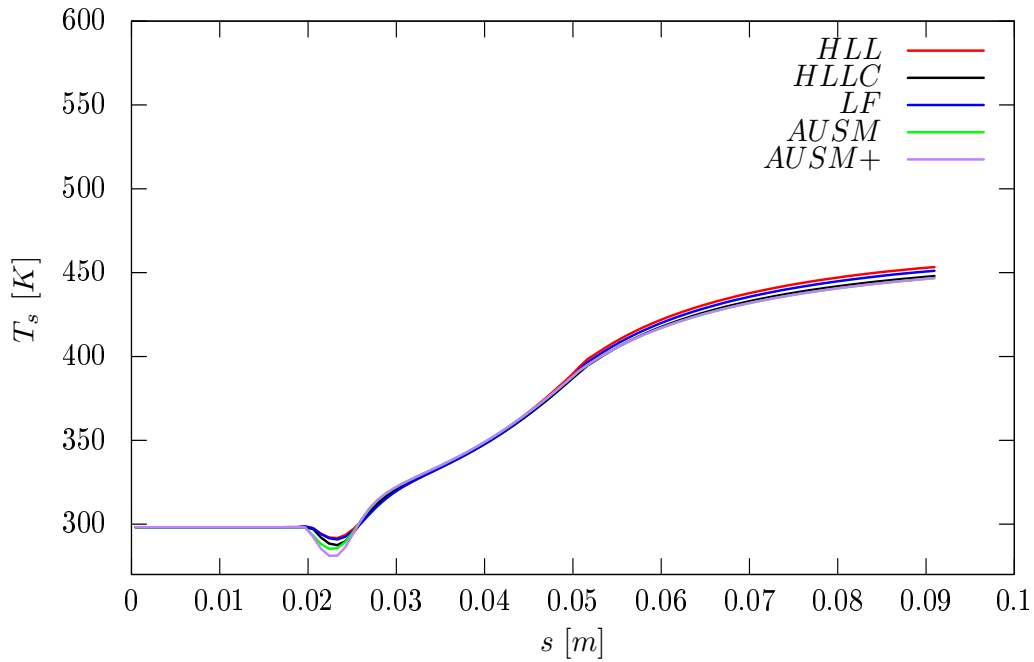
Obrázek 6.28: Průběh statického tlaku u varianty III.



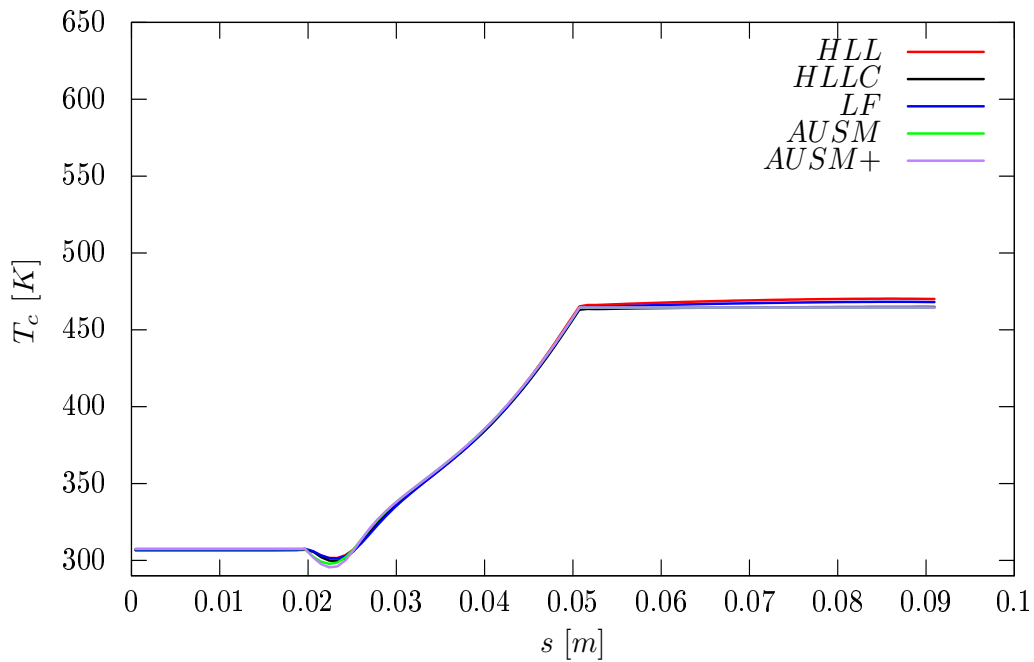
Obrázek 6.29: Průběh celkového tlaku u varianty III.



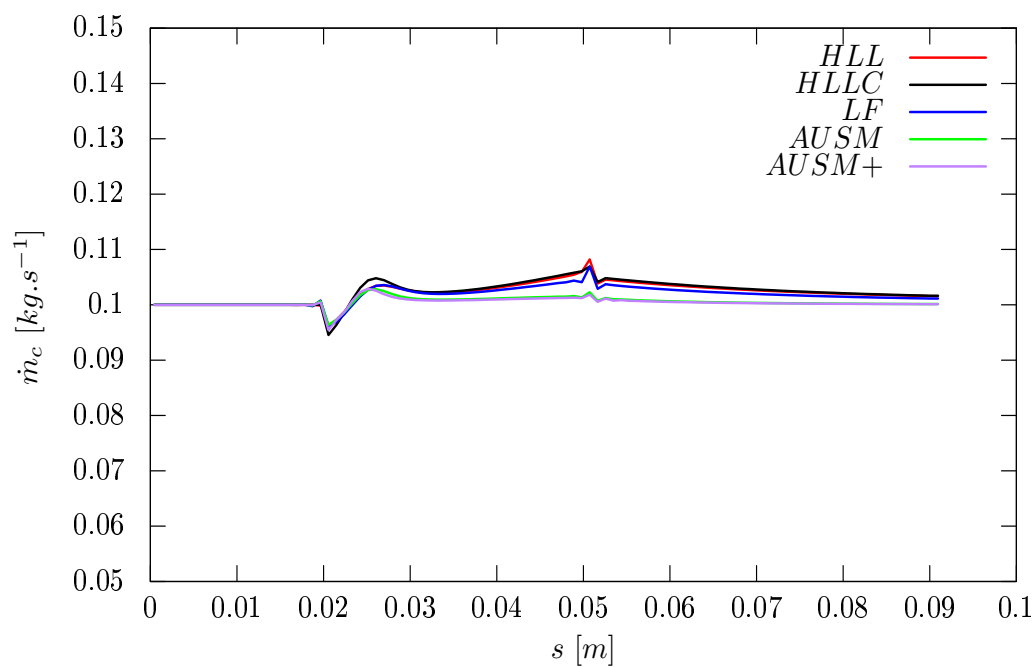
Obrázek 6.30: Průběh Machova čísla u varianty III.



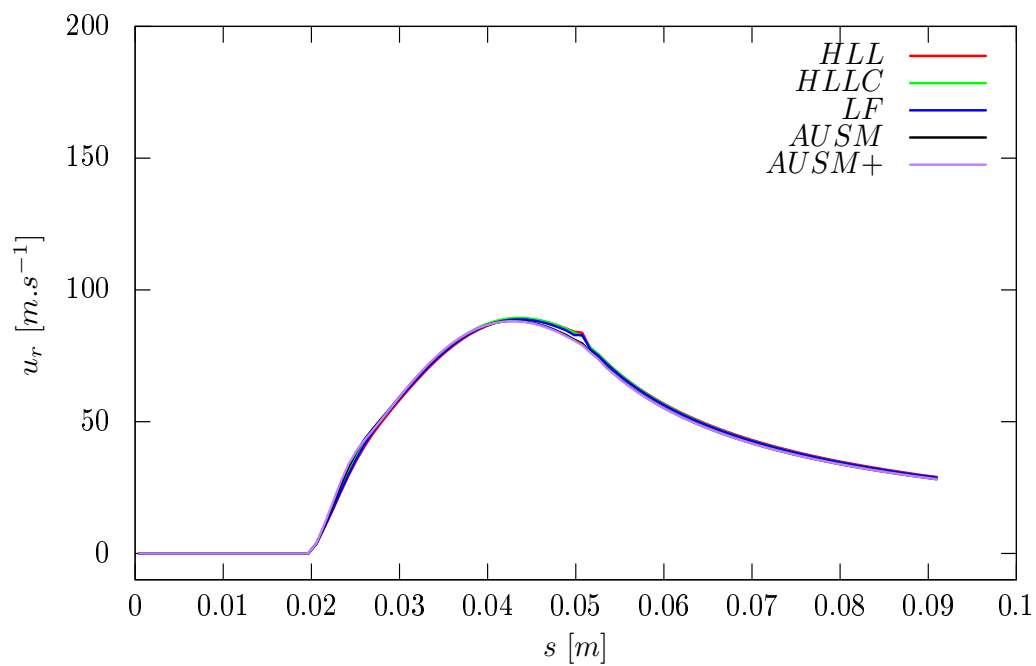
Obrázek 6.31: Průběh statické teploty u varianty III.



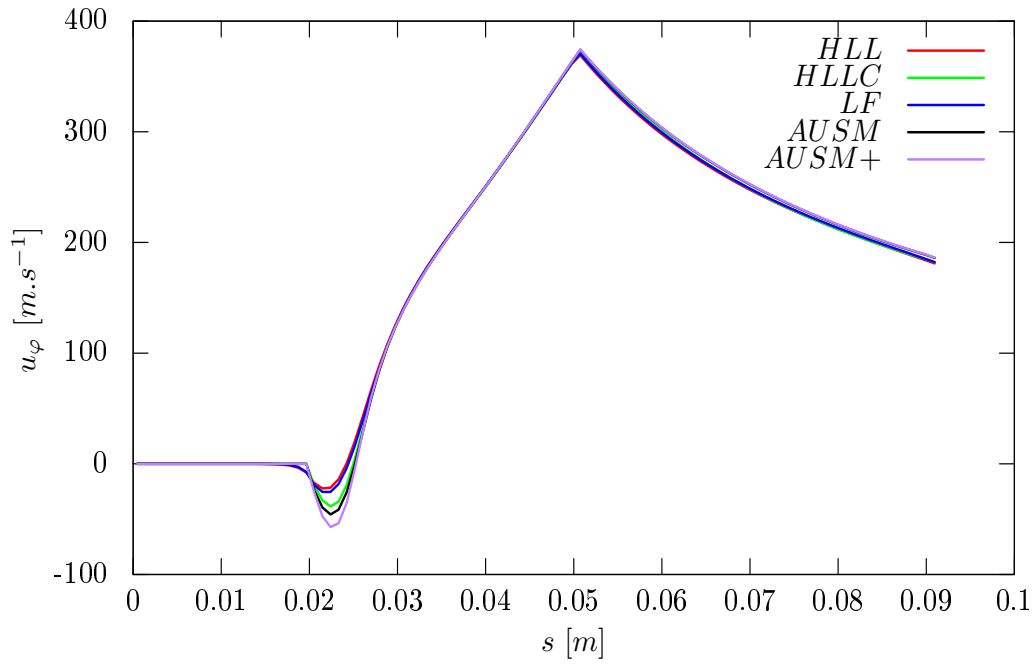
Obrázek 6.32: Průběh celkové teploty u varianty III.



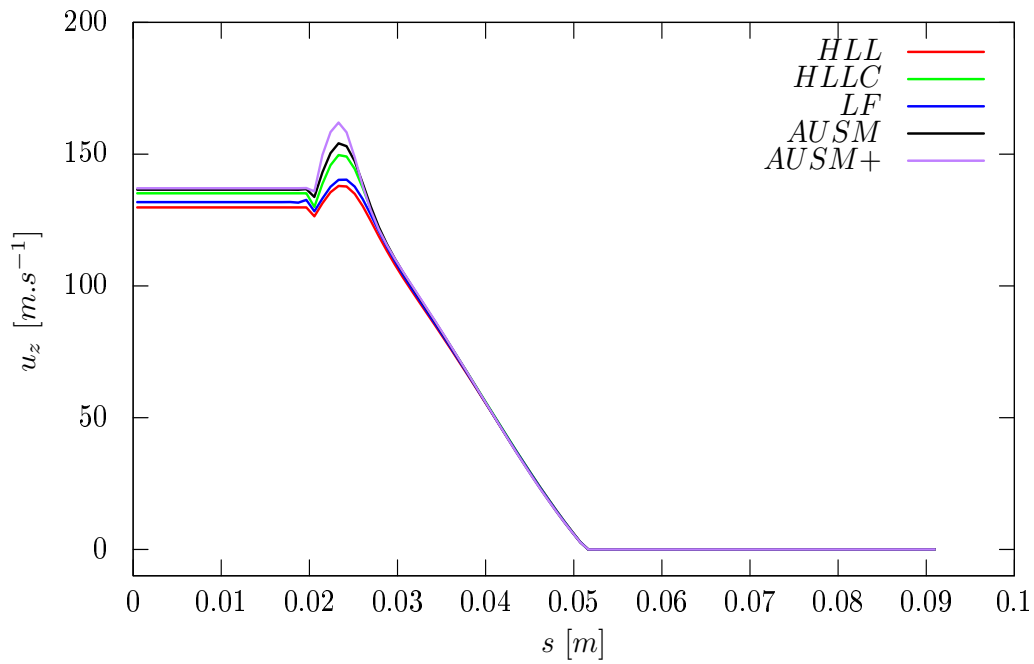
Obrázek 6.33: Průběh hmotnostního toku u varianty III.



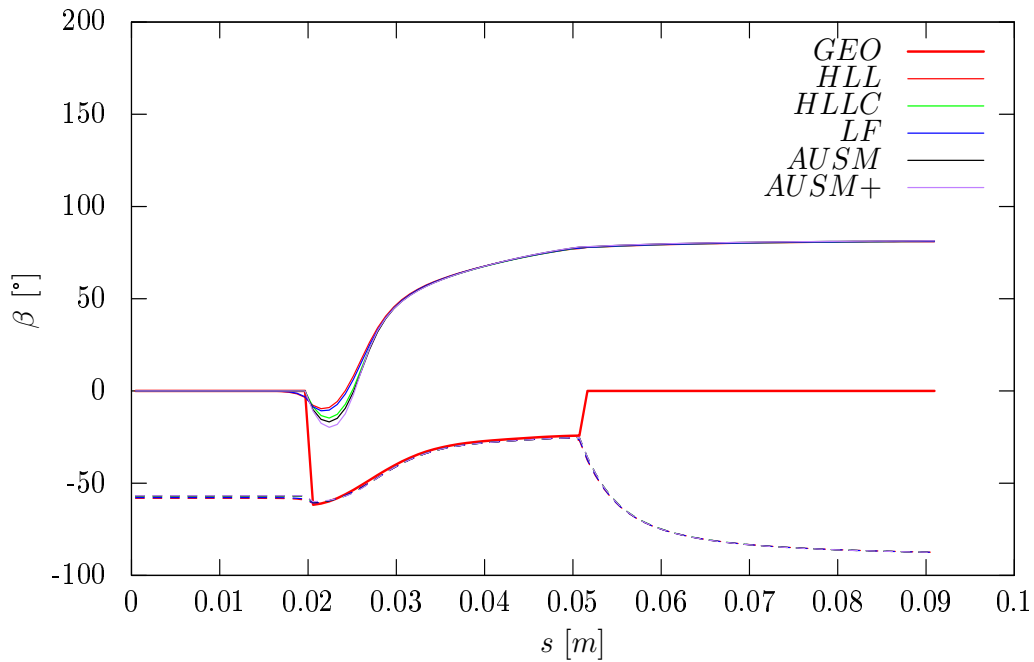
Obrázek 6.34: Průběh radiální rychlosti u varianty III.



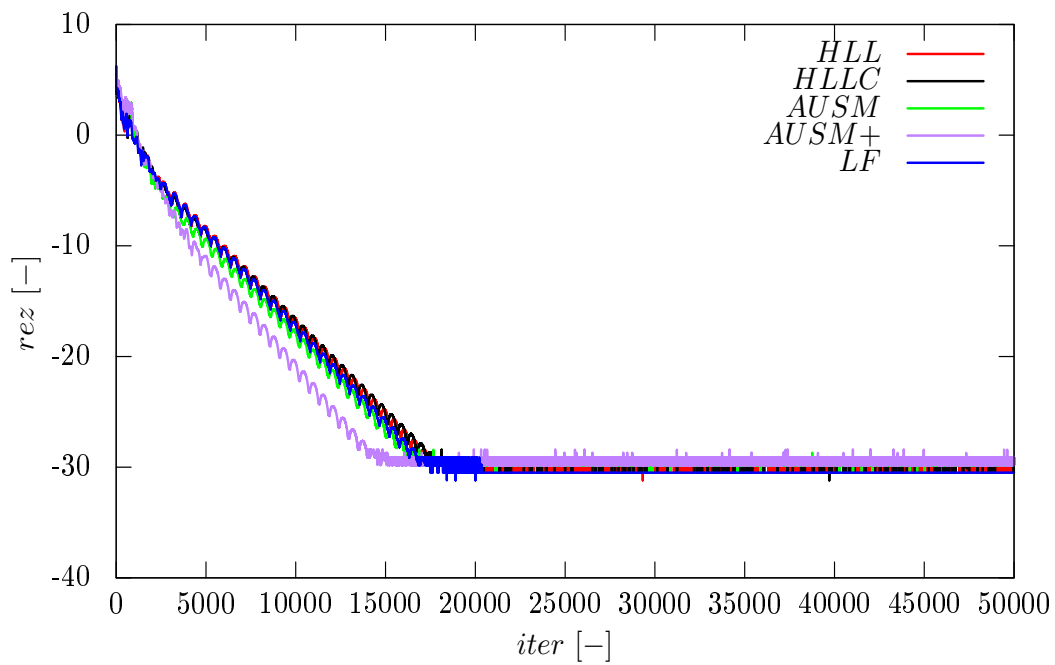
Obrázek 6.35: Průběh tangenciální rychlosti u varianty III.



Obrázek 6.36: Průběh axiální rychlosti u varianty III.



Obrázek 6.37: Průběh úhlu β u varianty III. (absolutní úhel je značen plnou čarou, relativní čárkovanou)



Obrázek 6.38: Průběh rezidua u varianty III.

6.9 Varianta IV.

V tomto případě byla použita uniformní 1D síť s $n = 100$ buňkami, viz obr. č. (6.4). Rotor byl roztočen na otáčky $\omega = 100\,000 \text{ rpm}$. Navíc v tomto případě bylo zohledněno odtrhávání proudu na lopatkách rotoru, které bylo modelováno pomocí vztahu č. (2.6.1). Počet lopatek byl s ohledem na rovnici č. (2.6.1) zvolen na $z = 14$. V této simulaci uvažujeme lopatky s nulovou tloušťkou. Parametr regulující numerickou vazkost u LF numerického toku byl zvolen na hodnotu $\xi = 0.3$.

Počáteční podmínky

Počáteční podmínky byly zvoleny na celé oblasti sítě následovně

$$\begin{aligned} T_{s,0} &= 273.15 \text{ K}, \\ p_{s,0} &= 101\,325 \text{ Pa}, \\ u_{r,0} &= 0 \text{ m.s}^{-1}, \\ u_{\varphi,0} &= 0 \text{ m.s}^{-1}, \\ u_{z,0} &= 0 \text{ m.s}^{-1}. \end{aligned}$$

Okrajové podmínky

Na vstupu do kompresoru byly zvoleny následující okrajové podmínky

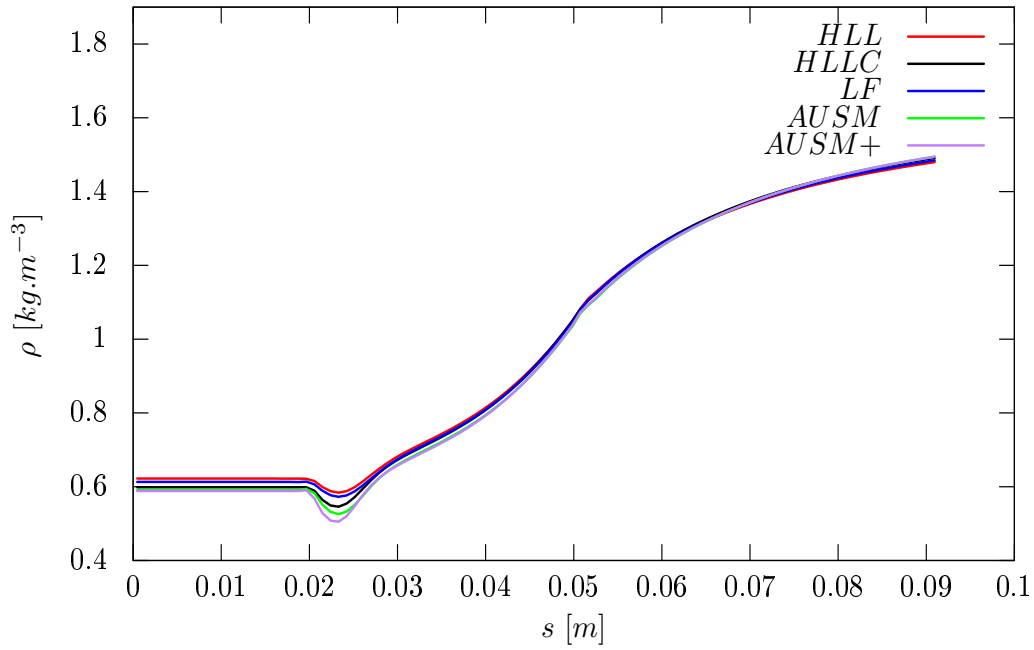
$$\begin{aligned} \dot{m}_{c,in} &= 0.1 \text{ kg.s}^{-1}, \\ T_{s,in} &= 298.15 \text{ K}, \\ \alpha &= 0^\circ, \\ \beta &= 0^\circ. \end{aligned}$$

Na výstupu byla zvolena následující okrajová podmínka

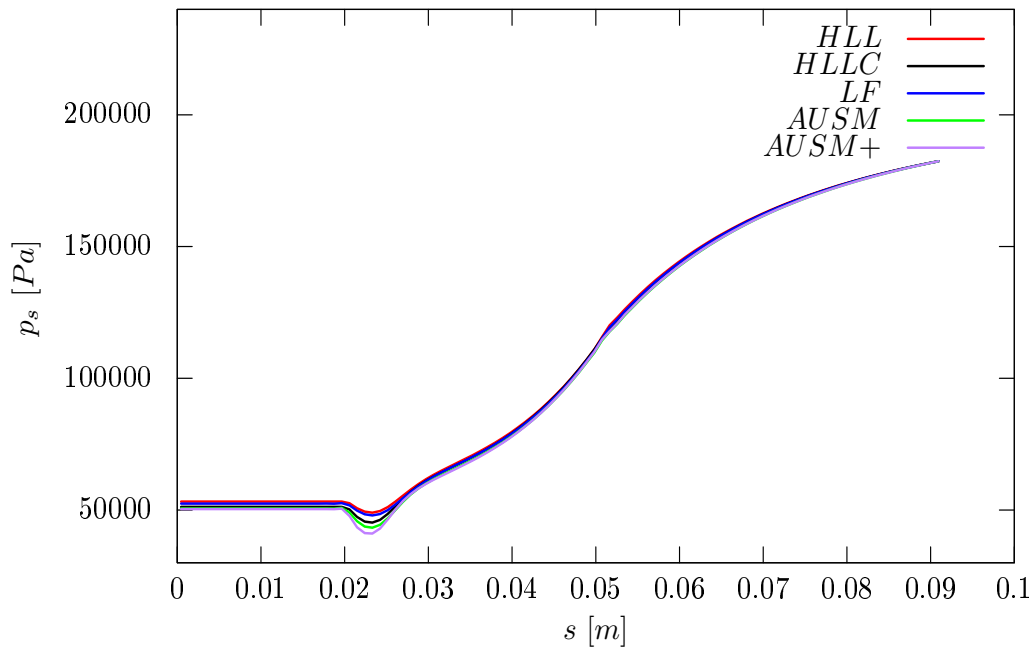
$$p_{s,out} = 182\,385 \text{ Pa}.$$

Výsledky

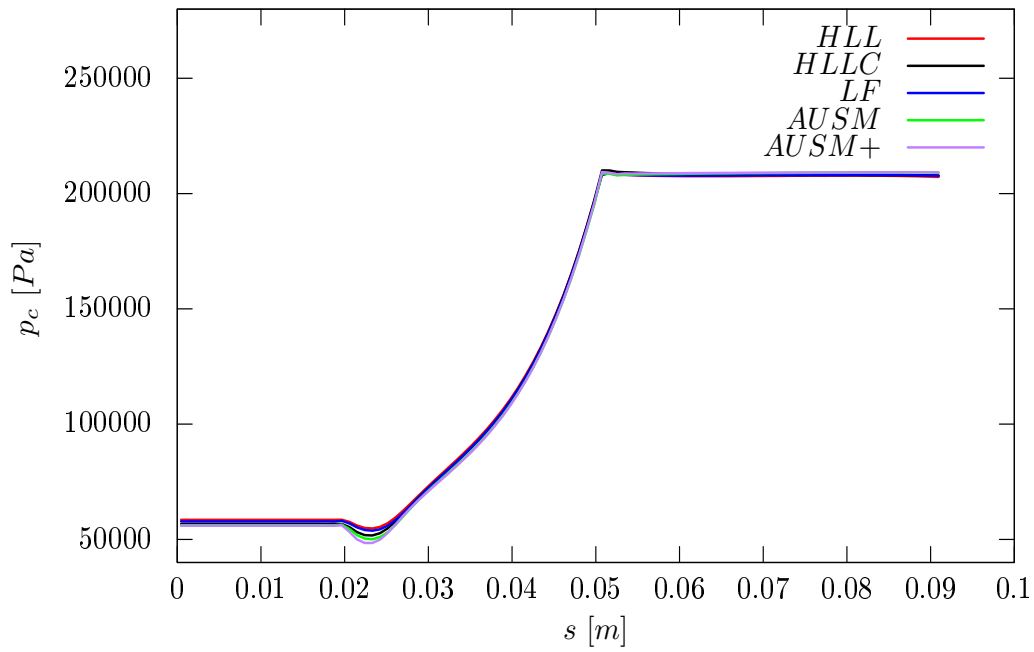
Z dosažených výsledků vyplývá, že numerické simulace provedená s různými numerickými toky se velice dobře vzájemně shodují, tudíž zde nedošlo k významné odchylce, nicméně z obr. č. (6.45) lze vidět, že schémata typu AUSM (AUSM+) modelují daný problém nejpřesněji. Na obr. č. (6.41) je vidět, že celkový tlak roste, jelikož je do systému přiváděna energie. Na obr. č. (6.49) je dobře pozorovatelné odtrhávání proudu od lopatky rotoru. Z obr. č. (6.49) dále vyplývá, že plyn protéká difuzorem pod úhlem $\beta \approx 80^\circ$, což má u reálného kompresoru nepříznivý účinek na účinnost. Z průběhu rezidua, viz obr. č. (6.50), lze soudit, že numerická metoda zkonvergovala dobře a relativně rychle.



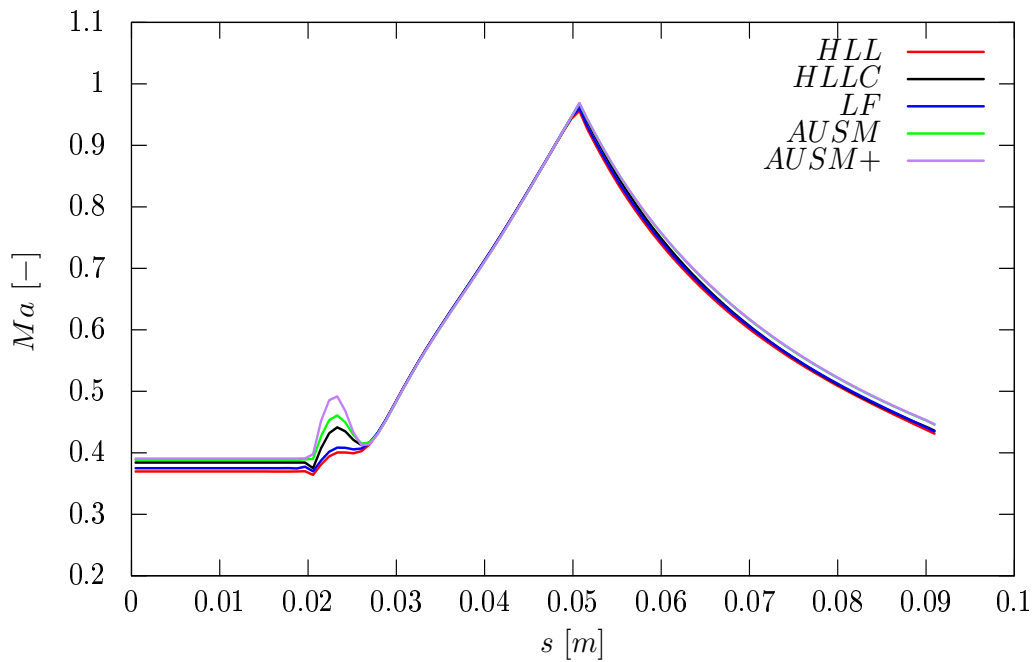
Obrázek 6.39: Průběh hustoty u varianty IV.



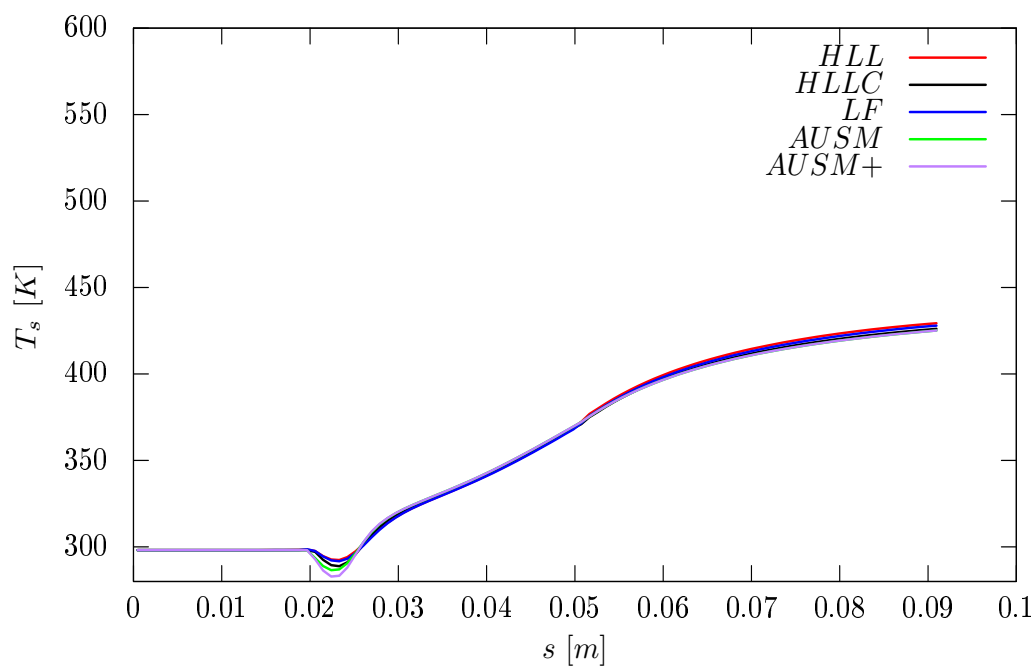
Obrázek 6.40: Průběh statického tlaku u varianty IV.



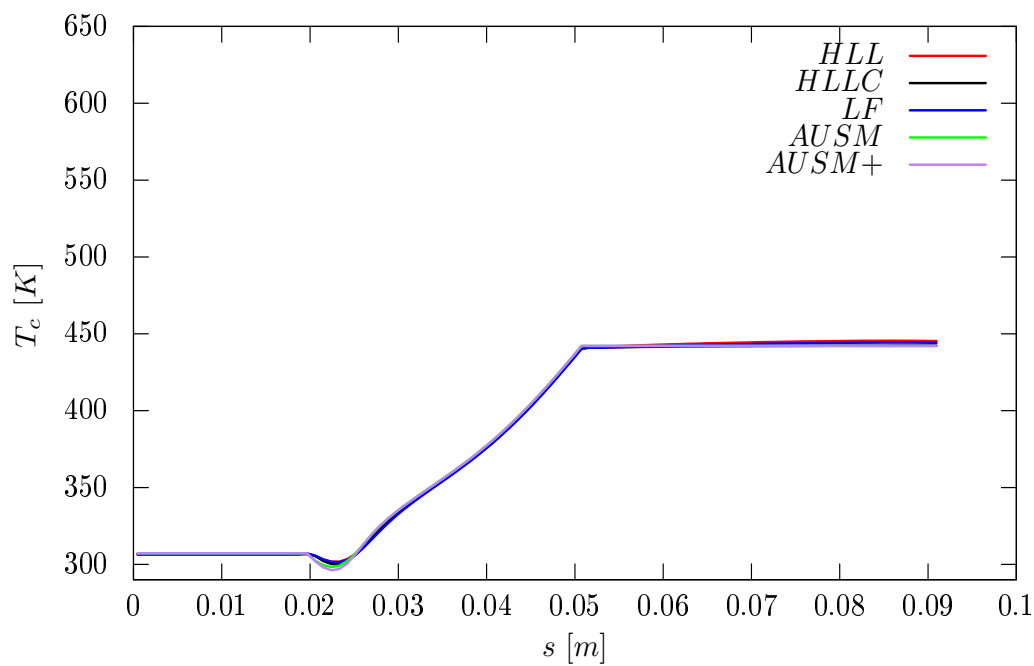
Obrázek 6.41: Průběh celkového tlaku u varianty IV.



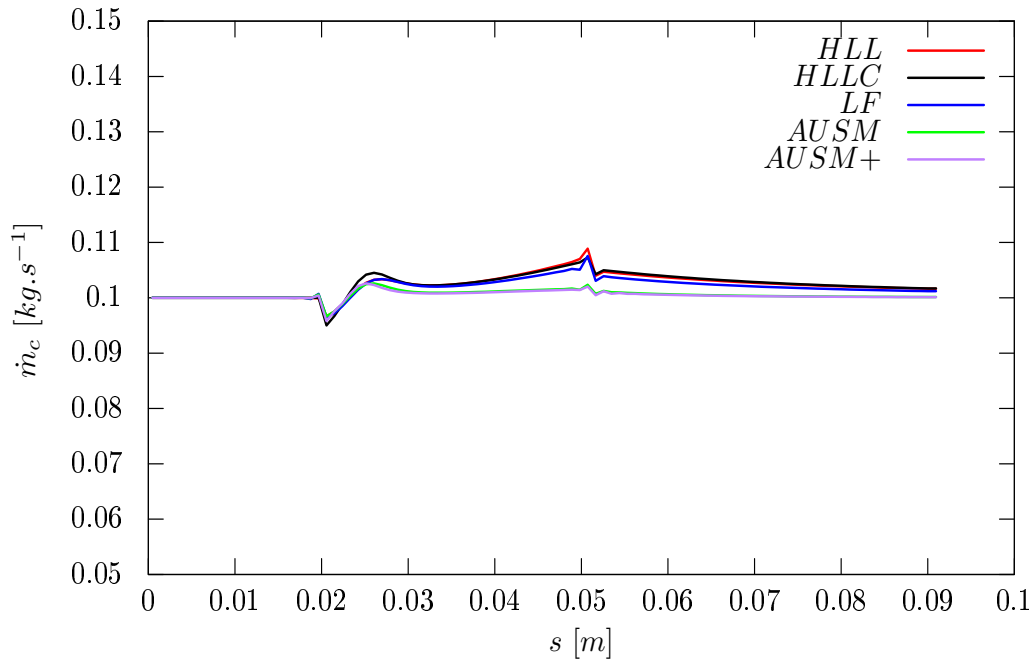
Obrázek 6.42: Průběh Machova čísla u varianty IV.



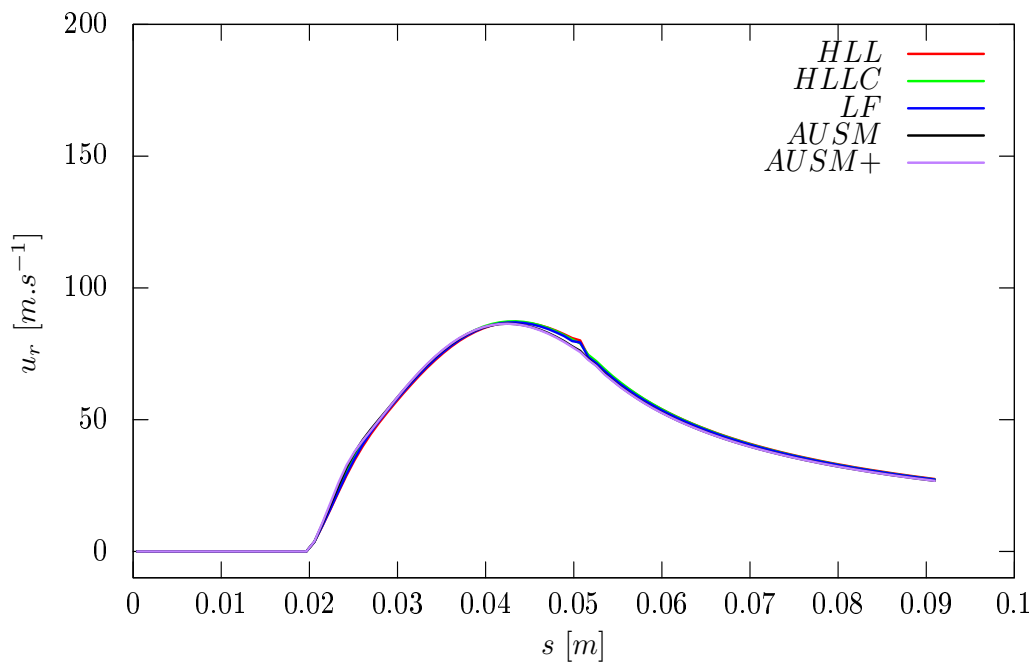
Obrázek 6.43: Průběh statické teploty u varianty IV.



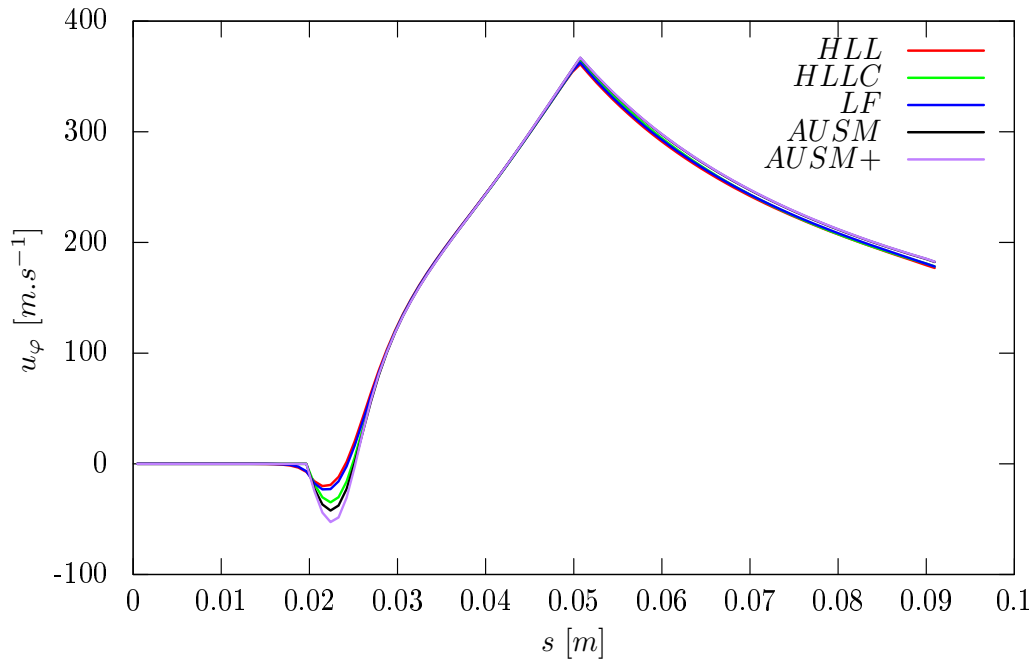
Obrázek 6.44: Průběh celkové teploty u varianty IV.



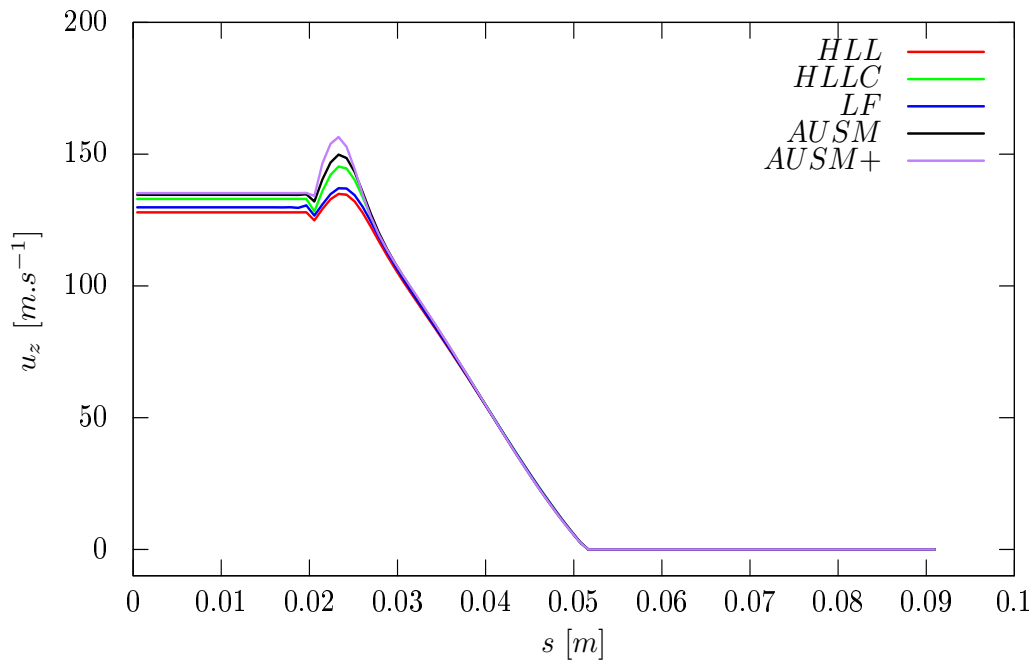
Obrázek 6.45: Průběh hmotnostního toku u varianty IV.



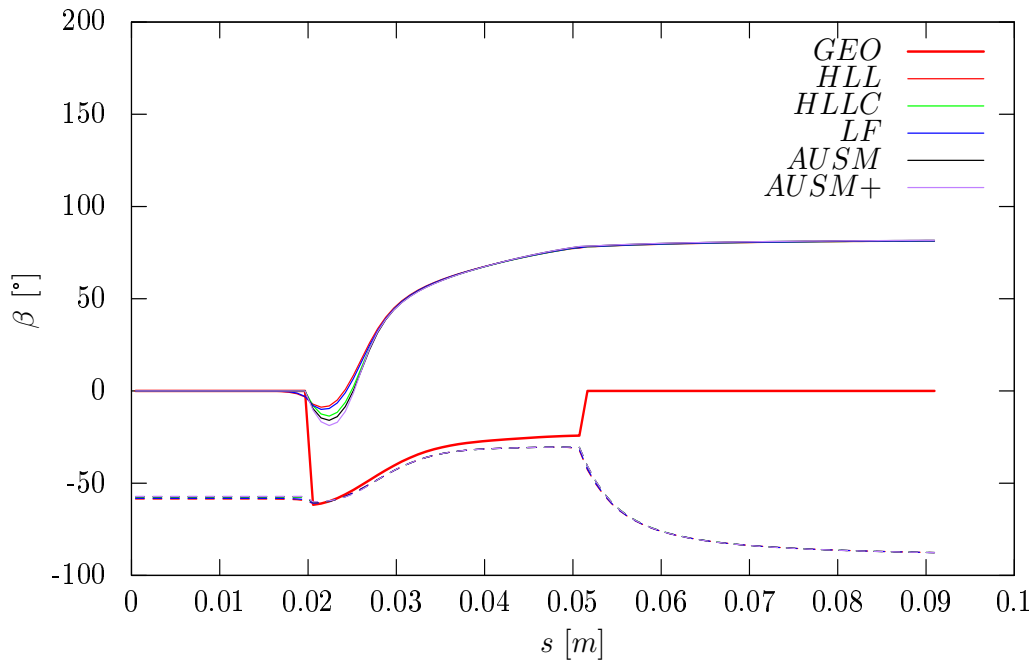
Obrázek 6.46: Průběh radiální rychlosti u varianty IV



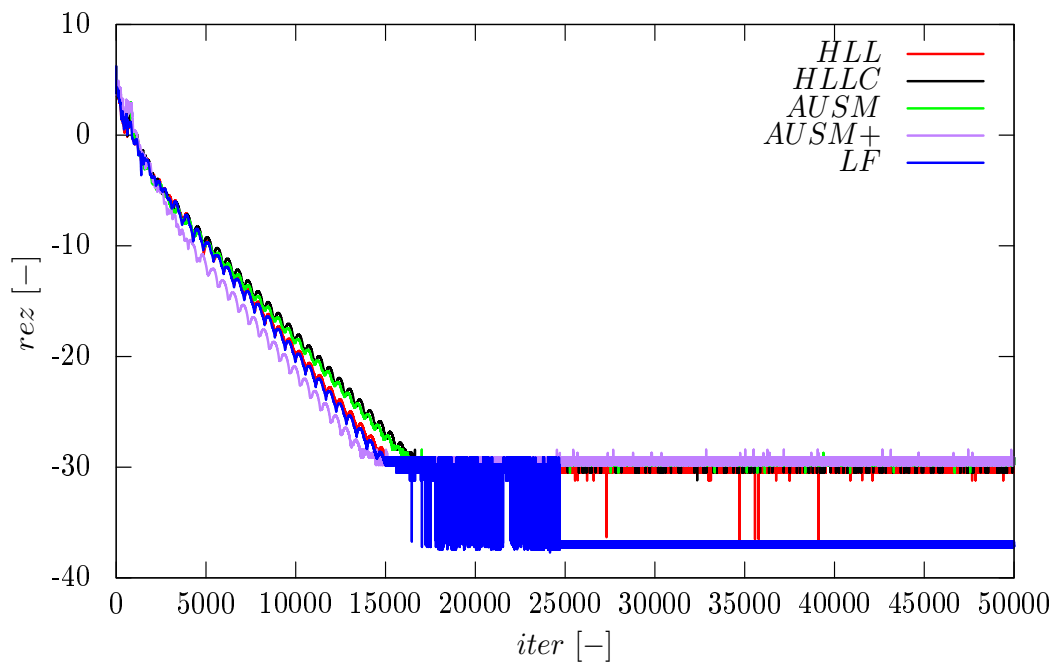
Obrázek 6.47: Průběh tangenciální rychlosti u varianty IV.



Obrázek 6.48: Průběh axiální rychlosti u varianty IV.



Obrázek 6.49: Průběh úhlu β u varianty IV. (absolutní úhel je značen plnou čarou, relativní čárkovanou)



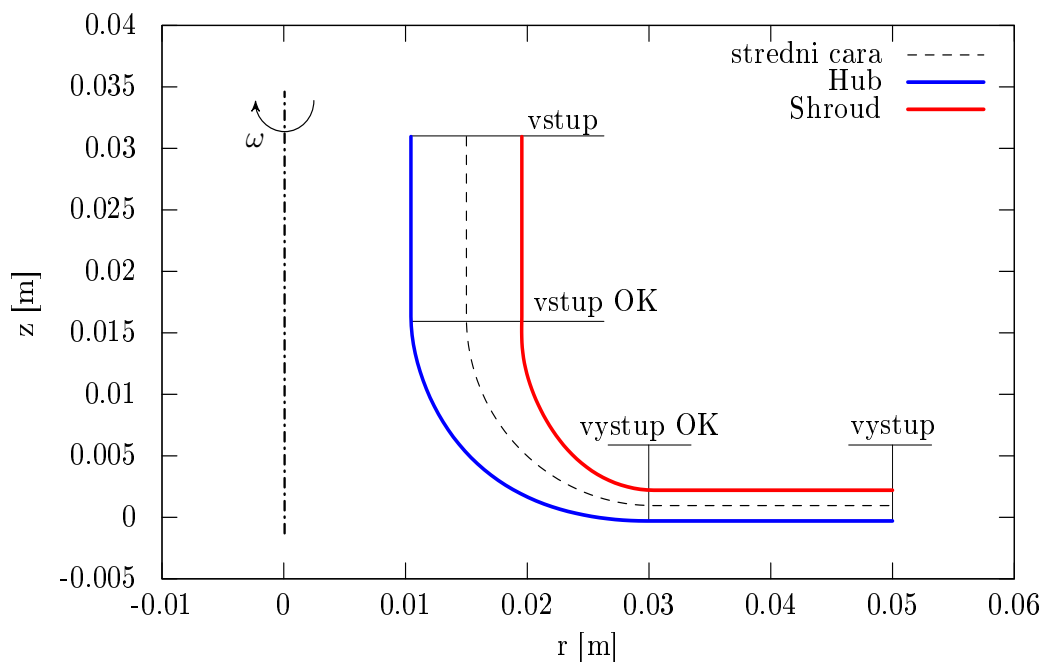
Obrázek 6.50: Průběh rezidua u varianty IV.

6.10 Varianta V.

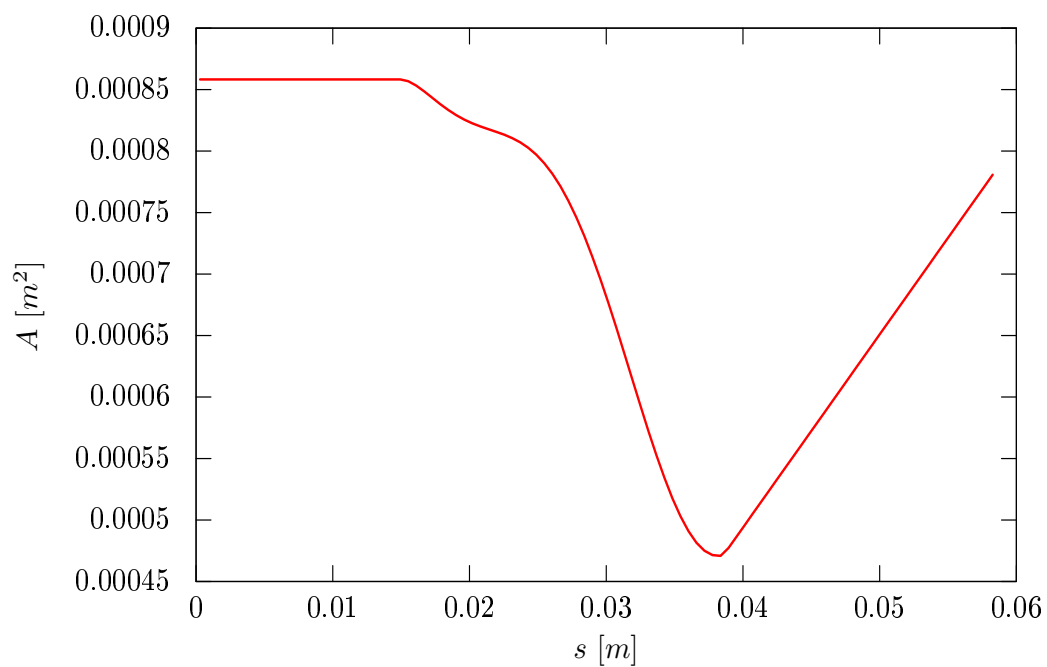
V tomto případě byla použita uniformní 1D síť s $n = 100$ buňkami, viz obr. č. (6.4). Rotor byl roztočen na otáčky $\omega = 100\,000\text{ rmp}$. V tomto případě bylo taktéž zohledněno odtrhávání proudu na lopátkách rotoru. V této simulaci uvažujeme lopatky s nulovou tloušťkou. Počet lopatek zůstal stejný jako v předchozím případě. Parametr regulující numerickou vazkost u LF numerického toku byl zvolen na hodnotu $\xi = 0.3$.

Změna geometrie

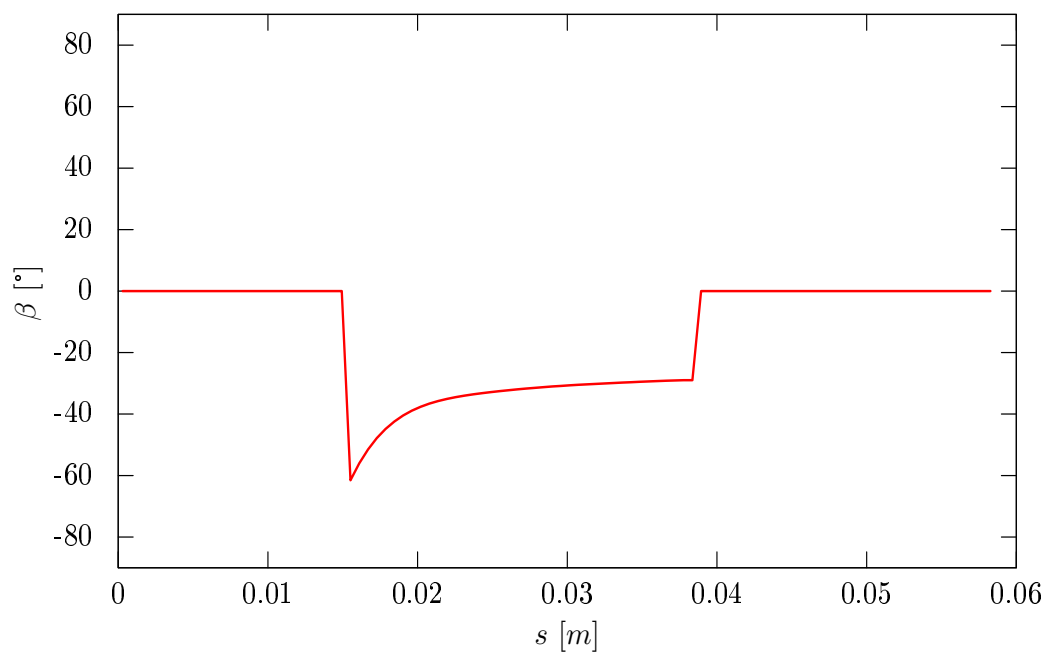
V tomto případě byla změněna geometrie tak, aby více odpovídala skutečnému radiálnímu kompresoru, viz obr. č. (6.51). Z tohoto obrázku je patrné, že voluta stále není součástí simulace. Touto změnou se změnil i průběh velikostí ploch v závislosti na křivočaré souřadnici s , viz obr. č. (6.52). V neposlední řadě došlo i ke změně úhlu β lopatek oběžného kola, viz obr. č. (6.53).



Obrázek 6.51: Nová geometrie radiálního kompresoru



Obrázek 6.52: Průběh ploch průřezů

Obrázek 6.53: Průběh úhlu β

Počáteční podmínky

Počáteční podmínky byly zvoleny na celé oblasti sítě následovně

$$\begin{aligned} T_{s,0} &= 273.15 \text{ K}, \\ p_{s,0} &= 101\,325 \text{ Pa}, \\ u_{r,0} &= 0 \text{ m.s}^{-1}, \\ u_{\varphi,0} &= 0 \text{ m.s}^{-1}, \\ u_{z,0} &= 0 \text{ m.s}^{-1}. \end{aligned}$$

Okrajové podmínky

Na vstupu do kompresoru byla zvoleny následující okrajové podmínky

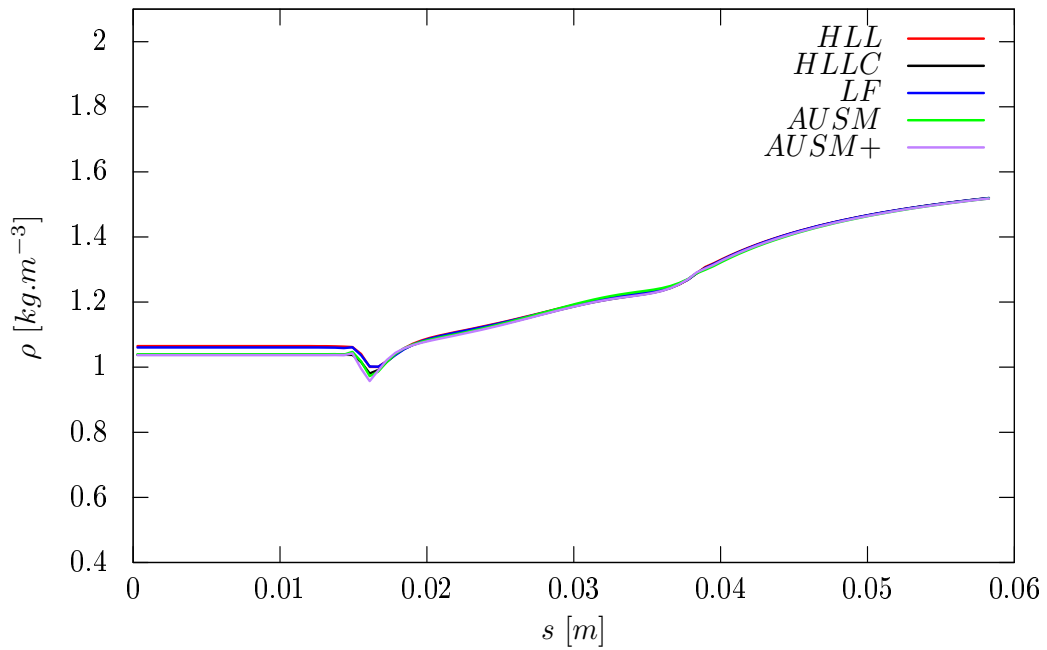
$$\begin{aligned} \dot{m}_{c,in} &= 0.1 \text{ kg.s}^{-1}, \\ T_{s,in} &= 298.15 \text{ K}, \\ \alpha &= 0^\circ, \\ \beta &= 0^\circ. \end{aligned}$$

Na výstupu byla zvolena následující okrajová podmínka

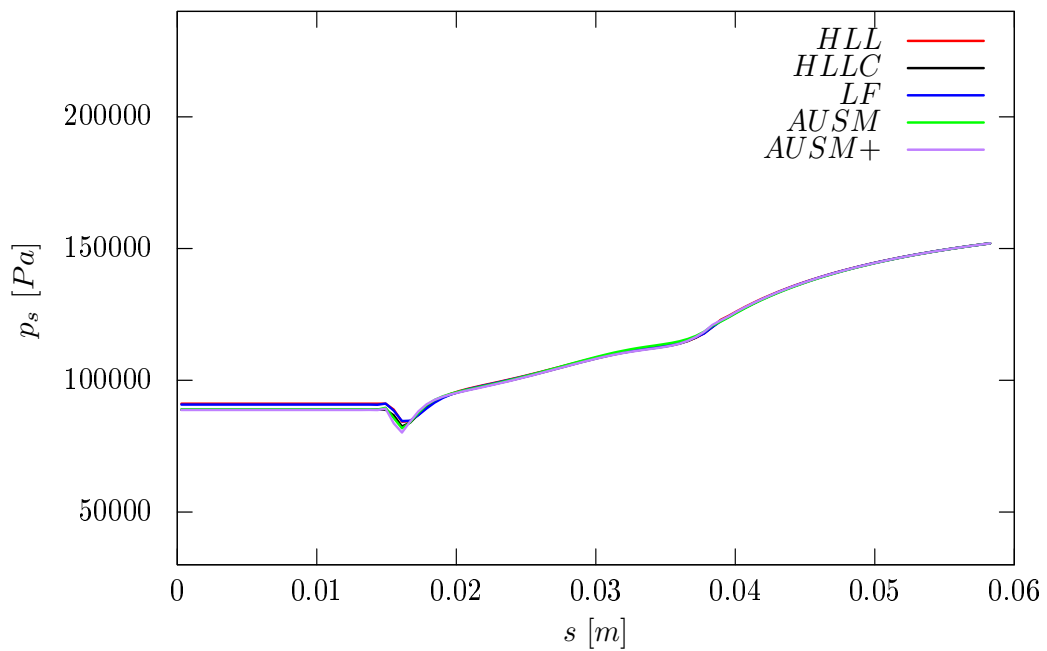
$$p_{s,out} = 151\,987,5 \text{ Pa}.$$

Výsledky

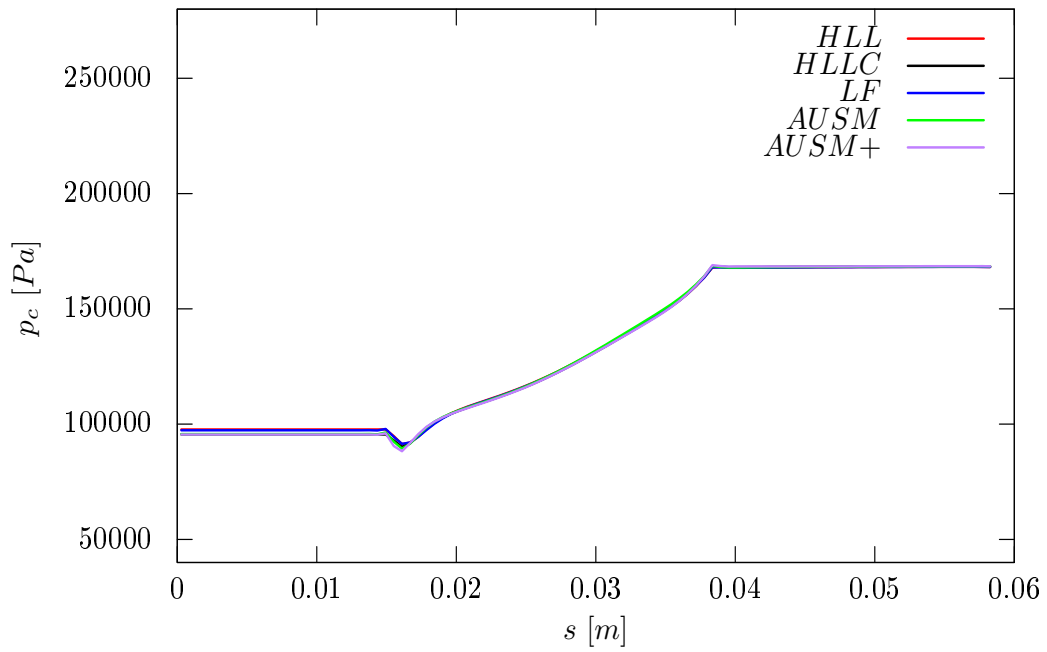
Z výsledků je patrné, že se vzájemně dobře shodují zde použité numerické metody. Na obr. č. (6.64) je možné vidět otrhávání proudu od lopatek. Z průběhu rezidua, viz obr. č. (6.65), vyplývá, že všechny numerická schémata zkonvergují ke stacionárnímu řešení. Na obr. č. (6.64) je vidět, že proud skrze difuzor proudí pod absolutním úhlem $\beta \approx 60^\circ$, což je pro účinnost radiálního kompresoru mnohem příznivější než téměř 80° u případu IV. Nicméně i v tomto případě se objevuje nechtěná oscilace na vstupu do oběžného kola. Z dosažených výsledků vyplývá, že nejvíce jsou na tuto oscilaci náchylná schémata typu AUSM (AUSM+).



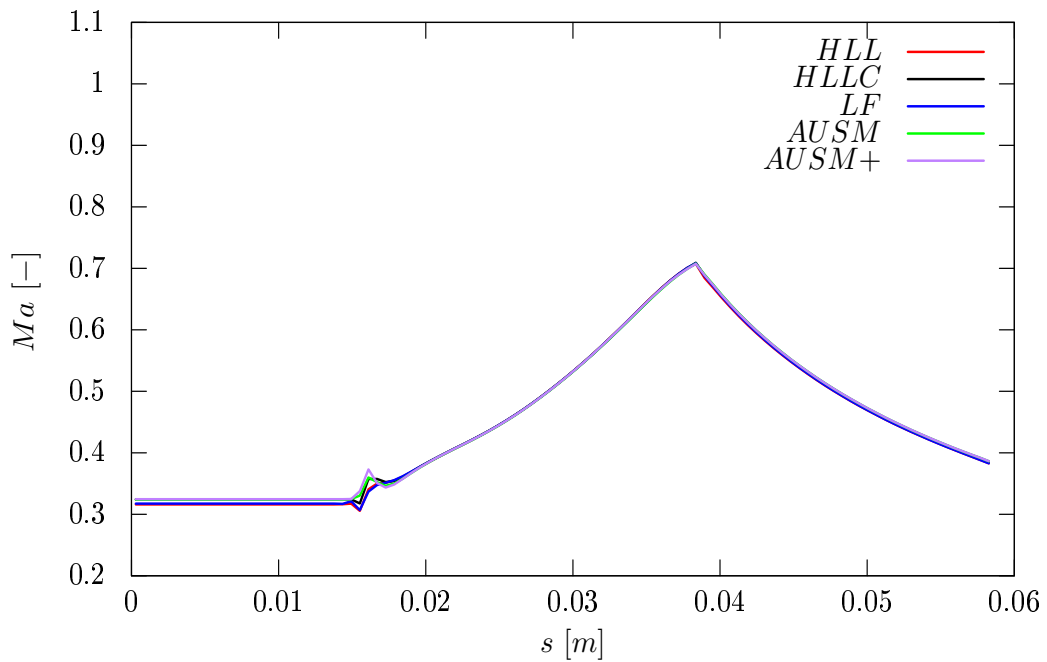
Obrázek 6.54: Průběh hustoty u varianty V.



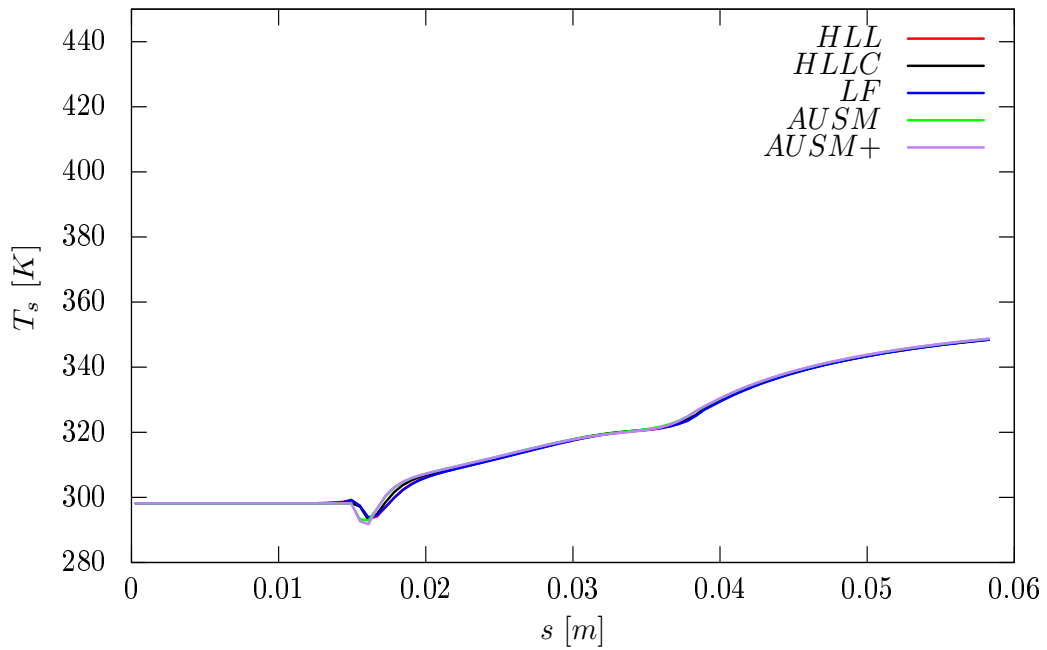
Obrázek 6.55: Průběh statického tlaku u varianty V.



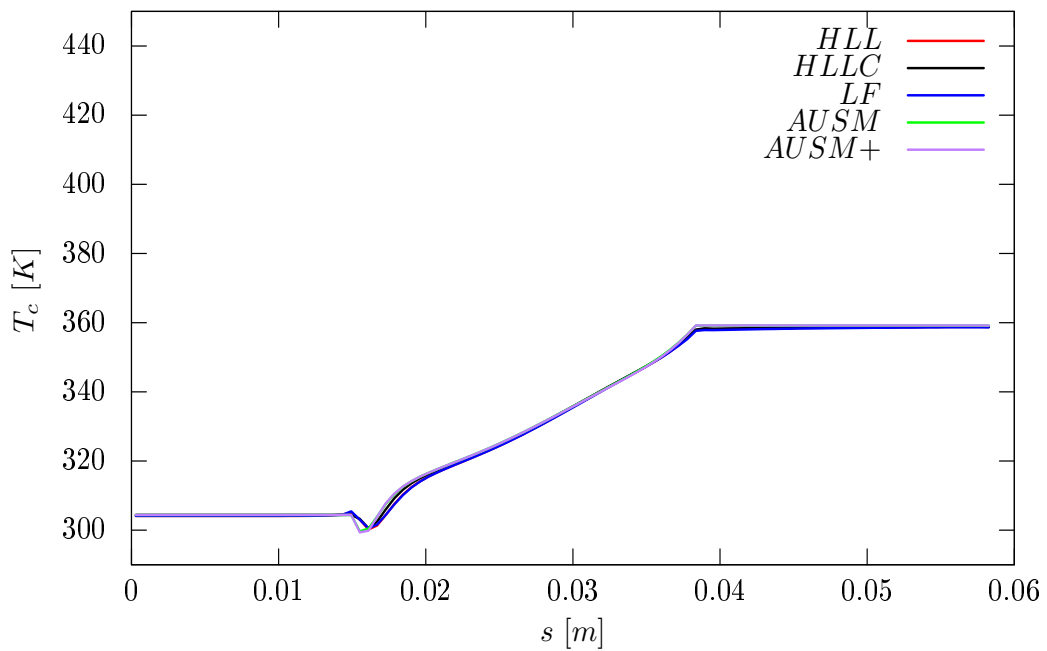
Obrázek 6.56: Průběh celkového tlaku u varianty V.



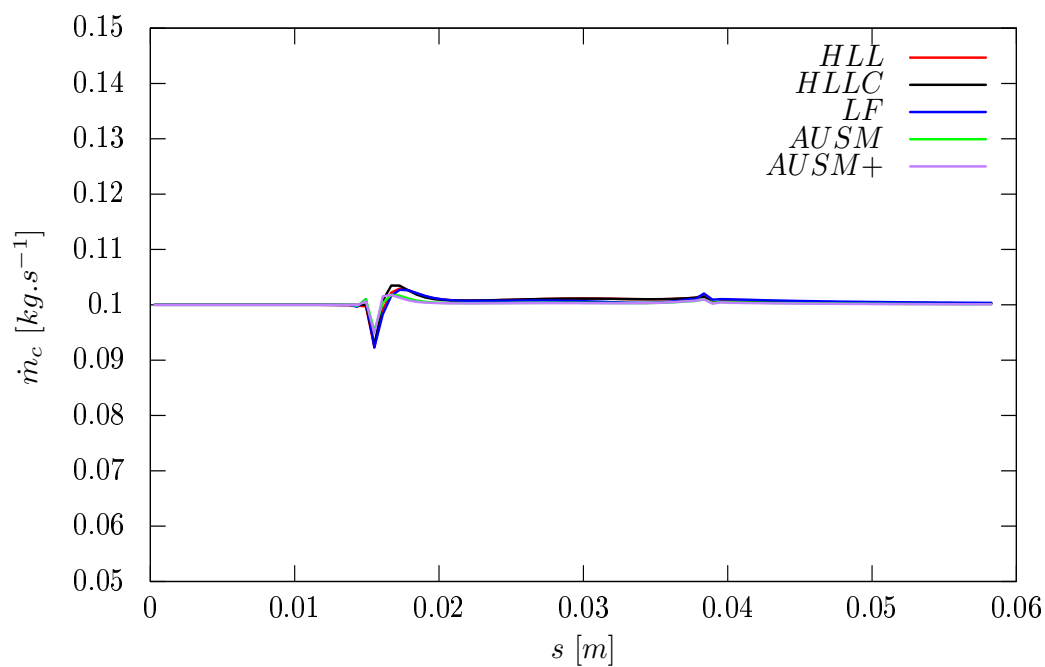
Obrázek 6.57: Průběh Machova čísla u varianty V.



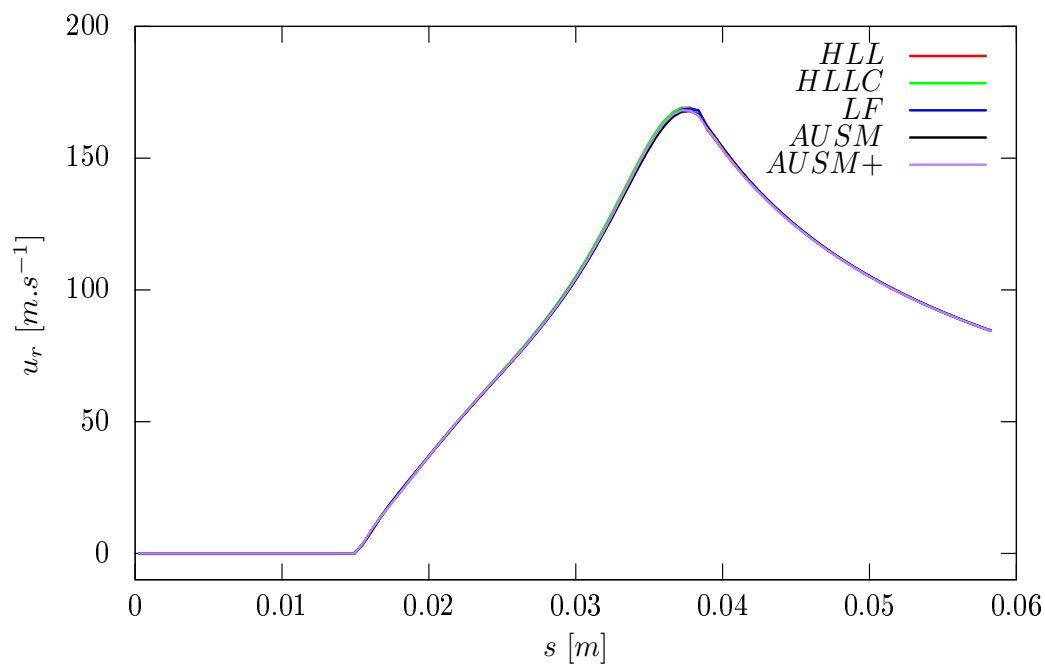
Obrázek 6.58: Průběh statické teploty u varianty V.



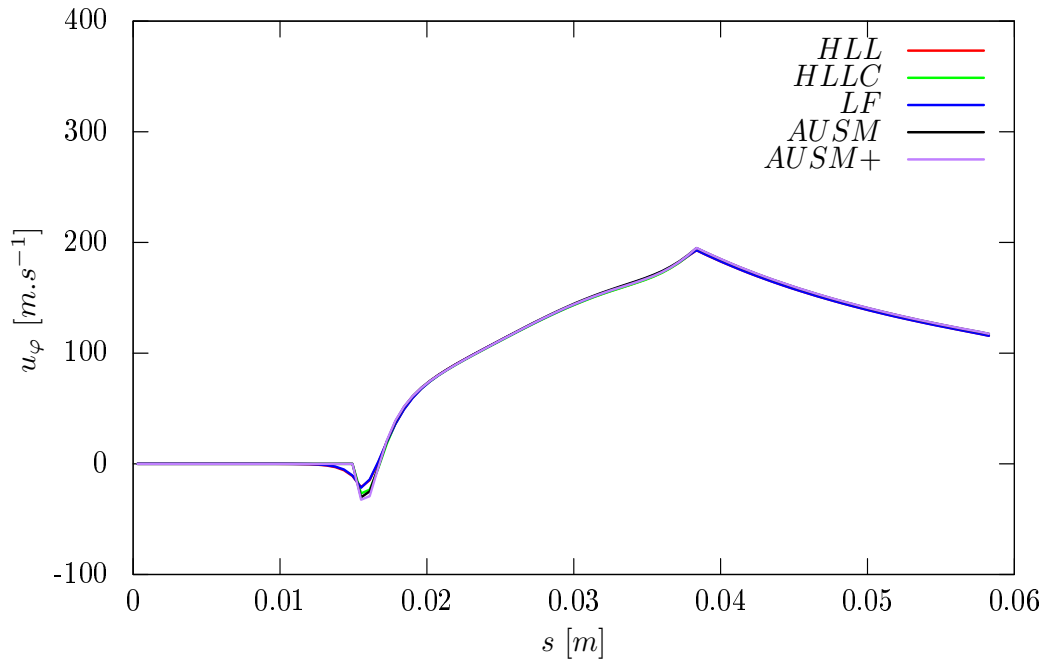
Obrázek 6.59: Průběh celkové teploty u varianty V.



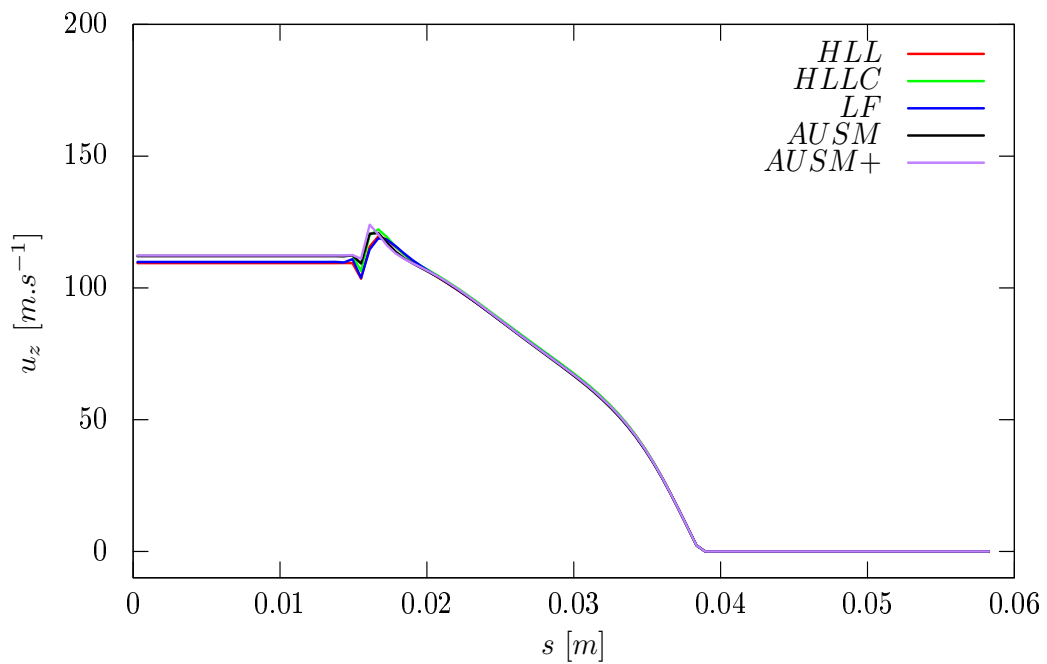
Obrázek 6.60: Průběh hmotnostního toku u varianty V.



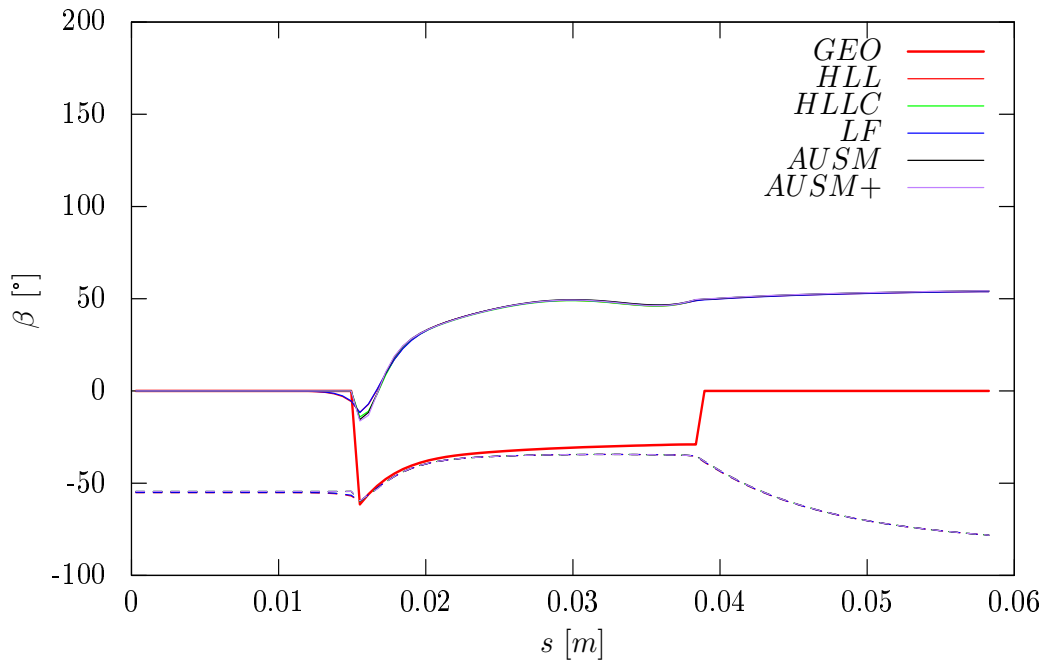
Obrázek 6.61: Průběh radiální rychlosti u varianty V.



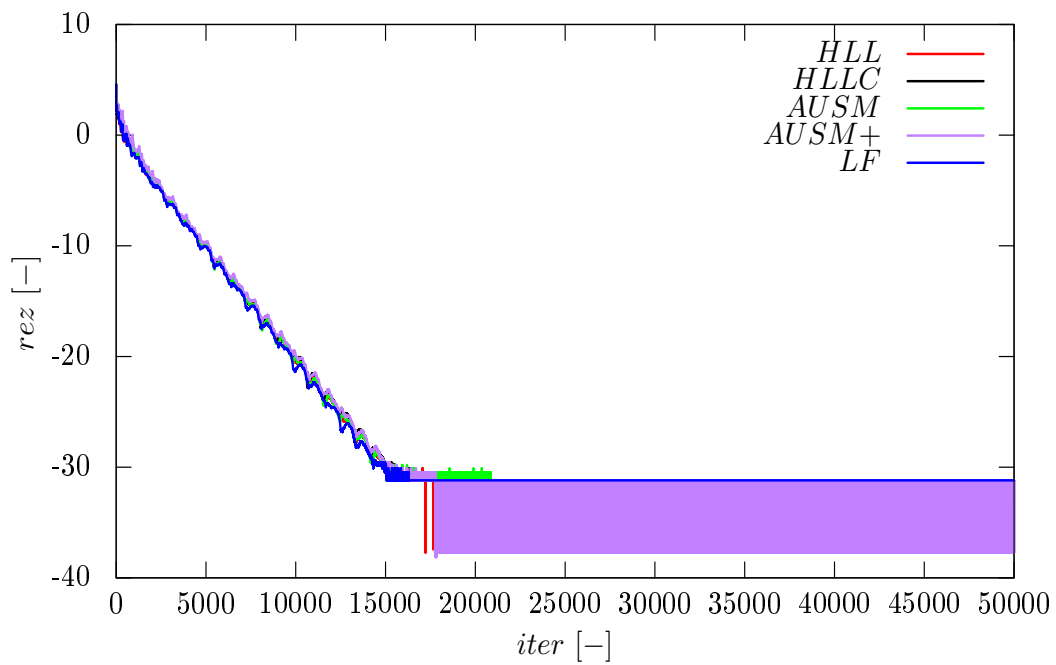
Obrázek 6.62: Průběh tangenciální rychlosti u varianty V.



Obrázek 6.63: Průběh axiální rychlosti u varianty V.



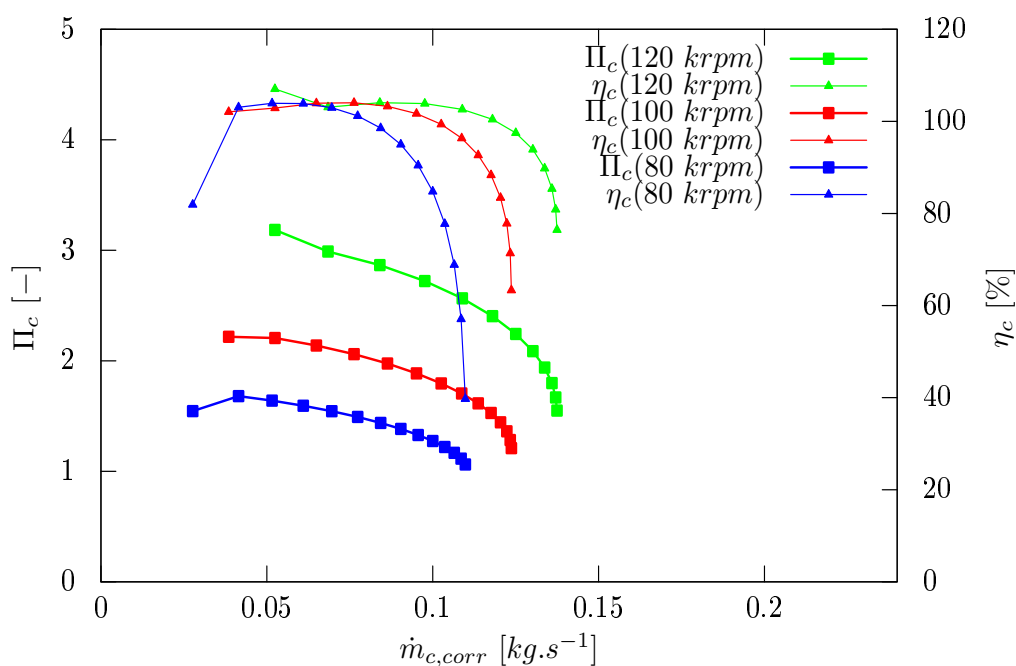
Obrázek 6.64: Průběh úhlu β u varianty V. (absolutní úhel je značen plnou čarou, relativní čárkovanou)



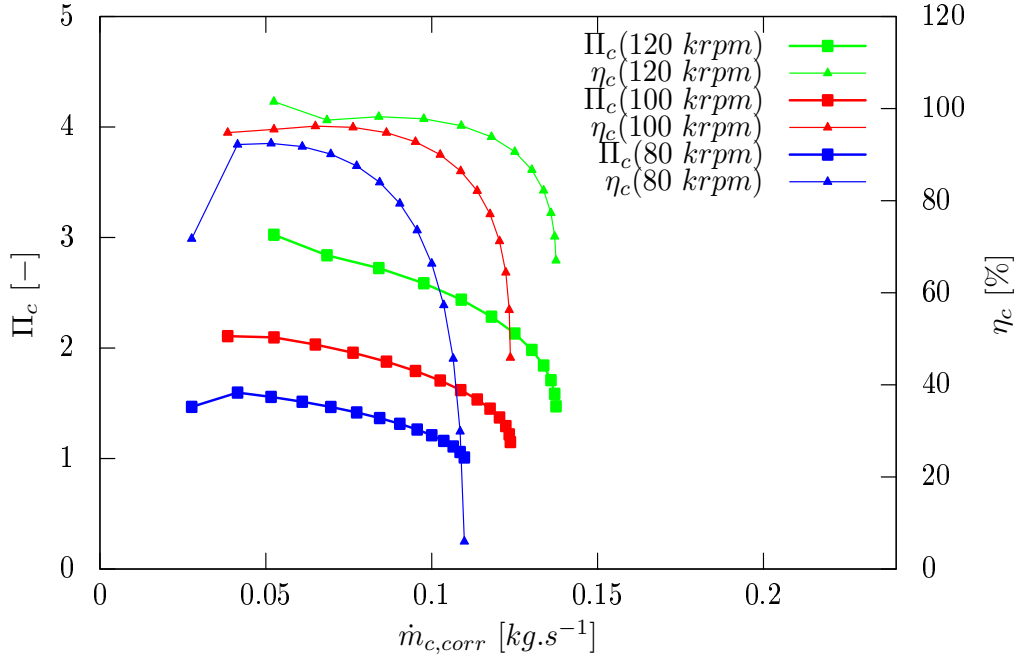
Obrázek 6.65: Průběh rezidua u varianty V.

Kompresorová mapa

Na obr. č. (6.66) je zobrazena kompresorová mapa sestavená z dat vypočítaných na geometrii na obr. č. (6.51). Z výsledků na obr. č. (6.66) vyplývá, že v oblasti stability kompresoru se účinnost blíží hranici 100° , někde kolem této hranice dokonce osciluje. Tato skutečnost je způsobena zanedbáním tření a jiných ztrát. Pokles účinnosti na hranicích stability kompresoru je způsoben špatnou konvergencí ke stacionárnímu řešení. Vzhledem k tomu, že v této simulaci není zohledněn vliv voluty, bylo předpokládáno, že ztráta celkového tlaku ve volutě je 5%. Kompresorová mapa zohledňující vliv voluty je zobrazena na obr. č. (6.67). Na tomto obrázku je patrné, že vlivem tlakových ztrát ve volutě kleslo stlačení a tím pádem klesla i termodynamická účinnost komprese. Jako referenční hodnoty uvažujeme $T_{c,r} = 293 \text{ K}$ a $p_{c,r} = 98 \text{ 100 Pa}$. Obě kompresorové mapy byly získány pomocí *HLLC* numerického toku.



Obrázek 6.66: Kompresorová mapa varianty V. bez voluty



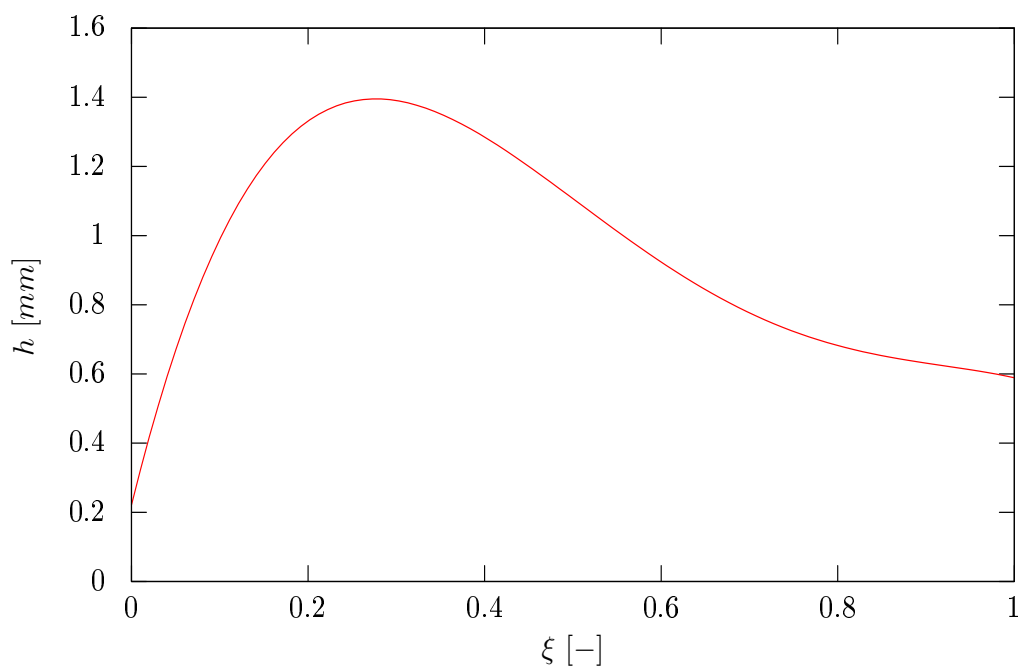
Obrázek 6.67: Kompresorová mapa varianty V. s volutou

6.11 Varianta VI.

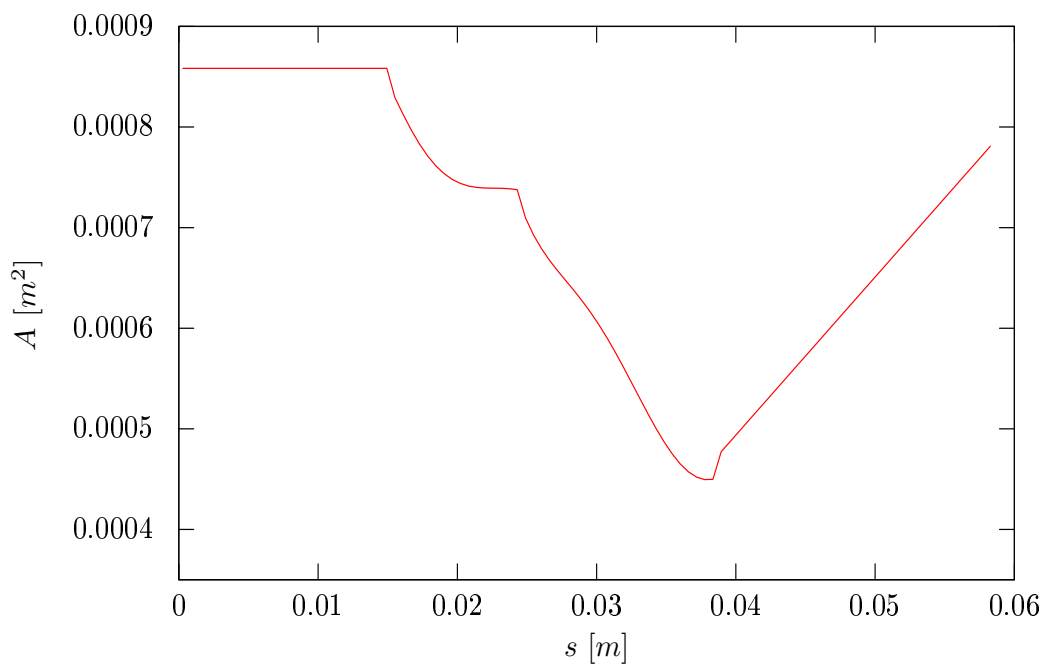
V tomto případě byla použita uniformní 1D síť s $n = 100$ buňkami, viz obr. č. (6.4). Rotor byl roztočen na otáčky $\omega = 100\,000 \text{ rpm}$. V tomto případě bylo taktéž zohledněno odtrhávání proudu na lopatkách rotoru a navíc byl do této simulace přidán ztrátový model, viz rovnice č. (4.3.20). Počet lopatek zůstal stejný. Ztrátové veličiny ζ byly pro jednoduchost zvoleny konstantní. Pro oběžné kolo byla zvolena veličina $\zeta_{OK} = 20 \text{ m}^{-1}$ a pro difuzor $\zeta_{dif} = 7 \text{ m}^{-1}$. Tyto hodnoty byly odhadnuty na základě adiabatické účinnosti reálného radiálního kompresoru.

Změna geometrie

V tomto případě byl navíc uvažován v průběhu ploch i vliv tloušťky lopatek, viz obr. č. (6.68). Uvažování tloušťky lopatek způsobilo změnu ploch v jednotlivých průřezech v oběžném kole, viz obr. (6.69). Navíc byly v tomto případě uvažovány mezilopatky, tzn. do 40% délky oběžného kola je uvažováno 7 hlavních lopatek a od 40% délky oběžného kola je uvažováno 7 hlavních lopatek a 7 mezilopatek, přičemž profil mezilopatek je stejný jako profil hlavních lopatek, viz obrázek č. (6.68).



Obrázek 6.68: Tloušťka lopatky v závislosti na její bezrozměrné délce



Obrázek 6.69: Průběh ploch průřezů

Počáteční podmínky

Počáteční podmínky byly zvoleny na celé oblasti sítě následovně

$$\begin{aligned}T_{s,0} &= 273.15 \text{ K}, \\p_{s,0} &= 101\,325 \text{ Pa}, \\u_{r,0} &= 0 \text{ m.s}^{-1}, \\u_{\varphi,0} &= 0 \text{ m.s}^{-1}, \\u_{z,0} &= 0 \text{ m.s}^{-1}.\end{aligned}$$

Okrajové podmínky

Na vstupu do kompresoru byly zvoleny následující okrajové podmínky

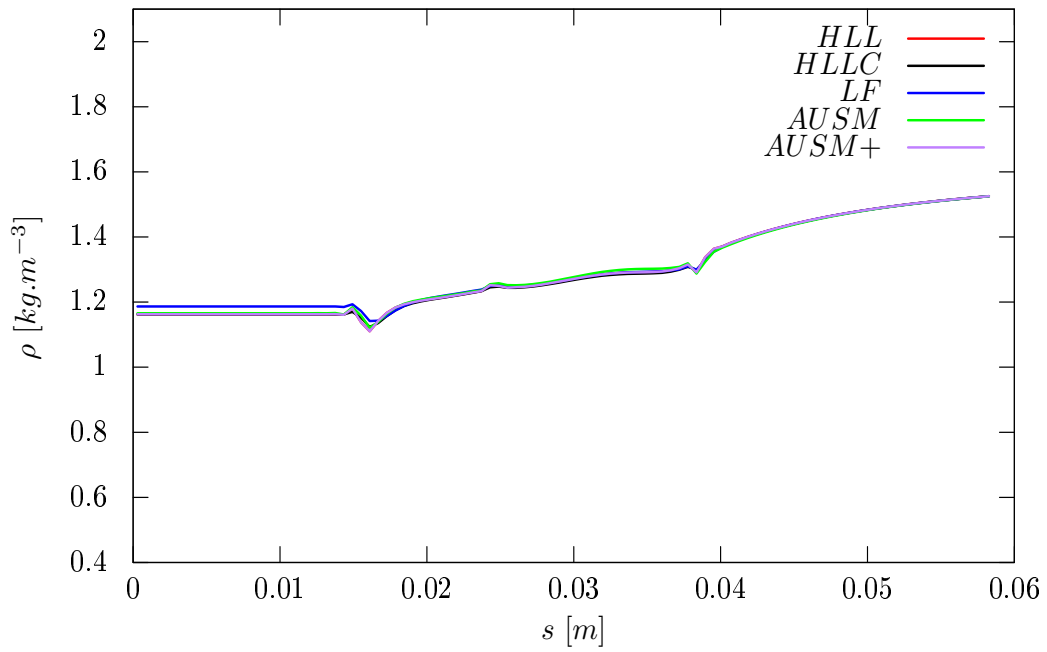
$$\begin{aligned}\dot{m}_{c,in} &= 0.1 \text{ kg.s}^{-1}, \\T_{s,in} &= 298.15 \text{ K}, \\ \alpha &= 0^\circ, \\ \beta &= 0^\circ.\end{aligned}$$

Na výstupu byla zvolena následující okrajová podmínka

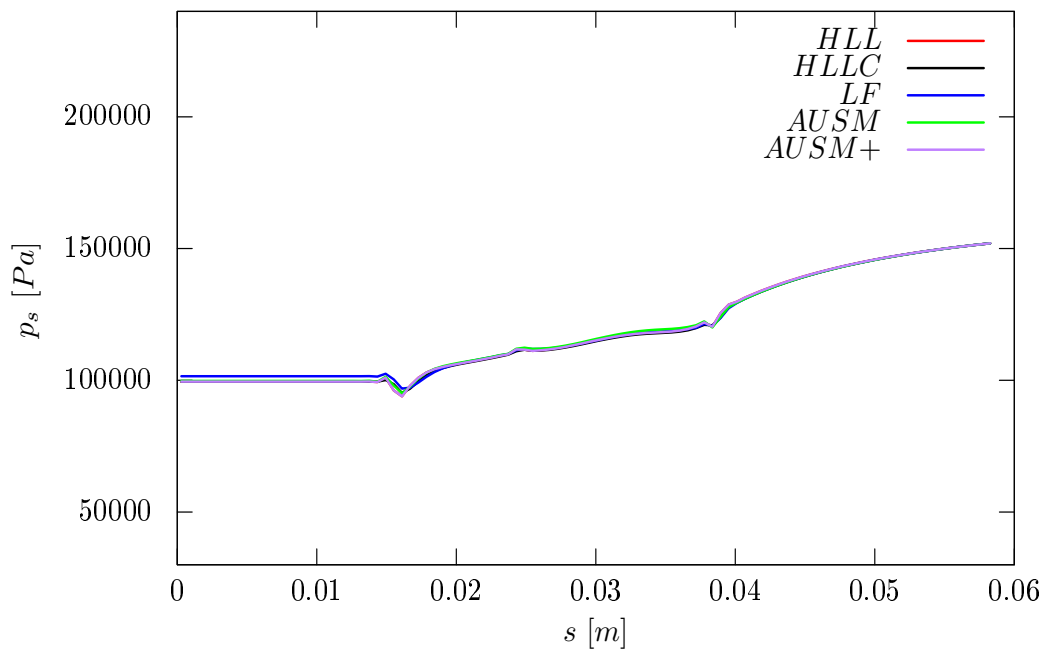
$$p_{s,out} = 151\,987,5 \text{ Pa}.$$

Výsledky

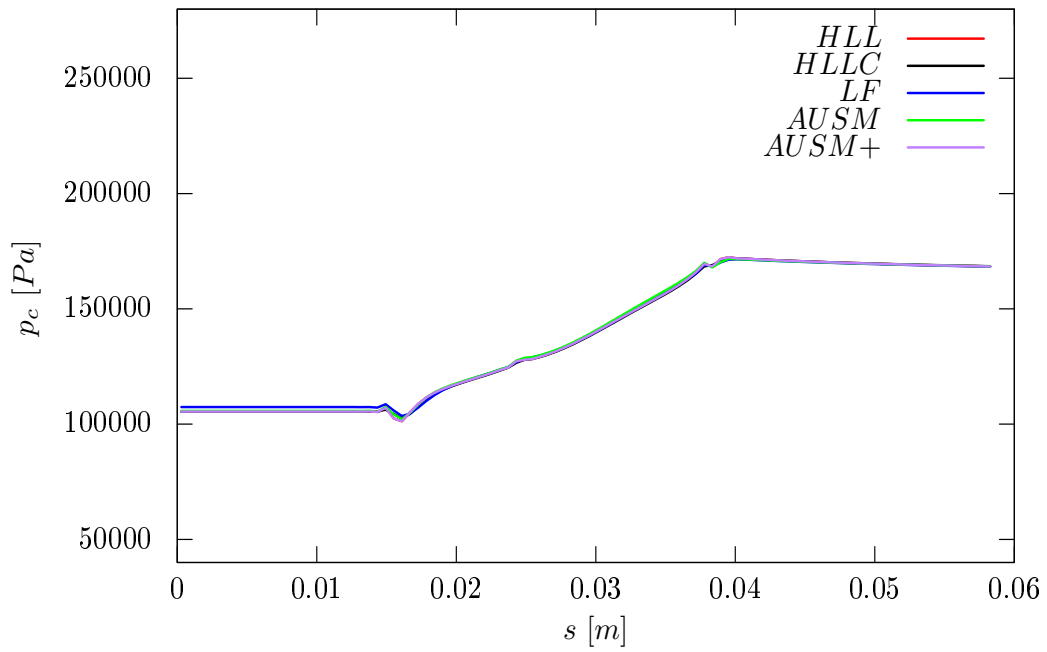
Z výsledků dosažených touto simulací vyplývá, že pro tento případ se všechny zde použité numerické metody téměř shodují, tudíž nedošlo v průběhu vykreslených veličin k výrazným odchylkám. Z průběhu rezidua, viz obr. (6.81), vyplývá, že všechny metody zkonvergovaly rychle ke stacionárnímu řešení. Na obr. č. (6.80) je vidět, jak se proud odtrhává po délce lopatky v oběžném kole. Jelikož v této simulaci byly zohledněny ztráty, tak zde dochází na rozdíl od předchozích simulací k poklesu celkového tlaku v difuzoru, viz obr. č. (6.72). Stejně jako v předchozích případech dochází i zde k mírné oscilaci u vstupu do oběžného kola.



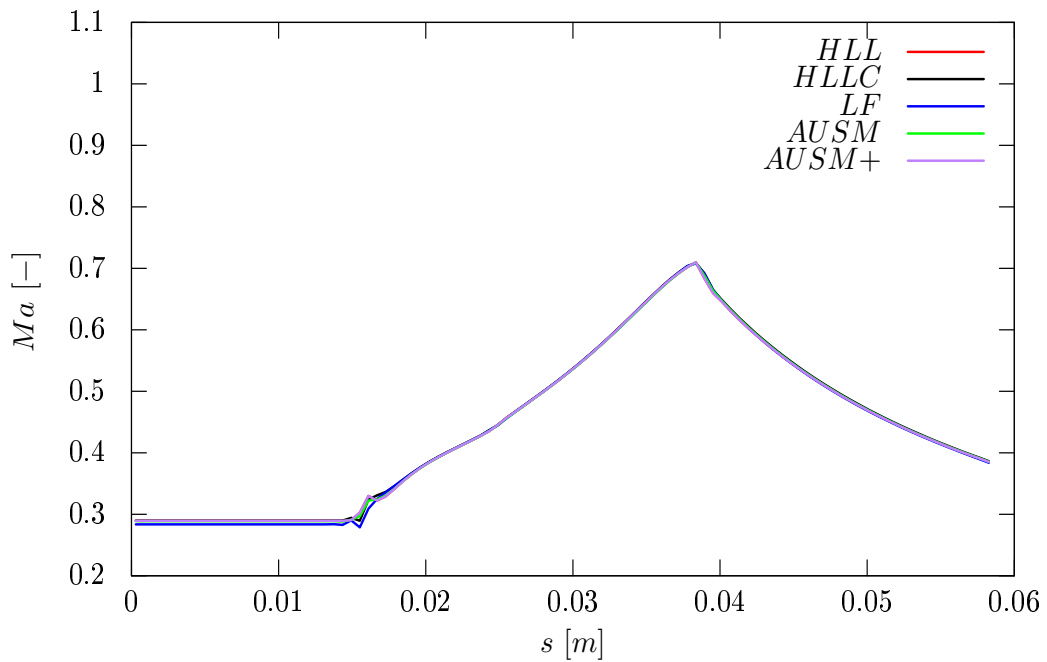
Obrázek 6.70: Průběh hustoty u varianty VI.



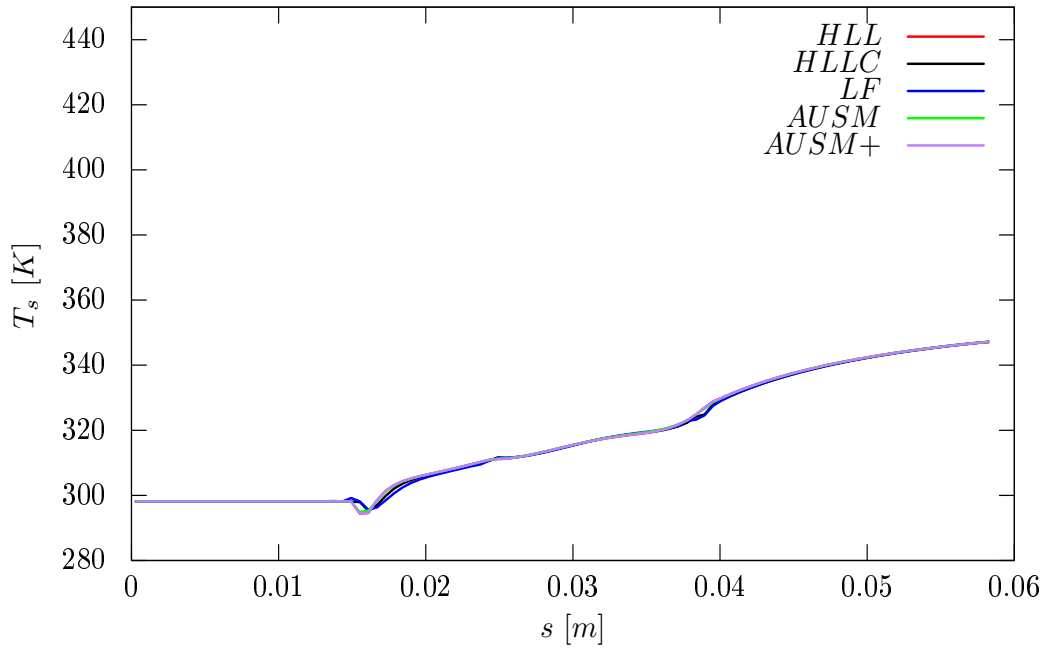
Obrázek 6.71: Průběh statického tlaku u varianty VI.



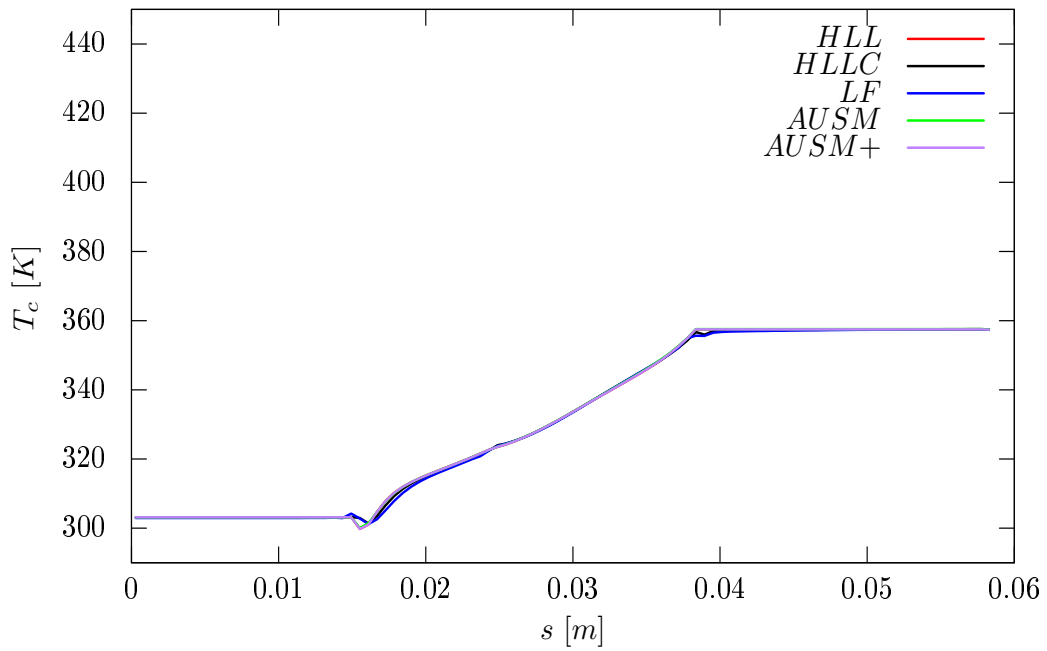
Obrázek 6.72: Průběh celkového tlaku u varianty VI.



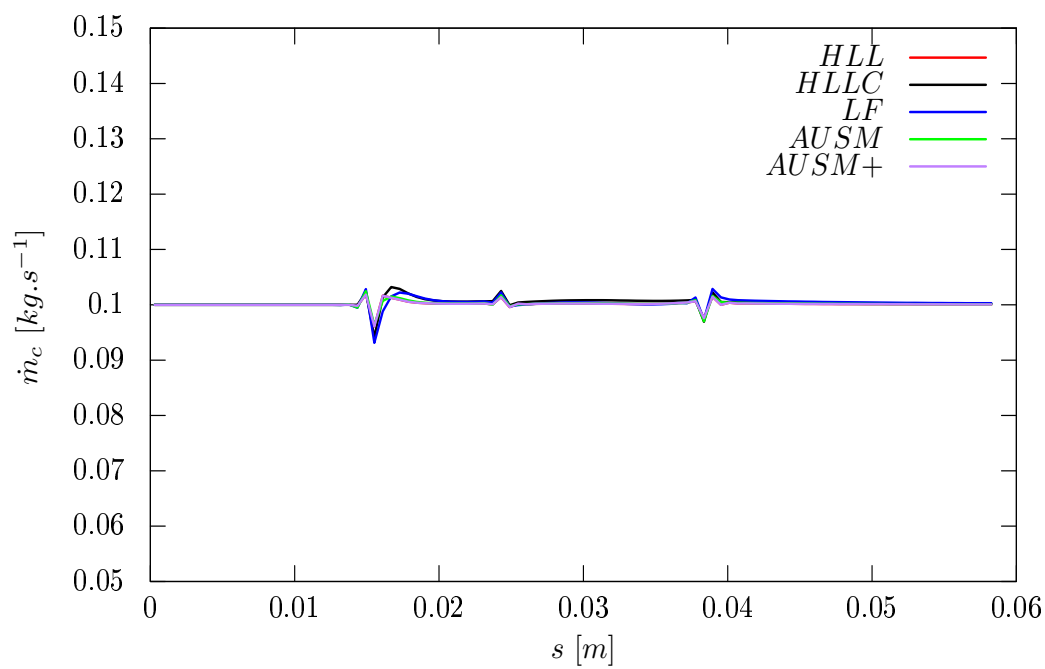
Obrázek 6.73: Průběh Machova čísla u varianty VI.



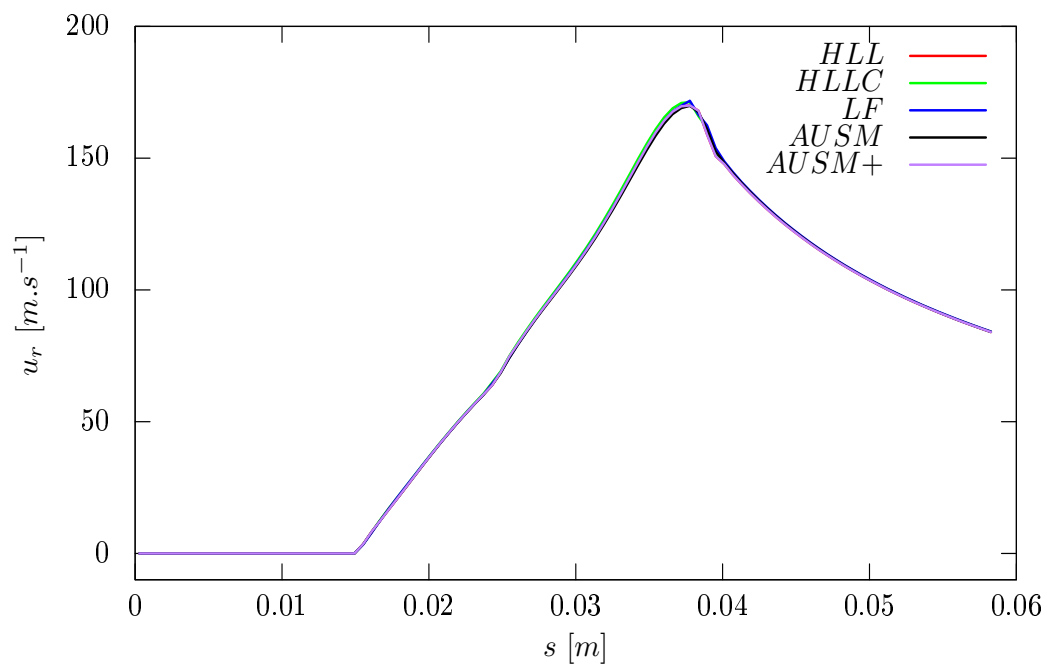
Obrázek 6.74: Průběh statické teploty u varianty VI.



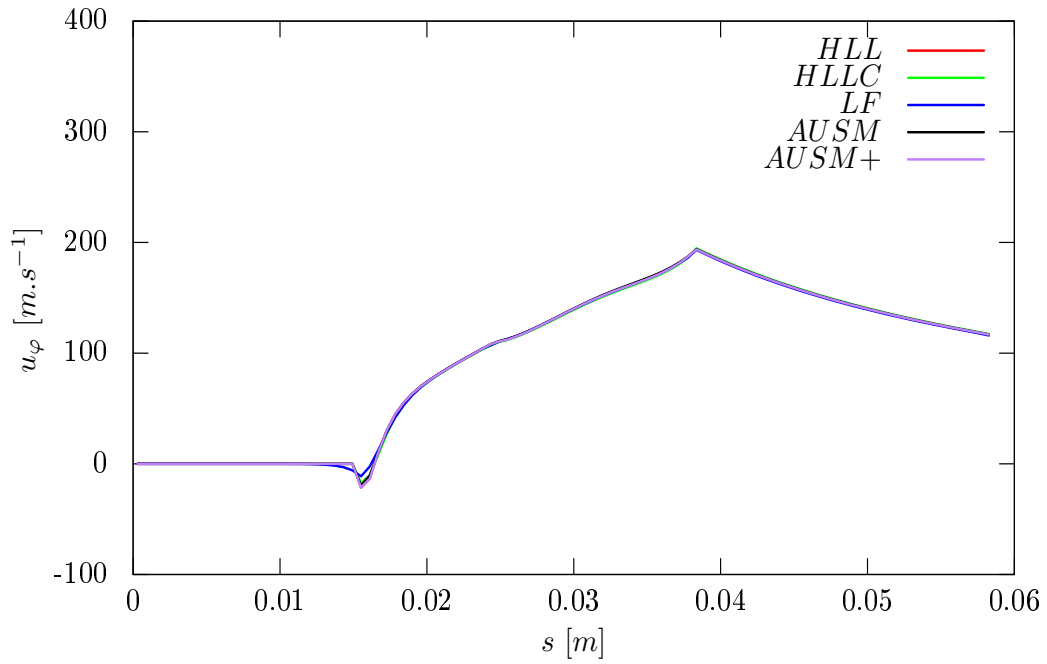
Obrázek 6.75: Průběh celkové teploty u varianty VI.



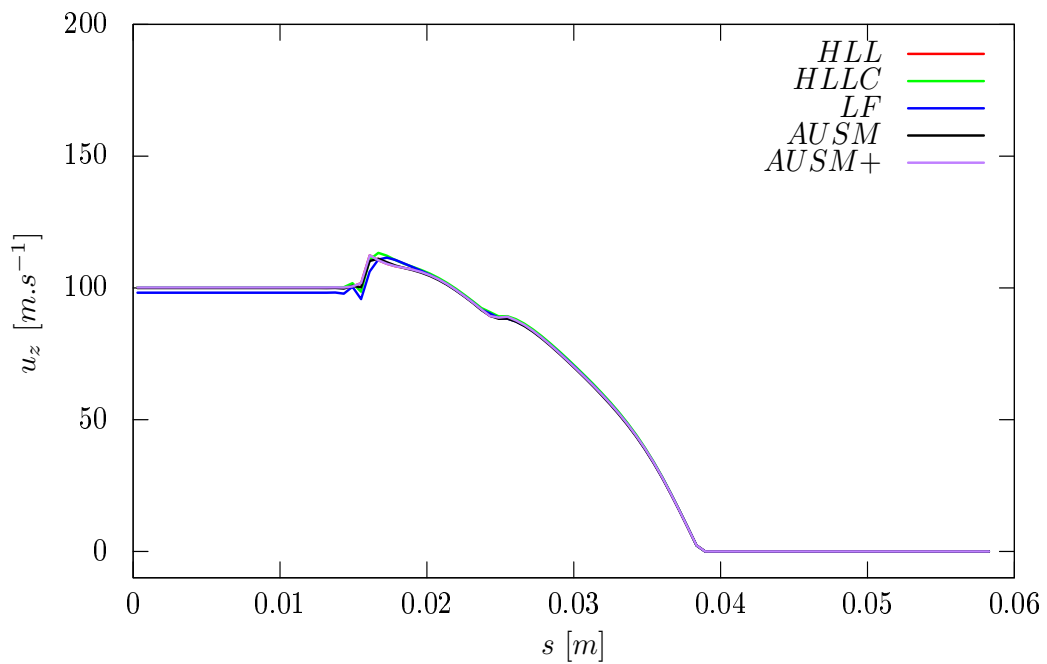
Obrázek 6.76: Průběh hmotnostního toku u varianty VI.



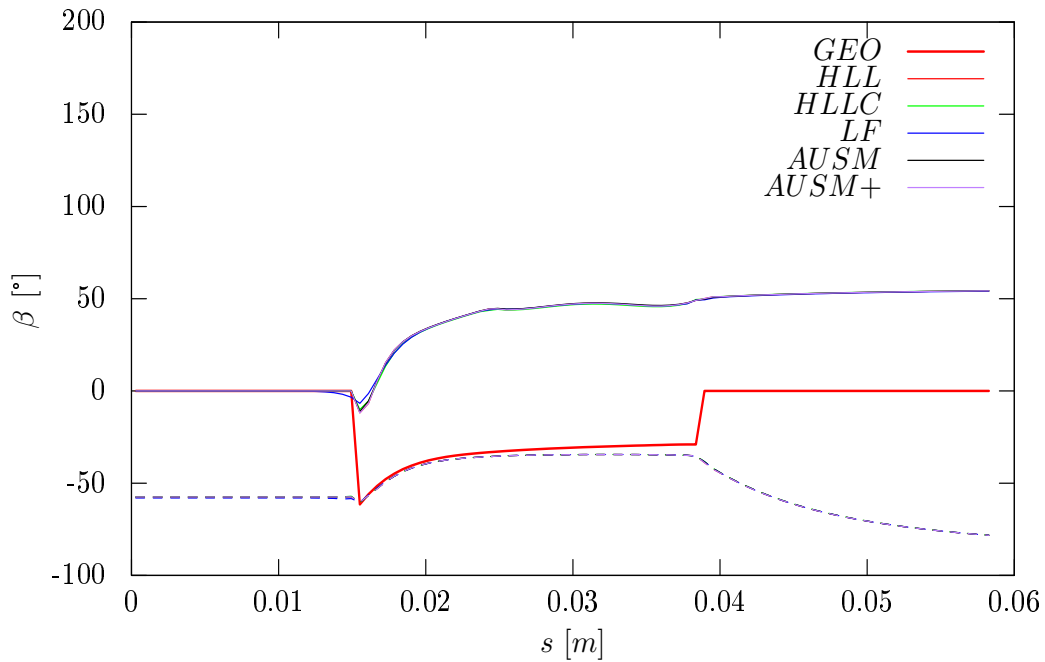
Obrázek 6.77: Průběh radiální rychlosti u varianty VI.



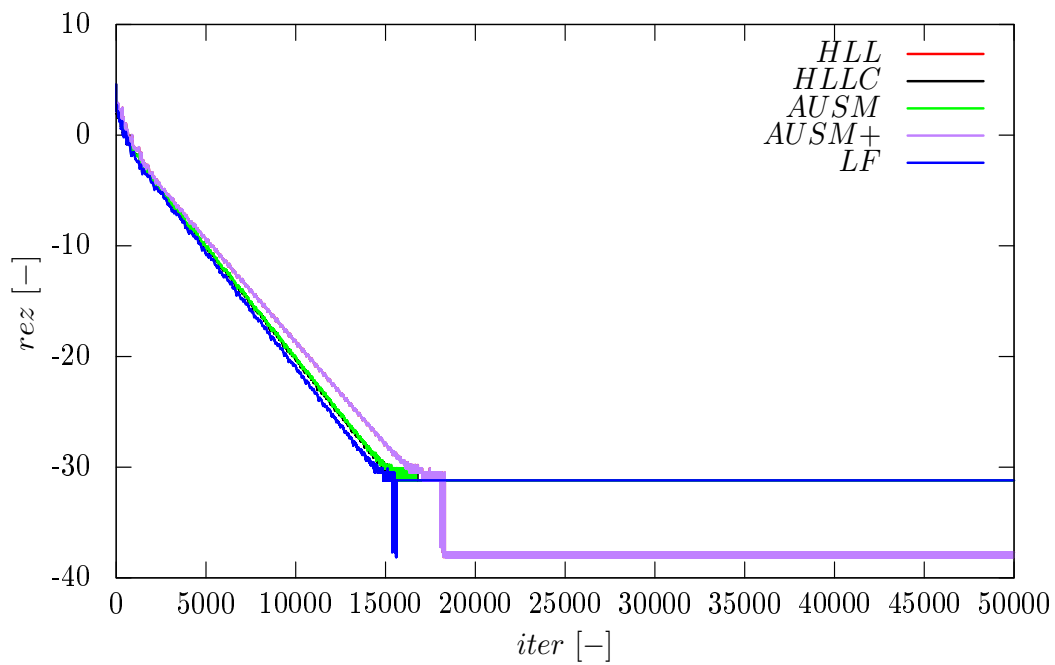
Obrázek 6.78: Průběh tangenciální rychlosti u varianty VI.



Obrázek 6.79: Průběh axiální rychlosti u varianty VI.



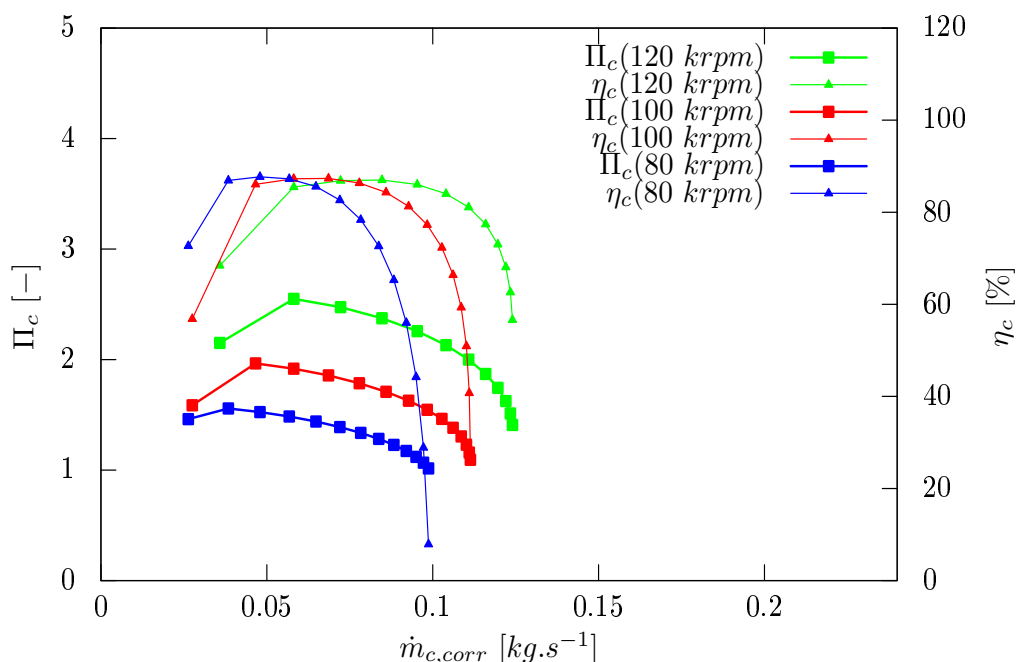
Obrázek 6.80: Průběh úhlu β u varianty VI. (absolutní úhel je značen plnou čarou, relativní čárkovanou)



Obrázek 6.81: Průběh rezidua u varianty VI.

Kompresorová mapa

Kompresorová mapa na obr. č. (6.82) odpovídá geometrii na obr. č. (6.51), pokud uvažujeme ztrátový model a počítáme s lopatkami nenulové tloušťky. Ze získaných kompresorových map vyplývá, že razatně klesla účinnost a zmenšila se i oblast stability. Na obr. č. (6.83) je zobrazena kompresorová mapa, ve které se uvažuje 5% pokles celkového tlaku ve volutě. Obě kompresorové mapy byly získány pomocí *HLLC* numerického toku. Jako referenční hodnoty uvažujeme $T_{c,r} = 293 \text{ K}$ a $p_{c,r} = 98 \text{ 100 Pa}$. Ztrátové koeficienty byly zvoleny pro všechny body kompresorové mapy konstatní, ačkoliv u reálného kompresoru toto zjednodušení obecně neplatí. Nicméně lze použít, pokud se zajímáme pouze o výsledky nacházející se ve středu oblasti stability kompresoru.

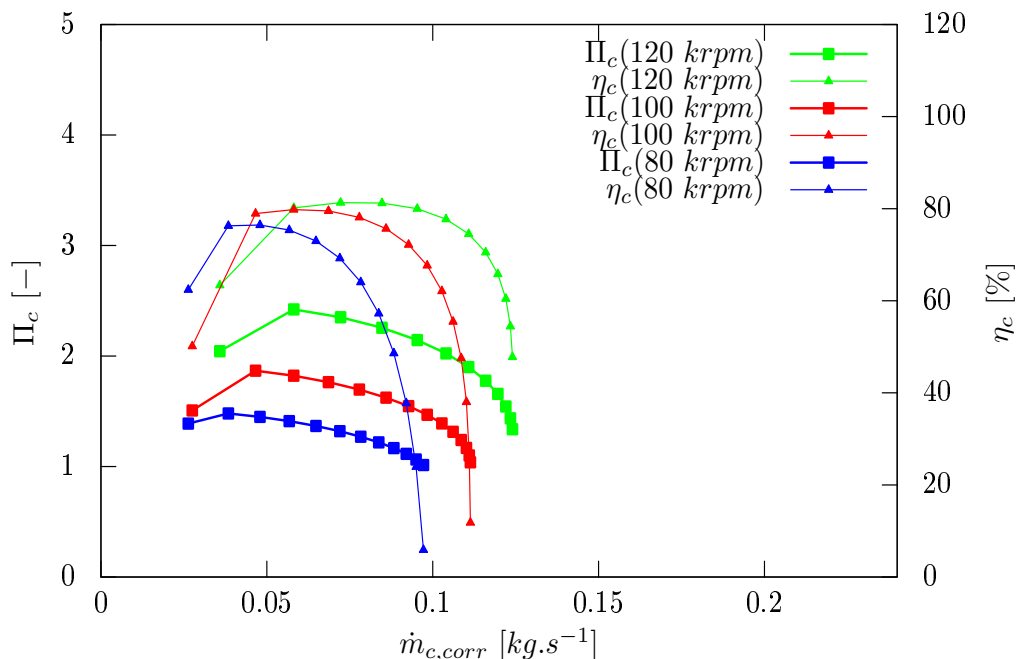


Obrázek 6.82: Kompresorová mapa varianty VI. bez voluty

6.12 Shrnutí výsledků

V této kapitole byly předloženy výsledky simulací, které byly provedeny programem, který byl v rámci této práce vyvinut. Jednotlivé varianty simulací jsou zde řazeny chronologicky tak, jak byl program postupně upravován. V jednotlivých variantách byly porovnány různé metody výpočtu numerického toku.

Ve variantě I. byla uvažována zjednodušená geometrie bez rotorových lopatek. V této variantě byla uvažována změna směru proudění, což vyvolalo tlakovou ztrátu. Výsledky této simulace byly srovnány s exaktním řešením. U varianty II. zůstala původní geometrie, ale byla změněna okrajová podmínka. Důsledkem čehož se projevila v této simulaci oběžná



Obrázek 6.83: Kompresorová mapa varianty VI. s volutou

složka rychlosti. Na základě těchto dvou variant byla postavena varianta III. v níž se objevily rotorové lopatky o nulové tloušce. Rotorové lopatky ve spojení s nenulovou úhlovou rychlostí rotoru zapříčinily nárůst celkového tlaku, jenž byl v předchozích variantách konstantní a nebo klesal vlivem ztrát (v tomto případě numerická vazkost a zaokrouhlovací chyby). Ve variantě IV. byl do programu implementován vztah zohledňující odtrhávání proudu podél rotorové lopatky. Ve variantě V. byla podstatným způsobem upravena celá geometrie tak, aby více odpovídala reálnému radiálnímu kompresoru. Kvůli této úpravě musely být upraveny taktéž okrajové podmínky. Na základě vypočtených dat byla sestavena kompresorová mapa. Jelikož v žádné variantě není zohledněna voluta, byla ztráta celkového tlaku ve volutě odhadnuta na 5%. Pro variantu, která zohledňuje ztrátu ve volutě, byla taktéž vykreslena kompresorová mapa. Do varianty VI. byly zabudovány lopatky s nenulovou tloušťkou, což se projevilo na průběhu ploch jednotlivých průřezů podél střednice. Navíc byl do této varianty přidán jednoduchý ztrátový model. Ačkoliv není ani v této variantě zahrnuta voluta, tak můžeme tuto simulaci považovat za úplný fyzikální 1D model radiálního kompresoru. Vliv voluty byl v této simulaci odhadnut taktéž na 5% ztrátu celkového tlaku. Pro tuto variantu byly taktéž vykresleny kompresorové mapy.

Závěr

V této práci bylo nejprve popsáno turbodmychadlo a především jeho kompresorová část. Dále se tato práce věnovala radiálnímu kompresoru. Byl proveden rozbor konstrukce hlavních prvků radiálního kompresoru. Byly zde představeny fyzikální fenomény týkající se proudění tekutiny radiálním kompresorem. Potom zde byly definovány základní vztahy termomechaniky a mechaniky tekutin, které popisují proudění kapalného proudění obecnou geometrií. V této práci byly formulovány Eulerovy rovnice, které popisují proudění nevazké stlačitelné kapaliny obecnou geometrií. Na základě této formulace byl napsán program, který simuluje 1D proudění v křivočaré souřadnici plynného média skrze radiální kompresor. Důsledkem toho je, že uvažujeme všechny složky rychlosti.

Byly zde prezentovány výsledky vybraných veličin v jednotlivých variantách, postupně tak jak probíhal vývoj programu. Ve variantě I. byl simulováno proudění se změnou proudění z axiálního do radiálního směru. Ve variantě II. byla do simulace přidána tangenciální složka rychlosti. Toho bylo docíleno změnou okrajových podmínek. Ve variantě III. byly do výpočtu implementovány rotorové lopatky. Do varianty IV. byl zabudován mechanismus odtrhávání proudu podél lopatky. Ve variantě V. byla změněna geometrie tak, aby odpovídala reálnému radiálnímu kompresoru. Do varianty VI. byly implementovány lopatky s nenulovou tloušťkou a navíc jednoduchý ztrátový model. U variant s reálnou geometrií byly z vypočtených dat sestaveny kompresorové mapy. Vypočtené kompresorové mapy kvalitativně odpovídají reálnému radiálnímu kompresoru.

Námětem pro další práci je vývoj programu, který by řešil daný problém v 2D. Nicméně zde předložený kód je výhodný v tom, že umí dávat výsledky velice rychle a to umožňuje před závěrečnou optimalizací srovnat mnoho variant. Na druhou stranu 2D řešič by umožnil vnést do výpočtů vyšší přesnost a tím by umožnil lépe optimalizovat daný radiální kompresor.

Reference

Zdroje literatury

- [1] DE MIER TORRECILLA, Mónica. *Introduction to numerical simulation of fluid flows* [online]. [cit. 21.4.2017]. Dostupný na WWW: http://www.mayr.informatik.tu-muenchen.de/konferenzen/Jass04/courses/2/Papers/JASS04_FVM.pdf
- [2] NOGUEIRA, Xesús a kol. *High-Resolution Finite Volume Methods on Unstructured Grids for Turbulence and Aeroacoustics* [online]. [cit. 15.8.2015]. Dostupný na WWW: <http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs11831-011-9062-9>
- [3] KUSZTELAN, A. a kol. *A Review of Novel Turbocharger Concepts for Enhancements in Energy Efficiency* [online]. [cit. 1.9.2016]. Dostupný na WWW: <http://www.iasks.org/sites/default/files/ijtee20110202079082.pdf>
- [4] NINKOVIĆ, Dobrivoje. *TURBOCHARGING OF IC ENGINES: AN OVERVIEW OF THE HISTORY, CURRENT STATE, AND THE DEVELOPMENT TRENDS* [online]. [cit. 22.4.2017]. Dostupný na WWW: <http://oaji.net/articles/2014/766-1420110686.pdf>
- [5] CASEY, Michael; GERSBACH, Frank a kol. *AN OPTIMIZATION TECHNIQUE FOR RADIAL COMPRESSOR IMPELLERS* [online]. [cit. 29.4.2017]. Dostupný na WWW: <http://www.pcaeng.co.uk/library/GT2008-50561.pdf>
- [6] LEUFVÉN, Oskar. *Compressor Modeling for Control of Automotive Two Stage Turbochargers* [online]. [cit. 3.9.2016]. Dostupný na WWW: <http://liu.diva-portal.org/smash/get/diva2:389592/FULLTEXT01.pdf>
- [7] ABIDAT, M. a kol. *DESIGN AND FLOW ANALYSIS OF RADIAL AND MIXED FLOW TURBINE VOLUTES* [online]. [cit. 22.4.2017]. Dostupný na WWW: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.584.316&rep=rep1&type=pdf>
- [8] SIGGEIRSSON, Elias Mikael Vagn; GUNNARSSON, Steinn. *Conceptual design tool for radial turbines* [online]. [cit. 22.4.2017]. Dostupný na WWW: <http://publications.lib.chalmers.se/records/fulltext/223587/223587.pdf>

-
- [9] SOROKES, James M.. *Selecting a centrifugal compressor* [online]. [cit. 18.9.2016]. Dostupný na WWW: <https://www.aisce.org/sites/default/files/cep/20130644.pdf>
- [10] GRESH, M. Theodore. *Compressor Performance: Aerodynamics for the User*. Amsterdam: Elsevier Inc., 2001, ISBN 978-0-7506-7342-6.
- [11] REUNANEN, Arttu. *Experimental and Numerical Analysis of Different Volute in a Centrifugal Compressor* [online]. [cit. 2.5.2015]. Dostupný na WWW: <https://www.doria.fi/bitstream/handle/10024/31209/TMP.objres.354.pdf>
- [12] FITZPATRICK, Richard. *Theoretical Fluid Mechanics* [online]. [cit. 24.4.2017]. Dostupný na WWW: <http://farside.ph.utexas.edu/teaching/336L/Fluid.pdf>
- [13] NAKAYAMA, Y.; BOUCHER, R. F.. *Introduction to Fluid Mechanics*. Tokio: YOKENDO CO. LTD, 1998, ISBN 0 340 67649 3.
- [14] SCHLICHTING, H.; GERSTEN, K.. *Grenzschicht-Theorie*. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006, ISBN 3-540-23004-1.
- [15] BAKKER, André. *Boundary Conditions* [online]. [cit. 17.8.2015]. Dostupný na WWW: <http://www.bakker.org/dartmouth06/engs150/06-bound.pdf>
- [16] NOŽIČKA, Jiří. *Základy Termomechaniky*. Praha: nakladatelství ČVUT, 2008. ISBN 978-80-01-04022-5.
- [17] SPIEGELMAN, Marc. *Conservation Equations* [online]. [cit. 11.9.2016]. Dostupný na WWW: <http://www.ldeo.columbia.edu/~mspieg/mmm/Conserveq.pdf>
- [18] ZIELINSKI, Tomasz G.. *Fundamentals of Fluid Dynamics: Elementary Viscous Flow* [online]. [cit. 16.9.2016]. Dostupný na WWW: http://bluebox.ippt.pan.pl/~tzielins/doc/ICMM_TGZielinski_ViscousFlow.slides.pdf
- [19] YANG, Mingyang; ZHENG, Xinqian; ZHANG, Yangjun a kol. *STABILITY IMPROVEMENT OF HIGH-PRE SSURE-RATIO TURBOCHARGER CENTRIFUGAL COMPRESSOR BY ASYMMETRIC FLOW CONTROL—PART I: NON-AXISYMMETRIC FLOW IN CENTRIFUGAL COMPRESSOR* [online]. [cit. 22.4.2017]. Dostupný na WWW: https://scholar.harvard.edu/files/jhuenteler/files/yang_et_al._2010_stability_improvement_of_high-pressure-ratio_turbocharger_compressor_by_asymmetric_flow_control_-_part_1_non-axisymme_0.pdf
- [20] XU, Cheng; MÜLLER, Michael. *Development and Design of a Centrifugal Compressor Volute* [online]. [cit. 10.5.2015]. Dostupný na WWW: <http://downloads.hindawi.com/journals/ijrm/2005/615405.pdf>
- [21] JAATINEN, Ahti. *Performance Improvement of Centrifugal Compressor Stage with Pinched Geometry or Vaned Diffuser* [online]. [cit. 13.5.2015]. Dostupný na WWW: <https://www.doria.fi/bitstream/handle/10024/47003/isbn%209789522148216.pdf>
-

-
- [22] ABDELMADJID, Chehhat; MOHAMED, Si-Ameur; BOUSSAD, Boumeddane. *CFD Analysis of the Volute Geometry Effect on the Turbulent Air Flow through the Turbocharger Compressor* [online]. [cit. 11.6.2015]. Dostupný na WWW: http://ac.els-cdn.com/S1876610213011739/1-s2.0-S1876610213011739-main.pdf?_tid=e0f1e55c-1035-11e5-ad67-0000aacb362&acdnat=1434026109_92a274bbafb1d09f3fcd9f2ce88ff232
- [23] AMES RESEARCH STAFF. *Equations, tables and charts for compressible flow*. Moffet Field: AMES aeronautical laboratory, 1953
- [24] TORO, Eleuterio. *The HLLC Riemann Solver*. [online]. 2012 [cit. 2015-01-03]. Dostupné z: http://www.prague-sum.com/download/2012/Toro_2-HLLC-RiemannSolver.pdf
- [25] CROCE, Giulio a kol. A NAVIER STOKES SOLVER FOR AXISYMMETRIC TURBOMACHINERY ANALYSIS [online]. [cit. 3.5.2017]. Dostupný na WWW: <http://congress.cimne.com/eccomas/cfd2010/papers/01509.pdf>
- [26] HUNSDORFER, Willem; VERWER, Jan. *Numerical Solution of Time-Dependent Advection-Diffusion-Reaction Equations*. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003, ISBN 3-540-03440-4.
- [27] CAUSON, D. M.; MINGHAM, C. G.; QIAN, L. *Introductory Finite Volume Methods for PDEs* [online]. [cit. 28.7.2015]. Dostupný na WWW: <http://mohandasmohandas.com/african8/introductory-finite-volume-methods-for-pdes.pdf>
- [28] HOLMAN, J.; FÜRST, J. *Numerical solution of compressible turbulent flows using EARS model* [online]. [cit. 2.8.2015]. Dostupný na WWW: <http://www.it.cas.cz/files/fluid-dynamics-2007/027-Holman-PT.pdf>
- [29] SCHLEER, Matthias Wolfgang. *Flow Structure and Stability of a Turbocharger Centrifugal Compressor* [online]. [cit. 30.10.2016]. Dostupný na WWW: <http://e-collection.library.ethz.ch/eserv/eth:28828/eth-28828-02.pdf>
- [30] VAN HELVOIRT, J.. *Centrifugal compressor surge : modeling and identification for control* [online]. [cit. 26.11.2016]. Dostupný na WWW: <https://pure.tue.nl/ws/files/2028563/200711650.pdf>
- [31] KADRNOŽKA, Jaroslav. *Tepelné turbíny a turbokompresory I - základy teorie a výpočtů*. Brno: Akademické Nakladatelství CERM, s.r.o., 2004, ISBN 80-7204-346-3.
- [32] NISHIKAWA, H.. *A Comparison of Numerical Flux Formulas for the Euler Equations* [online]. [cit. 24.1.2017]. Dostupný na WWW: http://ossanworld.com/cfdnotes/cfdnotes_math671_report.pdf
- [33] KJERLAND, Marc. *Finite Volume Method for Hyperbolic PDEs* [online]. [cit. 30.1.2017]. Dostupný na WWW: <http://homepages.math.uic.edu/~kjerland/nm-seminar/hyperFV.pdf>
-

-
- [34] LEVEQUE, Randall J.. *Numerical Methods for Conservation Laws*. Berlin: Birkhäuser Verlag, 1992, ISBN 3-7643-2723-5.
- [35] NOŽIČKA, Jiří. *Mechanika Tekutin*. Praha: Nakladatelství ČVUT, 2006, ISBN 80-01-02865-8.
- [36] KOZEL, Karel; FÜRST, Jiří. *Numerické metody řešení problémů proudění I.* Praha: Nakladatelství ČVUT, 2001, ISBN 80-01-02384-2.
- [37] HUDSON, Justin. *A Review on the Numerical Solution of the 1D Euler Equations* [online]. [cit. 9.2.2017]. Dostupný na WWW: <http://eprints.ma.man.ac.uk/150/01/JuH-EE.pdf>
- [38] KUZMIN, Dmitri. *Finite volume method* [online]. [cit. 9.2.2017]. Dostupný na WWW: <http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~kuzmin/cfdintro/lecture5.pdf>
- [39] HAJŽMAN, M. a kol. *On the modelling of compressible inviscid flow problems using AUSM schemes* [online]. [cit. 25.3.2017]. Dostupný na WWW: http://www.kme.zcu.cz/acm/old_acm/full_papers/acm_vol1no2_p056.pdf
- [40] JONES, Frank. *Gauss' theorem*[online]. [cit. 26.3.2017]. Dostupný na WWW: <http://www.owl.net.rice.edu/~fjones/chap14.pdf>
- [41] XIAOYANG, Gong; RUI, Chen. *Total Pressure Loss Mechanism of Centrifugal Compressors* [online]. [cit. 14.6.2015]. Dostupný na WWW: <http://www.ccsenet.org/journal/index.php/mer/article/view/40230>

Zdroje obrázků

- [42] SCHWITZER. *www.dieselnet.com* [online]. [cit. 1.9.2016]. Dostupný na WWW: https://www.dieselnet.com/tech/air_turbocharger.php
- [43] BorgWarner. *www.dieselnet.com* [online]. [cit. 1.9.2016]. Dostupný na WWW: https://www.dieselnet.com/tech/air_turbocharger.php
- [44] AUTOR NEUVEDEN. *en.turbolader.net* [online]. [cit. 1.9.2016]. Dostupný na WWW: <http://en.turbolader.net/Technology/History.aspx>
- [45] AUTOR NEUVEDEN. *liu.diva-portal.org* [online]. [cit. 3.9.2016]. Dostupný na WWW: <http://liu.diva-portal.org/smash/get/diva2:389592/FULLTEXT01.pdf>
- [46] AUTOR NEUVEDEN. *www.epi-eng.com* [online]. [cit. 3.9.2016]. Dostupný na WWW: http://www.epi-eng.com/piston_engine_technology/turbocharger_technology.htm
- [47] AUTOR NEUVEDEN. *www.conceptsnrec.com* [online]. [cit. 18.9.2016]. Dostupný na WWW: <http://www.conceptsnrec.com/Resources/Photo-Gallery/Compressors.aspx>

-
- [48] AUTOR NEUVEDEN. *www.ptreb.com* [online]. [cit. 18.9.2016]. Dostupný na WWW: http://www.ptreb.com/Electron_Beam_Welding_Technical_Papers/The-use-of-Electron-Beam-Welding-in-Turbomachinery-Manufacturing/
- [49] REUNANEN, Arttu. *www.doria.fi* [online]. [cit. 2.5.2015]. Dostupný na WWW: <https://www.doria.fi/bitstream/handle/10024/31209/TMP.objres.354.pdf>
- [50] AUTOR NEUVEDEN. *www.musclicardiy.com* [online]. [cit. 3.5.2015]. Dostupný na WWW: <http://www.musclicardiy.com/performance/match-turbocharger-engine-step-step-guide/>
- [51] XU, Cheng; MÜLLER, Michael. *www.hindawi.com* [online]. [cit. 10.5.2015]. Dostupný na WWW: <http://downloads.hindawi.com/journals/ijrm/2005/615405.pdf>
- [52] AUTOR NEUVEDEN. <http://www.adtechnology.co.uk/> [online]. [cit. 13.5.2015]. Dostupný na WWW: <http://www.adtechnology.co.uk/applications/splitter-blades-design>
- [53] JAATINEN, Ahti. *www.doria.fi* [online]. [cit. 23.5.2015]. Dostupný na WWW: <https://www.doria.fi/bitstream/handle/10024/47003/isbn%209789522148216.pdf>
- [54] ABDELMADJID, Chehhat; MOHAMED, Si-Ameur; BOUSSAD, Bomed-dane. *ac.els-cdn.com* [online]. [cit. 11.6.2015]. Dostupný na WWW: http://ac.els-cdn.com/S1876610213011739/1-s2.0-S1876610213011739-main.pdf?_tid=e0f1e55c-1035-11e5-ad67-00000aacb362&acdnt=1434026109_92a274bbafb1d09f3fcd9f2ce88ff232
- [55] AUTOR NEUVEDEN. *www.ldeo.columbia.edu* [online]. [cit. 11.9.2016]. Dostupný na WWW: <http://www.ldeo.columbia.edu/~mspieg/mmm/Conserveq.pdf>
- [56] SCHLEER, Matthias Wolfgang. *e-collection.library.ethz.ch* [online]. [cit. 19.11.2016]. Dostupný na WWW: <http://e-collection.library.ethz.ch/eserv/eth:28828/eth-28828-02.pdf>
- [57] VAN HELVOIRT, J.. *www.pure.tue.nl* [online]. [cit. 26.11.2016]. Dostupný na WWW: <https://pure.tue.nl/ws/files/2028563/200711650.pdf>

Přílohy

Přílohy se nachází na přiloženém CD a v systému IS KOS.

1. Zdrojový kód k variantě I.
2. Zdrojový kód k variantě II.
3. Zdrojový kód k variantě III.
4. Zdrojový kód k variantě IV.
5. Zdrojový kód k variantě V.
6. Zdrojový kód k variantě VI.