



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

**Fakulta stavební
Katedra fyziky**

Desky proměnné tloušťky a jejich aplikace v optice

Plates of variable thickness and their applications in optics

diplomová práce

Studijní program: Stavební inženýrství

Studijní obor: Konstrukce pozemních staveb

Vedoucí práce: prof. RNDr. Antonín Mikš, CSc, Ing. Martin Horák, Ph.D. (konsultant)

Filip Šmejkal

Praha 2016



ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: Šmejkal	Jméno: Filip	Osobní číslo: 396376
Zadávající katedra: K102 Katedra fyziky		
Studijní program: Stavební inženýrství		
Studijní obor: Konstrukce pozemních staveb		

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce: Desky proměnné tloušťky a jejich aplikace v optice

Název diplomové práce anglicky: Plates of variable thickness and their applications in optics

Pokyny pro vypracování:

1. Desky proměnné tloušťky
 - 1.1. Teorie desek proměnné tloušťky
 - 1.2. Teorie membrán proměnné tloušťky
2. Aplikace desek proměnné tloušťky v optice
 - 2.1. Membránové kapalinové čočky proměnné ohniskové vzdálenosti
 - 2.2. Vliv vlastního průhybu čočky na přesnost měření jejího tvaru

Seznam doporučené literatury:

1. S. P. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, McGraw Hill Higher Education, New York, 1964.
2. S. Volmir, Flexible Plates and Shells (in Russian), State Publishing House of Technical-Theoretical Literature, Moscow, 1956.
3. E. Ventsel, T. Krauthammer, Thin Plates and Shells: Theory, Analysis, and Applications, Marcel Dekker, Inc. 2001.
4. R. Szilard, Theories and Applications of Plate Analysis, John Wiley & Sons 2004.

Jméno vedoucího diplomové práce: prof.RNDr.Antonín Mikš,CSc, Ing.Martin Horák,Ph.D. (konsultant)

Datum zadání diplomové práce: 3.10.2016 Termín odevzdání diplomové práce: 8.1.2017

Podpis vedoucího práce

Podpis vedoucího katedry

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Beru na vědomí, že jsem povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je nutné uvést v diplomové práci a při citování postupovat v souladu s metodickou příručkou ČVUT „Jak psát vysokoškolské závěrečné práce“ a metodickým pokynem ČVUT „O dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací“.

3.10.2016

Datum převzetí zadání

Podpis studenta(ky)

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o etické přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

V Praze dne 6.1.2017

Filip Šmejkal

Poděkování

Děkuji svému vedoucímu Prof. RNDr. Antonínu Mikšovi, CSc., za odborné vedení a vstřícnost při psaní této diplomové práce. Také děkuji Ing. Martinu Horákovi, Ph.D., a Prof. Ing. Milanu Jiráskovi, DrSc., za ochotu a odpovědi na mé dotazy ohledně řešené problematiky. Dále pak děkuji svému kolegovi Ing. Petru Pokornému za ochotu a pomoc při měřeních a výpočtech týkajících se řešené problematiky. V neposlední řadě děkuji svým rodičům za skvělé podmínky, které mi dopřávají nejen ke studiu.

V Praze dne 6.1.2017

Filip Šmejkal

Abstrakt

V práci je představena teorie osově souměrných desek proměnné tloušťky s uvážením i zanedbáním vlivu smykové deformace pro malé průhyby a teorie osově souměrných membrán konstantní i proměnné tloušťky pro velmi velké průhyby. Tyto teorie jsou pak aplikovány na příkladech průhybů optických čoček vlastní tíhou a průhybů membránových kapalinových čoček za použití různých numerických metod. Dále je pak řešena problematika optimalizace tloušťky membrány za účelem dosažení výsledného předepsaného deformovaného tvaru. V závěru práce jsou výsledky výpočtu průhybu kapalinové čočky s konstantní tloušťkou porovnány s experimentálním měřením.

Klíčová slova

deformace, průhyb, membrána, deska, čočka, optimalizace

Abstract

The thesis presents the theory of axisymmetric slabs with variable thickness, with or without the influence of shear deformation, for small deflections, and the theory of axisymmetric membranes with constant and variable thickness for very large deflections. These theories are then applied on examples of self-weight deflection of optical lenses and deflection of a pressure actuated membrane liquid lens by means of various numerical methods. Furthermore, the problem of optimization of the membrane thickness to get the prescribed deformed shape after applying constant pressure is discussed. In the last part of this thesis, the results of numerical calculation of the constant thickness membrane deflection are compared with experimentally measured values on a real specimen.

Key words

deformation, deflection, membrane, slab, optical lens, optimization

Obsah

1	Úvod.....	8
2	Teorie osově souměrných desek a membrán proměnné tloušťky	9
2.1	Teorie osově souměrných desek proměnné tloušťky	9
2.1.1	Tenké desky.....	9
2.1.2	Středně tlusté desky.....	20
2.2	Teorie osově souměrných membrán proměnné tloušťky	23
2.2.1	Variačně konzistentní odvození základních diferenciálních rovnic bez vlivu předpětí 23	
2.2.2	Zobecnění membránových vztahů pro počáteční předpětí.....	31
3	Aplikace výpočtu průhybu osově souměrných desek proměnné tloušťky.....	33
3.1	Numerické metody výpočtu průhybu tenké osově souměrné desky	33
3.1.1	Řešení metodou Runge-Kutta	36
3.1.2	Řešení metodou centrálních diferencí.....	39
3.1.3	Řešení pomocí programu ANSYS	43
3.2	Numerické metody výpočtu průhybu tlustší osově symetrické desky	45
3.2.1	Řešení pro tlustší desky metodou centrálních diferencí.....	45
3.2.2	Porovnání výsledků	46
3.2.3	Příklady průhybů čoček vlastní tíhou.....	48
4	Aplikace výpočtu průhybu osově souměrných membrán	57
4.1	Numerické metody výpočtu průhybu osově souměrné membrány bez předpětí.....	58
4.1.1	Metoda řad a optimalizace jejích koeficientů	58
4.1.2	Metoda konečných prvků	68
4.1.3	Porovnání numerických metod.....	74
4.2	Optimalizace tloušťky membrány	75
5	Experimentální měření tvaru kapalinové membrány	82

5.1	Obecný popis experimentálního měření tvaru kapalinové membránové čočky.....	82
5.2	Srovnání experimentálního měření a teoretického modelu	83
5.3	Aplikace vybraných naměřených výsledků v optice	87
6	Závěr.....	92
7	Literatura	93
8	Seznam publikací autora	97

1 Úvod

Problematiku řešenou v této diplomové práci lze rozdělit na dvě základní části. V první z nich je rozpracována klasická lineární teorie mechaniky pro malé průhyby tenkých a tlustých osově souměrných desek proměnné tloušťky zatížených plošným zatížením. Tuto teorii lze v praxi využít například v oblasti optické metrologie, kdy je při výrobě optických prvků velmi důležité umět přesně změřit jejich parametry, mezi něž patří také tvar jednotlivých ploch těchto prvků. Odchylka od předepsaného (nominálního) tvaru měřené plochy je způsobena nedokonalostí výroby a dále pak vlastním průhybem (průhybem vlivem vlastní tíhy) takovýchto optických prvků (např. čočky), protože řada měřících zařízení vyžaduje, aby byla např. kontrolovaná čočka při měření umístěna v horizontální poloze. Dosáhne-li ale průhyb způsobený vlastní tíhou čočky hodnot větších, než je přesnost daného měřícího zařízení, vneseme do měření chybu, která může mít za následek nesprávné určení některých optických parametrů této čočky. Velikost relevantních změn tvaru ploch vyráběného optického prvku oproti nominálnímu (navrhovanému) tvaru, které se projeví v kvalitě zobrazení takového prvku, se v praxi vysoce přesné optiky pohybuje ve zlomcích vlnové délky bílého světla, tj. řádově v nanometrech či desítkách nanometrů. Z toho je vidět, že musíme být schopni určit vlivy různých faktorů (např. vlastní tíhy prvku, uchycení prvku v přístroji, apod.) s odpovídající přesností. Jedním z cílů této práce je tedy za použití vhodné teorie a výpočetních metod ověřit, jaký je skutečný vliv průhybu optické čočky zatížené vlastní tíhou a jakým způsobem tento vliv případně minimalizovat.

Druhá část práce se podrobně zabývá teorií velkých průhybů osově souměrných membrán proměnné tloušťky, ve které je již nutné uvažovat geometrické, případně i materiálové nelinearity. Tato teorie nachází v oblasti optiky uplatnění například při modelování tzv. aktivních optických prvků, které jsou schopny předem definovaným způsobem měnit své parametry, a tím i optické zobrazení. Jedním z nejrozšířenějších typů prvků jsou membránové kapalinové čočky [18-32], u kterých je opět nutné umět určit teoreticky i experimentálně tvar membrány při velkých deformacích s přesností tvaru odpovídající požadavkům v optice. Dalším cílem této práce je tedy řešení odvozených nelineárních diferenciálních vztahů za použití vhodných výpočetních metod a dále pak ověření funkčnosti teoretického modelu porovnáním spočtených výsledků s experimentálním měřením membránového vzorku.

2 Teorie osově souměrných desek a membrán proměnné tloušťky

2.1 Teorie osově souměrných desek proměnné tloušťky

V této kapitole budou odvozeny základní diferenciální rovnice popisující malé průhyby osově souměrných desek. Osově souměrnou deskou je myšlena deska, jejíž tvar, zatížení a okrajové podmínky jsou osově souměrné. Pojmem „malý průhyb“ v tomto případě myslíme průhyb, jehož velikost je malá v porovnání s tloušťkou desky h . Podmínka osově symetrie úlohy značně zjednodušuje výsledné diferenciální rovnice a umožňuje řešit problém průhybu pouze jako funkci jedné proměnné (poloměru). V následujících kapitolách bude nejprve představena klasická (tzv. „Kirchhoffova“) teorie pro desky s proměnnou tloušťkou dostatečně tenké na to, aby u nich byla zanedbána smyková deformace ve směru kolmém na rovinu desky ($\frac{h}{a} = \frac{1}{25} \div \frac{1}{5}$), kde a je charakteristický rozměr desky (např. délka, šířka, poloměr apod.).

Dále pak bude tato teorie rozšířena i pro středně tlusté desky ($\frac{h}{a} = \frac{1}{5} \div \frac{2}{5}$), kde průhyb od smykové deformace již není zanedbatelný. Touto problematikou se podrobně zabývá literatura [1-5].

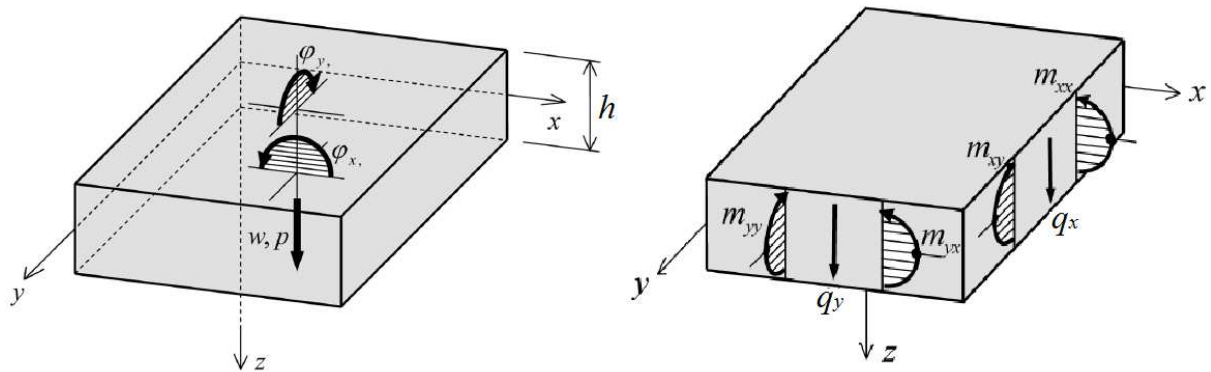
2.1.1 Tenké desky

Teorie tenkých desek využívá následujících předpokladů:

1. Mezi deformacemi a napětím platí Hookův zákon, tedy uvažujeme homogenní, izotropní a lineárně elastický materiál.
2. Střednicová plocha nedeformované desky je rovinná.
3. V důsledku deformace a výskytu neposuvných podpor nevznikají žádné membránové síly a střednicová plocha zůstává nedeformovaná ve směrech θ a r . Toto platí pro průhyby w , kde $w \ll h$.
4. Poměr mezi tloušťkou kruhové desky a jejím poloměrem je v rozmezí $\frac{h}{a} = \frac{1}{25} \div \frac{1}{5}$

5. Uvažujeme, že přímá spojnice dvou bodů kolmá ke střednicové ploše před deformací, zůstává přímkou a kolmou i po deformaci (tzv. Bernoulli-Navierova hypotéza)
6. Napětí σ_{zz} kolmé ke střednicové ploše je zanedbatelně malé v porovnání s ohybovým napětím σ_θ , nebo σ_r , a je uvažováno rovno nule. Také svislá deformace ε_{zz} je uvažována rovna nule a tedy svislý průhyb w se po tloušťce desky nemění.

Ačkoliv se dále v této práci budeme zabývat pouze osově souměrnými deskami, začneme pro názornost obecnějším případem transformací vztahů pro ohýbanou obdélníkovou desku z kartézského souřadnicového systému do polárního souřadnicového systému (θ, r) a následným zjednodušením těchto vztahů pro případ osově symetrického průhybu. Znaménková konvence použitá v následujících vztazích je patrná z Obr. 2.1.



Obr. 2.1 Znaménková konvence [5]

Průhyb w je kladný ve směru osy z , natočení φ_x je kladné, pokud v jeho důsledku dojde ke kladnému posuvu u_x na povrchu desky s kladnou souřadnicí z a natočení φ_y je kladné, pokud v jeho důsledku dojde ke kladnému posuvu u_y na povrchu desky s kladnou souřadnicí z . Znaménka vnitřních ohybových momentů m_{xx} a m_{yy} (dále jen m_x a m_y), vnitřního krouticího momentu m_{xy} a vnitřních posouvajících sil q_x a q_y jsou znázorněny v pravé části Obr. 2.1.

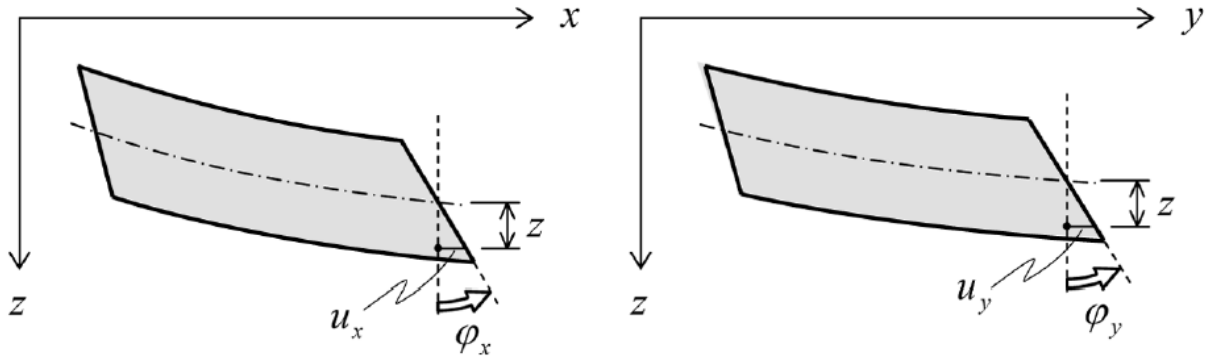
Z literatury [1-5] jsou pro tenké obdélníkové desky známy následující vztahy.

$$u_x = z\varphi_x, \quad u_y = z\varphi_y, \quad (2.1)$$

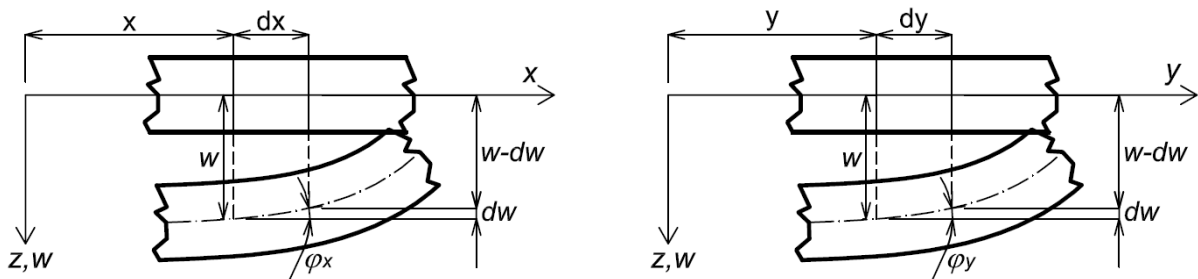
$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} = z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = z \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right), \quad (2.2)$$

kde u_x , u_y jsou vodorovné posuny se směrech os x a y (Obr. 2.2), ε_x , ε_y jsou normálová poměrná přetvoření, γ_{xy} je smykové přetvoření v rovině desky (Obr. 2.4) a φ_x , φ_y jsou úhly natočení deformovaného průřezu, pro které platí (Obr. 2.3)

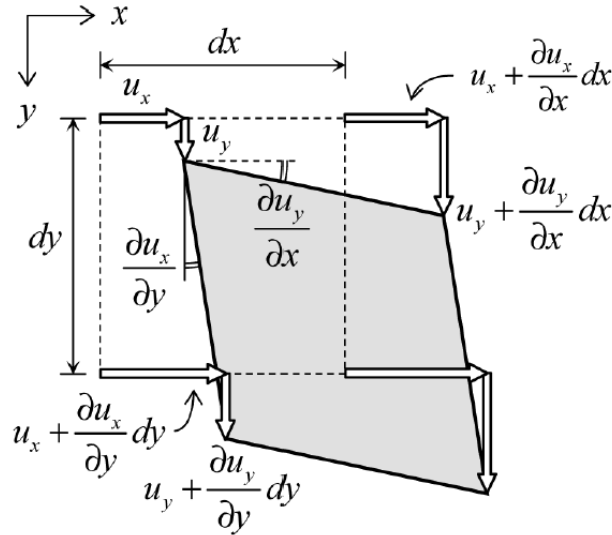
$$\varphi_x \approx \operatorname{tg}(\varphi_x) = \frac{w - dw - w}{dx} = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \varphi_y \approx \operatorname{tg}(\varphi_y) = \frac{w - dw - w}{dy} = -\frac{\partial w}{\partial y}, \quad (2.3)$$



Obr. 2.2 Znárodnění posunů u_x a u_y [5]



Obr. 2.3 Vztah mezi průhybem a natočením


Obr. 2.4 Smyková deformace v rovině desky [5]

Užitím Hookova zákona pro rovinnou napjatost dostaneme vztahy pro normálová napětí σ_x , σ_y a smykové napětí τ_{xy} v rovině desky

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x), \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}. \quad (2.4)$$

Dosazením vztahů pro normálová a smyková přetvoření (2.2) do vztahů pro normálová a smyková napětí (2.4) a vyjádřením funkcí natočení φ_x a φ_y dle vztahů (2.3), dostáváme

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \quad \sigma_y = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \quad \tau_{xy} = -\frac{Ez}{1+\nu}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right). \quad (2.5)$$

Integrací vztahů (2.5) po tloušťce desky pak dostáváme vztahy pro výslednice normálových a smykových napětí, tedy vnitřní ohybové a krouticí momenty na jednotku délky (kNm/m)

$$m_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x z dz = -\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \quad (2.6)$$

$$m_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_y z dz = -\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \quad (2.7)$$

$$m_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{xy} z dz = -\frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz = -(1-\nu)D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \quad (2.8)$$

kde E je modul pružnosti, ν je Poissonovo číslo, h je tloušťka desky a $D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$ je tzv. ohybová desková tuhost.

Uvážením momentových podmínek rovnováhy na nekonečně malém dílku desky (Obr. 2.5) dostáváme pro moment ve směru natočení φ_x

$$-m_x dy + \left(m_x + \frac{\partial m_x}{\partial x} dx \right) dy - m_{xy} dx + \left(m_{xy} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} dy \right) dx - q_x dy dx + p dy \frac{dx^2}{2} = 0. \quad (2.9)$$

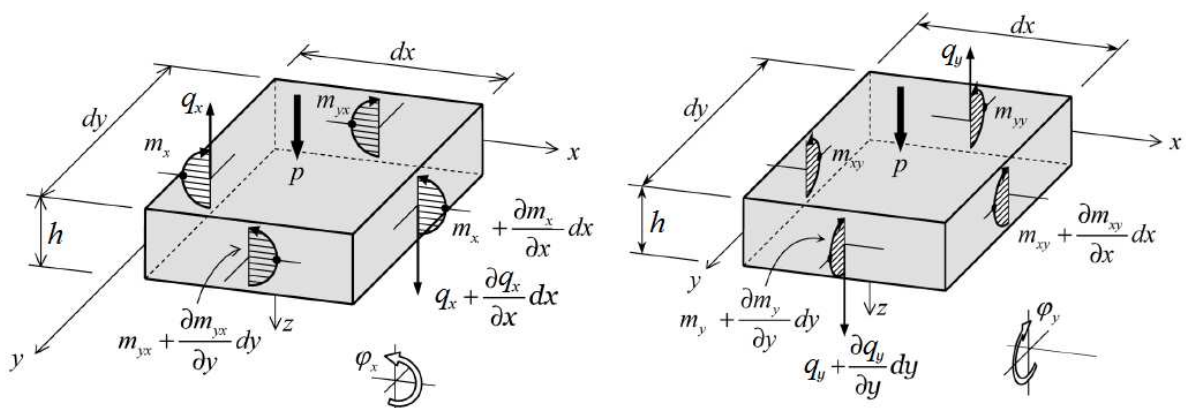
Zanedbáním členu s dx^2 pak dostáváme

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} - q_x = 0 \quad (2.10)$$

a obdobně pro momentovou podmínku rovnováhy ve směru natočení φ_y

$$\frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} - q_y = 0, \quad (2.11)$$

kde q_x a q_y jsou vnitřní posouvající síly vztahované na jednotku délky (kN/m).



Obr. 2.5 Momentové podmínky rovnováhy [5]

Ze vztahů (2.6) - (2.8) a rovnic (2.10) a (2.11) lze pak vyjádřit výsledné vztahy pro vnitřní posouvající síly

$$q_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = -\frac{\partial D}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - (1-\nu) \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (2.12)$$

$$q_y = \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = -\frac{\partial D}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - (1-\nu) \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (2.13)$$

kde již uvažujeme nekonstantní tloušťku $h(x, y)$, tedy nekonstantní deskovou tuhost $D(x, y)$.

Nyní již zbývá jen napsat výslednou silovou podmínku rovnováhy ve svislém směru, dle Obr. 2.5 platí

$$\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dy + \left(\frac{\partial q_y}{\partial y} dy \right) dx + p dx dy = 0, \quad (2.14)$$

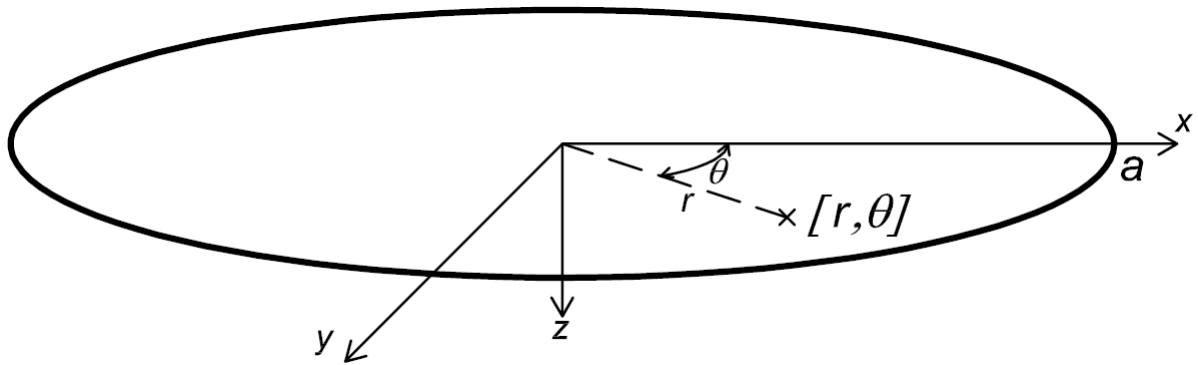
a tedy

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + p = 0. \quad (2.15)$$

Dosazením (2.12) a (2.13) do (2.15) dostáváme výslednou deskovou rovnici pro tenké desky proměnné tloušťky v kartézském souřadnicovém systému

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] - 2(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right] - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] + p = 0. \quad (2.16)$$

Vzhledem k tomu, že se v této práci omezujeme pouze na kruhové desky, je vhodné pro jejich matematický popis volit polární soustavu souřadnic (Obr. 2.6).



Obr. 2.6 Kruhová deska v polárním souřadnicovém systému

Souřadnice r v tomto případě značí vzdálenost daného bodu od počátku souřadnicového systému, souřadnice θ určuje úhel natočení spojnice počátku a daného bodu a konstanta a značí poloměr kruhové desky. Nyní je nutné výše odvozené vztahy pro tenké desky v kartézském souřadnicovém systému přetransformovat do polárního souřadnicového systému, kde platí

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}, \quad (2.17)$$

tedy

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \theta, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin \theta, \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\sin \theta}{r}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\cos \theta}{r}. \quad (2.19)$$

Užitím pravidla pro derivaci složené funkce můžeme derivace podle jednotlivých proměnných v kartézském souřadnicovém systému přepsat do proměnných v polárním souřadnicovém systému jako

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial w}{\partial \theta}, \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = \\
 &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \sin \theta \right) - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \sin \theta \right) = \\
 &= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \cos^2 \theta - \frac{2}{r} \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial r} + \frac{1}{r} \sin^2 \theta \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \sin \theta \cos \theta \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2},
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial w}{\partial \theta}, \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) = \\
 &= \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\sin \theta \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) = \\
 &= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \sin^2 \theta + \frac{2}{r} \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial r} + \frac{1}{r} \cos^2 \theta \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \sin \theta \cos \theta \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \cos^2 \theta \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2},
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = \\
 &= \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \sin \theta \right) + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \sin \theta \right) = \\
 &= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \sin \theta \cos \theta - \frac{1}{r^2} \cos 2\theta \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \cos 2\theta \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \cos \theta \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

a podobně pro proměnnou deskovou tuhost platí

$$\frac{\partial D}{\partial x} = \frac{\partial D}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial D}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial D}{\partial \theta}, \tag{2.25}$$

$$\frac{\partial D}{\partial y} = \frac{\partial D}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial D}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial D}{\partial \theta}. \tag{2.26}$$

Nyní je třeba výše odvozené vnitřní momenty m_x , m_y , m_{xy} a vnitřní posouvající síly q_x a q_y přetransformovat na vnitřní radiální moment m_r , tangenciální moment m_t , kroučící moment m_{rt} , radiální posouvající sílu q_r a tangenciální posouvající sílu q_t . Jak je patrné z Obr. 2.6, v případě, že položíme $\theta = 0$ a tedy $r = x$, platí

$$m_r = m_x, \quad m_t = m_y, \quad m_{rt} = m_{xy}, \quad q_r = q_x, \quad q_t = q_y. \quad (2.27)$$

Dosazením do vztahů (2.20)-(2.26) za $\theta = 0$ získáváme

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} = -\varphi_r, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = -\kappa_r, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = -\varphi_t, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = -\kappa_t, \quad (2.28)$$

kde φ_r, φ_t jsou radiální a tangenciální natočení a κ_r, κ_t jsou radiální a tangenciální křivost.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta}, \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial D}{\partial x} = \frac{\partial D}{\partial r}, \quad \frac{\partial D}{\partial y} = \frac{1}{r} \frac{\partial D}{\partial \theta}, \quad (2.30)$$

a tedy z (2.6)-(2.8) a (2.12) a (2.13)

$$m_r = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right), \quad m_t = -D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right), \quad (2.31)$$

$$m_{rt} = -(1-\nu)D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right), \quad (2.32)$$

$$q_r = -\frac{dD}{dr} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right) - (1-\nu) \frac{1}{r} \frac{\partial D}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) - D \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right), \quad (2.33)$$

$$q_t = -\frac{1}{r} \frac{\partial D}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right) - (1-\nu) \frac{dD}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) - D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{d^2 w}{dr^2} \right). \quad (2.34)$$

Výše uvedené obecné vztahy lze v našem případě značně zjednodušit tím, že se omezíme na případ osově souměrné úlohy. Potom lze předpokládat, že i průhybová funkce w bude osově souměrná a tedy všechny výrazy obsahující derivaci podle proměnné θ budou nulové. Ze vztahů (2.31)-(2.34) pro vnitřní síly platí

$$m_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) = D \left(\frac{d\varphi_r}{dr} + \frac{\nu}{r} \varphi_r \right), \quad m_t = -D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right) = D \left(\frac{1}{r} \varphi_r + \nu \frac{d\varphi_r}{dr} \right)$$

$$m_{rt} = 0 \tag{2.35}$$

$$q_r = -\frac{dD}{dr} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) - D \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right), \quad q_t = 0. \tag{2.36}$$

Vzhledem k osově symetrii můžeme nyní uvažovat pouze dvě podmínky rovnováhy (Obr. 2.7), a to silovou podmínku rovnováhy ve svislém směru

$$p r dr d\theta + d\theta(r + dr) \left(q_r + \frac{\partial q_r}{\partial r} dr \right) - q_r r d\theta = 0, \tag{2.37}$$

kteřá má po zanedbání členu dr^2 tvar

$$p r + r \frac{dq_r}{dr} + q_r = 0, \tag{2.38}$$

kde $p(r)$ je plošné zatížení kruhové desky (kN/m^2),

a momentovou podmínku rovnováhy ve směru φ_r

$$p r d\theta \frac{dr^2}{2} + d\theta(r + dr) \left(m_r + \frac{\partial m_r}{\partial r} dr \right) - m_r r d\theta - m_t dr d\theta - q_r r d\theta dr = 0, \tag{2.39}$$

kteřá má po zanedbání členu dr^2 tvar

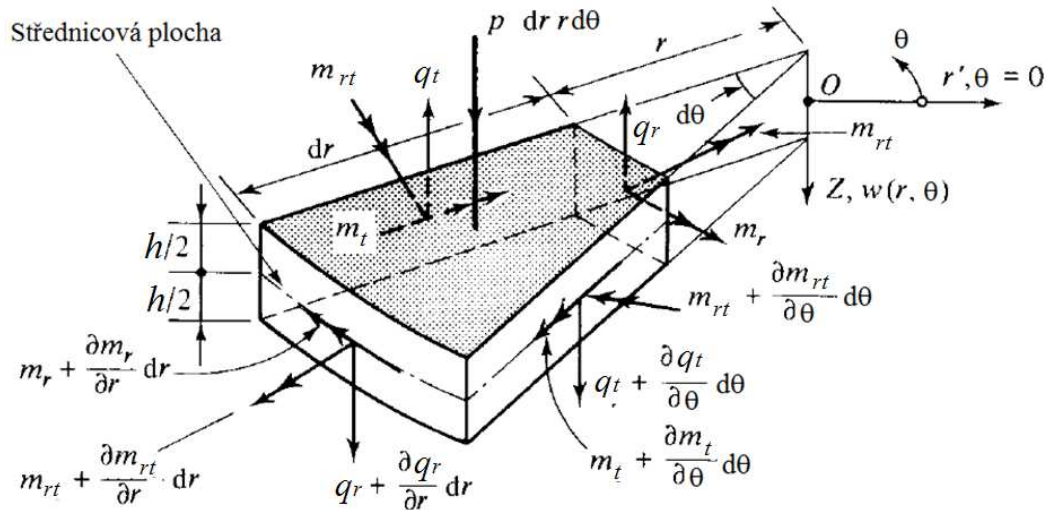
$$m_r + r \frac{dm_r}{dr} - m_t - q_r r = 0. \tag{2.40}$$

Dosazením vztahů pro radiální a tangenciální moment (2.35) do momentové podmínky rovnováhy (2.40) dostáváme

$$-\frac{d^3 w}{dr^3} - \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{D} \frac{dD}{dr} \right) \frac{d^2 w}{dr^2} - \left(\frac{\nu}{D} \frac{dD}{dr} - \frac{1}{r} \right) \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = \frac{q_r}{D}. \tag{2.41}$$

Substitucí $\varphi_r = -\frac{dw}{dr}$ do vztahu (2.41) pak dostaneme

$$\frac{d^2 \varphi_r}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{D} \frac{dD}{dr} \right) \frac{d\varphi_r}{dr} + \left(\frac{\nu}{D} \frac{dD}{dr} - \frac{1}{r} \right) \frac{\varphi_r}{r} = \frac{q_r}{D}. \quad (2.42)$$



Obr. 2.7 Rovnováha sil na elementárním dílku kruhové desky [3]

Řešením rovnice (2.42) je funkce radiálního natočení $\varphi_r(r)$, ze které lze výslednou průhybovou funkci spočítat podle vztahu

$$w(r) = -\int_0^r \varphi_r(\xi) \, d\xi + C_1, \quad (2.43)$$

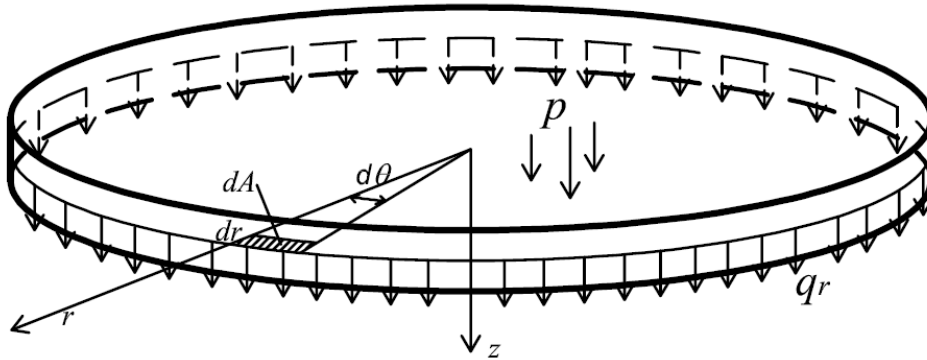
kde C_1 je integrační konstanta, kterou lze určit z průhybové okrajové podmínky a ξ je pomocná integrační proměnná ($\xi \rightarrow r$). K vyřešení problému průhybu je tedy třeba znát okrajové podmínky, které se liší pro různé typy uložení, a budou podrobněji vysvětleny v kapitole 3 na konkrétních příkladech.

V případě osově souměrné úlohy lze také využít skutečnosti, že měrná posouvající síla q_r je v každé vzdálenosti r po celém obvodu konstantní, a proto můžeme psát (Obr. 2.8)

$$2\pi r q_r = -\iint_A p \, dA, \quad (2.44)$$

a tedy

$$q_r = -\frac{1}{2\pi r} \int_0^r \int_0^{2\pi} p \xi d\theta d\xi = -\frac{1}{r} \int_0^r p \xi d\xi. \quad (2.45)$$



Obr. 2.8 Průběh radiální posouvající síly q_r

Výsledné diferenciální rovnice (2.41) a (2.42) a vztahy (2.43) a (2.45) popisující malé průhyby osově souměrných desek proměnné tloušťky lze nalézt např. v literatuře [1-4].

2.1.2 Středně tlusté desky

V literatuře zabývající se teorií průhybu desek [1-6] lze bez problému nalézt odvození diferenciálních rovnic pro tenké kruhové desky ($h/a \leq 1/5$) konstantní i proměnné tloušťky. V případě, kdy potřebujeme řešit problém tlustých kruhových desek ($2/5 \geq h/a \geq 1/5$), kde již hraje svou roli smyková deformace, lze ještě například v [3,6] nalézt rovnice popisující tuto problematiku pro desky konstantní tloušťky. Pouze výjimečně je ale popisován případ tlusté kruhové desky proměnné tloušťky odvozený v následující kapitole na základě teorie pro tlusté obdélníkové desky v [5].

Teorie středně tlustých desek využívá stejných předpokladů, jako teorie tenkých desek s těmito rozdíly:

1. Poměr mezi tloušťkou kruhové desky a jejím poloměrem je $1/25 \leq h/a \leq 2/5$
2. Uvažujeme, že přímá spojnice dvou bodů kolmá ke střednicové ploše před deformací, zůstává přímou i po deformaci, ale nemusí již být kolmá ke střednicové ploše, jako je tomu u klasické (Kirchhoffovy) teorie pro tenké desky.

Za předpokladu, že se opět omezíme pouze na osově symetrické desky, lze pro radiální natočení φ_r použít stejný vztah, jako v případě tenkých desek, tedy diferenciální rovnici

(2.42). Abychom získali průhybovou funkci $w(r)$, je nutné si uvědomit, že ji již nelze určit pouhou integrací podle vztahu (2.43), ale je třeba vzít v úvahu vliv radiální smykové deformace γ_r , pro kterou platí (Obr. 2.9)

$$\gamma_r = \frac{du_r}{dz} + \frac{dw}{dr} = \varphi_r + \frac{dw}{dr}, \quad (2.46)$$

kde u_r je radiální posun (Obr. 2.10)

$$u_r = z \varphi_r. \quad (2.47)$$

Posouvající sílu q_r lze nyní vyjádřit v závislosti na smykové deformaci jako

$$q_r = D_s(r) \gamma_r = D_s(r) \left(\varphi_r + \frac{dw}{dr} \right), \quad (2.48)$$

kde $D_s(r) = \frac{5}{6} G h(r)$ je smyková desková tuhost a $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ je smykový modul pružnosti materiálu.

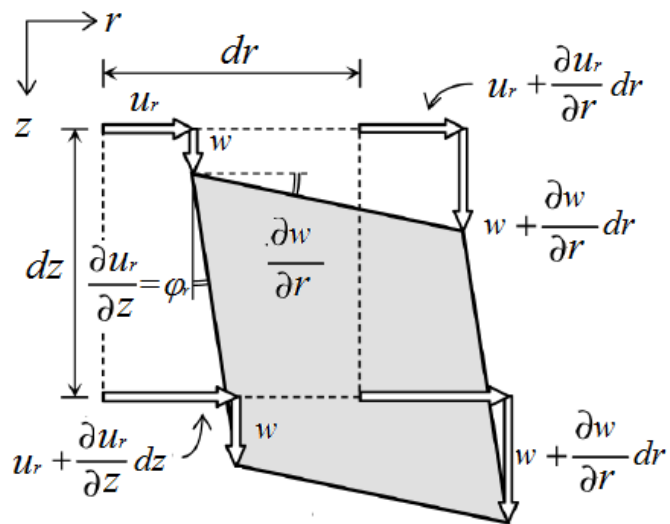
Vyjádřením $\frac{dw}{dr}$ ze vztahu (2.48) získáváme

$$\frac{dw}{dr} = \frac{q_r}{D_s(r)} - \varphi_r, \quad (2.49)$$

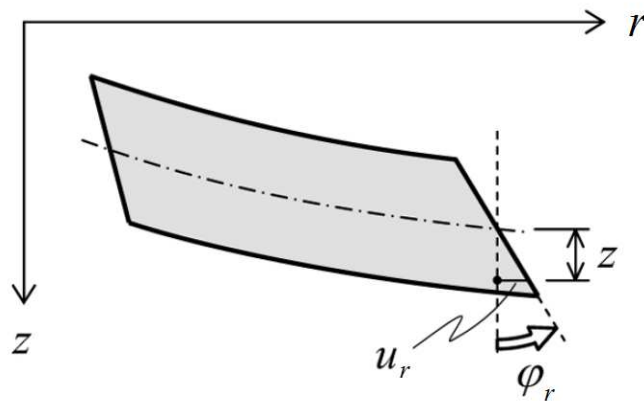
a tedy

$$w(r) = \int_0^r \left(\frac{q_r}{D_s(\xi)} - \varphi_r(\xi) \right) d\xi + C_1, \quad (2.50)$$

kde C_1 je integrační konstanta získaná z průhybové okrajové podmínky a ξ je pomocná integrační proměnná.



Obr. 2.9 Grafické znázornění svislé smykové deformace [5]



Obr. 2.10 Závislost radiálního posunu u_r na souřadnici z [5]

Problém průhybu středně tlusté osově souměrné desky s proměnnou tloušťkou je tím řešen.

2.2 Teorie osově souměrných membrán proměnné tloušťky

Pojem „membrána“ v tomto případě znamená velmi tenkou desku, jejíž ohybová tuhost je zanedbatelně malá a zatížení je tedy přenášeno pouze normálovými silami. V této kapitole budou nejprve odvozeny diferenciální vztahy popisující velmi velké průhyby osově souměrných (tvarem, zatížením i okrajovými podmínkami) membrán podepřených na okraji bez vlivu předpětí z principu minima potenciální energie. S výjimkou zanedbání deskové tuhosti membrány nebudou brána v potaz žádná další zjednodušení, což povede ke skutečnosti, že výsledné diferenciální vztahy nebudou snadno řešitelné. Tato problematika je popisována v literatuře [1,4,7-9,33-40], ale většinou jsou brána v potaz ještě další zjednodušení (např. malé úhly natočení), která při velmi velkých průhybech již způsobují nepřesnost teorie. V další části bude pak postup odvození zobecněn pro případ počátečního předpětí membrány.

2.2.1 Variačně konzistentní odvození základních diferenciálních rovnic bez vlivu předpětí

Základní předpoklady uvažované v následujícím odvození:

- Uvažujeme tenkou kruhovou membránu bez ohybové tuhosti s obecně nekonzstantní tloušťkou $h(r)$ a poloměrem a , zatíženou konstantním hydrostatickým tlakem p , který působí vždy kolmo k ploše membrány
- Uvažujeme Saint Venantův-Kirchhoffův materiálový model, který je nejjednodušším příkladem hyperelastického materiálu. Tento materiálový model je rozšíření lineárního zákona pružnosti, ve kterém jsou deformace a napětí uvažovaná v teorii malých přetvoření nahrazena Greenovým-Lagrangeovým přetvořením (zde značeno ε) a druhým Piolovým-Kirchhoffovým napětím (zde značeno σ).

Začneme tedy vztahy pro veličinu λ v angličtině nazývanou „stretch“. V češtině je tato veličina někdy nazývána jako „protažení“ [45], ale tento termín může snadno vést k nedorozumění. Obecně platí [10,11]

$$\lambda_n = \frac{l_n}{L_n}, \quad (2.51)$$

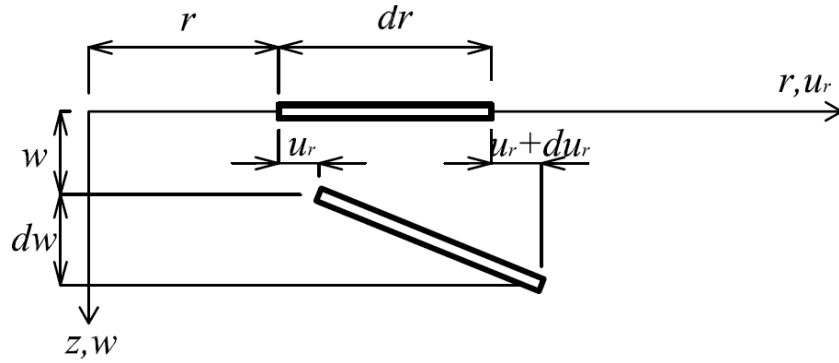
kde index n značí směr, L_n je původní délka segmentu v daném směru a l_n je délka tohoto segmentu po deformaci. Užitím vztahu (2.51) můžeme napsat λ_r (radiální směr) dle Obr. 2.11 jako

$$\lambda_r = \frac{l_r}{L_r} = \frac{\sqrt{(u_r + du_r + dr - u_r)^2 + dw^2}}{dr} = \sqrt{\left(\frac{du_r}{dr} + 1\right)^2 + \left(\frac{dw}{dr}\right)^2} = \sqrt{(u_r' + 1)^2 + w'^2} \quad (2.52)$$

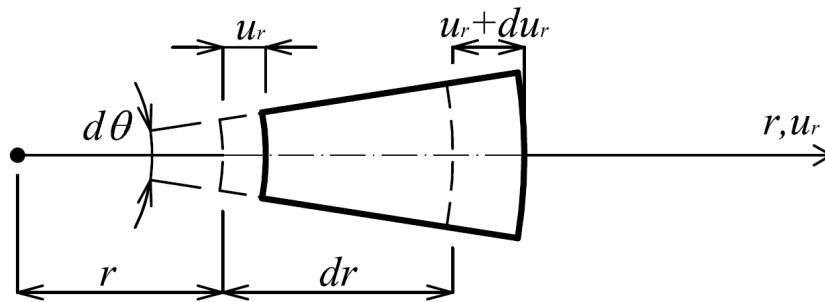
a λ_t (tangenciální směr) dle Obr. 2.12 jako

$$\lambda_t = \frac{l_t}{L_t} = \frac{(r+u_r)d\theta}{r d\theta} = 1 + \frac{u_r}{r}, \quad (2.53)$$

kde u_r je posun v radiálním směru a w je posun ve směru kolmém na rovinu membrány, tedy průhyb.



Obr. 2.11 Grafické znázornění λ_r



Obr. 2.12 Grafické znázornění λ_t

Greenovo-Lagrangeovo přetvoření v jednotlivých směrech se vypočte z poměrů délek segmentů před a po deformaci dle vztahu [10,11]

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2}(\lambda_n^2 - 1). \quad (2.54)$$

Pro radiální a tangenciální Greenovo-Lagrangeovo přetvoření platí tedy dle (2.51) a (2.52)

$$\varepsilon_r = \frac{1}{2}(\lambda_r^2 - 1) = u_r' + \frac{1}{2}(u_r'^2 + w'^2), \quad (2.55)$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{2}(\lambda_t^2 - 1) = \frac{u_r}{r} + \frac{u_r^2}{2r^2}. \quad (2.56)$$

Zapíšeme-li nyní Saint Venantův-Kirchhoffův materiálový zákon pro rovinnou napjatost v maticové formě, dostaneme

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_r \\ \sigma_t \end{pmatrix} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_r + \nu \varepsilon_t) \\ \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_t + \nu \varepsilon_r) \end{pmatrix}, \quad (2.57)$$

kde \mathbf{D} je matice tuhosti pružného materiálu pro rovinnou napjatost.

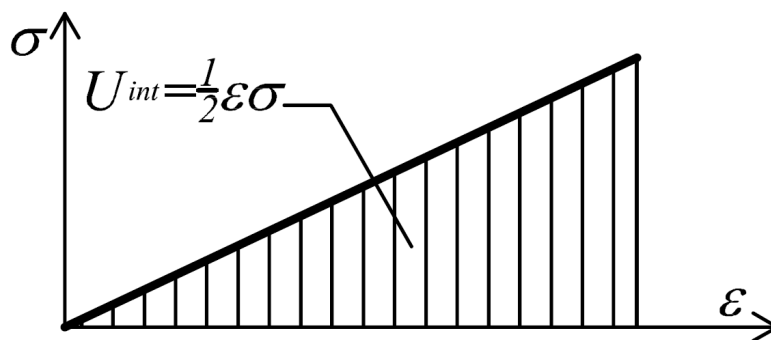
Napišme nyní obecný vztah pro celkovou potenciální energii popisovaného systému, platí

$$E_p = E_{\text{int}} - E_{\text{ext}}, \quad (2.58)$$

kde E_{int} je vnitřní deformační energie (práce vykonaná vnitřními silami) a E_{ext} je práce vykonaná vnějšími silami na výsledných posunech. Pro vnitřní deformační energii platí obecně

$$E_{\text{int}} = \iiint_{V_i} U_{\text{int}} dV_i, \quad (2.59)$$

kde U_{int} je hustota deformační energie (měrná deformační energie) na jednotku počátečního (nedeformovaného) objemu V_i znázorněná na Obr. 2.13.



Obr. 2.13 Hustota deformační energie

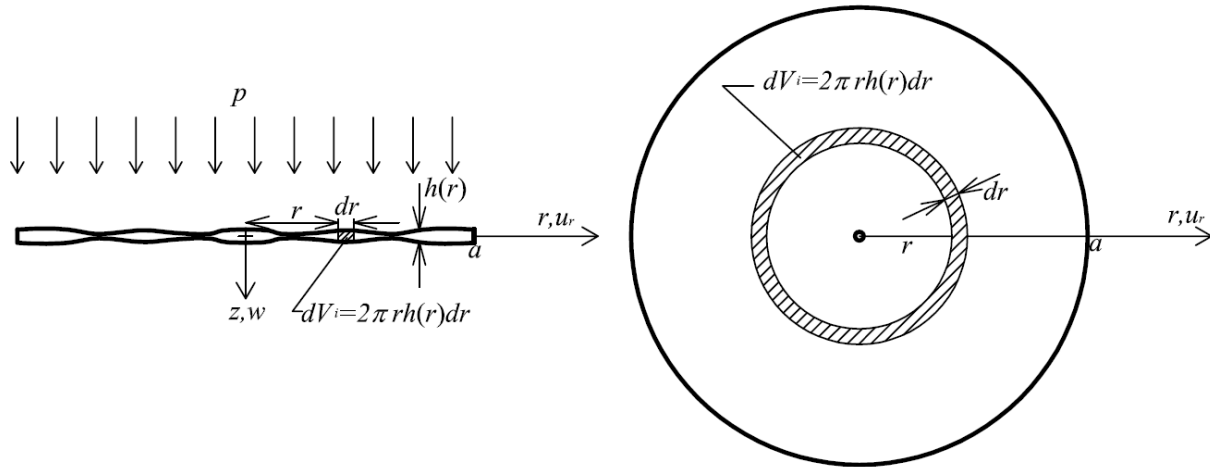
Zapíšeme-li vztah pro měrnou deformační energii v maticové formě, dostaneme

$$U_{\text{int}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}. \quad (2.60)$$

Dosažením vztahu (2.57) do vztahu (2.60) pak dostáváme

$$U_{\text{int}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varepsilon_r & \varepsilon_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_t) \\ \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_t + \nu \varepsilon_r) \end{pmatrix} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} (\varepsilon_r^2 + 2\nu \varepsilon_r \varepsilon_t + \varepsilon_t^2). \quad (2.61)$$

Uvažujme nyní osově symetrickou membránu proměnné tloušťky $h(r)$ v nedeformovaném stavu znázorněnou na Obr. 2.14.



Obr. 2.14 Graficky znázorněný model membrány v řezu (vlevo) a v pohledu shora (vpravo)

V tomto případě se nám trojný integrál ve vztahu (2.59) pro vnitřní deformační energii zjednoduší na jednoduchý integrál

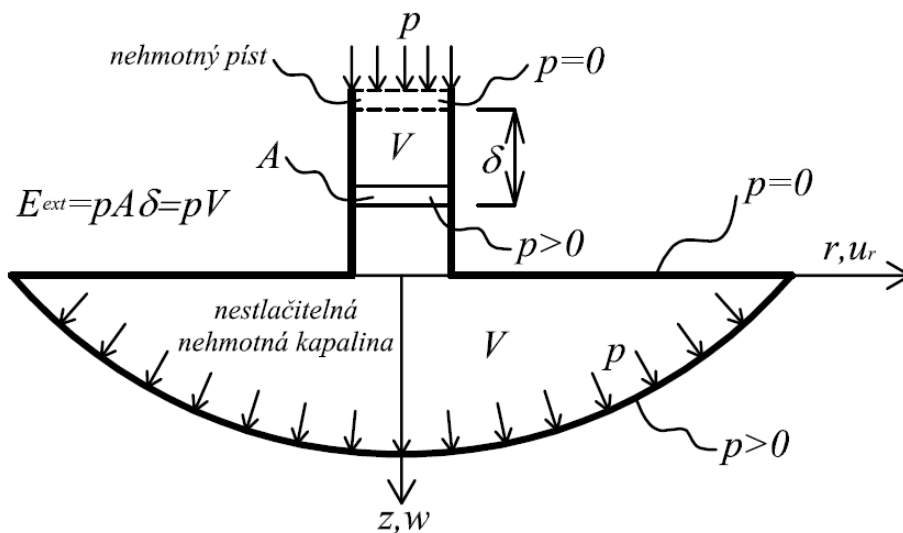
$$E_{\text{int}} = \int_0^a U_{\text{int}} 2\pi r h dr = \int_0^a \frac{E}{2(1-\nu^2)} (\varepsilon_r^2 + 2\nu \varepsilon_r \varepsilon_t + \varepsilon_t^2) 2\pi r h dr. \quad (2.62)$$

Práci vykonanou vnějšími silami (hydrostatickým tlakem působícím na membránu) E_{ext} lze vyjádřit jako (Obr. 2.15)

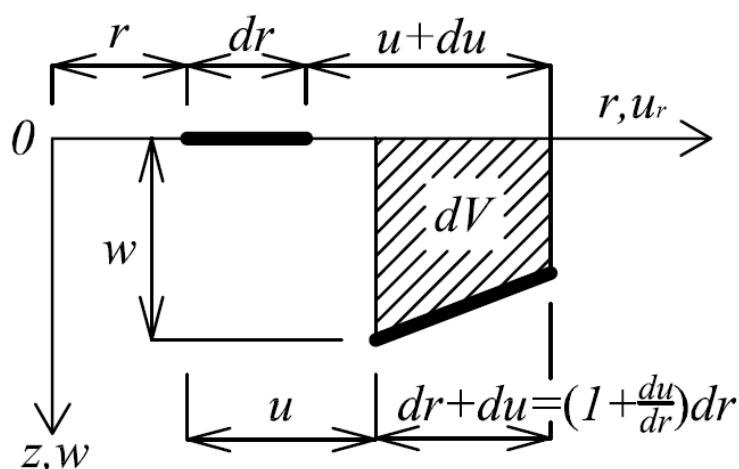
$$E_{\text{ext}} = pV, \quad (2.63)$$

kde V je výsledný objem deformované membrány ohraničený její deformovanou střednicovou plochou, pro který platí (Obr. 2.16)

$$V = \int_0^a w 2\pi(r + u_r)(1 + u_r') dr . \quad (2.64)$$



Obr. 2.15 Grafické znázornění práce vykonané zatížením



Obr. 2.16 Grafické znázornění výpočtu objemu

Dosazením (2.62) a (2.63) do vztahu (2.58) dostáváme výsledný vztah pro celkovou potenciální energii

$$E_p = \int_0^a \frac{E}{2(1-\nu^2)} (\varepsilon_r^2 + 2\nu\varepsilon_r\varepsilon_t + \varepsilon_t^2) 2\pi r h dr - pV . \quad (2.65)$$

K získání konečných diferenciálních vztahů popisujících chování dané konstrukce (membrány) využijeme princip minima potenciální energie.

Platí-li

$$E_p(u_r + \delta u_r, w + \delta w) - E_p(u_r, w) > 0 \quad (2.66)$$

pro všechny libovolně velké nenulové přírůstky $\delta u_r, \delta w$ za současného splnění geometrických okrajových podmínek (budou podrobněji probrány v dalších kapitolách), je celková potenciální energie minimální. Lze dokázat [10], že pro splnění podmínky rovnováhy konstrukce stačí, když uvažujeme pouze první mocniny přírůstků $\delta u_r, \delta u'_r, \delta w, \delta w'$ (vyšší mocniny zanedbáme) a výsledný výraz položíme roven nule. Potom platí

$$\begin{aligned} \delta E_p &= \frac{2\pi E}{1-\nu^2} \int_0^a (\varepsilon_r \delta \varepsilon_r + \nu \delta \varepsilon_r \varepsilon_t + \nu \varepsilon_r \delta \varepsilon_t + \varepsilon_t \delta \varepsilon_t) r h dr - p \delta V = \\ &= 2\pi \int_0^a (\sigma_r \delta \varepsilon_r + \sigma_t \delta \varepsilon_t) r h dr - p \delta V \end{aligned} \quad (2.67)$$

kde δE_p je variace celkové potenciální energie a variace objemu δV je

$$\delta V = 2\pi \int_0^a [\delta w(r + u_r)(1 + u'_r) + w \delta u_r(1 + u'_r) + w(r + u_r) \delta u'_r] dr. \quad (2.68)$$

Variace radiálního a tangenciálního relativního přetvoření $\delta \varepsilon_r$ a $\delta \varepsilon_t$ ve vztahu (2.69) můžeme vyjádřit z (2.55) a (2.56) jako

$$\delta \varepsilon_r = \delta u'_r + u'_r \delta u'_r + w' \delta w' = \delta u'_r(1 + u'_r) + w' \delta w', \quad (2.69)$$

$$\delta \varepsilon_t = \frac{\delta u_r}{r} + \frac{u_r \delta u_r}{r^2} = \frac{\delta u_r}{r} \left(1 + \frac{u_r}{r}\right). \quad (2.70)$$

Dosazením vztahů (2.68), (2.69) a (2.70) do (2.67) dostaneme

$$\begin{aligned} \delta E_p &= 2\pi \int_0^a \left[\sigma_r (\delta u'_r(1 + u'_r) + w' \delta w') + \sigma_t \left(1 + \frac{u_r}{r}\right) \frac{\delta u_r}{r} \right] r h dr - \\ &- 2\pi p \int_0^a [\delta w(r + u_r)(1 + u'_r) + w \delta u_r(1 + u'_r) + w(r + u_r) \delta u'_r] dr. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Užitím pravidla pro integraci per partes můžeme výše uvedený vztah (2.71) zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned}
 \delta E_p = & 2\pi [rh\sigma_r((1+u'_r)\delta u_r + w'\delta w)]_{r=0}^a - 2\pi p[w(r+u_r)\delta u_r]_{r=0}^a + \\
 & + 2\pi \int_0^a \left[-(rh\sigma_r(1+u'_r))' \delta u_r - (rh\sigma_r w')' \delta w + h\sigma_t \left(1 + \frac{u_r}{r}\right) \delta u_r \right] dr - \\
 & - 2\pi p \int_0^a [(r+u_r)(1+u'_r)\delta w - w'(r+u_r)\delta u_r] dr.
 \end{aligned} \tag{2.72}$$

První dva členy vztahu (2.72) pro variaci potenciální energie souvisí s okrajovými podmínkami a nemusí být tedy brány v potaz při určování diferenciálních rovnic rovnováhy. Nebereme-li v potaz první dva členy vztahu (2.72), je zřejmé, že aby platilo

$$\delta E_p = 0 \quad \forall \quad \delta u_r, \delta w \neq 0, \tag{2.73}$$

musí být splněny podmínky

$$-(rh\sigma_r(1+u'_r))' + h\sigma_t \left(1 + \frac{u_r}{r}\right) - pw'(r+u_r) = 0, \tag{2.74}$$

$$-(rh\sigma_r w')' - p(r+u_r)(1+u'_r) = 0. \tag{2.75}$$

Vztahy (2.74) a (2.75) tvoří výslednou soustavu diferenciálních rovnic, jejichž řešením jsou funkce průhybu membrány $w(r)$ a funkce vodorovného posunu $u_r(r)$ pro zatížení konstantním tlakem, který působí stále kolmo k ploše membrány. V případě malých posunů v radiálním směru, $u_r \ll r$, můžeme velikost radiálního posunu u_r zanedbat oproti velikosti r , a také velikost derivace radiálního posunu $u'_r \ll 1$. Takto můžeme výsledné diferenciální vztahy zjednodušit do formy

$$-(rh\sigma_r)' + h\sigma_t - pw'r = 0, \tag{2.76}$$

$$-(rh\sigma_r w')' - pr = 0, \tag{2.77}$$

ve které je lze nalézt např. v [1,4,7-9,33-40].

V důsledku výše zmíněných zjednodušujících předpokladů lze ovšem také předpokládat, že se změní vztahy (2.55) a (2.56). Aby tedy bylo zjednodušení rovnic variačně konzistentní, je vhodné celý postup odvození provést s výše uvedenými zjednodušujícími předpoklady znovu. Vztahy (2.55) a (2.56) pro radiální a tangenciální Greenovo-Lagrangeovo přetvoření se poté změní na

$$\varepsilon_r = u'_r + \frac{1}{2} w'^2, \quad (2.78)$$

$$\varepsilon_t = \frac{u_r}{r} \quad (2.79)$$

a jejich přírůstky (2.69) a (2.70) tedy na

$$\delta\varepsilon_r = \delta u'_r + w' \delta w', \quad (2.80)$$

$$\delta\varepsilon_t = \frac{\delta u_r}{r}. \quad (2.81)$$

Vztah (2.64) pro výsledný objem deformované membrány se změjí na

$$V = \int_0^a w 2\pi r dr \quad (2.82)$$

a jeho přírůstek (2.68) na

$$\delta V = 2\pi \int_0^a \delta w r dr. \quad (2.83)$$

Po dosazení (2.78)-(2.83) do vztahu (2.67) pro variaci potenciální energie dostáváme

$$\delta E_p = 2\pi \int_0^a \left(\sigma_r (\delta u'_r + w' \delta w') + \sigma_t \frac{\delta u_r}{r} \right) r h dr - 2\pi p \int_0^a \delta w r dr. \quad (2.84)$$

Užitím pravidla pro integraci per partes můžeme výše uvedený vztah (2.84) zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \delta E_p = & 2\pi [rh\sigma_r (\delta u_r + w' \delta w)]_{r=0}^a + 2\pi \int_0^a \left[-(rh\sigma_r)' \delta u_r - (rh\sigma_r w')' \delta w + h\sigma_t \delta u_r \right] dr - \\ & - 2\pi p \int_0^a r \delta w dr \end{aligned} \quad (2.85)$$

První člen vztahu (2.85) pro variaci potenciální energie souvisí s okrajovými podmínkami a nemusí být tedy brán v potaz při určování diferenciálních rovnic rovnováhy. Nebereme-li v potaz první člen vztahu (2.85), je zřejmé, že aby platilo (2.73)

$$\delta E_p = 0 \quad \forall \quad \delta u_r, \delta w \neq 0,$$

musí být splněny podmínky

$$-(rh\sigma_r)' + h\sigma_t = 0, \quad (2.86)$$

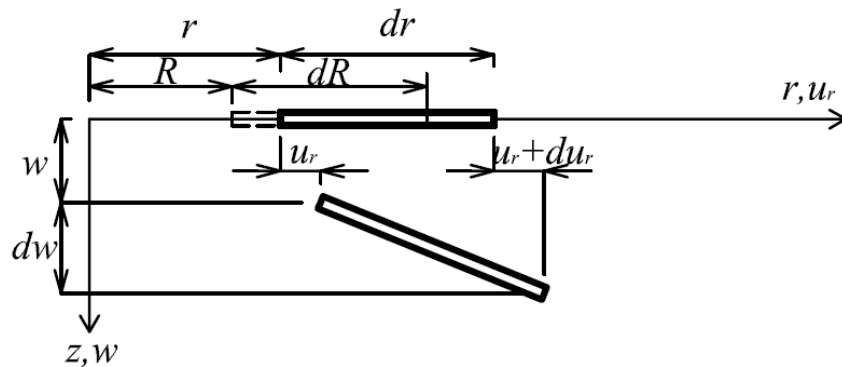
$$-(rh\sigma_r w')' - pr = 0. \quad (2.87)$$

Výsledné vztahy (2.86) a (2.87) tvoří zjednodušenou soustavu diferenciálních rovnic popisující průhyby a posuny osově souměrné membrány. Je dobré si povšimnout, že při tomto

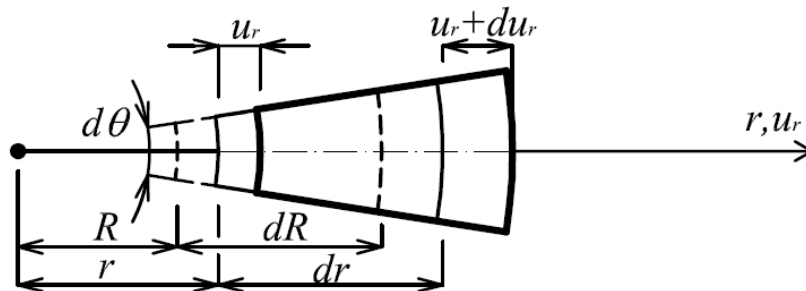
variačně konzistentním odvození není ve vztahu (2.86) přítomen ani člen $pw'r$ na rozdíl od (2.76).

2.2.2 Zobecnění membránových vztahů pro počáteční předpětí

Vzhledem k tomu, že je v praxi téměř nemožné realizovat uvažovanou membránu bez jakéhokoliv předpětí, je vhodné mít možnost toto předpětí do výpočtu zavést za účelem reálnějšího chování matematického modelu při porovnávání spočtených výsledků s experimenty. Předpokládejme nyní, že je membrána ve svém počátečním (nezatíženém) stavu předpjatá a její počáteční „stretch“ je $\lambda_0 > 1$. Tato situace je znázorněna na Obr. 2.17 a Obr. 2.18.



Obr. 2.17 Grafické znázornění λ , s uvažováním předpětí



Obr. 2.18 Grafické znázornění λ_i , s uvažováním předpětí

Pro počáteční „stretch“ λ_0 platí

$$\lambda_0 = \frac{dr}{dR} \rightarrow dR = \frac{dr}{\lambda_0}, \quad R = \frac{r}{\lambda_0}, \quad (2.88)$$

kde dR je původní délka elementu před předepnutím a dr je délka elementu po předepnutí.

Užitím vztahu (2.51) a (2.88) můžeme napsat λ_r (radiální směr) dle Obr. 2.17 jako

$$\lambda_r = \frac{\sqrt{(u_r + du_r + dr - u_r)^2 + dw^2}}{dR} = \lambda_0 \frac{\sqrt{(u_r + du_r + dr - u_r)^2 + dw^2}}{dr} = \lambda_0 \sqrt{(u_r' + 1)^2 + w'^2} \quad (2.89)$$

a λ_t (tangenciální směr) dle Obr. 2.18 jako

$$\lambda_t = \frac{(r+u_r)d\theta}{Rd\theta} = \lambda_0 \frac{(r+u_r)d\theta}{rd\theta} = \lambda_0 \left(1 + \frac{u_r}{r}\right). \quad (2.90)$$

Pro radiální a tangenciální Greenovo-Lagrangeovo přetvoření platí po dosazení (2.89) a (2.90) do (2.54)

$$\varepsilon_r = \frac{1}{2}(\lambda_r^2 - 1) = \lambda_0^2 \left[u_r' + \frac{1}{2}(u_r'^2 + w'^2) \right] + \frac{1}{2}(\lambda_0^2 - 1) = \lambda_0^2 \tilde{\varepsilon}_r + \varepsilon_0, \quad (2.91)$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{2}(\lambda_t^2 - 1) = \lambda_0^2 \left(\frac{u_r}{r} + \frac{u_r'^2}{2r^2} \right) + \frac{1}{2}(\lambda_0^2 - 1) = \lambda_0^2 \tilde{\varepsilon}_t + \varepsilon_0, \quad (2.92)$$

kde $\tilde{\varepsilon}_r$ a $\tilde{\varepsilon}_t$ značí radiální a tangenciální Greenovo-Lagrangeovo přetvoření spočtené podle vzorců (2.55) a (2.56), tedy bez uvažování předpětí, a $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}(\lambda_0^2 - 1)$ je počáteční Greenovo-Lagrangeovo přetvoření.

Dosadíme-li (2.91) a (2.92) do Saint Venantova-Kirchhoffova materiálového zákona pro rovinnou napjatost (2.57), dostaneme

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_r \\ \sigma_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_t) \\ \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_t + \nu \varepsilon_r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E\lambda_0^2}{1-\nu^2} (\tilde{\varepsilon}_r + \nu \tilde{\varepsilon}_t) + \frac{E}{1-\nu} \varepsilon_0 \\ \frac{E\lambda_0^2}{1-\nu^2} (\tilde{\varepsilon}_t + \nu \tilde{\varepsilon}_r) + \frac{E}{1-\nu} \varepsilon_0 \end{pmatrix}, \quad (2.93)$$

kde člen $\sigma_0 = \frac{E}{1-\nu} \varepsilon_0$ odpovídá počátečnímu předpětí.

Substitucí (2.91) a (2.92) do vztahu (2.65) pro celkovou potenciální energii dostáváme

$$\begin{aligned} E_p &= \int_0^a \frac{E}{2(1-\nu^2)} (\varepsilon_r^2 + 2\nu\varepsilon_r\varepsilon_t + \varepsilon_t^2) 2\pi rh dr - pV = \\ &= \int_0^a \frac{E\lambda_0^4}{2(1-\nu^2)} (\tilde{\varepsilon}_r^2 + 2\nu\tilde{\varepsilon}_r\tilde{\varepsilon}_t + \tilde{\varepsilon}_t^2) 2\pi rh dr + \\ &\quad + \int_0^a \frac{E\lambda_0^2\varepsilon_0}{1-\nu} (\tilde{\varepsilon}_r + \tilde{\varepsilon}_t) 2\pi rh(r) dr + \int_0^a \frac{E\varepsilon_0^2}{1-\nu} 2\pi rh dr - pV, \end{aligned} \quad (2.94)$$

kde pro objem V platí (2.64)

$$V = \int_0^a w 2\pi (r+u_r) (1+u_r') dr.$$

V případě, že bychom chtěli získat výsledné diferenciální rovnice s uvážením vlivu předpětí, bylo by nutné pokračovat obdobným postupem, jako v předchozí kapitole. V této práci si ale vystačíme pouze s výsledným vztahem (2.94) pro celkovou potenciální energii, protože výpočet konkrétního příkladu s vlivem předpětí bude proveden optimalizační metodou přímo minimalizací tohoto vztahu a v tomto případě tedy není nutné znát výsledné diferenciální rovnice.

3 Aplikace výpočtu průhybu osově souměrných desek proměnné tloušťky

V této kapitole bude ukázána jedna z možných aplikací teorie popsané výše v 2.1 na problému průhybu optických čoček zatížených vlastní tíhou [12]. Při výrobě optických prvků je velmi důležité umět přesně změřit jejich optické parametry, mezi něž patří tvar jednotlivých ploch těchto prvků. V případě čoček omezených sférickými nebo asférickými plochami se přesné měření tvaru těchto ploch provádí různými způsoby, z nichž nejpresnější jsou interferometrická měření [13]. Odchylka od předepsaného (nominálního) tvaru měřené plochy je způsobena nedokonalostí výroby a dále pak vlastním průhybem (průhybem vlivem vlastní tíhy) této čočky (obecně optického prvku) při jejím měření. Existují tedy určitá omezení (limity) na to, s jakou přesností jsme schopni určit tvar ploch měřené čočky. V práci [14] bylo podrobně pojednáno o vlivu vlastního průhybu planoparalelní desky na přesnost interferometrických měření. Cílem této kapitoly je provést porovnání několika numerických metod řešení diferenciální rovnice pro průhyb tenké osově symetrické desky proměnné tloušťky (průhybu čočky vlastní tíhou), a to pro čočku volně uloženou na okraji a pro čočku kruhově podepřenou na daném vnitřním poloměru. Dále pak bude jedna z těchto metod použita pro výpočet průhybu tlustší čočky teorií, kde není zanedbán vliv smyku, a tento výsledek bude porovnán s výsledkem získaným klasickou teorií pro tenké desky.

3.1 Numerické metody výpočtu průhybu tenké osově souměrné desky

Čočku můžeme z hlediska teorie pružnosti považovat za kruhovou osově souměrnou desku proměnné tloušťky, jejíž průhyb v důsledku její tíhy bude mnohonásobně menší, než je její tloušťka. Jak je známo (a odvozeno v kapitole 2.1.1), můžeme radiální natočení φ_r čočky popsat následujícími rovnicemi (vztahy jsou pro snadnější orientaci uvedeny znovu), platí (2.42)

$$\frac{d^2\varphi_r}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{D} \frac{dD}{dr}\right) \frac{d\varphi_r}{dr} + \left(\frac{\nu}{D} \frac{dD}{dr} - \frac{1}{r}\right) \frac{\varphi_r}{r} = \frac{q_r}{D},$$

(2.45)

$$q_r = -\frac{1}{r} \int_0^r p r dr$$

a (2.35)

$$m_r = D \left(\frac{d\varphi_r}{dr} + \frac{\nu}{r} \varphi_r \right),$$

$$\text{kde } \varphi_r = -\frac{dw}{dr} \text{ a } D(r) = \frac{E h(r)^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Předpokládejme nyní, že čočka má obě plochy sférické (Obr. 3.1), a tedy můžeme její tloušťku $h(r)$ popsat rovnicí

$$h(r) = h_0 - R_1 \left(1 - \sqrt{1 - (r/R_1)^2}\right) + R_2 \left(1 - \sqrt{1 - (r/R_2)^2}\right), \quad (3.1)$$

kde h_0 je tloušťka čočky uprostřed, R_1 je poloměr horní sférické plochy a platí $R_1 > 0$, pokud je horní plocha čočky vypouklá a R_2 je poloměr dolní sférické plochy a platí $R_2 > 0$, pokud je dolní plocha čočky vydutá. Uvažujeme-li pouze zatížení vlastní tíhou čočky, můžeme pro plošné zatížení $p(r)$ psát

$$p(r) = h(r)\rho g, \quad (3.2)$$

kde ρ je hustota materiálu, ze kterého je čočka vyrobena, a g je tíhové zrychlení.

Užitím vztahu (3.1) a jeho dosazením do vztahu pro deskovou tuhost $D(r)$ dostáváme

$$\frac{1}{D(r)} \frac{dD(r)}{dr} = \frac{\frac{3r}{R_2 \sqrt{1 - (r/R_2)^2}} - \frac{3r}{R_1 \sqrt{1 - (r/R_1)^2}}}{h(r)}. \quad (3.3)$$

Dosazením (3.2) do vztahu (2.45) můžeme posouvající sílu q_r zapsat jako

$$q_r = -\frac{1}{r} \int_0^r h(r)\rho g r dr = -\frac{\rho g}{r} [I(r) - I(0)], \quad (3.4)$$

kde

$$\begin{aligned} I(r) &= \int h(r) r dr = \\ &= \frac{r^2}{2} (h_0 - R_1 + R_2) - \frac{R_1 \sqrt{1 - (r/R_1)^2}}{3} (R_1^2 - r^2) + \frac{R_2 \sqrt{1 - (r/R_2)^2}}{3} (R_2^2 - r^2), \end{aligned} \quad (3.5)$$

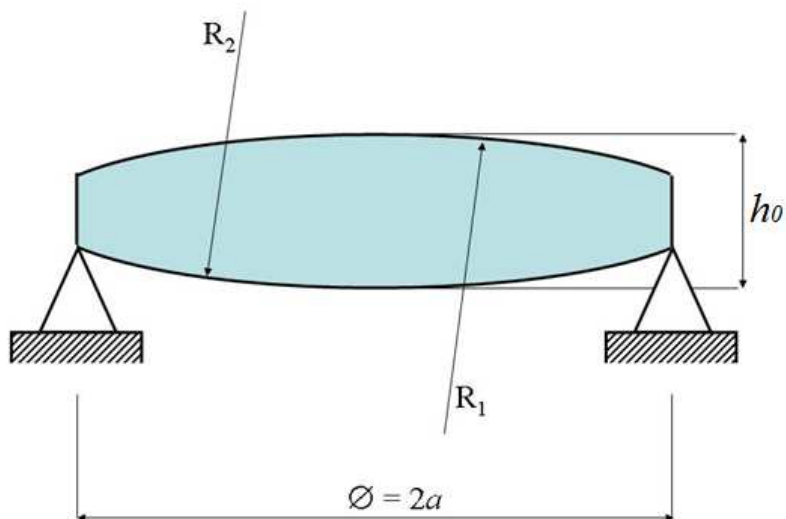
$$I(0) = \frac{R_2^3 - R_1^3}{3}. \quad (3.6)$$

Užitím těchto vztahů a příslušných okrajových podmínek pak můžeme rovnici (2.42) numericky řešit. Okrajové podmínky nám charakterizují způsob uložení měřené čočky. Například v případě volného uložení čočky na okraji (Obr. 3.1) mají okrajové podmínky tvar (za předpokladu možnosti vodorovného posunu v podporách)

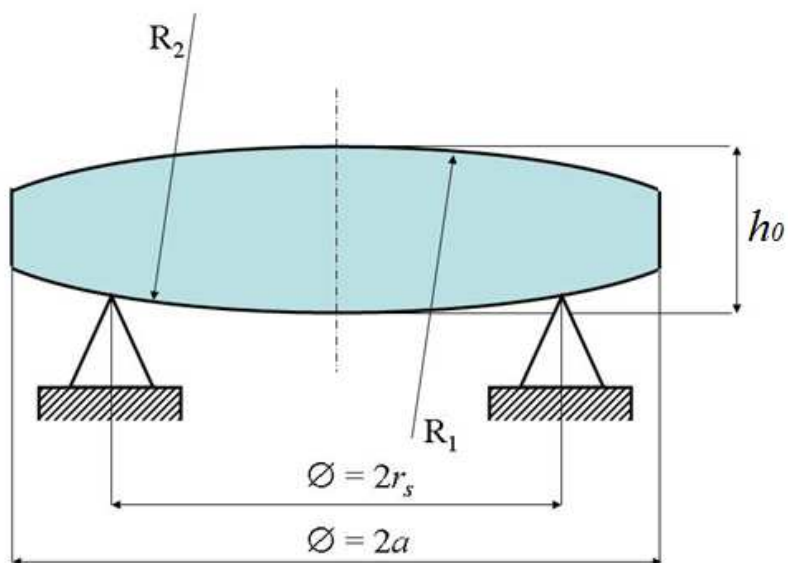
$$w(r)|_{r=a} = 0, \quad m_r(r)|_{r=a} = 0, \quad (3.7)$$

ze symetrie potom vyplývá

$$\varphi_r(r)|_{r=0} = 0. \quad (3.8)$$



Obr. 3.1 Schéma čočky volně podepřené na okraji



Obr. 3.2 Schéma čočky volně podepřené uvnitř

V případě, že čočka není podepřena na okraji, ale na zvoleném poloměru r_s (Obr. 3.2), vznikne v bodě $r = r_s$ nespojitost v posouvací síle a musíme hledanou funkci průhybu rozdělit na funkci $w_1(r)$ platící na intervalu $r \in [0, r_s]$ a funkci $w_2(r)$ platící na intervalu $r \in [r_s, a]$. Okrajové podmínky se pak změň na

$$w_1(r)|_{r=r_s} = w_2(r)|_{r=r_s} = 0, \quad \varphi_{r1}(r)|_{r=0} = 0, \quad m_{r2}(r)|_{r=a} = 0. \quad (3.9)$$

Dále je nutno předepsat podmínky návaznosti v bodě $r = r_s$, ty pak mají tvar

$$\varphi_{r1}(r)|_{r=r_s} = \varphi_{r2}(r)|_{r=r_s}, \quad m_{r1}(r)|_{r=r_s} = m_{r2}(r)|_{r=r_s}. \quad (3.10)$$

Průběh posouvající síly $q_{r1}(r)$ pro interval $r \in [0, r_s]$ zůstane stejný jako pro čočku po obvodě podepřenou. V bodě $r = r_s$ dojde ke skokové změně posouvající síly v důsledku reakce v podpoře a průběh posouvající síly na intervalu $r \in [r_s, a]$ se změň na $q_{r2}(r)$, platí

$$q_{r1}(r) = -\frac{\rho g}{r} [I(r) - I(0)], \quad q_{r2}(r) = \frac{\rho g}{r} [I(a) - I(r)]. \quad (3.11)$$

Rozdíl posouvajících sil $q_{r1}(r_s)$ a $q_{r2}(r_s)$ se pak rovná hodnotě podporové reakce.

V další části si ukážeme řešení rovnice (2.42) pomocí různých numerických metod. Abychom mohli porovnat různé numerické metody, budeme uvažovat čočku mající následující parametry: poloměry křivosti $R_1 = 600$ mm, $R_2 = -600$ mm, středovou tloušťku $h_0 = 5$ mm a průměr $2a = 100$ mm (a je poloměr čočky). Čočka je zhotovena ze skla Schott N-BK7, jehož parametry jsou: Poissonovo číslo $\nu = 0.206$, Youngův modul $E = 82 \cdot 10^9$ Pa a objemová hustota $\rho = 2510$ kg/m³. Dále budeme uvažovat hodnotu tíhového zrychlení $g = 9.81$ m/s² a vlnovou délku světla $\lambda = 633$ nm, v jejichž násobcích bude uváděn výsledný průhyb čočky.

3.1.1 Řešení metodou Runge-Kutta

Rovnici (2.42) můžeme psát ve tvaru

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} = \frac{q_r(r)}{D(r)} - \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{D(r)} \frac{dD(r)}{dr} \right] \frac{d\varphi}{dr} - \left[\frac{\nu}{D(r)} \frac{dD(r)}{dr} - \frac{1}{r} \right] \frac{\varphi}{r} = f(r, \varphi, \varphi'), \quad (3.12)$$

pro který lze najít iterativní řešení pomocí metody Runge-Kutta [15] čtvrtého řádu, popsané vztahy

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \Delta r \varphi'_n + \frac{\Delta r^2}{6} (k_1 + k_2 + k_3), \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned}\varphi'_{n+1} &= \varphi'_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ k_1 &= \Delta r f(r_n, \varphi_n, \varphi'_n), \\ k_2 &= \Delta r f\left(r_n + \frac{\Delta r}{2}, \varphi_n + \frac{\Delta r}{2}\varphi'_n, \varphi'_n + \frac{k_1}{2}\right), \\ k_3 &= \Delta r f\left(r_n + \frac{\Delta r}{2}, \varphi_n + \frac{\Delta r}{2}\varphi'_n + \frac{\Delta r}{4}k_1, \varphi'_n + \frac{k_2}{2}\right), \\ k_4 &= \Delta r f\left(r_n + \Delta r, \varphi_n + \Delta r\varphi'_n + \frac{\Delta r}{2}k_2, \varphi'_n + k_3\right).\end{aligned}$$

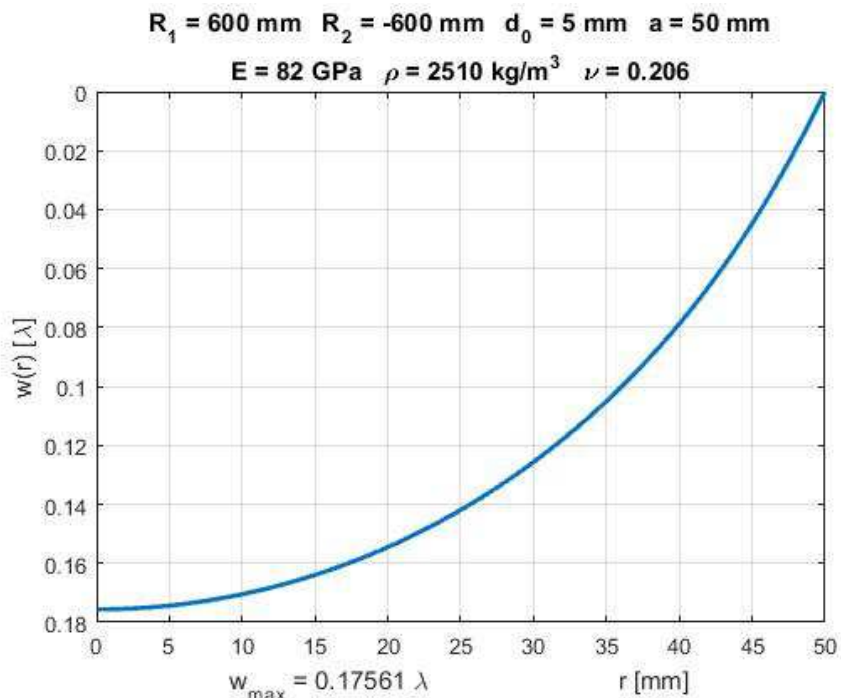
Celý interval $[0, a]$ je rozdělen na m podintervalů o délce Δr . Naše řešení by mělo splňovat okrajové podmínky (3.7) a (3.8) v případě uložení na okraji čočky, nebo pak okrajové podmínky (3.9) a podmínky návaznosti (3.10) v případě uložení na vnitřním poloměru.

Uvažujme nyní případ kloubového podepření na okraji desky a začněme výpočet např. v $r=0$, kde víme, že $\varphi(r)|_{r=0} = 0$. Tím jsme se dostali do situace, že nám v počátečním bodě chybí informace o φ' . To můžeme vyřešit tak, že vypočteme funkční hodnotu $\varphi_r(r)|_{r=a}$, hodnotu derivace $\varphi'_r(r)|_{r=a}$ a následně z těchto hodnot radiální moment $m_r(r)|_{r=a}$ podle vztahu (2.35) pro dvě různé vhodně zvolené počáteční hodnoty $\varphi'_r(r)|_{r=0}$ a z výsledných dvou různých hodnot $m_r(r)|_{r=a}$ určíme interpolací takovou počáteční hodnotu $\varphi'_r(r)|_{r=0}$, aby platila momentová okrajová podmínka (3.7). Zvolme tedy počáteční hodnoty např. $\varphi'_{r1}(r)|_{r=0} = -1$ a $\varphi'_{r2}(r)|_{r=0} = 1$. Po výpočtu řešení dostaneme pro volené počáteční hodnoty $\varphi'_{r1}(r)|_{r=0}$ a $\varphi'_{r2}(r)|_{r=0}$ hodnoty momentů $m_{r1}(r)|_{r=a}$ a $m_{r2}(r)|_{r=a}$. Z výše zmíněné momentové okrajové podmínky (3.7) lze pak lineární interpolací určit správnou počáteční hodnotu $\varphi'_r(r)|_{r=0}$ jako

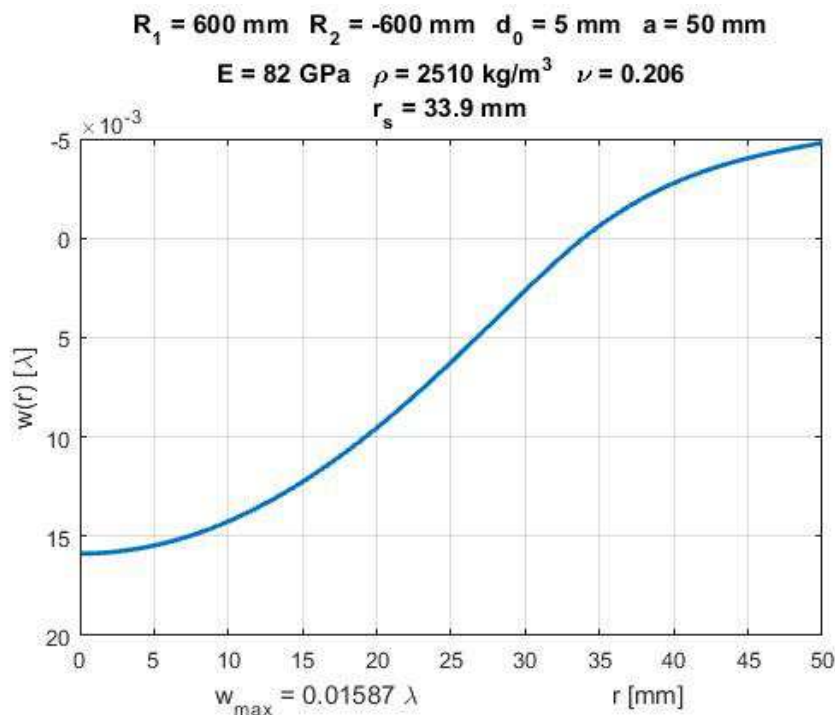
$$\varphi'_r(r)|_{r=0} = -\frac{\varphi'_{r1}(r)|_{r=0} - \varphi'_{r2}(r)|_{r=0}}{m_{r1}(r)|_{r=a} - m_{r2}(r)|_{r=a}} m_{r1}(r)|_{r=a} + \varphi'_{r1}(r)|_{r=0}. \quad (3.14)$$

Pro řešení podepření čočky uvnitř poloměru můžeme použít předchozí rovnice bez výrazné změny. Uvažujme nyní, že celý interval $[0, a]$ je opět rozdělen na m podintervalů o délce Δr a interval $[0, r_s]$ je rozdělen na p podintervalů o délce Δr , pak na intervalu $[0, r_s]$ použijeme postup totožný s řešením čočky podepřené na okraji. Abychom vypočetli hodnoty funkce φ na celém intervalu $[0, a]$, použijeme na zbývající části $[r_s, a]$ stejný postup s tím rozdílem, že v bodě $r = r_s$ se změní průběh posouvací síly z $q_{r1}(r)$ na $q_{r2}(r)$ dle vzorce (3.11) a jako počáteční hodnoty $\varphi(r)|_{r=r_s}$ a $\varphi'(r)|_{r=r_s}$ použijeme konečné hodnoty z prvního intervalu. Problém neznámé počáteční hodnoty φ'_r můžeme vyřešit postupem uvedeným výše.

Jakmile známe řešení rovnice (2.42), tedy funkci $\varphi_r(r)$, můžeme ze vztahu (2.43) určit integrací neznámou funkci $w(r)$ za použití průhybových okrajových podmínek (3.7), nebo (3.9). Obr. 3.3 a Obr. 3.4 ilustrují výsledky pro podepření čočky na okraji a na vnitřním poloměru získané výpočtem v prostředí Matlab. Krok pro Runge-Kuttovu metodu byl zvolen $\Delta r = 0,05$ mm.



Obr. 3.3 Průběh řešení Runge-Kuttovou metodou pro podepření na okraji čočky



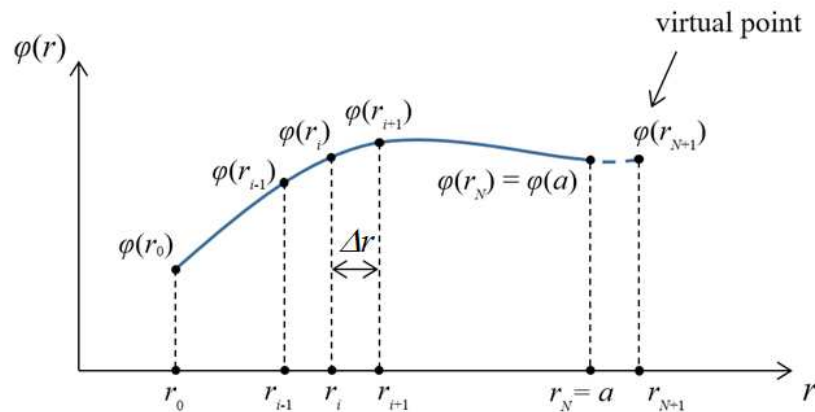
Obr. 3.4 Průběh řešení Runge-Kuttovou metodou pro podepření na vnitřním poloměru r_s

3.1.2 Řešení metodou centrálních diferencí

Metoda centrálních diferencí [16] spočívá ve vyjádření jednotlivých derivací hledané funkce v daném bodě jako lineárních kombinací funkčních hodnot v bodech okolních. První a druhou derivaci hledané funkce $\varphi(r)$ můžeme zapsat jako

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2\Delta r} + O(\Delta r^2) \approx \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2\Delta r}, \quad \frac{d^2\varphi}{d^2r} = \frac{\varphi_{i-1} - 2\varphi_i + \varphi_{i+1}}{\Delta r^2} + O(\Delta r^2) \approx \frac{\varphi_{i-1} - 2\varphi_i + \varphi_{i+1}}{\Delta r^2}, \quad (3.15)$$

kde φ_i je hodnota hledané funkce v daném bodě r_i ($i = 0, \dots, N$, tedy interval $[0, a]$ je rozdělen na N subintervalů), φ_{i-1} a φ_{i+1} jsou hodnoty hledané funkce v okolních bodech r_{i-1} a r_{i+1} (Obr. 3.5), $\Delta r = r_i - r_{i-1} = r_{i+1} - r_i$ je vzdálenost mezi jednotlivými body a $O(\Delta r^2)$ označuje veličinu řádu Δr^2 (v tomto případě chybu aproximace).



Obr. 3.5 Metoda konečných diferencí

Substitucí vztahů (3.15) do rovnice (2.42) dostáváme základní rovnici pro řešení tohoto problému metodou konečných diferencí

$$\frac{\varphi_{i-1} - 2\varphi_i + \varphi_{i+1}}{\Delta r^2} + A(r_i) \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2\Delta r} + B(r_i)\varphi_i = C(r_i) \quad i = 1, 2, 3, \dots, N, \quad (3.16)$$

kde hodnoty

$$A(r) = \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{D(r)} \frac{dD(r)}{dr} \right], \quad B(r) = \left[\frac{\nu}{D(r)} \frac{dD(r)}{dr} - \frac{1}{r} \right] \frac{1}{r}, \quad C(r) = \frac{q_r(r)}{D(r)} \quad (3.17)$$

mohou být spočteny podle vzorců (3.3) až (3.6). Okrajovou podmínkou (3.8) je dána hodnota hledané funkce $\varphi(r)$ v bodě $r=0$, a tuto hodnotu tedy není nutno zahrnovat mezi hledané neznámé (proto v (3.16) $i \neq 0$). Užitím vztahu (2.35) má momentová okrajová podmínka (3.7) tvar

$$m_r(r)|_{r=a} = D(r_N) \left[\frac{\varphi_{N+1} - \varphi_{N-1}}{2\Delta r} + \frac{\nu}{r} \varphi_N \right] = 0. \quad (3.18)$$

Ačkoliv φ_{N+1} nepatří mezi neznámé hodnoty na intervalu, který řešíme, vyskytuje se tato hodnota v poslední rovnici, kde $i = N$, a je tedy nutné ji vyjádřit z momentové okrajové podmínky (3.18) jako

$$\varphi_{N+1} = -\frac{2\Delta r \nu}{r_N} \varphi_N + \varphi_{N-1}, \quad (3.19)$$

a následně poté dosadit do poslední rovnice. Pro ilustraci formulujme soustavu rovnic (3.16) maticově. Řešením jsou hodnoty funkce φ v jednotlivých bodech intervalu $(0, a]$, platí

$$\mathbf{A}\mathbf{f} = \mathbf{C}, \quad (3.20)$$

kde \mathbf{A} je tridiagonální matice soustavy z prostoru $R^{N \times N}$, kde prvky δ_i hlavní diagonály pro hodnoty r_i , kde $i = 1, \dots, N$, budou dány vztahy

$$\delta_i|_{i < N} = -\frac{2}{\Delta r^2} + B(r_i), \quad \delta_i|_{i=N} = -\frac{2}{\Delta r^2} - \frac{2\nu}{r_N \Delta r} - A(r_N) \frac{\nu}{r_N} + B(r_N). \quad (3.21)$$

Prvky horní vedlejší diagonály α_i , kde $i = 1, \dots, N-1$, poté budou dány vztahem

$$\alpha_i = \frac{1}{\Delta r^2} + \frac{A(r_i)}{2\Delta r} \quad (3.22)$$

a prvky dolní vedlejší diagonály β_i , kde $i = 2, \dots, N$, můžeme zapsat jako

$$\beta_i|_{i < N} = \frac{1}{\Delta r^2} - \frac{A(r_i)}{2\Delta r}, \quad \beta_i|_{i=N} = \frac{2}{\Delta r^2}. \quad (3.23)$$

Dále ve vztahu (3.20) \mathbf{f} značí sloupcovou matici z prostoru $R^{N \times 1}$ vypočítávaných hodnot φ_i , $i = 1, \dots, N$, a \mathbf{C} je sloupcová matice pravé strany soustavy z prostoru $R^{N \times 1}$, jejíž prvky jsou dány hodnotami $C(r_i)$, kde $i = 1, \dots, N$.

Výsledná soustava rovnic má tedy tvar

$$\begin{pmatrix}
 -\frac{2}{\Delta r^2} + B(r_1) & \frac{1}{\Delta r^2} + \frac{A(r_1)}{2\Delta r} & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{1}{\Delta r^2} - \frac{A(r_2)}{2\Delta r} & -\frac{2}{\Delta r^2} + B(r_2) & \frac{1}{\Delta r^2} + \frac{A(r_2)}{2\Delta r} & 0 & 0 \\
 0 & \frac{1}{\Delta r^2} - \frac{A(r_3)}{2\Delta r} & -\frac{2}{\Delta r^2} + B(r_3) & \frac{1}{\Delta r^2} + \frac{A(r_3)}{2\Delta r} & 0 \\
 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\
 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \frac{1}{\Delta r^2} - \frac{A(r_{N-1})}{2\Delta r} & -\frac{2}{\Delta r^2} + B(r_{N-1}) & \frac{1}{\Delta r^2} + \frac{A(r_{N-1})}{2\Delta r} & 0 & 0 \\
 0 & \frac{2}{\Delta r^2} & -\frac{2}{\Delta r^2} - \frac{2\nu}{r_N \Delta r} - A(r_N) \frac{\nu}{r_N} + B(r_N) & 0 & 0
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 \varphi_1 \\
 \varphi_2 \\
 \varphi_3 \\
 \varphi_4 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \varphi_{N-1} \\
 \varphi_N
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 C(r_1) \\
 C(r_2) \\
 C(r_3) \\
 C(r_4) \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 C(r_{N-1}) \\
 C(r_N)
 \end{pmatrix}
 \quad (3.24)$$

Řešením soustavy (3.24) získáme hodnoty průběhu funkce φ , a poté lze numerickou integrací (například lichoběžníkovou metodou [15,16]) spočítat hodnoty funkce w podle vztahu (2.43)

$$w(r) = -\int_0^r \varphi(\xi) d\xi + C_1,$$

kde C_1 je integrační konstanta, kterou lze určit z průhybové okrajové podmínky.

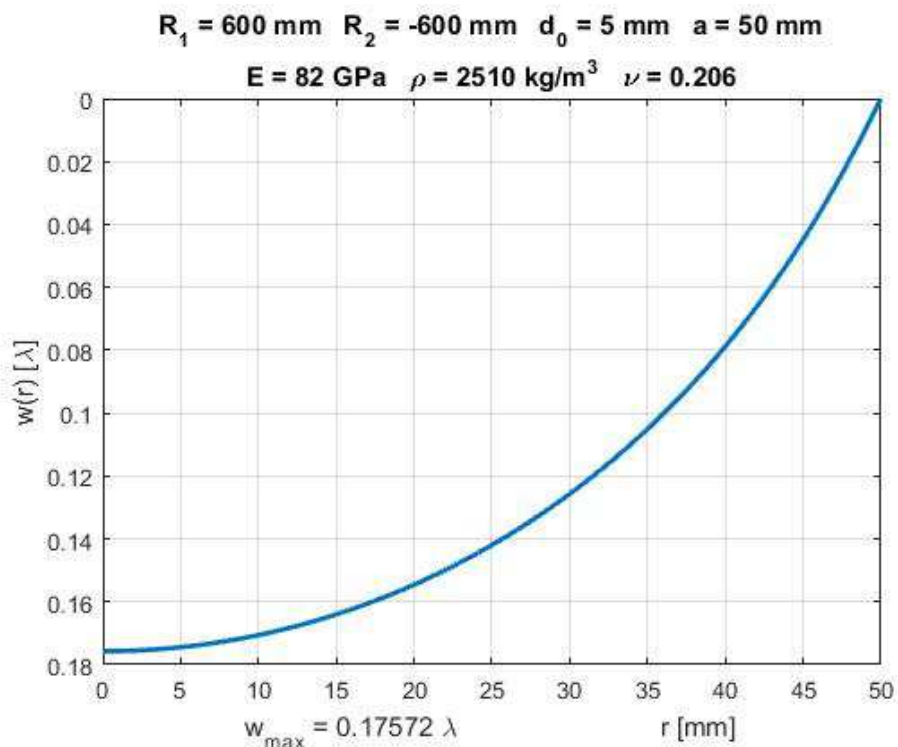
Doposud byl postup výpočtu pro čočku podepřenou na okraji a čočku podepřenou na libovolném vnitřním poloměru r_s stejný s tím rozdílem, že při podepření na okraji lze vektor pravé strany rovnice pro všechny hodnoty r spočítat ze vztahu (3.4), ale při podepření na vnitřním poloměru je nutno použít vztahy (3.11). Integrační konstantu C_1 lze určit z průhybové okrajové podmínky (3.9), poté platí

$$C_1 = \int_0^{r_s} \varphi(\xi) d\xi. \quad (3.25)$$

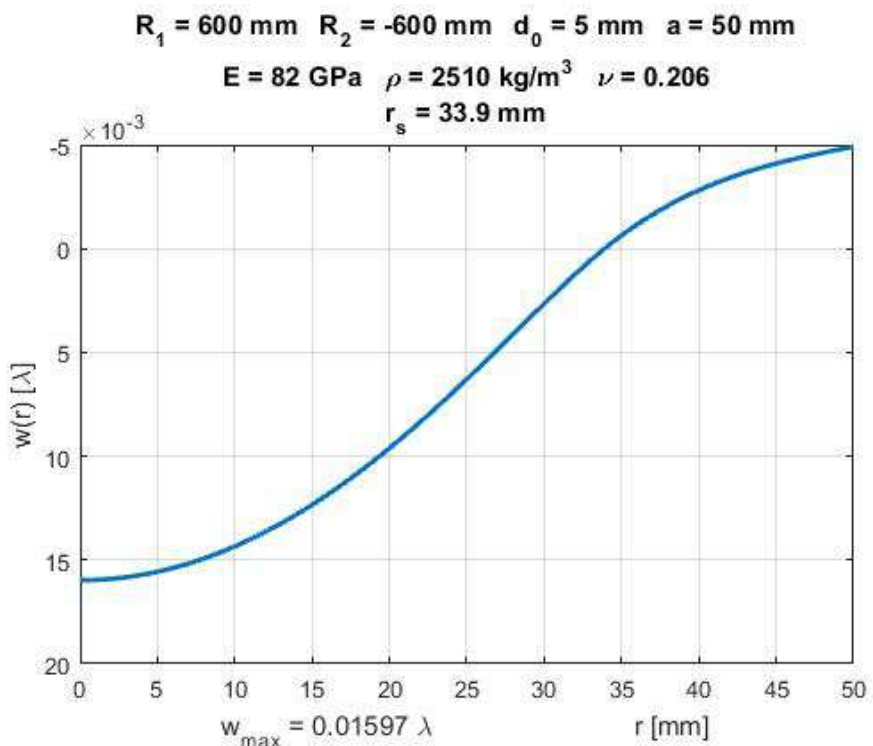
Pro případ uložení na okraji platí $r_s = a$ a vztah pro integrační konstantu C_1 se změní na

$$C_1 = \int_0^a \varphi(\xi) d\xi. \quad (3.26)$$

Na Obr. 3.6 vidíme výsledný průběh průhybu dané čočky podepřené na okraji pro $\Delta r = 0,05 \text{ mm}$ spočtený v prostředí Matlab. Na Obr. 3.7 je pak znázorněn výsledný průběh průhybu dané čočky podepřené na poloměru $r_s = 0,678 \cdot a$ pro $\Delta r = 0,05 \text{ mm}$.



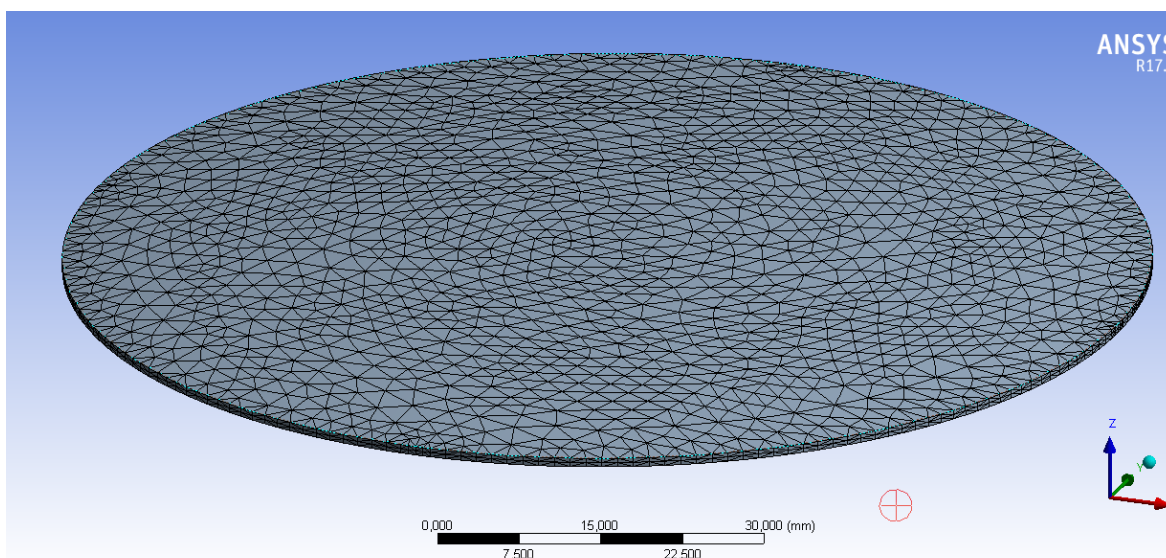
Obr. 3.6 Průběh řešení metodou konečných diferencí pro podepření na okraji čočky



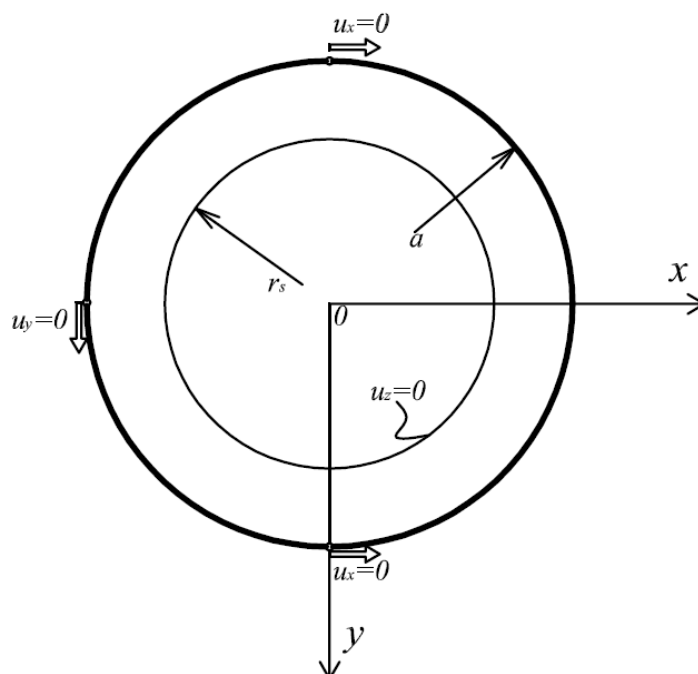
Obr. 3.7 Průběh řešení metodou konečných diferencí pro podepření čočky na poloměru r_s

3.1.3 Řešení pomocí programu ANSYS

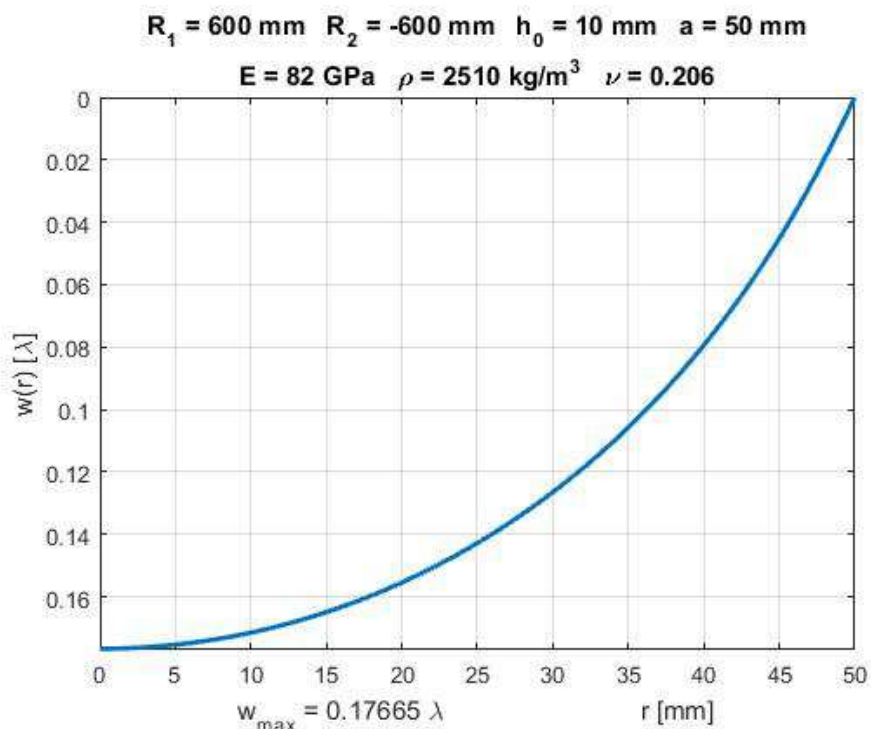
Za účelem ověření správnosti výsledků dosažených předchozími numerickými metodami byla zvolená čočka vymodelována ve 3D konečně prvkovém software ANSYS [17]. Byly použity čtyřstěnné prvky o délce hrany cca 1mm. Výsledná konečně-prvková síť je vykreslena na Obr. 3.8 (prvky jsou pro přehlednost obrázku větší). Okrajové podmínky použité pro výpočet jsou znázorněny na Obr. 3.9. Výsledky výpočtu pro čočku podepřenou na okraji ($r_s = a$) jsou vykresleny na Obr. 3.10 a pro čočku podepřenou na poloměru $r_s = 0,678 \cdot a$ na Obr. 3.11.



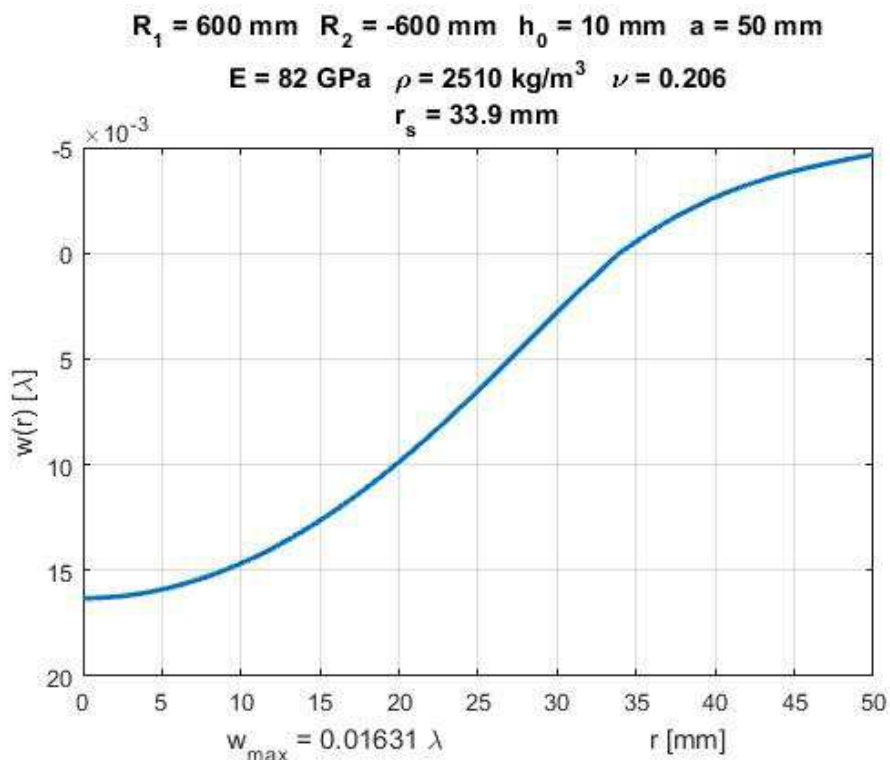
Obr. 3.8 Konečně-prvková síť tvořená čtyřstěny



Obr. 3.9 Okrajové podmínky použité pro výpočet programem ANSYS (pohled shora na střednicovou plochu čočky, osa z směřuje do roviny obrázku)



Obr. 3.10 Výsledek řešení programem ANSYS pro podepření na okraji čočky



Obr. 3.11 Výsledek řešení programem ANSYS pro podepření čočky na vnitřním poloměru r_s

Závěrem lze říci, že pro tento příklad optické čočky se výsledky obou numerických metod téměř přesně shodují s konečně-prvkovým řešením programu ANSYS (viz. Tab. 3.1) a že pro výpočet průhybu takto tenké čočky lze bez problému použít klasickou teorii pro tenké desky popsanou v kapitole 2.1.1.

Tab. 3.1 Porovnání výsledků jednotlivých numerických metod výpočtu průhybu tenké čočky

Metoda výpočtu	Způsob uložení	
	w_{\max} pro kloubové uložení na okraji čočky	w_{\max} pro kloubové uložení na poloměru $r_s = 0,678a$
Metoda Runge-Kutta	0,17561 $\lambda = 111,16$ nm	0,01587 $\lambda = 10,05$ nm
Metoda centrálních diferencí	0,17572 $\lambda = 111,23$ nm	0,01597 $\lambda = 10,11$ nm
ANSYS	0,17665 $\lambda = 111,81$ nm	0,01631 $\lambda = 10,32$ nm

3.2 Numerické metody výpočtu průhybu tlustší osově symetrické desky

Následně si ukážeme výpočet tlustší čočky metodou konečných diferencí podle teorie popsané v kapitole 2.1.2, kde je již brán v úvahu vliv smyku, a porovnáme tento výsledek s řešením pro tenké desky a konečně-prvkovým řešením programu ANSYS.

V tomto případě budeme uvažovat čočku mající následující parametry: poloměry křivosti $R_1 = 600$ mm, $R_2 = -600$ mm, středovou tloušťku $h_0 = 20$ mm a průměr $2a = 100$ mm (a je poloměr čočky). Čočka je zhotovena ze skla Schott N-BK7, jehož parametry jsou: Poissonovo číslo $\nu = 0.206$, Youngův modul $E = 82 \cdot 10^9$ Pa a objemová hustota $\rho = 2510$ kg/m³. Dále budeme uvažovat hodnotu tíhového zrychlení $g = 9.81$ m/s² a vlnovou délku světla $\lambda = 633$ nm, v jejíchž násobcích bude uváděn výsledný průhyb čočky.

3.2.1 Řešení pro tlustší desky metodou centrálních diferencí

Jak je zmíněno v kapitole 2.1.2, řešení pro tlustší desky se od klasického řešení liší vztahem mezi natočením průřezu φ_r a průhybem w . Postup pro výpočet hodnot funkce φ_r je tedy stejný jako v 3.1.2. Výslednou průhybovou funkci pak získáme ze vztahu (2.50)

$$w(r) = \int_0^r \left(\frac{q_r(\xi)}{D_s(\xi)} - \varphi_r(\xi) \right) d\xi + C_1,$$

kde C_1 je integrační konstanta, kterou lze určit z průhybové okrajové podmínky (3.9) jako

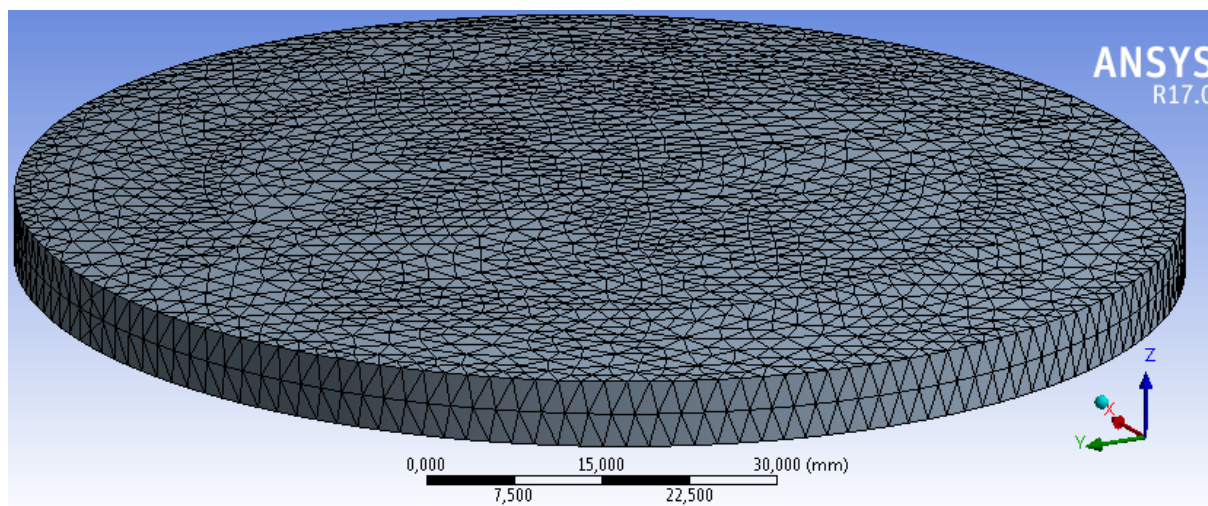
$$C_1 = -\int_0^{r_s} \left(\frac{q_r(\xi)}{D_s(\xi)} - \varphi_r(\xi) \right) d\xi. \quad (3.27)$$

Pro případ uložení na okraji platí $r_s = a$, a vztah pro integrační konstantu C_1 se změni na

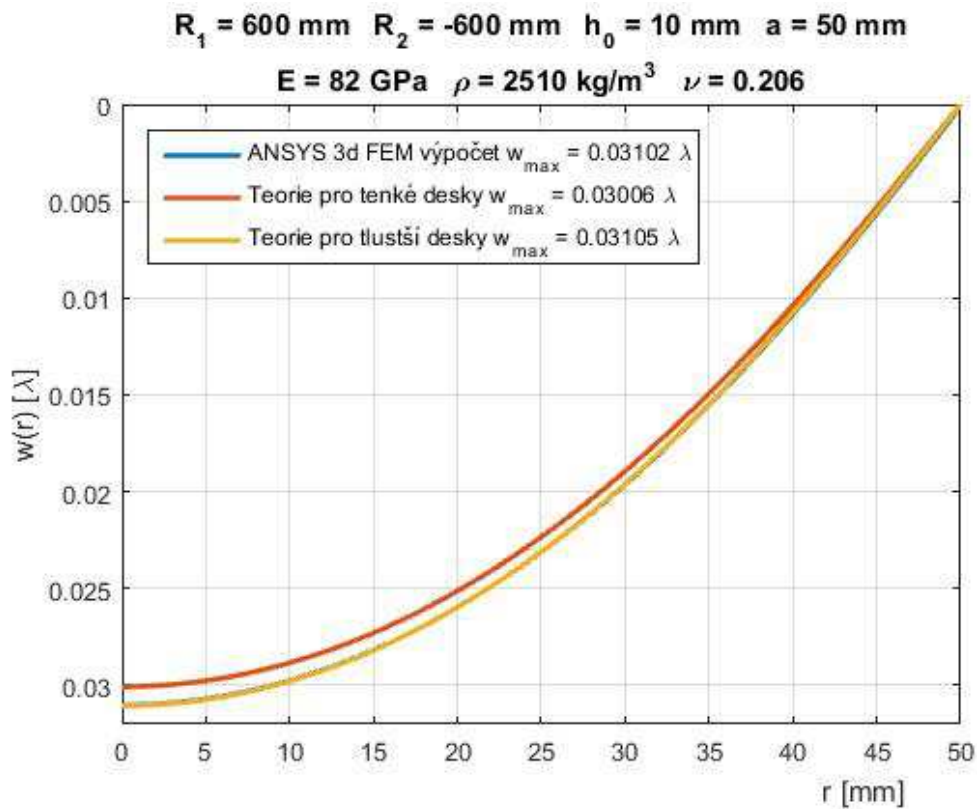
$$C_1 = -\int_0^a \left(\frac{q_r(\xi)}{D_s(\xi)} - \varphi_r(\xi) \right) d\xi. \quad (3.28)$$

3.2.2 Porovnání výsledků

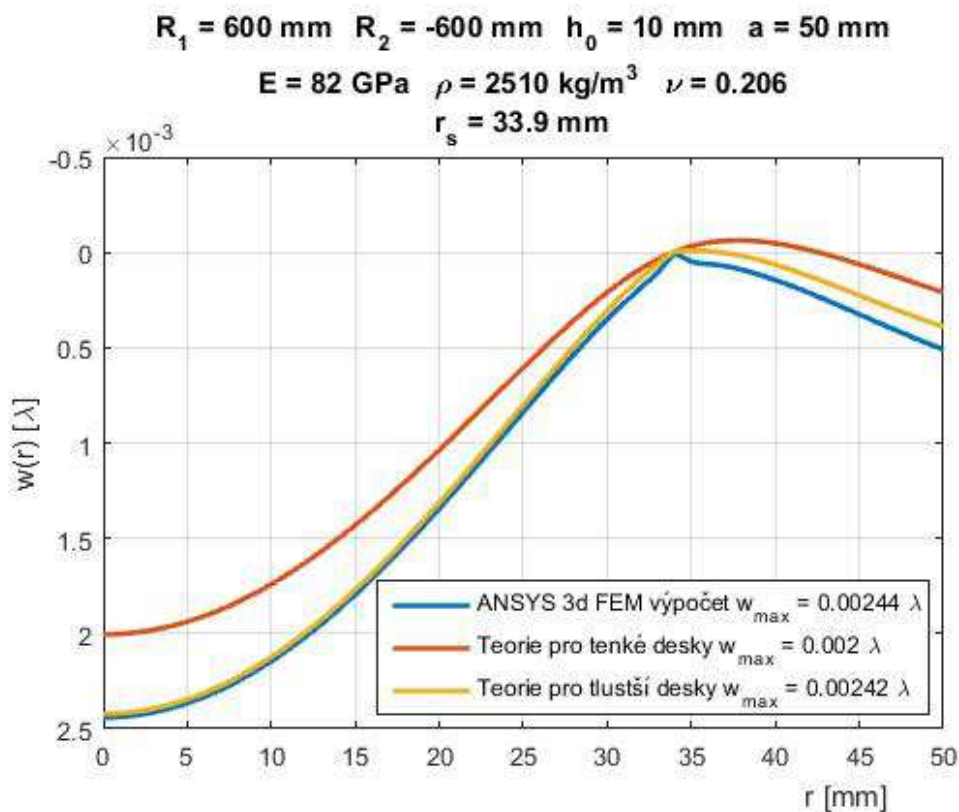
Na Obr. 3.13 a Obr. 3.14 vidíme porovnání výsledků získaných výpočtem dané úlohy metodou centrálních diferencí ($\Delta r = 0,05 \text{ mm}$) z klasické teorie pro tenké desky a teorie pro tlustší desky s výsledky z programu ANSYS, kde byly použity čtyřstěnné prvky o délce hrany cca 1mm. Výsledná konečně-prvková síť je vykreslena na Obr. 3.12 (prvky jsou pro přehlednost obrázku větší). Okrajové podmínky použité pro výpočet jsou znázorněny na Obr. 3.9.



Obr. 3.12 Konečně-prvková síť tvořená čtyřstěny



Obr. 3.13 Porovnání výsledků výpočtu pro čočku podepřenou na okraji (modrá čára splývá se žlutou)



Obr. 3.14 Porovnání výsledků výpočtu pro čočku podepřenou na vnitřním poloměru r_s

Na Obr. 3.14 si lze všimnout, že průhybová funkce získaná konečně-prvkovým výpočtem v programu ANSYS (modrá) je v okolí podpory nestandardně zvlněná oproti dalším dvěma křivkám. Toto je způsobeno singularitou v místě podepření, které je ve 3d modelováno jako křivka na střednicové ploše (kružnice o poloměru r_s), a tedy v tomto místě vznikají velká koncentrovaná napětí, která vedou k velkým deformacím konečných prvků spojených s podporou. Výsledky výpočtu průhybu tlustší čočky za použití různých teorií jsou shrnuty v Tab. 3.2.

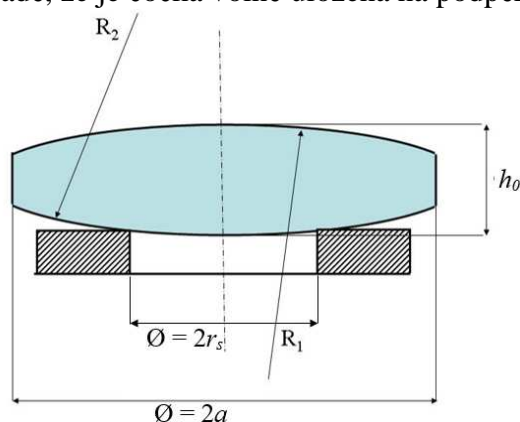
Tab. 3.2 Porovnání výsledků výpočtu průhybu tlustší čočky za použití různých teorií

Teorie	Způsob uložení	
	w_{\max} pro kloubové uložení na okraji čočky	w_{\max} pro kloubové uložení na poloměru $r_s = 0,678a$
Tenké desky	$0,03006 \lambda = 19,03 \text{ nm}$	$0,00200 \lambda = 1,27 \text{ nm}$
Tlustší desky	$0,03105 \lambda = 19,65 \text{ nm}$	$0,00242 \lambda = 1,53 \text{ nm}$
3D FEM ANSYS	$0,03102 \lambda = 19,64 \text{ nm}$	$0,00244 \lambda = 1,54 \text{ nm}$

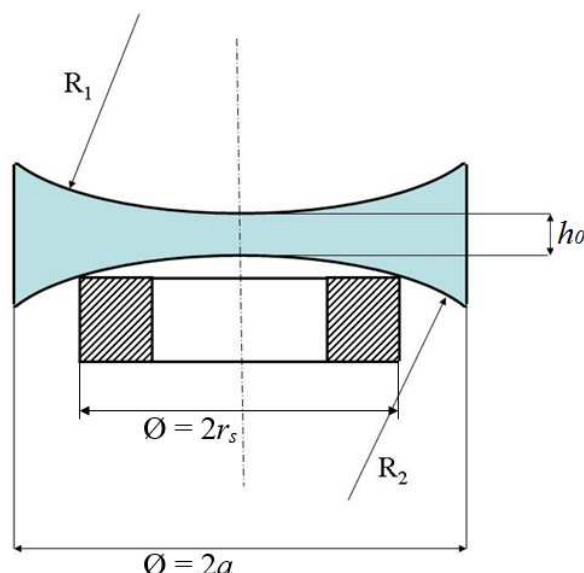
Závěrem lze říci, že průhyb tlustších čoček vlastní tíhou již je ovlivněn smykovou deformací a proto je vhodné ji ve výpočtech brát v úvahu za účelem dosažení reálnějších výsledků. Podíváme-li se ale na problém z hlediska reálného vlivu průhybu čočky vlastní tíhou na přesnost interferometrických měření jejích ploch, je nutné konstatovat, že dosažitelná přesnost těchto měření [14] je $\lambda/50 - \lambda/100$ ($12,6\text{nm} - 6,3\text{nm}$), a tedy by průhyby čočky musely dosahovat alespoň těchto hodnot, aby byly výsledky měření ovlivněny. Z předchozích příkladů dvou různých optických čoček je zřejmé, že už maximální průhyb tlustší čočky podepřené na okraji může mírně ovlivnit přesnost měření ($w_{\max} = 0,031\lambda = 19,6\text{nm} > 6,3\text{nm}$) a že v případě tenké čočky podepřené na okraji je průhyb vlastní tíhou naprosto nepřijatelný ($w_{\max} = 0,177\lambda = 112\text{nm} \gg 6,3\text{nm}$).

3.2.3 Příklady průhybů čoček vlastní tíhou

Ukažme si nyní na několika dalších příkladech, k jak velkým průhybům měřených ploch sférické čočky dojde v případě, že je čočka volně uložena na podpěrném kroužku.



Obr. 3.15 Čočka uložená vypuklou plochou na podpěrném kroužku $R_1 > 0$, $R_2 < 0$ (spojná)



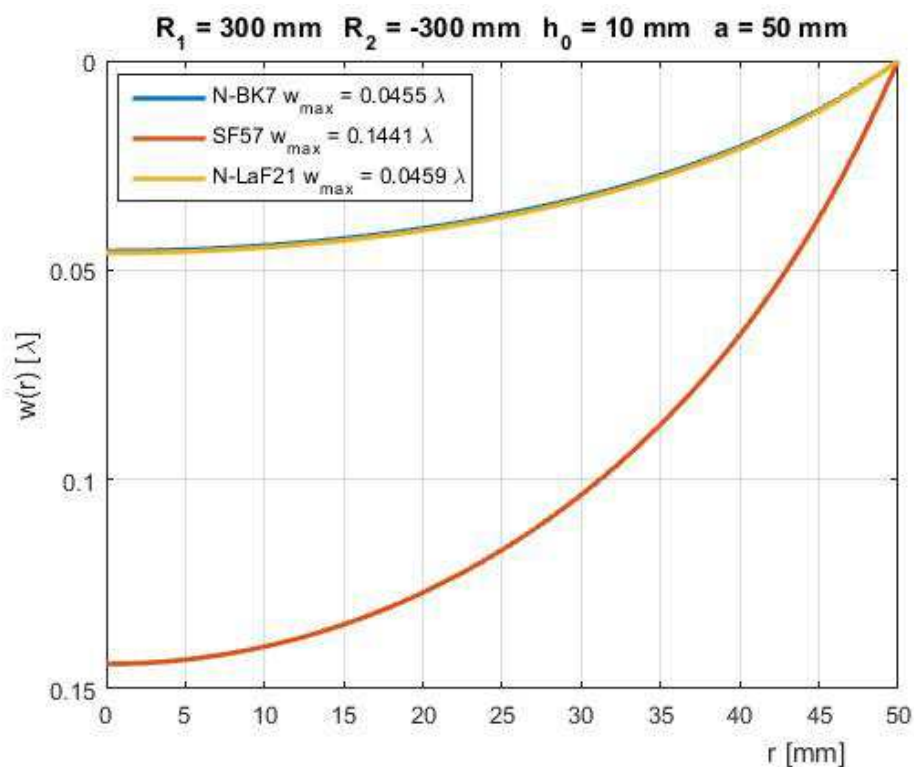
Obr. 3.16 Čočka uložená vydutou plochou na podpěrném kroužku $R_1 < 0, R_2 > 0$ (rozptylná)

Na Obr. 3.15 je uveden příklad spojné čočky mající obě plochy vypuklé a na Obr. 3.16 je uveden příklad rozptylné čočky mající obě plochy vyduté. Následující příklady budou spočteny metodou centrálních diferencí za použití teorie pro tlustší desky.

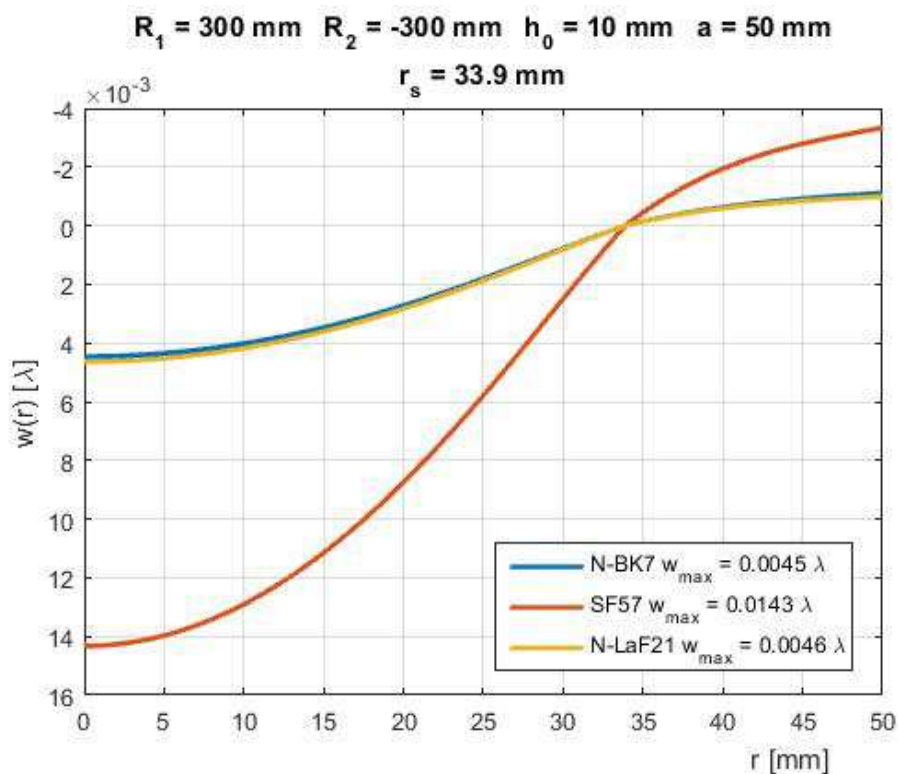
Příklad 1. Uvažujme spojnou čočku (Obr. 3.15) mající následující parametry: $R_1 = 300$ mm, $R_2 = -300$ mm, $d_0 = 10$ mm a průměr čočky je $D = 2a = 100$ mm. Abychom mohli posoudit vliv mechanických parametrů optických skel na průhyb čoček z nich zhotovených, bude čočka vyrobena ze tří různých optických skel, jejichž mechanické parametry jsou uvedeny v Tab. 3.3. Průhyb plochy čočky je pro různá uložení na Obr. 3.17 a Obr. 3.18 uveden v násobcích vlnové délky He-Ne laseru ($\lambda = 633$ nm).

Tab. 3.3 Mechanické parametry skel použitých pro výpočet

sklo	E [GPa]	ρ [g/cm ³]	ν
SF57	54	5.51	0.248
N-BK7	82	2.51	0.206
N-LaF21	124	4.28	0.295



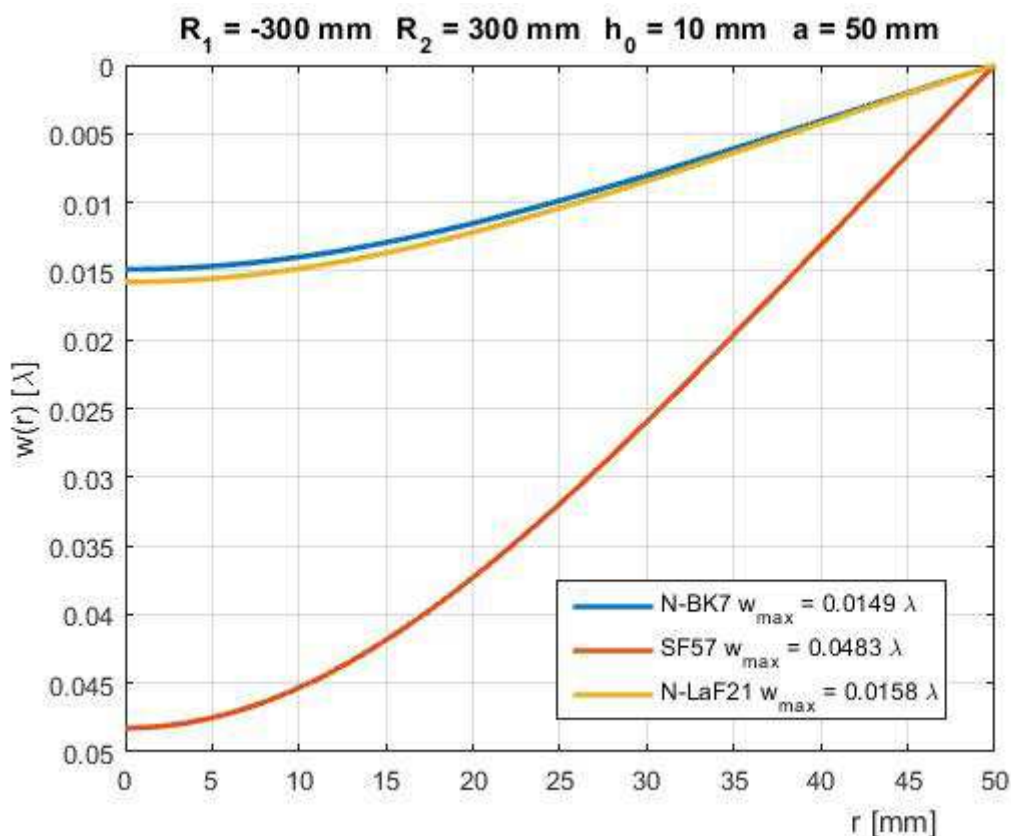
Obr. 3.17 Průhyb střednicové plochy bikonvexní spojné čočky o průměru $D=100\text{mm}$ podepřené na okraji a zhotovené ze tří různých skel (SF57, N-BK7, N-LaF21)



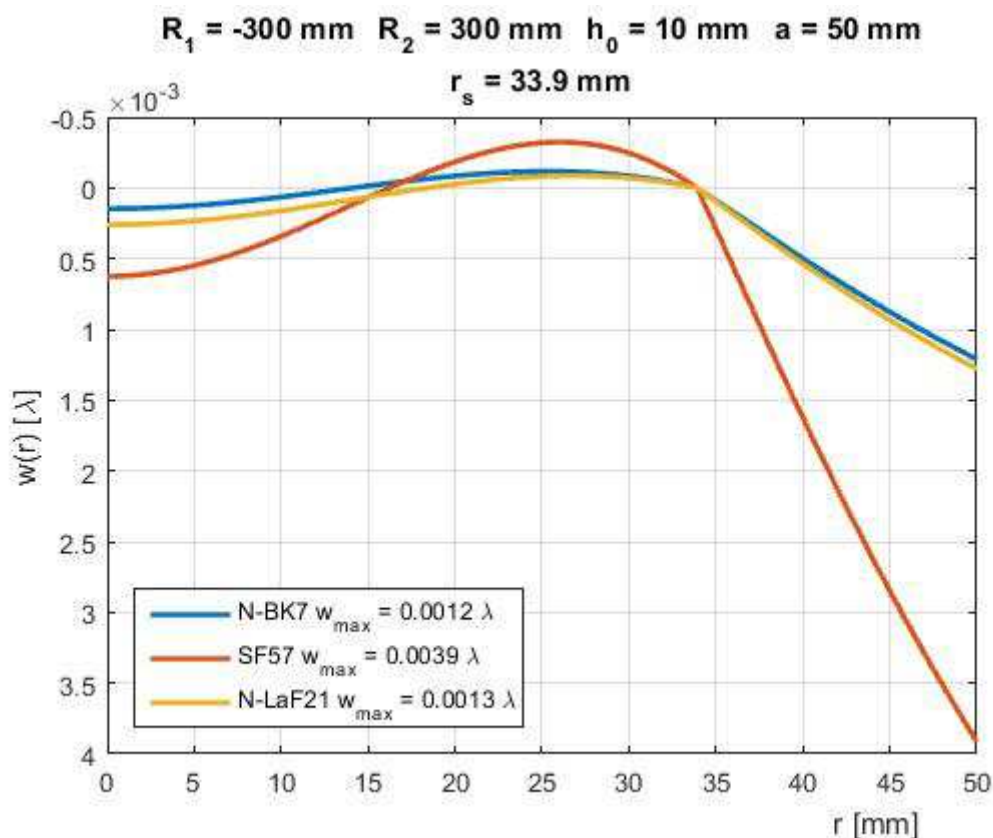
Obr. 3.18 Průhyb střednicové plochy bikonvexní spojné čočky o průměru $D=100\text{mm}$ uložené na kroužku o vnitřním průměru $0.678D$ a zhotovené ze tří různých skel (SF57, N-BK7, N-LaF21)

Jak je z Obr. 3.17 a Obr. 3.18 patrné, je v případě podepření čočky na okraji její maximální průhyb $w_{\max} = 0,144\lambda \approx \lambda/7$ (sklo SF57), zatímco při uložení na kroužku o vnitřním průměru $0.678D$ je její maximální průhyb pouze $w_{\max} = 0,014\lambda \approx \lambda/70$ (sklo SF57). Pro ostatní dvě skla je průhyb menší. Jak je z těchto výsledků patrné, nemusíme při měření poloměrů této čočky přihlížet k deformaci jejích ploch vlivem vlastní tíhy, je-li čočka při měření uložena na kroužku o vnitřním průměru $0.678D$.

Příklad 2. Uvažujme rozptylnou čočku (Obr. 3.16) mající následující parametry: $R_1 = -300$ mm, $R_2 = 300$ mm, $d_0 = 10$ mm a průměr čočky je $D = 100$ mm. Čočka je opět zhotovena ze tří různých skel, jejichž mechanické parametry jsou uvedeny v Tab. 3.3. Průhyb plochy čočky je pro různá uložení na Obr. 3.19 a Obr. 3.20 uveden v násobcích vlnové délky He-Ne laseru ($\lambda=633$ nm). V případě podepření čočky na okraji je její maximální průhyb přibližně $w_{\max} = 0,048\lambda \approx \lambda/20$ (sklo SF57), zatímco při uložení na kroužku o vnitřním průměru $0.678D$ je maximální průhyb pouze $w_{\max} = 0,0039\lambda \approx \lambda/250$ (sklo SF57). Pro ostatní dvě skla je průhyb menší. Jak je z těchto výsledků patrné, nemusíme při měření poloměrů této čočky přihlížet k deformaci jejích ploch vlivem vlastní tíhy, je-li čočka při měření uložena na kroužku o vnitřním průměru $0.678D$.

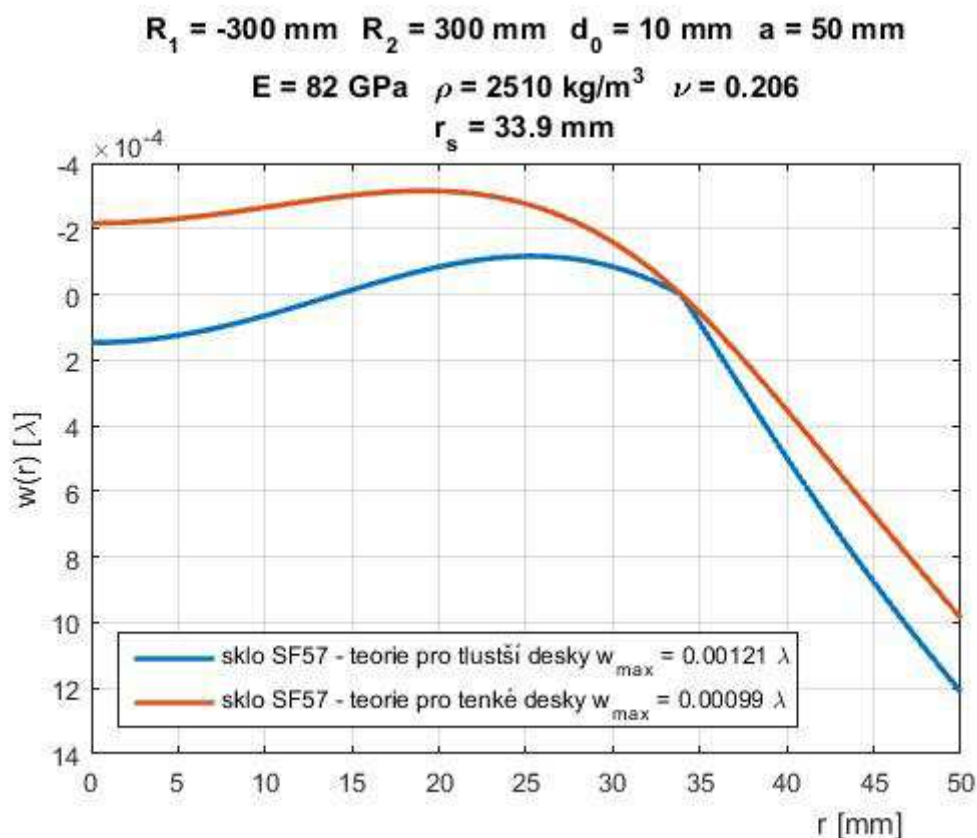


Obr. 3.19 Průhyb střednicové plochy bikonkávni rozptylné čočky o průměru $D=100$ mm podepřené na okraji a zhotovené ze tří různých skel (SF57, N-BK7, N-LaF21)



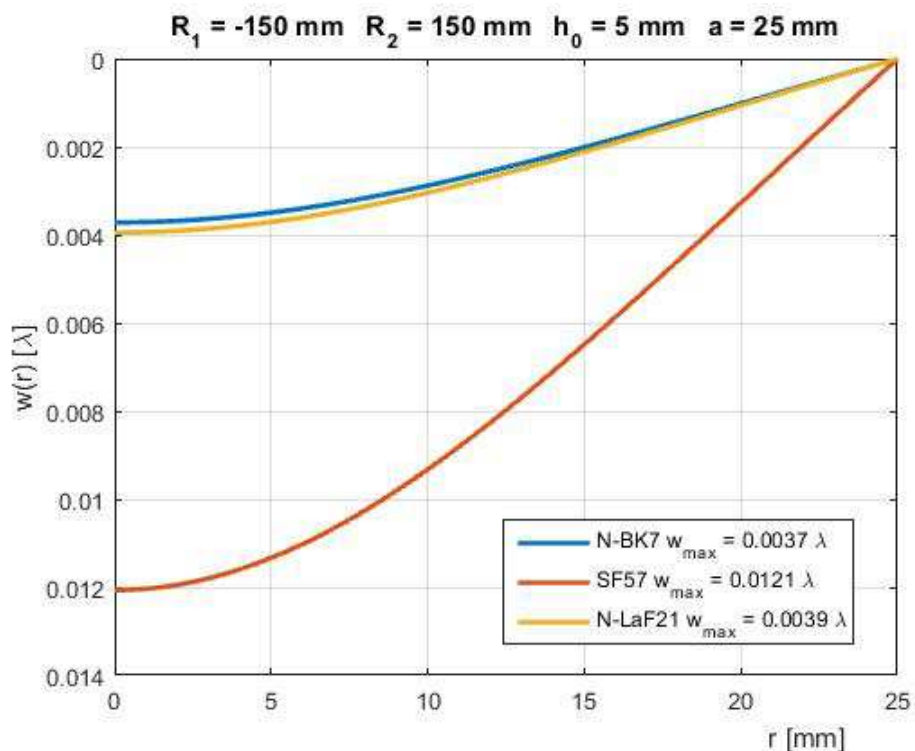
Obr. 3.20 Průhyb střednicové plochy bikonkávní rozptylné čočky o průměru $D=100\text{mm}$ uložené na kroužku o vnitřním průměru $0.678D$ a zhotovené ze tří různých skel (SF57, N-BK7, N-LaF21)

Pozastavme se nyní nad průběhy průhybových funkcí vykreslených na Obr. 3.20. Na první pohled by čtenáři mohl přijít zvláštní zub na průhybové funkci nad podporou. Podíváme-li se ale na porovnání výpočtu tohoto příkladu za použití teorie pro tenké desky a teorie pro tlustší desky (s uvažováním vlivu smyku) na Obr. 3.21, můžeme jasně vidět, že onen zub je způsoben vlivem smyku, protože v případě zanedbání smykové deformace je průhybová funkce hladká na celém intervalu.

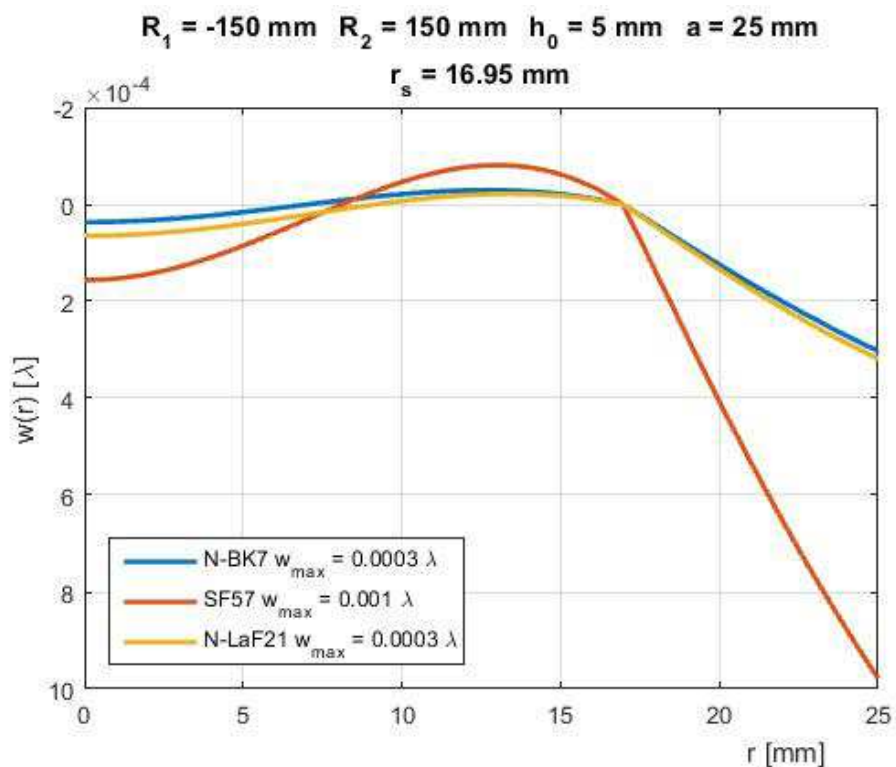


Obr. 3.21 Vliv smyku na průběh průhybové funkce

Příklad 3. Uvažujme rozptylnou čočku mající následující parametry: $R_1 = -150 \text{ mm}$, $R_2 = 150 \text{ mm}$, $d_0 = 5 \text{ mm}$ a průměr čočky je $D = 50 \text{ mm}$. Čočka je opět zhotovena ze tří různých skel, jejichž mechanické parametry jsou uvedeny v Tab. 3.3. Průhyb plochy čočky je pro různá uložení na Obr. 3.22 a Obr. 3.23 uveden v násobcích vlnové délky He-Ne laseru ($\lambda = 633 \text{ nm}$). V případě podepření čočky na okraji je její maximální průhyb přibližně $w_{\max} = 0,012\lambda \approx \lambda/80$ (sklo SF57), zatímco při uložení na kroužku o vnitřním průměru $0.678D$ je maximální průhyb pouze $w_{\max} = 0,001\lambda \approx \lambda/1000$ (sklo SF57). Pro ostatní dvě skla je průhyb menší. Jak je z těchto výsledků patrné, nemusíme při měření poloměrů této čočky přihlížet k deformaci jejích ploch vlivem vlastní tíhy ani v jednom případě uložení.



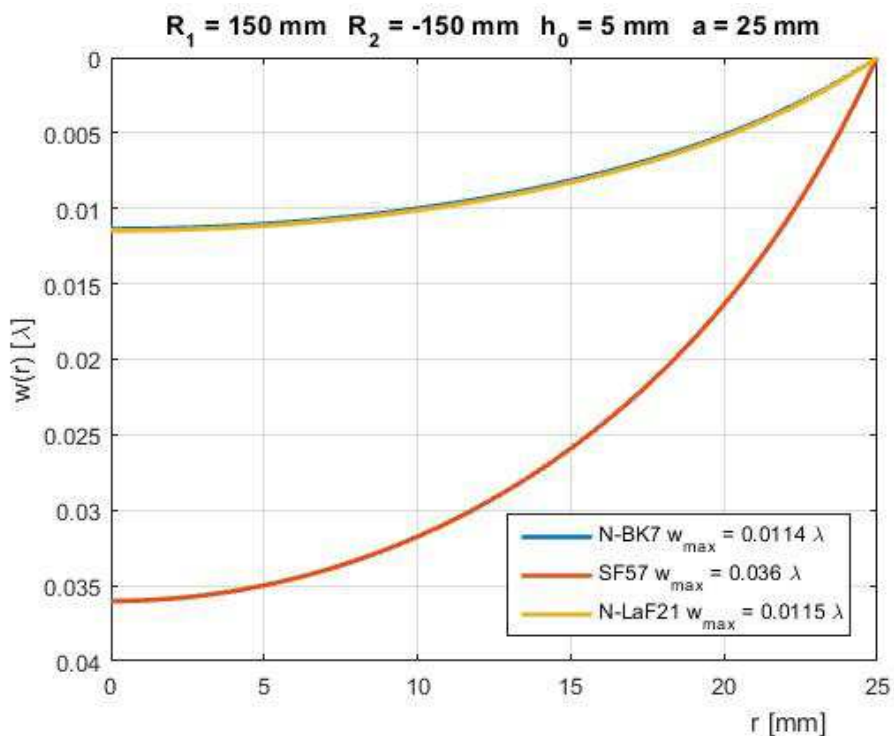
Obr. 3.22 Průhyb střednicové plochy bikonkávní rozptylné čočky o průměru $D=50\text{mm}$ podepřené na okraji a zhotovené ze tří různých skel (SF57, N-BK7, N-LaF21)



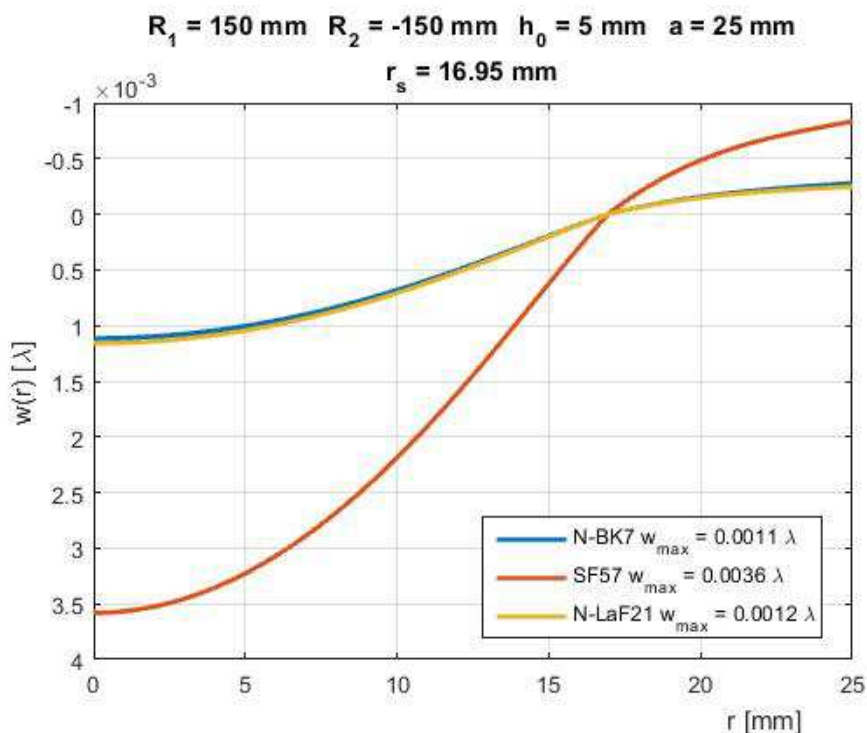
Obr. 3.23 Průhyb střednicové plochy bikonkávní rozptylné čočky o průměru $D=50\text{mm}$ uložené na kroužku o vnitřním průměru $0.678D$ a zhotovené ze tří různých skel (SF57, N-BK7, N-LaF21)

Příklad 4. Uvažujme rozptylnou čočku mající následující parametry: $R_1 = 150$ mm, $R_2 = -150$ mm, $d_0 = 5$ mm a průměr čočky je $D = 50$ mm. Čočka je opět zhotovena ze tří různých skel, jejichž mechanické parametry jsou uvedeny v Tab. 3.3. Průhyb plochy čočky je pro různá uložení na Obr. 3.24 a Obr. 3.25 uveden v násobcích vlnové délky He-Ne laseru ($\lambda = 633$ nm). V případě podepření čočky na okraji je její maximální průhyb přibližně $w_{\max} = 0,036\lambda \approx \lambda/30$ (sklo SF57), zatímco při uložení na kroužku o vnitřním průměru $0.678D$ je maximální průhyb pouze $w_{\max} = 0,0036\lambda \approx \lambda/300$ (sklo SF57). Pro ostatní dvě skla je průhyb menší. Jak je z těchto výsledků patrné, nemusíme při měření poloměrů této čočky přihlížet k deformaci jejích ploch vlivem vlastní tíhy, je-li čočka při měření uložena na kroužku o vnitřním průměru $0.678D$.

Obdobné výsledky, jako jsou uvedeny v předcházejících příkladech, získáme i pro čočky jiných tvarů. V této části práce byla provedena podrobná analýza vlivu průhybu čoček jejich vlastní tíhou na přesnost měření jejich ploch. Jak je patrné z uvedené analýzy, můžeme tedy obecně říci, že pro eliminaci vlivu průhybu čočky způsobeného její tíhou je nutno tuto čočku uložit vypuklou (vydutou) plochou na podložní kroužek mající vnitřní (vnější) průměr menší, než průměr měřené čočky. Ve všech příkladech byla hodnota průměru podložního kroužku volena $0.678D$, kde D je průměr měřené čočky, protože lze odvodit [14], že pro případ planoparalelní čočky (kruhové desky konstantní tloušťky) podepřené na takto zvoleném průměru je průhyb způsobený její vlastní tíhou minimální, a tedy se tyto kroužky pro praktická měření již využívají. Pro čočky s průměrem menším nebo rovným 100 mm bude potom jejich průhyb menší než $\lambda/50$, což je pro aktuálně dosažitelnou přesnost měření naprosto dostačující. Je jasné, že pro každý případ optické čočky proměnné tloušťky lze najít optimální průměr podložního kroužku tak, aby průhyb způsobený její vlastní tíhou byl minimální, ale pro praktické využití je tento postup zbytečně komplikovaný.



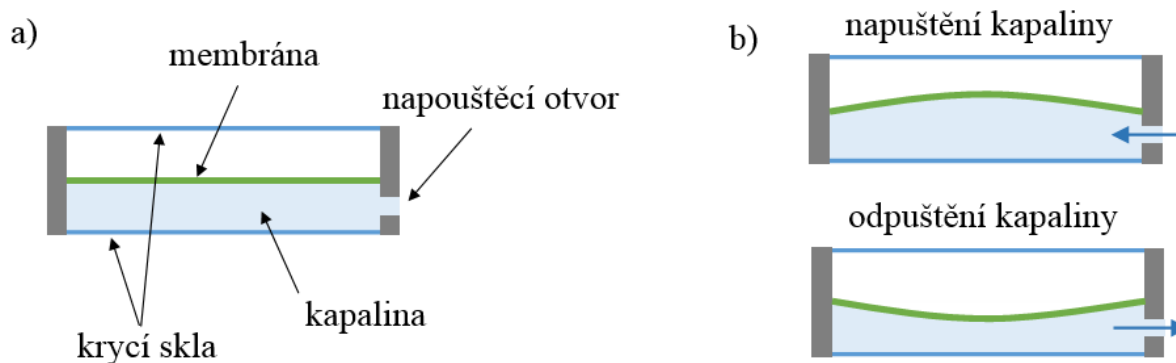
Obr. 3.24 Průhyb střednicové plochy bikonvexní spojné čočky o průměru $D=50\text{mm}$ podepřené na okraji a zhotovené ze tří různých skel (SF57, N-BK7, N-LaF21)



Obr. 3.25 Průhyb střednicové plochy bikonvexní spojné čočky o průměru $D=50\text{mm}$ uložené na kroužku o vnitřním průměru $0.678D$ a zhotovené ze tří různých skel (SF57, N-BK7, N-LaF21)

4 Aplikace výpočtu průhybu osově souměrných membrán

V posledních letech dochází k prudkému rozvoji a uplatňování tzv. aktivních optických prvků, které jsou schopny předem definovaným způsobem měnit své vnitřní nebo vnější parametry, a tím i optické zobrazení. Existuje velká řada způsobů, jak vlastnosti těchto komponent modifikovat. Jedním z nejrozšířenějších typů prvků jsou membránové kapalinové čočky [18-32]. Tyto prvky se zpravidla skládají z membrány pevně upevněné na svých okrajích, která kryje komoru s kapalinou, jako je schematicky naznačeno na Obr. 4.1 a). Změnou objemu kapaliny dojde k deformaci membrány a změně optických vlastností dané čočky (Obr. 4.1 b)).



Obr. 4.1 a) Schéma kapalinové membránové čočky a b) možný princip změny objemu kapaliny

Abychom byli schopni správně určit zobrazovací vlastnosti kapalinových membránových čoček, musíme velmi dobře znát tvar membrány po deformaci. Výpočtem membrán s uvažováním velkých deformací a napětí se zabývá např. literatura [1,4,7-9,33-41]. Iterativní výpočet odvozených diferenciálních rovnic a také výpočet rozvojem v řadu představili Goldberg a Pifko [34,35]. Modifikaci metody konečných diferencí pro nelineární soustavu diferenciálních rovnic popisujících deformace a napětí membrán ukázali Kao a Perrone [36,37]. Pettit řeší soustavu tří diferenciálních rovnic Runge-Kuttovou metodou čtvrtého řádu [38]. Výpočet řadami a analytické vztahy pro výpočet jejich koeficientů předvedl Fichter [9]. Řešení pomocí určení napětí Newton-Raphsonovou metodou provedl Kelkar a kol. [39]. Odvození nového zobecněného řešení a použití optimalizačních metod ukázal Mikš a Novák [40]. Řešení metodou konečných prvků bylo použito v [41].

Ve výše zmíněných pracích vycházejí jejich autoři z různých předpokladů a okrajových podmínek, a tedy jejich řešení jsou různá. V kapitole 2.2.1 této práce byla odvozena soustava diferenciálních rovnic popisující velké průhyby osově souměrné membrány bez ohybové tuhosti, kde nejsou brána v úvahu žádná další zjednodušení (aproximace). V této kapitole bude tato soustava řešena dvěma různými numerickými metodami (metodou řad a optimalizací jejích koeficientů a metodou konečných prvků) na konkrétním příkladu a budou porovnány získané výsledky. Dále pak bude představena problematika optimalizace tloušťky membrány za účelem dosažení výsledného předepsaného deformovaného tvaru při zadaném tlaku.

4.1 Numerické metody výpočtu průhybu osově souměrné membrány bez předpětí

V kapitole 2.2.1 byla nejprve odvozena soustava diferenciálních rovnic popisující posuny a průhyby osově souměrné membrány, kde nejsou brány v potaz žádné zjednodušující předpoklady, a tedy řešení této soustavy bude dále popisováno, jako „obecné“. V další části kapitoly 2.2.1 byly zavedeny zjednodušující předpoklady. Výsledná soustava diferenciálních rovnic (2.86) a (2.87) odvozena variačně konzistentním způsobem za těchto předpokladů a její řešení budou proto dále nazývány jako „zjednodušené“. Abychom mohli porovnat různé numerické metody, budeme uvažovat membránu mající následující parametry: tloušťku $h = 0,1$ mm a průměr $2a = 20$ mm (a je poloměr membrány). Elastické parametry materiálu membrány jsou: Poissonovo číslo $\nu = 0,4$ a Youngův modul $E = 1,97$ MPa. Dále budeme uvažovat hodnotu tlaku působícího na membránu $p = 1,97$ kPa.

4.1.1 Metoda řad a optimalizace jejích koeficientů

4.1.1.1 Obecné řešení

Dříve, než začneme s řešením diferenciálních rovnic, je v případě použití metody řad a optimalizace jejích koeficientů vhodné dané rovnice normalizovat tak, že hledané funkce w a u_r budou funkcemi bezrozměrné proměnné ρ , pro kterou platí

$$\rho = \frac{r}{a} \rightarrow r = \rho a, \quad \frac{d\rho}{dr} = \frac{1}{a} \rightarrow \frac{d}{dr} = \frac{1}{a} \frac{d}{d\rho}, \quad \rho \in \langle 0,1 \rangle. \quad (4.1)$$

Substitucí (4.1) do vztahů (2.55) a (2.56) pro radiální a tangenciální Greenovo-Lagrangeovo přetvoření dostáváme

$$\varepsilon_r = \frac{1}{a} \frac{du_r}{d\rho} + \frac{1}{2a^2} \left(\left(\frac{du_r}{d\rho} \right)^2 + \left(\frac{dw}{d\rho} \right)^2 \right), \quad (4.2)$$

$$\varepsilon_t = \frac{u_r}{\rho a} + \frac{u_r^2}{2\rho^2 a^2} \quad (4.3)$$

a pro radiální a tangenciální napětí pak z (2.57) platí

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{1}{a} \frac{du_r}{d\rho} + \frac{1}{2a^2} \left(\left(\frac{du_r}{d\rho} \right)^2 + \left(\frac{dw}{d\rho} \right)^2 \right) + \nu \left(\frac{u_r}{\rho a} + \frac{u_r^2}{2\rho^2 a^2} \right) \right], \quad (4.4)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{u_r}{\rho a} + \frac{u_r^2}{2\rho^2 a^2} + \nu \left(\frac{1}{a} \frac{du_r}{d\rho} + \frac{1}{2a^2} \left(\left(\frac{du_r}{d\rho} \right)^2 + \left(\frac{dw}{d\rho} \right)^2 \right) \right) \right]. \quad (4.5)$$

Výsledné diferenciální rovnice (2.74) a (2.75) mohou být pro proměnnou ρ psány jako

$$F_1 = -\frac{d}{d\rho} \left(\rho h \sigma_r \left(1 + \frac{1}{a} \frac{du_r}{d\rho} \right) \right) + h \sigma_t \left(1 + \frac{u_r}{a\rho} \right) - p \frac{1}{a} \frac{dw}{d\rho} (a\rho + u_r) = 0, \quad (4.6)$$

$$F_2 = -\frac{1}{a} \frac{d}{d\rho} \left(\rho h \sigma_r \frac{dw}{d\rho} \right) - p (a\rho + u_r) \left(1 + \frac{1}{a} \frac{du_r}{d\rho} \right) = 0. \quad (4.7)$$

Vztahy (4.6) a (4.7) tvoří soustavu dvou diferenciálních rovnic druhého řádu o dvou neznámých funkcích $u_r(\rho)$ a $w(\rho)$. Každá z těchto funkcí se v rovnicích vyskytuje v první i druhé derivaci, z čehož lze usoudit, že k vyřešení této soustavy je nutné znát celkem čtyři okrajové podmínky. Vzhledem k tomu, že membrána je na okraji neposuvně podepřena, lze pro $\rho=1$ ($r=a$) psát

$$w(\rho)|_{\rho=1} = 0, \quad u_r(\rho)|_{\rho=1} = 0. \quad (4.8)$$

V případě osově souměrnosti úlohy lze předpokládat, že průhybová funkce $w(\rho)$ bude taktéž osově souměrná podle osy z (sudá), a tedy její derivace v bodě $\rho=0$ bude nulová, platí

$$\left. \frac{dw}{d\rho} \right|_{\rho=0} = 0. \quad (4.9)$$

Dále pak můžeme předpokládat, že funkce vodorovného posunu $u_r(\rho)$ bude souměrná podle počátku (lichá), protože její velikost je pro každé ρ po celém obvodu membrány stejná a její směr je vždy totožný se směrem osy ρ , a tedy její hodnota v bodě $\rho = 0$ bude také nulová. Platí

$$u_r(\rho)|_{\rho=0} = 0. \quad (4.10)$$

Pro řešení diferenciálních rovnic existuje řada různých metod, z nichž metoda řad je poměrně jednoduchá a dává velmi dobré výsledky. Obecný princip metody řad je následující. Hledanou funkci $f(\xi)$ si vyjádříme ve formě řady

$$f(\xi) = \sum_{i=0}^K c_i g_i(\xi), \quad (4.11)$$

kde funkce $g_i(\xi)$ volíme tak, aby co nejlépe vyhovovaly našemu problému. Pro volbu těchto funkcí je vždy dobré, když o daném problému máme nějaké další informace vyplývající z podstaty řešeného problému, např. že funkce $f(\xi)$ je symetrická apod. Neznámé veličiny, které je nutno určit, jsou koeficienty c_i . Např. v našem případě víme, že průhyb membrány $w(\rho)$ je souměrný vzhledem k ose z a že vodorovný posun $u_r(\rho)$ je souměrný vzhledem k počátku, tedy můžeme hledat řešení rovnic (4.6) a (4.7) ve tvaru mocninných řad

$$w(\rho) = \sum_{i=0}^{\infty} b_{2i} [1 - \rho^{2i+2}], \quad (4.12)$$

$$u_r(\rho) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{2i+1} \rho^{2i+1}. \quad (4.13)$$

Výhodou námi zvolených tvarů hledaných funkcí $w(\rho)$ a $u_r(\rho)$ je, že jsou automaticky splněny okrajové podmínky (4.8) a (4.9), a tedy už zbývá jen splnit okrajovou podmínku (4.10). Pro první a druhé derivace funkcí (4.12) a (4.13) platí

$$\frac{dw}{d\rho} = \sum_{i=0}^{\infty} -b_{2i} (2i+2) \rho^{2i+1}, \quad \frac{d^2w}{d\rho^2} = \sum_{i=0}^{\infty} -b_{2i} (2i+2)(2i+1) \rho^{2i}, \quad (4.14)$$

$$\frac{du_r}{d\rho} = \sum_{i=0}^{\infty} c_{2i+1} (2i+1) \rho^{2i}, \quad \frac{d^2u_r}{d\rho^2} = \sum_{i=0}^{\infty} c_{2i+1} (2i+1)(2i) \rho^{2i-1}. \quad (4.15)$$

Převědme nyní tento problém na optimalizační úlohu s omezeními (vázaný extrém) a to následujícím způsobem. Předpokládejme, že počet členů řady bude K , potom můžeme hledané funkce (4.12), (4.13) a jejich derivace (4.14) a (4.15) přepsat do tvarů

$$w_j = \sum_{i=0}^{K-1} b_{2i} [1 - \rho_j^{2i+2}], \quad (4.16)$$

$$u_{rj} = \sum_{i=0}^{K-1} c_{2i+1} \rho_j^{2i+1}, \quad (4.17)$$

$$\left(\frac{dw}{d\rho} \right)_j = \sum_{i=0}^{K-1} -b_{2i} (2i+2) \rho_j^{2i+1}, \quad \left(\frac{d^2w}{d\rho^2} \right)_j = \sum_{i=0}^{K-1} -b_{2i} (2i+2)(2i+1) \rho_j^{2i}, \quad (4.18)$$

$$\left(\frac{du_r}{d\rho} \right)_j = \sum_{i=0}^{K-1} c_{2i+1} (2i+1) \rho_j^{2i}, \quad \left(\frac{d^2u_r}{d\rho^2} \right)_j = \sum_{i=0}^{K-1} c_{2i+1} (2i+1)(2i) \rho_j^{2i-1}, \quad (4.19)$$

kde veličina $\rho_j \in \langle 0,1 \rangle$, přičemž $j = 1, 2, \dots, L$, kde L je počet dělení intervalu $\langle 0,1 \rangle$.

Dosazením vztahů (4.16)-(4.19) do (4.6) a (4.7) dostáváme funkce F_{1j} a F_{2j} . Zavedme si nyní meritní funkci (cílovou funkci) např. ve tvaru

$$F_g = \sum_{j=1}^L [F_{1j}^2 + F_{2j}^2] \quad (4.20)$$

a hledejme takové hodnoty koeficientů b_{2i} a c_{2i+1} , aby hodnota meritní funkce F_g byla minimální při současném splnění okrajové podmínky (4.10). Daný problém, tj. určení funkcí svislého průhybu a vodorovného radiálního posunu membrány, je tím řešen.

Dalším a poněkud elegantnějším způsobem řešení tohoto problému metodou optimalizace je přímé hledání minima funkce pro celkovou potenciální energii (2.65).

$$E_p = \int_0^a \frac{E}{2(1-\nu^2)} (\varepsilon_r^2 + 2\nu\varepsilon_r\varepsilon_t + \varepsilon_t^2) 2\pi r h dr - pV,$$

kde V je objem deformované membrány (2.64)

$$V = \int_0^a w 2\pi (r + u_r) (1 + u_r') dr.$$

Dosadíme-li (2.64) do (2.65) a použijeme-li bezrozměrnou proměnnou dle (4.1), dostaneme

$$E_p = \int_0^1 \frac{E}{2(1-\nu^2)} (\varepsilon_r^2 + 2\nu\varepsilon_r\varepsilon_t + \varepsilon_t^2) 2\pi \rho a^2 h d\rho - \int_0^a p w a 2\pi (a\rho + u_r) \left(1 + \frac{1}{a} \frac{du_r}{d\rho}\right) d\rho \quad (4.21)$$

Dosazením vztahů (4.2), (4.3), (4.12), (4.13), (4.14) a (4.15) do (4.21) a zavedením konečného počtu členů řady K získáme výsledný výraz pro celkovou potenciální energii. Optimalizační úloha v tomto případě opět spočívá v hledání takových hodnot koeficientů b_{2i} a c_{2i+1} , pro které je hodnota výrazu pro celkovou potenciální energii minimální za současného splnění okrajové podmínky (4.10). Daný problém, tj. určení funkcí svislého průhybu a vodorovného radiálního posunu membrány, je tím řešen.

Je důležité poznamenat, že na rozdíl od předchozího řešení minimalizací meritní funkce, kdy výsledek optimalizace značně závisí na dobře zvolených počátečních hodnotách koeficientů b_{2i} , c_{2i+1} a správný výsledek není vždy zaručen (je nutné optimalizační algoritmus pustit mnohokrát s různými počátečními hodnotami b_{2i} , c_{2i+1} a na konci vybrat výsledek, který vedl k nejmenší hodnotě meritní funkce), řešení minimalizací výrazu pro celkovou potenciální energii vede vždy spolehlivě ke stejnému výsledku nezávisle na počátečních hodnotách koeficientů b_{2i} a c_{2i+1} , což je způsobeno tím, že meritní funkce má pravděpodobně velmi mnoho lokálních minim, ve kterých může optimalizační algoritmus snadno uvíznout, ale funkce pro celkovou potenciální energii je konvexní na celém intervalu $\rho \in \langle 0,1 \rangle$ a má tedy pouze jedno lokální minimum, které je zároveň i minimem globálním.

4.1.1.2 Zjednodušené řešení

Při řešení zjednodušených diferenciálních rovnic budeme postupovat stejně jako v kapitole 4.1.1.1. Začneme tedy vyjádřením všech potřebných vztahů pro proměnnou ρ užitím (4.1). Radiální a tangenciální Greenovo-Lagrangeovo přetvoření (2.78) a (2.79) mají potom tvar

$$\varepsilon_r = \frac{1}{a} \frac{du_r}{d\rho} + \frac{1}{2a^2} \left(\frac{dw}{d\rho} \right)^2, \quad (4.22)$$

$$\varepsilon_t = \frac{u_r}{\rho a} \quad (4.23)$$

a pro radiální a tangenciální napětí pak podle (2.57) platí

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{1}{a} \frac{du_r}{d\rho} + \frac{1}{2a^2} \left(\frac{dw}{d\rho} \right)^2 + \nu \frac{u_r}{\rho a} \right], \quad (4.24)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{u_r}{\rho a} + \nu \left(\frac{1}{a} \frac{du_r}{d\rho} + \frac{1}{2a^2} \left(\frac{dw}{d\rho} \right)^2 \right) \right]. \quad (4.25)$$

Výsledné diferenciální rovnice (2.86) a (2.87) mohou být pro proměnnou ρ psány jako

$$F_3 = -\frac{d}{d\rho} (\rho h \sigma_r) + h \sigma_t = 0, \quad (4.26)$$

$$F_4 = -\frac{1}{a} \frac{d}{d\rho} \left(\rho h \sigma_r \frac{dw}{d\rho} \right) - p a \rho = 0. \quad (4.27)$$

Okrajové podmínky zůstávají samozřejmě stejné, jako v obecném řešení, tedy (4.8), (4.9) a (4.10)

$$w(\rho)|_{\rho=1} = 0, \quad u_r(\rho)|_{\rho=1} = 0,$$

$$\left. \frac{dw}{d\rho} \right|_{\rho=0} = 0, \quad u_r(\rho)|_{\rho=0} = 0.$$

Dosazením vztahů (4.16)-(4.19) do (4.26) a (4.27) dostáváme funkce F_{3j} a F_{4j} . Zavedme si nyní opět meritní funkci (cílovou funkci) ve tvaru

$$F_s = \sum_{j=1}^L [F_{3j}^2 + F_{4j}^2] \quad (4.28)$$

a hledejme takové hodnoty koeficientů b_{2i} a c_{2i+1} , aby hodnota meritní funkce F_s byla minimální při současném splnění okrajové podmínky (4.10). Daný problém, tj. určení funkcí svislého průhybu a vodorovného radiálního posunu membrány pro zjednodušený případ, je tím řešen.

Jako v případě obecného řešení, i zde lze řešení najít přímo minimalizací výrazu pro celkovou potenciální energii (2.65).

$$E_p = \int_0^a \frac{E}{2(1-\nu^2)} (\varepsilon_r^2 + 2\nu\varepsilon_r\varepsilon_t + \varepsilon_t^2) 2\pi r h dr - pV,$$

kde V je zjednodušený objem deformované membrány (2.82)

$$V = \int_0^a w 2\pi r dr .$$

Dosadíme-li (2.82) do (2.65) a použijeme-li bezrozměrnou proměnnou dle (4.1), dostaneme

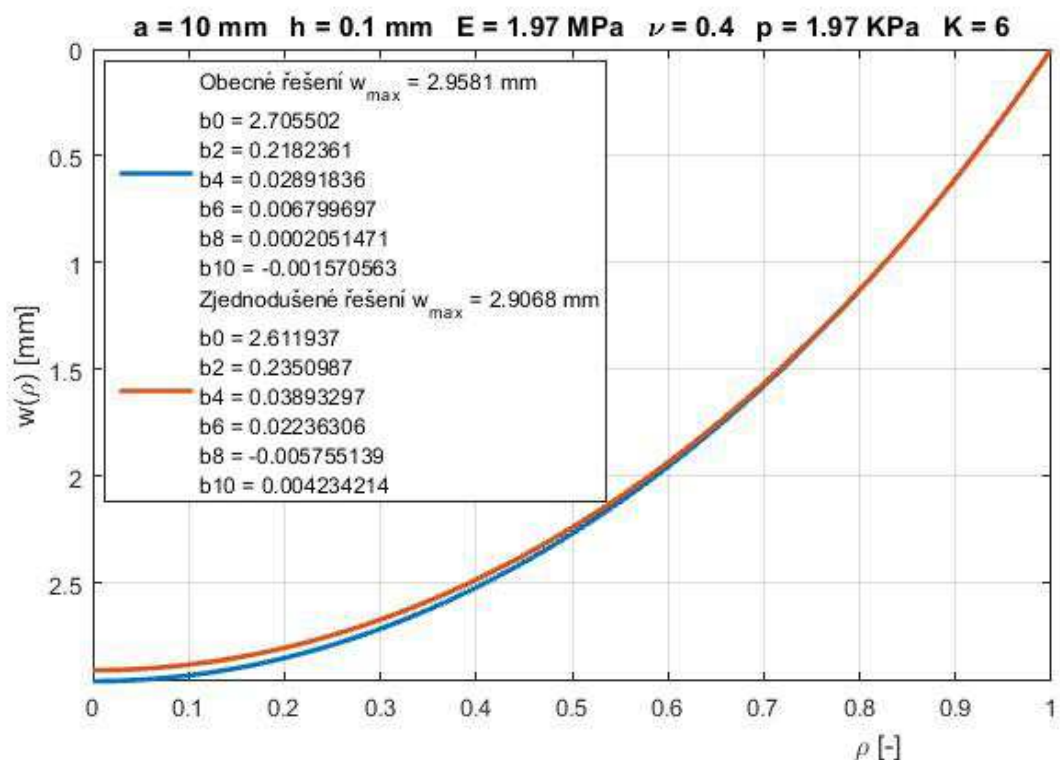
$$E_p = \int_0^1 \frac{E}{2(1-\nu^2)} (\varepsilon_r^2 + 2\nu\varepsilon_r\varepsilon_t + \varepsilon_t^2) 2\pi \rho a^2 h d\rho - \int_0^a p w a^2 2\pi \rho d\rho \quad (4.29)$$

Dosazením vztahů (4.22), (4.23), (4.12), (4.13), (4.14) a (4.15) do (4.29) a zavedením konečného počtu členů řady K získáme výsledný výraz pro celkovou potenciální energii ve zjednodušeném případě. Optimalizační úloha opět spočívá v hledání takových hodnot koeficientů b_{2i} a c_{2i+1} , pro které je hodnota výrazu pro celkovou potenciální energii minimální za současného splnění okrajové podmínky (4.10). Daný problém, tj. určení funkcí svislého průhybu a vodorovného radiálního posunu membrány pro zjednodušený případ, je tím řešen.

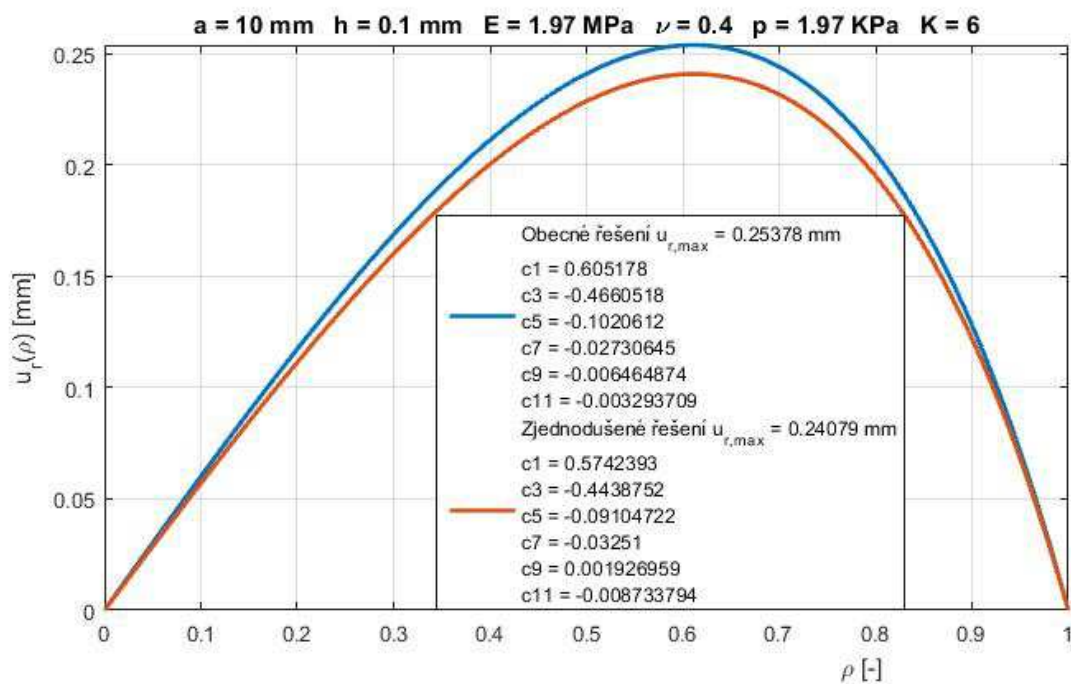
Na Obr. 4.2 a Obr. 4.3 lze vidět výsledné průběhy funkcí w a u_r pro zvolený příklad, kde $K=6$. Úloha byla vyřešena programem Matlab výše popsanou metodou řad na základě minimalizace vztahů pro celkovou potenciální energii. Na Obr. 4.4 je pak znázorněna závislost odchylky průhybu obecného a zjednodušeného řešení vyjádřená v násobku vlnové délky He-Ne laseru $\lambda = 0,000633 \text{ mm}$. Vzhledem k tomu, že přesné optické plochy se běžně vyrábí s přesností na $\lambda/4$, je nutno konstatovat, že rozdíl mezi obecným a zjednodušeným řešením, který dosahuje až $\Delta w_{\max} / \lambda = 80$, je pro optické účely zcela nevyhovující, a proto se nadále budeme zabývat pouze obecným řešením, jehož správnost ověříme v další kapitole metodou konečných prvků. Na Obr. 4.5 a Obr. 4.6 je dále znázorněna závislost maximálního průhybu w_{\max} a maximálního radiálního posunu $u_{r,\max}$ na počtu členů řady K pro obecné řešení. Větší význam má v tomto případě ale závislost výsledného deformovaného objemu membrány na počtu členů řady znázorněná na Obr. 4.7. Z těchto grafů a Tab. 4.1 je zřejmé, že výsledné řešení při zvyšování počtu členů řady velmi rychle dosáhne přesnosti na pět platných cifer, ale dále se již nezpřesňuje a nemá tedy význam uvažovat více členů řady, než cca $K=6$.

Tab. 4.1 Závislost w_{\max} , $u_{r,\max}$ a V na počtu členů řady

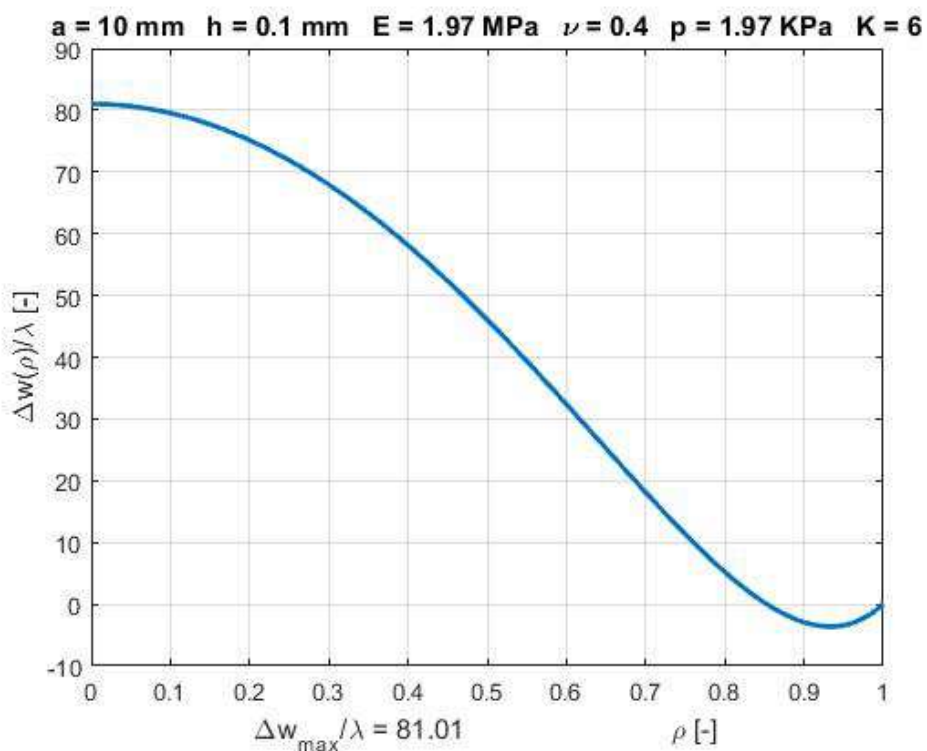
K	2	4	6	8	10
w_{\max} [mm]	2,953129	2,958073	2,958086	2,958075	2,958189
$u_{r,\max}$ [mm]	0,254728	0,253777	0,253781	0,253781	0,253787
V [mm ³]	500,5215	500,529836	500,529824	500,529824	500,529830



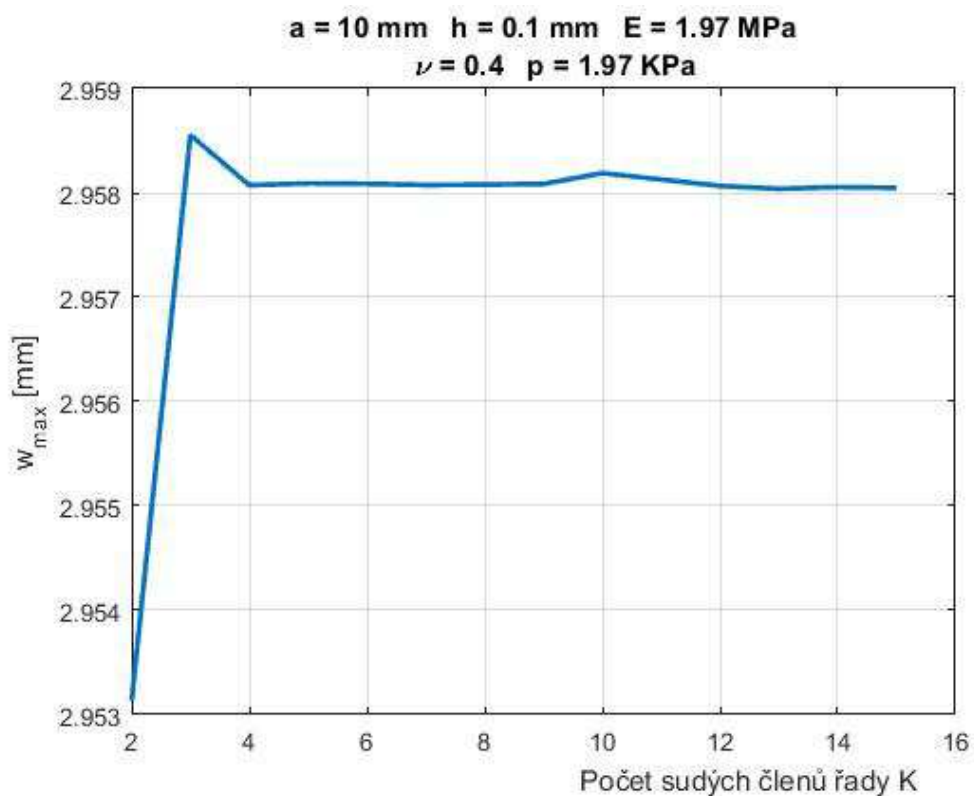
Obr. 4.2 Průhyb membrány pro obecný a zjednodušený případ



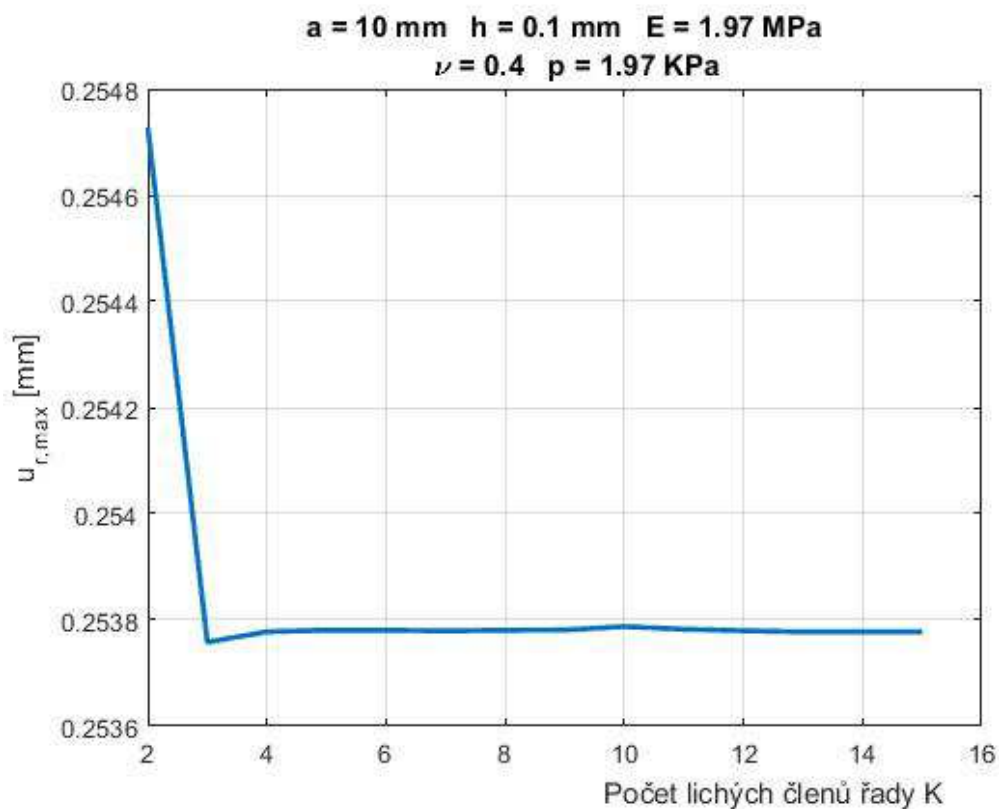
Obr. 4.3 Radiální posun membrány pro obecný a zjednodušený případ



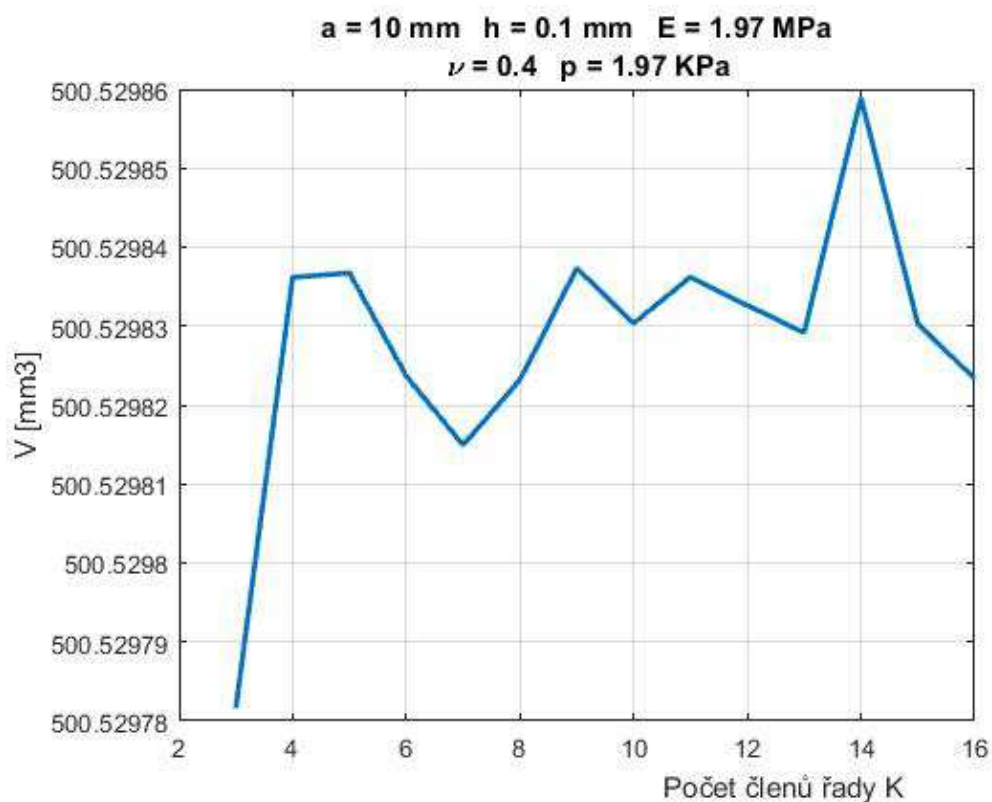
Obr. 4.4 Odchylka obecného a zjednodušeného řešení



Obr. 4.5 Závislost w_{max} na počtu členů řady



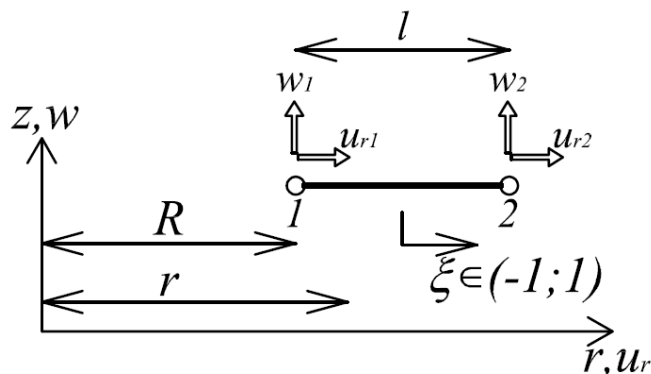
Obr. 4.6 Závislost $u_{r,max}$ na počtu členů řady



Obr. 4.7 Závislost objemu deformované membrány V na počtu členů řady

4.1.2 Metoda konečných prvků

Pro porovnání výsledků získaných metodou řad v předchozí kapitole byl stejný příklad spočten metodou konečných prvků v programu OOFEM [44], kam byl za tímto účelem implementován prvek založený na teorii popsané v kapitole 2.2. Parametry použité v následujícím odvození konečného prvku jsou zobrazeny na Obr. 4.8,



Obr. 4.8 Membránový prvek

kde l je délka prvku, $\xi \in (-1;1)$ je lokální souřadnice daného prvku, R je vodorovná vzdálenost počátečního uzlu prvku od počátku souřadnicového systému, r je vodorovná vzdálenost libovolného bodu prvku od počátku souřadnicové soustavy v závislosti na ξ a u_{r1}, w_1, u_{r2}, w_2 jsou neznámé posuny v uzlech prvku. Dle Obr. 4.8 můžeme vztah mezi lokální souřadnicí ξ a globální souřadnicí r zapsat jako

$$\xi = 2\left(\frac{r-R}{l} - \frac{1}{2}\right), \quad \frac{d\xi}{dr} = \frac{2}{l}. \quad (4.24)$$

Napišme nyní neznámé posuny v uzlech prvku jako vektor \mathbf{d} , platí

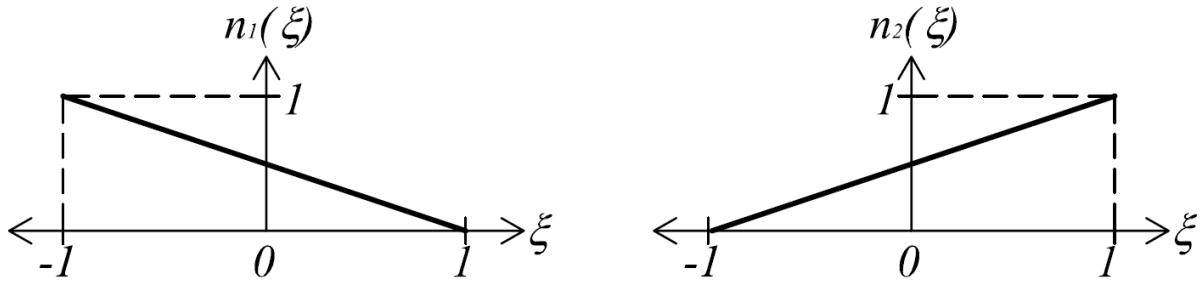
$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} u_{r1} \\ w_1 \\ u_{r2} \\ w_2 \end{pmatrix}. \quad (4.25)$$

Za použití lineárních bázevých funkcí $n_1(\xi)$ a $n_2(\xi)$, pro které platí (Obr. 4.9)

$$n_1(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi), \quad n_2(\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi) \quad (4.26)$$

a

$$\frac{dn_1}{dr} = \frac{dn_1}{d\xi} \frac{d\xi}{dr} = -\frac{1}{l}, \quad \frac{dn_2}{dr} = \frac{dn_2}{d\xi} \frac{d\xi}{dr} = \frac{1}{l}. \quad (4.27)$$



Obr. 4.9 Bázové funkce

můžeme vodorovný posun u_r a svislý posun (průhyb) w v libovolném bodě prvku popsat funkcemi

$$u_r = \begin{pmatrix} n_1 & 0 & n_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{r1} \\ w_1 \\ u_{r2} \\ w_2 \end{pmatrix} = \mathbf{n}_1 \mathbf{d}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 & n_1 & 0 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{r1} \\ w_1 \\ u_{r2} \\ w_2 \end{pmatrix} = \mathbf{n}_2 \mathbf{d} \quad (4.28)$$

a derivace těchto veličin

$$u_r' = \begin{pmatrix} \frac{dn_1}{dr} & 0 & \frac{dn_2}{dr} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{r1} \\ w_1 \\ u_{r2} \\ w_2 \end{pmatrix} = \mathbf{b}_1 \mathbf{d}, \quad w' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{dn_1}{dr} & 0 & \frac{dn_2}{dr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{r1} \\ w_1 \\ u_{r2} \\ w_2 \end{pmatrix} = \mathbf{b}_2 \mathbf{d}. \quad (4.29)$$

Substitucí (4.29) do vztahu (2.55) pro radiální Greenovo-Lagrangeovo přetvoření dostáváme

$$\varepsilon_r = \mathbf{b}_1 \mathbf{d} + \frac{1}{2} (\mathbf{d}^T \mathbf{b}_1^T \mathbf{b}_1 \mathbf{d} + \mathbf{d}^T \mathbf{b}_2^T \mathbf{b}_2 \mathbf{d}) = \mathbf{b}_1 \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{A} \mathbf{d}, \quad (4.30)$$

kde

$$\mathbf{A} = \mathbf{b}_1^T \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2^T \mathbf{b}_2 = \frac{1}{l^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

A substitucí (4.28) do vztahu (2.56) pro tangenciální Greenovo-Lagrangeovo přetvoření dostáváme

$$\varepsilon_t = \frac{1}{r} \mathbf{n}_1 \mathbf{d} + \frac{1}{2r^2} \mathbf{d}^T \mathbf{n}_1^T \mathbf{n}_1 \mathbf{d} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{1}{2r} \mathbf{d}^T \mathbf{n}_1^T \right) \mathbf{n}_1 \mathbf{d}. \quad (4.32)$$

Označme nyní vektor přírůstků $\delta u_{r1}, \delta w_1, \delta u_{r2}, \delta w_2$ jako $\delta \mathbf{d}$, platí tedy

$$\delta \mathbf{d} = \begin{pmatrix} \delta u_{r1} \\ \delta w_1 \\ \delta u_{r2} \\ \delta w_2 \end{pmatrix}. \quad (4.33)$$

Potom můžeme přírůstky vodorovného posunu δu_r a průhybu δw v libovolném bodě prvku popsat funkcemi

$$\delta u_r = (n_1 \quad 0 \quad n_2 \quad 0) \begin{pmatrix} \delta u_{r1} \\ \delta w_1 \\ \delta u_{r2} \\ \delta w_2 \end{pmatrix} = \mathbf{n}_1 \delta \mathbf{d}, \quad \delta w = (0 \quad n_1 \quad 0 \quad n_2) \begin{pmatrix} \delta u_{r1} \\ \delta w_1 \\ \delta u_{r2} \\ \delta w_2 \end{pmatrix} = \mathbf{n}_2 \delta \mathbf{d} \quad (4.34)$$

a derivace těchto veličin

$$\delta u'_r = \begin{pmatrix} \frac{dn_1}{dr} & 0 & \frac{dn_2}{dr} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_{r1} \\ \delta w_1 \\ \delta u_{r2} \\ \delta w_2 \end{pmatrix} = \mathbf{b}_1 \delta \mathbf{d}, \quad \delta w' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{dn_1}{dr} & 0 & \frac{dn_2}{dr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_{r1} \\ \delta w_1 \\ \delta u_{r2} \\ \delta w_2 \end{pmatrix} = \mathbf{b}_2 \delta \mathbf{d}. \quad (4.35)$$

Dosazením (4.28), (4.29), (4.34) a (4.35) do vztahů pro přírůstky radiálního a tangenciálního Greenova-Lagrangeova přetvoření (2.69) a (2.70) dostáváme

$$\delta \varepsilon_r = \mathbf{b}_1 \delta \mathbf{d} + \mathbf{d}^T \mathbf{b}_1^T \mathbf{b}_1 \delta \mathbf{d} + \mathbf{d}^T \mathbf{b}_2^T \mathbf{b}_2 \delta \mathbf{d} = \mathbf{b}_1 \delta \mathbf{d} + \mathbf{d}^T \mathbf{A} \delta \mathbf{d} = (\mathbf{b}_1 + \mathbf{d}^T \mathbf{A}) \delta \mathbf{d}, \quad (4.36)$$

$$\delta \varepsilon_t = \frac{1}{r} \mathbf{n}_1 \delta \mathbf{d} + \frac{1}{r^2} \mathbf{d}^T \mathbf{n}_1^T \mathbf{n}_1 \delta \mathbf{d} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{1}{r} \mathbf{d}^T \mathbf{n}_1^T \right) \mathbf{n}_1 \delta \mathbf{d}. \quad (4.37)$$

Vztahy (4.36) a (4.37) můžeme zapsat ve vektorovém tvaru jako

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \delta \varepsilon_r \\ \delta \varepsilon_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 + \mathbf{d}^T \mathbf{A} \\ \frac{1}{r} \left(1 + \frac{1}{r} \mathbf{d}^T \mathbf{n}_1^T \right) \mathbf{n}_1 \end{pmatrix} \delta \mathbf{d} = \mathbf{B} \delta \mathbf{d}. \quad (4.38)$$

Dosaďme nyní (4.24), (4.28), (4.29), (4.34) a (4.35) do vztahu (2.68) pro variaci objemu deformované membrány, platí

$$\delta V = \pi l \int_{-1}^1 \left[(r(\xi) + \mathbf{d}^T \mathbf{n}_1^T) (1 + \mathbf{b}_1 \mathbf{d}) \mathbf{b}_2 \delta \mathbf{d} + \mathbf{d}^T \mathbf{n}_2^T (1 + \mathbf{b}_1 \mathbf{d}) \mathbf{n}_1 \delta \mathbf{d} + \mathbf{d}^T \mathbf{n}_2^T (r(\xi) + \mathbf{n}_1 \mathbf{d}) \mathbf{b}_1 \delta \mathbf{d} \right] d\xi. \quad (4.39)$$

Nyní již zbývá jen sestavit výslednou soustavu nelineárních rovnic pro neznámé hodnoty posunů a průhybů v jednotlivých uzlech prvku. Z kapitoly 2.2 víme, že aby byla daná konstrukce (prvek) v rovnováze, musí být variace potenciální energie rovna nule. Se znalostí této podmínky můžeme vztah pro variaci potenciální energie (2.67) psát ve tvaru

$$2\pi \int_0^a [(\sigma_r \delta \varepsilon_r + \sigma_t \delta \varepsilon_t) r h] dr = p \delta V . \quad (4.40)$$

Substitucí (2.57), (4.24), (4.38) a (4.39) do (4.40) dostáváme

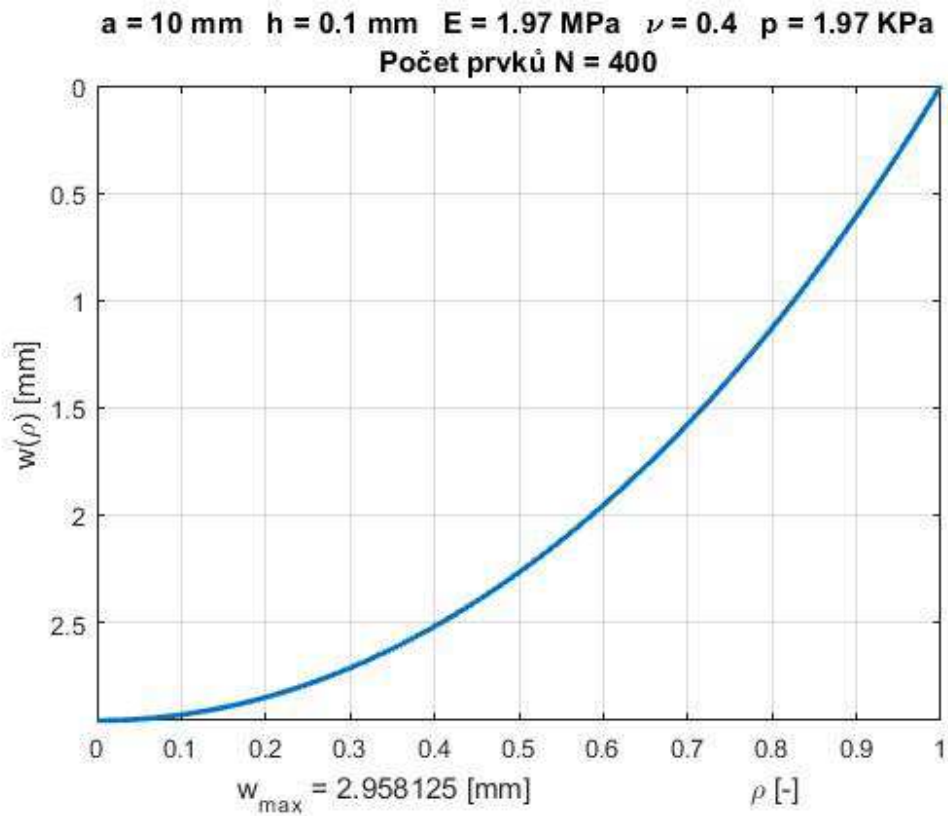
$$\begin{aligned} \pi l \int_{-1}^1 [\mathbf{\varepsilon}^T \mathbf{D}^T \mathbf{B} \delta \mathbf{d} r h(\xi)] d\xi = \\ = p \pi l \int_{-1}^1 [(r(\xi) + \mathbf{d}^T \mathbf{n}_1^T)(1 + \mathbf{b}_1 \mathbf{d}) \mathbf{b}_2 \delta \mathbf{d} + \mathbf{d}^T \mathbf{n}_2^T (1 + \mathbf{b}_1 \mathbf{d}) \mathbf{n}_1 \delta \mathbf{d} + \mathbf{d}^T \mathbf{n}_2^T (r(\xi) + \mathbf{n}_1 \mathbf{d}) \mathbf{b}_1 \delta \mathbf{d}] d\xi \end{aligned} \quad (4.41)$$

Vzhledem k tomu, že rovnost pravé a levé strany rovnice (4.41) musí platit pro libovolné $\delta \mathbf{d}$, můžeme psát

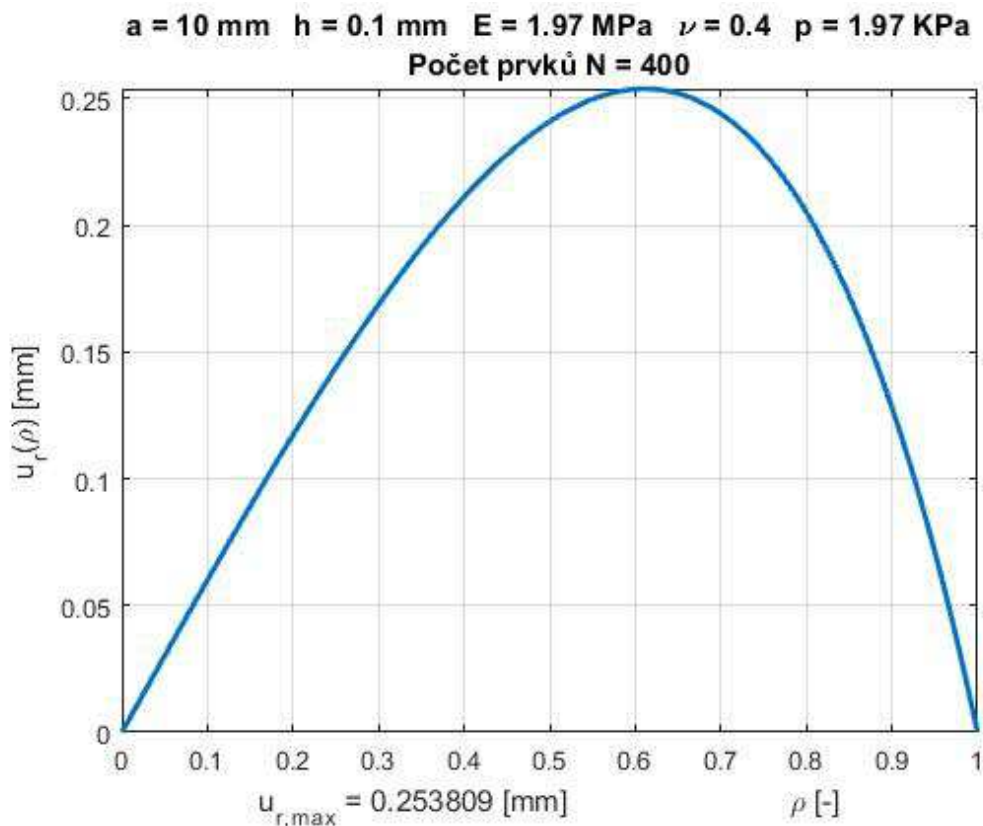
$$\begin{aligned} \pi l \int_{-1}^1 [\mathbf{\varepsilon}^T \mathbf{D}^T \mathbf{B} r h(\xi)] d\xi = \\ = p \pi l \int_{-1}^1 [(r(\xi) + \mathbf{d}^T \mathbf{n}_1^T)(1 + \mathbf{b}_1 \mathbf{d}) \mathbf{b}_2 + \mathbf{d}^T \mathbf{n}_2^T (1 + \mathbf{b}_1 \mathbf{d}) \mathbf{n}_1 + \mathbf{d}^T \mathbf{n}_2^T (r(\xi) + \mathbf{n}_1 \mathbf{d}) \mathbf{b}_1] d\xi \end{aligned} \quad (4.42)$$

Vztah (4.42) pak tvoří výslednou soustavu nelineárních rovnic pro neznámé posuny v jednotlivých uzlech prvku. Soustavu nelineárních rovnic pro celou membránu dostaneme obvyklou lokalizací příspěvků od jednotlivých prvků. Tu lze potom při předepsání vhodných okrajových podmínek řešit například Newton-Raphsonovou iterační metodou. Newton Raphsonova metoda vyžaduje matici tuhosti, kterou zde ovšem uvádět nebudeme a její formulaci lze nalézt například v [41].

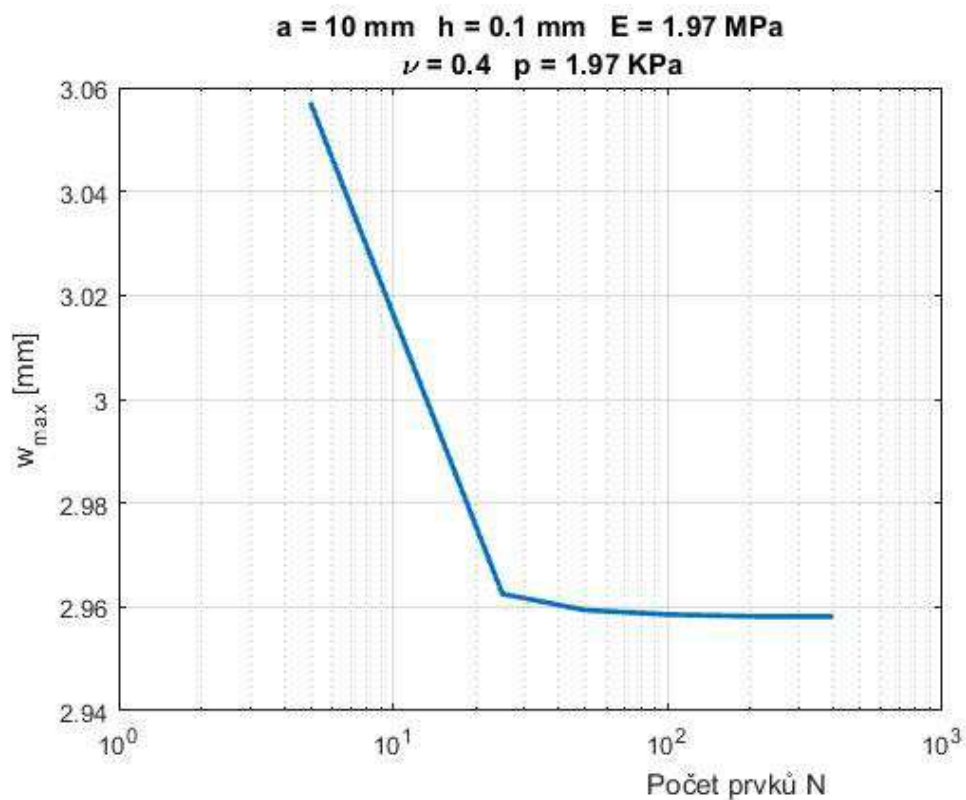
Na Obr. 4.10 a Obr. 4.11 lze vidět výsledné průběhy funkcí w a u_r pro zvolený příklad, kde počet konečných prvků je $N=400$. Úloha byla vyřešena konečně-prvkovým programem OOFEM za použití výše popsaného prvku a jedná se tedy o obecné (nezjednodušené) řešení. Na Obr. 4.12, Obr. 4.13 a Obr. 4.14 je dále znázorněna závislost maximálního průhybu w_{\max} , maximálního radiálního posunu $u_{r,\max}$ a objemu deformované membrány V na počtu konečných prvků N v logaritmickém měřítku. Z těchto grafů a Tab. 4.2 lze usoudit, že pro dosažení velmi přesného řešení by bylo nutné konečně-prvkovou síť ještě zjemnit.



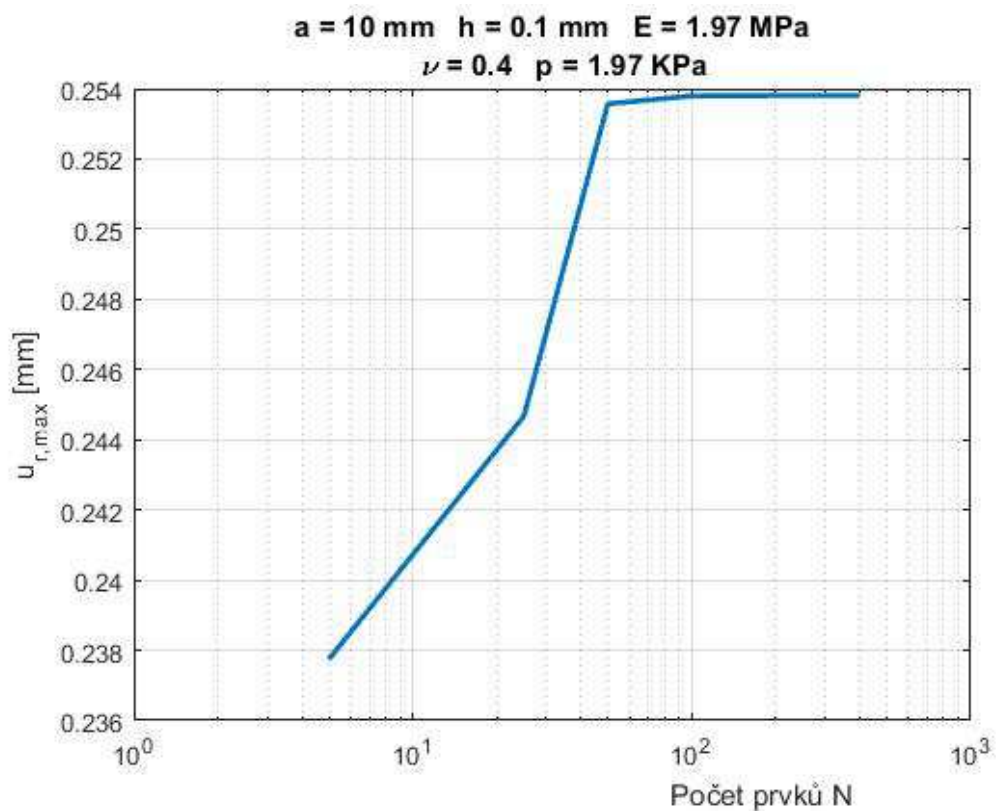
Obr. 4.10 Průhyb membrány pro obecný případ



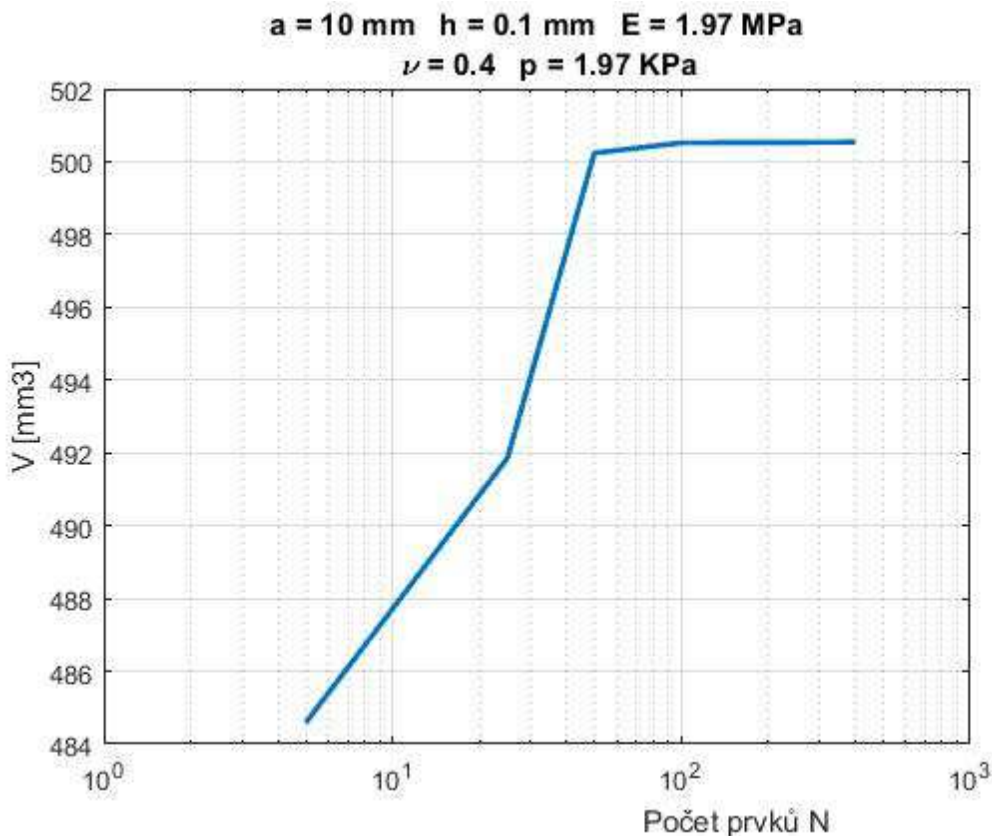
Obr. 4.11 Radiální posun membrány pro obecný případ



Obr. 4.12 Závislost w_{\max} na počtu konečných prvků (logaritmické měřítko)



Obr. 4.13 Závislost $u_{r,\max}$ na počtu konečných prvků (logaritmické měřítko)



Obr. 4.14 Závislost V na počtu konečných prvků (logaritmické měřítko)

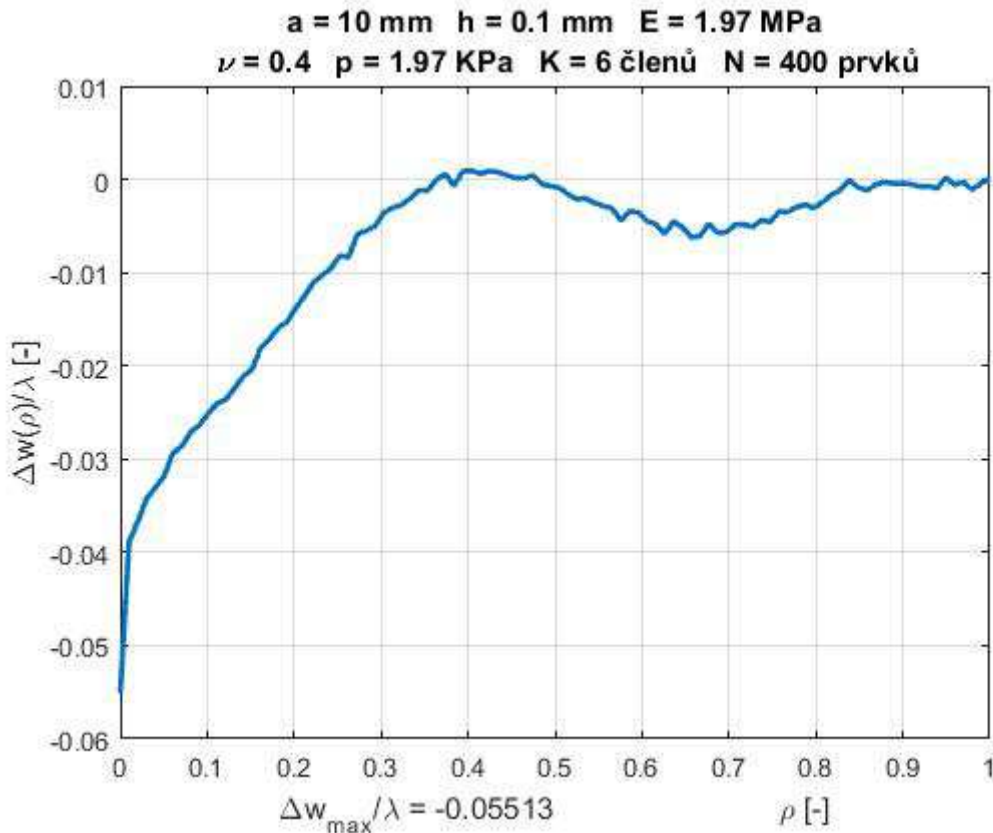
Tab. 4.2 Závislost w_{\max} , $u_{r,\max}$ a V na počtu konečných prvků

Počet prvků N	5	25	50	100	200	400
w_{\max} [mm]	3,057108	2,962495	2,959384	2,958534	2,958189	2,958125
$u_{r,\max}$ [mm]	0,237742	0,244670	0,253570	0,253795	0,253806	0,253809
V [mm³]	484,58205	491,86178	500,23756	500,51811	500,52449	500,53600

4.1.3 Porovnání numerických metod

V kapitole 4.1.1 bylo představeno řešení obecných i zjednodušených diferenciálních rovnic popisujících deformace elastické membrány metodou řad a optimalizací jejích koeficientů. Bylo konstatováno, že v případě zjednodušeného případu dochází k příliš velkým nepřesnostem a že je tedy nutno se nadále zabývat výhradně obecným řešením. V kapitole 4.1.2 bylo pak obecné řešení znovu spočteno metodou konečných prvků a byla ukázána konvergence maximálních hodnot průhybu, radiálního posunu a deformovaného objemu při zjemňování konečně-prvkové sítě. Na Obr. 4.15 je znázorněna závislost odchylky průhybu těchto dvou obecných řešení vyjádřené v násobcích vlnové délky He-Ne laseru

$\lambda = 0,000633 \text{ mm}$. Odchylka je spočtena podle vzorce $\Delta w / \lambda = (w_{\text{optim}} - w_{\text{fem}}) / \lambda$, kde w_{optim} je výsledek obecného řešení spočtený metodou řad a w_{fem} je výsledek obecného řešení spočtený metodou konečných prvků.

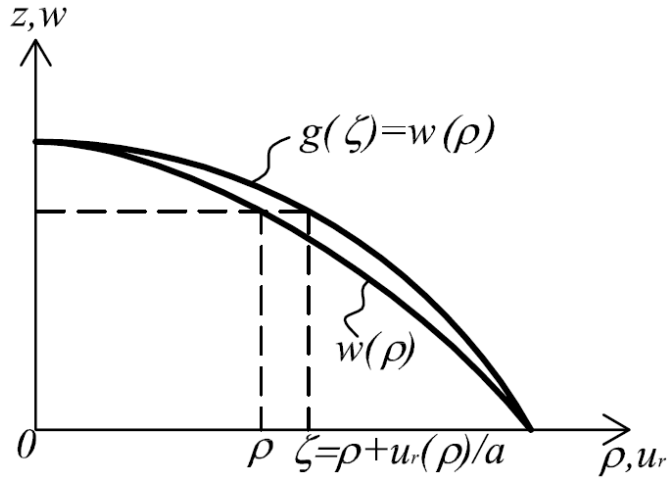


Obr. 4.15 Odchylka obecného řešení průhybové funkce w spočteného metodou řad od řešení spočteného metodou konečných prvků

Vzhledem k tomu, že se tato dvě řešení maximálně liší pouze o $\Delta w_{\text{max}} / \lambda = -0,055$, můžeme konstatovat, že pro námi požadované přesnosti se výsledky shodují.

4.2 Optimalizace tloušťky membrány

Jedním z možných požadavků na osově souměrné membránové kapalinové čočky v optice může být také jejich schopnost vytvořit při zadané velikosti tlaku přesně předepsaný deformovaný tvar tak, aby vzniklá čočka měla dané optické parametry. Tohoto požadavku ovšem již nelze dosáhnout pouze za předpokladu konstantní tloušťky membrány, a tedy je nutné, aby se tloušťka po poloměru měnila. Situaci v tomto případě komplikuje také skutečnost, že výsledný deformovaný tvar membrány není dán pouze průhybovou funkcí w , ale také funkcí radiálního posunu u_r (Obr. 4.16). Dále v této kapitole budeme již všechny vztahy uvádět pro bezrozměrnou proměnnou poloměru ρ tak, jako v 4.1.1.1.



Obr. 4.16 Skutečný deformovaný tvar membrány

Dle Obr. 4.16 můžeme vztah mezi funkcí deformovaného tvaru membrány $g(\zeta)$ a funkcemi průhybu $w(\rho)$ a radiálního posunu $u_r(\rho)$ psát jako

$$g(\zeta) = w(\rho), \quad (4.46)$$

kde $\zeta = \rho + u_r(\rho)/a$ je pomocná funkční proměnná.

Náš problém tedy v tomto případě spočívá v řešení diferenciálních rovnic (4.6) a (4.7) s neznámými funkcemi $w(\rho)$, $u_r(\rho)$ a $h(\rho)$ tak, aby při konstantním modulu pružnosti E , Poissonově čísle ν a tlaku p splnily tyto funkce výsledný předepsaný deformovaný tvar $g(\zeta)$ dle vztahu (4.46) za současného splnění daných okrajových podmínek.

Tuto úlohu lze opět vyřešit například užitím metody řad a optimalizace jejích koeficientů. Postupujme tedy obdobným způsobem, jako v kapitole 4.1.1.1, a použijme již dříve popsané vztahy (4.4), (4.5), (4.6) a (4.7)

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{1}{a} \frac{du_r}{d\rho} + \frac{1}{2a^2} \left(\left(\frac{du_r}{d\rho} \right)^2 + \left(\frac{dw}{d\rho} \right)^2 \right) + \nu \left(\frac{u_r}{\rho a} + \frac{u_r^2}{2\rho^2 a^2} \right) \right],$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{u_r}{\rho a} + \frac{u_r^2}{2\rho^2 a^2} + \nu \left(\frac{1}{a} \frac{du_r}{d\rho} + \frac{1}{2a^2} \left(\left(\frac{du_r}{d\rho} \right)^2 + \left(\frac{dw}{d\rho} \right)^2 \right) \right) \right],$$

$$F_1 = -\frac{d}{d\rho} \left(\rho h \sigma_r \left(1 + \frac{1}{a} \frac{du_r}{d\rho} \right) \right) + h \sigma_t \left(1 + \frac{u_r}{a\rho} \right) - p \frac{1}{a} \frac{dw}{d\rho} (a\rho + u_r) = 0,$$

$$F_2 = -\frac{1}{a} \frac{d}{d\rho} \left(\rho h \sigma_r \frac{dw}{d\rho} \right) - p (a\rho + u_r) \left(1 + \frac{1}{a} \frac{du_r}{d\rho} \right) = 0.$$

Vzhledem k tomu, že nyní se v diferenciálních vztazích (4.6) a (4.7) vyskytuje třetí neznámá funkce průběhu tloušťky $h(\rho)$, je k vyřešení problému nutné znát další rovnici. Tou je v tomto případě vztah (4.46) psaný ve tvaru

$$F_3 = g(\zeta) - w(\rho) = 0. \quad (4.47)$$

Okrajové podmínky pro funkce $w(\rho)$ a $u_r(\rho)$ zůstávají stále stejné, a to (4.8), (4.9) a (4.10)

$$w(\rho)|_{\rho=1} = 0, \quad u_r(\rho)|_{\rho=1} = 0,$$

$$\left. \frac{dw}{d\rho} \right|_{\rho=0} = 0, \quad u_r(\rho)|_{\rho=0} = 0.$$

Nyní je třeba podotknout, že třetí neznámá funkce $h(\rho)$ se v diferenciálních vztazích (4.6) a (4.7) vyskytuje v nulté a první derivaci, a tedy je nutno jí předepsat jednu okrajovou podmínku. Zde můžeme opět využít osově souměrnosti úlohy a předpokládat, že funkce $h(\rho)$ je souměrná podle osy z (sudá), a tedy její derivace v bodě $\rho = 0$ bude nulová, platí

$$\left. \frac{dh}{d\rho} \right|_{\rho=0} = 0. \quad (4.48)$$

Neznámé funkce $w(\rho)$ a $u_r(\rho)$ budeme opět hledat ve dříve zmíněných tvarech (4.12), (4.13)

$$w(\rho) = \sum_{i=0}^{\infty} b_{2i} [1 - \rho^{2i+2}],$$

$$u_r(\rho) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{2i+1} \rho^{2i+1}$$

a jejich derivace tedy ve tvarech (4.14) a (4.15)

$$\frac{dw}{d\rho} = \sum_{i=0}^{\infty} -b_{2i} (2i+2) \rho^{2i+1}, \quad \frac{d^2w}{d\rho^2} = \sum_{i=0}^{\infty} -b_{2i} (2i+2)(2i+1) \rho^{2i},$$

$$\frac{du_r}{d\rho} = \sum_{i=0}^{\infty} c_{2i+1} (2i+1) \rho^{2i}, \quad \frac{d^2u_r}{d\rho^2} = \sum_{i=0}^{\infty} c_{2i+1} (2i+1)(2i) \rho^{2i-1}.$$

Předepsaná funkce výsledného tvaru $g(\zeta)$, která se vyskytuje ve vztahu (4.47) může být vyjádřena jako

$$g(\zeta) = g(\rho + u_r(\rho)/a). \quad (4.49)$$

Funkci $h(\rho)$ můžeme pak vzhledem k její osově souměrnosti hledat ve tvaru sudé mocninné řady

$$h(\rho) = \sum_{i=0}^{\infty} d_{2i} \rho^{2i} \quad (4.50)$$

a její derivaci tedy ve tvaru

$$\frac{dh}{d\rho} = \sum_{i=0}^{\infty} d_{2i} (2i) \rho^{2i-1}. \quad (4.51)$$

Tvar (4.50) má opět výhodu, že automaticky splňuje okrajovou podmínku (4.48).

Převědme nyní tento problém na optimalizační úlohu s ohraničením (vázaný extrém) a to následujícím způsobem. Předpokládejme, že počet členů řady bude K , potom můžeme hledané funkce (4.12), (4.13) a jejich derivace (4.14) a (4.15) přepsat do tvarů (4.16)-(4.19)

$$w_j = \sum_{i=0}^{K-1} b_{2i} [1 - \rho_j^{2i+2}],$$

$$u_{r,j} = \sum_{i=0}^{K-1} c_{2i+1} \rho_j^{2i+1},$$

$$\left(\frac{dw}{d\rho} \right)_j = \sum_{i=0}^{K-1} -b_{2i} (2i+2) \rho_j^{2i+1}, \quad \left(\frac{d^2 w}{d\rho^2} \right)_j = \sum_{i=0}^{K-1} -b_{2i} (2i+2)(2i+1) \rho_j^{2i},$$

$$\left(\frac{du_r}{d\rho} \right)_j = \sum_{i=0}^{K-1} c_{2i+1} (2i+1) \rho_j^{2i}, \quad \left(\frac{d^2 u_r}{d\rho^2} \right)_j = \sum_{i=0}^{K-1} c_{2i+1} (2i+1)(2i) \rho_j^{2i-1},$$

funkci (4.49) do tvaru

$$g_j = g(\rho_j + u_{r,j} / a) \quad (4.52)$$

a hledanou funkci (4.50) a její derivaci (4.51) do tvarů

$$h_j = \sum_{i=0}^{K-1} d_{2i} \rho_j^{2i}, \quad (4.53)$$

$$\left(\frac{dh}{d\rho} \right)_j = \sum_{i=0}^{K-1} d_{2i} (2i) \rho_j^{2i-1}, \quad (4.54)$$

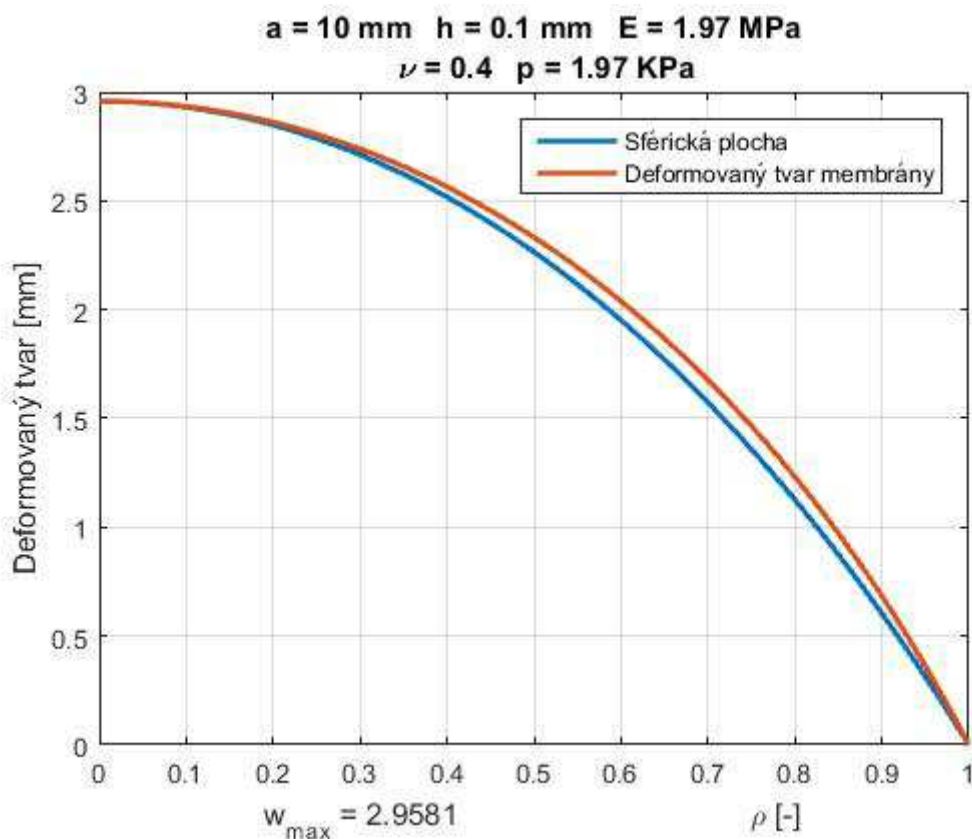
kde veličina $\rho_j \in \langle 0,1 \rangle$ přičemž $j = 1,2,\dots,L$, kde L je počet dělení intervalu $\langle 0,1 \rangle$.

Dosazením vztahů (4.16)-(4.19) a (4.52)-(4.54) do (4.6), (4.7) a (4.47) dostáváme funkce F_{1j} , F_{2j} a F_{3j} . Zavedme si nyní meritní funkci (cílovou funkci) ve tvaru

$$F_g = \sum_{j=1}^L [F_{1j}^2 + F_{2j}^2 + F_{3j}^2] \quad (4.55)$$

a hledejme takové hodnoty koeficientů b_{2i} , c_{2i+1} a d_{2i} , aby hodnota meritní funkce F_g byla minimální při současném splnění okrajové podmínky (4.10). Daný problém, tj. určení funkcí svislého průhybu $w(\rho)$, vodorovného radiálního posunu $u_r(\rho)$ a tloušťky membrány $h(\rho)$ tak, aby ve výsledku tvořily funkce $w(\rho)$ a $u_r(\rho)$ předepsaný deformovaný tvar $g(\rho)$, je tím řešen.

Uvažujme nyní podobný příklad, jako v předchozí kapitole. Mějme membránu o průměru $2a = 20$ mm (a je poloměr membrány) s mechanickými parametry $E = 1,97$ MPa a $\nu = 0,4$ zatíženou hydrostatickým tlakem $p = 1,97$ kPa. Z předchozí kapitoly víme, že předepíšeme-li membráně konstantní tloušťku $h = 0,1$ mm, bude její maximální průhyb $w_{max} = 2,9581$ mm. Porovnejme nyní výsledný deformovaný tvar této membrány například se sférickou plochou o stejné maximální výchylce (Obr. 4.17).



Obr. 4.17 Porovnání skutečného deformovaného tvaru membrány se sférickou plochou

Z Obr. 4.17 je zřejmé, že výsledný deformovaný tvar membrány se pro tento konkrétní příklad výrazně liší od sférické plochy. Ukažme si nyní, jak by se musela měnit tloušťka membrány po jejím poloměru, aby její výsledný deformovaný tvar odpovídal sférické ploše o maximální výchylce $w_{max}=2,9581\text{mm}$ se současným zachováním všech ostatních parametrů membrány.

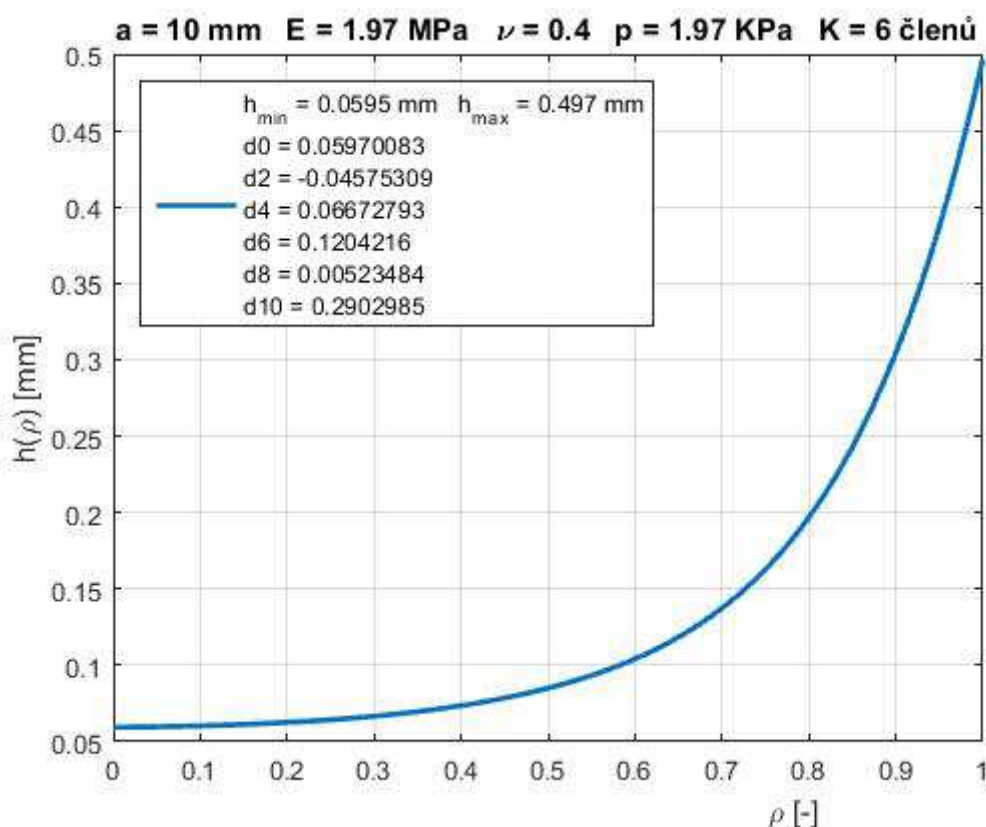
Předepsaná funkce $g(\zeta)$ odpovídá v tomto případě meridiánu sférické plochy, tedy platí

$$g(\zeta) = \sqrt{R^2 - \zeta^2 a^2} - \sqrt{R^2 - a^2}, \quad (4.56)$$

kde R je poloměr křivosti, který lze vyjádřit z maximální požadované výchylky ve vrcholu w_{max} jako

$$R = \frac{a^2 + w_{max}^2}{2w_{max}}. \quad (4.57)$$

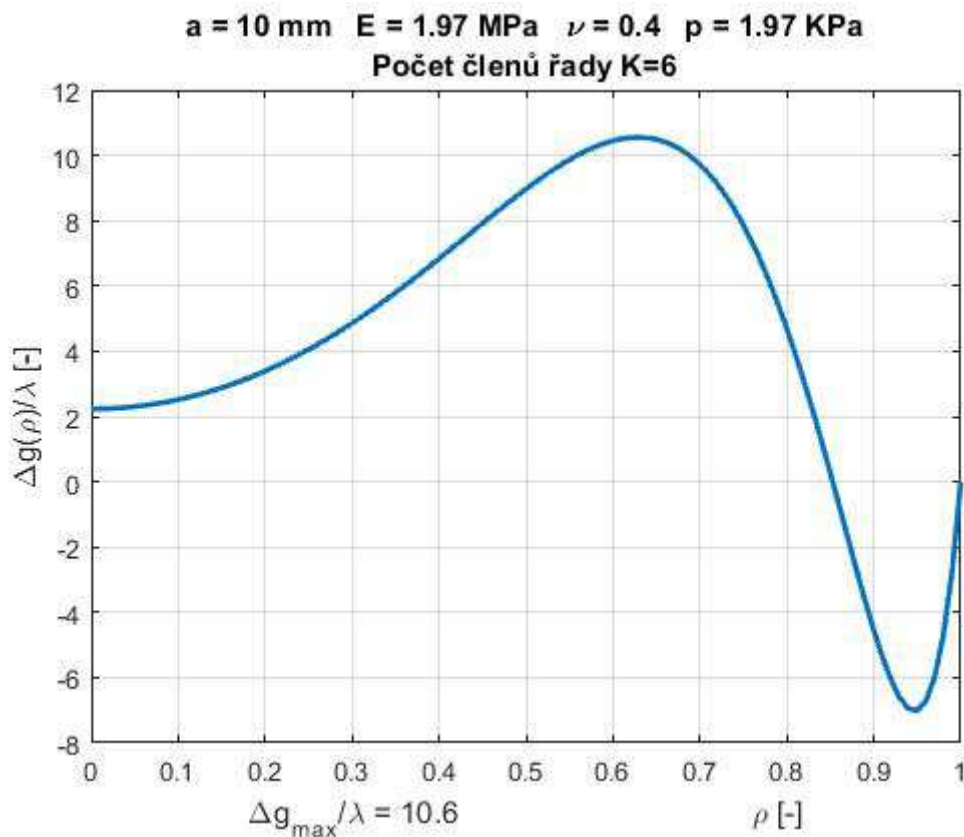
Vyřešíme-li tento problém pomocí výše popsané teorie v programu Matlab, dostaneme výsledný požadovaný průběh tloušťky membrány znázorněný na Obr. 4.18.



Obr. 4.18 Spočtený průběh tloušťky

Spočteme nyní úlohu předvedenou v kapitole 4.1.1 s tím rozdílem, že budeme brát v úvahu nekonztantní průběh tloušťky (Obr. 4.18) a vykresleme výsledný rozdíl předepsané

deformované plochy a spočtené deformované plochy $\Delta g / \lambda = [g(\rho + u_r / a) - w(\rho)] / \lambda$ vyjádřený v násobku vlnové délky He-Ne laseru ($\lambda=633$ nm) (Obr. 4.19).



Obr. 4.19 Odchylka výsledného spočteného tvaru membrány od předepsaného tvaru

Z maximální odchylky $\Delta g_{\max} / \lambda = 10,6$ lze usoudit, že optimalizace tloušťky touto metodou za použití zvoleného autorova algoritmu má pouze omezenou přesnost, nicméně je dostačující pro předvedení funkčnosti metody. Dále je v Tab. 4.3 pro zajímavost uvedeno, jak se výsledný spočtený tvar membrány s takto navrženou proměnnou tloušťkou (Obr. 4.18) liší od sféry pro různé hodnoty tlaků. Posouzení je provedeno hodnotou RMSE („root mean square error“) v češtině nazývanou jako střední kvadratická odchylka.

Tab. 4.3 Odchylky výsledného tvaru od sféry

Tlak p [kPa]	Poloměr křivosti R [mm]	RMSE [mm]
0,4925	28,179	0,002322
0,985	22,681	0,002643
1,97	18,409	0,002686
3,94	15,144	0,002109
7,88	12,733	0,004932

5 Experimentální měření tvaru kapalinové membrány

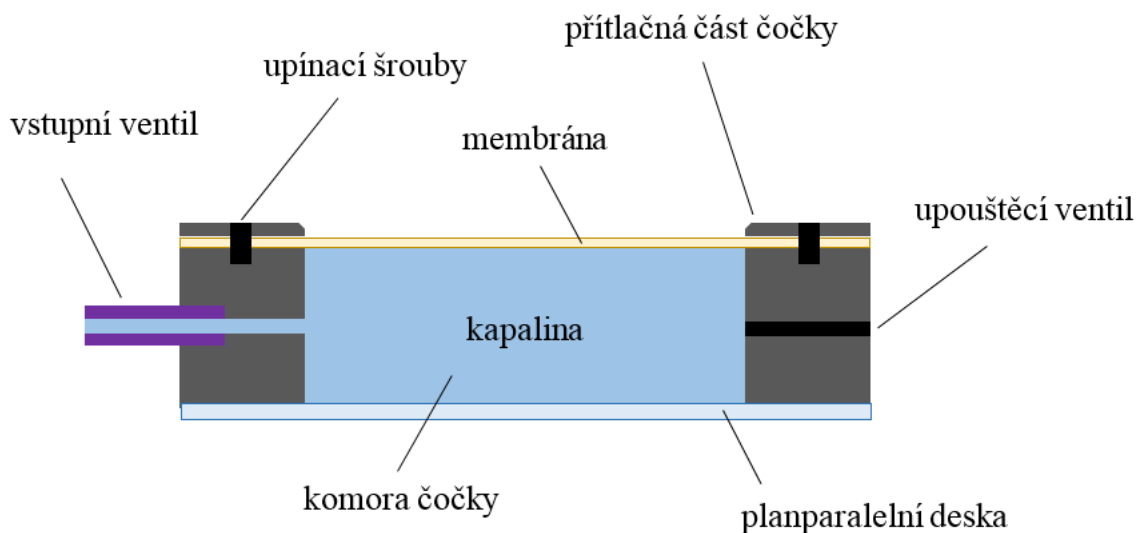
Ve spolupráci se Skupinou aplikované optiky [46] bylo provedeno experimentální měření tvaru kapalinové membránové čočky [47], jehož výsledky mohou být dále využívány k analýzám vlastností aktivních optických prvků tohoto typu a k návrhům optických soustav, které budou moci variabilně předem definovaným způsobem měnit vlastnosti zobrazení. V následujících podkapitolách bude stručně popsán postup měření, bude provedeno porovnání hodnot maximálního průhybu naměřených na předpjaté i volné membráně s hodnotami spočtenými teoretickým modelem v závislosti na působícím tlaku a nakonec budou určeny vybrané základní charakteristiky zobrazovacích vlastností této čočky.

5.1 Obecný popis experimentálního měření tvaru kapalinové membránové čočky

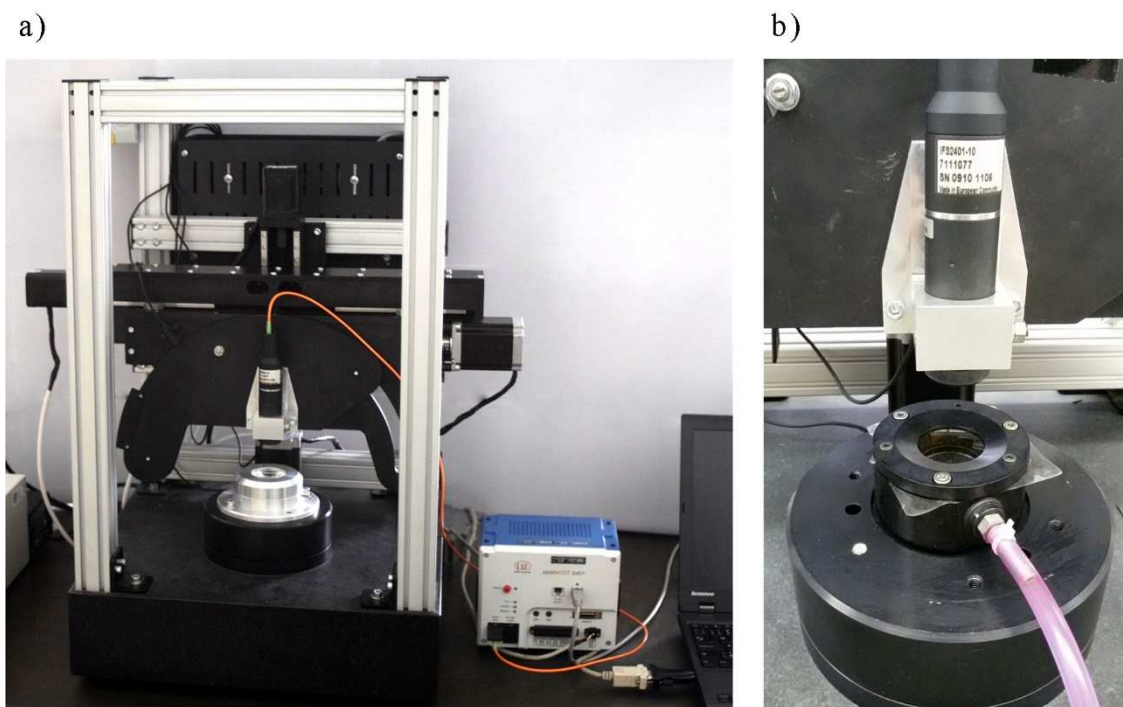
Schéma měřené membránové čočky [47] je ukázáno na Obr. 5.1. Základní část čočky tvoří komora. Pomocí vstupního ventilu je do ní přiváděna kapalina (v našem případě destilovaná voda) použitím přesné tlakové pumpy. Přítlačná část čočky upínacími šrouby upíná pružnou membránu (Sylgard 184 [48,49]), která se deformuje v závislosti na množství přiváděné kapaliny do komory čočky. Druhá strana čočky je tvořena planoparalelní deskou. Množství kapaliny lze regulovat upouštěcím ventilem.

Pro experiment byla použita komora o průměru $D=2a = 30$ mm a membrána tloušťky $h = 0.5$ mm.

Tvar membrány byl měřen pomocí zařízení na měření topografie ploch [50,51] (Obr. 5.2) se čtyřmi stupni volnosti. Základem je chromatický konfokální senzor [51-53], který je možno polohovat pomocí krokových motorů ve dvou navzájem kolmých směrech (osa x a z) a natáčet (kolem osy y). Vzorek je pomocí měřicího stolku dále rotován, a tím je možné získat data pro určení topografie celé plochy.



Obr. 5.1 Schéma funkčního vzorku kapalinové čočky

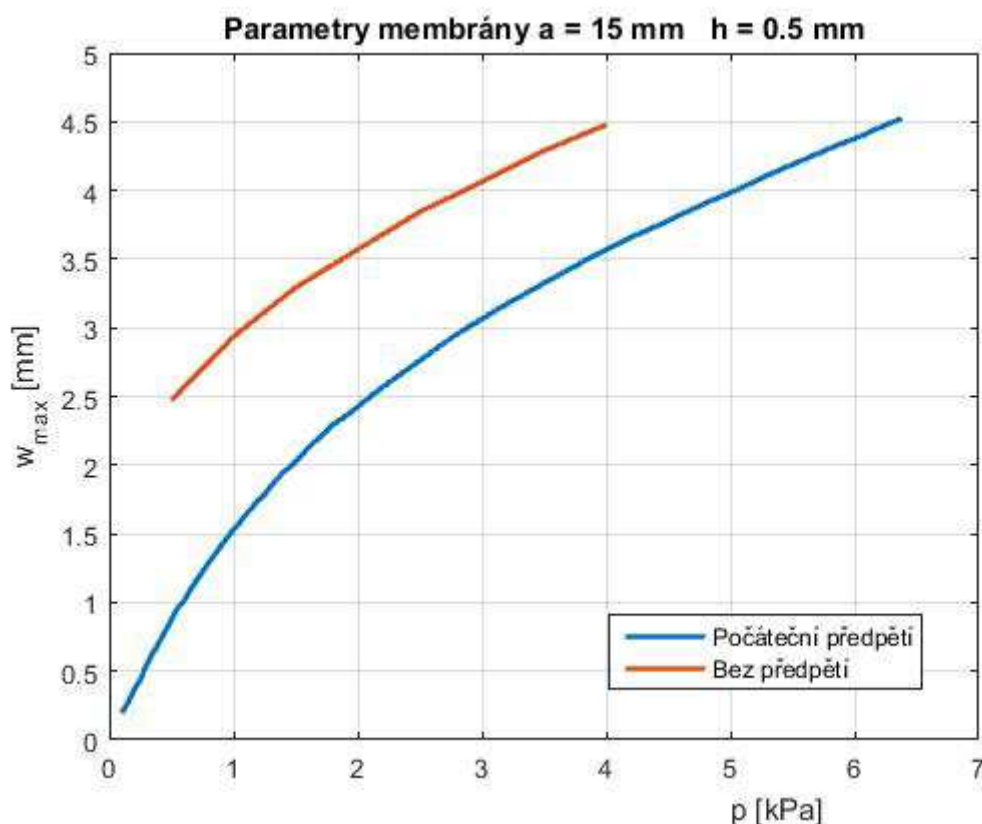


Obr. 5.2 a) Zařízení na měření topografie ploch [51] a b) snímek měřeného vzorku membránové čočky na měřícím stolku

5.2 Srovnání experimentálního měření a teoretického modelu

Pro ověření správnosti modelu představného v kapitole 2.2 pro průhyb membrány kapalinové čočky způsobený hydrostatickým tlakem bylo provedeno experimentální měření maximálního průhybu membrány v závislosti na velikosti hydrostatického tlaku. Byly měřeny dva případy

ukotvení membrány ve vzorku kapalinové čočky, a to nepředpjaté a předpjaté. Na Obr. 5.3 jsou vykresleny naměřené výsledky. Z těchto výsledků je patrné, že počáteční napjatost membrány má na výsledný průhyb obrovský vliv, a tedy je nutné ji v teoretickém modelu uvažovat.



Obr. 5.3 Naměřené hodnoty maximálního průhybu předpjaté a nepředpjaté membrány v závislosti na aplikovaném hydrostatickém tlaku

Hodnoty naměřené na nepředpjaté membráně by bylo možné ihned porovnat s teoretickým modelem představeným v kapitole 2.2.1 a aplikovaným v kapitole 4. Abychom mohli ale porovnat výsledky pro předpjatou membránu s teoretickým modelem, musíme použít doposud neaplikovanou teorii s uvažováním počátečního předpětí představenou v kapitole 2.2.2. Numerické řešení v tomto případě opět spočívá v minimalizaci vztahu (2.94) pro celkovou potenciální energii

$$\begin{aligned}
 E_p &= \int_0^a \frac{E}{2(1-\nu^2)} (\varepsilon_r^2 + 2\nu\varepsilon_r\varepsilon_t + \varepsilon_t^2) 2\pi r h dr - pV = \\
 &= \int_0^a \frac{E\lambda_0^4}{2(1-\nu^2)} (\tilde{\varepsilon}_r^2 + 2\nu\tilde{\varepsilon}_r\tilde{\varepsilon}_t + \tilde{\varepsilon}_t^2) 2\pi r h dr + \\
 &+ \int_0^a \frac{E\lambda_0^2\varepsilon_0}{1-\nu} (\tilde{\varepsilon}_r + \tilde{\varepsilon}_t) 2\pi r h dr + \int_0^a \frac{E\varepsilon_0^2}{1-\nu} 2\pi r h dr - pV,
 \end{aligned}$$

za předpokladu splnění daných okrajových podmínek, kde pro objem V platí (2.64)

$$V = \int_0^a w 2\pi(r + u_r)(1 + u_r') dr .$$

V případě, že na začátku výpočtu určujeme hodnotu počátečního napětí σ_0 , je vhodné veličiny λ_0 a ε_0 vyskytující se ve vztahu (2.94) vyjádřit v závislosti na σ_0 (2.2.2)

$$\varepsilon_0 = \frac{1-\nu}{E} \sigma_0, \quad \lambda_0 = \sqrt{2\varepsilon_0 + 1} = \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{E} \sigma_0 + 1} . \quad (5.1)$$

Dosadíme-li (2.64) do (2.94) a přepíšeme výsledný vztah dle (4.1) pro proměnnou ρ , dostaneme

$$\begin{aligned} E_p = & \int_0^a \frac{E\lambda_0^4}{2(1-\nu^2)} (\tilde{\varepsilon}_r^2 + 2\nu\tilde{\varepsilon}_r\tilde{\varepsilon}_t + \tilde{\varepsilon}_t^2) 2\pi a^2 \rho h d\rho + \int_0^a \frac{E\lambda_0^2\varepsilon_0}{1-\nu} (\tilde{\varepsilon}_r + \tilde{\varepsilon}_t) 2\pi a^2 \rho h d\rho + \\ & + \int_0^a \frac{E\varepsilon_0^2}{1-\nu} 2\pi a^2 \rho h d\rho - \int_0^a p w a 2\pi(a\rho + u_r) \left(1 + \frac{1}{a} \frac{du_r}{d\rho}\right) d\rho, \end{aligned} \quad (5.2)$$

kde pro $\tilde{\varepsilon}_r$ a $\tilde{\varepsilon}_t$ platí (4.2) a (4.3)

$$\tilde{\varepsilon}_r = \frac{1}{a} \frac{du_r}{d\rho} + \frac{1}{2a^2} \left(\left(\frac{du_r}{d\rho} \right)^2 + \left(\frac{dw}{d\rho} \right)^2 \right),$$

$$\tilde{\varepsilon}_t = \frac{u_r}{\rho a} + \frac{u_r^2}{2\rho^2 a^2} .$$

Okrajové podmínky pro tuto úlohu zůstávají stále stejné jako v kapitole 4, a tedy (4.8), (4.9) a (4.10)

$$w(\rho)|_{\rho=1} = 0, \quad u_r(\rho)|_{\rho=1} = 0,$$

$$\left. \frac{dw}{d\rho} \right|_{\rho=0} = 0, \quad u_r(\rho)|_{\rho=0} = 0.$$

Řešení rovnic můžeme hledat opět metodou řad a to ve tvarech (4.16)-(4.19)

$$w(\rho) = \sum_{i=0}^{K-1} b_{2i} [1 - \rho^{2i+2}],$$

$$u_r(\rho) = \sum_{i=0}^{K-1} c_{2i+1} \rho^{2i+1},$$

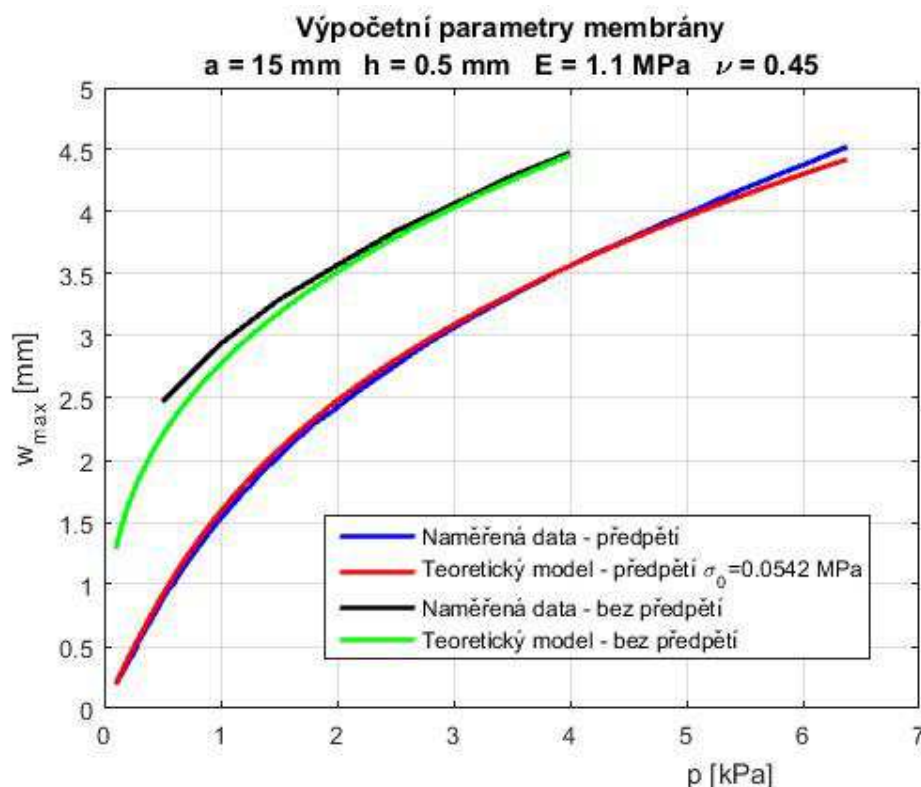
$$\left(\frac{dw}{d\rho}\right) = \sum_{i=0}^{K-1} -b_{2i}(2i+2)\rho^{2i+1}, \quad \left(\frac{d^2w}{d\rho^2}\right) = \sum_{i=0}^{K-1} -b_{2i}(2i+2)(2i+1)\rho^{2i},$$

$$\left(\frac{du_r}{d\rho}\right) = \sum_{i=0}^{K-1} c_{2i+1}(2i+1)\rho^{2i}, \quad \left(\frac{d^2u_r}{d\rho^2}\right) = \sum_{i=0}^{K-1} c_{2i+1}(2i+1)(2i)\rho^{2i-1},$$

kde K je počet členů řady.

Dosažením vztahů (4.16)-(4.19) do (4.2) a (4.3) a následně do (5.2) získáme výsledný výraz pro celkovou potenciální energii. Optimalizační úloha opět spočívá v hledání takových hodnot koeficientů b_{2i} a c_{2i+1} , pro které je hodnota výrazu pro celkovou potenciální energii minimální za současného splnění okrajové podmínky (4.10). Daný problém, tj. určení funkcí svislého průhybu a vodorovného radiálního posunu membrány se zavedeným počátečním předpětím σ_0 , je tím řešen.

Pomocí výše popsaného numerického výpočtu byly spočteny teoretické hodnoty maximálního průhybu membrány v závislosti na velikosti působícího tlaku pro předpjatý i nepředpjatý případ. Porovnání spočtených hodnot s naměřenými je vidět na Obr. 5.4. Vzhledem k neznalosti přesných mechanických parametrů měřené membrány bylo Poissonovo číslo určeno dle [48,49] a modul pružnosti stanoven tak, aby přímé oblasti spočtených křivek měly podobný sklon jako přímé oblasti křivek naměřených. Toto je samozřejmě pouze hrubý odhad skutečných mechanických parametrů a v případě detailnějšího porovnávání výsledků měření by bylo nutné tyto parametry přesněji určit jinými metodami (například tahovou zkouškou). Hodnota počátečního předpětí $\sigma_0 = 0,0542 \text{ MPa}$ byla taktéž určena iterativně tak, aby se naměřené výsledky blížily výsledkům spočteným. Dále je vhodné podotknout, že pro velmi velké průhyby se již materiál membrány přestává chovat lineárně pružně a pro dosažení reálnějších výsledků by bylo nutné ve výpočtu uvažovat složitější materiálový model. Závěrem této podkapitoly lze říci, že teoretický model pro osově souměrnou membránu zatíženou hydrostatickým tlakem popsany v této práci přibližně odpovídá jejímu skutečnému chování a že pro velikosti průhybů, kterých bylo při našich měřeních dosaženo, je rozhodujícím faktorem ovlivňujícím chování membrány její počáteční předpětí, a tedy je nutno ho ve výpočtu uvažovat.



Obr. 5.4 Porovnání naměřených a spočtených hodnot maximálního průhybu předpjeté a nepředpjeté membrány v závislosti na aplikovaném hydrostatickém tlaku

5.3 Aplikace vybraných naměřených výsledků v optice

Vzhledem k tomu, že má membránová čočka díky své konstrukci rotačně symetrický tvar, byl měřen pouze meridián její plochy $z = f(x)$. Dále díky tomu, že chromatickým konfokálním senzorem lze měřit pouze omezené sklony povrchu, byly měřeny pouze omezené oblasti kolem maxima průhybu. Na Obr. 5.5 a v Tab. 5.1 jsou ukázána a vyhodnocena vybraná měření **předpjeté** membrány, která jsou aproximována následujícím polynomem (tzv. rovnice standardní rotačně symetrické asférické plochy dle ISO 10110-12):

$$z = \frac{cx^2}{1 + \sqrt{1 - (cx)^2}} + \sum_{i=2}^5 A_{2i} x^{2i}, \quad (5.3)$$

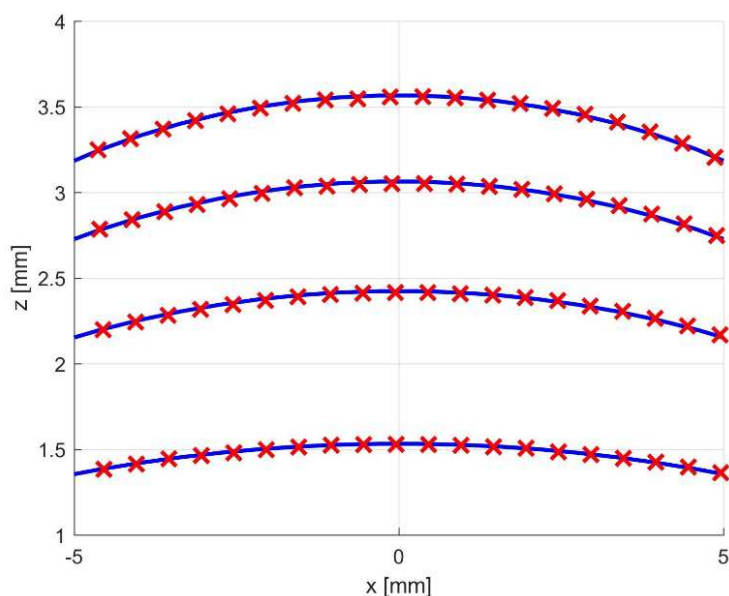
kde $c = 1/R$ je vrcholová křivost plochy, R je poloměr křivosti plochy ve vrcholu, x je x -ová souřadnice a A_{2i} jsou tzv. asférické koeficienty, které vyjadřují odchylku měřené plochy od sférického tvaru. Obr. 5.5 a Tab. 5.2 poté ukazuje aproximaci totožných dat pouze sférickou plochou.

Tab. 5.1 Aproximace vybraných měření tvaru membrány asférickou plochou pro rozsah $x_{\max} = 5$ mm

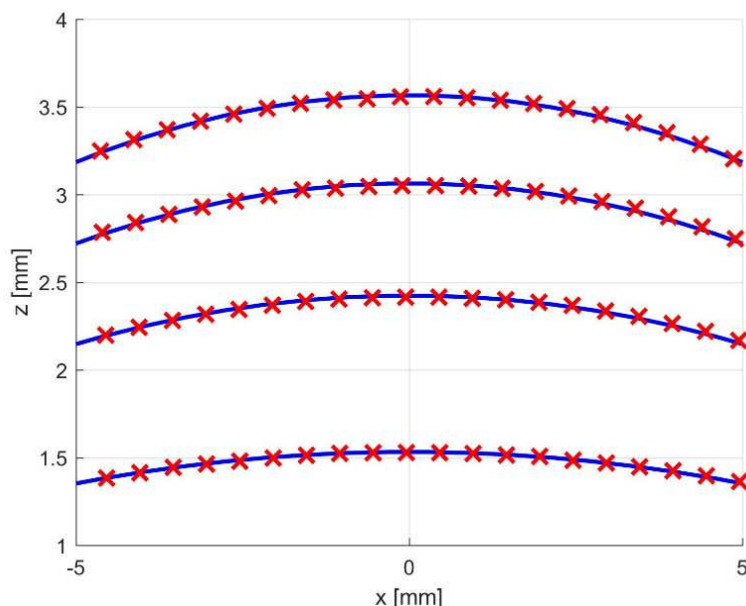
Tlak [kPa]	Max. průhyb [mm]	R [mm]	A ₄ [mm ⁻³]	A ₆ [mm ⁻⁵]	A ₈ [mm ⁻⁷]	A ₁₀ [mm ⁻⁹]	RMS [mm]
1	1.532	-72.065	-6.1293e-06	3.0085e-08	2.2560e-14	2.3670e-14	0.0049
2	2.424	-47.622	-1.8991e-08	-5.3278e-07	2.3683e-09	3.1316e-23	0.0130
3	3.064	-38.250	-4.6201e-08	-3.5266e-07	1.5683e-09	2.4328e-23	0.0120
4	3.566	-34.710	-7.2947e-06	-9.2791e-07	1.7473e-09	1.0930e-11	0.0087

Tab. 5.2 Aproximace vybraných měření tvaru membrány sférickou plochou pro rozsah $x_{\max} = 5$ mm

Tlak [kPa]	Max. průhyb [mm]	R [mm]	A ₄ [mm ⁻³]	A ₆ [mm ⁻⁵]	A ₈ [mm ⁻⁷]	A ₁₀ [mm ⁻⁹]	RMS [mm]
1	1.532	-69.786	0	0	0	0	0.006
2	2.424	-45.394	0	0	0	0	0.013
3	3.064	-36.686	0	0	0	0	0.017
4	3.566	-33.038	0	0	0	0	0.012



Obr. 5.5 Aproximace vybraných měření tvaru membrány asférickou plochou pro rozsah $x_{\max} = 5$ mm



Obr. 5.6 Aproximace vybraných měření tvaru membrány sférickou plochou pro rozsah $x_{\max} = 5$ mm

Jak je z těchto výsledků patrné, můžeme v rámci přesnosti našich měření ($\pm 0,02$ mm) považovat měřenou plochu za přibližně sférickou plochu, jejíž poloměry jsou v závislosti na maximálním průhybu membrány uvedeny v Tab. 5.2.

Pro optické aplikace má zásadní význam znát hodnotu ohniskové vzdálenosti kapalinové plankonvexní čočky tvořené membránou a krycím sklíčkem, mezi nimiž se nachází kapalina, kterou je v našem případě destilovaná voda. Jak je známo z optiky, je paraxiální ohnisková vzdálenost f' plankonvexní čočky dána vztahem ($f' > 0$)

$$f' = |R| / (n - 1), \quad (5.4)$$

kde n je index lomu kapaliny (voda $n \approx 1.33$) a R je poloměr křivosti čočky.

Nyní si vyjádříme vztah mezi poloměrem křivosti membrány R a maximálním průhybem w_{\max} membrány. Užitím naměřených hodnot z Tab. 5.1 dostáváme následující vztah mezi poloměrem křivosti R membrány a maximálním průhybem w_{\max} , platí

$$|R| = \sum_{i=0}^3 K_i w_{\max}^i \quad (5.5)$$

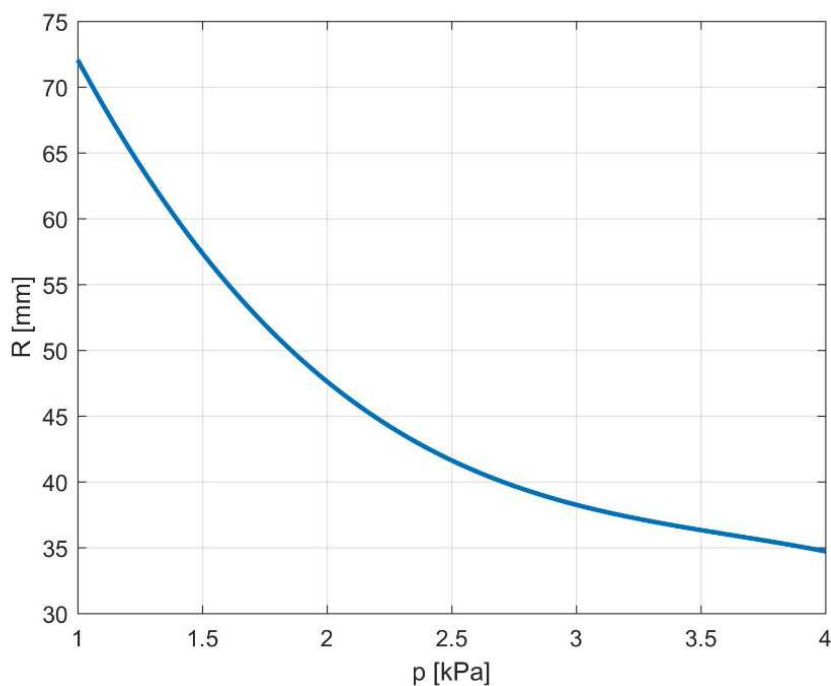
kde koeficienty K_i mají následující hodnoty: $K_0 = 1.5440e+02$ mm, $K_1 = -7.3438e+01$, $K_2 = 1.4123e+01$ mm⁻¹, $K_3 = -8.2486e-01$ mm⁻². Chyba aproximace $|R|$ polynomem 3. stupně je, pro případ poloměrů uvedených v Tab. 5.1, menší než 0.003 mm.

Vyjádříme si nyní vztah mezi poloměrem křivosti membrány R a tlakem p . Užitím naměřených hodnot z Tab. 5.1 dostáváme následující vztah mezi poloměrem křivosti R membrány a tlakem p , platí

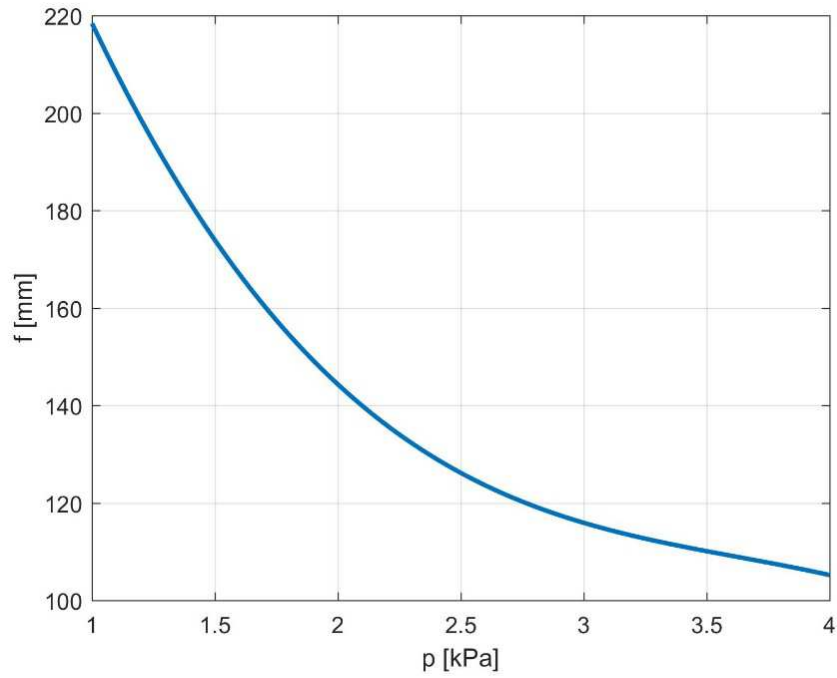
$$|R| = \sum_{i=0}^3 P_i p^i \quad (5.6)$$

kde koeficienty P_i mají následující hodnoty: $P_0 = 120.8135$ mm, $P_1 = -63.9811$, $P_2 = 16.7716$ mm⁻¹, $P_3 = -1.5394$ mm⁻². Chyba aproximace $|R|$ polynomem 3. stupně je, pro případ poloměrů uvedených v Tab. 5.1, menší než 0.003 mm.

Na Obr. 5.7 je zobrazena závislost poloměru křivosti membrány na tlaku, na Obr. 5.8 je poté zobrazena závislost ohniskové vzdálenosti (viz rovnice (5.4)) kapalinové plankonvexní čočky na tlaku, kde kapalinou je voda ($n = 1.33$).



Obr. 5.7 Závislost poloměru křivosti R membrány na tlaku p



Obr. 5.8 Závislost ohniskové vzdálenosti f' kapalinové plankonvexní čočky na tlaku p

6 Závěr

V první části práce byly odvozeny základní vztahy potřebné k výpočtům průhybů osově souměrných desek proměnné tloušťky, které byly dále za použití různých numerických metod aplikovány na problém průhybu optických čoček vlastní tíhou při přesném interferometrickém měření tvaru jejich ploch. Byly provedeny výpočty pro celou řadu případů sférických optických čoček lišících se materiálem, tloušťkou i průměrem, z jejichž výsledků lze konstatovat, že v některých případech podepření optické čočky na jejím okraji již není vliv jejího vlastního průhybu zanedbatelný, a tedy je nutné při měření takových čoček řešit tento problém jejich podepřením na průměru menším, než je průměr měřené čočky. Bezpečná velikost průměru podpěrného kroužku čočky, při které je vlastní průhyb měřené čočky zanedbatelný, byla ověřena na všech řešených příkladech a její hodnota stanovena na $0,678D$, kde D je průměr dané čočky.

Dalším, poněkud rozsáhlejším tématem probíraným v této práci byla teorie velkých průhybů osově souměrných membrán. Byly představeny dvě numerické metody, kterými lze daný problém deformace membrány zatížené konstantním hydrostatickým tlakem řešit. První představenou metodou byla metoda řad a optimalizace jejích koeficientů, s jejíž pomocí lze neznámé funkce průhybu a radiálního posunu membrány elegantně určit přímo minimalizací výrazu pro její celkovou potenciální energii s poměrně dobrou přesností. Druhou metodou byla všeobecně známá metoda konečných prvků implementovaná v programu OOFEM [44], která při dostatečném množství prvků dává velmi přesné výsledky. Jedním z požadavků na membránové kapalinové čočky v optice může být také jejich schopnost vytvořit při zadané velikosti tlaku přesně předepsaný deformovaný tvar tak, aby vzniklá čočka měla dané optické parametry. Tohoto požadavku lze dosáhnout za předpokladu, že se tloušťka membrány bude měnit definovaně v radiálním směru, což bylo ukázáno na příkladu, kdy výsledný požadovaný deformovaný tvar byla sférická plocha. Za použití metody řad a optimalizace jejích koeficientů pak byl tento problém vyřešen. Přesnost autorova řešení je ale dosti omezená a proto by v budoucnu bylo dobré tento problém vyřešit lépe.

V závěru práce bylo provedeno experimentální měření tvaru membránového vzorku v závislosti na velikosti působícího hydrostatického tlaku za účelem srovnání s teoretickým modelem. Byly uvažovány dva počáteční stavy a to předpjatý a nepředpjatý. Výsledky měření jasně ukázaly, že počáteční předpětí má na výsledný průhyb membrány velký vliv, a chceme-li, aby naměřené výsledky odpovídaly výsledkům spočteným, musíme předpětí v teoretickém modelu uvažovat. Za tímto účelem byly dodatečně odvozeny vztahy zahrnující počáteční předpětí, které po implementaci do jedné z výpočetních metod skutečně dávají výsledky, které se blíží experimentálně naměřeným hodnotám na laboratorním vzorku membránového prvku. Některé dílčí výsledky práce autora byly a budou v blízké budoucnosti publikovány v odborných časopisech a prezentovány na konferenci. Ačkoliv byla problematika v této práci směřována na aplikace v optické metrologii a optickém zobrazení, kde je nutné umět modelovat tvary ploch deskových a membránových prvků s vysokou přesností, lze samozřejmě uvedený popis a výpočtové modely využít i v oblasti modelování chování deskových a membránových konstrukcí v dalších oblastech techniky.

7 Literatura

- [1] TIMOSHENKO, S. P., S. WOINOWSKY-KRIEGER. *Theory of Plates and Shells*, McGraw Hill Higher Education, New York, 1964.
- [2] VENTSEL, E., T. KRAUTHAMMER. *Thin Plates and Shells: Theory, Analysis, and Applications*, Marcel Dekker, Inc. 2001.
- [3] SZILARD, R., *Theories and Applications of Plate Analysis*, John Wiley & Sons 2004.
- [4] VOLMIR, S., *Flexible Plates and Shells* (in Russian), State Publishing House of Technical-Theoretical Literature, Moscow, 1956.
- [5] BLAAUWENDRAAD, Johan. *Plates and FEM: surprises and pitfalls*. Dordrecht: Springer, c2010. ISBN 9789048135950.
- [6] HAN, J. - B., K. M. Liew, Analysis of Moderately Thick Circular Plates Using Differential Quadrature Method. *Journal of engineering mechanics*. 1997, 12, 1247–1252.
- [7] HENCKY., H., On the Stress State in Circular Plates With Vanishing Bending Stiffness, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 63, 1915, pp. 311–317.
- [8] CAMPBELL, J. D., On the Theory of Initially Tensioned Circular Membranes Subjected to Uniform Pressure, *Quart. J. Mech. & Appl. Math.*, vol. IX, Pt. 1, 1956, pp. 84–93.
- [9] FICHTER, W. B., Some Solutions for the Large Deflections of Uniformly Loaded Circular Membranes, *NASA Technical Paper 3658*, NASA Center for AeroSpace Information, 1997.
- [10] AUDOLY, B. and Y. POMEAU. *Elasticity and geometry: from hair curls to the non-linear response of shells*. Oxford: Oxford University Press, 2010. ISBN 0198506252.
- [11] SETH, B. R., Generalized strain measure with applications to physical problems. *MRC Technical Summary Report #248*, Mathematics Research Center, United States Army, University of Wisconsin: 1–18, 1961.
- [12] ŠMEJKAL, F.; A. MIKŠ. Vliv vlastního průhybu čočky na přesnost měření tvaru jejích ploch. *Jemná mechanika a optika*, **61**, č.10, 2016.
- [13] MIKŠ, A. Interferometrické metody vyhodnocování sférických ploch v optice, *Jemná mechanika a optika*, **46**, č.1, 29-35 (2001).
- [14] MIKŠ, A., P. NOVÁK. Vliv vlastního průhybu referenční desky interferometru typu Fizeau na přesnost měření rovinných ploch v optice. *Jemná mechanika a optika*. 2014, roč. **59**, č. 8, s. 228-232.

- [15] KORN, G. A. and T. M. KORN. *Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review*. Dover Publications, 2000.
- [16] KAN, J., A. SEGAL, F. VERMOLEN, *Numerical Methods in Scientific Computing*, VSSD, 2005.
- [17] <http://www.ansys.com/>
- [18] TYSON, R. K. *Principles of Adaptive Optics*, CRC Press, Boca Raton (2011).
- [19] REN, H., S. T. WU. *Introduction to Adaptive Lenses*. Wiley (2012).
- [20] Varioptic, <http://www.varioptic.com>
- [21] Optotune, <http://www.optotune.com>
- [22] Flexible optical, <http://www.okotech.com>
- [23] TAG optics, <http://www.tag-optics.com>
- [24] RAWICZ, A.H. and I. MIKHAILENKO. Modeling a variable-focus liquid-filled optical lens. *Appl. Opt.* **35** (1996), 1587-1589.
- [25] ZHANG, D. Y., N. JUSTIS, V. LIEN, Y. BERDICHEVSKY, Yu-Hwa LO. High-performance fluidic adaptive lenses. *Appl. Opt.* **43** (2004), 783-787.
- [26] YANG, Q., P. KOBRIN, C. SEABURY, S. NARAYANASWAMY, W. CHRISTIAN. Mechanical modeling of fluid-driven polymer lenses. *Appl. Opt.* **47** (2008), 3658-3668.
- [27] FENG, Guo-Hua and Yu-Chin CHOU, Flexible meniscus/biconvex lens system with fluidic-controlled tunable-focus applications, *Appl. Opt.* **48** (2009), 3284-3290.
- [28] REN, H. W. and S. T. WU. Variable-focus liquid lens. *Opt. Express* **15** (2007), 5931-5936.
- [29] SHAW, D. and T. E. SUN. Optical properties of variable-focus liquid-filled optical lenses with different membrane shapes. *Opt. Eng.* **46** (2007), 024002.
- [30] CHOI, H., D. S. HAN, Y. H. WON. Adaptive double-sided fluidic lens of polydimethylsiloxane membranes of matching thickness. *Opt. Lett.* **36** (2011), 4701-4703.
- [31] LI, L., Q. H. WANG, W. JIANG. Liquid lens with double tunable surfaces for large power tunability and improved optical performance. *J. Opt.* **13** (2011), 115503.
- [32] SCHNEIDER, F., J. DRAHEIM, R. KAMBERGER, P. WAIBEL, U. WALLRABE. Optical characterization of adaptive fluidic silicone-membrane lenses. *Opt. Express* **17** (2009), 11813-11821.
- [33] CHEIN, W. Z. Asymptotic behavior of a thin clamped circular plate under uniform normal pressure at very large deflection. *Sci. Rep. natn. Tsing Hua Univ.* **A5**, 71-94 (1948).

- [34] GOLDBERG, M. A. and A. B. PIFKO. Large deflection analysis of uniformly loaded annular membranes. *AIAA Jnl* **1**, 2111-2115 (1963).
- [35] PIFKO, A. B. and M. A. GOLDBERG. Iterative and power series solutions for the large deflection of an annular membrane. *AIAA Jnl* **2**, 1340-1342 (1964).
- [36] PERRONE, N. and R. KAO. A general nonlinear relaxation technique for solving nonlinear problems in mechanics. *J. appl. Mech.* **38**. 371-376 (1971).
- [37] KAO, R. and N. PERRONE. Large deflections of axisymmetric circular membranes, *Int. J. Solids Structures*, **7**, 1601-1612 (1971).
- [38] PETTIT, Richard, *G. Geometric and optical properties of inflatable point-focusing reflections*. Provo, Utah, USA, 1985. Master thesis
- [39] KELKAR, Ajit, W. ELBER, I. S. RAJUT. Large Deflections of Circular Isotropic Membranes Subjected to Arbitrary Axisymmetric Loading. *Computers & Structures*. Langley Research Center, Hampton Virginia, 1985, **21**(3).
- [40] MIKŠ, A. and P. NOVÁK. Calculation of a surface shape of a pressure actuated membrane liquid lens. *Optics and Lasers in Engineering*, **58**, 60-66 (2014).
- [41] WRIGGERS, P. and R. L. TAYLOR. A fully non-linear axisymmetrical membrane element for rubber-like materials. *Engineering Computations* **7.4** (1990): 303-310.
- [42] SCALES, L. E. *Introduction to non-linear optimization*. Springer-Verlag, New York, 1985.
- [43] AOKI, M. *Introduction to Optimization Techniques: Fundamentals and Applications of Nonlinear Programming*. Macmillan, New York, 1971.
- [44] PATZÁK, B., OOFEM project home page, <http://www.oofem.org>, 2000.
- [45] PLEŠEK, J., *Mechanika kontinua*, Elektr.scripturn, ČVUT 2012
- [46] Skupina aplikované optiky, <http://aog.fsv.cvut.cz>.
- [47] POKORNÝ, P., A. MIKŠ, J. NOVÁK, P. NOVÁK, Membránová čočka ovládaná tlakem kapaliny, funkční vzorek, ČVUT v Praze, 2015.
- [48] JOHNSTON, I. D., D. K. MCCLUSKEY, C. K. L. TAN, M. C. TRACEY. Mechanical characterization of bulk Sylgard 184 for microfluidics and microengineering. *Journal of Micromechanics and Microengineering* **24**(3), 2014.
- [49] Sylgard 184 silicone elastomer kit, <http://www.dowcorning.com/applications/search/products/Details.aspx?prod=01064291>.
- [50] POKORNÝ, P., A. MIKŠ, J. NOVÁK, P. NOVÁK, Skenovací měřicí systém pro bezkontaktní topografii povrchů a měření tloušťky, funkční vzorek, ČVUT v Praze, 2015.

- [51] OPAT, J. Vybrané metody měření tvaru a deformace ploch a jejich rekonstrukce. diplomová práce, ČVUT v Praze, 2015, <http://geo.fsv.cvut.cz/proj/dp/2015/jan-opat-dp-2015.pdf>.
- [52] POKORNÝ, P., J. OPAT, A. MIKŠ. Metody měření topografie ploch. *Jemná mechanika a optika* **58**(10), s. 301-303, 2013.
- [53] Konfokální snímače vzdálenosti, polohy a tloušťky pro transparentní materiály, <http://www.micro-epsilon.cz/displacement-position-sensors/confocal-sensor/index.html>.

8 Seznam publikací autora

ŠMEJKAL, F. a MIKŠ, A. Vliv vlastního průhybu čočky na přesnost měření tvaru jejích ploch. *Jemná mechanika a optika*. 2016, **61**(10), s. 258-261. ISSN 0447-6441.

POKORNÝ, P., et al. Vliv vlastního průhybu testovaných sférických optických prvků na přesnost interferometrických měření. In: ŘŮŽIČKA, B., ed. *Sborník příspěvků multioborové konference LASER56*. Multioborová konference LASER56. Třešť, 19.10.2016 - 21.10.2016. Brno: Ústav přístrojové techniky AV ČR, v.v.i.. 2016, s. 51-52. ISBN 978-80-87441-18-3.

ŠMEJKAL, F., KULMON, P., POKORNÝ, P. a MIKŠ, A. Numerické metody výpočtu průhybu čočky v důsledku její vlastní hmotnosti. přijato k publikaci v časopise. *Jemná mechanika a optika*. 2017. ISSN 0447-6441.

ŠMEJKAL, F. a MIKŠ, A. Bezkontaktní optická metoda měření průhybu a deformací mostních konstrukcí. *Jemná mechanika a optika*. 2015, **60**(4), s. 136-139. ISSN 0447-6441.

ŠMEJKAL, F. a MIKŠ, A. Měření deformací zobrazovací metodou. *Jemná mechanika a optika*. 2015, **60**(10),s289-293. ISSN0447-6441

NOVÁK, J., NOVÁK, P., a ŠMEJKAL, F. Proudově řízený stabilizovaný DC zdroj s plynule regulovatelným výstupním proudem. [Funkční vzorek]. 2012