

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ
FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ

**Sdružený model elektromagnetického aktuátoru s delší
přídržnou dobou**
Diplomová práce

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ
FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ

**Sdružený model elektromagnetického aktuátoru
s delší přídržnou dobou**
Diplomová práce

Študijný program: Elektrotechnika, energetika a management

Študijný odbor: Elektroenergetika

Školiace pracoviště: Katedra elektroenergetiky

Vedúci práce: prof. Ing. Ivo Doležel, CSc.

Abstrakt v SJ

Táto diplomová práca rieši problematiku modelovania elektromagnetických aktuátorov a súčasne aj modelovania magnetických silových polí. Teoretický rozbor tejto problematiky je v časti venovanej matematickému modelu a model konkrétneho zariadenia je v nasledujúcich kapitolách. K diplomovej práci sú pridané prílohy obsahujúce konkrétne numerické výpočty.

Abstrakt v AJ

This master thesis solves the modeling of electromagnetic actuators and also the modeling of magnetic force fields. Theoretical analysis of this issue is in part dedicated to mathematical models and specific device in the following chapters. In the end of the master thesis are added annexes containing specific numerical calculations.

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická

katedra elektroenergetiky

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Student: **Peter Budai**

Studijní program: Elektrotechnika, energetika a management
Obor: Elektroenergetika

Název tématu: **Sdružený model elektromagnetického aktuátoru s delší přídržnou dobou**

Pokyny pro vypracování:

Cíle:

1. Sestavit úplný matematický spojitý model aktuátoru.
2. Navrhnout metodu jeho numerického řešení.
3. Vyřešit tento numerický model pro vybraný rozsah zadaných parametrů (najít kvazioptimální variantu, jež je charakterizována nejvyšší možnou přídržnou silou).
4. Shrnout výsledky a provést jejich diskuzi.

Seznam odborné literatury:

- [1] Doležel, I., Dvořák, P., Ulrych, B. Actuator with extremely high pull-in force. Zastosowania komputerów w elektrotechnice : Materiały - Tom II. Poznań: Politechnika Poznańska, 2004. s. 523-526. ISBN: 83-912306-7-8.
- [2] Mach, F., Karban, P., Doležel, I. Design of novel bearing-less electromagnetic actuator in valve operation. Proc. 14th International Symposium on Magnetic Bearings (ISMB 2014), Linz: Linz Center of Mechatronics GmbH, 2014. pp. 416-420.
- [3] Ida, N. Sensors, actuators, and their interfaces. SciTech Publishing, Edison, NJ, 2014.

Vedoucí: prof. Ivo Doležel Ing., CSc.

Platnost zadání: do konce zimního semestru 2017/2018



doc. Ing. Zdeněk Müller, Ph.D.
vedoucí katedry

prof. Ing. Pavel Ripka, CSc.
děkan

V Praze dne 18. 4. 2016

Prehlasujem, že som predloženú prácu vypracoval samostatne, a že som uviedol všetky použité informačné zdroje v súlade s metodickým pokynom o dodržovaní etických princípov pri príprave vysokoškolských prác.

Praha, 5. január 2017

vlastnoručný podpis

Pod'akovanie

Touto cestou by som chcel poďakovať vedúcemu práce prof. Ing. Ivovi Doleželovi, CSc., ktorý mi ochotne pomáhal počas celej doby a spracovávania problému ako aj s každou jeho časťou.

Zoznam obrázkov

1	elektromechanický aktuátor	6
2	elektrohydraulický aktuátor	7
3	elektromagnetický aktuátor	8
4	schéma budiaceho obvodu	9
5	schématický rez aktuátorom	10
6	znázornenie pre výpočet F_p	12
7	k definícii umelej hranice oblasti	15
8	energetický postup výpočtu síl	16
9	elektromagnetické namáhanie elementárneho hranolu	18
10	podstata metódy Eggshell	19
11	k odvodeniu tepelnej bilancie telesa	21
12	pozdĺžny rez aktuátorom	26
13	priečny rez aktuátorom	27
14	vlastnosti použitých materiálov	28
15	statická charakteristika	29
16	magnetické pole aktuátoru	31
17	dynamická charakteristika	34
18	vývojový diagram matice A	41
19	vývojový diagram matice B	42

Obsah

1	Úvod	3
2	Elektrické akčné členy	4
2.1	Ventilové aktuátory	4
2.1.1	Hlavné funkcie a rozdelenie	4
2.2	Lineárne aktuátory	5
2.2.1	Elektromechanické aktuátory	5
2.2.2	Elektrohydraulické aktuátory	7
2.2.3	Termoelektrické aktuátory	7
2.2.4	Elektromagnetické aktuátory	7
3	Spojité matematický model aktuátora	9
3.1	Rovnica budiaceho obvodu	9
3.2	Rovnica pohybu jadra	10
3.3	Rovnica magnetického poľa v systéme	12
3.4	Magnetická sila pôsobiaca na jadro	14
3.4.1	Energetický prístup	15
3.4.2	Prístup pomocou Maxwellovho tenzoru	16
3.5	Indukčnosť cievky s feromagnetickým jadrom	19
3.6	Rovnice prenosu tepla	20
4	Prípustné zjednodušenie modelu	23
5	Tvorba modelu elektromagnetického aktuátora	25
5.1	Statická charakteristika aktuátora	26
5.2	Výber zdroja	27
5.2.1	Tepelný výpočet	28
5.3	Výber pružiny	31
6	Dynamická charakteristika aktuátora	33
6.1	Aproximácia funkcií	34
6.2	Prechodný dej	38
7	Záver	40

1 Úvod

Úlohou tejto práce je zostavenie úplného modelu elektromagnetického aktuátora a navrhnutí jeho riešenie. S touto témou som sa nikdy predtým nestretol, čo bol jeden z dôvodov, prečo som sa o ňu začal zaujímať. Ďalším dôvodom bola jednoduchosť daného zariadenia a jeho mnohostranné praktické využitie. Vypracovanie praktickej aj teoretickej časti prebiehalo pod dôkladným a korektným dohľadom prof. Doležela, pričom väčšinu informácií som získaval práve z jeho odborných publikácií.

V úvode práce sa budem venovať všeobecnému popisu rôznych druhov aktuátorov. V nasledujúcej kapitole bude podrobne popísaný spojitý matematický model, zahŕňajúci magnetické pole, tepelné pole, model napájacieho ako aj mechanického obvodu. Keďže sa v ňom vyskytuje príliš mnoho veličín funkčne závislých od času (prúd napájacieho obvodu, indukčnosť cievky, sila pôsobiaca na jadro cievky a teda aj jeho poloha a rýchlosť), analytické riešenie by bolo veľmi komplikované a presahujúce moje schopnosti, čo viedlo k rozhodnutiu použiť numerické metódy. V závere práce kladiem najväčšiu pozornosť na rozbor výsledkov numerického riešenia, ich porovnanie s praktickými skúsenosťami s podobnými zariadeniami a návrhu využitia v konkrétnych aplikáciách.

Praktická časť pozostáva z modelu konkrétneho aktuátora vypracovanom vo výpočtovom softvéri Agros2D a jeho numerického riešenia, podrobne rozpísaného v ďalších kapitolách. Podľa výsledkov modelu z programu Agros2D som navrhol zdroj napájacieho obvodu a vybral vhodnú variantu zo širokej ponuky rôznych výrobcov. Vlastnosti tohto zdroja som potom aplikoval na zostrojenie statickej charakteristiky aktuátora. Ďalej som výsledky využil na aproximačný výpočet funkčnej závislosti veľkosti magnetickej sily pôsobiacej na jadro cievky a samotnej indukčnosti cievky v závislosti od okamžitých hodnôt výchylky jadra a prúdu pretekajúceho cievkou použitím výpočtového programu MATLAB. Pomocou týchto funkcií som potom vypočítal jednotlivé body dynamickej charakteristiky aktuátora, ktorá nám zobrazuje hodnoty všetkých dôležitých veličín v každom okamihu pohybu jadra.

2 Elektrické akčné členy

Definícia aktuátora

Aktuátor je definovaný ako funkčný prvok, ktorý spája informačný proces s technickým procesom. Tejto definícii zodpovedajú zariadenia schopné previesť riadiaci signál na mechanický pohyb. Aktuátory sú tým pádom veľmi vhodné napríklad na riadenie prietoku média. Realizácia takého riadenia prebieha prostredníctvom ventilov. Riadenie prietoku média ventilovým systémom patrí k najčastejším využitím aktuátora ako takého, a preto sa v ďalšej časti budeme venovať týmto typom aktuátorom. [11]

2.1 Ventilové aktuátory

Bežné ventily sú ovládané manuálne, t.j. lineárny alebo rotačný pohyb dosiahnutý prostredníctvom ručného kolesa, páky alebo iných elementov. Pri návrhu manuálnych ventilov je nutné brať ohľad na množstvo fyzického úsilia nutného k ovládaniu manuálnych prvkov. Pri ručnom ovládaní nastáva tiež otázka správnej orientácie a rýchlosti otáčania. Ak sme schopní určiť smer a rýchlosť ventilu a zaobísť sa bez obmedzených fyzických možností človeka, môžeme pre automatickú reguláciu prietoku použiť aktuátory.

2.1.1 Hlavné funkcie a rozdelenie

Pri výbere vhodného aktuátora sú k dispozícii nasledujúce dôležité funkcie a možné rozdelenia podľa:

- Zdroja energie: Aktuátory, riadené elektrickou energiou rozdelujeme podľa výstupného napätia. V miestach, kde nie je možnosť využitia elektrickej energie, je možné využiť aktuátory pneumatické. Ak nemáme k dispozícii žiadny externý zdroj energie, môžeme ešte využiť riadenie pomocou energie regulovaného média.

- Výstupnej sily: V priemyslových budovách sa požívajú veľké aktuátory, ktoré sú schopné produkovať veľké sily. Na rozdiel od obytných budov, kde sú napríklad na vykurovacích okruhoch nainštalované ventily, ktoré nevyžadujú také veľké ovládacie sily, ako priemyselné aplikácie.

- Bezpečnostnej funkcie: V prípade prerušenia riadiaceho signálu môžeme z bezpečnostných dôvodov požadovať, aby sa ventil vrátil do pôvodnej pozície alebo udržal pozíciu aktuálnu.

- Tuhosti aktuátora: Ďalšia podstatná vlastnosť každého aktuátora je ich takzvaná tuhosť. Vyjadruje schopnosť aktuátora udržiavať požadovaný

stav vzhľadom na zmeny vlastností procesu (zmena tlaku média,...).

- Pracovného prostredia: Pri výbere aktuátora pre daný proces je nutné počítať aj s typom prostredia, v ktorom bude pracovať. Je potrebné zhodnotiť hlavne prítomnosť výbušných a horľavých materiálov ako aj agresívnych a reaktívnych látok (prímorské prostredie,..). Špeciálne materiály je nutné používať aj v prostrediach s vysokými nárokmi na hygienu ako napríklad v potravinárstve. Každý aktuátor vo ventilovom prevedení má označenie s hodnotou schopnosti odolávať proti vniknutiu kvapalín a prachu

- Režimu riadenia: Funkciou ventilového aktuátora je nastaviť pozíciu ventilu tak, aby došlo k správnej regulácii prietoku média. Existujú dva typy riadiaceho režimu, a to „floating“ a „modulating“ režim. V prípade „floating“ verzie ovládame deliaci ventil, ktorý môže byť otvorený alebo zatvorený. Na ovládanie regulačného ventilu, kde je požadovaná pozícia ventilu aj v miestach medzi otvorením a zatvorením, použijeme režim „modulating“.

- Ovládaného ventilu: Existuje mnoho typov ventilov. Na niektoré ventily je nutné pôsobiť silou, na iné momentom. Na základe toho rozdeľujeme ventilové aktuátory na lineárne a rotačné. Aby bol aktuátor efektívne využitý, musí byť aktuátor dostatočne výkonný a schopný rýchlo a presne odpovedať na riadiaci signál. Elektrické komponenty musia byť samozrejme umiestnené a izolované v súlade s elektrickou bezpečnosťou danou normou.

2.2 Lineárne aktuátory

Lineárny aktuátor je zariadenie, ktoré pomocou dostupného zdroja energie produkuje priamočiary pohyb a silu. Tieto aktuátory teda môžeme rozdeliť podľa vstupného zdroja energie. Na základe tohto rozdelenia existujú rôzne spôsoby dosiahnutia priamočiareho pohybu pre ovládanie pozície elementu ventilu.

Zovšeobecnené zloženie lineárnych aktuátorov:

- Elektronika
- Prevody / mechanický systém
- Bezpečnostný mechanizmus
- Uchytenie k ventilu
- Vonkajší kryt

2.2.1 Elektromechanické aktuátory

Pre tieto aktuátory je typické, že zdrojom energie je elektromotor. Je teda zrejmé, že je nutné previesť rotačný pohyb elektromotoru na pohyb priamočiary. Aktuátor je bezpečne pripevnený k telu ventilu pomocou svorky v tvare písmena U a hriadeľ ventilu je fixovaný k výstupnej skrutke

aktuátoru. Tento aktuátor využíva indukčné snímanie polohy a sily. Snímanie sily funguje na princípu prevodu deformácie pružiny na polohu, ktorú sníma indukčný snímač. Polohu je nutné snímať kvôli ochrane ventilu pred poškodením.



Obr. 1: elektromechanický aktuátor

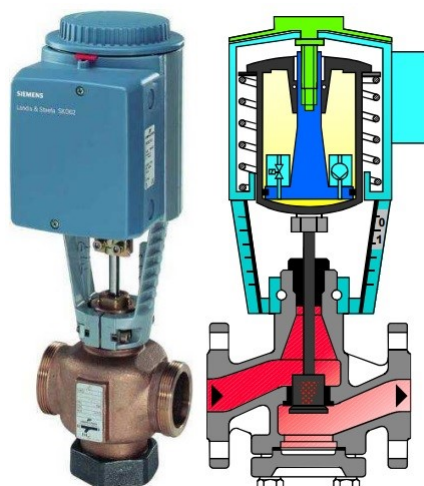
Niektoré z týchto typov aktuátorov obsahujú vratnú pružinu, ktorá v prípade výpadku napájania vráti ventil do bezpečnej pozície. Pri výpadku je možné využiť manuálne ovládanie, ktoré je vo verzii s vratnou pružinou umiestnené pod vonkajším krytom. Manuálne ovládanie je tiež využívané pri montáži aktuátoru k ventilu. Pohonom, ktorý vyvoláva pohyb, je synchronný motor. Jeho rotačný pohyb je prevedený na priamočiary pohyb prostredníctvom prevodovky obsahujúcej plastové ozubené kolesá s pohyblivou skrutkou. V prípade havarijného stavu tento aktuátor obsahuje solenoid, ktorý pri výpadku prúdu rozpojí ozubené kolesá v prevodovke. To ale môže spôsobiť nekontrolované zatváranie ventilu a rázy. Z tohto dôvodu je rýchlosť pohybu výstupnej skrutky regulovaná odstredivou brzdou.

Ďalším prevedením elektromechanického lineárneho aktuátoru je pripavenie k ventilu pomocou dvoch skrutiek s manuálnym ovládaním vyvedeným na vonkajší kryt (takisto ako v predchádzajúcom prípade sa používa len pri montáži alebo poruche). Tiež je poháňaný synchronným motorom, kde pre transformáciu rotačného pohybu na pohyb translačný slúži slimačí prevod a pohyblivá skrutka. Výhodou slimačieho prevodu je možnosť dosiahnutia požadovaného prevodového pomeru použitím minimálneho počtu súčiastok. Na snímanie pozície aktuátoru sa využíva potenciometer, plniaci rovnakú funkciu ako v predchádzajúcom prípade. Možnosťou manuálneho ovládania nedisponuje každý aktuátor. V aktuátoroch riadených pomocou mikrokontroléru a poháňaných jednosmerným motorom je snímanie pozície inkrementálne a je realizované prostredníctvom jazýčkového kontaktu pripaveného na ozubené koleso. Kontakt je z magneticky mäkkého materiálu, ktorý sa zopne v blízkosti magnetického póla. Požadovaný lineárny pohyb

je opäť dosiahnutý pohyblivou skrutkou. Hriadeľ ventilu je naskrutkovaný vo vnútri pohyblivej skrutky. Kvôli ochrane ventilu aktuátor sníma silu na základe privedeného prúdu do motoru.

2.2.2 Elektrohydraulické aktuátory

Konštrukcia týchto aktuátorov je založená na princípoch hydrauliky a musí obsahovať prvky slúžiace k rozvodu a čerpaniu hydraulického oleja. Hydraulické prevedenie nám umožňuje jednoduchú manuálnu montáž. Aktuátor obsahuje elektromagnetické čerpadlo obsahujúce solenoid, ktorý tlačí hydraulický olej z vrchnej do spodnej časti komory. Spodná časť sa zväčšuje a komora sa pohybuje smerom dolu a tlačí na hriadeľ ventilu, čím ho otvorí. Následkom tohto pohybu dôjde ku stlačeniu pružiny. Pri zatváraní ventilu sa povolí prenos oleja a stlačená pružina ho vytlačí späť do vrchnej časti komory.



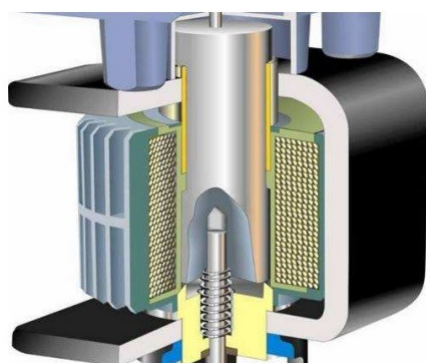
Obr. 2: elektrohydraulický aktuátor

2.2.3 Termoelektrické aktuátory

Princípom týchto aktuátorov je premena elektrickej energie na tepelnú a následne na energiu mechanickú. Typickým príkladom sú aktuátory pracujúce s voskom, ktorý sa pomocou elektrického prúdu zahreje a rozťahne, čím tlačí na posuvný člen, ktorý koná lineárny pohyb.

2.2.4 Elektromagnetické aktuátory

Aktuátory, ktoré používajú elektromagnetický pohon sú inštalované na miestach s požiadavkou rýchlej odozvy a pohybu ventilu.



Obr. 3: elektromagnetický aktuátor

Tento aktuátor je riadený prostredníctvom mikrokontroléru a na snímanie polohy využíva indukčný snímač. Pohonom nie je elektromotor, ale lineárny elektromagnetický akčný člen . Elektronika na základe riadiaceho signálu napája vinutie, v ktorom sa indukuje magnetické pole pôsobiace na posuvné jadro, uložené v klzných ložiskách. Pohybuje sa cestou s najmenším magnetickým odporom, čím vyvoláva silové pôsobenie na hriadeľ ventilu. Návrat do pôvodnej polohy opäť zaisťuje vratná pružina. Pri montáži a výpadku energie je možné využiť manuálne ovládanie. V nasledujúcich kapitolách sa budeme venovať práve tomuto typu aktuátoru.

3 Spojitý matematický model aktuátora

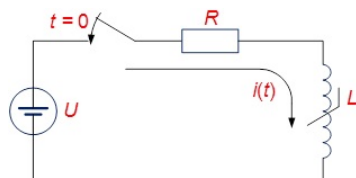
Spojitý matematický model aktuátora pozostáva ze štyroch rovníc. Jedná sa o dve obyčajné, avšak silno nelineárne diferenciálne rovnice prvého rádu, popisujúce časový priebeh prúdu v napájacom obvode a časový priebeh pohybu feromagnetického jadra, a o dve taktiež nelineárne parciálne diferenciálne rovnice popisujúce časové priebehy rozloženia magnetického poľa a teploty vo vyšetrovanom systéme.

Znalosť časového priebehu rozloženia magnetického poľa je potrebná na určenie vybraných parametrov spomínaných obyčajných diferenciálnych rovníc (jedná sa o indukčnosť aktuátora, ktorá sa mení ako s veľkosťou prúdu, tak aj s polohou jadra, a o okamžitú veľkosť magnetickej sily pôsobiacej na jadro a ovplyvňujúcej jeho pohyb). Rozloženie teplotného poľa je rozhodujúce pre posúdenie tepelnej odolnosti celej konštrukcie aktuátora a pre kontrolu vhodnosti výberu izolačných materiálov.

V ďalších odstavcoch tejto kapitoly všetky spomenuté rovnice odvodíme a popíšeme ich parametre. Potom vykonáme ich analýzu a na konci potom zhodnotíme možnosti zjednodušenia celého modelu tak, aby mohol byť numericky vyriešený dostupným programovým vybavením.

3.1 Rovnica budiaceho obvodu

Budiaci obvod predstavuje elektrické napájanie sledovaného aktuátora a zobrazuje jeho jednotlivé časti, ktorých modelovaniu sa budeme venovať neskôr. Schéma tohoto obvodu je na obrázku 4.



Obr. 4: schéma budiaceho obvodu

Za predpokladu, že budiaca cievka je napájaná z dostatočne tvrdého zdroja konštantného jednosmerného napätia, je časový priebeh prúdu i v budiacom obvode popísaný obyčajnou diferenciálnou rovnicou v tvare

$$U = Ri + \frac{d(Li)}{dt} \quad (1)$$

kde R označuje súhrnnú rezistanciu všetkých prvkov tohoto obvodu, L je indukčnosť cievky, U napätie zdroja a t označuje čas. Počiatočná podmienka k tejto rovnici je

$$i(0) = 0 \quad (2)$$

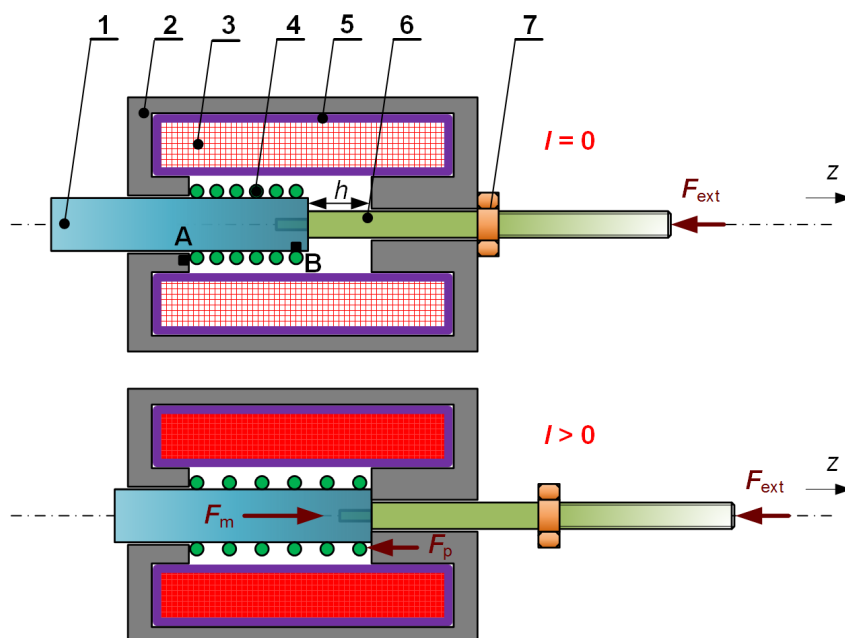
Tu je potrebné poznamenať, že rezistencia odbvodu R nie je počas celého deja konštantná, ale mení sa v závislosti od teploty. Je to spôsobené postupným ohrevom jednotlivých prvkov obvodu. Indukčnosť cievky L je síce nezávislá na teplote, ale mení sa s veľkosťou prúdu a polohou jadra.

3.2 Rovnica pohybu jadra

Rýchlosť pohybu jadra je popísaná druhým Newtonovým zákonom

$$m \frac{d(\mathbf{v})}{dt} = \sum \mathbf{F} \quad (3)$$

kde m je hmotnosť všetkých pohyblivých častí (v našom prípade to je fero-magnetické jadro 1 a nemagnetický hriadeľ 6, viď obr. 5) a $\sum \mathbf{F}$ je vektorový súčet všetkých síl, ktoré naň pôsobia.



Obr. 5: schématický rez aktuátorom

Ak si os aktuátoru označíme písmenom z , pohyb prebieha iba v tejto osi a namiesto vektorovej rovnice môžeme použiť zložkový tvar

$$m \frac{dv}{dt} = \sum F \quad (4)$$

V ďalšom texte bude písmeno v označovať zložku rýchlosti v osi z , pričom to isté platí aj pre sily.

Ďalej sa zameriame na jednotlivé sily figurujúce na pravej strane rovnice 4. Najvýraznejšie časti tvoria magnetická sila F_m v kladnom smere osi

z , externá sila F_{ext} , spätná sila pružiny F_p pôsobiaca v zápornom smere osi z , odporové sily prostredia (aerodynamické, trecie) F_t taktiež v zápornom smere osi z a ak je táto osa kolmá k zemskému povrchu, tak aj gravitačná sila F_g . Pre výslednicu týchto síl môžeme písať

$$|F_m| - |F_{\text{ext}}| - |F_p| - |F_t| + a |F_g| = \sum F \quad (5)$$

kde pre aktuátor vo vodorovnej polohe platí $a = 0$ v polohe zvislej (jadro sa pohybuje nahor) $a = -1$ alebo naopak $a = 1$. Tieto sily teraz rozoberieme podrobnejšie.

Magnetická sila F_m je prejavom magnetického poľa v systéme vyvolaného budiacim prúdom i . Jej presné určenie nie je jednoduché, lebo je závislá ako na veľkosti tohto prúdu, tak aj na polohe jadra a budeme sa mu venovať v ďalších odstavcoch. Externá sila F_{ext} je závislá na aplikácii, pre ktorú je aktuátor určený. Môže byť konštantná, ale vo väčšine prípadov je závislá na čase. V takom prípade musí byť tento priebeh známy dopredu. Sila F_p je daná vzťahom

$$F_p = k(z - z_0) \quad (6)$$

kde k je známa konštanta - tuhosť pružiny. Jej veľkosť závisí na materiále, geometrii a ďalších parametroch pružiny. Rozdiel $z - z_0$ je znázornený na obr. 6. Polohu jadra z je možné určiť zo vzťahu

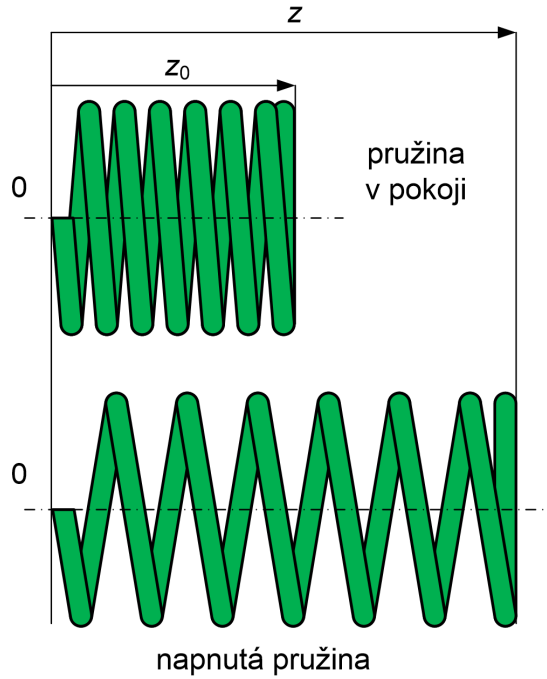
$$z = z_0 + \int_0^t v dt \quad (7)$$

kde v je rýchlosť vypočítaná zo vzťahu 4. Maximálna hodnota z je daná zdvihom aktuátoru h .

Pasívne odpory, trecie a aerodynamické sily je možné posúdiť následovne: Pri zapnutí spínača budiaceho obvodu v čase $t = 0$ začne cievkou tiecť prúd i , ktorý je spočiatku malý. Magnetická sila F_m pôsobiaca na jadro je preto v prvých okamihoch deť tiež malá a nepostačuje na prekonanie pasívnych odporových síl. Po prekonaní týchto síl sa dajú pohyblivé časti aktuátoru do pohybu. V tomto okamihu budú pasívne odporové sily nahradené aerodynamickým odporom (kvadraticky závislým na rýchlosti pohybu) a trecími silami (veľkosť závisí od rýchlosti a kvality povrchu trecích plôch). Všetky tieto veličiny sa z pravidla iba kvalifikovane odhadujú. v niektorých prípadoch sa určujú nepriamo experimentálnymi metódami, ktorých presné stanovenie na základe teoretických analýz je prakticky nemožné. V poslednom rade gravitačná sila F_g je daná vzťahom

$$F_g = mg \quad (8)$$

kde $g = 9,81 \text{ m s}^{-1}$. Aby malo riešenie rovnice 4 praktický zmysel, musí v každom okamihu prechodného deť platiť nerovnosť $\sum F > 0$.



Obr. 6: znázornenie pre výpočet F_p

3.3 Rovnica magnetického poľa v systéme

Vzhľadom k tomu, že presný popis magnetického poľa v aktuátore je príliš zložitý, príslušne vzťahy tu odvodíme podrobnejšie. Vychádzame pritom z Maxwellových rovníc s rešpektovaním pohybu. Časové zmeny poľa však v súlade s fyzikálnou povahou úlohy nepokladáme za také rýchle, aby bolo nutné rešpektovať vplyv posúvných prúdov a v ďalších úvahach budú preto zanedbané. Platia teda rovnice

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (9)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (10)$$

ktoré doplním o materiálove vzťahy

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (11)$$

$$\mathbf{J} = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (12)$$

kde \mathbf{H} označuje vektor intenzity a \mathbf{B} vektor indukcie magnetického poľa. \mathbf{E} je intenzita elektrického poľa a \mathbf{J} označuje prúdovú hustotu. μ predstavuje

magnetickú permeabilitu a γ elektrickú vodivosť. Následne zavedieme vektor magnetického potenciálu \mathbf{A} vzťahom

$$\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B} \quad (13)$$

doplnený o Coulombovu zužujúcu podmienku $\text{rot } \mathbf{A} = 0$. Veličiny μ a γ majú vo všeobecnosti tenzorový charakter. V riešenom prípade ich však môžeme považovať za veličiny skalárne (magnetický obvod a jadro aktuátora sú z mäkkého masívneho feromagnetického materiálu). Člen $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ vyjadruje doplnkovú intenzitu elektrického poľa indukovaného pohybom elektricky vodivého telesa v magnetickom poli \mathbf{B} .

Po dosadení (11) a (13) do (9) dostávame

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A} \right) = \mathbf{J} \quad (14)$$

a po dosadení (13) do (10) máme

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial(\text{rot } \mathbf{A})}{\partial t} \quad (15)$$

Keďže symbol rot predstavuje priestorový operátor a derivujeme podľa času, tak bez ujmy na všeobecnosti môžeme zameniť ich poradie a dostávame

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \text{rot} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \quad (16)$$

a odtiaľ

$$\mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi \quad (17)$$

kde φ je akákoľvek skalárna funkcia súradníc. Člen $\text{grad } \varphi$ môžeme brať ako integračnú konštantu, keďže pre akúkoľvek skalárnu funkciu φ platí vzťah z vektorovej analýzy

$$\text{rot grad } \varphi = 0 \quad (18)$$

Ak dosadíme za \mathbf{E} z (17) do (12) dostaneme

$$\mathbf{J} = \gamma \left(- \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \quad (19)$$

a po ďalšom dosadení posledného vzťahu do (15) a malej úprave máme

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A} \right) = -\gamma \text{grad } \varphi - \gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \gamma(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = -\gamma \text{grad } \varphi - \gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \gamma(\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{A}) \quad (20)$$

Na pravej strane tejto rovnice vystupujú tri členy s rozmerom prúdovej hustoty. Okamžite je možné vidieť, že prvý člen $-\gamma \operatorname{grad} \varphi$ predstavuje hustotu jednosmerného prúdu v budiacej cievke, označíme ju \mathbf{J}_{ext} a jej veľkosť závislú na budiacom prúde vypočítame podľa vzťahu $J_{\text{ext}} = Ni/S_c$, kde N je počet závitov cievky a S_c jej aktívny prierez. Druhý člen $-\gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ zastupuje hustotu prúdov indukovaných v elektricky vodivých častiach systému v dôsledku časových zmien magnetického poľa (označujeme \mathbf{J}_t) a tretí člen $\gamma(\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{A})$ predstavuje doplnkovú hustotu prúdov indukovaných v pohyblivých prvkoch systému v dôsledku ich rýchlosti \mathbf{v} (označujeme \mathbf{J}_v).

Vektorový potenciál \mathbf{A} je hľadaná veličina, ktorej rozloženie musíme stanoviť riešením rovnice (20). Preto v tejto rovnici separujem členy, ktoré ju obsahujú, takže výsledná rovnica má tvar

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A} \right) + \gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \gamma(\mathbf{v} \times \mathbf{A}) = \mathbf{J}_{\text{ext}} \quad (21)$$

Ešte je potrebné doplniť ju o počiatkové a okrajové podmienky.

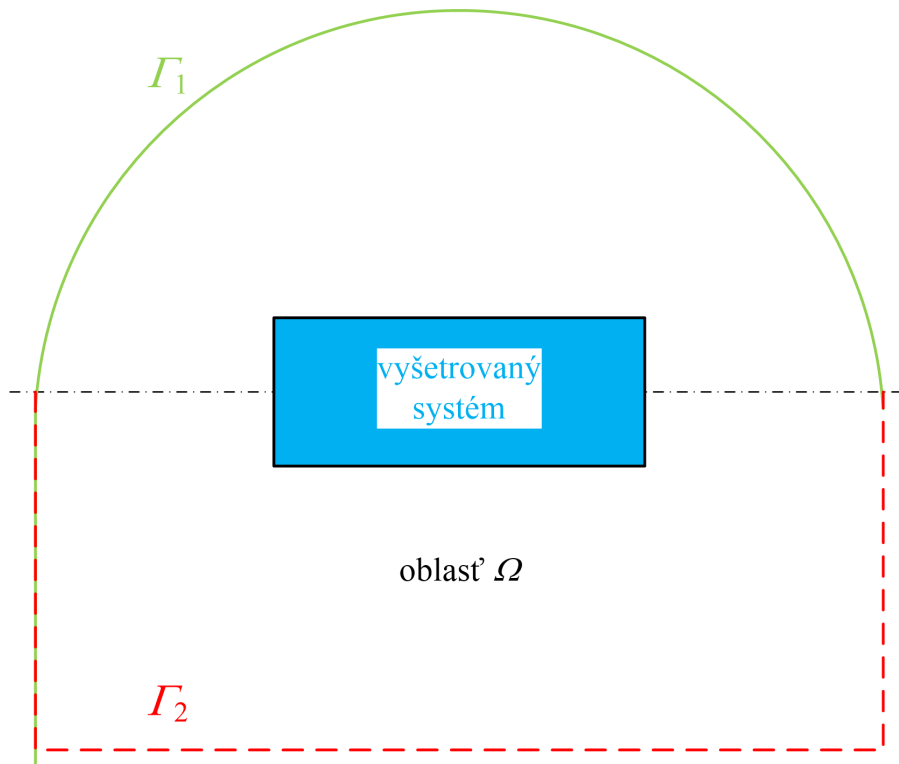
Počiatková podmienka je jednoduchá. Pred pripojením budiacej cievky ku zdroju nebolo v priestore aktuátora žiadne magnetické pole. Preto $\mathbf{A}(\Omega, 0) = 0$, kde symbol Ω označuje oblasť, v ktorej danú úlohu riešime.

Pri formulácii okrajovej podmienky vychádzame z predpokladu, že v dostatočne veľkej vzdialenosti od aktuátora je magnetické pole úplne zanedbateľné (v realite to je splnené až v nekonečne). K oblasti Ω teda môžeme zaviesť nejakú umelú hranicu Γ a predpokladať, že za ňou už žiadne pole neexistuje. V takom prípade je príslušná okrajová podmienka Dirichletovho typu a platí $\mathbf{A}(\Gamma, t) = 0$.

Uvedenú hranicu Γ je potrebné zvoliť tak, aby riešená oblasť bola na jednej strane, čo najmenšia (kvôli urýchleniu výpočtov a znížením nárokov na výpočetnú techniku), na druhej strane ale nesmie byť v takej blízkosti systému, aby spôsobovala chyby neprípustnej veľkosti. Tento problém budeme podrobnejšie riešiť v kapitole 5, venovanej numerickému riešeniu úlohy.

3.4 Magnetická sila pôsobiaca na jadro

Ku stanoveniu magnetickej sily pôsobiacej na feromagnetické jadro je možné použiť dva spôsoby. Prvý je energetický, podľa ktorého sa sila v danej polohe určí z gradientu magnetickej energie poľa a ten druhý je založený na Maxwellovom tenzore pre magnetické pole. Oba prístupy sú prediskutované v nasledujúcich podkapitolách.



Obr. 7: k definícii umelej hranice oblasti

3.4.1 Energetický prístup

V tomto prípade vychádzame z objemovej (w_m) a celkovej energie (W_m) magnetického poľa. Vo všeobecnosti je ich hodnota daná vzťahmi

$$w_w = \int_0^B \mathbf{H} \, d\mathbf{B}, \quad W_m = \int_V w_m dV = \int_V \left(\int_0^B \mathbf{H} \, d\mathbf{B} \right) dV \quad (22)$$

kde V je objem celej vyšetrovanej oblasti a \mathbf{H} a \mathbf{B} sú vektory poľa. Objemová magnetická sila pôsobiaca v danom bode na element feromagnetika potom je

$$\mathbf{f}_m = -\text{grad } w_m = -\text{grad} \left(\int_0^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \right) \quad (23)$$

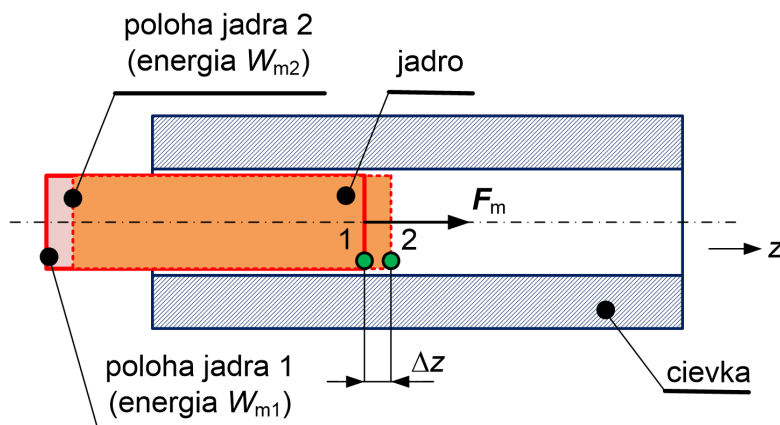
a celková magnetická sila pôsobiaca na feromagnetické teleso je

$$\mathbf{F}_m = \int_V \mathbf{f}_m dV = -\text{grad} \left[\int_V \left(\int_0^B \mathbf{H} \, d\mathbf{B} \right) dV \right] = -\text{grad } W_m \quad (24)$$

Z hľadiska numerického výpočtu však nie je tento prístup príliš výhodný z dvoch dôvodov. Prvý je nutnosť numerického určenia integrálu $\int_0^{\vec{B}} \mathbf{H} d\mathbf{B}$, a druhý je numerický výpočet výrazu $-\text{grad} W_m$. Ten sa napríklad v bode 1 na obr. 8 aproximuje vzťahom

$$\mathbf{F}_m = \mathbf{i} \frac{W_{m1} - W_{m2}}{\Delta z} \quad (25)$$

kde \mathbf{i} je jednotkový vektor v smere osi z .



Obr. 8: energetický postup výpočtu síl

Tu vidíme hneď dve nevýhody. Za prvé je potrebné poznať dve hodnoty energie (prvú v bode 1 a druhú v nejakom blízkom bode 2). To znamená numericky vyriešiť rozloženie dvoch magnetických polí a z nich určiť príslušné hodnoty energií. Aby sa dosiahla čo najpresnejšia hodnota gradientu, mal by byť rozdiel Δz medzi oboma polohami jadra čo najmenší. Potom ale v zlomku v rovnici 25 môže nastať problém zo skutočnosti, že čitateľ aj menovateľ dosahujú veľmi nízke hodnoty a tým pádom nám čitateľ (vždy zaťažený numerickou chybou) môže výsledok neprípustne skesliť. Preto sa v profesionálnych programoch od tohoto prístupu, aj napriek jeho fyzikálnej prehľadnosti, v posledných rokoch ustúpilo.

3.4.2 Prístup pomocou Maxwellovho tenzoru

Modernejší a takmer všetkými vyvojármi elektromagnetického softvéru akceptovaný je prístup založený na Maxwellovom tenzore pre magnetické pole. Jeho fyzikálna prehľadnosť je podstatne horšia, ale prináša spoľahlivejšie výsledky. Jeho odvodenie vychádza z Maxwellových rovníc v diferenciálnom tvare, v ktorých považujeme elektrické pole za nulové ($\mathbf{E} = 0$). Uvažujme teda prvú Maxwellovu rovnicu v tvare (posuvné prúdy sú zanedbané)

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (26)$$

Túto rovnicu najprv umelo vektorovo prenasobíme magnetickou indukciou aby sme na pravej strane získali magnetickú silu \mathbf{f}_m . Dostávame

$$(\text{rot} \mathbf{H}) \times \mathbf{B} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \mathbf{f}_m \quad (27)$$

Ak tento súčin vypočítame v karteziánskych súradniciach, dostávame po úpravách tri zložkové vzťahy

$$\frac{\partial(H_x B_x - \frac{1}{2} \mathbf{H} \mathbf{B})}{\partial x} + \frac{\partial(H_x B_y)}{\partial y} + \frac{\partial(H_x B_z)}{\partial z} = f_{mx} \quad (28)$$

$$\frac{\partial(H_x B_y)}{\partial x} + \frac{\partial(H_y B_y - \frac{1}{2} \mathbf{H} \mathbf{B})}{\partial y} + \frac{\partial(H_y B_z)}{\partial z} = f_{my} \quad (29)$$

$$\frac{\partial(H_x B_z)}{\partial x} + \frac{\partial(H_y B_z)}{\partial y} + \frac{\partial(H_z B_z - \frac{1}{2} \mathbf{H} \mathbf{B})}{\partial z} = f_{mz} \quad (30)$$

čo môžeme prepísať ako

$$\mathbf{T}^m = \begin{pmatrix} H_x B_x - \frac{1}{2} \mathbf{H} \mathbf{B} & H_x B_y & H_x B_z \\ H_x B_y & H_y B_y - \frac{1}{2} \mathbf{H} \mathbf{B} & H_y B_z \\ H_x B_z & H_y B_z & H_z B_z - \frac{1}{2} \mathbf{H} \mathbf{B} \end{pmatrix} \quad (31)$$

pričom veličinu \mathbf{T}^m , ktorú nazývame Maxwellov magnetický tenzor môžeme formálne zapísať v tvare

$$\text{div}^2 \mathbf{T}^m = \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \mathbf{f}_m \quad (32)$$

takže celková sila pôsobiaca na teleso o objeme V je

$$\mathbf{F}_m = \int_V \mathbf{f}_m dV = \int_V \text{div}^2 \mathbf{T}^m dV \quad (33)$$

Ak na tento vzťah aplikujeme Gaussovú vetu, dostaneme

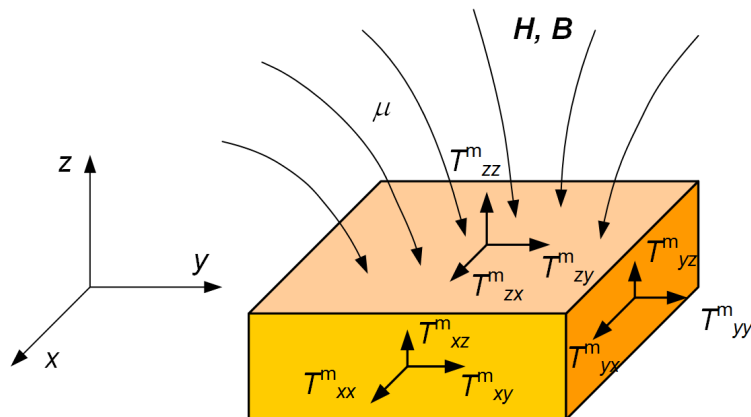
$$\mathbf{F}_m = \int_V \text{div}^2 \mathbf{T}^m dV = \oint_S \mathbf{T}^m dS \quad (34)$$

kde S označuje orientovanú plochu k objemu V . Nakoniec môžeme vzťah pre Maxwellov tenzor formálne zapísať ako

$$\mathbf{T}^m = \mathbf{H} \otimes \mathbf{B} - \frac{1}{2} \mathbf{H} \mathbf{B} [\mathbf{I}] \quad (35)$$

kde $[\mathbf{I}]$ je diagonálna jednotková matica a symbol \otimes značí dyadický súčin vektorov, ktorého výsledkom je matica.

Porovnaním tenzoru \mathbf{T}^m s klasickým tenzorom mechanického namáhania je hneď vidieť, že jeho zložky zodpovedajú pomyslenému normálovému a dotykovému mechanickému napätiu T_{ij}^m , pôsobiacich na elementárne teleso kvádrového tvaru v prostredí s permeabilitou μ (obr. 9)



Obr. 9: elektromagnetické namáhanie elementárneho hranolu

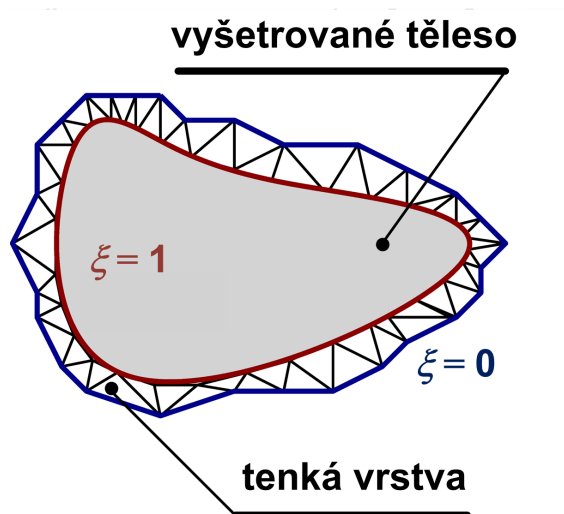
V tomto prípade stačí pre výpočet magnetickej sily spočítať magnetické pole iba raz, a to priamo vo vyšetrovanej polohe. Potom je možné použiť vzťahy (33) alebo (34), v ktorých sa objemový integrál prevedie cez celý objem jadra a plošný integrál cez jeho obalovú plochu. Bohužiaľ, aj tu je ich numerický výpočet náročný a hlavne v prípade nelineárneho materiálu je pomalý, zle konverguje a výsledky vykazujú malú presnosť.

Asi pred dvanástimi rokmi bola navrhnutá nová technika pre stanovenie týchto magnetických síl, ktorá bola nazvaná Eggshell Method. Táto technika spočíva vo zavedení tenkej vrstvy obklopujúcej vyšetrované podľa obr. 10.

Ak $\zeta = \zeta(x, y, z)$ je akákoľvek diferencovateľná funkcia objemu V takejto tenkej vrstvy, pričom na vonkajšom povrchu (modrá čiara) nadobúda nulové hodnoty a na povrchu vnútornom hodnotu 1, tak platí

$$\mathbf{F}_m = \int_V \mathbf{T}^m \text{grad } \zeta \, dV \quad (36)$$

Dá sa dokázať, že ak hrúbka vrstvy konverguje k nule, integrál (36) sa stáva identickým k integrálu (34). To znamená, že čím bude vrstva tenšia, tým presnejší výsledok dosiahneme. Vrstva ale musí mať určitú hrúbku aby ju bolo možné rozumne diskretizovať. Je teda zrejme, že návrh musí byť kompromisný a tiež sa musí prehodnotiť ako funkcia ζ ovplyvní celkový výsledok.



Obr. 10: podstata metody Eggshell

3.5 Indukčnost cievky s feromagnetickým jadrom

Indukčnost cievky L s feromagnetickým jadrom sa najlepšie určuje podľa energetického vzťahu

$$W_m = \frac{1}{2} Li^2 \quad (37)$$

kde i je prúd pretekajúci cievkou a W_m je energia magnetického poľa systému, ktorú teoreticky určíme zo vzťahu (22). Avšak opäť z numerického hľadiska sa tento vzťah ukazuje ako nevhodný a to z nasledujúcich dôvodov: Ako už bolo povedané, magnetické pole je vhodné modelovať pomocou potenciálov, v našom prípade osovo súmerného usporiadania pomocou magnetického vektorového potenciálu \mathbf{A} . Numerický výpočet jeho rozloženia je však zaťažovaný určitou chybou. V ďalšom kroku je nutné pre vzťah (2.22) spočítať rozloženie vektora magnetickej indukcie podľa vzťahu (13). Numerická aproximácia operácie rotácie je zaťažovaná ďalšou chybou. Nakoniec ju nutné vykonať numerickú integráciu, čo vedie k ďalšej chybe. Akumulujú sa tu preto tri druhy chýb a výsledok môže byť neprípustne nepresný. Je ale možné dokázať, že vzťah (22) sa dá pretransformovať na tvar

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}) dV \quad (38)$$

kde \mathbf{J} je vektor prúdovej hustoty. Tento vzťah je podstatne výhodnejší, lebo nie je nutné určovať vektory poľa a navyše sa neintegruje cez celý objem systému, ale len cez jeho časti, v ktorých je nenulová prúdová hustota (prakticky to sú len elektricky vodivé časti). Musíme ale brať do úvahy, že vystupujúca

prúdová hustota zahrňuje všetky jej zložky, teda aj transformačnú a pohybovú (v prípade ak existujú).

Vo všeobecnosti môže ešte nastať otázka ako skalibrovať vektorový potenciál \mathbf{A} , aby sme získali korektnú hodnotu energie W_m . Odpoveď plynie z nasledujúcej úvahy: Označíme symbolom \mathbf{k} konštantný vektor.

$$\begin{aligned} W_{m'} &= \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{J}(\mathbf{A} + \mathbf{k})) dV = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}) dV + \frac{\mathbf{k}}{2} \int_V \mathbf{J} dV = \\ &= W_m + \frac{\mathbf{k}}{2} \int_V \mathbf{J} dV = W_m \end{aligned} \quad (39)$$

Integrál $\int_V \mathbf{J} dV$ je totiž nulový; vo fyzikálne reálnom systéme platí, že súčet všetkých prúdov v danom objeme je nulový.

3.6 Rovnice prenosu tepla

Teplota T je vo všeobecnosti v akomkoľvek systéme funkciou polohy a času, teda $T = T(\mathbf{r}, t)$, kde \mathbf{r} je polohový vektor, ktorého zložky môžu byť tiež závislé na čase. Na rozdiel od elektromagnetického poľa, ktoré občas vykazuje aj jednotkové zmeny (napríklad na rozhraniach), je teplotné pole spravidla hladké.

Základnou veličinou charakterizujúcou teplotné pole je tepelný tok $\mathbf{q}(\mathbf{r}, t)$. Ten predstavuje množstvo tepla prechádzajúce jednotkovou plochou za jednu sekundu. V akomkoľvek bode priestoru platí vzťah

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t) = -\lambda \text{grad } T(\mathbf{r}, t) \quad (40)$$

kde λ je tepelná vodivosť prostredia v danom bode. Tepelná vodivosť, ktorá určuje schopnosť materiálu alebo prostredia viesť teplo, je často definovaná konštantou, v mnohých prípadoch je ale závislá na teplote.

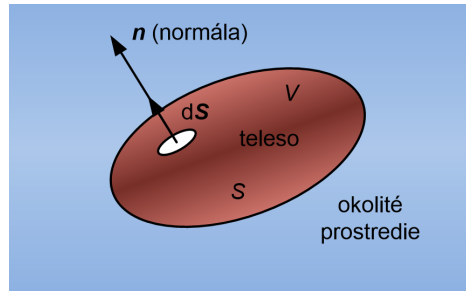
Je vhodné definovať ešte jednu veličinu, ktorej veľkosť je pre rozloženie teplotného poľa rovnako dôležitá. Jedná sa o mernú tepelnú kapacitu, poskytujúcu informáciu koľko tepla sa musí priviesť jednému kilogramu danej látky aby sa ohriala o jeden Kelvin. Označujeme ju písmenom c a rozlišujeme, či ku zvýšeniu došlo pri konštantnom tlaku (c_p) alebo konštantom objeme (c_v). Aj tieto parametre zvyknú byť závislé na teplote a napríklad pri kovocho je väčšinou táto závislosť vysoko nelineárna.

Rovnicu prenosu tepla v systéme odvodíme pre prípad, že sa žiadna jeho časť nepohybuje. V prípade vyšetrovaného aktuátoru sa tým síce dopustíme určitého zjednodušenia, ale keďže sa pohybuje len krátky čas (rádovo desiatiny sekúnd) a po tomto prechodnom deji sa zastaví a ďalší ohrev prebieha bez pohybu, tak toto zjednodušenie môžeme považovať za prístupné.

Uvažujme teleso s objemom V , v ktorom sa vnútornými zdrojmi vytvorí za jednotku času teplo $P(t)$. Toto teplo predstavujúce tepelný výkon sa dá vyčíslieť integrálom

$$P(t) = \int_V p(\mathbf{r}, t) dV \quad (41)$$

kde $p(\mathbf{r}, t)$ je tepelný výkon vygenerovaný v elementárnom (bodovom) objeme telesa. Vzniknuté teplo $P(t)$ sa využije k zahriatiu telesa na vyššiu teplotu a časť odíde povrchom telesa V do okolného prostredia. Situácia je znázornená na obr. 11.



Obr. 11: k odvodeniu tepelnej bilancie telesa

Teraz tieto dve zložky podrobíme analýze. Najprv označíme symbolom $U(t)$ teplo, ktorým sa naše teleso s tepelnou kapacitou pri konštantnom tlaku c_p ohreje z teploty T_0 na teplotu T . Toto je teplo je dané známym vzťahom

$$U(t) = \int_V \rho c_p (T - T_0) dV \quad (42)$$

kde ρ je hustota telesa. Zodpovedajúci výkon, ktorým sa teleso ohrieva má veľkosť dU/dt .

Nakoniec symbolom $Q(t)$ označíme tepelný výkon, ktorý z ohrievaného telesa uniká jeho povrchom S . Tento výkon môžeme vyjadriť pomocou tepelného toku $\mathbf{q}(\mathbf{r}, t)$ plošným integrálom

$$Q(t) = \oint_S \mathbf{q}(\mathbf{r}, t) dS \quad (43)$$

kde dS je element plochy orientovaný v smere vonkajšej normály (obr 2.8). Bilančná rovnica pre príslušné výkony teda znie

$$P(t) = \frac{dU(t)}{dt} + Q(t) \quad (44)$$

a po dosadení

$$\int_V p(\mathbf{r}, t) dV = \frac{d \int_V \rho c_p (T - T_0) dV}{dt} + \oint_S \mathbf{q}(\mathbf{r}, t) dS \quad (45)$$

Túto rovnicu je nutné ešte upraviť. V prvom člene na pravej strane sa vyskytuje najprv časový (derivácia podľa času) a potom priestorový (integrácia

cez objem) operátor. Vzhľadom k tomu, že uvažovaný objem považujeme za nepohyblivý, môžeme poradie operátorov bez ujmy na všeobecnosti zameniť. Podľa času potom derivujeme vnútrajšok integrálu a keďže parametre ρ , c_p a teplota T_0 sú považované za konštanty, celý člen sa podstatne zjednoduší. Na druhý člen na pravej strane aplikujeme Gaussovú vetu a dostávame

$$\int_V p(\mathbf{r}, t) dV = \int_V \rho c_p \frac{dT}{dt} dV + \int_V \operatorname{div} \mathbf{q}(\mathbf{r}, t) dV \quad (46)$$

Keďže táto rovnica musí platiť pre každý objem, musia sa v nej rovnať aj integrandy.

$$p(\mathbf{r}, t) = \rho c_p \frac{dT}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{q}(\mathbf{r}, t) \quad (47)$$

Do nej ešte dosadíme (40)

$$\operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} T(\mathbf{r}, t)) = \rho c_p \frac{dT(\mathbf{r}, t)}{dt} - p(\mathbf{r}, t) \quad (48)$$

A keďže sa teleso nepohybuje môžeme plnú deriváciu podľa času nahradiť parciálnou

$$\operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} T(\mathbf{r}, t)) = \rho c_p \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - p(\mathbf{r}, t) \quad (49)$$

Ešte je potrebné zmieniť, čo vlastne v našom prípade predstavuje $p(\mathbf{r}, t)$. Ako už bolo povedané, ide o tepelný výkon vygenerovaný bodovým objemom telesa. V našom prípade je daný súčtom lokálnych Jouleových a magnetizačných strát, čo môžeme zapísať ako

$$p(\mathbf{r}, t) = p_j(\mathbf{r}, t) + p_m(\mathbf{r}, t) \quad (50)$$

kde objemové Jouleové straty vyjadríme ako

$$p_j(\mathbf{r}, t) = \frac{|\mathbf{J}|}{\gamma} \quad (51)$$

kde \mathbf{J} je vektor celkovej prúdovej hustoty v bode, zatiaľ čo objemové magnetizačné straty $p_m(\mathbf{r}, t)$ sa určujú buď zo zmeraných strátových charakteristík daného materiálu alebo z vhodného Steinmetzovho vzorca. V riešenom prípade sú však tieto straty oproti stratám Jouleovým veľmi malé (prebieha tu jednosmerná magnetizácia) a môžeme ich preto zanedbať. V ďalších výpočtoch budem preto uvažovať len zložku $p_j(\mathbf{r}, t)$.

4 Prípustné zjednodušenie modelu

V tejto kapitole sa pokúsime model aktuátora vytvorený v predchádzajúcej kapitole zjednodušiť prijateľným spôsobom, tak aby bol numericky riešiteľný dostupným programovým vybavením. V podstate sa jedná o vyriešenie oboch obyčajných diferenciálnych rovníc popisujúcich prechodný jav v elektrickom obvode a pohyb jadra. K tomu nevyhnutne potrebujeme poznať indukčnosť cievky L a veľkosť magnetickej sily F_m , pôsobiacej na feromagnetickú časť jadra. Keďže sa tieto veličiny určujú z energie magnetického poľa pre daný prúd, polohu jadra a jeho rýchlosť, musíme sa zamyslieť nad tým ako sa vysporiadať s rovnicou (21) popisujúcu časopriestorový priebeh magnetického poľa v oblasti pomocou vektorového magnetického potenciálu.

Numerické riešenie danej rovnice pomocou programov, ku ktorým máme prístup, nie je vo všeobecnosti stále objasnené. Avšak aj tie najlepšie profesionálne softvérové nástroje pri riešení podobných úloh zlyhávajú z dôvodu prítomnej nelineárnej permeability μ a súčasnej existencie transformačného a pohybového členu. Okrem toho by sa uvedená rovnica musela riešiť súčasne s rovnicami (1) a (4), pretože v nej vystupuje okamžitá rýchlosť v pohyblivej kotvy a okamžitá hustota J_{ext} napájacieho prúdu.

Aj za týchto okolností sa na základe fyzikálnych úvah môžeme prepracovať k určitému zjednodušeniu. Toto spočíva vo fakte, že feromagnetická časť pohyblivého jadra nevykazuje ani zďaleka takú vysokú elektrickú vodivosť ako napájacia cievka, takže vírivé prúdy v nej indukované môžeme zanedbať. Okrem toho rýchlosť pohybu nepresiahne niekoľko desiatín metrov za sekundu a preto ani rýchlosť zmeny poľa v dôsledku nárastu prúdu nebude príliš vysoká. V prvom priblížení teda zanedbáme druhý aj tretí člen ľavej strany rovnice (21) a budeme riešiť rovnicu

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot} \mathbf{A}_m \right) = \mathbf{J}_{\text{ext}} \quad (52)$$

Tento predpoklad je prípustný preto, lebo prúdy indukované v elektricky vodivých častiach zariadenia pôsobia proti vznikajúcej zmene a rýchlosť pohyblivých častí teda znižujú. Tým sa pri dimenzovaní dostanem k vyššej bezpečnosti zariadenia. Aj tak ale nie je riešenie (52) nijak jednoduché, keďže pracujeme s veličinou \mathbf{J}_{ext} , závislou na čase.

Ďalšie zjednodušenie môžeme aplikovať v prípade rovnice (49), popisujúcej teplotné pole systému. Aj tu sa objavuje komplikácia spočívajúca v tom, že nie len parametry λ , ρ a c_p , ale aj objemové straty sú závislé na teplote, pretože elektrická vodivosť cievky je tiež funkciou teploty. Analýzou výrazu (51) pre Joulove objemové straty vznikajúce v cievke aktuátora dostaneme

$$p_j(\mathbf{r}, t) = \frac{R_c i^2}{V_c} \quad (53)$$

kde R_c je celková rezistancia cievky, i je okamžitý prúd a V_c označuje celkový objem medi. So zanedbateľnou chybou môžeme predpokladať

$$V_c = \pi(r_2^2 - r_1^2) h \quad (54)$$

kde r_2 je vonkajší, r_1 je vnútorný polomer cievky a h je jej dĺžka (súčiniteľ plnenia cievky uvažujeme rovný 1). Vzhľadom k tomu, že prechodný dej v napájacom obvode je krátky (rádovo stotiny až desatiny sekúnd), zataľ čo ohrev aktuátoru trvá rádovo desiatky sekúnd až minúty, nie je nutné vo vzťahu (53) uvažovať prechodný, ale ustálený prúd, ktorého veľkosť určíme ako

$$I = \frac{U}{R_c + R_o} \quad (55)$$

kde R_o je rezistencia napájacieho obvodu. S týmito veličinami je možné vypočítať rozloženie ustáleného teplotného poľa v systéme. Z hľadiska bezpečnosti (aby vypočítaná teplota bola vyššia, než v skutočnosti) ešte musíme určiť, pri akej teplote je hodnota $R_c I^2$ čo najvyššia, a tú potom použijeme k určeniu R_c a R_o .

$$\text{Nech máme } R_c = R_c(T), R_o = R_o(T) \text{ a } P_j(T) = R_c I^2 = \frac{R_c U^2}{(R_c + R_o)^2}.$$

Celkové straty $P_j(T)$ dosiahnu svoj extrém v bode, v ktorom je ich derivácia podľa teploty nulová a teda

$$U^2 \frac{d}{dT} \left[\frac{R_c}{(R_c + R_o)^2} \right] = 0 \quad (56)$$

a po úprave dostávame

$$R'_c R_o - R_c R'_o - 2R_c R_o = 0 \quad (57)$$

Ak zavedieme

$$R_c = R_{c0}(1 + \alpha_c(T - T_0)) \rightarrow R'_c = \alpha_c R_{c0} \quad (58)$$

a

$$R_o = R_{o0}(1 + \alpha_o(T - T_0)) \rightarrow R'_o = \alpha_o R_{o0} \quad (59)$$

kde R_o a R_{o0} sú príslušné rezistencie pri izbovej teplote a α_c , α_o sú príslušné teplotné koeficienty, vypočítame už z rovnice (57) teplotu, pri ktorej dosahujú straty svoj extrém. Získame tak rozloženie teplôt, ktorých hodnota bude vo všeobecnosti vyššia ako v skutočnosti a celkový návrh tak bude bezpečnejší.

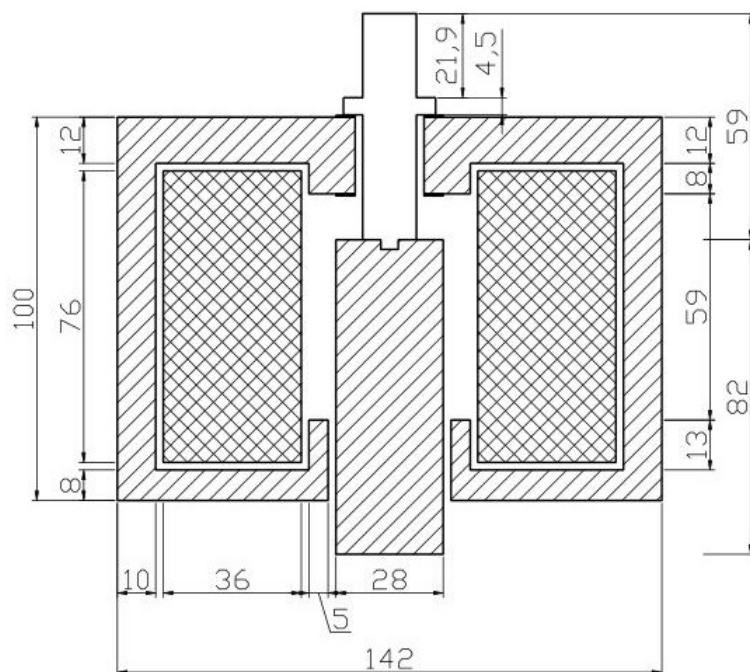
5 Tvorba modelu elektromagnetického aktuátora

Metodika modelovania daného zariadenia by mala v prvom rade pozostávať z podrobného rozboru aplikácie, v ktorej bude navrhovaný aktuátor používaný. Podľa požiadavok našej aplikácie potom určiť výkon aktuátora a navrhnúť jeho rozmery a vlastnosti, aby spĺňal uvedené požiadavky. Ďalším krokom je návrh zdroja elektrického napájania, ktorý musí aj s určitou rezervou spĺňať podmienky na bezproblémový chod aktuátora v danej aplikácii. Nakoniec je potrebné vybrať spätnú pružinu, ktorá musí takisto spĺňať všetky podmienky danej aplikácie.

My sme si problém zjednodušili na využitie v aplikácii, ktorá predstavuje malú konštantnú záťaž, t.j. protisilové pôsobenie o veľkosti $F_{\text{ext}} = 5 \text{ N}$ bez ohľadu na výchylku z pokojovej polohy alebo dobu trvania silového pôsobenia aktuátora. Pre tvorbu modelu sme zvolili softvérový nástroj Agros2D. Dôvody su zjavné; jedná sa o jednoduchý a veľmi intuitívny program na simuláciu rôznych technických zariadení a následného výpočtu nami zvolených fyzikálnych polí. Ďalšou výhodou je aj možnosť výberu vopred namodelovaného zariadenia z úvodného menu. Takto sme si vybrali aj náš aktuátor a upravili podľa našich požiadavok. Uživatelské rozhranie nám poskytuje tvorbu modelu v osovo symetrickom prostredí. Za os symetrie sme zvolili os z určujúcu aj os hriadeľa, čím sme náš aktuátor umiestnili do vertikálnej polohy a teda musíme uvažovať $a = -1$ (viď rovnicu (5)). Postup predstavoval metódu pokus-omyl. Najprv sme odhadli celkové rozmery, a podľa veľkosti magnetickej sily pôsobiacej na jadro sme rozmery upravovali, kým sme nedosiahli postačujúce výsledky. Výsledný model v priečnom reze a pozdĺžnom reze je aj s príslušnými kótami v mm na obr. 12 a 13. Mriežkované šrafovanie označuje oblasť vinutia cievky a jednoduché šrafovanie feromagnetický materiál.

Pre materiál magnetického okruhu ako aj magnetického jadra sme zvolili magneticky tvrdú uhlíkovú oceľ 12040, aby sme jej relatívnu permeabilitu mohli považovať za konštantnú a tým zanedbať hysterézne straty. Pre hriadeľ sme použili hliník vďaka jeho slabým magnetickým vlastnostiam a výhodným mechanickým vlastnostiam ako nízka merná hmotnosť a vysoká pevnosť.

Ako vinutie cievky bude použitý medený drôt s PVC izoláciou s o hrúbke 0,1 mm. Pre zjednodušenie predpokladáme možnosť výroby tohto vodiča na mieru a nemusíme ho teda vyberať z daných menovitých prierezov vodičov a tomu potom výsledný model prispôbovať. Presné charakteristiky použitých materiálov sú v tabuľke na obrázku 14. Kompletný model aktuátora s príslušajúcimi fyzikálnymi poľami vytvorený v programe Agros2D je obsiahnutý v prílohe Aktuator.a2d.



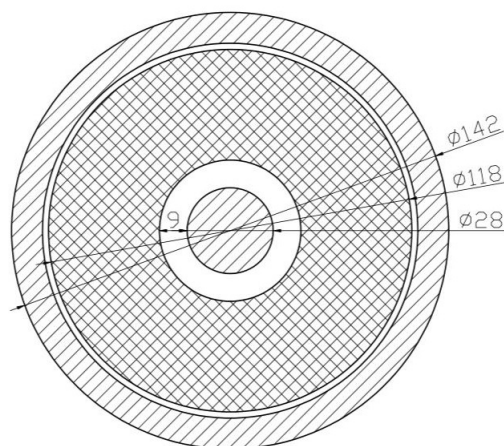
Obr. 12: pozdĺžny rez aktuátorom

5.1 Statická charakteristika aktuátoru

K tomu aby sme boli schopní navrhnuť vhodný zdroj elektrického napájania potrebujeme vedieť ako sa náš aktuátor správa pri rôznych prúdových zaťaženiach a vybrať z nich to najvhodnejšie pre našu aplikáciu. Na tento účel sme zostrojili statickú charakteristiku aktuátoru. Je to v podstate zobrazenie závislosti veľkosti magnetickej sily pôsobiacej na jadro v závislosti od polohy jadra pri rôznych prúdových hustotách.

Problém sme riešili diskretným spôsobom, t.j. nastavili sme určitú prúdovú hustotu v cievke a postupne sme v softvéri Agros2D odčítavali veľkosť pôsobiacej sily pre rôzne vzduchové medzery v magnetickej obvod, pričom sme zapisovali hodnoty magnetickej nasýtenia aby sme predišli presýteniu jadra a ostali tak v lineárnej oblasti hysteréznej slučky. Relatívna permeabilita nami zvolenej uhlíkovej oceli začína klesať už pri indukcií zhruba 1,4 T, čo pre nás predstavuje maximálnu hodnotu nasýtenia, ktorú by naše jadro malo dosiahnuť.

V navrhnutom aktuátore má vzduchová medzera v pokojovom stave 12 mm. Túto vzdialenosť sme postupne skracovali o 0,5 mm, kým sme sa nedostali na 1 mm (hrúbka gumenej zarážky umiestnenej na hranici magnetickej armatúry je 0,5 mm). Takto sme dostali 23 bodov pre každú odskúšanú



Obr. 13: priečný rez aktuátorom

prúdovú hustotu, čo považujeme za dostatočné množstvo pre aproximáciu statickej charakteristiky. Z porovnaných výsledkov s našimi požiadavkami sme zvolili napájanie prúdovou hustotou o veľkosti $J = 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$. Na obrázku 15 je možné vidieť zobrazenie statickej charakteristiky pri zvolenej prúdovej hustote. Jednotlivé body charakteristiky pri dvoch rôznych prúdových hustotách sú aj s grafickým zobrazením obsiahnuté v prílohe Staticka charakteristika.xlsx.

5.2 Výber zdroja

Zo statickej charakteristiky sme vyčítali veľkosť prúdovej hustoty, potrebnej pre naše účely. Tejto hodnoty sa teda budeme držať pri výbere vhodného zdroja. Vzhľadom na nízky odpor elektrického obvodu nášho aktuátora nebude problém danú prúdovú hustotu dosiahnuť už pri malom napätí a preto volíme bežný a dostupný 12 V spínaný DC zdroj. Prúd, ktorý potrebujeme dosiahnuť vypočítame podľa nasledovného vzťahu

$$I' = J \cdot S = 10^6 \cdot 1,35 \cdot 10^{-6} = 1,35 \text{ A} \quad (60)$$

Minimálny výkon nášho zdroja teda musí byť

$$P = U \cdot I' = 12 \cdot 1,35 \doteq 16,17 \text{ W} \quad (61)$$

Z ponuky internetového obchodu GM electronic sme vybrali spínaný zdroj MEAN WELL PS-65-12 so svorkovým napätím 12 V DC a výkonom 62,4 W, napájaný z distribučnej siete napätím 230 V AC. Výkon vybraného zdroja je takmer 4-násobne vyšší ako výkon potrebný pre našu aplikáciu, takže

Hriadel + magnetický obvod		
	CARBON STEEL 12 040	Aluminium
hustota [kg/m^3]	7,56E+03	2,70E+03
relativna permeabilita	1,34E+03	1,00E+00
tepelná vodivosť [W/m.K]	5,40E+01	2,21E+02
merna tepelná kapacita [J/kg.K]	4,90E+02	9,20E+02

Cievka		
	Cu	PVC (izolacia)
pocet zavítov	1,20E+03	
prierez jadra [m^2]	1,74E-06	
dĺžka [m]	3,09E+02	
elektrická vodivosť [S/m]	5,81E+07	1,00E-12
hustota [kg/m^3]	8,90E+03	1,35E+03
tepelná vodivosť [W/m.K]	3,93E+02	2,00E-01
merna tepelná kapacita [J/kg.K]	3,90E+02	1,10E+03
hrúbka izolácie [m]		1,00E-05

Obr. 14: vlastnosti použitých materiálov

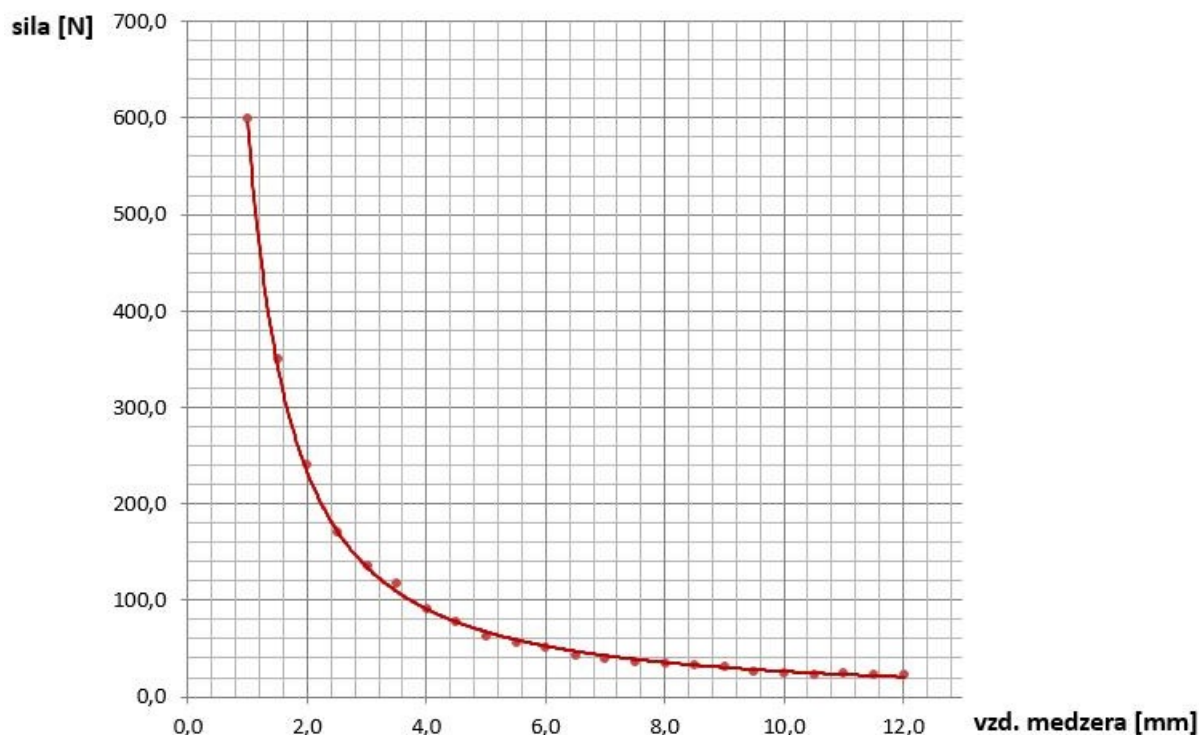
zdroj považujeme za dostatočne tvrdý aby sme mohli zanedbať jeho vnútorný odpor a svorkové napätie brať ako konštantu.

5.2.1 Tepelný výpočet

V ďalšom kroku musíme zohľadniť oteplenie aktuátora a tomuto otepleniu prispôbiť elektrický obvod, aby aktuátor spĺňal požiadavky aplikácie aj pri maximálnych hodnotách oteplenia.

Pre výpočet celkového oteplenia sme obišli výpočty uvedené v kapitolách 2 a 3 a opäť sme použili softvérový nástroj Agros2D, ktorý nám ponúka dostatočne presné modelovanie tepelných polí a hodnotu výslednej teploty zariadenia po ustálení (v nekonečnom čase) za podmienky konštantnej okrajovej podmienky. Ako okrajovú podmienku sme použili blízke okolie aktuátora s hodnotou $T = 293,15 \text{ K}$.

Keďže výsledné oteplenie je závislé na objemových joulových stratách v elektrickom obvode aktuátora, museli sme najprv výslednú teplotu odhadnúť a z nej vypočítať zvýšenie elektrického odporu a jemu prislúchajúce joulové straty. Vo výslednom odpore sme museli zohľadniť aj veľkosť predradeného rezistoru, ktorého veľkosť sme upravovali tak, aby celkový odpor pripustil prúd o veľkosti vypočítanej v rovnici (60). Veľkosť maximálneho odporu



Obr. 15: statická charakteristika

vypočítame podľa ohmovho zákona:

$$R_{\max} = \frac{U}{I'} = \frac{12}{1,35} \doteq 8,9 \Omega \quad (62)$$

Joulové straty sme s rezervných dôvodov počítali pre konštantný prúd zodpovedajúci celkovému odporu elektrického obvodu bez zahriatia. Tieto sme potom dosadili do nášho modelu, z ktorého sme dostali presnejšiu hodnotu oteplenia. Z tejto hodnoty sme opäť vypočítali zodpovedajúce joulové straty a dosadili do modelu. Proces sme opakovali, kým sme nedostali joulové straty spôsobené oteplením, vypočítaným v našom modeli. Výsledná zmena teploty nášho zariadenia za predpokladu konštantného prúdu a konštantnej teploty okolia aktuátora je $\Delta T = 32,69 \text{ K}$.

Elektrický odpor cievky pri izbovej teplote vypočítame na základe jej rozmerov:

$$R_{20} = \rho_0 \frac{l}{S} = 1,72 \cdot 10^{-8} \frac{309,13}{1,35 \cdot 10^{-6}} \doteq 3,95 \Omega \quad (63)$$

Ak predpokladáme maximálne zahriatie o $\Delta T = 32,69 \text{ K}$ počas celej doby, v ktorej je aktuátor zapnutý, tak výsledný odpor bude

$$R_{\Delta T} = R_{20}(1 + \alpha \cdot \Delta T) = 3,95 \cdot (1 + 42 \cdot 10^{-4} \cdot 32,69) \doteq 4,49 \Omega \quad (64)$$

Aby sme dosiahli vyššie vypočítaný odpor mali by sme cievke ešte predra-
diť rezistor s dostatočne nízkym teplotným koeficientom, aby sme ho mohli
považovať za konštantný o veľkosti

$$R_p = R_{\max} - R_{\Delta T} = 4,42 \Omega \quad (65)$$

Minimálny odpor elektrického obvodu bude:

$$R = R_p + R_{20} = 8,36 \Omega \quad (66)$$

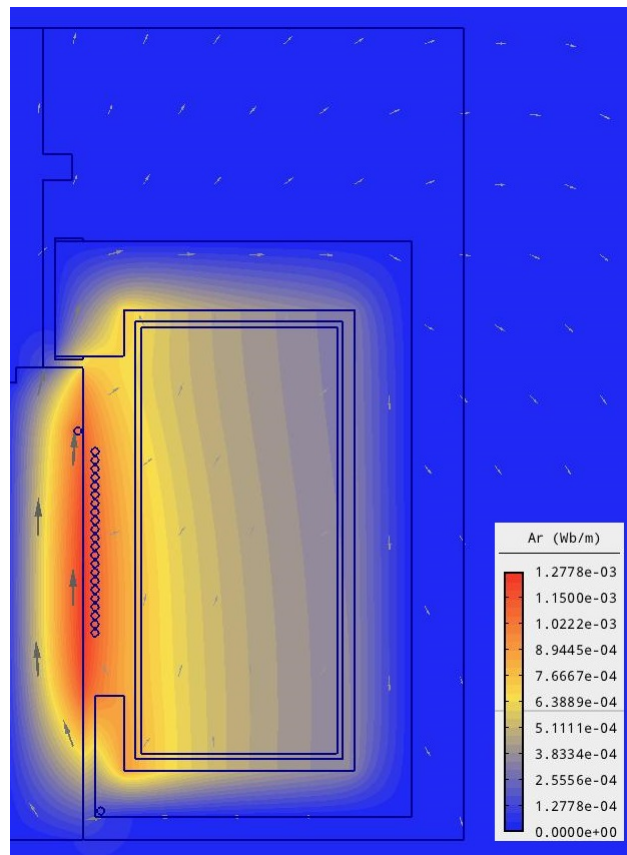
A maximálny prúd tečúci cievkou potom bude:

$$I_{\max} = \frac{U}{R} \doteq 1,44 \text{ A} \quad (67)$$

Tomuto prúdu zodpovedajúce joulové straty sme počítali podľa

$$\Delta P = RI_{\max}^2 = 17,2 \text{ W} \quad (68)$$

Rozloženie magnetického potenciálu v aktuátore a vektorové zobraze-
nie magnetickej indukcie pre vzduchovú medzeru o veľkosti $\delta = 12 \text{ mm}$ a
prúdovú hustotu zodpovedajúcu prúdu I_{\max} , $J_{\max} = 1,06 \cdot 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$ je
ilustratívne možné vidieť na obr. 16. Komplexné výpočty potrebné pre výber
vhodného zdroja sú obsiahnuté v prílohe Navrh zdroja.xlsx.



Obr. 16: magnetické pole aktuátora

5.3 Výber pružiny

Z nášho modelu aktuátora je vidieť, že pohyblivé jadro má pohyb obmedzený iba dvoma zarážkami, určujúcimi dva ustálené stavy. Ak je uložený vo zvislej polohe, tak v zapnutom stave s minimálnou vzduchovou medzerou, zodpovedajúcou hrúbke gumenej zarážky (0,5 mm) a vo vypnutom stave je to poloha s maximálnou vzduchovou medzerou 12 mm. Aby sme zamedzili nechceným pohybom pri akejkoľvek manipulácii s aktuátorom vo vypnutom stave a po vypnutí zabezpečili návrat do pôvodnej polohy, je nutné navrhnuť vhodnú pružinu, ktorá udrží jadro v statickej polohe s maximálnou vzduchovou medzerou.

Najvhodnejším materiálom pre našu aplikáciu je nerezová oceľ hlavne vďaka jej mechanickým vlastnostiam zabezpečujúcim dlhú životnosť aj pri pravidelnom namáhaní a nízkej relatívnej permeabilite. Z uvedeného vyplýva niekoľko podmienok. Pružina, ktorú potrebujeme musí byť ťažného charakteru, čo znamená, že dĺžka pružiny vo voľnom stave bez pôsobenia externých síl zodpovedá jej minimálnej dĺžke.

Rozmery pružiny sú dané rozmermi aktuátora s určitými výchylkami, t.j. priemer pružiny musí mať minimálne 28 mm a maximálne 46 mm a dĺžka pružiny vo voľnom stave musí mať maximálne 68 mm. Maximálne silové namáhanie jadra vo vypnutom stave zapríčiňuje gravitačná sila, takže počiatočná sila pružiny musí byť vyššia ako tiaž pôsobiaca na jadro aktuátora a súčasne musí byť dostatočne nízka na to, aby príliš nebránila pôsobeniu magnetickej sily v zapnutom stave. Aby sme zistili veľkosť gravitačnej sily pôsobiacej na jadro, musíme vypočítať jeho hmotnosť. Celá pohyblivá časť sa skladá z dvoch častí. Z feromagnetického jadra, ktoré je zostrojené z uhlíkovej oceli a hliníkového hriadeľa, ktoré kvôli pevnému spojeniu malým výstupkom zasahuje do jadra. Podrobný výpočet objemu jednotlivých častí ako aj výber pružiny je uvedený v prílohe Vyber pruziny.xlsx. Hmotnosť hliníkového hriadeľa vypočítame podľa:

$$m_{Al} = V_{Al} \cdot \rho_{Al} = 50450 \text{ mm}^3 \cdot 2,7 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{mm}^{-3} = 0,028 \text{ kg} \quad (69)$$

Hmotnosť feromagnetického jadra:

$$m_{cs} = V_{cs} \cdot \rho_{cs} = 10467 \text{ mm}^3 \cdot 7,56 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{mm}^{-3} = 0,381 \text{ kg} \quad (70)$$

čo nám dáva celkovú hmotnosť

$$m = m_{Al} + m_{cs} = 0,41 \text{ kg} \quad (71)$$

Z čoho môžeme vypočítať veľkosť gravitačnej sily

$$F_g = m \cdot g = 0,41 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \doteq 4,02 \text{ N} \quad (72)$$

Všetky tieto podmienky pre výsledné vlastnosti pružiny nám možnosti výberu výrazne zužujú. Najviac vyhovujúcu pružinu nám asi poskytuje firma Sodemann pružiny [13], s nasledujúcimi vlastnosťami:

- dĺžka pružiny vo voľnom stave 64,3 mm
- vonkajší priemer pružiny 28 mm
- počiatočné napätie vo voľnom stave 20,36 N
- tuhosť pružiny $1,99 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1}$
- maximálny zdvih 55,6 mm

6 Dynamická charakteristika aktuátora

Aby sme vedeli podrobne vyšetriť celý prechodný dej zapnutia aktuátora a mohli charakterizovať jeho funkčnosť v akejkoľvek polohe jadra, potrebujeme zdefinovať dve závislosti. Bude nás zaujímať veľkosť magnetickej sily pôsobiacej na jadro a indukčnosť cievky aktuátora v závislosti od okamžitých hodnôt veľkosti vzduchovej medzery a veľkosti prúdu pretekajúceho cievkou. Analytický výpočet týchto funkcií dvoch premenných by bol príliš zložitý a presahujúci naše možnosti. Preto sa k nim musíme prepracovať numerickou aproximáciou. Na tieto výpočty sme zvolili metódu najmenších štvorcov.

Podstata tejto metódy spočíva, v čo najpresnejšom priblížení sa k funkcii, ktorá obsahuje vopred zistené funkčné hodnoty v daných bodoch charakteristiky. K zisteniu týchto bodov je potrebné vypracovať dynamickú charakteristiku aktuátora. Na tento účel sme opäť zvolili softvérový nástroj Agros2D, vďaka jeho funkcii vypočítať cez objemový integrál okamžité hodnoty charakterizujúce namodelované fyzikálne pole. Tieto výpočty prebiehajú takisto numerickým spôsobom a preto sa vo výsledkoch môžu objaviť chyby, ktoré sa nepriaznivo prejavajú na výslednej charakteristike. Príliš veľkým odchýlkam sa dá zabrániť jednoduchou kontrolou vypočítaných hodnôt a následnou elimináciou tých hodnôt, ktoré sa očividne vymykajú hodnotám očakávaným. Takto sme získavali okamžité hodnoty magnetickej sily a energie magnetickeho poľa v jadre aktuátora.

Z definície množstva energie potrebného na vytvorenie magnetickeho poľa v cievke je veľmi jednoduché zistiť indukčnosť cievky a to podľa vzťahu:

$$L = \frac{2W_m}{i^2} \quad (73)$$

kde W_m označuje energiu magnetickeho poľa a i okamžitú hodnotu prúdu tečúceho cievkou. Maximálna vzduchová medzera aktuátora má $\delta_{\max} = 12$ mm a maximálny prúd tečúci našim obvodom sme vypočítali v rovnici (67):

$$I_{\max} = 1,44 \text{ A}$$

Hodnoty sme odčítavali v rovnomerne rozdelených šiestich polohách jadra pre desať rôznych veľkostí prúdových hustôt, t.j v intervaloch

$\delta = \left\langle \frac{\delta_{\max}}{6} : \frac{\delta_{\max}}{6} : \delta_{\max} \right\rangle$ a $i = \left\langle \frac{I_{\max}}{10} : \frac{I_{\max}}{10} : I_{\max} \right\rangle$. Vo výsledku sme teda dostali 60 rôznych hodnôt ako pre magnetickú silu, tak aj pre indukčnosť cievky, čo považujeme za dostatočný počet pre aproximáciu hľadaných závislostí. Výsledné hodnoty sú zobrazené v tabuľke na obrázku 17.

	Indukčnosť [mH]						Sila [N]					
Vzd. medzera [mm]	2	4	6	8	10	12	2	4	6	8	10	12
Prúd [A]												
0,144	34,0	18,8	12,9	9,8	7,7	6,3	3,0	1,2	0,7	0,5	0,4	0,3
0,287	34,0	18,7	12,9	9,8	7,7	6,3	11,9	4,7	2,8	2,0	1,5	1,2
0,431	34,0	18,8	13,0	9,8	7,7	6,3	26,8	10,6	6,3	4,5	3,4	2,8
0,574	34,0	18,8	12,9	9,8	7,7	6,3	47,6	18,9	11,3	7,9	6,1	4,9
0,718	34,0	18,8	12,9	9,8	7,7	6,3	74,4	29,5	17,6	12,4	9,5	7,7
0,861	34,0	18,8	12,9	9,8	7,7	6,3	107,1	42,5	25,4	17,8	13,7	11,0
1,005	34,0	18,8	12,9	9,8	7,7	6,3	145,8	57,8	34,5	24,3	18,6	15,0
1,148	34,0	18,7	12,9	9,8	7,7	6,3	190,5	75,5	45,1	31,7	24,3	19,6
1,292	34,0	18,8	12,9	9,8	7,7	6,3	241,0	95,6	57,0	40,1	30,7	24,8
1,435	34,0	18,8	12,9	9,8	7,7	6,3	297,6	118,0	70,4	49,5	37,9	30,7

Obr. 17: dynamická charakteristika

Z uvedeného by sa mohlo zdať, že indukčnosť cievky nie je závislá na veľkosti prúdu ňou pretekajúceho. Je to spôsobené tým, že nami zvolené prúdové rozdiely sú príliš nízke aby vytvorili badateľný rozdiel vo veľkosti indukčnosti. Vyššie spomenuté numerické chyby si je možné všimnúť napr. pri L ($\delta = 6$ mm; $i = 0,5$ A). Všetky vzniknuté chyby sú dosť malé na to, aby sme ich mohli zanedbať, a preto sa nimi ďalej nebudeme zaoberať.

6.1 Aproximácia funkcií

V tejto podkapitole budeme hľadať funkčné priebehy polynomickeho charakteru, ktoré sa čo najviac približujú závislostiam $L = f(i, \delta)$ a $F_m = f(i, \delta)$, kde L je indukčnosť cievky aktuátora, F_m je veľkosť magnetickej sily pôsobiacej na jadro aktuátora a i a δ sú okamžité hodnoty prúdu tečúceho cievkou a veľkosti vzduchovej medzery. Riešenie touto metódou si najprv odvodíme pre všeobecný polynóm n -tého stupňa, závislý na dvoch premenných x a y , ktorý môžeme zapísať v nasledujúcom tvare:

$$z(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 x y + a_5 y^2 + \dots$$

$$\dots + a_{n_a-2} x y^{n-1} + a_{n_a-1} y^n$$
(74)

Celkový počet koeficientov, ktoré polynóm obsahuje (n_a) vypočítame jednoduchou úvahou. Keďže je tento počet daný stupňom polynómu a koeficient absolútneho členu označujeme indexom 0, tak platí

$$n_a = (n + 1) + n + (n - 1) + \dots + 1$$
(75)

čo je súčet členov aritmetickej postupnosti, takže môžeme písať

$$n_a = \frac{n+1+1}{2}(n+1) = \frac{(n+2)(n+1)}{2} \quad (76)$$

Aproximácia metódou najmenších štvorcov spočíva v dosiahnutí najmenšieho súčtu obsahov štvorcov, ktorých strany sú rovné rozdielu medzi hodnotou vypočítanou aproximovanou funkciou $z(x_i; y_j)$ a hodnotou $z_{i,j}$ vopred nameranou v daných bodoch (x_i, y_j) charakteristiky (v našom prípade to je dynamická charakteristika aktuátoru), čo môžeme vyjadriť ako:

$$F = \sum (z_{i,j} - z(x_i; y_j))^2 = \min \quad (77)$$

Po dosadení rovnice (4.14) dostávame

$$F = \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} [z_{i,j} - (a_0 + a_1 x_i + a_2 y_j + \dots + a_{n_a-2} x_i y_j^{n-1} + a_{n_a-1} y_j^n)]^2 = \quad (78)$$

$$= \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} \varphi_{i,j} = \min$$

kde n_x a n_y sú počty hodnôt jednotlivých premenných, v ktorých boli namerané hodnoty $z_{i,j}$. Z uvedeného vyplýva, že parciálne derivácie funkcie F podľa všetkých n_a koeficientov jednotlivých polynómov musia byť rovné nule. Dostávame teda systém rovníc:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial a_0} \\ \frac{\partial F}{\partial a_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial a_{n_a-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} \varphi_{i,j} \\ \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} \varphi_{i,j} x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} \varphi_{i,j} y_j^n \end{pmatrix} = 0 \quad (79)$$

Polynóm $\varphi_{i,j}$ vieme upraviť na tvar:

$$\begin{aligned} \varphi_{i,j} = & n_x n_y a_0 + n_y a_1 \sum_{i=1}^{n_x} x_i + \dots \\ & \dots + n_x a_{n_a-1} \sum_{j=1}^{n_y} y_j^n - \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} z_{i,j} \end{aligned} \quad (80)$$

čím po úprave dostávame výsledný systém rovníc o n_a neznámych

$$\begin{pmatrix} n_x n_y & n_y \sum_{i=1}^{n_x} x_i & \dots & n_x \sum_{j=1}^{n_y} y_j^n \\ n_y \sum_{i=1}^{n_x} x_i & n_y \sum_{i=1}^{n_x} x_i^2 & \dots & \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} y_j^n x_i \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ n_x \sum_{j=1}^{n_y} y_j^n & \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} x_i y_j^n & \dots & n_x \sum_{j=1}^{n_y} y_j^{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n_a-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} z_{i,j} \\ \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} z_{i,j} x_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} z_{i,j} y_j^n \end{pmatrix} \quad (81)$$

čo môžeme v jednoduchosti zapísať ako

$$[\mathbf{A}] [\mathbf{a}] = [\mathbf{B}] \quad (82)$$

Vstupné údaje pre vytvorenie matic $[\mathbf{A}]$ a $[\mathbf{B}]$ použijeme z dynamickej charakteristiky. Počiatočný stupeň polynómu zvolíme $n = 3$, pričom výsledky budeme porovnávať s nameranými hodnotami v dynamickej charakteristike a postupne ho budeme zvyšovať, kým relatívne odchýlky vypočítaných od nameraných hodnôt nebudú čo najnižšie. Ešte jednoduchšie môžeme výsledky porovnávať cez súčty obsahov štvorcov o strane $(z_{i,j} - z(x_i; y_j))$ a zvoliť stupeň, pri ktorom bude súčet najnižší. Vývojový diagram algoritmu pre tvorbu matice $[\mathbf{A}]$ je na obrázku 18.

Obdobne diagram pre tvorbu matice $[\mathbf{B}]$ je na obrázku 19, kde II označuje číslo riadku, JJ číslo stĺpca matice, x_i sú veľkosti prúdov, y_j veľkosti vzduchovej medzery a $z_{i,j}$ označuje namerané hodnoty magnetickej sily alebo indukčnosti.

Výpočty sme spracovávali v softvérovom nástroji MATLAB vďaka jeho prostrediu prispôbenému na jednoduchú prácu s maticami. Pri výpočte magnetickej sily sme najnižšie odchýlky dosiahli pri stupni polynómu $n = 4$, pričom pre $n = 5$ už začali odchýlky opäť narastať. Pri výpočte indukčnosti sme dosiahli postačujúce odchýlky už pri $n = 3$, kvôli vyššej presnosti (postrehnuteľnej až pri neskorších iteračných výpočtoch) sme však zvolili $n = 4$.

Zdrojové kódy pre výpočty koeficientov $F_m = f(i, \delta)$ a $L = f(i, \delta)$ sú obsiahnuté v prílohách Aproximacia-sila.m a Aproximacia-indukcnost.m. Výpočty a porovnania jednotlivých odchýlok od nameraných hodnôt sú obsiahnuté v prílohe Aproximacia.xlsx.

6.2 Prechodný dej

Počas zapnutí elektrického napájacieho obvodu prebieha v aktuátore prechodný dej, ktorý v tejto kapitole podrobnejšie rozoberieme. Hodnoty premenných s nelineárnou závislosťou pritom budeme počítat' diskre'tne v ur'čitých, dostatočne krátkych časových krokoch Δt . Nárast prúdu tesne po zapnutí obvodu charekterizujeme diferencíálnou rovnicou (1). Pre spojitú zmenu prúdu a indukčnosti z nej môžeme odvodiť

$$d(Li) = (U - Ri) dt \quad (83)$$

a v diskre'tnom tvare

$$i_k = i_{k-1} + \frac{U - Ri_{k-1}}{L_{k-1}} \Delta t \quad (84)$$

kde odpor R považujeme za konštantný kvôli nízkej časovej elektrickej konštante $\tau = \frac{L}{R}$, vďaka čomu je možné zanedbať oteplenie elektrického obvodu počas prechodného deja. Poradové číslo iteračného kroku je označené ako premenná k .

Z tejto závislosti vyplýva aj nelineárny rast magnetickej sily pôsobiacej na jadro ako aj indukčnosti cievky. Tieto hodnoty budeme počítat' pomocou polynomickej funkcie, odvodennej v predchádzajúcej podkapitole. Z uvedeného nám vyplýva ďalšia nelineárna zmena premennej a to rýchlosti pohybu jadra. Keďže sa jadro pohybuje iba v jednej osi, všetky vektorové veličiny majú nenulovú iba jednu zložku a teda budeme ich veľkosti počítat' jednoduchými skalárnymi rovnicami. Z rovnice (4) môžeme pre spojitú zmenu rýchlosti písať

$$dv = \frac{\Sigma F}{m} dt \quad (85)$$

a v diskre'tnom tvare

$$v_k = v_{k-1} + \frac{F_{m_k} - F_{p_k} - F_{t_k} - F_{ext} - F_g}{m} \Delta t \quad (86)$$

Z nelineárnej zmeny rýchlosti vyplýva aj nelineárna zmena aerodynamickej odporovej sily, ktorá je úmerná kvadrátu rýchlosti. Ak zanedbáme trenie, tak pre celkovú veľkosť aerodynamických odporových síl píšeme

$$F_{t_k} = \frac{1}{2} S C \rho v_{k-1}^2 \quad (87)$$

kde $v_1 = 0$, $S = 1,35 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$ je celková plocha prierezu jadra aktuátoru, $C = 1,2$ je koeficient aerodynamického odporu a $\rho = 1,19 \text{ kg/m}^3$ je hustota prostredia, v ktorom sa jadro pohybuje, čo je v našom prípade vzduch.

Z uvedeného vyplýva aj nelineárny rast prejdenej dráhy jadra aktuátoru. Keďže dráha je určená časovým integrálom rýchlosti, pre jej spojitú zmenu môžeme písať

$$ds = v dt \quad (88)$$

a v diskrétnom tvare

$$s_k = s_{k-1} + \frac{F_{m_k} - F_{p_k} - F_{t_k} - F_{ext} - F_g}{2m} \Delta t^2 \quad (89)$$

Pre veľkosť odporovej sily pružiny píšeme

$$F_{p_k} = F_{p_0} + r s_{k-1} \quad (90)$$

pričom $r = 1,99 \text{ N/mm}$ označuje tuhosť nami vybranej pružiny a $F_{p_0} = 20,4 \text{ N}$ je počiatočné napätie pružiny. Zostáva nám už len určiť počiatočné hodnoty veľkosti magnetickej sily F_{m_1} a prúdu i_1 jej zodpovedajúceho v okamihu pohnutia jadra aktuátora.

Za okamih pohnutia považujeme ten okamih, v ktorom veľkosť magnetickej sily prekročí veľkosť statického pôsobenia všetkých protisíl pôsobiacich na jadro, ku ktorým sme pridali 3 % z rezervných dôvodov kvôli zanedbaným trecím silám. Pre počiatočnú hodnotu magnetickej sily teda platí

$$F_{m_1} = 1,03 \cdot (F_g + F_{p_0} + F_{ext}) = 30,3 \text{ N} \quad (91)$$

Počiatočnú hodnotu prúdu vypočítame z prúdovej hustoty, pri ktorej dosiahne magnetická sila veľkosť F_{m_1} . Ak predpokladáme sýtenie jadra aktuátora len do takej miery, kým jeho permeabilita zostáva konštantná, tak veľkosť magnetickej sily je úmerná súčinu intenzity magnetického poľa a magnetickej indukcie. Vplýva to z rovnice (35). Obe tieto zložky sú lineárne závislé na okamžitej hodnote pretekajúceho prúdu. Z toho môžeme predpokladať kvadratickú závislosť veľkosti magnetickej sily na veľkosti prúdovej hustoty pri konštantnej vzduchovej medzere, a pre výpočet počiatočnej hodnoty prúdu preto môžeme písať

$$i_1 = J_1 S = \sqrt{\frac{F_{m_1}}{F_{m_q}}} J_q S = 1,43 \text{ A} \quad (92)$$

kde F_{m_q} je akákoľvek hodnota pôsobiacej magnetickej sily pri prúdovej hustote J_q a pri maximálnej vzduchovej medzere $\delta_{max} = 12 \text{ mm}$.

Z počiatočnej hodnoty prúdu je vidieť, že po zapnutí obvodu sa jadro pohne až v okamihu dosiahnutia takmer maximálnej možnej hodnoty prúdu, ktorá je takmer počas celej doby pohybu konštantná. V skutočnosti, ale po určitom čase začne odpor cievky narastatať s oteplením a prúd začne postupne klesať až na minimálnu hodnotu potrebnú k udržaniu požadovanej prúdovej hustoty.

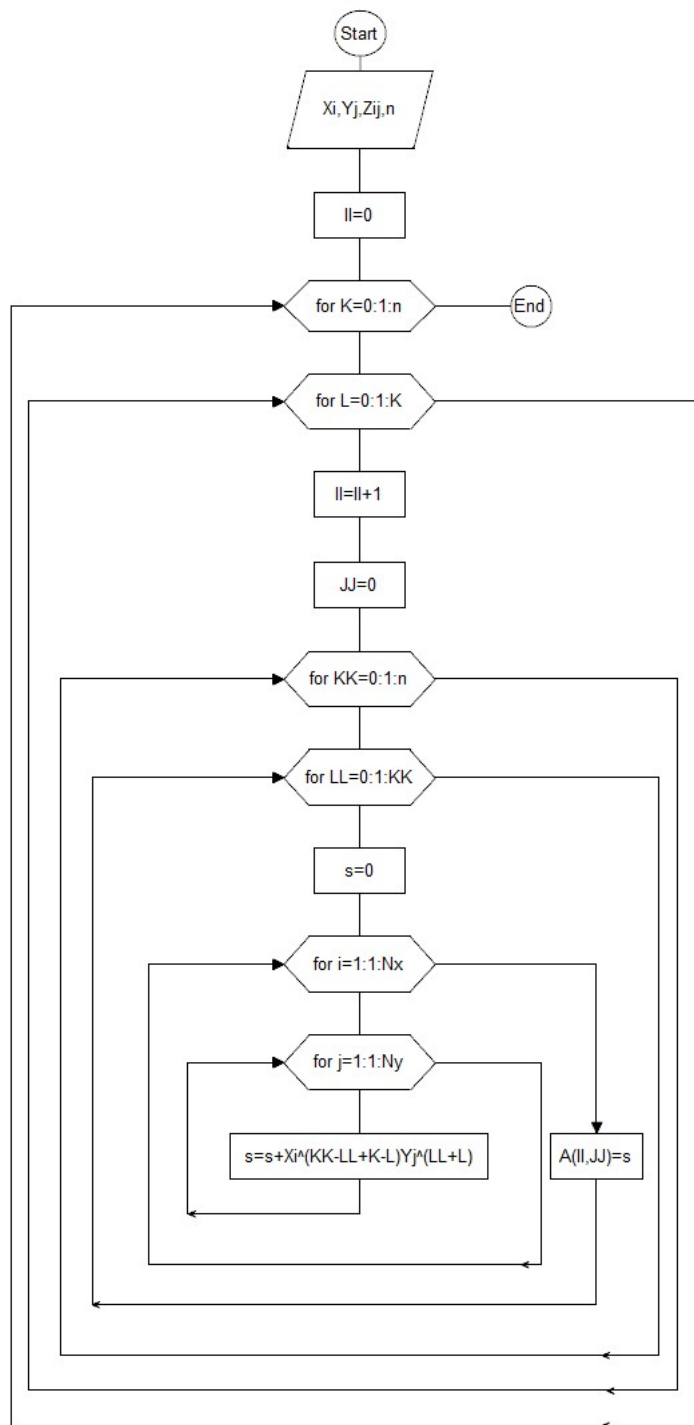
Vypočítaná hodnota F_{m_1} zodpovedá aj hodnote nameranej v prostredí Agros2D s presnosťou 10^{-1} N pri prúdovej hustote J_1 . Príslušné iteračné výpočty sú skompletované v prílohe Iteracie.xlsx.

7 Záver

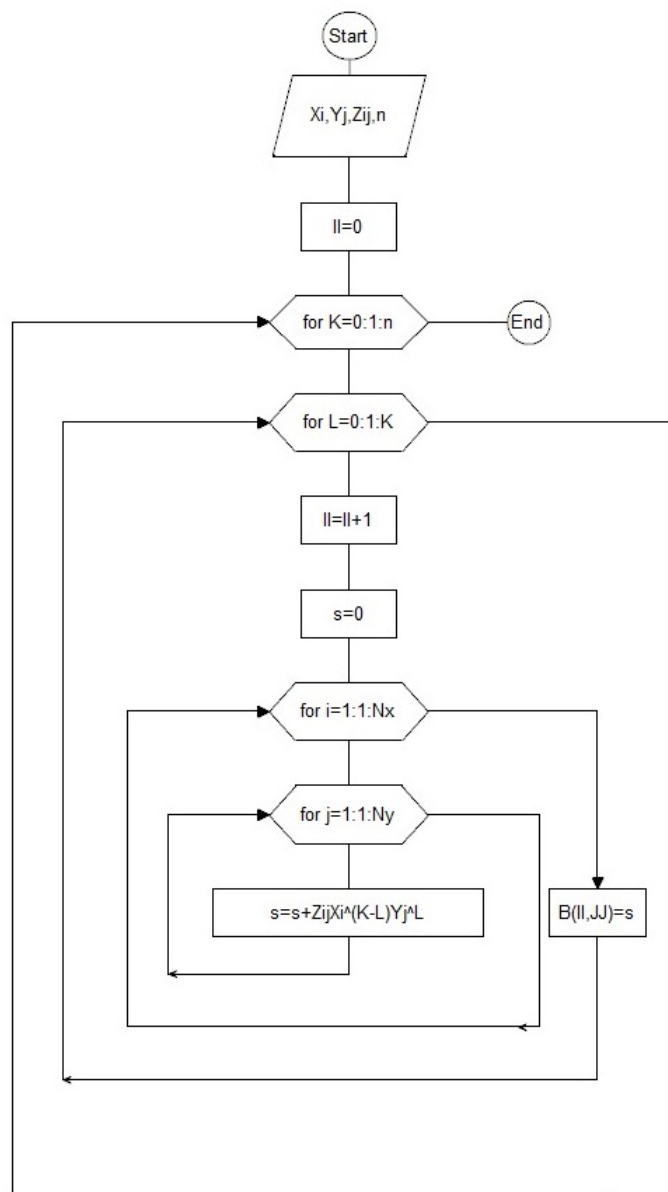
Táto práca je venovaná rozboru modelovania elektromagnetických aktuátorov. V úvode práce je stručne vysvetlená charakteristika všeobecného aktuátora, jeho rozdelenie na jednotlivé druhy a ich využitie. V ďalších kapitolách je uvedený komplexný spojený matematický model magnetického a tepelného poľa, z ktorého vyplýva prílišná náročnosť jeho riešenie, a preto bolo nutné zaviesť aj príslušné zjednodušenie.

Riešenie modelu sme uskutočňovali takmer výlučne numerickými metódami za pomoci softvérových nástrojov Agros2D a MATLAB, v ktorých sme už zohľadňovali spomínané zjednodušenie. Z toho dôvodu sme vo výsledku dosiahli vyššie silové pôsobenie ako v skutočnosti. Pri tepelnom výpočte sme počítali s konštantou maximálnou hodnotou prúdu, ktorá ale v skutočnosti s rastúcou teplotou klesá a teda sme dosiahli aj vyššie celkové oteplenie ako v prektickej aplikácii. Za predpokladu umiestnenia aktuátora v bežných klimatických podmienkach, z výpočtov vyplýva, že jednotlivé časti namodelovaného aktuátora sa ohrejú maximálne na 60°C , čo je hodnota, ktorá funkčne neohrozí žiadnu časť aktuátora.

Model navrhnutý v tejto práci je možné použiť na hrubé posúdenie vlastností a charakteristík prídržných elektromagnetických aktuátorov podobnej konštrukcie. Všeobecné odvodenie daného modelu zabezpečuje jeho prispôsobenie rôznym aplikáciám.



Obr. 18: vývojový diagram matice A



Obr. 19: vývojový diagram matice B

Zoznam použitej literatúry

- [1] PAWLAK A.M.: Sensors and actuators in mechatronics, Taylor & Francis Group, LLC, 2007
- [2] DOLEŽEL I., MACH M., ULRYCH B.: DC Ferromagnetic Actuator for Extremely High Forces, Faculty of Electrical Engineering, Czech Technical University
- [3] NESBITT B.: Handbook of valves and actuators, Elsevier Science & Technology Books, 2007
- [4] BOLDEA I., NASAR S.A.: Linear electric actuators and generators, Cambridge University Press, 1997
- [5] BRAUER J.R.: Magnetic actuators and sensors, IEEE Press, 2006
- [6] IDA N.: Sensors, actuators and their interfaces, 2014
- [7] DOLEZEL I., DVORAK P., ULRYCH B.: Actuator with extremely high pull-in force, Czech Technical University
- [8] KLUSAL R.: Magnetické akční členy, Střední průmyslová škola Příbram, 2013
- [9] BARGLIK J., DOLEZEL I., DVORAK P., ULRYCH B., ŠKOPEK M.: Limit operation regimes of DC actuator-based linear drives
- [10] ULANSKI W.: Valve and actuator technology. USA: MCGRAW-HILL, 1991.
- [11] JANOSHA H. Actuators: Basics and Applications. Germany: SPRINGER, 2004.
- [12] FLEISCH K.: Electromagnetics with applications, McGraw-Hill Companies, Inc. 1999
- [13] SODEMANN PRUŽINY: online obchod, dostupné na internete: <http://www.sodemann-pruziny.cz>

Zoznam príloh

- 1 Aproximacia.xlsx
- 2 Dynamicka charakteristika.xlsx
- 3 Iteracie.xlsx
- 4 Navrh zdroja.xlsx
- 5 Staticka charakteristika.xlsx
- 6 Vyber pruziny.xlsx
- 7 Aproximacia_Indukcnost.m
- 8 Aproximacia_Sila.m
- 9 Aktuator.a2d