

**B.2 Článek: Tříčlenný pankratický systém pro transformaci  
gaussovských svazků [36]**

**11 - 12**  
**2014**

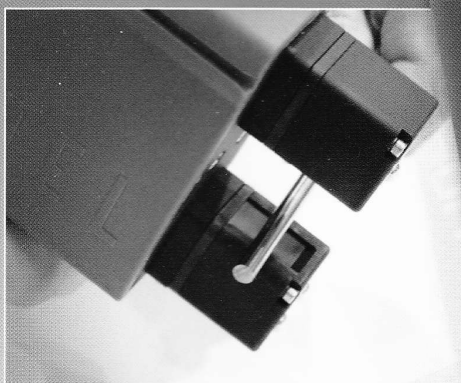
# JMO

## JEMNÁ MECHANIKA A OPTIKA FINE MECHANICS AND OPTICS

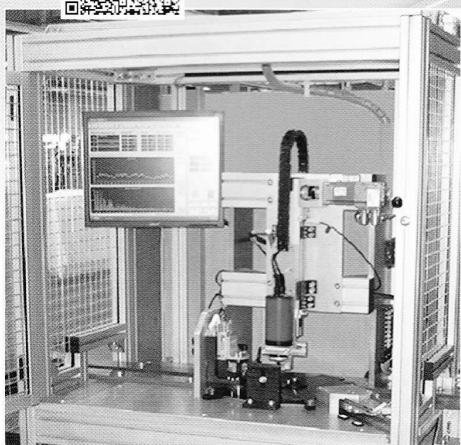
[www.mesing.cz](http://www.mesing.cz)



Ø d 0,1 - 6 mm



MESING, spol. s r.o., Šámalova 60a, 615 00 Brno  
tel. +420 545 426 211, e-mail: [info@mesing.cz](mailto:info@mesing.cz)



**MESING<sup>®</sup>**

### Netradiční optické systémy v měřicí technice MESING

úchylky kruhovitosti, drsnosti  
a povrchové vady

Ø d 0,1 - 38 mm  
+ ovalita a radiální házení

Einzelbewertung	Rauheit	Rundheit	Form	Welligkeit

4096 einzelne Rauheitsmessungen (Aq) auf dem Umfang  
Mittelwert Aqm: 7,04

## REDAKČNÍ RADA

**Předseda:** RNDr. Miloslav VYCHODIL, CSc., Meopta-optika, s.r.o., Přerov, mobil: 731 439 380

**Členové:** RNDr. Ing. Ján BARTL, CSc., ÚMSAV, Bratislava, prof. RNDr. Dr. Zdeněk BOUCHAL, UP, Olomouc, Ing. Ondřej ČÍP, Ph.D., UPT AV ČR, v.v.i., Brno, Ing. Alexandr DEJNEKA, Ph.D., FZÚ AV ČR, v.v.i., Praha; doc. RNDr. Ondřej HADERKA, Ph.D., SLO UP a FZÚ AV ČR, Olomouc, prof. Ing. Pavol HORŇÁK, DrSc., STU, Bratislava, doc. Ing. Jan HOŠEK, Ph.D., ČVUT Praha, prof. RNDr. Miroslav HRABOVSKÝ, DrSc., SLO UP a FZÚ AV ČR, Olomouc, RNDr. Vladimír CHLUP, Olomouc, RNDr. Lubomír JASTRABÍK, CSc., FZÚ AV ČR, v.v.i., Praha, RNDr. Pavel KLENOVSKÝ, Český metrologický institut, Brno, Ing. Jiří KRŠEK, VUT, Brno, doc. RNDr. Vojtěch KRŠÁLEK, CSc., UTB, Zlín, Ing. Jan KÜR, Mesing, spol. s r.o., Brno, prof. Ing. Martin LIBRA, CSc., ČZU, PRAHA, prof. RNDr. Miroslav LIŠKA, DrSc., VUT, Brno, RNDr. Zdeněk LOŠŤÁK, Meopta-optika, s.r.o., Přerov, prof. Ing. Petr LOUDA, CSc., TU, Liberec, doc. RNDr. Miroslav MILER, DrSc., ÚFE AV ČR, v.v.i., Praha, doc. Ing. Jiří NOVÁK, Ph.D., ČVUT, Praha, prof. RNDr. Jan PEŘINA, DrSc., UP, Olomouc, Mgr. Sylvie PETROVÁ, LF MU, Brno, prof. Ing. Jaromír PIŠTORA, CSc., VŠB - TU, Ostrava, RNDr. Michael PROUZA, Ph.D., FZÚ AV ČR, v.v.i., Praha, RNDr. Dagmar SENDERÁKOVÁ, Ph.D., UK, Bratislava, RNDr. Petr SCHOVÁNEK, SLO UP a FZÚ AV ČR, Olomouc, prof. RNDr. Anton ŠTRBA, CSc., UK, Bratislava, doc. Ing. Olga TŮMOVÁ, CSc., Západočeská univerzita, Plzeň. Čestný člen Ing. Zdeněk MARTÍNEK, Nové město nad Metují

Gerd HÄUSLER, Lehrstuhl für Optik, Universität Erlangen - Nürnberg, Erlangen (Germany), Michael J. LALOR, Liverpool John Moores University, U. K.; Paul RAUSNITZ, TCI New York, U. S. A.; Rodney J. SOUKUP, University of Nebraska-Lincoln, U. S. A.; M. C. TEICH, Boston University, U. S. A.; Emil WOLF, University of Rochester, U. S. A.

## JEMNÁ MECHANIKA A OPTIKA

Vydává Fyzikální ústav Akademie věd České republiky, v.v.i. za spoluúčasti The International Society for Optical Engineering (SPIE/CS) v Nakladatelství Fyzikálního ústavu Akademie věd České republiky, v.v.i.

**Ředitel FZÚ AV ČR, v.v.i.:** prof. Jan ŘÍDKÝ, DrSc.

**Odpovědný zástupce vydavatele:** prof. RNDr. Miroslav HRABOVSKÝ, DrSc.

**Šéfredaktor:** dipl. tech. Jaroslav NEVŘALA

**Adresa redakce v Olomouci (předplatné, nakladatelské služby):**

SLO UP a FZÚ AV ČR, 17. listopadu 50, 772 07 Olomouc,  
tel.: 585 631 576, fax: 585 631 531, e-mail: eva.pelclova@upol.cz

**Adresa redakce v Přerově (šéfredaktor):** Kabelíkova 1, 750 02 Přerov,  
mobil: 776 011 925, e-mail: eva.pelclova@upol.cz

Otisk povolen se svolením redakce a se zachováním autorských práv. Nevýžádané materiály se nevrací. Za původnost a správnost příspěvků odpovídají autoři.

**Vychází:** 10x ročně (z toho 2 čísla jako dvojčísla)

**Předplatné:** Celoroční 420,- Kč/rok. Ceny jsou jednotné pro Českou i Slovenskou republiku. Do všech ostatních zemí je časopis IMO distribuován za jednotnou cenu 10 EUR/ks. Pro členy SPIE/CS činí předplatné 120,- Kč/rok. Předplatné pro studenty Bc., Mgr., Ph.D. a studenty středních škol při osobním odběru činí 120 Kč/rok; v případě zaslání poštou 300,- Kč/rok.

**Rozšiřuje** vydavatel a Podniková prodejna Meopta-optika, s.r.o., Přerov, Kabelíkova 1, 750 02 Přerov.

**V Slovenské republice je kontaktní místo:** RNDr. Dagmar Sendaráková, Ph.D., katedra experimentální fyziky FMFI UK, Mlynská dolina F2/149, SK-842 48 Bratislava, tel. 00421 260 295 391, e-mail: senderakova@fmph.uniba.sk

**V Slovenské republice rozšiřuje a objednávky přijímá:**

prof. Ing. Ivo Čáp, CSc., JSMF pobočka Žilina, ul. 1. mája 32, 010 01 Žilina, e-mail: ivo.cap@fel.uniza.sk

**Tiskne** TYPOServis Holešov, Masarykova 650, 769 01 Holešov, tel.: 573 398 746, e-mail: dtp@typoservis.cz

**Inzerce:** redakce, Kabelíkova 1, 750 02 Přerov, tel.: 581 243 441, mobil: 776 011 925, e-mail: eva.pelclova@upol.cz  
Odborné články jsou lektorovány.

© JEMNÁ MECHANIKA A OPTIKA 2014

# JEMNÁ MECHANIKA A OPTIKA

VĚDECKO-TECHNICKÝ ČASOPIS  
ROČNÍK 59 11 - 12/2014

## OBSAH

<b>Lokální topografie optoelektronických substrátů připravených pomocí plazmového leptání</b> (D. Dallaeva, S. Ramazanov, E. Prokopyeva, J. Brüstlová, P. Tománek) .....	299
<b>Vývoj velkopřůměrové kompozitní adaptivní optiky</b> (V. Kmetík, B. Vítovec, L. Jiran, Š. Němcová, J. Zícha, A. Inneman, L. Mikulíčková, R. Pavlica).....	303
<b>Zveme vás na 116. dny Německého svazu aplikované optiky 2015 v Brně</b> (P. Tománek).....	307
<b>Spomienka na 19. poľsko-slovensko-českú optickú konferenciu</b> (D. Sendaráková) .....	308
<b>Vliv velikosti pupily a otočení oka na aberační koeficienty a refrakční hodnoty</b> (T. Černohousová, T. Kahounová, J. Novák, P. Novák) .....	309
<b>Tříčlenný pankratický systém pro transformaci gaussovských svazků</b> (A. Mikš, P. Kulmon).....	316
<b>FTM interferometrie zbytkových vad optických ploch – srovnání klasického přístupu s vyhodnocením pomocí po částech kvadratické funkce</b> (P. Pokorný) .....	320
<b>Metody vyhodnocení interferogramů pro měření deformací a tvarů ploch a vlnoploch</b> (P. Pokorný).....	324
<b>Proběhl 19. ročník tradiční konference českých, slovenských a polských optiků</b> (K. Lemr).....	329
<b>Vývojové tendencie osvetlenia v roku 2015</b> (P. Horňák) .....	330
<b>Z technické knihovny</b> (P. Pokorný).....	331
<b>Popularizace vědy studentským spolkem UP Crowd na Univerzitě Palackého</b> (J. Tomáščík).....	332
<b>Celý svět vzdá hold světlu a světelným technologiím</b> (M. Selingerová) .....	333
<b>Odezva evropského normalizačního orgánu na Rozhodnutí Evropské komise</b> (M. Miler) .....	334
Bližší informace o poslání časopisu, pokyny pro autory, obsah časopisu apod. je uveden na internetu: <a href="http://jmo.fzu.cz/">http://jmo.fzu.cz/</a>	

Informace o předplatném podá, objednávky přijímá, objednávky do zahraničí vyřizuje: SLO UP a FZÚ AV ČR, 17. listopadu 50, 772 07 Olomouc, tel.: 585 631 576, e-mail: eva.pelclova@upol.cz.

Cena čísla 40 Kč včetně DPH

## Tříčlenný pankratický systém pro transformaci gaussovských svazků

*V článku jsou odvozeny obecné vztahy popisující paraxiální vlastnosti optické tříčlenné pankratické soustavy pro transformaci gaussovských svazků. Je ukázáno, že takovéto optické pankratické soustavy mají oproti pankratickým systémům pro transformaci homocentrického svazku odlišnou kinematiku, závislou na parametrech transformovaného gaussovského svazku.*

### 1. ÚVOD

Použití laserů [1–3] je v současné době velmi rozšířené v řadě oblastí vědy a techniky. Jsou konstruovány různé přístroje a zařízení využívající vlastností laserového svazku, který je však třeba vhodným způsobem transformovat optickým systémem tak, aby měl požadované vlastnosti, např. rozbíhavost, koncentraci svazku do určité vzdálenosti apod. V celé řadě případů (např. pro skenování, řezání a žhání materiálů) je požadována plynulá změna parametrů laserového svazku, což nejlépe provede optická soustava s plynule měnitelnými vlastnostmi (např. ohniskovou vzdáleností) v tzv. pankratických systémech (zoom systémech). Problematika pankratických systémů pro klasické (homocentrické) světelné svazky je podrobně popsána např. v [4–21]. Ve skutečnosti svazek světla vycházející z laseru není homocentrický, ale gaussovský a pro jeho transformaci optickou soustavou platí odlišné matematické vztahy než pro transformaci homocentrického svazku [1–3, 22]. Nelze tedy vztahy pro výpočet pankratických systémů pro homocentrické světelné svazky [4–22] použít pro výpočet pankratických systémů transformujících gaussovské svazky.

### 2. ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI GAUSSOVSKÉHO SVAZKU

Uvažujme monofrekvenční elektromagnetické pole šířící se homogenním a izotropním prostředím. Takové pole je popsáno Helmholtzovou rovnicí [1–2, 22]

$$\Delta u(x, y, z) + k^2 u(x, y, z) = 0, \quad (1)$$

kde  $\Delta$  značí Laplaceův operátor,  $k = 2\pi/\lambda$  je vlnové číslo,  $\lambda$  vlnová délka světla a  $u = u(x, y, z)$  je libovolná složka vektoru  $\mathbf{E}$  intenzity elektromagnetického pole [1–2, 22] v kartézské souřadné soustavě.

Rovnice (1) popisuje elektromagnetické pole v celém prostoru. V laserových svazcích, které jsou velmi úzké, je pole zkoncentrováno v okolí jedné podélné souřadnice (např. osy  $z$ ) a v příčném směru poměrně rychle klesá k nule, zatímco v podélném směru se mění pomalu. V takovémto případě hledíme řešení rovnice (1) ve tvaru

$$u(x, y, z) = \varphi(x, y, z) \exp(-ikz), \quad (2)$$

kde  $i = \sqrt{-1}$ . Dosazením vztahu (2) do vztahu (1) dostáváme

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

přičemž jsme (z výše uvedených důvodů) zanedbali člen  $\partial^2 \varphi / \partial z^2$  jako malý. Rovnice (3) je parabolická [1–2, 22] pro funkci  $\varphi(x, y, z)$ .

Omezme se nyní na nejjednodušší (v praxi nejdůležitější) případ gaussovských svazků kruhového průřezu. Dosadíme-li řešení rovnice (3) do rovnice (2) dostáváme [1–2, 22]

$$u = \frac{w_0}{w} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w^2}\right) \exp\left(-ikz + i\psi - ik \frac{x^2 + y^2}{2R}\right), \quad (4)$$

kde

$$\begin{aligned} R &= R(z) = z(1 + z_0^2 / z^2), \\ w^2 &= w^2(z) = w_0^2(1 + z^2 / z_0^2), \\ \psi &= \psi(z) = \arctan(z / z_0), \\ z_0 &= kw_0^2 / 2. \end{aligned} \quad (5)$$

přičemž  $2w_0$  značí průměr nejužšího místa svazku (tzv. pas svazku). Jak je ze vztahu (4) patrné, ubývá amplituda svazku jako Gaussova funkce (proto název gaussovský svazek).

Jsou-li  $R_1$  a  $R_2$  poloměry křivosti zrcadel rezonátoru laseru a  $p$  jejich vzájemná vzdálenost, potom platí

$$z_0^2 = \frac{p(R_1 - p)(R_2 - p)(R_1 + R_2 - p)}{(R_1 + R_2 - 2p)^2}. \quad (6)$$

Rovnice vlnoplochy má pak podle vztahu (4) tvar

$$z + \frac{x^2 + y^2}{2R} - \frac{\psi}{k} = z_1 = konst. \quad (7)$$

Vzhledem k tomu, že vlnová délka  $\lambda$  světla vyzařovaného např. He-Ne laserem je velmi malá ( $\lambda_{\text{He-Ne}} = 632,8$  nm) a velikost pasu  $w_0$  běžných He-Ne laserů bývá kolem 0,3 mm – 0,5 mm [23], tedy pro  $z_0 \approx 1000$  mm a  $z = 1000$  mm je  $\psi/k \approx 0,00008$ . Tuto hodnotu ve vztahu (7) můžeme vzhledem k druhým členům zanedbat. Rovnice vlnoplochy má pak tvar

$$\frac{x^2 + y^2}{2R} = z_1 - z. \quad (8)$$

Rovnice (8) je rovnicí rotační plochy, přičemž  $R$  je poloměr této plochy pro body ležící v blízkém okolí osy  $z$  svazku. Ze vztahů (5) pak můžeme, z nutné podmínky pro extrém  $dR/dz = 0$ , pro minimální hodnotu poloměru křivosti  $R_c$  získat vztah

$$R_c = 2z_0. \quad (9)$$

Vidíme tedy, že se poloměr křivosti mění od hodnoty  $R \rightarrow \infty$  pro  $z = 0$  k minimální hodnotě  $R = R_c$  pro  $z = z_0$  a poté opět vzrůstá k nekonečnu pro  $z \rightarrow \infty$ .

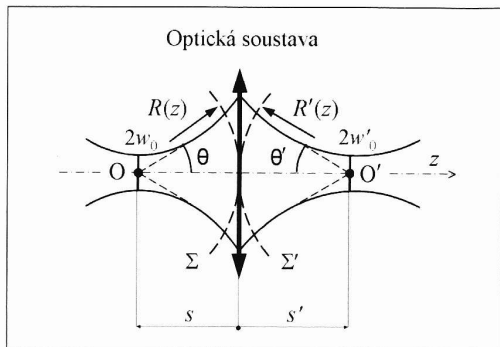
Prostorový tvar gaussovského svazku je určen změnou jeho amplitudy. Je zvykem popisovat prostorový tvar svazku plochou, v jejíchž bodech klesne amplituda na  $1/e$  (Eulerovo číslo  $e = 2,71828$ ) hodnoty amplitudy na ose svazku. Ze vztahu (4) pak dostáváme

$$x^2 + y^2 = w_0^2(1 + z^2 / z_0^2), \quad (10)$$

což je rovnice jednodílného rotačního hyperboloidu. Rozbíhavost svazku pak charakterizujeme úhlem rozbíhavosti, který je dán úhlem  $2\theta$ , který svírají asymptoty  $x$ -ového řezu hyperboloidem s osou  $z$  svazku. Ze vztahu (10) pak dostáváme ( $\tan \theta \approx \theta$ )

$$w_0 \theta = \lambda / \pi. \quad (11)$$

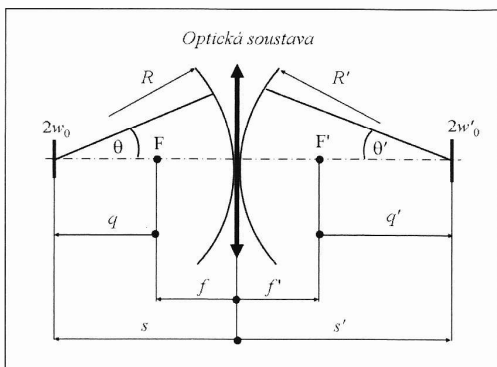
Na obr. 1 jsou vyznačeny základní parametry gaussovského svazku a jeho transformace optickou soustavou.



Obr. 1 Základní parametry gaussovského svazku

### 3. TRANSFORMACE GAUSSOVSKÉHO SVAZKU OPTICKOU SOUSTAVOU

Bez újmy na obecnosti se budeme v dalším pro jednoduchost zabývat transformací gaussovského svazku soustavou tenkých čoček. Odvozené vztahy budou platné i pro optickou soustavu složenou ze členů konečné tloušťky, vztáhneme-li všechny veličiny k ohniskům  $F$  a  $F'$  optických členů (obr. 2) nebo k jejich hlavním rovinám [22, 24–26].



Obr. 2 Transformace gaussovského svazku optickou soustavou

Užitím geometrické optiky transformuje tenká čočka (obr. 2) na ni dopadající sférickou vlnoplochu o poloměru  $R$  na sférickou vlnoplochu o poloměru  $R'$  podle vztahu [22, 24–26]

$$1/R' - 1/R = 1/f', \quad (12)$$

kde  $f'$  je ohnisková vzdálenost čočky. Užitím vztahů (5) pak dostáváme (obr. 2)

$$G = \frac{f'^2}{q^2 + (R_e/2)^2} = \frac{f'^2}{q^2 + z_0^2} = \frac{m^2}{1 + m^2(z_0/f')^2}, \quad (13)$$

$$q' = -qG, \quad R'_e = R_e G,$$

$$w_0 = \sqrt{R_e/k}, \quad w'_0 = \sqrt{R'_e/k},$$

$$w_0 \theta = w'_0 \theta' = \lambda / \pi, \quad m_G = w'_0 / w_0 = \sqrt{G},$$

$$s = q - f', \quad s' = q' + f'.$$

Význam jednotlivých symbolů je patrný z obr. 2. Veličinu  $m_G$  nazýváme „zvětšením gaussovského svazku“ a  $m = f'/q$  je příčné zvětšení optického členu (čočky, optické soustavy). Ze vztahů (13) pak dostáváme

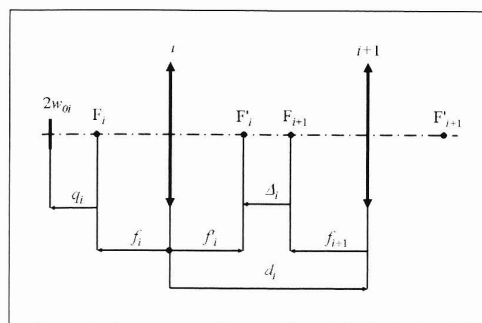
$$qq' = -f'^2 + m_G^2 (R_e/2)^2 = -f'^2 + m_G^2 z_0^2,$$

$$q = (1/m_G) \sqrt{f'^2 - (R_e/2)^2 m_G^2}, \quad (14)$$

$$q' = -m_G \sqrt{f'^2 - (R_e/2)^2 m_G^2}.$$

Vztah (14) je zobecněním Newtonovy zobrazovací rovnice pro gaussovský svazek. Pro  $z_0 = 0$  pak přechází v Newtonovu zobrazovací rovnici pro homocentrický svazek.

Předpokládejme nyní, že máme optickou soustavu složenou z řady tenkých optických členů (např. čoček) oddělených vzduchovými mezerami. Na obr. 3 je znázorněna situace zobrazení dvou po sobě jdoucích tenkých čoček a to v případě zobrazení  $i$ -tou a  $i+1$ -ní čočkou.



Obr. 3 Transformace gaussovského svazku dvěma po sobě jdoucími členy optické soustavy

Užitím vztahů (13) pak pro soustavu  $p$  čoček dostáváme ( $i = 1, 2, 3, \dots, p$ )

$$G_i = \frac{f_i'^2}{q_i^2 + (R_{ei}/2)^2},$$

$$q'_i = -q_i G_i,$$

$$R_{e,i+1} = R_{ei} G_i,$$

$$\Delta_i = f'_i + f'_{i+1} - d_i,$$

$$q_{i+1} = q'_i + \Delta_i,$$

kde  $f'$  je ohnisková vzdálenost  $i$ -té čočky a  $d_i$  je vzdálenost mezi  $i$ -tou a  $(i+1)$ -ní čočkou. Sečné vzdálenosti pak vypočítáme ze vztahů

$$s_i = q_i - f'_i, \quad s'_i = q'_i + f'_i. \quad (16)$$

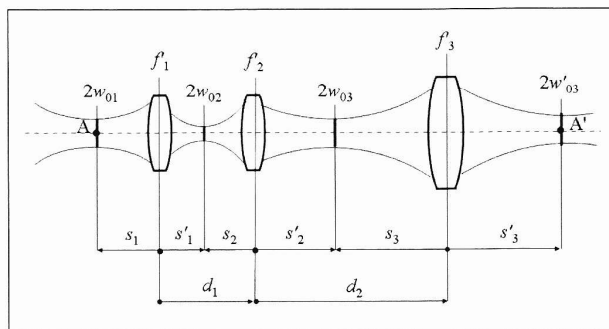
Pro příčné zvětšení soustavy pak platí

$$m_G^2 = \prod_{i=1}^{i=p} G_i. \quad (17)$$

### 4. TRANSFORMACE GAUSSOVSKÉHO SVAZKU TŘÍČLENNOU PANKRATICOU OPTICKOU SOUSTAVOU

V případě tříčlenné optické soustavy (obr. 4) dostáváme užitím předcházejících vztahů a za předpokladu, že známe ohniskové vzdálenosti  $f'_1, f'_2$  a  $f'_3$  jednotlivých členů optické soustavy, pro výpočet vzdáleností  $d_1$  a  $d_2$  mezi členy optické soustavy, následující postup.

Požadujeme od optické soustavy, aby se vzdálenost  $L$  mezi předmětem  $A$  a jeho obrazem  $A'$  neměnila při změně zvětšení  $m_G$  soustavy. Musí tedy platit (obr. 4)



Obr. 4 Tříčlenná optická soustava pro transformaci gaussovského svazku

$$-s_1 + d_1 + d_2 + s'_3 = L = \text{konst.} \quad (18)$$

Dosadíme-li do vztahu (18) vztahy (15) a (16), potom po delším výpočtu dostáváme pro veličinu  $\Delta_1$  následující rovnici

$$a_3 \Delta_1^3 + a_2 \Delta_1^2 + a_1 \Delta_1 + a_0 = 0, \quad (19)$$

kde

$$\begin{aligned} a_3 &= -\Delta_2^2, \\ a_2 &= \Delta_2 \left( \Delta_2 (2f_1 - L_0 - \Delta_2 + 2f_2 + 2f_3 - q_1 + 2G_1 q_1) + 2f_2^2 - f_3^2 \right), \\ a_1 &= 2 \Delta_2 \left( f_2^2 + D_2 G_1 q_1 \right) \left( \Delta_2 + L_0 - 2f_1 - 2f_2 - 2f_3 + q_1 \right) \\ &\quad - \Delta_2^2 f_1^2 G_1 - (f_2^2 - f_3^2) (f_2^2 + 2 \Delta_2 G_1 q_1), \\ a_0 &= - \left( f_2^4 + \Delta_2 G_1 (f_1^2 \Delta_2 + 2f_2^2 q_1) \right) \\ &\quad \left( \Delta_2 + L_0 - 2f_1 - 2f_2 - 2f_3 + q_1 \right) - f_3^2 G_1 (f_1^2 \Delta_2 + f_2^2 q_1). \end{aligned}$$

Požadujeme dále, aby optická soustava měla požadované zvětšení  $m_G$ . Dosadíme-li nyní do vztahu (17) pomocí vztahů (15), potom po delší námaze dostaneme pro veličinu  $\Delta_1$  následující rovnici

$$b_2 \Delta_1^2 + b_1 \Delta_1 + b_0 = 0, \quad (20)$$

kde

$$\begin{aligned} b_2 &= -\Delta_2^2 G, \\ b_1 &= 2G \left( \Delta_2^2 G_1 q_1 + f_2^2 \Delta_2 \right), \\ b_0 &= f_2^2 f_3^2 G_1 - G \left( \Delta_2^2 f_1^2 G_1 + 2f_2^2 G_1 q_1 \Delta_2 + f_2^4 \right). \end{aligned}$$

Mají-li mít rovnice (19) a (20) společné řešení, potom se musí jejich resultant  $R$  rovnat nule, platí

$$R = \begin{vmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & b_1 & b_0 \end{vmatrix}.$$

Položíme-li tedy  $R = 0$ , potom po delším výpočtu dostáváme následující rovnici pro veličinu  $\Delta_2$ , platí

$$c_4 \Delta_2^4 + c_3 \Delta_2^3 + c_2 \Delta_2^2 + c_1 \Delta_2 + c_0 = 0, \quad (21)$$

kde

$$\begin{aligned} c_4 &= -f_2^4 f_3^4 G_1^2 G, \\ c_3 &= -2f_2^4 f_3^4 G_1^2 G \left( L_0 - 2f_1 - 2f_2 - 2f_3 + q_1 + G_1 q_1 \right), \end{aligned}$$

$$c_2 = -f_2^4 f_3^4 G_1^2 G$$

$$\begin{aligned} & \left( 8f_2 f_3 - 4(L_0 + q_1 + G_1 q_1)(f_1 + f_2 + f_3) + 2q_1(L_0 + G_1 q_1) + 2G_1(z_{01}^2 G + L_0 q_1) + \right. \\ & \left. + L_0^2 + 8f_1(f_2 + f_3) + 6f_2^2 + 6f_3^2 + f_1^2(G_1 + 4) + q_1^2 + G^2 z_{01}^2 \right), \\ c_1 &= -2f_2^4 f_3^4 G_1^2 G (f_2^2 + f_3^2) (L_0 - 2f_1 - 2f_2 - 2f_3 + q_1 + G_1 q_1), \\ c_0 &= f_2^4 f_3^4 G_1 (G^2 f_2^2 f_3^2 - f_2^4 G G_1 - f_3^4 G G_1 + G_1^2 f_2^2 f_3^2). \end{aligned}$$

Tím máme odvozeny všechny potřebné vztahy pro výpočet vzdáleností  $d_1$  a  $d_2$  mezi členy optické soustavy. Při výpočtu těchto vzdáleností pak postupujeme následujícím způsobem.

- 1) Řešíme rovnici (21) pro veličinu  $\Delta_2$ .
- 2) Toto řešení pak dosadíme do rovnic (19) a (20), které vyřešíme pro veličinu  $\Delta_1$  a vybereme to jejich řešení, které je pro obě rovnice společné.
- 3) Vzdálenosti  $d_1$  a  $d_2$  mezi členy optické soustavy pak vypočítáme ze vztahu ( $i = 1, 2$ )

$$d_i = f_i' + f_{i+1}' - \Delta_i.$$

Průměry  $2w$  gaussovského svazku (jehož amplituda klesne na  $1/e$ ) na jednotlivých členech optické soustavy pak určíme ze vztahů (5). Daný problém, tj. určení paraxiálních parametrů dvoučlenné pankratické optické soustavy, je tím vyřešen.

## 5. PŘÍKLAD

Jako laser zvolíme laser HNL020R firmy Thorlab [23] s  $w_{01} = 0,3$  mm. Jednotlivé členy považujeme pro jednoduchost za tenké čočky. Volme  $s_1 = -70$  mm,  $f_1' = 20$  mm,  $f_2' = -10$  mm,  $f_3' = 20$  mm,  $L = 200$  mm,  $\lambda = 632,8$  nm. V tabulce 1 jsou uvedeny výsledky výpočtu paraxiálních parametrů tříčlenné optické soustavy s proměnným zvětšením, a to jak pro gaussovský světelný svazek (laserový svazek), tak i pro klasický (homocentrický) světelný svazek. Hodnoty délkových veličin v tabulce 1 jsou uvedeny v mm.

Tabulka 1 Tříčlenný zoom systém

$s_1 = -70$ mm, $f_1' = 20$ mm, $f_2' = -10$ mm, $f_3' = 20$ mm, $L = 200$ mm, $\lambda = 632,8$ nm						
	$w_{01} = 0,3$ mm (gaussovský svazek)			$w_{01} = 0$ mm (klasický svazek)		
$m_G$	$d_1$	$d_2$	$s'_3$	$d_1$	$d_2$	$s'_3$
1,000	20,1187	20,0398	89,8415	28,9192	26,4847	74,5961
0,775	18,0031	22,8554	89,1416	31,7996	24,7269	73,4735
0,550	16,1253	27,4159	86,4588	36,2875	23,4220	70,2905
0,325	15,3618	32,5630	82,0752	44,2061	23,2089	62,5850
0,100	23,9996	23,5360	82,4644	57,4623	32,8066	39,7311

Jak je z tabulky 1 patrné, je kinematika optického systému (závislost vzdáleností mezi jednotlivými členy optické soustavy na zvětšení) pro transformaci gaussovského svazku značně odlišná od kinematiky optického systému pro transformaci klasického svazku. Nelze tedy použít klasické zoom systémy pro transformaci laserových svazků.

## 6. ZÁVĚR

V práci byla podrobně analyzována paraxiální transformace gaussovského svazku optickou soustavou. Byla odvozeny vztahy umožňující provést výpočet paraxiálních parametrů tříčlenné pankratické optické soustavy s plynulou změnou zvětšení. Bylo ukázáno, že vzdálenosti mezi členy optické soustavy lze získat řešením rovnic (21), (19) a (20). Na příkladu byl ukázán výpočet pankratické optické soustavy s plynulou změnou zvětšení. Bylo ukázáno, že kinematika optického systému pro transformaci gaussovského svazku je značně odlišná od kinematiky optického systému

pro transformaci klasického svazku, a nelze tedy použít klasické zoom systémy pro transformaci laserových svazků.

Vzhledem k tomu, že různé lasery generují gaussovské svazky s rozdílnými parametry, bylo by tedy nutno pro každý typ laseru navrhnout speciální pankratický systém. V praxi lze však postupovat tak, že se navrhne pankratický systém pro gaussovský svazek o určitých parametrech a přizpůsobení na jiný gaussovský svazek se provede vhodným optickým systémem. Pomocí odvozených rovnic lze řešit i řadu dalších problémů transformace gaussovského svazku, jako je rozšíření svazku apod. Problematika vlivu aberací na transformaci gaussovského svazku optickou soustavou nebyla v práci řešena a čtenář, chtějící se podrobněji seznámit s vlivem aberací na transformaci gaussovského svazku, najde podrobnější informace v práci [27]. Metodika výpočtu dvoučlenných pankratických soustav pro transformaci gaussovského svazku je uvedena v práci [28].

*Práce byla vypracována za podpory grantu SGS14/110/OH-K1/2T/11 Českého vysokého učení technického v Praze.*

#### Literatura

- [1] B. E. A. Saleh, M. C. Teich, *Fundamentals of Photonics*, 2nd Ed., (Wiley-Interscience, New York, 2007).
- [2] A. Yariv, *Optical Electronics*, (Oxford University Press, 1990).
- [3] H. Kogelnik and T. Li, Laser Beams and Resonators, *Appl. Opt.* **5**, 1550–1567 (1966).
- [4] A. D. Clark, *Zoom Lenses* (Adam Hilger, London, 1973).
- [5] K. Yamaji, *Progress in Optics*, Vol. VI (North-Holland Publishing Co., Amsterdam 1967).
- [6] A. Mikš, J. Novak, and P. Novak, "Method of zoom lens design," *Appl. Opt.* **47**, 6088–6098 (2008).
- [7] T. Kryszczyński and J. Mikucki, "Structural optical design of the complex multi-group zoom systems by means of matrix optics," *Opt. Express* **21**, 19634–19647 (2013).
- [8] A. Wather, "Angle Eikonals for a Perfect Zoom System", *J. Opt. Soc. Am. A*, **18**, 1968–1971 (2001).
- [9] G. Wooters and E. W. Silvertooth, "Optically Compensated Zoom Lens", *J. Opt. Soc. Am.* **55**, 347–351 (1965).
- [10] D. F. Kienholz, "The Design of a Zoom Lens with a Large Computer", *Applied Optics* **9**, 1443–1452 (1970).
- [11] A. V. Grinkevich, "Version of an Objective with Variable Focal Length", *J. Opt. Technol.* **73**, 343–345 (2006).
- [12] K. Tanaka, "Paraxial analysis of mechanically compensated zoom lenses. 1: Four-component Type", *Appl. Opt.* **21**, 2174–2183 (1982).
- [13] G. H. Matter and E. T. Luszcz, "A Family of Optically Compensated Zoom Lenses", *Appl. Opt.* **9**, 844–(1970).
- [14] K. Tanaka, "Erratum: Paraxial Analysis of Mechanically Compensated Zoom Lenses. 1: Four-component Type", *Appl. Opt.* **21**, 3805 (1982).
- [15] K. Tanaka, "Paraxial Analysis of Mechanically Compensated Zoom Lenses. 2: Generalization of Yamaji Type V", *Appl. Opt.* **21**, 4045–4053 (1982).
- [16] K. Tanaka, "Paraxial Analysis of Mechanically Compensated Zoom Lenses. 3: Five-component Type", *Appl. Opt.* **22**, 541–553 (1983).
- [17] T. Kryszczyński, M. Leśniewski, J. Mikucki, Use of matrix optics to analyze the complex multi-group zoom systems, *Proc. SPIE* 8697, 18th Czech-Polish-Slovak Optical Conference on Wave and Quantum Aspects of Contemporary Optics, 86970I (December 18, 2012).
- [18] S. Pal and L. Hazra, "Ab initio synthesis of linearly compensated zoom lenses by evolutionary programming," *Appl. Opt.* **50**, 1434–1441 (2011).
- [19] L. Hazra and S. Pal, "A novel approach for structural synthesis of zoom systems," *Proc. SPIE* 7786, 2010.
- [20] S. Pal and L. Hazra, "Stabilization of pupils in a zoom lens with two independent movements," *Appl. Opt.* **52**, 5611–5618 (2013).
- [21] S. Pal, "Aberration correction of zoom lenses using evolutionary programming," *Appl. Opt.* **52**, 5724–5732 (2013).
- [22] A. Mikš, *Aplikovaná optika*, Vydavatelství ČVUT, Praha, 2009.
- [23] <http://www.thorlabs.com/>
- [24] W. T. Welford, *Aberrations of the Symmetrical Optical Systems*, Academic Press, London 1974.
- [25] M. Herzberger, *Modern Geometrical Optics*, Interscience, New York, 1958.
- [26] W. Smith, *Modern optical engineering*, 4th Ed., (McGraw-Hill, New York, 2007).
- [27] A. Mikš, J. Novak, Propagation of Gaussian beam in optical system with aberrations, *Optik: International Journal for Light and Electron Optics* **114** (10), 437–440 (2003).
- [28] A. Mikš, „Dvoučlenný pankratický systém pro transformaci gaussovského svazku“, *Jemná mechanika a optika*, **25**, č. 11, 311–313 (1980).

prof. RNDr. Antonín Mikš, CSc., katedra fyziky, Fakulta stavební ČVUT, Thákurova 7, 166 29 Praha 6, e-mail: mikš@fsv.cvut.cz  
Bc. Pavel Kulmon, katedra fyziky, Fakulta stavební ČVUT, Thákurova 7, 166 29 Praha 6, e-mail: pavel.kulmon@fsv.cvut.cz

*Jedná se o vědecký článek*

**B.3 Článek: Vliv výběru bodů z dané oblasti na stabilitu korelačního koeficientu při zpracování obrazových dat [37]**



**1**  
**2015**

# JMO

## JEMNÁ MECHANIKA A OPTIKA

FINE MECHANICS AND OPTICS



ISSN 0447-6441  
Index 46 723

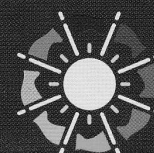
Lasery - Optika - Elektronová mikroskopie - Přístrojová technika - Konference LASER 55



ÚSTAV

PŘÍSTROJOVÉ TECHNIKY

Akademie věd České republiky, v. v. i.



INTERNATIONAL  
YEAR OF LIGHT  
2015

## REDAKČNÍ RADA

**Předseda:** RNDr. Miloslav VYCHODIL, CSc., Meopta-optika, s.r.o., Přerov, mobil: 731 439 380

**Členové:** RNDr. Ing. Ján BARTL, CSc., ÚMSAV, Bratislava, prof. RNDr. Dr. Zdeněk BOUCHAL, UP, Olomouc, Ing. Ondřej ČÍP, Ph.D., UPT AV ČR, v.v.i., Brno, Ing. Alexandr DEJNEKA, Ph.D., FZÚ AV ČR, v.v.i., Praha; doc. RNDr. Ondřej HADERKA, Ph.D., SLO UP a FZÚ AV ČR, Olomouc, prof. Ing. Pavol HORŇÁK, DrSc., STU, Bratislava, doc. Ing. Jan HOŠEK, Ph.D., ČVUT Praha, prof. RNDr. Miroslav HRABOVSKÝ, DrSc., SLO UP a FZÚ AV ČR, Olomouc, RNDr. Vladimír CHLUP, Olomouc, RNDr. Lubomír JASTRABÍK, CSc., FZÚ AV ČR, v.v.i., Praha, RNDr. Pavel KLENOVSKÝ, Český metrologický institut, Brno, Ing. Jiří KRŠEK, VUT, Brno, doc. RNDr. Vojtěch KRŠÁLEK, CSc., UTB, Zlín, Ing. Jan KŮR, Mesing, spol. s r.o., Brno, prof. Ing. Martin LIBRA, CSc., ČZU, PRAHA, prof. RNDr. Miroslav LIŠKA, DrSc., VUT, Brno, RNDr. Zdeněk LOŠTÁK, Meopta-optika, s.r.o., Přerov, prof. Ing. Petr LOUDA, CSc., TU, Liberec, doc. RNDr. Miroslav MILER, DrSc., ÚFE AV ČR, v.v.i., Praha, prof. Ing. Jiří NOVÁK, Ph.D., ČVUT, Praha, prof. RNDr. Jan PEŘINA, DrSc., UP, Olomouc, Mgr. Sylvie PETROVÁ, LF MU, Brno, prof. Ing. Jaromír PIŠTORA, CSc., VŠB - TU, Ostrava, RNDr. Michael PROUZA, Ph.D., FZÚ AV ČR, v.v.i., Praha, RNDr. Dagmar SENDEŘÁKOVÁ, Ph.D., UK, Bratislava, RNDr. Petr SCHOVÁNEK, SLO UP a FZÚ AV ČR, Olomouc, prof. RNDr. Anton ŠTRBA, CSc., UK, Bratislava, doc. Ing. Olga TŮMOVÁ, CSc., Západočeská univerzita, Plzeň. Čestný člen Ing. Zdeněk MARTÍNEK, Nové město nad Metují

Gerd HÄUSLER, Lehrstuhl für Optik, Universität Erlangen - Nürnberg, Erlangen (Germany), Michael J. LALOR, Liverpool John Moores University, U. K.; Paul RAUSNITZ, TCI New York, U. S. A.; Rodney J. SOUKUP, University of Nebraska-Lincoln, U. S. A.; M. C. TEICH, Boston University, U. S. A.; Emil WOLF, University of Rochester, U. S. A.

## JEMNÁ MECHANIKA A OPTIKA

Vydává Fyzikální ústav Akademie věd České republiky, v.v.i. za spoluúčasti The International Society for Optical Engineering (SPIE/CS) v Nakladatelství Fyzikálního ústavu Akademie věd České republiky, v.v.i.

**Ředitel FZÚ AV ČR, v.v.i.:** prof. Jan ŘÍDKÝ, DrSc.

**Odpovědný zástupce vydavatele:** prof. RNDr. Miroslav HRABOVSKÝ, DrSc.

**Šéfredaktor:** dipl. tech. Jaroslav NEVŘALA

**Adresa redakce v Olomouci** (předplatné, nakladatelské služby):

SLO UP a FZÚ AV ČR, 17. listopadu 50, 772 07 Olomouc,

tel.: 585 631 576, fax: 585 631 531, e-mail: eva.pelclova@upol.cz

**Adresa redakce v Přerově** (šéfredaktor): Kabelíkova 1, 750 02 Přerov, mobil: 776 011 925, e-mail: eva.pelclova@upol.cz

Otisk povolen se svolením redakce a se zachováním autorských práv. Nevyžádané materiály se nevrací. Za původnost a správnost příspěvků odpovídají autoři.

**Vychází:** 10x ročně (z toho 2 čísla jako dvojčísla)

**Předplatné:** Celoroční 420,- Kč/rok. Ceny jsou jednotné pro Českou i Slovenskou republiku. Do všech ostatních zemí je časopis JMO distribuován za jednotnou cenu 10 EUR/ks. Pro členy SPIE/CS činí předplatné 120,- Kč/rok. Předplatné pro studenty Bc., Mgr., Ph.D. a studenty středních škol při osobním odběru činí 120 Kč/rok; v případě zaslání poštou 300,- Kč/rok.

**Rozšiřuje** vydavatel a Podniková prodejna Meopta-optika, s.r.o., Přerov, Kabelíkova 1, 750 02 Přerov.

**V Slovenské republice je kontaktní místo:** RNDr. Dagmar Senderáková, Ph.D., katedra experimentální fyziky FMFI UK, Mlynská dolina F2/149, SK-842 48 Bratislava, tel. 00421 260 295 391, e-mail: senderakova@fmph.uniba.sk

**V Slovenské republice rozšiřuje a objednávky přijímá:**

prof. Ing. Ivo Čáp, CSc., JSMF pobočka Žilina, ul. 1. mája 32, 010 01 Žilina, e-mail: ivo.cap@fel.uniza.sk

**Tiskne** TYPOServis Holešov, Masarykova 650, 769 01 Holešov, tel.: 573 398 746, e-mail: dtp@typoservis.cz

**Inzerce:** redakce, Kabelíkova 1, 750 02 Přerov,

tel.: 581 243 441, mobil: 776 011 925, e-mail: eva.pelclova@upol.cz  
Odborné články jsou lektorovány.

© JEMNÁ MECHANIKA A OPTIKA 2015

# JEMNÁ MECHANIKA A OPTIKA

VĚDECKO-TECHNICKÝ ČASOPIS  
ROČNÍK 60 1/2015

## OBSAH

<b>Rozhovor s Bohdanem Růžičkou, organizátorem multioborové konference LASER 54</b> (M. Selingerová).....	3
<b>Speciální optická vlákna – srdce thuliových vláknových laserů a zesilovačů</b> (I. Kašík).....	4
<b>Seminář Aplikovaná optika a mikroskopie 2014</b> (J. Novák).....	7
<b>Metody ověřování kvality absorpčních květ plněných molekulárním jódem</b> (J. Hrabina, M. Šarbort, M. Holá, O. Číp, J. Lazar).....	8
<b>Kombinace elektronové litografie s gaussovským svazkem a s proměnným tvarovaným svazkem</b> (S. Krátký, M. Urbánek, J. Chlumská, M. Matějka, P. Meluzín, V. Kolařík, M. Horáček).....	10
<b>90. narozeniny RNDr. Miroslava Císaře</b> (A. Mikš).....	13
<b>Pokročilé interferometrické systémy pro měření polohy v nanometrologii</b> (J. Lazar, M. Holá, J. Hrabina, J. Oulehla, O. Číp, M. Vychodil, P. Sedlář, M. Provanžník).....	14
<b>Týden vědy a techniky 2014 v Ústavu přístrojové techniky AV ČR v Brně</b> (M. Selingerová).....	18
<b>Deformovatelné zrcadlo pro vysokovýkonové laserové aplikace</b> (L. Mrňa, M. Šarbort, M. Holá).....	19
<b>LED nebo laser pro biologické aplikace?</b> (M. Klečka).....	22
<b>Vliv výběru bodů z dané oblasti na stabilitu korelačního koeficientu při zpracování obrazových dat</b> (P. Kulmon).....	23
<b>Fluorescenční detekce emulzních mikrokápek s řízeným chemickým složením na mikrofluidním čipu</b> (Z. Pilát, J. Institoris, J. Ježek, J. Kaňka, P. Zemánek).....	26
<b>Přední čeští experti na lasery se již po čtvrté sešli v Třešti na konferenci LASER 54</b> (M. Selingerová).....	29
<b>Redukce šumu laserové diody s využitím nevyváženého vláknového interferometru</b> (M. Čížek, R. Šmíd, V. Hucl, M. T. Pham, B. Mikel, J. Lazar, O. Číp).....	30
<b>Přístrojová technika pro kontrolu optických součástí ve společnosti Meopta – optika, s.r.o.</b> (S. Michal).....	32
<b>Léčba světlem</b> (I. Gonová, O. Tůmová).....	41

Bližší informace o poslání časopisu, pokyny pro autory, obsah časopisu apod. je uveden na internetu: <http://jmo.fzu.cz/>

Informace o předplatném podá, objednávky přijímá, objednávky do zahraničí vyřizuje: SLO UP a FZÚ AV ČR, 17. listopadu 50, 772 07 Olomouc, tel.: 585 631 576, e-mail: eva.pelclova@upol.cz.

Cena čísla 40 Kč včetně DPH

## Vliv výběru bodů z dané oblasti na stabilitu korelačního koeficientu při zpracování obrazových dat

*V práci je analyzována korelace mezi dvěma funkcemi zadanými na diskrétní množině bodů. Je vyšetřován vliv počtu bodů a jejich rozložení v dané oblasti na stabilitu korelačního koeficientu. Dále jsou popsány metody různých způsobů volby rozložení těchto bodů v dané oblasti.*

### 1. ÚVOD

V praxi se velmi často vyskytuje úloha vzájemného srovnání dvou struktur, které charakterizují různé fyzikální situace. V oblasti optického průmyslu má prvořadou důležitost umět porovnat a vyhodnotit vlastnosti interferenčního pole (interferogramu) vzniklého interferencí dvou monochromatických vlnových polí, z nichž jedno vlnové pole známe (tzv. referenční pole) a druhé vlnové pole neznáme, ale potřebujeme určit jeho vlastnosti. Existuje řada metod, jak lze tuto informaci získat, čtenář se s nimi může seznámit např. v [1–3]. Vzhledem k tomu, že tyto metody jsou poměrně složité a některé z nich i experimentálně značně náročné, pokusme se pro analýzu vlastností vyšetřovaných vlnových polí použít korelační koeficient [4–6]. Jak je uvedeno v [7], korelační koeficient je jedním ze spolehlivých kritérií porovnání obrazů, které nachází široké uplatnění v experimentální mechanice a dalších oblastech vědy a techniky. Výhodou korelačního koeficientu je i jeho nezávislost na měřítku zobrazení. Vzhledem k tomu, že hodnotu intenzity vlnění (např. světla) v interferenčním poli můžeme změřit jen v řadě diskrétních bodů, je důležité zjistit, zda se tato diskretizace projeví na hodnotě korelačního koeficientu. V dalším textu na příkladu interference dvou monochromatických vlnových polí ukážeme vliv diskretizace na velikost korelačního koeficientu.

### 2. DVOUSVAZKOVÁ INTERFERENCE SVĚTLA

Nechť v oblasti jednotkového kruhu jsou dány dvě funkce  $I_i(x, y)$ ,  $i = 1, 2$ , které charakterizují rozdělení intenzity světla v interferenčním poli (interferogramu), platí [1–3]

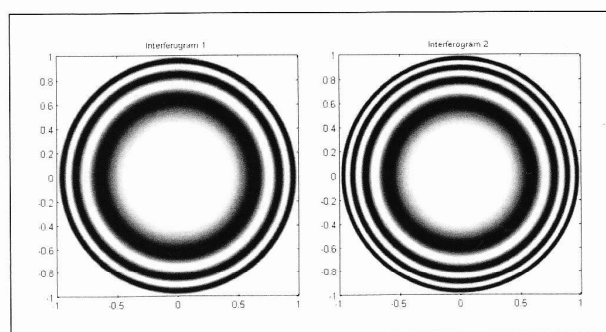
$$I_i(x, y) = 2[1 + \cos 2\pi W_i(x, y)], \quad i = 1, 2, \quad x^2 + y^2 < 1, \quad (1)$$

kde funkce  $2\pi W_i(x, y)$ , charakterizující rozdíl fází interferujících vlnových polí, je dána vztahem [1–3]

$$W_i = K_i + T_{xi}x + T_{yi}y + D_i(x^2 + y^2) + A_{ii}x^2 + A_{si}y^2 + C_i(x^2 + y^2)x + S_i(x^2 + y^2)^2. \quad (2)$$

kde hodnoty koeficientů ve vztahu (2) jsou vyjádřeny v násobcích vlnové délky světla interferujících vlnových polí. Předpokládejme pro jednoduchost, že koeficienty  $D_i$  a  $S_i$  mají následující hodnoty:  $D_1 = 0$ ,  $S_1 = 3$ ,  $D_2 = 0$ ,  $S_2 = 4$  a ostatní koeficienty ve vztahu (2) volíme rovny nule. Grafy obou interferogramů pro výše zvolené hodnoty koeficientů jsou na obr. 1.

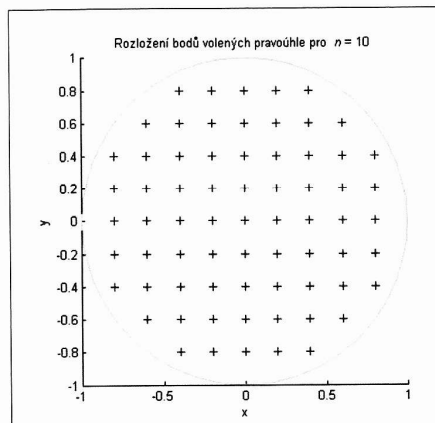
Naším cílem je spočítat korelační koeficient daných interferogramů co nejméně náročným způsobem a zároveň co nejpřesněji. Předpokládejme, že známe rozdělení intenzity světla v diskrétních bodech jednotkového kruhu (v praxi nejčastěji se vyskytující případ). Vyšetřeme, jaký vliv bude mít tato diskretizace na hodnotu korelačního koeficientu.



Obr. 1 Interferogramy pro  $D_1 = 0$ ,  $S_1 = 3$ ,  $D_2 = 0$ ,  $S_2 = 4$

### 3. METODY VOLBY BODŮ

Patrně nejlepší volbou se zdá být dělení oblasti v nějaké čtvercové mřížce dané parametrem  $n$ . Potom pro danou oblast, nacházející se v obalovém obdélníku  $[x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}]$ , volíme  $n^2$  bodů, v nichž zjišťujeme požadovanou charakteristiku (v našem případě hodnotu intenzity světla v interferogramu). Samozřejmě do dané oblasti, není-li shodná s obalovým obdélníkem, padne jen určitý počet bodů. I přesto se však pravidelnost dělení zachová, až na hranici. V případě oblasti ve tvaru kruhu zajistíme, aby se uvnitř nacházelo  $n^2$  bodů tak, že stanovíme hodnotu parametru  $2n/\sqrt{\pi}$ . V hraničních oblastech platí, že plocha při hranici je menší nebo rovna plochám pravidelného dělení. Ukázka takového dělení pro  $n = 10$  je na obr. 2. Toto rozložení bodů budeme dále nazývat čtvercové.



Obr. 2 Pravoúhlá volba bodů pro  $n = 10$

Další metodou, zakládající se na pravidelném dělení oblasti, je volba bodů tak, aby velikost ploch mezi nimi byla konstantní na celé oblasti. Tuto podmínku splňuje, až na hranici, již předchozí zmíněné dělení. Pracujeme-li nad kruhovou oblastí, můžeme při dělení využít polární souřadnice. Pro výpočet plochy  $S$  kruhové výšeče s úhlem  $\alpha$  v radiánech a poloměrem  $r$  platí vztah [4]

$$S = \frac{1}{2} \alpha r^2. \quad (3)$$

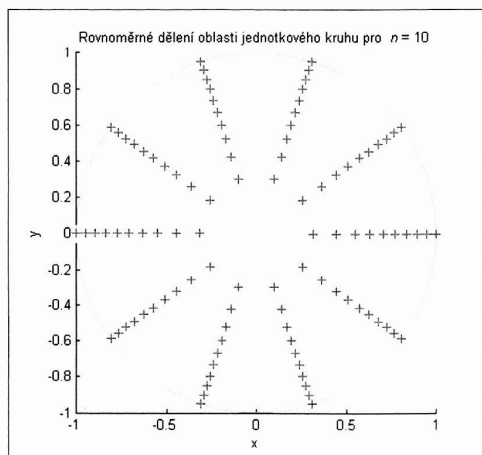
Máme-li tedy kruh o poloměru  $R$ , a chceme-li ho rozdělit na  $n$  stejně velkých výšek mezikružím, potom podle vztahu (3) pro  $i$ -tý výšek mezikružím platí

$$S_{i+1} - S_i = \frac{1}{2} \alpha (r_{i+1}^2 - r_i^2) = S_1 = \frac{1}{2} \alpha r_1^2, \quad (4)$$

kde  $r_1 = R/\sqrt{n}$  je poloměr první kruhové výšeče o ploše  $S_1$ . Napíšeme-li vztah (4) pro  $i = 1, 2, \dots, j-1$  a takto získané vztahy sečteme, potom pro poloměr  $j$ -té kruhové výšeče dostáváme

$$r_j = R\sqrt{j/n}. \quad (5)$$

Je zřejmé, že podmínka pro velikosti ploch nezávisí na úhlu výšeče, dělení druhé polární souřadnice můžeme opět volit rovnoměrné, například rozdělením intervalu  $(0, 2\pi)$  na  $n$  úseků. Ukázka takového dělení pro  $n = 10$  nad oblastí je na obr. 3. Toto rozložení bodů označíme jako kruhové.



Obr. 3 Kruhová volba bodů pro  $n = 10$

V praxi se také mohou vyskytnout případy, kdy nemůžeme ovlivnit polohu  $n^2$  bodů, které máme k dispozici v dané oblasti. Takovou situaci lze modelovat například pomocí generátoru pseudonáhodných čísel s rovnoměrným rozdělením, jehož hustota pravděpodobnosti je dána

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2h}, & \text{pro } \mu - h < x < \mu + h \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}, \quad (6)$$

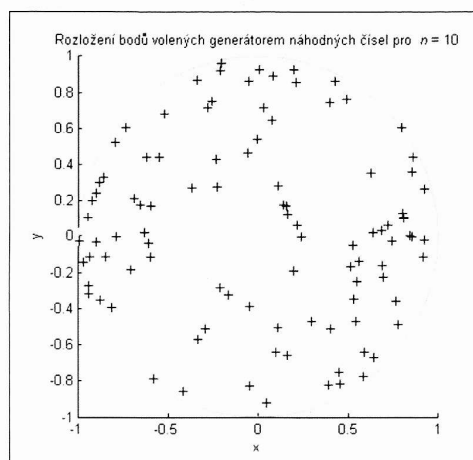
kde  $\mu \in (-\infty, \infty)$  a parametr  $h \in (0, \infty)$ .

Jedná se tedy o nezávislou volbu každé dvojice souřadnic  $x, y$  pomocí generátoru pseudonáhodných čísel. V takovém případě mají rovnice pro volbu souřadnic tvar

$$x_{i,j} = R(2 \cdot \text{rand} - 1), \quad (7)$$

$$y_{i,j} = \sqrt{R^2 - x_{i,j}^2} (2 \cdot \text{rand} - 1), \quad (8)$$

kde  $i = 1, 2, \dots, n$  a  $j = 1, 2, \dots, n$ . Rozložení takto volených bodů pro  $n = 10$  je na obr. 4. Rozložení bodů podle rovnoměrného rozdělení budeme nadále nazývat rovnoměrné.



Obr. 4 Náhodná volba bodů pro  $n = 10$

Softwary používané v dnešní době pro vědeckotechnické výpočty mají zabudovaný generátor pseudonáhodných čísel nejen s rovnoměrným, ale také s normálním rozdělením, jež je dáno svou hustotou pravděpodobnosti

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (9)$$

kde parametr  $\mu$  je střední hodnota a  $\sigma^2$  variance normálního rozdělení, které značíme  $N(\mu, \sigma^2)$ , a proměnná  $x \in (-\infty, \infty)$ . Běžné generátory náhodných čísel s normálním rozdělením jsou schopny generovat pouze čísla  $\alpha \sim N(0, 1)$ , která lze převést na  $b \sim N(\mu, \sigma^2)$  pomocí vztahu

$$\beta = \mu + \sigma\alpha. \quad (10)$$

Rozložení bodů volené pomocí generátoru náhodných čísel s normálním rozdělením budeme nadále označovat jako normální.

#### 4. KORELAČNÍ KOEFICIENT

Korelační koeficient je široce používaná statistická veličina. O vlastnostech korelačního koeficientu je podrobně pojednáno například v [4-6]. Pro výpočet korelačního koeficientu lze použít následující vztah [4-6]

$$\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}, \quad (11)$$

kde  $\sigma_{xy}$  značí kovarianci veličin  $x, y$  a  $\sigma_x, \text{ resp. } \sigma_y$  značí odmocninu z variance veličiny  $x, \text{ resp. } y$ . Odmocnina z variance se nazývá směrodatná odchylka. V případě, že máme k dispozici soubor diskretních dat, můžeme spočítat výběrový korelační koeficient ze vztahu [4-6]

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}. \quad (12)$$

Zmíněné předpoklady o veličinách, pro něž počítáme hodnotu korelačního koeficientu, bývají v technických aplikacích v drtivé většině splněny, například se jedná o veličiny ryze kvantitativní. Jedním z řídicí zmiňovaných požadavků je, že výběr hodnot by měl pocházet z normálního rozdělení. V následujícím ukážeme závažnost tohoto předpokladu.

#### 4. PŘÍKLADY

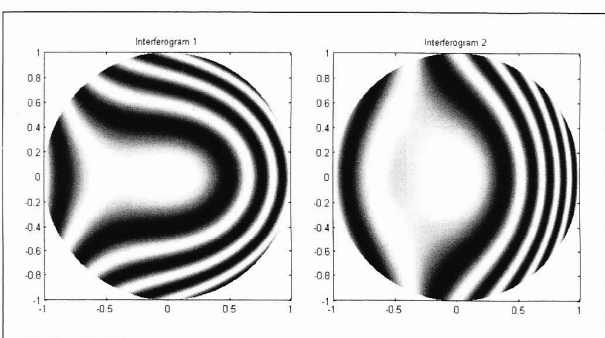
Ukažme nyní na dvou příkladech vliv počtu a rozložení bodů na hodnotu korelačního koeficientu. Uvažujme, že máme dvě dvojice interferogramů řídicí se předpisem z druhého odstavce. V případě první dvojice je rozložení intenzity v interferogramech popsáno rotačně symetrickou funkcí (obr. 1) a v případě druhé dvojice se jedná o nesymetrickou funkci (obr. 5). Zabýváme se hodnotou korelačního koeficientu jednotlivých dvojic interferogramů. Výsledná hodnota korelačního koeficientu bude spočtena ze vztahu (12), neboť uvažujeme pouze diskrétní výběr bodů z dané oblasti, na níž jsou funkce definovány. Výpočet provedeme s uvážením pravidelného i náhodného rozložení bodů v oblasti tak, jak bylo uvedeno v třetím odstavci. Hodnoty korelačního koeficientu první dvojice interferogramů pro jednotlivá rozložení a různě volené hodnoty  $n$ , jsou uvedeny v tabulce 1. Korelační koeficient byl počítán pro interferogramy s parametry z odstavce 2.

Tabulka 1

$D_1 = 0, S_1 = 3, D_2 = 0, S_2 = 4$				
$n$ /rozložení	čtvercové	kruhové	rovnoměrné	normální
10	0,29133	0,03237	0,35970	0,25461
50	0,28583	0,28585	0,26935	0,29240
100	0,28383	0,28585	0,27451	0,27624
200	0,28551	0,28585	0,26461	0,28466
1500	0,28584	0,28585	0,25447	0,28693

Je zřejmé že hodnoty vypočtené pro body volené rovnoměrným či normálním rozdělením se při dalších simulacích mohou lišit. Ze získaných hodnot je dále vidět, že ačkoli pro vyšší hodnoty  $n$  dávají pravidelná dělení stejné výsledky jako z normálního rozdělení, při nižších hodnotách mohou být rozdíly dosti velké. Dále je vidět závažná věc, totiž, že pokud volíme body náhodně, je nutné vždy zaručit, že tyto body budou mít normální rozdělení. Je vidět, že třetí sloupec tabulky ani pro vysoká  $n$  nedosahuje stejných hodnot jako ostatní způsoby dělení. Je zřejmé, že vliv na hodnotu korelačního koeficientu bude mít také složitost interferogramu.

V případě druhé dvojice interferogramů volíme pro koeficienty ve vztahu (2) následující hodnoty:  $A_{r1} = 1, A_{s1} = 3, C_1 = 2, A_{r2} = 2, A_{s2} = 1, C_2 = 3$  a ostatní koeficienty jsou nulové. Interferogramy pro tento případ jsou zjevně složitější, neboť nejsou tvořeny jen interferenčními proužky ve tvaru soustředných kružnic, jak je patrné z obr. 5. Hodnoty korelačních koeficientů, vypočtených pro tyto interferogramy a pro různé hodnoty  $n$ , jsou uvedeny v tabulce 2.



Obr. 5 Interferogramy pro  $A_{r1} = 1, A_{s1} = 3, C_1 = 2, A_{r2} = 2, A_{s2} = 1, C_2 = 3$

Tabulka 2

$A_{r1} = 1, A_{s1} = 3, C_1 = 2, A_{r2} = 2, A_{s2} = 1, C_2 = 3$				
$n$ /rozložení	čtvercové	kruhové	rovnoměrné	normální
10	0,26609	0,03854	0,27910	0,09136
50	0,17220	0,16376	0,18578	0,19746
100	0,17298	0,16914	0,19923	0,17636
200	0,17413	0,17183	0,18824	0,17603
1500	0,17451	0,17417	0,18883	0,17497

#### 5. ZÁVĚR

Byla analyzována korelace mezi dvěma funkcemi, jejichž hodnoty známe na diskrétní množině bodů v určité oblasti. Byl vyšetřován vliv počtu bodů a jejich rozložení na stabilitu korelačního koeficientu. Dále byly popsány metody různých způsobů volby rozložení bodů v dané oblasti. V souvislosti s těmito metodami byly popsány metody generování bodů v pravidelných „sítích“ a volby bodů pomocí generátorů náhodných čísel s rovnoměrným a normálním rozdělením. Výsledky této analýzy pak byly využity k výpočtu korelačních koeficientů mezi dvěma vyšetřovanými interferogramy.

Z výsledků je patrné, že při jakémkoli použití korelačního koeficientu, nemáme-li přímý vliv na pravidelnost volby bodů, v kterých známe hodnoty vyšetřovaných funkcí, je nutné ověřit předpoklad, zda data, se kterými pracujeme, opravdu pocházejí z normálního rozdělení. Také je nutno zajistit dostatečně velký počet bodů, v kterých známe hodnoty vyšetřovaných funkcí.

*Práce byla vypracována za podpory grantu SGS14/110/OH-K1/2T/11 Českého vysokého učení technického v Praze.*

#### Literatura

- [1] D. Malacara, *Optical Shop Testing*, New York: John Wiley & Sons, 2007.
- [2] A. Mikš, „Interferometrické metody vyhodnocování sférických ploch v optice“, *Jemná mechanika a optika*, 46, č.1, 29-35 (2001).
- [3] P. Hariharan, *Optical Interferometry*, Academic Press, 2003.
- [4] K. Rektorys, *Přehled užité matematiky I, II*, Prometheus, Praha 2010.
- [5] M. Meloun, J. Militký, *Statistická analýza experimentálních dat*, Academia, Praha 2004.
- [6] J. Likš, J. Machek, *Počet pravděpodobnosti*. Praha: SNTL, 1982.
- [7] M. A. Sutton, J. Ortu a H. W. Schreier. *Image correlation for shape, motion and deformation measurements: basic concepts, theory and applications*. New York, N.Y.: Springer, c2009.

Bc. Pavel Kulmon, katedra fyziky, Fakulta stavební ČVUT, Thákurova 7, 166 29 Praha 6, e-mail: pavel.kulmon@fsv.cvut.cz

*Jedná se o vědecký článek*

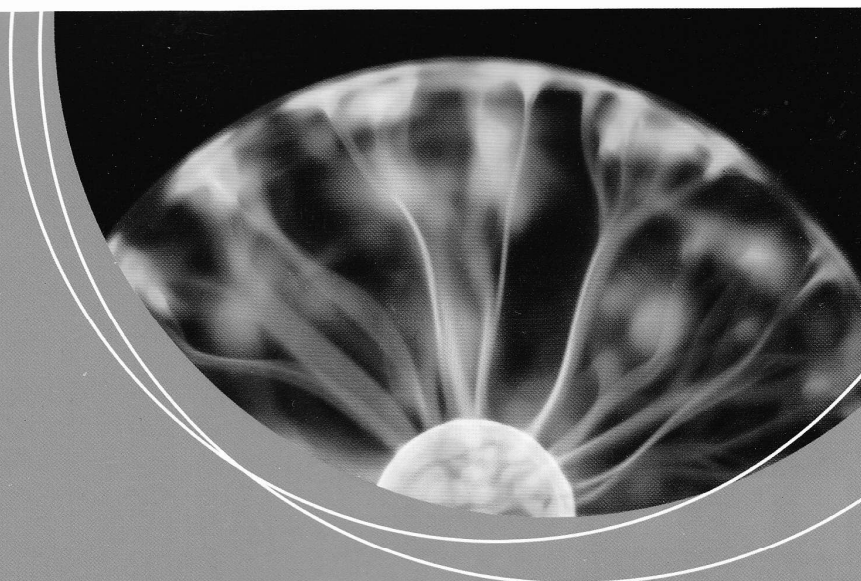
B.4 Článek: Tři způsoby výpočtu difrakce světla na otvoru  
[11]

**3**  
**2016**

# JMO

## JEMNÁ MECHANIKA A OPTIKA

### FINE MECHANICS AND OPTICS



# FOR ENERGO®

5. MEZINÁRODNÍ VELETRH VÝROBY, ROZVODU A UŽITÍ ENERGIE

SOUBĚŽNĚ PROBÍHAJÍCÍ VELETRHY

**FOR INDUSTRY**  
**FOR LOGISTIC**  
**FOR 3D**  
**FOR INFOSYS**



**PVA**  
**EXPO PRAHA**

[www.forenergo.cz](http://www.forenergo.cz)

**10.–13. 5. 2016**

ISSN 0447-5441  
Index 46 723

GENERÁLNÍ PARTNER



SKUPINA ČEZ

PARTNER



**Skupina ÚJV**  
TECHNOLOGIE | INOVACE | LIDÉ

## REDAKČNÍ RADA

**Předseda:** RNDr. Miloslav VYCHODIL, CSc., Meopta-optika, s.r.o., Přerov, mobil: 731 439 380

**Členové:** RNDr. Ing. Ján BARTL, CSc., ÚMSAV, Bratislava, prof. RNDr. Dr. Zdeněk BOUCHAL, UP, Olomouc, doc. RNDr. Monika BOŽÍKOVÁ, Ph.D., SPU, Nitra, Ing. Ondřej ČÍP, Ph.D., UPT AV ČR, v.v.i., Brno, Ing. Alexandr DEJNEKA, Ph.D., FZÚ AV ČR, v.v.i., Praha; RNDr. Ivana GREBEŇOVÁ, Meopta-optika, s.r.o., Přerov; doc. RNDr. Ondřej HADERKA, Ph.D., SLO UP a FZÚ AV ČR, Olomouc, prof. Ing. Pavol HORŇÁK, DrSc., STU, Bratislava, doc. Ing. Jan HOŠEK, Ph.D., ČVUT Praha, prof. RNDr. Miroslav HRABOVSKÝ, DrSc., SLO UP a FZÚ AV ČR, Olomouc, RNDr. Vladimír CHLUP, Olomouc, RNDr. Lubomír JASTRABÍK, CSc., FZÚ AV ČR, v.v.i., Praha, RNDr. Pavel KLENOVSKÝ, Český metrologický institut, Brno, Ing. Jiří KRŠEK, VUT, Brno, doc. RNDr. Vojtěch KRÉSÁLEK, CSc., UTB, Zlín, Ing. Jan KŮR, Mesing, spol. s r.o., Brno, prof. Ing. Martin LIBRA, CSc., ČZU, PRAHA, prof. RNDr. Miroslav LIŠKA, DrSc., VUT, Brno, RNDr. Zdeněk LOŠTÁK, Meopta-optika, s.r.o., Přerov, prof. Ing. Petr LOUDA, CSc., TU, Liberec, doc. RNDr. Miroslav MILER, DrSc., ÚFE AV ČR, v.v.i., Praha, prof. Ing. Jiří NOVÁK, Ph.D. ČVUT, Praha, prof. RNDr. Jan PEŘINA, DrSc., UP, Olomouc, Mgr. Sylvie PETROVÁ, LF MU, Brno, prof. Ing. Jaromír PIŠTORA, CSc., VSB - TU, Ostrava, RNDr. Michael PROUZA, Ph.D., FZÚ AV ČR, v.v.i., Praha, RNDr. Dagmar SENDERÁKOVÁ, Ph.D., UK, Bratislava, RNDr. Petr SCHOVÁNEK, SLO UP a FZÚ AV ČR, Olomouc, prof. RNDr. Anton ŠTRBA, CSc., UK, Bratislava, doc. Ing. Olga TŮMOVÁ, CSc., Západočeská univerzita, Plzeň. Čestný člen Ing. Zdeněk MARTÍNEK, Nové město nad Metují

Gerd HÄUSLER, Lehrstuhl für Optik, Universität Erlangen - Nürnberg, Erlangen (Germany), Michael J. LALOR, Liverpool John Moores University, U. K.; Paul RAUSNITZ, TCI New York, U. S. A.; Rodney J. SOUKUP, University of Nebraska-Lincoln, U. S. A.; M. C. TEICH, Boston University, U. S. A.; Emil WOLF, University of Rochester, U. S. A.

## JEMNÁ MECHANIKA A OPTIKA

Vydává Fyzikální ústav Akademie věd České republiky, v.v.i. za spoluúčasti SPIE, the international society for optics and photonics v Nakladatelství Fyzikálního ústavu Akademie věd České republiky, v.v.i.

**Ředitel FZÚ AV ČR, v.v.i.:** prof. Jan ŘÍDKÝ, DrSc.

**Odpovědný zástupce vydavatele:** prof. RNDr. Miroslav HRABOVSKÝ, DrSc.

**Šéfredaktor:** dipl. tech. Jaroslav NEVŘALA

**Adresa redakce v Olomouci** (předplatné, nakladatelské služby):

SLO UP a FZÚ AV ČR, 17. listopadu 50, 772 07 Olomouc,

tel.: 585 631 576, fax: 585 631 531, e-mail: eva.pelclova@upol.cz

**Adresa redakce v Přerově** (šéfredaktor): Kabelíkova 1, 750 02 Přerov,

mobil: 776 011 925, e-mail: eva.pelclova@upol.cz

Otisk povolen se svolením redakce a se zachováním autorských práv. Nevyžádané materiály se nevrací. Za původnost a správnost příspěvků odpovídají autoři.

**Vychází:** 10x ročně (z toho 2 čísla jako dvojčísla)

**Předplatné:** Celoroční 420,- Kč/rok. Ceny jsou jednotné pro Českou i Slovenskou republiku. Do všech ostatních zemí je časopis JMO distribuován za jednotnou cenu 10 EUR/ks. Pro členy SPIE/CS činí předplatné 120,- Kč/rok. Předplatné pro studenty Bc., Mgr., Ph.D. a studenty středních škol při osobním odběru činí 120 Kč/rok; v případě zaslání poštou 300,- Kč/rok.

**Rozšiřuje** vydavatel a Podniková prodejna Meopta-optika, s.r.o., Přerov, Kabelíkova 1, 750 02 Přerov.

**V Slovenské republice je kontaktní místo:** RNDr. Dagmar Senderáková, Ph.D., katedra experimentální fyziky FMFI UK, Mlynská dolina F2/149, SK-842 48 Bratislava, tel. 00421 260 295 391, e-mail: senderakova@fmph.uniba.sk

**V Slovenské republice rozšiřuje a objednávky přijímá:**

prof. Ing. Ivo Čáp, CSc., JSMF pobočka Žilina, ul. 1. mája 32, 010 01 Žilina, e-mail: ivo.cap@fel.uniza.sk

**Tiskne** TYPoServis Holešov, Masarykova 650, 769 01 Holešov,

tel.: 573 398 746, e-mail: dtp@typoservis.cz

**Inzerce:** redakce, Kabelíkova 1, 750 02 Přerov,

tel.: 581 243 441, mobil: 776 011 925, e-mail: eva.pelclova@upol.cz

Odborné články jsou lektorovány.

© JEMNÁ MECHANIKA A OPTIKA 2016

# JEMNÁ MECHANIKA A OPTIKA

VĚDECKO-TECHNICKÝ ČASOPIS  
ROČNÍK 61

3/2016

## OBSAH

### Souřadnicové a víceosé interferometrické systémy

(J. Lazar, M. Holá, J. Hrabina, J. Oulehla, O. Čípa, M. Vychodil, P. Sedlář, M. Provazník)..... 63

### Vývoj technologie výroby optických prvků pro vláknové diodou čerpané lasery

(M. Possolt, M. Veselý, L. Steiger, T. Vít) ..... 66

### Příspěvek k lomovému chování dvouvrstvých vláknových kompozitů s kombinací vláken

(K. Dadourek, M. Jelínková) ..... 70

### Pokročilé konstrukce mírného koncentrátoru záření pro fotovoltaické systémy (V. Poulek, M. Libra, A. Khudysh)..... 73

### Úprava otvoru sloupku pro kinematicky tuhé upevnění tyčky (M. Miler) ..... 76

**Termín ledka se vžívá!** (M. Miler) ..... 77

### SPIE Optifab a QED UGM meeting Rochester, N. Y., USA (12.–16. 10. 2015)

(P. Provazníková, D. Macošek, S. Michal ml) ..... 78

### Tři způsoby popisu difrakce světla na otvoru

(P. Kulmon, A. Mikš) ..... 79

### Vyhodnocení tvaru profilu v zariadení svetelného rezu

(M. Hain, J. Bartl) ..... 82

### Optické testování Webbova dalekohledu bude uzavřeno; konstrukce pokročila (M. Miler) ..... 85

**Umělá elastická vnitrooční čočka** (M. Miler) ..... 86

### Pokročilý Michelsonův interferometr i při detekci gravitačních vln (M. Miler) ..... 86

### R.S. Sirohi: Introduction to Optical Metrology. CRC Press Taylor & Francis Group, 2016. ISBN 978-1-4822-3610-1

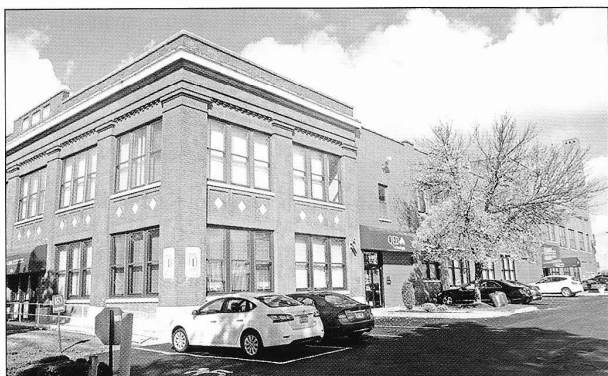
(M. Miler) ..... 87

Bližší informace o poslání časopisu, pokyny pro autory, obsah časopisu apod. je uveden na internetu: <http://jmo.fzu.cz/>

Informace o předplatném podá, objednávky přijímá, objednávky do zahraničí vyřizuje: SLO UP a FZÚ AV ČR, 17. listopadu 50, 772 07 Olomouc, tel.: 585 631 576, e-mail: eva.pelclova@upol.cz.

Cena čísla 40 Kč včetně DPH





Obr. 3

nách. Jednalo se o praktický „hands-on“ trénink, kde pod vedením lektorů byla možnost vyzkoušet si práci s inovovaným vybavením. Konkrétně s novým softwarem pro analýzu metrologických dat, s prezentovaným korekčním strojem Qflex 300. Zároveň byla možnost řešit praktické problémy, vzniklé během naší vývojové i výrobní práce na zařízeních QED v Meoptě (obr. 3).

V závěru našeho příspěvku nám dovoluje upřímně poděkovat vedení společnosti Meopta-optika za uskutečnění této cenné pracovní cesty. Měli jsme velkou příležitost nejen obohatit a rozvinout své pracovní zkušenosti, ale seznámit se i s řadou zajímavých lidí z optické branže. Při pracovních jednáních i společenských příležitostech jsme se vždy setkali s otevřeným myšlením, upřímným zájmem, pozorností a kolegií.

Ing. Pavlína Provažníková, David Macošek,  
Mgr. Stanislav Michal ml.

Kontakt: Mgr. Stanislav Michal ml., Meopta – optika, s. r. o., Kabelkova 1, 750 02 Přerov, tel.: 581 242 454,  
e-mail: Stanislav.Michal12@meopta.com

Pavel KULMON, Antonín MIKŠ  
České vysoké učení technické v Praze, Fakulta stavební, katedra fyziky, Praha

## Tři způsoby popisu difrakce světla na otvoru

*Práce pojednává o difrakci elektromagnetického záření na otvoru v neprůhledném stínítku. Jsou uvedeny tři nejužívanější způsoby popisu této problematiky s příslušnými obecnými vztahy, které umožňují výpočet vektorů intenzity elektrického a magnetického pole.*

### 1. ÚVOD

Světlo je elektromagnetické záření, jehož šíření prostorem a časem se řídí Maxwellovými rovnicemi [1–6]. Difrakce světla [1–25], zaujímající významné místo v teorii elektromagnetického pole, má rozsáhlé praktické uplatnění v řadě oblastí vědy a techniky. Fundamentální roli hraje zejména v oblasti radiokomunikací a v teorii optického zobrazení. Široké uplatnění též nachází v optické metrologii, kosmické geodézii a v dalších oblastech vědy a techniky. Předpokládáme, že prostředí, kterým se šíří elektromagnetické pole, je homogenní a izotropní, což je případ, který se v optické praxi vyskytuje nejčastěji. Elektromagnetické pole, šířící se prostorem ve formě elektromagnetických vln, je charakterizováno vektorem intenzity elektrického pole  $E(r,t)$  a vektorem intenzity magnetického pole  $H(r,t)$ , kde  $r = (x, y, z)$  je polohový vektor a  $t$  značí čas [1–6]. V řadě případů v optice nemusíme k vektorové povaze elektromagnetického pole přihlížet a vystačíme s jeho skalárním popisem [26]. Ten poskytuje obdivuhodně přesné výsledky např. v teorii optického zobrazení s přirozeným světlem, jak je tomu ve fotografické technice, v řadě oblastí mikroskopie, projekční technice, astronomii apod. Podrobnější informace nalezne čtenář např. v knihách [1–4, 9–12].

Kritický přehled problematiky difrakce světla je uveden v [9–19]. Cílem této práce je seznámit čtenáře s třemi nejčastěji používanými způsoby řešení problematiky difrakce světla.

### 1. PŘÍMÉ ŘEŠENÍ MAXWELLOVÝCH ROVNIC

Jedním ze způsobů řešení problematiky šíření elektromagnetického pole je přímá integrace Maxwellových rovnic, kterou lze provést několika způsoby. Ukažme zde jeden z nich, kdy se pro jednoduchost omezíme na prostředí bez nábojů a proudů (nejčastější případ v optice) a uvažujeme časově proměnné harmonické pole, tj.

$$E(r, t) = E_0(r)\exp(-i\omega t), \quad (1)$$

obdobně pro intenzitu magnetického pole  $H(r,t)$ . Za těchto předpokladů se Maxwellovy rovnice [1, 3, 5, 6] zjednoduší na tvar

$$\text{rot } H(r) = -i\omega \epsilon E(r), \quad \text{rot } E(r) = i\omega \mu H(r), \quad \text{div } E(r) = 0, \quad \text{div } H(r) = 0 \quad (2)$$

kde  $\omega$  je úhlová frekvence,  $\mu$  je permeabilita a  $\varepsilon$  permitivita prostředí, kterým se záření šíří, a  $i = \sqrt{-1}$  je imaginární jednotka. Dále jsme pro zjednodušení označení vynechali u všech vektorů ve vztazích (2) index „0“, majíce na mysli, že se jedná o prostorové závislou složku vektorů pole, jak je patrné ze vztahu (1).

Přímým řešením Maxwellových rovnic (2) dostáváme pro složky vektorů  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{H}$  následující vztahy [1]

$$\begin{aligned} E_x(P) &= -\frac{1}{2\pi} \iint_{S_M} \gamma E_x(M) \frac{\exp(ikr_{PM})}{r_{PM}} \left( \frac{1}{r_{PM}} - ik \right) dx_M dy_M, \\ E_y(P) &= -\frac{1}{2\pi} \iint_{S_M} \gamma E_y(M) \frac{\exp(ikr_{PM})}{r_{PM}} \left( \frac{1}{r_{PM}} - ik \right) dx_M dy_M, \\ E_z(P) &= \frac{1}{2\pi} \iint_{S_M} \left[ \alpha E_x(M) + \beta E_y(M) \right] \frac{\exp(ikr_{PM})}{r_{PM}} \left( \frac{1}{r_{PM}} - ik \right) dx_M dy_M, \end{aligned} \quad (3)$$

$$H_x(P) = \frac{1}{2\pi i\omega\mu} \iint_{S_M} \left[ \frac{\exp(ikr_{PM})}{r_{PM}} \left( k^2 + \frac{3ik}{r_{PM}} - \frac{3}{r_{PM}^2} \right) \left[ \alpha\beta E_x(M) + \beta^2 E_y(M) + \gamma^2 E_z(M) \right] + 2E_z(M) \frac{\exp(ikr_{PM})}{r_{PM}^2} \left( \frac{1}{r_{PM}} - ik \right) \right] dx_M dy_M,$$

$$H_y(P) = -\frac{1}{2\pi i\omega\mu} \iint_{S_M} \left[ \frac{\exp(ikr_{PM})}{r_{PM}} \left( k^2 + \frac{3ik}{r_{PM}} - \frac{3}{r_{PM}^2} \right) \left[ \gamma^2 E_x(M) + \alpha^2 E_y(M) + \alpha\beta E_z(M) \right] + 2E_x(M) \frac{\exp(ikr_{PM})}{r_{PM}^2} \left( \frac{1}{r_{PM}} - ik \right) \right] dx_M dy_M,$$

$$H_z(P) = -\frac{1}{2\pi i\omega\mu} \iint_{S_M} \left[ \frac{\exp(ikr_{PM})}{r_{PM}} \left( k^2 + \frac{3ik}{r_{PM}} - \frac{3}{r_{PM}^2} \right) \left[ \alpha\gamma E_x(M) - \beta\gamma E_y(M) \right] \right] dx_M dy_M,$$

kde  $P(x_p, y_p, z_p)$  je bod, v kterém vyšetřujeme pole,  $M(x_M, y_M, z_M)$  značí bod roviny  $z_M = 0$ , na které známe rozložení pole,  $k$  je vlnové číslo,  $r_{PM}$  je vzdálenost bodu  $P$  od bodu  $M$  a  $S_M$  je část roviny  $Z_M$ , na které je pole nenulové. Dále pak

$$\alpha = \left( \frac{x_p - x_M}{r_{PM}} \right), \quad \beta = \left( \frac{y_p - y_M}{r_{PM}} \right), \quad \gamma = \left( \frac{z_p}{r_{PM}} \right), \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \quad (4)$$

jsou směrové kosiny vektoru  $\mathbf{r}_{MP} = \overline{MP}$ . Jak se přesvědčíme přímým dosazením, splňují vztahy (3) Maxwellovy rovnice a jsou tedy jejich obecným řešením. Podrobnější informace a odvození vztahů (3) najde čtenář v práci [1].

## 2. SPEKTRUM ROVINNÝCH VLN

Další způsob řešení problematiky šíření elektromagnetického pole je založen na Fourierově analýze vyšetřovaného vlnového pole. Ztotožníme-li jednotlivé prostorové fourierovské složky s rovinnými vlnami šířícími se různými směry, potom výsledné pole získáme jako superpozici těchto rovinných vln [2, 4, 11, 27]. Označme

$$A_x(p, q) = \frac{1}{\lambda^2} \exp(-ikmz_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E_x(x, y, z_0) \exp[-ik(px + qy)] dx dy, \quad (5)$$

$$A_y(p, q) = \frac{1}{\lambda^2} \exp(-ikmz_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E_y(x, y, z_0) \exp[-ik(px + qy)] dx dy.$$

Elektromagnetické pole je tedy zcela určeno, známe-li pole  $E_x(x, y, z_0)$  a  $E_y(x, y, z_0)$  v rovině  $z = z_0$  nebo ekvivalentně pomocí  $A_x(p, q)$  a  $A_y(p, q)$ .

Pro složky vektoru intenzity elektrického a magnetického pole pak platí [27]

$$\begin{aligned} E_x(P) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A_x(p, q) \exp[ik(px + qy + mz)] dp dq, \\ E_y(P) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A_y(p, q) \exp[ik(px + qy + mz)] dp dq, \\ E_z(P) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{p}{m} A_x(p, q) + \frac{q}{m} A_y(p, q) \right] \exp[ik(px + qy + mz)] dp dq. \end{aligned} \quad (6)$$

$$H_x(P) = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{pq}{m} A_x(p, q) + \frac{1-p^2}{m} A_y(p, q) \right] \exp[ik(px + qy + mz)] dp dq,$$

$$H_y(P) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1-q^2}{m} A_x(p, q) + \frac{pq}{m} A_y(p, q) \right] \exp[ik(px + qy + mz)] dp dq,$$

$$H_z(P) = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [qA_x(p, q) - pA_y(p, q)] \exp[ik(px + qy + mz)] dp dq,$$

kde

$$m = \sqrt{1 - p^2 - q^2} \quad \text{pro } p^2 + q^2 \leq 1,$$

$$m = i\sqrt{p^2 + q^2 - 1} \quad \text{pro } p^2 + q^2 > 1.$$

Vztahy (5) a (6) jsou tedy reprezentacemi elektromagnetického pole pomocí úhlového spektra rovinných vln.

## 3. STRATTONOVY-CHUOVY VZTAHY

Dalším z obecných prostředků pro analýzu elektromagnetických problémů je integrální řešení Maxwellových rovnic, jak jej formulovali Stratton a Chu [5, 28]. Tito autoři použili vektorovou Greenovu větu pro získání vektorů  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{H}$ . Nebudeme zde zabíhat do matematických detailů a uvedeme jen výsledné vztahy užívané pro výpočet difrakce světla, pro hlubší studium odkazujeme na práci [5, 28].

Předpokládáme, že známe vektory  $\mathbf{E}_M$  a  $\mathbf{H}_M$  na ploše  $S_M$ , pak pole v obecném bodě  $P$  prostoru za plochou  $S_M$  je dáno následujícími vztahy

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(P) &= -\frac{1}{4\pi i\omega\varepsilon} \oint_C \nabla\psi \mathbf{H}_M \cdot d\mathbf{s} - \frac{1}{4\pi} \int_{S_M} [i\omega\mu(\mathbf{n} \times \mathbf{H}_M)\psi + (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_M) \times \nabla\psi + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_M) \nabla\psi] dS_M \\ &= -\frac{1}{4\pi i\omega\varepsilon} \oint_C \nabla\psi \mathbf{H}_M \cdot d\mathbf{s} + \frac{1}{4\pi} \oint_C \psi \mathbf{E}_M \times d\mathbf{s} - \frac{1}{4\pi} \int_{S_M} \left( \mathbf{E}_M \frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial\mathbf{E}_M}{\partial n} \right) dS_M, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(P) &= \frac{1}{4\pi i\omega\mu} \oint_C \nabla\psi \mathbf{E}_M \cdot d\mathbf{s} + \frac{1}{4\pi} \int_{S_M} [i\omega\varepsilon(\mathbf{n} \times \mathbf{E}_M)\psi - (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_M) \times \nabla\psi - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_M) \nabla\psi] dS_M \\ &= \frac{1}{4\pi i\omega\mu} \oint_C \nabla\psi \mathbf{E}_M \cdot d\mathbf{s} + \frac{1}{4\pi} \oint_C \psi \mathbf{H}_M \times d\mathbf{s} - \frac{1}{4\pi} \int_{S_M} \left( \mathbf{H}_M \frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial\mathbf{H}_M}{\partial n} \right) dS_M, \end{aligned}$$

kde  $d\mathbf{s}$  je element oblouku uzavřené křivky  $C$  okraje plochy  $S_M$ ,  $\mathbf{n}$  je vektor kladné normály k ploše  $S_M$  a  $\nabla$  značí Hamiltonův operátor (nabla), působící na souřadnice, podle kterých se integruje (bod  $M$ ). Funkce  $\psi$  popisuje sférickou divergentní (rozbíhavou) vlnu a má tvar

$$\psi = \frac{\exp(ikr_{PM})}{r_{PM}}, \quad \nabla \psi = \frac{\exp(ikr_{PM})}{r_{PM}} \left( \frac{1}{r_{PM}} - ik \right) \mathbf{r}_{0PM} \quad (8)$$

kde  $r_{PM}$  je vzdálenost obecného bodu  $M$  na ploše  $S_M$  od bodu  $P$  a  $\mathbf{r}_{0PM}$  je jednotkový vektor ve směru  $\overline{MP}$ .

#### 4. ZÁVĚR

V článku byly ve stručnosti uvedeny tři nejčastěji používané způsoby výpočtu difrakce elektromagnetického pole na otvoru, a to zejména s přihlédnutím k jejich použití v teorii optického zobrazení. Výše uvedené obecné vztahy můžeme ještě podstatně zjednodušit, uvědomíme-li si, že velikost vlnového čísla  $k$  je mnohonásobně větší než vzdálenost  $r_{PM}$ , takže můžeme aproximovat  $(1/r_{PM} - ik) \approx -ik$ ,  $(k^2 + 3ik/r_{PM} - 3/r_{PM}^2) \approx k^2$ . Dalšího zjednodušení dosáhneme v případech, kdy jsou rozměry otvoru, na kterém nastává difrakce světla, např. průměr pupily optické soustavy, mnohem menší než vzdálenost  $r_{PM}$ , tj., kdy clonové číslo optické soustavy [4] je větší než 5, a tedy pro směrové kosiny platí  $\alpha, \beta \ll \gamma$  ( $\alpha^2 \approx 0, \beta^2 \approx 0, \alpha\beta \approx 0, \gamma \approx 1$ ). Takto zjednodušené vztahy jsou ve většině praktických situací dostatečně přesné.

*Práce byla vypracována za podpory grantu SGS15/125/OH-K1/2T/11 Českého vysokého učení technického v Praze.*

#### Literatura

- [1] A. Mikš, P. Novák, Vektorová teorie difrakce elektromagnetických vln. *Jemná mechanika a optika*. 2014, **59**, č. 5, s. 137–143.
- [2] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier optics* (McGraw-Hill, New York, 1968).
- [3] M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1999).
- [4] A. Mikš, *Aplikovaná optika* (Vydavatelství ČVUT, Praha, 2009).
- [5] J. A. Stratton, *Electromagnetic theory* (Wiley-IEEE, N.Y. 2007).
- [6] D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (John Wiley & Sons, New York 1975).
- [7] A. Sommerfeld, *Vorlesungen über theoretische physik, Band IV Optik* (Akademische verlagsgesellschaft, Gees & Portig K.-G., Leipzig 1964).
- [8] P. Morse, H. Feshbach, *Methods of theoretical physics I, II* (McGraw-Hill, N.Y. 1953).
- [9] H. Hönl, A. W. Maue, R. Westpfahl, *Theory of diffraction* (Dept. of the Navy, Naval Intelligence Support Center, 1978).
- [10] B. B. Baker, E. T. Copson, *The Mathematical Theory of Huygens Principle*, 2<sup>nd</sup>. Edition, Clarendon Press, Oxford, 1950.
- [11] M. Nieto-Vesperinas, *Scattering and Diffraction in Physical Optics*, World Scientific Publishing, New Jersey, 2006.
- [12] C. J. Bouwkamp, *Diffraction Theory, Rep. Prog. Phys.* **17**, 35–100, (1954).
- [13] F. Kottler, Zur Theorie der Beugung an Schwarzen Schirmen, *Annalen der Physik* (4), **70**, 1923, 405–456.
- [14] F. Kottler, Diffraction at a Black Screen, *Progress in Optics*, Vol. IV, ed. E. Wolf, North-Holland, Amsterdam, 1965.
- [15] F. Kottler, Diffraction at a Black Screen, *Progress in Optics*, Vol. VI, ed. E. Wolf, North-Holland, Amsterdam, 1967.
- [16] B. Karczewski, „Fraunhofer Diffraction of an Electromagnetic Wave,“ *J. Opt. Soc. Am.* **51**, 1055–1057 (1961).
- [17] B. Karczewski and E. Wolf, „Comparison of Three Theories of Electromagnetic Diffraction at an Aperture. Part I: Coherence Matrices,“ *J. Opt. Soc. Am.* **56**, 1207–1210 (1966).
- [18] B. Karczewski and E. Wolf, „Comparison of Three Theories of Electromagnetic Diffraction at an Aperture. Part II: The Far Field,“ *J. Opt. Soc. Am.* **56**, 1214–1218 (1966).
- [19] E. W. Marchand, E. Wolf, „Consistent Formulation of Kirchhoff's Diffraction Theory,“ *J. Opt. Soc. Am.* **56**, 1712–1721 (1966).
- [20] A. S. Marathay and J. F. McCalmont, „Vector diffraction theory for electromagnetic waves,“ *J. Opt. Soc. Am.* **A 18**, 2585–2593 (2001).
- [21] J. J. M. Braat, S. van Haver, A. J. E. M. Janssen, P. Dirksen, „Assessment of optical systems by means of point-spread functions,“ *Progress in Optics*, Vol. 51, ed. E. Wolf, Elsevier (2008).
- [22] E. Wolf, „Electromagnetic diffraction in optical systems I. An integral representation of the image field,“ *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **253**, 349–357 (1959).
- [23] B. Richards and E. Wolf, „Electromagnetic diffraction in optical systems II. structure of the image field in an aplanatic system,“ *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **253**, 358–379 (1959).
- [24] V. S. Ignatowsky, „Diffraction by a lens having arbitrary opening,“ *Trans. Opt. Inst. Petrograd 1*, paper 4, 1–36, (1919).
- [25] R. Burtin, „Two problems of optical diffraction at large relative apertures,“ *Opt. Acta* **3**, 104–109 (1956).
- [26] A. S. Marathay and G. B. Parrent, „Use of Scalar Theory in Optics,“ *J. Opt. Soc. Am.* **60**, 243–245 (1970).
- [27] A. Mikš, „Reprezentace vlnových polí pomocí úhlového spektra rovinných vln,“ *Jemná mechanika a optika*. 1996, **41**, č. 6, s. 169–172.
- [28] J. A. Stratton, L. J. Chu, *Physical Review*, **56**, 1939, „Diffraction Theory of Electromagnetic Waves“, 99–107.

**B.5 Příspěvek na konferenci SPIE: Three-component zoom systems for transformation of Gaussian laser beams [38]**

# Three-component zoom systems for transformation of Gaussian laser beams

P. Kulmon\*, P. Pokorný, A. Mikš, J. Novák, P. Novák

Czech Technical University in Prague, Faculty of Civil Engineering, Department of Physics,  
Thákurova 7, 166 29 Prague, Czech Republic

## ABSTRACT

The paper presents a theoretical analysis of paraxial properties of the three-element zoom systems for the transformation of circular Gaussian beams. It is required from the optical system that the distance between a beam waist of the incoming Gaussian beam (object waist) and beam waist of the output Gaussian beam (image waist) does not change during the change of the magnification of the system. Relations enabling the computation of the paraxial parameters of a three-element zoom optical system are derived and applied on an example of a zoom optical system with a continuously adjustable magnification. It is shown that the kinematics of the optical system for the transformation of a Gaussian beam differs from the kinematics of the optical system for the transformation of a classical beam and the direct application of the theory of classical zoom systems for the transformation of laser beams is thus not possible. With lasers generating Gaussian beams with different parameters, it would be necessary to design a special zoom system for each type of laser. However, practically it is possible to design a zoom system for Gaussian beams with specific parameters and the adjustment to another Gaussian beam is achieved by a suitable optical system. Using the derived equations it is further possible to solve a number of other issues of transforming the Gaussian beam such as beam expansion etc.

**Keywords:** Gaussian beam, laser and laser optics, optical zoom system, geometric optical design, lens system design

## 1. INTRODUCTION

Numerous areas of science and engineering use lasers<sup>1-7</sup> for several purposes. In many cases (e.g. welding, cutting, laser micromachining, laser marking, or scanning and annealing of materials) a smooth variation in parameters of a laser beam is required. Changing of laser beam's parameters can be best achieved using an optical system with continuously adaptable properties – e.g. an adjustable focal length of zoom systems.

As it is widely known a beam generated by a laser resonator is not homocentric but Gaussian<sup>1-9</sup>. A transformation of such beam by an optical system respects different equations than those valid for a transformation of homocentric beam<sup>10-19</sup>. Therefore, the equations for the paraxial design of classical zoom systems for homocentric light beams cannot be used for the initial design of zoom systems for the transformation of Gaussian beams.

The aim of the present contribution is to perform a theoretical analysis of paraxial properties of the three-element zoom systems for the transformation of circular Gaussian beams. It is required from the optical system that the distance between a beam waist of the incoming Gaussian beam (object waist) and beam waist of the output Gaussian beam (image waist) does not change during the change of the magnification of the system. Relations enabling the computation of the paraxial parameters of a three-element zoom optical system are derived and applied on an example of a zoom optical system with continuously adjustable magnification. It is shown that the kinematics of the optical system for the transformation of a Gaussian beam differs from the kinematics of the optical system for the transformation of a classical beam and the application of classical zoom systems for the transformation of laser beams is thus not possible. With lasers generating Gaussian beams with different parameters, it would be necessary to design a special zoom system for each type of laser. However, practically it is possible to design a zoom system for Gaussian beams with specific parameters and the adjustment to another Gaussian beam is achieved by a suitable optical system. Using the derived equations it is possible to solve a number of other issues transforming the Gaussian beam such as beam expansion or so.

\*kulmon@seznam.cz; phone +420 2 2435 7913; fax +420 2 3333 3226; <http://departments.fsv.cvut.cz/aog/en>

Optical Systems Design 2015: Optical Design and Engineering VI, edited by Laurent Mazuray,  
Rolf Wartmann, Andrew P. Wood, Proc. of SPIE Vol. 9626, 962638 · © 2015  
SPIE · CCC code: 0277-786X/15/\$18 · doi: 10.1117/12.2191399

Proc. of SPIE Vol. 9626 962638-1

Theoretical analysis is still very important and key approach to design superior optical systems, as presented by Olson *et. al.*<sup>20</sup> or Welford<sup>21</sup>. Compared to optimization procedures used in software for designing purposes only the analytical study can bring insight into the problem and can give information about existing of a real solution.

## 2. FUNDAMENTAL PROPERTIES OF GAUSSIAN BEAMS

Suppose the light as a harmonic electromagnetic field propagating through a homogenous and isotropic media. As it is known, one can describe such field in space using the scalar Helmholtz equation<sup>1,2</sup> as follows:

$$\Delta u(x, y, z) + k^2 u(x, y, z) = 0, \quad (1)$$

where  $\Delta$  denotes Laplace operator,  $k = 2\pi/\lambda$  is the wavenumber,  $\lambda$  is the wavelength of light, and  $u = u(x, y, z)$  presents an arbitrary component of electromagnetic field in Cartesian coordinate system, e.g. a component of intensity of electric field<sup>1,2</sup>. Eq. (1) describes the field in whole space. In the case of laser beams only a narrow part of the field close to one axis of the chosen coordinate system is considered because of the high concentration of laser energy in this part of space. Therefore, one can assume the propagation of the beam e.g. along the  $z$  axis and look for the solution of Eq. (1) in the form of harmonic waves  $u(x, y, z) = \varphi(x, y, z) \exp(-ikz)$ . Substituting such a form of solution into Eq. (1) leads to the equation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

where the component  $\partial^2 \varphi / \partial z^2$  was neglected due to its low magnitude compared the other components. Eq. (2) is a parabolic equation for function  $\varphi(x, y, z)$ <sup>1,2</sup>. The simplest solution is obtained in the form of circular Gaussian beams, which are however the most important in practice. Circular Gaussian beams can be described by the following equation<sup>1-9</sup>:

$$u = \frac{w_0}{w} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w^2}\right) \exp\left(-ikz + i\psi - ik \frac{x^2 + y^2}{2R}\right), \quad (3)$$

where

$$R = z(1 + z_0^2/z^2), \quad w^2 = w_0^2(1 + z^2/z_0^2), \quad \psi = \text{atan}(z/z_0), \quad z_0 = kw_0^2/2,$$

with  $2w_0$  denoting the diameter of the narrowest point of a beam (the beam waist) and  $R$  being the vertex radius of curvature of the beam wavefront for points located near the  $z$  axis of a beam. As obvious from Eq. (3), the amplitude of the Gaussian beam is described by a Gaussian function. The shape of a Gaussian beam is given by the change of its amplitude. The envelope of the Gaussian beam is usually defined as a surface where the amplitude decreases to the value of  $1/e$  of the actual on-axis amplitude, where  $e$  denotes Euler's number. From the Eq. (3) then one gets the following formula for such surface, it holds<sup>1-9</sup>:

$$x^2 + y^2 = w_0^2(1 + z^2/z_0^2). \quad (4)$$

Eq. (4) is an analytical description of a rotational hyperboloid. Afterwards, one can characterize the beam divergence by a divergence angle  $2\theta$  of the hyperboloid's asymptotes for small angles  $\theta$  ( $\tan \theta \approx \theta$ ) as follows<sup>1-9</sup>:

$$w_0 \theta = \lambda / \pi. \quad (5)$$

The basic properties of Gaussian beam are depicted in Fig. 1 both with its transformation by an optical system.

As obvious from the aforementioned formulas, electromagnetic field with energy concentrated tightly to one coordinated axis respects the formulas different from the ones for homocentric beams<sup>10-19</sup>. The beam waist and the beam divergence angle of such beams – Gaussian beams, are connected with Eq. (5). The smaller the beam waist  $w_0$  is, the bigger the divergence angle  $\theta$  is. Therefore, classical formulas for imaging of homocentric beam cannot be used for precise analysis. In the following part the equation for the transformation of Gaussian beams by multiple-element zoom systems will be presented. Afterwards, the description will be specialized on a three-element zoom system.

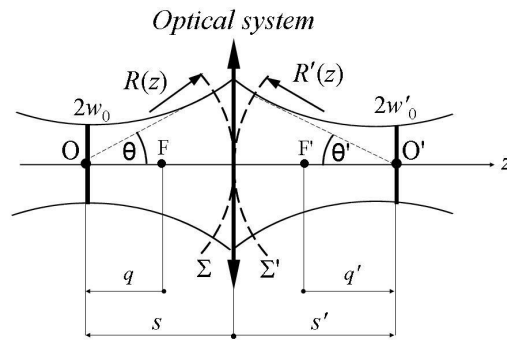


Figure 1. Basic parameters of Gaussian beam and its transformation by optical system; F and F' denotes the object and image focal points of the system

### 3. TRANSFORMATION OF GAUSSIAN BEAMS BY THREE-ELEMENT ZOOM OPTICAL SYSTEM

For the further analysis one can suppose a paraxial transformation of Gaussian beam by a thin lens system without any loss of generality. The derived equations are valid for the thick lens system as well, assuming that one will use all the values with respect to focal points of individual optical elements or with respect to their principal planes<sup>22-25</sup>.

Suppose that the optical system consists from a set of thin optical components separated by air gaps. Afterwards, one can write the following formula for the system of  $p$  lenses (optical components), it holds<sup>9</sup>:

$$G_i = \frac{f_i'^2}{q_i^2 + z_{0i}^2}, \quad q_i' = -q_i G_i, \quad z_{0,i+1} = z_{0i} G_i, \quad \Delta_i = f_i' + f_{i+1}' - d_i, \quad q_{i+1} = q_i' + \Delta_i, \quad (6)$$

where  $i = 1, 2, 3, \dots, p$ ,  $f_i'$  is the focal length of the  $i$ -th lens and  $d_i$  is the distance between  $i$ -th and  $(i + 1)$ -th lens. The image and object axial distances  $s_i$  and  $s_i'$  (see Fig. 1) of the  $i$ -th lens than can be calculated as follows<sup>9</sup>:

$$s_i = q_i - f_i', \quad s_i' = q_i' + f_i'. \quad (7)$$

The transverse Gaussian beam waist magnification  $m_G$  of the whole considered optical system than can be calculated from the following formula, it holds<sup>9</sup>:

$$m_G^2 = \prod_{i=1}^{i=p} G_i. \quad (8)$$

Suppose now the situation in Fig. 2 for the case of three-element zoom system. Let the focal lengths  $f_1'$ ,  $f_2'$  and  $f_3'$  of individual system's components be known (chosen). The goal of the initial design of such a zoom system is to compute the necessary values of the distances  $d_1$  and  $d_2$  between the components which ensure that the overall magnification of the beam waist of the whole system is equal to given value from the desired magnification range of the system.

The first condition that must be satisfied by our optical system is that the distance  $L$  between an axial object point A (a center of the beam waist of the incoming Gaussian beam) and an axial image point A' (a center of the beam waist of the output Gaussian beam) has to remain the same during the change of magnification  $m_G$ . Therefore, one can write the following condition:

$$L = -s_1 + d_1 + d_2 + s_3' = const. \quad (9)$$

As the focal lengths are known, one has to calculate the values of  $\Delta_1$  and  $\Delta_2$ . Afterwards, the distances  $d_1$  and  $d_2$  between the components can be calculated.

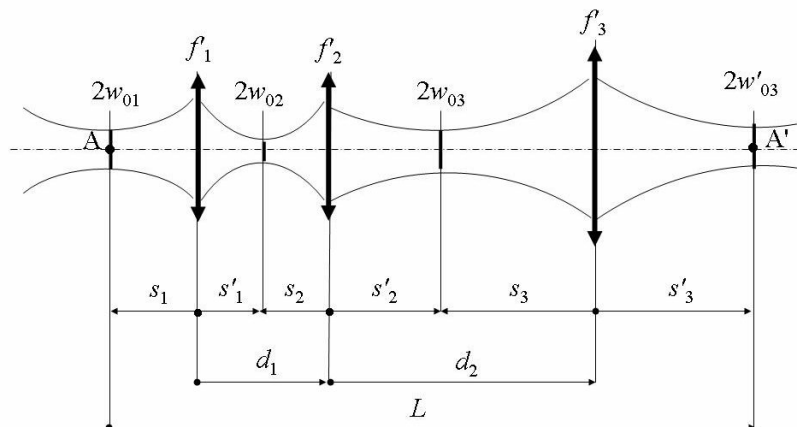


Figure 2. Transformation of Gaussian beam by a three-element optical system

Substituting Eqs. (6) and (7) into Eq. (9) results in the following formula:

$$a_3\Delta_1^3 + a_2\Delta_1^2 + a_1\Delta_1 + a_0 = 0, \quad (10)$$

where

$$\begin{aligned} a_3 &= -\Delta_2^2, \\ a_2 &= \Delta_2[\Delta_2(2f_1 - L_0 - \Delta_2 + 2f_2 + 2f_3 - q_1 + 2G_1q_1) + 2f_2^2 - f_3^2], \\ a_1 &= 2\Delta_2(f_2^2 + \Delta_2G_1q_1)(\Delta_2 + L_0 - 2f_1 - 2f_2 - 2f_3 + q_1) - \Delta_2^2f_1^2G_1 - (f_2^2 - f_3^2)(f_2^2 + 2\Delta_2G_1q_1), \\ a_0 &= -[f_2^4 + \Delta_2G_1(f_1^2\Delta_2 + 2f_2^2q_1)](\Delta_2 + L_0 - 2f_1 - 2f_2 - 2f_3 + q_1) - f_3^2G_1(f_1^2\Delta_2 + f_2^2q_1). \end{aligned}$$

The second condition for the optical system is that it has to have the desired magnification  $m_G$ . Substituting Eq. (5) into Eq. (8) results in the following formula:

$$b_2\Delta_1^2 + b_1\Delta_1 + b_0 = 0, \quad (11)$$

where

$$\begin{aligned} b_2 &= -\Delta_2^2G, \\ b_1 &= 2G(\Delta_2^2G_1q_1 + f_2^2\Delta_2), \\ b_0 &= f_2^2f_3^2G_1 - G(\Delta_2^2f_1^2G_1 + 2f_2^2G_1q_1\Delta_2 + f_2^4). \end{aligned}$$

The aforementioned conditions for the distance  $L$  between points A and A' (expressed by Eq. (10)) and the magnification  $m_G$  of optical system (expressed by Eq. (11)) has to have a common solution. Therefore, their resultant  $R$  has to be equal to zero. One can write as follows:

$$R = \begin{vmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & b_1 & b_0 \end{vmatrix}.$$



Setting resultant  $R$  equal to zero than leads into the following formula:

$$c_4\Delta_2^4 + c_3\Delta_2^3 + c_2\Delta_2^2 + c_1\Delta_2 + c_0 = 0, \quad (12)$$

where

$$\begin{aligned} c_4 &= -f_2^4 f_3^4 G_1^2 G, \\ c_3 &= -2f_2^4 f_3^4 G_1^2 G(L_0 - 2f_1 - 2f_2 - 2f_3 + q_1 + G_1 q_1), \\ c_2 &= -f_2^4 f_3^4 G_1^2 G[8f_2 f_3 - 4(L_0 + q_1 + G_1 q_1)(f_1 + f_2 + f_3) + 2q_1(L_0 + G_1 q_1) + 2G_1(z_{01}^2 G + L_0 q_1) + L_0^2 + \\ &\quad + 8f_1(f_2 + f_3) + 6f_2^2 + 6f_3^2 + f_1^2(G_1 + 4) + q_1^2 + G^2 z_{01}^2], \\ c_1 &= (f_2^2 + f_3^2)c_3, \\ c_0 &= f_2^4 f_3^4 G_1(G^2 f_2^2 f_3^2 - f_2^4 G G_1 - f_3^4 G G_1 + G_1^2 f_2^2 f_3^2). \end{aligned}$$

Using aforementioned formulas one can calculate distances  $d_1$  and  $d_2$  between elements of optical system. For a clearance of calculation the following scheme sums up the process:

- 1) Eq. (12) is solved and the value of  $\Delta_2$  is obtained.
- 2) Substituting the obtained value of  $\Delta_2$  into Eqs. (10) and (11) is used for the calculation of value  $\Delta_1$ .
- 3) Distances  $d_i$  ( $i = 1, 2$ ) between the components of the investigated optical system are computed with the following formula:

$$d_i = f'_i + f'_{i+1} - \Delta_i. \quad (13)$$

With the use of Eq. (3) one can calculate the diameter of the beam waist  $2w$  of a Gaussian beam behind individual elements of the investigated optical system. As one can see the problem of an initial design of the investigated three-element zoom optical system for transformation of Gaussian beams is thereby solved since all the paraxial parameters of such a system can be calculated using the presented formulas. Free parameters of the aforementioned model are individual focal lengths  $f'_1$ ,  $f'_2$  and  $f'_3$  of each optical element.

Suppose now that we further require that the Petzval sum<sup>12,19,22-25</sup> of the system is approximately equal to zero. This requirement can be expressed by the following formula

$$S_W = \sum_{i=1}^3 1/n_i f'_i \approx (1/n) \sum_{i=1}^3 1/f'_i \approx 0, \quad (14)$$

where  $n_i$  is the index of refraction<sup>25</sup> of the  $i$ -th element of the optical system, and as an approximation we used the assumption that  $n_1 \approx n_2 \approx n_3 \approx n$  ( $n$  being the average value of refractive index). In order to satisfy the condition  $S_W \approx 0$  the values of focal lengths can therefore be chosen for example as  $f'_1 = f'_3$ ,  $f'_2 = -f'_1/2$ . If one requires the chromatic aberration of the system to be corrected, the individual elements of the optical system can be designed, for example, as apochromatic or achromatic doublets. The detailed description of such procedures can be found in literature<sup>12,19,22-26</sup>.

#### 4. EXAMPLE

As an example let us show the initial design of the above described three element zoom system. As the laser source we will use Thorlab<sup>27</sup> laser HNL020R with  $w_{01} = 0.3$  mm. Suppose the individual elements of the optical system are thin lenses and let the parameters of the optical system be as follows:  $s_1 = -70$  mm,  $f'_1 = 20$  mm,  $f'_2 = -10$  mm,  $f'_3 = 20$  mm, ( $S_W \approx 0$ ),  $L = 200$  mm,  $\lambda = 632.8$  nm, and  $m_G \in \langle 0.1, 1 \rangle$ . The results of the calculation of paraxial parameters of such a three-element optical zoom system are shown in Table 1 for several different values of

magnification  $m_G$ . A Gaussian light beam (laser beam) and a classical beam (homocentric) are compared as well. The linear dimensions are stated in millimeters. The dependency of axial distances  $d_1$  and  $d_2$  on the magnification  $m_G$  is shown in Fig. 3.

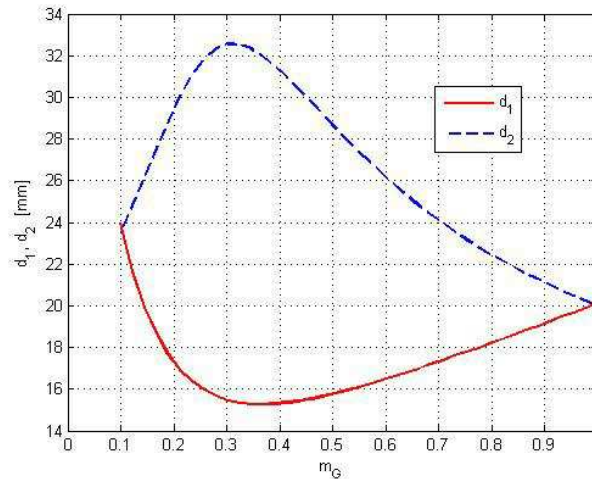


Figure 3. The dependency of axial distances  $d_1$  and  $d_2$  on the magnification  $m_G$  for a Gaussian beam from the Example 1

Table 1. Three-element zoom system ( $S_{II} \approx 0$ )

$s_1 = -70, f_1' = 20, f_2' = -10, f_3' = 20, L = 200, \lambda = 0.0006328$						
	$w_{01} = 0.3$ (Gaussian beam)			$w_{01} = 0$ (homocentric beam)		
$m_G$	$d_1$	$d_2$	$s_3'$	$d_1$	$d_2$	$s_3'$
1.000	20.1187	20.0398	89.8415	28.9192	26.4847	74.5961
0.775	18.0031	22.8554	89.1416	31.7996	24.7269	73.4735
0.550	16.1253	27.4159	86.4588	36.2875	23.4220	70.2905
0.325	15.3618	32.5630	82.0752	44.2061	23.2089	62.5850
0.100	23.9996	23.5360	82.4644	57.4623	32.8066	39.7311

## 5. CONCLUSION

The paper presented an analysis of a paraxial transformation of Gaussian beam by an optical system. A three-element zoom optical system with continuously adjustable magnification was investigated and the formulas for the computation of its paraxial properties were derived. The distances between individual optical elements of such a zoom system can be calculated by solving a system of the derived equations (11), (9) and (10). As it was shown in the example (Table 1) the kinematics of the optical system for a Gaussian beam is radically different from the system for a transformation of homocentric beams. Therefore, a classical zoom system for a transformation of homocentric beams cannot be simply used for the transformation of laser beams with Gaussian profile. As it is obvious from the derived formulas, the parameters of such optical systems depend on the parameters of the input Gaussian beam. Therefore, it would be necessary to design a special zoom system for each type of laser. However, for practical purposes it is possible to design a zoom system for one type of input Gaussian beam and the adjustment of the parameters of the input Gaussian beam (position and radius of the beam waist) can be performed by another suitable optical system. The derived formulas can

be also used for other tasks considering a transformation of Gaussian beams such as beam expansion etc. Finally, we have to mention that in this paper we focused just on the paraxial design of the described zoom system. We did not focus on the influence of aberrations of such optical system on the transformed beam. The readers interested in the analysis of influence of aberrations of the optical system on the transformation of a Gaussian beam can find detailed information in references, for example in the Mahajan's paper<sup>28</sup> or the work of Miks *et.al.*<sup>29</sup>.

*The work was supported by the grant 13-31765S from the Czech Science Foundation and the grant SGS15/125/OHK1/2T/11 from the Czech Technical University in Prague.*

## REFERENCES

- [1] B. E. A. Saleh, M. C. Teich, [Fundamentals of Photonics], Wiley-Interscience (2007).
- [2] A. Yariv, [Optical Electronics], Oxford University (1990).
- [3] H. Kogelnik and T. Li, "Laser Beams and Resonators," *Appl. Opt.* **5**, 1550-1567 (1966).
- [4] A. E. Siegman, [Lasers], University Science Book (1986).
- [5] F. Trager, [Handbook of Lasers and Optics], Springer (2007).
- [6] N. Hodgson, H. Weber, [Laser Resonators and Beam Propagation], Springer (2005).
- [7] C. E. Webb, J. D. C. Jones, [Handbook of Laser Technology and Applications], IOP (2004).
- [8] A. Donges, R. Noll, [Laser Measurement Technology], Springer (2015).
- [9] A. Miks, P. Novak, "Paraxial properties of three-element zoom systems for laser beam expanders," *Opt. Express* **22**, 21535-21540 (2014).
- [10] A. D. Clark, [Zoom Lenses], Adam Hilger (1973).
- [11] K. Yamaji, [Progress in Optics], North-Holland Publishing Co. (1967).
- [12] A. Miks, J. Novak, and P. Novak, "Method of zoom lens design," *Appl. Opt.* **47**, 6088-6098 (2008).
- [13] T. Kryszczyński and J. Mikucki, "Structural optical design of the complex multi-group zoom systems by means of matrix optics," *Opt. Express* **21**, 19634-19647 (2013).
- [14] T. Kryszczyński, M. Leśniewski, J. Mikucki, "Use of matrix optics to analyze the complex multi-group zoom systems," *Proc. SPIE* 8697, 18th Czech-Polish-Slovak Optical Conference on Wave and Quantum Aspects of Contemporary Optics, 86970I (2012).
- [15] S. Pal and L. Hazra, "Ab initio synthesis of linearly compensated zoom lenses by evolutionary programming," *Appl. Opt.* **50**, 1434-1441 (2011).
- [16] L. Hazra and S. Pal, "A novel approach for structural synthesis of zoom systems," *Proc. SPIE* 7786 (2010).
- [17] S. Pal and L. Hazra, "Stabilization of pupils in a zoom lens with two independent movements," *Appl. Opt.* **52**, 5611-5618 (2013).
- [18] S. Pal, "Aberration correction of zoom lenses using evolutionary programming," *Appl. Opt.* **52**, 5724-5732 (2013).
- [19] A. Miks, [Applied Optics], Czech Technical University, Prague (2009).
- [20] J. L. Bentley, C. Olson, and R. N. Youngworth, "In the era of global optimization, the understanding of aberrations remains the key to designing superior optical systems," *Proc. SPIE* **7849**, Optical Design and Testing IV, 78490C (2010).
- [21] C. Olson, J. L. Bentley, and R. N. Youngworth, "Aberration theory: still the key to designing superior optical systems," *SPIE Newsroom* (2011).
- [22] W. T. Welford, [Aberrations of the Symmetrical Optical Systems], Academic Press (1974).
- [23] M. Herzberger, [Modern Geometrical Optics], Interscience (1958).
- [24] W. Smith, [Modern optical engineering], McGraw-Hill (2007).
- [25] M. Berek, [Grundlagen der Praktischen Optik], Walter de Gruyter & Co. (1970).
- [26] A. Mikš, J. Novák, "Method for primary design of superachromats," *Appl. Opt.* **52**, 6868-6876 (2013).
- [27] <http://www.thorlabs.com/>
- [28] V. N. Mahajan, "Uniform versus Gaussian beams: a comparison of the effects of diffraction, obscuration, and aberrations," *J. Opt. Soc. Am. A* **3**, 470-485 (1986).
- [29] A. Miks, J. Novak, "Propagation of Gaussian beam in optical system with aberrations," *Optik: International Journal for Light and Electron Optics* **114** (10), 437-440 (2003).

**B.6 Příspěvek na konferenci SPIE: Analysis of three-element zoom systems for laser beam expanders with tunable-focus lenses [39]**

# Analysis of three-element zoom systems for laser beam expanders with tunable-focus lenses

Pavel Kulmon, Antonín Mikš, Pavel Novák\*, Jiří Novák  
Czech Technical University in Prague, Faculty of Civil Engineering, Department of Physics,  
Thakurova 7, 16629 Prague, Czech Republic

## ABSTRACT

Our work is focused on the problem of a theoretical analysis of imaging properties and an initial optical design of a three-element zoom optical system for laser beam expanders using lenses with a tunable focal length. Equations that enable to calculate basic paraxial properties and parameters of such optical systems are derived. Finally, the derived equations are applied on an example of calculation of parameters of the three-element zoom system for the laser beam expander.

**Keywords:** geometric optical design, first-order optics, zoom lenses, laser beam expander, Gaussian beam, tunable-focus lenses

## 1. INTRODUCTION

Lasers are widely used in many areas of science and technology<sup>1-8</sup>. Laser beams have specific optical properties that have to be considered when designing optical systems for the transformation of a laser beam. An optical system that is commonly used both in classical imaging optics and laser optics is a beam expander. For a classical homocentric beam a simple telescopic system can be used. In the case of laser beams different formulas are valid for the transformation of a Gaussian beam and therefore the optical system of a laser beam expander is different<sup>9-18</sup>. In various applications there is often need for optical systems that would enable to change the magnification of the beam in a continuous manner (zoom systems)<sup>19</sup>. While the theory of classical zoom systems is described thoroughly in literature<sup>19-37</sup> it is not the case of the theory of zoom systems for the transformation of Gaussian beams. There exist references regarding the properties of Gaussian beams and their transformation by optical systems<sup>1-16</sup>, however the problem of a design of a zoom lens for the transformation of a Gaussian beam was not investigated until recently<sup>17,18</sup>. In our paper we focus on the problem of an initial optical design of the three-element zoom optical system for laser beam expanders using lenses with a tunable focal length. We restrict ourselves to a special type of a three-element zoom system for Gaussian beam transformation that consists of two tunable focus lenses and one classical fixed focus lens, which can be easily replaced in case that one needs to change the parameters of the zoom system. We perform the paraxial analysis of the problem and we present equations which enable us to calculate the required focal lengths of the first two tunable focus lenses in dependence on the value of the axial position of the beam waist of the input Gaussian beam and the required magnification of the system. Finally, these equations are applied on an example of calculation of parameters of the three-element zoom system for the laser beam expander.

## 2. BASIC PARAMETERS AND PROPERTIES OF A GAUSSIAN BEAM

Starting from the theory of electromagnetic waves propagation the harmonic electromagnetic wave field propagating through the homogenous isotropic medium can be described by the Helmholtz equation<sup>1,3,9</sup>

$$\nabla^2 u(x, y, z) + k^2 u(x, y, z) = 0, \quad (1)$$

where  $\nabla^2$  is a Laplace operator,  $k = 2\pi/\lambda$  is the wave number,  $\lambda$  is the wavelength of light and  $u = u(x, y, z)$  is an arbitrary component of e.g. the electric field vector  $E^{1,3,9}$  in the orthogonal Cartesian coordinate system.

\*pavel.novak.3@fsv.cvut.cz; phone +420 2 2435 7919; fax +420 2 3333 3226; <http://departments.fsv.cvut.cz/aog/en>

Equation (1) describes the general electromagnetic field in the whole space. In the case of laser beams, which are very narrow, the field is concentrated along one of the axis of the chosen coordinate system (e.g.  $z$  axis). In the transverse direction the field fades relatively fast to zero and in the longitudinal direction it changes very slowly. The solution of Eq. (1) is therefore in this case sought in the following form<sup>1,3,9</sup>

$$u(x, y, z) = \varphi(x, y, z) \exp(-ikz), \quad (2)$$

where  $i = \sqrt{-1}$  denotes an imaginary unit. By substitution of Eq. (2) into Eq. (1) and neglecting the term  $\partial^2 \varphi / \partial z^2$  one obtains the well known parabolic equation for function  $\varphi(x, y, z)$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

In our further analysis we will restrict ourselves just to the simple case of a circular Gaussian beam, which is however the most important in practice. By substitution of the solution of Eq. (3) into Eq. (2) one obtains the well known equation, which describes circular Gaussian beams<sup>1-16</sup>

$$u(x, y, z) = u_0 \frac{w_0}{w(z)} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w(z)^2}\right) \exp\left(-ikz + i\psi(z) - ik \frac{x^2 + y^2}{2R(z)}\right), \quad (4)$$

where

$$R(z) = z(1 + z_0^2 / z^2), \quad w^2(z) = w_0^2(1 + z^2 / z_0^2), \quad \psi(z) = \arctan(z / z_0), \quad z_0 = kw_0^2 / 2, \quad u_0 = u(0,0,0). \quad (5)$$

$R(z)$  is the radius of curvature of the wavefront,  $2w_0$  is the beam spot size (beam width) i.e. the diameter of the beam waist,  $w(z)$  is the radius at which the field amplitude drop to  $1/e$ ,  $\psi(z)$  is the Gouy phase,  $z_0$  is the Rayleigh range and  $z$  is the axial distance from the beam waist (see Fig. 1).

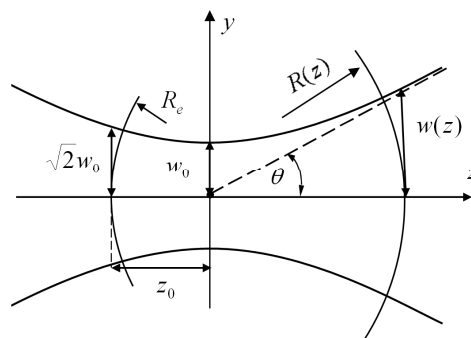


Fig. 1 Basic parameters of the circular Gaussian beam.

As it is obvious from Eq. (4) the amplitude of the beam decrease in transverse direction with a Gaussian function, which is the reason why the solution of Eq. (3) given by Eq. (4) is called a Gaussian beam. The equation describing the wavefront of such a Gaussian beam then according to Eq. (4) takes the form

$$z + (x^2 + y^2) / (2R) - \psi / k = z_1 = const. \quad (6)$$

Since for common lasers (i.e. common He-Ne lasers) the magnitude of the third term ( $\psi / k$ ) on the left hand side of the Eq. (6) is much smaller compared to the two other terms one can neglect this term and the equation of the wavefront can be expressed as

$$(x^2 + y^2)/(2R) = z_1 - z, \quad (7)$$

which is the equation of a rotational surface with a vertex radius of curvature  $R$  ( $R$  is the radius of curvature for the points in the close proximity to  $z$  axis). One can find the minimum value of the radius of curvature  $R_e$  from Eq. (5) by employing a condition for the extremum ( $dR/dz = 0$ ). It holds that

$$R_e = 2z_0. \quad (8)$$

As one can see that the radius of curvature changes from  $R = \infty$  for  $z = 0$  to the minimum value of  $R = R_e$  for  $z = z_0$  and then it again increases to infinity for  $z \rightarrow \infty$ . It is usual to describe the shape of the Gaussian beam by the envelope surface, which is defined by the points where the amplitude drops to  $1/e$  ( $e = 2.71828$  is the Euler number) of the value on the beam axis in the same  $z$  position. From Eq. (4) we have

$$x^2 + y^2 = w_0^2(1 + z^2/z_0^2), \quad (9)$$

which is the equation of the one-sheeted rotational hyperboloid. The divergence of the beam is then characterized by the divergence angle  $\theta$ , which is the angle between the asymptote of the  $x$  cross section of the hyperboloid and the axis of the beam ( $z$ -axis). The total angular spread of the beam is given by the angle  $2\theta$ . From Eq. (9) we obtain ( $\tan \theta \approx \theta$ )

$$w_0\theta = \lambda/\pi. \quad (10)$$

The described basic parameters of the Gaussian beam are depicted schematically in Fig. 1.

### 3. TRANSFORMATION OF A GAUSSIAN BEAM BY AN OPTICAL SYSTEM

Without the loss of generality we will further deal with the paraxial transformation of a Gaussian beam by the thin lens system. The equations derived for the thin lens system will be valid for the thick lens system assuming we take all the values with respect to focal points  $F$  and  $F'$  of individual optical elements (Fig. 2) or to their principal planes<sup>9,38-40</sup>.

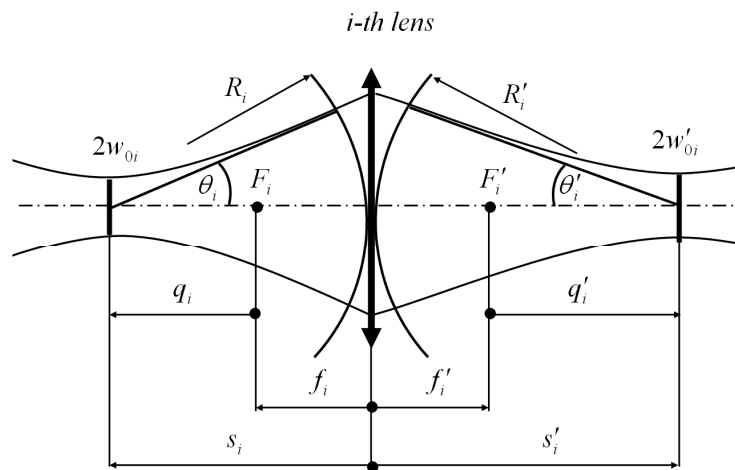


Fig. 2 Transformation of a Gaussian beam by a thin lens.

As it is known from the geometrical optics theory the thin lens (Fig. 2) transforms the incident spherical wavefront with radius  $R_i$  to output spherical wavefront with radius  $R'_i$  according to the relation<sup>9,38-40</sup>

$$1/R'_i - 1/R_i = 1/f'_i, \quad (11)$$

where  $f'_i$  is the focal length of the lens. Let us suppose an optical system consisting of a set of thin optical components (e.g. lenses) separated by air gaps. Using Eq. (5), Eq. (11) and Eq. (8) one obtains the following formulas for the transformation of a Gaussian beam parameters by the system of  $p$  lenses ( $i = 1, 2, 3, \dots, p$ )<sup>17,18</sup>

$$G_i = \frac{f_i'^2}{q_i'^2 + z_{0i}^2}, \quad q_i' = -q_i G_i, \quad z_{0i+1} = z_{0i} G_i, \quad \Delta_i = f_i' + f_{i+1}' - d_i, \quad q_{i+1}' = q_i' + \Delta_i, \quad (12)$$

where  $f'_i$  is the focal length of the  $i$ -th lens and  $d_i$  is the distance between  $i$ -th and  $i+1$ -th lens. The image and object axial distance (Fig. 2) of the  $i$ -th lens can be calculated as follows

$$s_i = q_i - f_i', \quad s_i' = q_i' + f_i', \quad (13)$$

The transverse Gaussian beam waist magnification  $m_G$  of the whole system is given by<sup>17,18</sup>,

$$m_G^2 = \prod_{i=1}^{i=p} G_i. \quad (14)$$

#### 4. THREE-ELEMENT ZOOM SYSTEM FOR LASER BEAM EXPANDER BASED ON TUNABLE-FOCUS LENSES

Let us now focus on the analysis of the zoom system for Gaussian beam transformation that is based on tunable-focus lenses, which enable a continuous change of the transverse Gaussian beam waist magnification  $m_G$  of the system without the mutual movement of individual optical elements. The simplest case of such a zoom system would be a two element system composed of two tunable focus lenses with fixed mutual distance. Such a system would enable to achieve the desired change of magnification of the Gaussian beam waist by the defined changes of optical powers of individual tunable lenses. However, here we will focus on the more complex three element zoom system, which would enable us to obtain a wider range of magnification (Fig.3).

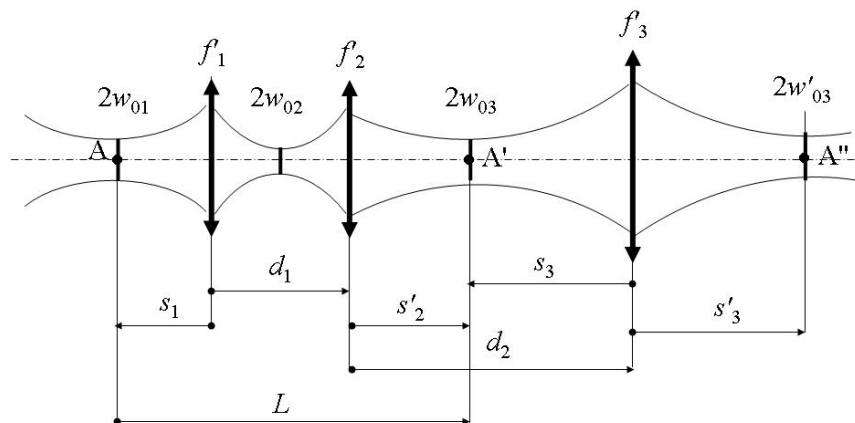


Fig. 3 Three-element optical system for transformation of a Gaussian beam



In our further analysis we will investigate a simple modification to the described two-element zoom system that will allow us to improve its adaptability. Assume that the first two elements of the proposed three element zoom system are tunable-focus lenses and the third optical element is a classical lens with a fixed focal length. The third element of such system can be easily exchanged by another lens with a different focal length in order to change the parameters (magnification and image plane location) of the whole system (analogously to converters in photographic optics<sup>41,42</sup>). The optical scheme is given in Fig. 3.

Let us further investigate a special case of such system, which satisfies the requirement that the image  $2w'_{03}$  of the beam waist of the incoming Gaussian beam ( $2w_{01}$ ) incident at the first optical element of the system is located at the image focal point of the third element ( $s'_3 = f'_3 = -s_3$  and  $q_3 = 0$ ). Such requirement is advantageous from the practical point of view since it reduces the complexity of the problem.

Now we present necessary equations that allow us to calculate the paraxial parameters of such a system. In order to achieve the desired magnification  $m_G$  for chosen separations  $d_1, d_2$ , distance  $L$  and focal length  $f'_3$  of the third element of the optical system one has to calculate the required values of focal lengths  $f'_1$  and  $f'_2$  of the first two tunable-focus lenses. As it is obvious the distance  $L$  between an object  $A$  (beam waist of the incoming Gaussian beam) and its image  $A'$ , formed by the first two members of our optical system is fixed during the change of the magnification  $m_G$  of the system. Therefore the following relation must be valid (Fig. 3).

$$-s_1 + d_1 + s'_2 = L = \text{const.} \quad (15)$$

By substitution of Eqs. (12) and (13) into Eq. (15) we obtain the following quadratic equation for the focal length  $f'_1$

$$a_2 f_1'^2 + a_1 f_1' + a_0 = 0, \quad (16)$$

where

$$\begin{aligned} a_2 &= (d_1 - s_1 - f'_2)[(d_1 - s_1)^2 - L(d_1 - s_1 - f'_2)] + z_{01}^2(d_1 - s_1 + f'_2 - L), \\ a_1 &= -2Ls_1(d_1 - f'_2)^2 + 2(d_1 - f'_2)[s_1(d_1^2 + s_1^2) + L(s_1^2 + z_{01}^2)] + \\ & z_{01}^2[2d_1(s_1 - d_1) + f'_2(f'_2 - 2s_1)] - s_1^2(2d_1 - f'_2)^2, \\ a_0 &= (s_1^2 + z_{01}^2)(d_1 - f'_2)[d_1^2 - (d_1 - f'_2)(L + s_1)]. \end{aligned} \quad (17)$$

Further, it is required that the optical system has the desired magnification  $m_G = \sqrt{G_1 G_2 G_3}$  of the beam waist diameter. After using the Eq. (12) in Eq. (14) we obtain the following equation for the focal length  $f'_1$

$$b_2 f_1'^2 + b_1 f_1' + b_0 = 0 \quad (18)$$

where

$$\begin{aligned} b_2 &= z_{01}^2(f_3'^2 - m_G^2 f_2'^2) + f_3'^2(f_2' - d_1 + s_1)^2, \\ b_1 &= -2f_3'^2(d_1 - f_2')(f_2' s_1 - d_1 s_1 + s_1^2 + z_{01}^2), \\ b_0 &= f_3'^2(s_1^2 + z_{01}^2)(d_1 - f_2')^2. \end{aligned} \quad (19)$$

If Eqs. (16) and (18) have a common solution, their resultant  $R$  must be equal to zero. It holds that

$$R = \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_1 & b_0 \end{vmatrix}. \quad (20)$$

If  $R = 0$  should apply, then we obtain the following equation of the fourth order for the value of  $f_2'$

$$c_4 f_2'^4 + c_3 f_2'^3 + c_2 f_2'^2 + c_1 f_2' + c_0 = 0 \quad (21)$$

where

$$\begin{aligned} c_4 &= z_{01}^2 (s_1^2 + z_{01}^2)^2 \left[ m_G^4 z_{01}^2 (L + s_1)^2 - m_G^2 f_3'^2 (s_1^2 + z_{01}^2) + f_3'^4 \right], \\ c_3 &= -2d_1 z_{01}^2 (s_1^2 + z_{01}^2)^2 \left\{ z_{01}^2 m_G^4 \left[ 2(L + s_1)^2 - d_1(L + s_1) \right] - m_G^2 f_3'^2 (s_1^2 + z_{01}^2) + 2f_3'^4 \right\}, \\ c_2 &= d_1^2 z_{01}^2 (s_1^2 + z_{01}^2)^2 \left\{ z_{01}^2 m_G^4 \left[ 6(L + s_1)^2 - 6d_1(L + s_1) + d_1^2 \right] - m_G^2 f_3'^2 (s_1^2 + z_{01}^2) + 6f_3'^4 \right\}, \\ c_1 &= -2d_1^3 z_{01}^2 (s_1^2 + z_{01}^2)^2 \left\{ z_{01}^2 m_G^4 \left[ 2(L + s_1)^2 - 3d_1(L + s_1) + d_1^2 \right] + 2f_3'^4 \right\}, \\ c_0 &= d_1^4 z_{01}^2 (s_1^2 + z_{01}^2)^2 \left\{ z_{01}^2 m_G^4 \left[ (L + s_1)^2 - 2d_1(L + s_1) + d_1^2 \right] + f_3'^4 \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Thus all the formulas needed for the computation of focal lengths  $f_1'$  and  $f_2'$  of the optical system are given. When calculating these focal lengths, one should proceed in the following way. Firstly, we chose the magnification range  $m_G \in (m_{G,\min}, m_{G,\max})$ . Then for a given magnification value  $m_G$  Eq. (21) is solved. Once we have solved Eq. (21) we use the calculated value  $f_2'$  in Eq. (16), which is then solved for value  $f_1'$ . From the obtained solutions the root, which is common to both Eq. (16) and Eq. (18) is chosen. By repeating the procedure for all chosen values of  $m_G \in (m_{G,\min}, m_{G,\max})$  the values of required focal lengths  $f_1'$  and  $f_2'$  of the first two elements (tunable-focus lenses) of given three-element zoom optical system for the transformation of Gaussian beams can be calculated.

## 5. EXAMPLES

Now we will use the derived equations to calculate the paraxial parameters of the above described three-element zoom system. Let us assume the following parameters of the incoming laser beam. The beam waist radius is  $w_{01} = 0.5$  mm ( $z_{01} = 1241$  mm), the required axial distance of the beam waist from the first element of the system is  $s_1 = -100$  mm and the wavelength of light is  $\lambda = 632.8$  nm (He-Ne laser). Further we chose the following design parameters of the three element zoom system as:  $d_1 = 80$  mm,  $L = 160$  mm,  $f_3' = 150$  mm,  $d_2 = L + s_1 - d_1 + f_3' = 130$  mm. The required magnification range is  $m_G \in \langle 4, 20 \rangle$ . The results of calculation using Eqs. (15)-(22) are given in table 1, where  $w_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) stands for transverse radii of the Gaussian beam on individual elements of the zoom system,  $w_{03}'$  is the beam waist radius of the output beam emerging out from the optical system,  $s_3'$  is the distance of the output beam waist from

the last element of our optical system and  $\theta'_3$  is the divergence angle of the output Gaussian beam in milliradians. The linear dimensions in table 1 are given in millimeters.

Table 1. Example of three-element zoom system for laser beam expansion based on tunable-focus lenses

$s_1 = -100, d_1 = 80, L = 160, d_2 = 130, f'_3 = s'_3 = 150, w_{01} = 0.5, w_1 = 0.5016, \lambda = 0.0006328$						
$m_G$	$f'_1$	$f'_2$	$w_2$	$w_3$	$w'_{03}$	$\theta'_3$
4	52.1595	-71.2523	0.2671	2.0001	2.0000	0.1007
8	38.7117	-38.8263	0.5334	4.0000	4.0000	0.0504
12	30.7842	-33.7079	0.8000	6.0000	6.0000	0.0336
16	25.5538	-31.6218	1.0667	8.0000	8.0000	0.0252
20	21.8433	-30.4893	1.3333	10.0000	10.0000	0.0201

Figure 4 shows the calculated required focal lengths  $f'_1$  and  $f'_2$  of the first two tunable-lenses that ensure the whole system has the desired magnification  $m_G$ .

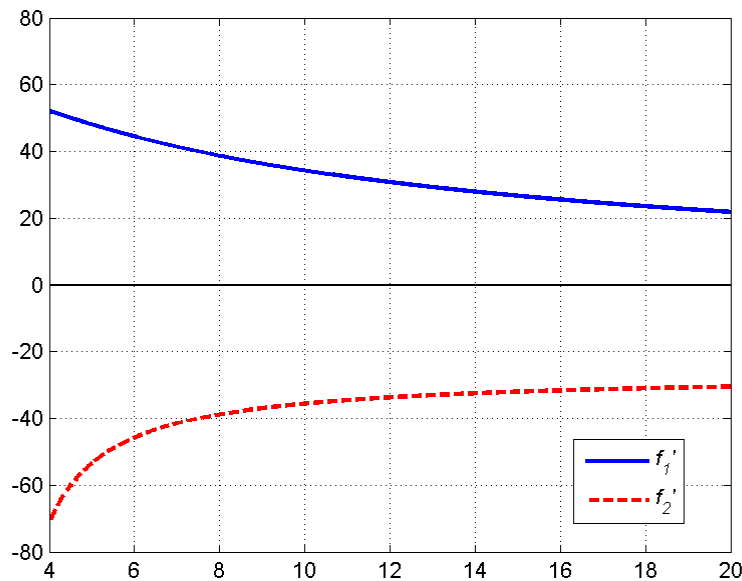


Fig. 4 Example of three-element optical system for transformation of Gaussian beam from Table 1

By the choice of different input parameters  $d_1, L$  and  $f'_3$  one can design systems with different output parameters (magnification range and position of the beam waist of the outgoing laser beam). As it was mentioned above the parameters of the proposed three-element zoom system can be changed easily just by replacing the third element of the system by a fixed focus lens with a different focal length. For example if one requires a higher magnification of the system  $m_G \in \langle 20, 100 \rangle$  one can achieve this goal by changing the focal length  $f'_3$  of the third member of the optical

system to  $f'_3 = 500$  mm as it is shown in table 2 (other parameters were not changed except  $d_2$  which must satisfy the condition  $d_2 = L + s_1 - d_1 + f'_3$  and therefore its value is now  $d_2 = 480$  mm ).

Table 2. Example of three-element zoom system for laser beam expansion based on tunable-focus lenses

$s_1 = -100, d_1 = 80, L = 160, d_2 = 480, f'_3 = s'_3 = 500, w_{01} = 0.5, w_1 = 0.5016, \lambda = 0.0006328$						
$m_G$	$f'_1$	$f'_2$	$w_2$	$w_3$	$w'_{03}$	$\theta'_3$
20	44.4382	-45.7703	0.4001	10.0000	10.0000	0.0201
40	30.7842	-33.7079	0.8000	20.0000	20.0000	0.0101
60	23.5533	-30.9825	1.2000	30.0000	30.0000	0.0067
80	19.0740	-29.7781	1.6000	40.0000	40.0000	0.0050
100	16.0265	-29.0992	2.000	50.0000	50.0000	0.0040

Figure 5 then again shows the calculated required values of focal lengths  $f'_1$  and  $f'_2$  of the first two tunable-lenses that ensure the whole system has the desired magnification  $m_G$ .

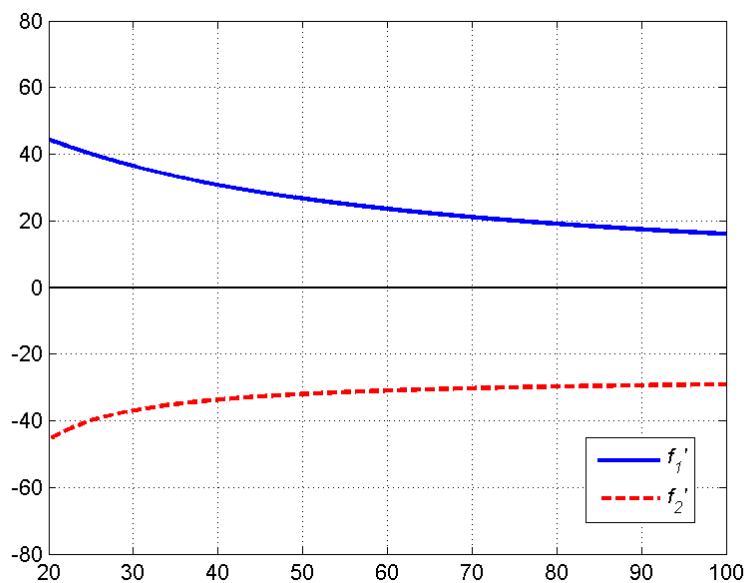


Fig. 5 Example of three-element optical system for transformation of Gaussian beam from Table 2

## 6. CONCLUSION

We performed a detailed theoretical analysis of paraxial properties of a special type of a three-element zoom optical system for laser beam expanders based on tunable focus lenses. The proposed three-element zoom system consists of two tunable-focus lenses and one additional classical lens, which can be easily replaced by a lens of another focal length in case of need of different parameters of the output beam. The desired change of magnification of the beam waist diameter is achieved without a mutual movement of individual members of the optical system just by the change of optical powers of the first two tunable-focus lenses. For this type of the optical system we presented equations that

enable to calculate the required focal lengths of individual members depending on the value of the axial position of the beam waist of the input Gaussian beam and the required magnification of the system. These equations can be used for the initial (paraxial) design of such optical system. The method for obtaining the paraxial parameters of such a system was demonstrated on an example of a paraxial design of a laser beam expander based on the optical setup of the investigated zoom system. Finally, the advantage of proposed system was proven by showing that the change of paraxial parameters of the system (magnification range) can be easily done just by the replacement of the third element of the optical system with a lens of different focal length. The problem of influence of aberrations of optical system on the transformation of the Gaussian beam is not covered in our present work, however in case of interest one can find an analysis of this problem, for example, in Refs.<sup>15,16</sup>.

## ACKNOWLEDGMENT

This work has been supported by the grant 13-31765S from the Czech Science Foundation.

## REFERENCES

- [1] Saleh, B. E. A. and Teich, M. C., [Fundamentals of Photonics], 2nd Ed, Wiley-Interscience, New York, (2007).
- [2] Kogelnik, H. and Li, T. , "Laser beams and resonators," *Appl. Opt.* 5(10), 1550-1567 (1966).
- [3] Yariv, A. , [Optical Electronics], Oxford University Press, Oxford, (1990).
- [4] Siegman, A. E., [Lasers], University Science Book, Mill Valley, CA, (1986).
- [5] Trager F. (Ed.), [Springer Handbook of Lasers and Optics], Springer, Berlin, (2007).
- [6] Hodgson, N. and Weber, H., [Laser Resonators and Beam Propagation], Springer, Berlin, (2005).
- [7] Webb, C. E. and Jones, J. D. C., [Handbook of Laser Technology and Applications], Vol. I – III, IOP Publishing, Bristol, (2004).
- [8] Donges, A. and Noll, R., [Laser Measurement Technology], Springer, Berlin, (2015).
- [9] Miks, A., [Applied Optics], Czech Technical University Press, Prague, (2009).
- [10] Ge, F., Wang, S., Zhao, D. , "The representation of waist-to-waist transformation of Gaussian beams by the scaled fractional Fourier transform, " *Opt. Laser Technol.* 39(4), 831-4 (2007).
- [11] Laures, P., "Geometrical Approach to Gaussian Beam Propagation, " *Appl. Opt.* 6(4), 747-55 (1967).
- [12] Chu, T.S. "Geometrical Representation of Gaussian Beam Propagation," *Bell Syst. Tech. J.* 45(2), 287-99 (1966).
- [13] Casperson, L.W., "Synthesis of Gaussian beam optical systems, " *Appl. Opt.* 20(13), 2243-9 (1981).
- [14] Andrews, L.C., Miller, W.B., Ricklin, J.C., "Geometrical representation of Gaussian beams propagating through complex paraxial optical systems, " *Appl. Opt.* 32(30), 5918-29 (1993).
- [15] Mahajan, V. N., "Uniform versus Gaussian beams: a comparison of the effects of diffraction, obscuration, and aberrations, " *J. Opt. Soc. Am. A* 3(4), 470-485 (1986).
- [16] Miks, A. and Novak, J., "Propagation of Gaussian beam in optical system with aberrations, " *Optik* 114(10), 437-440 (2003).
- [17] Miks, A. and Novak, P., "Paraxial properties of three-element zoom systems for laser beam expanders, " *Opt. Express* 22(18), 21535-21540 (2014).
- [18] Miks, A. and Novak, P., "Paraxial properties of three-element zoom system for laser beam expanders based on tunable-focus lenses, " *Opt. Express* 23(12), 15635-15640 (2015).
- [19] Clark, A. D. , [Zoom Lenses], Adam Hilger, London, (1973).
- [20] Miks, A., Novak, J., and Novak, P. , "Method of zoom lens design, " *Appl. Opt.* 47(32), 6088-6098 (2008).
- [21] Tanaka, K., "Paraxial analysis of mechanically compensated zoom lenses. 1: Four-component Type, " *Appl. Opt.* 21(12), 2174-83 (1982).
- [22] Matter, G. H. and Luszcz, E. T., "A Family of Optically Compensated Zoom Lenses, " *Appl. Opt.* 9(4), 844-8 (1970).
- [23] Tanaka, K., "Erratum: Paraxial Analysis of Mechanically Compensated Zoom Lenses. 1: Four-component Type, " *Appl. Opt.* 21(21), 3805-5 (1982).
- [24] Tanaka, K., "Paraxial Analysis of Mechanically Compensated Zoom Lenses. 2: Generalization of Yamaji Type V," *Appl. Opt.* 21(22), 4045-53 (1982).

- [25] Tanaka, K., "Paraxial Analysis of Mechanically Compensated Zoom Lenses. 3: Five-component Type, " *Appl. Opt.* 22(4), 541-53 (1983).
- [26] Hazra, L. and Pal, S., "A novel approach for structural synthesis of zoom systems," *Proc. SPIE 7786*, 778607, (2010).
- [27] Mikš, A., and Novák, J., "Paraxial analysis of four-component zoom lens with fixed distance between focal points," *Appl. Opt.* 51(21), 5231-5235 (2012).
- [28] Mikš, A., and Novák, J., "Design of a double-sided telecentric zoom lens," *Appl. Opt.* 51(24), 5928-5935 (2012).
- [29] Mikš, A., Novák, J., Novák, P., "Three-element zoom lens with fixed distance between focal points," *Opt. Lett.* 37(12), 2187-2189 (2012).
- [30] Mikš, A., and Novák, J., "Paraxial analysis of three-component zoom lens with fixed distance between object and image points and fixed position of image-space focal point, " *Opt. Express* 22(13), 15571-15576 (2014).
- [31] Kryszczyński T. and Mikucki, J., "Structural optical design of the complex multi-group zoom systems by means of matrix optics, " *Opt. Express* 21(17), 19634-19647 (2013).
- [32] Pal, S. and Hazra, L., "Ab initio synthesis of linearly compensated zoom lenses by evolutionary programming, " *Appl. Opt.* 50(10), 1434-1441 (2011).
- [33] Mikš, A., and Novák, J., "Analysis of Two-Element Zoom Systems Based on Variable Power Lenses," *Opt. Express* 18(7), 6797-6810 (2010).
- [34] Mikš, A., and Novák, J., "Analysis of three-element zoom lens based on refractive variable-focus lenses," *Opt. Express* 19(24), 23989-23996 (2011).
- [35] Mikš, A., and Novák, J., "Paraxial imaging properties of double conjugate zoom lens system composed of three tunable-focus lenses, " *Opt. Lasers Eng.* 53, 86-89 (2014).
- [36] Mikš, A., and Novák, J., "Three-component double conjugate zoom lens system from tunable focus lenses, " *Appl. Opt.* 52(4), 862-865 (2013).
- [37] Mikš, A., and Novák, J., "Paraxial analysis of zoom lens composed of three tunable-focus elements with fixed position of image-space focal point and object-image distance, " *Opt. Express* 22(22), 27056-27062 (2014).
- [38] Welford, W. T., [Aberrations of the Symmetrical Optical Systems], Academic, London, (1974).
- [39] Herzberger, M., [Modern Geometrical Optics], Interscience, New York, (1958).
- [40] Smith, W., [Modern optical engineering], 4th Ed, McGraw-Hill, New York, (2007).
- [41] Berek, M., [Grundlagen der Praktischen Optik], Walter de Gruyter & Co., Berlin, (1970).
- [42] Ray, S. F., [Applied Photographic Optics], Focal Press, Oxford, (2002).

**B.7 Příspěvek na konferenci DGaO: Influence of selection of discrete set of points on calculation of correlation coefficient in processing of image data [40]**

# Influence of Selection of Discrete Set of Points on Calculation of Correlation Coefficient in Processing of Image Data

Pavel Kulmon\*, Antonin Miks, Jiri Novak, Pavel Novak

\*Czech Technical University in Prague, Faculty of Civil Engineering, Department of Physics, Thakurova 7, 166 29 Prague, Czech Republic

<mailto:novakji@fsv.cvut.cz>

This work describes an analysis of the calculation of correlation coefficient in processing of image data. The correlation analysis is then used for a quantitative evaluation of interferograms in optical testing.

## 1 Introduction

A correlation coefficient is a reliable parameter for a comparison of digital images and correlation techniques find applications in various parts of science and engineering.

We perform an analysis of the calculation of a correlation coefficient between two functions (images) which are defined in a specified area on a discrete set of points. The influence of the number of points and their distribution in the specified area on the calculation of the correlation coefficient is investigated. The results of this analysis were used in a method for evaluation of interferograms, which can be in principle used for measurements of the shape of optical surfaces, where the correlation coefficient is used as a measure of the similarity of interference patterns.

## 2 Correlation coefficient

Suppose that we have two sets of data (digital images), e.g. two interferograms  $I_1$  and  $I_2$ . The correlation coefficient  $R_{12}$  between two data sets is defined as

$$R_{12} = \frac{\text{cov}(I_1, I_2)}{\sqrt{\text{var}(I_1) \text{var}(I_2)}}, \quad R_{12} \in \langle -1, 1 \rangle. \quad (1)$$

where  $\text{var}(I_1)$  and  $\text{var}(I_2)$  denote the variances of the functions  $I_1$  and  $I_2$ , and  $\text{cov}(I_1, I_2)$  is the covariance.

The correlation coefficient on a discrete set of 2D image data (between image  $I_1$  and  $I_2$ ) can be calculated using the following formula

$$R_{12} = \frac{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \Delta I_1(x_i, y_j) \Delta I_2(x_i, y_j)}{\sqrt{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N [\Delta I_1(x_i, y_j)]^2} \sqrt{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N [\Delta I_2(x_i, y_j)]^2}}, \quad (2)$$

where indices  $(i, j)$  define individual pixels of images with coordinates  $(x_i, y_j)$ ,  $M$  and  $N$  define the size of the image, values  $\bar{I}_1$  and  $\bar{I}_2$  denote mean values and

$$\begin{aligned} \Delta I_1(x_i, y_j) &= I_1(x_i, y_j) - \bar{I}_1, \\ \Delta I_2(x_i, y_j) &= I_2(x_i, y_j) - \bar{I}_2. \end{aligned} \quad (3)$$

The discretization of 2D area into a set of points, from which the correlation coefficient is calculated, affects the value of the correlation coefficient. We analyzed different types of the selection of points in 2D area of a circle (rectangular grid, radially distributed points, randomly distributed points) - Fig.1. We performed an analysis on correlation of special 2D data - interferograms (Fig.2).

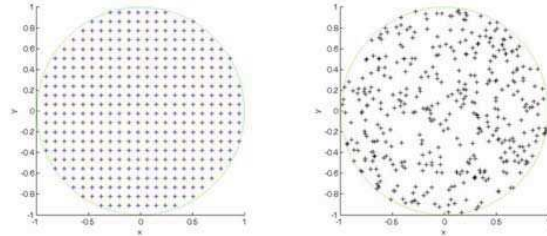


Fig. 1 Rectangular uniform grid and randomly distributed grid.

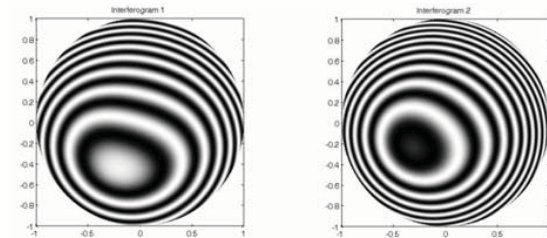


Fig. 2 Interferograms for analysis.

The results of the analysis for different types of discretization grid are given in Table 1.



grid of $n^2$ points	rectangular grid	radial grid	random grid
$n = 20$	0.2951	0.2865	0.3288
$n = 50$	0.2858	0.2859	0.2743
$n = 100$	0.2838	0.2858	0.2736
$n = 200$	0.2855	0.2858	0.2818
$n = 1000$	0.2858	0.2858	0.2865

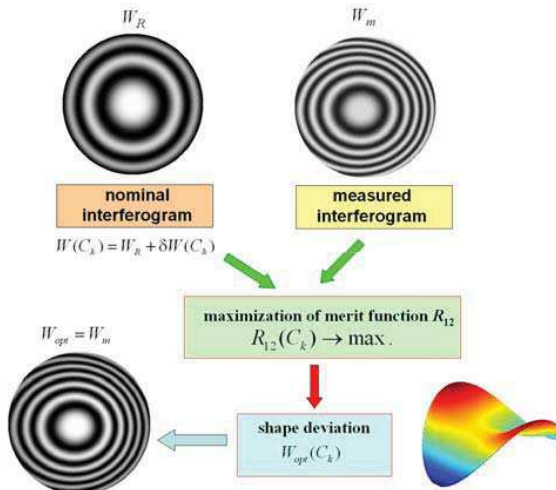
**Tab. 1** Correlation coefficient for different grids and number of grid points

### 3 Application to interferogram testing

The correlation coefficient between two interference patterns may serve as a very robust parameter for the determination of the similarity of interferograms, which is very sensitive even to small deviations between shapes of interference fringes. One can use it for the quantitative comparison of interferograms and evaluation of shape deviations of optical surfaces in interferometric testing.

We used correlation for the quantitative evaluation of the fringe pattern during the interferometric testing of the shape of optical surfaces. The method uses the correlation coefficient as the measure of the similarity between the virtual (nominal) interferogram, which corresponds to the nominal shape of the tested surface, and the measured interferogram, which corresponds to the fabricated optical surface that is interferometrically tested.

The principle of the evaluation method is schematically shown in Fig. 3.



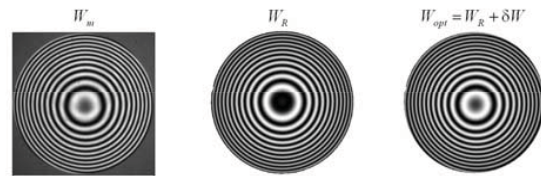
**Fig. 3** Principle of correlation analysis for quantitative interferogram evaluation.

The evaluation method compares the shape of measured interferogram with the nominal shape by means of the optimization of the correlation coefficient value. That means to find such function

$\delta W(x, y)$ , when both interferograms will be the most similar, i.e. when the fringe shape is identical in both interferograms. This case corresponds to the maximum value of the correlation coefficient between interferograms. Then, it holds that the optical path difference in both interferograms is the same, i.e.  $W_m = W_R + \delta W$ . The function  $\delta W$  can be, for example, described by Zernike polynomial coefficients  $C_k$ . One can calculate very precisely deviations of the tested surface shape from the nominal shape by the mentioned principle.

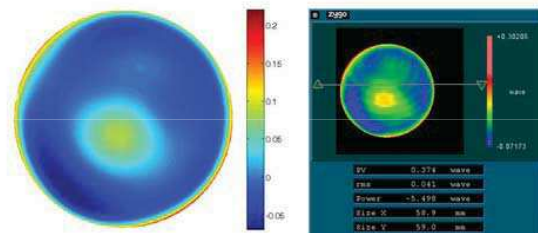
### 4 Conclusions

We analyzed the functionality of the described evaluation method on various types of real interferometric measurements and compared the obtained results to measurements with the Zygo interferometer GPI/XP. Figure 4 presents the interferogram of the tested flat surface (Fig. 4 left), nominal interferogram (Fig. 4 middle) and the corresponding interferogram (Fig. 4 right) after the optimization process.



**Fig. 4** Interferograms of tested surface.

The corresponding calculated optical path difference is shown in Fig. 5. The results were compared to the measurement using the Zygo interferometer (Fig. 5 right).



**Fig. 5** Calculated optical path difference.

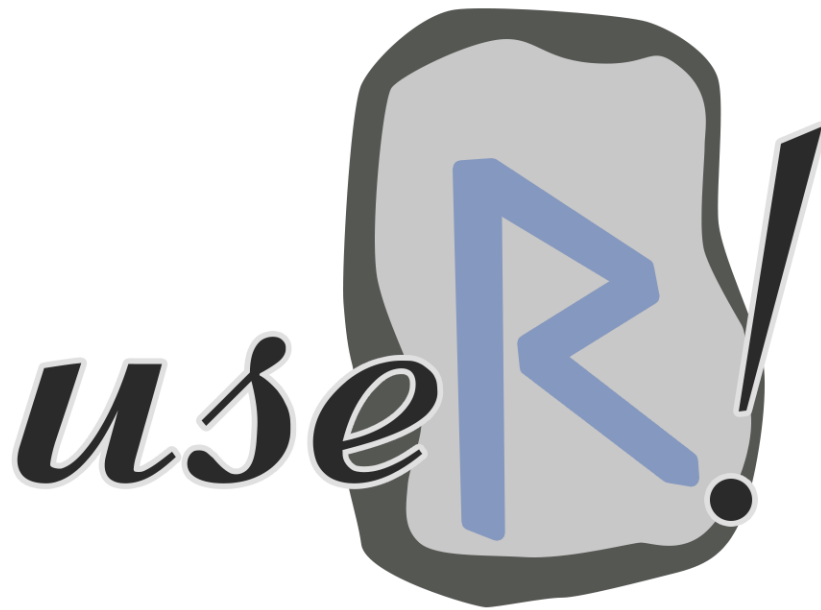
One can see that measurement results are very similar (correlation method: rms  $0.041\lambda$ , Zygo MetroPro: rms  $0.041\lambda$ , piston, tilt and defocus removed).

### Acknowledgement

This work has been supported by the grant 13-31765S from the Czech Science Foundation.

## B.8 Příspěvek na konferenci useR2015: Hough, analytic curves detection using the Hough transform [41]

# Book of Abstracts



```
> sessionInfo()  
[1] "June 30 - July 3, 2015"  
[2] "Aalborg, Denmark"
```

June 27, 2015

Contents	14
Disease mapping and ecological regression for Belgium Shiny application . . . . .	189
<i>Tom De Smedt</i>	
Documents Clustering in R . . . . .	190
<i>Sonya Abbas</i>	
Dose reconstruction based on questionnaires with taking into account human factor uncertainty . . . . .	191
<i>Konstantin Chizhov</i>	
Early Detection of Long Term Evaluation Criteria in Online Controlled Experiments . . . . .	192
<i>Yoni Schamroth</i>	
Easily access and explore your Hadoop Big Data with visualisations and R/TERR jobs . . . . .	193
<i>Ana Costa e Silva</i>	
easyROC: an interactive web-tool for ROC analysis . . . . .	194
<i>Dincer Goksuluk</i>	
Enlighten the past: The R package Luminescence - signal, statistics and dating of environmental dynamics - . . . . .	195
<i>Sebastian Kreutzer</i>	
Extending the Quasi-Symmetry Model: Quasi-Symmetry Model with n Degree Symmetry . . . . .	196
<i>Tan Teck Kiang</i>	
From data.frames to data.tables: optimization strategies for analyzing petabytes of cancer data . . . . .	197
<i>Malene Juul</i>	
Goodness-of-fit tests for the Exponential and the Weibull distributions	198
<i>Meryam Krit</i>	
Hough: analytic curves detection using the Hough transform . . . . .	199
<i>Pavel Kulmon, Jana Noskova, David Mraz</i>	
Hyperspectral Data Analysis in R: The new hsdar-package . . . . .	200
<i>Lukas W. Lehnert</i>	
KFAS: an R package for exponential family state space modelling . . . . .	201
<i>Jouni Helske</i>	
Large-scale multinomial regression: Modelling the mutation rates in whole-genome cancer data . . . . .	202
<i>Johanna Bertl</i>	
Learning Graphical Models for Parameter Tuning . . . . .	203
<i>Marco Chiarandini</i>	
Logr: An R package for logging in the R idiom . . . . .	204
<i>Davor Cubranic and Jenny Bryan</i>	

## Hough: analytic curves detection using the Hough transform

Pavel Kulmon, Jana Noskova, David Mraz

*Department of Mathematics, Faculty of Civil Engineering, Czech Technical University in Prague, Czech Republic*

<http://www.fsv.cvut.cz/index.php.en>

**Abstract:** The Hough transform is a feature extraction technique and its purpose is to find imperfect instances of objects within a certain class of shapes. The transformation has been successfully used in several areas such as computer vision, image analysis and last but not least, photogrammetry and remote sensing. The foundation of this work is built upon the book „Introduction to image processing using R: learning by examples “ written by A.C. Frery and T. Perciano, where were outlined options for working with the digital images using the R-project. Our main aim is to develop the new R package Hough. In this package algorithms for non-user image evaluation will be implemented. Now the package contains the Hough transformation for a line detection using the accumulator. We also want to incorporate other Hough techniques like the recognition of more advanced analytic curves. The preparation of the non-user image evaluation consists of various methods such as the image grayscaling, the thresholding or the histogram estimation. The transfer from the gray scaled image to binary is realised by the approximation of the derivatives, which were computed by the Sobel operator. The new R package Hough will be the collection of all mentioned techniques.

*Keywords:* computer vision, convolution, Hough transform, edge detection

# Hough: analytic curves detection using the Hough transform

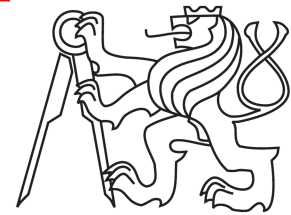
## The Hough transform implementation in R

David Mraz & Pavel Kulmon

CTU FCE - Department of Mathematics

david.mraz@fsv.cvut.cz

pavel.kulmon@fsv.cvut.cz



### Abstract

The Hough transform is a feature extraction technique and its purpose is to find imperfect instances of objects within a certain class of shapes. The transformation has been successfully used in several areas such as computer vision, image analysis and fast but not least, photogrammetry and remote sensing.

The foundation of this work is built upon the book [1]... Introduction to image processing using R: learning by examples written by A.C. Frery and T. Perciano, where were outlined options for working with digital images using the R-project. Our main aim is to develop the new R package *hough*. In this package algorithms for non-user image evaluation will be implemented. Now the package contains the Hough transformation for a line detection using an accumulator. We also want to incorporate other Hough techniques like a recognition of more advanced analytic curves.

A preparation of a non-user image evaluation consists of various methods such as image grayscale, thresholding or histogram estimation. The transfer from the gray scale image to binary is realised by an approximation of derivatives, which were computed by the Sobel operator.

The new R package *hough* will be a collection of all mentioned techniques.

### Introduction

The success of geometric shapes detection in digital image is strongly dependent on its preprocessing. Obtaining information from color image is very difficult. For this reason is necessary to consider options and methods of the color to grayscale image conversion. Grayscale of the image works not only for the image function reduction, but is also suitable for increasing the difference between bright and dark textures. Removing of small image details is achieved by low-pass filtration. This helps us to avoid wrong interpretation of digital image. Another advantage of low-pass filtration is that edges are highlighted after detection. Edge detection (included in high-pass filtration) serves to transform grayscale image. In the transformed image the brightest pixels are those, which lay on some edges. Conversion to binary image is done using thresholding.

### Main Objectives

- To explore possibilities of R in the sense of digital image processing.
- To consider suitability and complexity of the implementation of well known algorithms, which are related to given topic.
- Implementation of the necessary functions for image pre-processing.
- Implementation of basic algorithms of the Hough transform for straight lines detection in digital image.
- Implementation of algorithms for more complex geometric shapes detection (circles and ellipses).
- To explore possibility of implementation of the fast Hough transform algorithm. This helps us to increase efficiency of computations.

### Results

Shown outputs are generated using already created functions. The *rgb2grs* function is used for converting color image to grayscale image. Input parameter of function *inputRGBImage* is the original array, which represents color image in RGB (function works also with the *imagematrix* data type, which was developed in *ripa* package [1]). The second input parameter is *method* character string data type. Choosing parameter *method*, user is able to select grayscale method. This parameter can take values *average*, *lightness*, *luminosity*, *luma*, *luminance*, *mindecomposition*, *maxdecomposition* and *singlecolourR*, *singlecolourG*, *singlecolourB*. Informations and algorithms of single methods are e.g. in [5]. In the fig. 1a the original color image is shown and in fig. 1b there is the same image converted to grayscale image with parameter *average*.

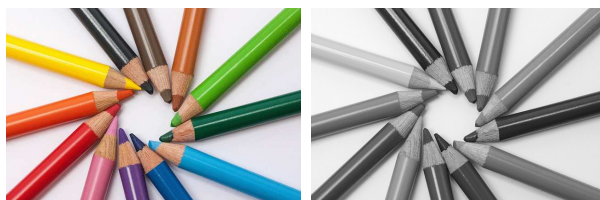


Figure 1: Original and grayscale image

The function *sobeldetect* performs standard edge detection using Sobel edge operator. Sobel edge detection is currently performed by the *sobel* function from the package *rimage*. Apart from the *sobel* function can our function have multiple data as an output. An input of our function is an array, which represents grayscale image. An output value is the *edgeParameters*. This value is stored as list data type. This list contains members *G*, *Gx*, and *Gy*. Member *G* is an array, where are stored intensity distribution of detected edges. And *Gx* resp. *Gy* contain intensity of derivations of image function in the axis *x* resp. *y* and *theta*. All of output members are stored as an array data type of the same size as input grayscale image. Necessary thresholding for grayscale image to binary image conversion can be done using *thresholding* from the *rimage* package. This feature provides us both fixed thresholding and the possibility of using discriminant analysis. In the fig. 2a is grayscale image from the fig. 1 after edge intensity distribution computation using the *sobeldetect* function. In the fig. 2b is the same image after thresholding.

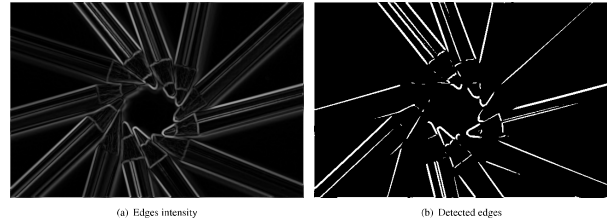


Figure 2: The Sobel edge

The function *houghlines* performs straight lines detection in digital image. Straight lines detection is performed by an accumulator, whose parameters are based on a normal expression of a line. In this expression is a line defined by two parameters  $\rho$  and  $\theta$ , see [2]. An input of this function is an array, which represents single pixels of edges. We can get this array using the *edges* function. As an input for this function is used thresholded image after Sobel edge detection. The next input parameters of the *houghlines* function are *maxRho*, *rhoFrequency* and *thetaFrequency*. The *maxRho* represents maximum distance between a line and an origin. The *rhoFrequency* respectively *thetaFrequency* is the  $\rho$  respectively  $\theta$  parameter quantization. In the fig. 3a is Hough parametric space after straight lines detection in digital image in the fig. 2. In the fig. 3b is this space after thresholding. Bright pixels now sign detected position of straight lines parameters.

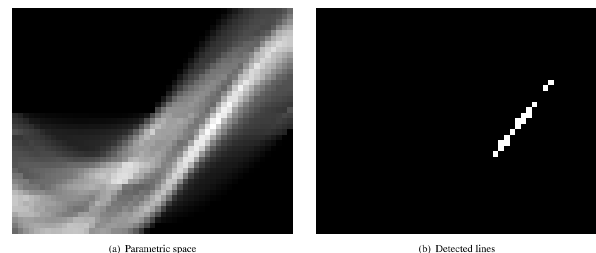


Figure 3: Hough straight lines

### Conclusions

- The function *rgb2grs* allows us to choose from a wide range of grayscale methods.
- For image preprocessing was implemented Sobel edge detector. Application of this detector provides the *sobeldetect* function.
- The function *houghlines* performs straight lines detection in digital image using the Hough transformation. The *houghlines* function is based on normal expression of a line.
- The *Hough* package contains whole bunch of support functions, which will increase efficiency in digital image processing. The detailed description of functions will be available as soon as the package will be distributed.
- The overall improvement of raster data processing efficiency should be possible by developing functions in C++ and by connecting a source code to R using the *Rcpp* package. This will be aim of our future research.

### Forthcoming Research

- To increase efficiency by using fast Hough transform algorithms (FHT).
- To adapt features, which will decrease requirement of user interventions.
- To create functions for detection of other geometric shapes (e.g. circles, ellipse) using the Hough transform.
- To create package named *hough*, which will contain all functions for image preprocessing and Hough transform algorithms.

### References

- [1] FRERY, Alejandro C a Talita PERCIANO. *Introduction to image processing using R: learning by examples*. xv, 87 pages. SpringerBriefs in computer science. ISBN 1447149491.
- [2] DUDA, Richard O. a Peter E. HART, *Use of the Hough transformation to detect lines and curves in pictures*, 18 pages, Comm. ACM, Vol 15, No.1
- [3] SZELINSKY, Richard *Computer Vision: Algorithms and Applications*, 110 pages., el. published 2009
- [4] SKLANSKY, J. *On The Hough Technique for Curve Detection*, IEEE Transactions On Computers, vol. c-27, no. 10, October 1978
- [5] KANAN, Christopher, Garrison W. COTTRELL. (2012) *Color-to-Grayscale: Does the Method Matter in Image Recognition?* PLoS ONE 7(1): e29740. doi:10.1371/journal.pone.0029740
- [6] REKTORYS, Karel. *Přehled užití matematiky*. 7. vyd. Praha: Prometheus, 2000, xxxii, 874 s. Česká matice technická (Prometheus). ISBN 80-7196-181-7.
- [7] REKTORYS, Karel. *Přehled užití matematiky*. 7. vyd. Praha: Prometheus, 2000, xxxii, 720 s. Česká matice technická (Prometheus). ISBN 80-7196-180-9.

### Acknowledgement

This work is supported by the Grant Agency of the Czech Technical University in Prague, grant No. SGS15/005/OHK1/1T/11.

**B.9 Příspěvek na Rektorysově konferenci: Hough:hledání analytických křivek využitím Houghovy transformace v  $\mathbb{R}$  [42]**

**STUDENTSKÁ KONFERENCE**

**A**

**REKTORYSOVA SOUTĚŽ**

**SBORNÍK  
ABSTRAKTŮ**

**ROČNÍK 2015**



## Nesoutěžní příspěvky

Hana Horáková, Daniela Jarušková	26
<i>Odhad posunu ročních maxim průtokových řad</i>	
David Mráz, Pavel Kulmon	27
<i>Hough: Hledání analytických křivek využitím Houghovy transformace v <math>R</math></i>	
Jitka Pišová	28
<i>Vybrané vlastnosti silných řešení Navierových-Stokesových rovnic</i>	

# Hough: hledání analytických křivek využitím Houghovy transformace v R

Bc. David Mráz\*, Bc. Pavel Kulmon<sup>‡</sup>

\*Katedra matematiky FSv ČVUT, david.mraz@fsv.cvut.cz

<sup>‡</sup>Katedra fyziky FSv ČVUT, pavel.kulmon@fsv.cvut.cz

**Abstrakt.** Houghova transformace je technika jejímž účelem je vyhledání nedokonalých výskytů objektů určitého, předem zvoleného, tvaru. Houghova transformace je úspěšně využívána v mnoha oblastech vědy a techniky jako je počítačové vidění, analýza obrazu nebo také fotogrammetrie a dálkový průzkum země.

Obsah této práce je postaven na knize „Introduction to image processing using R: learning by examples“ autorů A.C. Frery a T. Perciano, ve které jsou popsány možnosti práce s digitálními obrazovými daty v prostředí software R-project. Nášim hlavním záměrem je vyvinout nový balíček pro prostředí R-project jehož pracovní název je **Hough**. V tomto balíčku budou zahrnuty algoritmy pro zpracování obrazu bez zásahu uživatele. V současné době balíček obsahuje algoritmy pro detekci linií užitím tzv. *akumulátoru*. V budoucnu bychom také do tohoto balíčku rádi zahrnuli další algoritmy Houghovy transformace pro detekci pokročilých analytických křivek (kružnice, elipsy).

Příprava obrazu pro jeho vyhodnocení bez zásahu uživatele zahrnuje různé metody jako je graycaling, thresholding nebo vyhodnocení histogramu. Převod grayscaleovaného obrazu na binární je prozatím realizován pomocí výpočtu aproximace derivací získaných pomocí Sobelova operátoru.

Nový balíček **Hough** bude složen ze všech výše zmíněných funkcí.

**Poděkování.** Práce byla podpořena grantem GA ČVUT v Praze SGS15/005/OHK1/1T/11.

## Literatura:

- [1] FRERY, Alejandro C and Talita PERCIANO. Introduction to image processing using R: learning by examples. xv, 87 pages. SpringerBriefs in computer science. ISBN 1447149491.
- [2] DUDA, R. O. and HART, P. E. Use of the Hough transformation to detect lines and curves in pictures, Commun. Ass. Comput. Mach., vol. 15, pp. 11-15, Jan. 1972.
- [3] PARKER, J. Algorithms for image processing and computer vision. 2nd ed. Indianapolis, Ind.: Wiley Publishing, Inc., 2011, xxiv, 480 p.
- [4] SKLANSKY, J. On The Hough Technique for Curve Detection, IEEE Transactions On Computers, vol. c-27, no. 10, October 1978