

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ

FAKULTA STAVEBNÍ

STUDIJNÍ PROGRAM GEODÉZIE A KARTOGRAFIE

OBOR GEOMATIKA



DIPLOMOVÁ PRÁCE

ŠÍŘENÍ A DIFRAKCE ELEKTROMAGNETICKÝCH VLN

Vedoucí práce: prof. RNDr. Antonín Mikš, CSc.

Katedra fyziky

Květen 2016

Pavel Kulmon



ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: Kulmon Jméno: Pavel Osobní číslo: 396889
Zadávající katedra: katedra fyziky
Studijní program: Geodézie a kartografie
Studijní obor: Geomatika

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce: Šíření a difrakce elektromagnetických vln
Název diplomové práce anglicky: Electromagnetic waves propagation and diffraction

Pokyny pro vypracování:
Práci vypracujte podle pokynů vedoucího diplomové práce

Seznam doporučené literatury:
A.Mikš, Aplikovaná optika, ČVUT, Praha 2009
J.Stratton, Teorie elektromagnetického pole, SNTL, Praha 1961
M.Born, E.Wolf, Principles of Optics, Oxford University Press, 1964

Jméno vedoucího diplomové práce: Prof.RNDr.Antonín Mikš,CSc

Datum zadání diplomové práce: 22.2.2016 Termín odevzdání diplomové práce: 22.5.2016

Podpis vedoucího práce

Podpis vedoucího katedry

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Beru na vědomí, že jsem povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je nutné uvést v diplomové práci a při citování postupovat v souladu s metodickou příručkou ČVUT „Jak psát vysokoškolské závěrečné práce“ a metodickým pokynem ČVUT „O dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací“.

Datum převzetí zadání

Podpis studenta(ky)

Abstrakt

V práci jsou popsány základní rovnice elektromagnetického pole a zkoumány jeho vlastnosti na základě jeho charakteristických vektorů. Dále jsou v práci uvedeny a odvozeny základní vztahy pro popis difrakce na rovinném stínítku s kruhovým nebo obdélníkovým otvorem a dále obecné vztahy pro popis difrakce pomocí skalárního a vektorového vlnového pole. Jsou také odvozeny a uvedeny základní vztahy pro popis gaussovských svazků které jsou emitovány většinou laserů.

Klíčová slova

Maxwellovy rovnice, vlnová rovnice, Helmholtzova rovnice, Lorentzova síla, rovinné vlny, polarizace, skalární teorie difrakce, vektorová teorie difrakce, Stratton-Chu vztahy, gaussovské svazky

Abstract

This thesis presents fundamental equations of electromagnetic field and focuses on its properties based on its characteristic vectors. There are also described and derived fundamental relations for diffraction on flat screen with circular or rectangular aperture. General equations describing diffraction using scalar or vector wave field are shown. Gaussian beams, the fundamental of almost all lasers, are derived from wave equation using simple predictions.

Keywords

Maxwell equations, wave equation, Helmholtz equation, Lorentz force, planar waves, polarization, scalar diffraction theory, vector diffraction theory, Stratton-Chu equations, gaussian beams

Poděkování

Rád bych na tomto místě poděkoval vedoucímu mé diplomové práce, panu prof. RNDr. Antonínu Mikšovi, CSc. a stejně tak i celé skupině Aplikované Optiky na katedře fyziky FSv ČVUT za vřelý a otevřený přístup.

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že tuto diplomovou práci *Šíření a difrakce elektromagnetických vln* jsem vypracoval a sepsal zcela samostatně. Veškerá použitá literatura a materiály jsou uvedeny v sekci Literatura.

V Praze dne _____

-

(podpis autora)

Obsah

Úvod	4
1 Elektromagnetické pole	6
1.1 Maxwellovy rovnice	6
1.2 Hraniční podmínky	7
1.3 Lorentzova síla	8
1.4 Potenciály elektromagnetického pole	9
2 Elektromagnetické vlny	11
2.1 Vlnová rovnice	11
2.2 Metody řešení vlnové rovnice	13
2.2.1 Harmonické vlny	13
2.2.2 Rovinné harmonické vlny	14
2.2.3 Polarizace rovinné vlny	15
2.3 Skalární vlnové pole	16
2.3.1 Metody řešení Helmholtzovy rovnice	16
2.3.1.1 Spektrum rovinných vln	16
2.3.1.2 Metoda Greenovy funkce	17
2.3.1.3 Fourierova metoda	22
2.4 Vektorové vlnové pole	34
2.4.1 Spektrum rovinných vln	34
2.4.2 Stratton-Chu integrály	40
2.4.3 Přímá integrace Maxwellových rovnic	45
2.5 Fresnelova a Fraunhoferova aproximace difrakčního integrálu	48
2.5.1 Aproximace difrakčního integrálu	48
2.5.2 Difrakce na obdélníkovém otvoru	50
2.5.3 Difrakce na kruhovém otvoru	52
2.5.4 Difrakce na mřížce	54
2.5.5 Gaussovské svazky	57
3 Závěr	64
A Doplnující matematický aparát	69
A.1 Diferenciální operátory a vektorové identity	69
A.2 Integrální věty	70
A.3 Fourierova transformace	70

B Publikace	71
B.1 Článek JMO: Vliv prostředí před optickou soustavou na přesnost měření optickými přístroji v geodézii a průmyslu	72
B.2 Článek JMO: Tříčlenný pankratický systém pro transformaci gaussovských svazků	80
B.3 Článek JMO: Vliv výběru bodů z dané oblasti na stabilitu korelačního koeficientu při zpracování obrazových dat	87
B.4 Článek JMO: Tři způsoby výpočtu difrakce světla na otvoru	93
B.5 Příspěvek na konferenci SPIE: Three-component zoom systems for transformation of Gaussian laser beams	99
B.6 Příspěvek na konferenci SPIE: Analysis of three-element zoom systems for laser beam expanders with tunable-focus lenses	107
B.7 Příspěvek na konferenci DGaO: Influence of selection of discrete set of points on calculation of correlation coefficient in processing of image data	118
B.8 Příspěvek na konferenci useR2015: Hough, analytic curves detection using the Hough transform	121
B.9 Příspěvek na Rektorysově konferenci: Hough:hledání analytických křivek využitím Houghovy transformace v R	126

Seznam obrázků

2.1	Geometrie Kirchhoffova řešení	19
2.2	Geometrie Sommerfeldova řešení	21
2.3	Obdélníková apertura	50
2.4	Fraunhoferova difrakce na obdélníkovém otvoru, $z_P = 10mm$, $a = 1mm$, $b = 1mm$	51
2.5	Kruhová apertura	52
2.6	Fraunhoferova difrakce na kruhovém otvoru, $z_P = 10mm$, $a = 1mm$. .	54
2.7	Změna vzájemné vzdálenosti dvou dopadajících paprsků	56
2.8	Gaussovský svazek	59

Úvod

Světlo je elektromagnetické záření, jehož šíření prostorem se řídí Maxwellovými rovnicemi. Tyto rovnice jsou pojmenované po J. C. Maxwellovi, který je publikoval v roce 1865 a později je po něm do vektorového tvaru upravil O. Heaviside. Difrakce elektromagnetických vln, zaujímající významné místo v teorii elektromagnetického pole, má rozsáhlé praktické uplatnění v řadě oblastí vědy a techniky. Fundamentální roli hraje zejména v oblasti radiokomunikací a v teorii optického zobrazení. Široké uplatnění též nachází v optické metrologii, kosmické geodézii a v dalších oblastech vědy a techniky.

Z důvodu vysoké důležitosti Maxwellových rovnic je uvedeme v první kapitole společně s materiálovými vztahy a dalšími důležitými souvislostmi (rovnice kontinuity, Lorentzova síla).

Druhou kapitolu již věnujeme přímo elektromagnetickým vlnám. Ukážeme v ní, že ze soustavy Maxwellových rovnic můžeme jednoduchými úpravami odvodit vlnovou rovnici a dále, že funkce, která je jejím řešením, musí být také řešením rovnice Helmholtzovy (při harmonické časové závislosti). Bude následovat rozbor nejběžnějších uvažovaných řešení vlnové rovnice, tedy vln s harmonickou časovou závislostí s rovinným tvarem vlnoplochy a jejich polarizace. Dále budeme věnovat pozornost skalárnímu vlnovému poli, tedy vlnovému poli, které je řešením skalární Helmholtzovy rovnice. Uvedeme zde tři metody používané především v aplikované optice. Dále ukážeme, že známe-li řešení skalárního vlnového pole, pak návratem k Maxwellovým rovnicím můžeme z tohoto řešení snadno odvodit řešení charakteristických vektorů elektromagnetického pole. Konec druhé kapitoly budeme věnovat odvození aproximací Sommerfeldova difrakčního integrálu, které jsou používány pro přímé vyšetření rozložení intenzity při difrakci světla na kruhovém nebo obdélníkovém otvoru a na mřížce. Nakonec provedeme odvození gaussovských svazků, které hrají velmi důležitou roli v laserové fyzice, neboť ve většině případů lze záření vystupující z laserů popsat právě těmito svazky.

V této práci si klademe za cíl:

1. stručně a výstižně shrnout dosavadní poznatky o elektromagnetickém poli ve vztahu k difrakční úloze;
2. uvést možnosti řešení Maxwellových rovnic pomocí řešení vlnové rovnice a z ní vyplývající Helmholtzovy rovnice;
3. uvést možnosti řešení Helmholtzovy rovnice pomocí skalárního vlnového pole;
4. uvést možnosti řešení Maxwellových rovnic pomocí vektorového vlnového pole;
5. uvést a ilustrovat řešení difrakční úlohy pro běžné geometrie pomocí Fresnelovy a Fraunhoferovy aproximace v Sommerfeldově difrakčním integrálu.

Na úvod ještě poznamenejme, že vzhledem k množství literatury z níž jsme čerpali a vzhledem k vzájemné propojenosti jednotlivých zdrojů, jsme se rozhodli uvést odkazy na příslušnou literaturu týkající se konkrétních částí vždy v úvodu kapitoly (tedy obecně)

a do samotného textu je již nevkládat. Kompletní seznam literatury je možno nalézt na konci textu.

Kapitola 1

Elektromagnetické pole

Znalost podstaty a principů fungování elektromagnetického pole je nezbytnou součástí přípravy pro studium optických jevů. Základními vztahy pro zkoumání elektromagnetického pole jsou Maxwellovy rovnice [1–5]. Pro vyšetření chování elektromagnetického pole v materiálovém prostředí jsou důležité materiálové rovnice [1], které udávají vztahy mezi jednotlivými vektory elektromagnetického pole. Pro vyšetření chování vektorů pole na rozhraní prostředí jsou důležité hraniční podmínky [1,4,6], které je třeba vzít v úvahu při vyšetřování difrakčních jevů [1,4,5,7–17].

1.1 Maxwellovy rovnice

Tento oddíl začneme uvedením *Maxwellových* rovnic v diferenciálním tvaru, které platí v regulárních bodech (tj. bodech kde jsou veličiny pole spojitě a jsou spojitě diferencovatelné funkce času a polohy)

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.4)$$

a také v integrálním tvaru

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}, \quad (1.5)$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \quad (1.6)$$

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \rho \cdot dV, \quad (1.7)$$

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (1.8)$$

I přesto, že výše uvedené vztahy jsou známé, uvedme pro úplnost, že \mathbf{E} nazýváme vektorem intenzity elektrického pole $[\frac{V}{m}]$, \mathbf{B} vektorem magnetické indukce $[T]$, \mathbf{D} vektorem elektrické indukce $[\frac{C}{m^2}]$ a \mathbf{H} vektorem intenzity magnetického pole $[\frac{A}{m}]$. V Maxwellových rovnicích se kromě vektorů základních charakteristik pole vyskytují dále také budící veličiny. Jsou jimi vektor hustoty proudu \mathbf{j} $[\frac{A}{m^2}]$ a objemová hustota náboje ρ $[\frac{C}{m^3}]$. Poznamenejme ještě, že u všech šesti veličin předpokládáme, že jsou funkcí času a polohy.

Aplikujeme-li operaci div na obě strany rovnice (1.1) pak s pomocí (A.9) a (1.3) získáme

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (1.9)$$

což je známá rovnice kontinuity vyjadřující vztah mezi náboji a proudy, které jsou zdroji elektromagnetického pole.

Pro výpočty v materiálovém prostředí je nezbytné k Maxwellovým rovnicím připojit také materiálové vztahy mezi vektory $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H}$ a \mathbf{j} . Vazby mezi těmito vektory jsou dány vlastnostmi prostředí a jeho stavem, nabývají např. tvaru

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H}), \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}, \mathbf{H}), \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{E}), \quad (1.10)$$

kde komplikovanost vztahů, se kterými pracujeme závisí na řešeném případě. Není-li vyšetřované pole příliš silné, uvažujeme pro materiálové vztahy lineární závislost ve tvaru

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}, \quad (1.11)$$

kde ε , μ resp. γ je permitivita prostředí, permeabilita prostředí resp. vodivost prostředí. Tyto veličiny jsou, pro homogenní izotropní prostředí, skalární.

1.2 Hraniční podmínky

Materiálové vlastnosti na rozhraní prostředí se nemění spojitě, ale skokově. Z tohoto důvodu je nutné Maxwellovy rovnice v diferenciálním tvaru (jejichž platnost je zmíněna výše) doplnit tzv. hraničními podmínkami. Je to podmínka spojitosti tangenciálních složek intenzity elektrického pole

$$E_{1t} = E_{2t}, \quad (1.12)$$

podmínka spojitosti tangenciálních složek vektoru intenzity magnetického pole, při nepřítomnosti proudu na hraniční ploše,

$$H_{1t} = H_{2t}, \quad (1.13)$$

nebo jejich nespojitosti za předpokladu, že je proud přítomen

$$H_{1t} - H_{2t} = j_s, \quad (1.14)$$

kde j_s je velikost vektoru hustoty proudu na hraniční ploše. Lze také užít vztah

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{j}_s, \quad (1.15)$$

neboť vektor intenzity magnetického pole a vektor délkové hustoty proudu jsou vzájemně kolmé. Vektor \mathbf{n} značí normálu k hraniční ploše mezi vyšetřovanými prostředními směřující do prvního z prostředí. Pro vektory elektrické a magnetické indukce platí podmínky

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s, \quad (1.16)$$

$$B_{1n} - B_{2n} = 0, \quad (1.17)$$

kde ρ_s značí plošnou hustotu náboje na hraniční ploše, a dále

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s, \quad (1.18)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0. \quad (1.19)$$

Ve všech vztazích značí pravý dolní index číslo prostředí (první, druhé) a t resp. n značí normálovou resp. tangenciální složku příslušného vektoru pole (proto se jedná o skalární veličiny). Všechny hraniční podmínky lze odvodit z Maxwellových rovnic v integrálním tvaru. Hraniční podmínky nám poskytují informaci o charakteru pole na rozhraní dvou prostředí, i když ještě neznáme samotné pole v obou prostředích.

1.3 Lorentzova síla

Pohybuje-li se náboj o velikosti Q rychlostí \mathbf{v} v elektromagnetickém poli s charakteristickými vektory \mathbf{E} a \mathbf{B} , potom na náboj toto pole působí Lorentzovou silou

$$\mathbf{F} = Q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (1.20)$$

Tato síla přímo vyplývá z Maxwellovy rovnice (1.6) kde dosadíme

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{Q}, \quad (1.21)$$

a tedy platí

$$\oint_C \frac{\mathbf{F}}{Q} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.22)$$

Použitím pravidla (A.15) a třetí Maxwellovy rovnice (1.3) získáme

$$\oint_C \frac{\mathbf{F}}{Q} \cdot d\mathbf{l} = -\iint_S \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} + \oint_C \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}, \quad (1.23)$$

což s přihlédnutím k (1.6) můžeme upravit na

$$\oint_C \frac{\mathbf{F}}{Q} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \oint_C \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}. \quad (1.24)$$

Odtud, vzhledem k tomu, že ve všech třech integrálech probíhá integrace po stejné křivce, přímo vyplývá rovnice (1.20).

1.4 Potenciály elektromagnetického pole

Pohledem na Gaussovu větu magnetismu (1.4) můžeme s přihlédnutím k (A.9) volit vektor \mathbf{A} takový, že

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (1.25)$$

a tudíž

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0. \quad (1.26)$$

Vektorová funkce \mathbf{A} se pak nazývá *vektorový potenciál* a je, stejně jako ostatní vektory elektromagnetického pole, funkcí polohy a času (tuto skutečnost pro stručnost explicitně nezapisujeme). Dosadíme-li z rovnice (1.26) do (1.2), pak pomocí záměny diferenciálních operací a díky aditivitě operace rot můžeme psát

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \nabla \times \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (1.27)$$

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (1.28)$$

Porovnáme-li tuto rovnici se vztahem (A.8), pak můžeme řešení psát ve tvaru

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi. \quad (1.29)$$

Skalární funkci polohy a času φ nazýváme *skalární potenciál*. Dosadíme-li nyní řešení (1.29) do (1.1), pak s uvážením materiálových vztahů (1.11) získáme

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu \mathbf{j} + \varepsilon \mu \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right). \quad (1.30)$$

Pomocí vztahu (A.12) můžeme tuto rovnici upravit

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{j} + \nabla \left(\mu \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} \right). \quad (1.31)$$

Druhou rovnici dostaneme dosazením (1.29) do (1.3)

$$\nabla \cdot \left(-\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\varepsilon}, \quad (1.32)$$

a vzhledem k (A.10)

$$\nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \quad (1.33)$$

Vzhledem k tomu, že vektor \mathbf{B} je určen pomocí rotace vektorové funkce, pak podle (A.8) můžeme volit tento vektor také ve tvaru

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi, \quad (1.34)$$

kde χ je libovolná skalární funkce polohy a času a také, vzhledem k možnosti záměny pořadí operace grad a derivace podle času, můžeme volit

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial \chi}{\partial t}. \quad (1.35)$$

Je zřejmé, že \mathbf{A}, φ a \mathbf{A}', φ' jsou potenciály vyjadřující to samé elektromagnetické pole. Tato nejednoznačnost se odstraňuje pomocí tzv. *kalibračních podmínek*, což jsou podmínky kladené na tvar řešení nebo podobu rovnic. Jednou z takových podmínek je *lorentzovská kalibrace*, při které rovnice (1.31) nabývá tvaru

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{j}, \quad (1.36)$$

což zřejmě platí pokud

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (1.37)$$

a potom rovnice pro skalární potenciál bude mít tvar

$$\nabla^2 \varphi - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \quad (1.38)$$

Rovnice pro skalární i vektorový potenciál mají, v případě lorentzovské kalibrace, stejný tvar. Nahradíme-li nyní v rovnici (1.37) potenciály těmi čárkovanými z rovnic (1.34) a (1.35) (tedy požadujeme aby splňovaly totožnou rovnici) získáme

$$\nabla^2 \chi - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = - \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right). \quad (1.39)$$

Dosazením z (1.37) stanovíme

$$\nabla^2 \chi - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0, \quad (1.40)$$

což je speciální případ vlnové rovnice, kde $\nu^2 = \frac{1}{\varepsilon \mu}$ je rychlost šíření elektromagnetických vln v prostředí. Pro skalární a vektorový potenciál pak můžeme psát řešení ve tvaru

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/\nu)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}', \quad (1.41)$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi \varepsilon} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/\nu)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}'. \quad (1.42)$$

Jak je vidět, pro výpočet potenciálů v bodě \mathbf{r} a čase t je třeba dosadit hodnoty nábojů a proudů v čase $t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/\nu$. Hodnoty potenciálů jsou tedy zpožděny o dobu $\tau = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/\nu$ za odpovídajícími hodnotami nábojů a proudů. To ilustruje skutečnost, že účinek změn v rozložení nebo velikosti elektrických nábojů a proudů se šíří prostorem konečnou rychlostí. Pomocí vektorového potenciálu \mathbf{A} a skalárního potenciálu φ si tedy můžeme vyjádřit elektromagnetické pole pomocí vztahů

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (1.43)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi. \quad (1.44)$$

Kapitola 2

Elektromagnetické vlny

Elektromagnetickými vlnami nazýváme ty děje, při kterých se prostorem šíří vlnění elektromagnetického pole. Tyto vlny můžeme popsat pomocí vlnové rovnice a z ní vyplývající Helmholtzovy rovnice [1, 4–7, 9, 10, 18]. Jedno z nejjednodušších řešení vlnové rovnice je rovinná harmonická vlna [1, 2, 4–6], pro kterou můžeme snadno nalézt tvar Poyntingova vektoru i rozložení intenzity. Pro nalezení skalárního řešení Helmholtzovy rovnice se obecně používá větší množství metod, pro účely této práce jsme však vybrali ty, které se nejčastěji používají v aplikované optice. Řešení Helmholtzovy rovnice pomocí spektra rovinných vln [1, 11, 14, 15], pomocí metody Greenovy funkce [1, 5, 7] a také pomocí Fourierovy metody separace proměnných [16, 17, 19]. Metoda separace proměnných pro Helmholtzovu rovnici je popsána např. v [20, 21] a teorií Greenovy funkce se zabývala celá řada autorů, z nichž jsme vycházeli především z [20] a dále [13, 17–19, 21]. Vektorové vlnové pole získáme kombinací skalárního vlnového pole a soustavy rovnic, které lze odvodit z Maxwellových rovnic. Analogicky k předchozímu uvádíme vektorové vlnové pole pomocí spektra rovinných vln [1, 7, 11], dále vektorové řešení pomocí Stratton - Chu integrálů [5, 11, 12, 22] a nakonec i přímou integraci Maxwellových rovnic založenou na Sommerfeldově difrakčním integrálu [1]. V závěru této kapitoly se věnujeme nejprve řešení difrakční úlohy pro jednoduché geometrie (obdélníkovou a kruhovou) [1, 7, 23] a jednoduchou difrakční mřížku [7, 23], a dále odvození gaussovských svazků z vlnové rovnice a to jak přímo, tak i s pomocí Fresnelovy aproximace v Sommerfeldově difrakčním integrálu.

2.1 Vlnová rovnice

Vyšetřujme nyní vztahy charakteristických veličin elektromagnetického pole v homogenním, izotropním prostředí bez nábojů a proudů. Pro takové prostředí platí

$$\mathbf{j} = 0, \quad \rho = 0, \quad (2.1)$$

a Maxwellovy rovnice (1.1 - 1.4) s uvážením materiálových vztahů (1.11) budou mít tvar

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (2.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.5)$$

Aplikujeme-li na rovnici (2.2) operaci rot a derivujeme-li rovnici (2.3) podle času, obdržíme soustavu rovnic

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}), \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}. \quad (2.7)$$

Dosadíme-li z rovnice (2.6) do (2.7), obdržíme

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = -\varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}, \quad (2.8)$$

což upravíme pomocí (1.11),(2.4) a (A.12) a získáme

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}. \quad (2.9)$$

Fázová rychlost ν šíření elektromagnetických vln, jimiž se šíří elektromagnetické pole v prostředí, závisí na permitivitě a permeabilitě daného prostředí a je s nimi svázána vztahem

$$\varepsilon \mu = \frac{1}{\nu^2}. \quad (2.10)$$

Rovnice (2.9) pak bude

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}, \quad (2.11)$$

a v tomto tvaru ji nazýváme *vlnová rovnice*. Pokud bychom aplikovali na rovnici (2.3) operaci rot a (2.2) derivovali podle času, obdrželi bychom pro \mathbf{E} obdobnou rovnici

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (2.12)$$

Předpokládejme nyní, že elektromagnetické vlny jsou harmonické v čase s frekvencí ω a můžeme tedy všechny charakteristické veličiny pole psát ve fázorové reprezentaci

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad (2.13)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad (2.14)$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{D}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad (2.15)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad (2.16)$$

kde platí

$$e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i \sin(\omega t). \quad (2.17)$$

Pomocí těchto rovnic a lineárních materiálových vztahů získáme Maxwellovy rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) &= -i\omega \varepsilon \mathbf{E}_0(\mathbf{r}), & \nabla \times \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) &= i\omega \mu \mathbf{H}_0(\mathbf{r}), \\ \nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}_0(\mathbf{r})) &= 0, & \nabla \cdot (\mu \mathbf{H}_0(\mathbf{r})) &= 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Na druhou z rovnic použijeme operátor rot

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}_0(\mathbf{r})) = i\omega \mu (\nabla \times \mathbf{H}_0(\mathbf{r})), \quad (2.19)$$

a dále můžeme upravit

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}_0(\mathbf{r})) - \nabla^2 \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \omega^2 \mu \varepsilon \mathbf{E}_0(\mathbf{r}), \quad (2.20)$$

$$-\nabla \left(\frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \right) - \nabla^2 \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = k^2 \mathbf{E}_0(\mathbf{r}), \quad (2.21)$$

kde $k = \omega \sqrt{\varepsilon \mu}$ je vlnové číslo. Stanovíme-li nyní v rovnici (2.21) konstantní permitivitu ε , získáme *Helmholtzovu rovnici* prostorové složky vektoru \mathbf{E}

$$\nabla^2 \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.22)$$

2.2 Metody řešení vlnové rovnice

2.2.1 Harmonické vlny

Hledejme nyní řešení rovnice (2.12) v obdobném tvaru jako v rovnici (2.13), tj.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad (2.23)$$

který budeme nazývat *harmonické vlny*. Pro periodu vlnění T je úhlová frekvence

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (2.24)$$

Dosadíme-li (2.23) do (2.12) získáme pro levou stranu

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \nabla^2 \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad (2.25)$$

a pro pravou stranu

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}. \quad (2.26)$$

Funkce (2.23) tedy splňuje Helmholtzovu rovnici (2.22), kde $k = \frac{\omega}{v}$ je vlnové číslo. Helmholtzova rovnice je obecná a platí pro libovolné harmonické vlny.

2.2.2 Rovinné harmonické vlny

Uvažujme nyní prostorovou složku harmonické vlny ve tvaru

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \bar{\mathbf{E}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (2.27)$$

kde $\bar{\mathbf{E}}$ je konstantní obecně komplexní vektor, k je vlnové číslo, \mathbf{n} je konstantní vektor a \mathbf{r} je polohový vektor. Přímým dosazením do (2.22) se lze přesvědčit, že (2.27) je řešením Helmholtzovy rovnice. Vektor intenzity elektrického pole pak máme ve tvaru

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \bar{\mathbf{E}} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\nu t)}, \quad (2.28)$$

kde $\phi = k(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} - \nu t)$ je fáze vlny. Plocha, na níž je fáze vlny konstantní, se nazývá *vlnoplocha*. V případě vlny (2.28) je touto plochou rovina. Analytický zápis roviny určené bodem \mathbf{r}_0 a nenulovým vektorem \mathbf{n} , který je na ni kolmý, má pro každý její bod \mathbf{r} tvar

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (2.29)$$

Vektor \mathbf{n} nazýváme *normálovým vektorem roviny*. Časová derivace vektoru \mathbf{E} přejde na tvar

$$\frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -i k \nu \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (2.30)$$

a jeho rotace vzhledem k (A.3) přejde na tvar

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = i \mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (2.31)$$

Pro přehlednost nadále nebudeme zdůrazňovat prostorovou a časovou závislost. Maxwellovy rovnice (1.1),(1.2) pak můžeme psát s pomocí materiálových rovnic (1.11)

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mu \mathbf{H}, \quad (2.32)$$

kde $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$ je vlnový vektor, a pro vektory \mathbf{E} a \mathbf{H} odtud získáme

$$\mathbf{E} = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} (\mathbf{n} \times \mathbf{H}), \quad \mathbf{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}), \quad (2.33)$$

protože $\nu = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ a $\mathbf{k} = \frac{\omega}{\nu} \mathbf{n}$.

Jak známo z matematiky, pro $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ platí $\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = 0$ a $\mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = 0$. Proto z (2.33) plyne důsledek $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{H} = 0$. Vektory \mathbf{E} a \mathbf{H} jsou vzájemně kolmé, vlnění je tedy příčné. Využijeme-li vztah (A.14) můžeme Poyntingův vektor \mathbf{N} psát ve tvaru

$$\mathbf{N} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} |\mathbf{E}|^2 \mathbf{n} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} |\mathbf{H}|^2 \mathbf{n}. \quad (2.34)$$

Z rovnice (2.17) je vidět, že platí $\text{Re}(e^{i\alpha}) = \cos(\alpha)$ a proto pro reálnou část vektorů pole můžeme psát zápis

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \bar{\mathbf{E}} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta), \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \bar{\mathbf{H}} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta), \quad (2.35)$$

kde $\delta = k\alpha$ je počáteční fáze a α je počáteční dráhový rozdíl. Intenzitu vlnění spočteme ze Poyntingova vektoru

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T \text{Re}(\mathbf{N}) dt, \quad (2.36)$$

kam dosadíme reálné složky ze vztahů (2.35) a získáme

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} |\overline{\mathbf{E}}|^2 \left\{ 1 + \frac{1}{2\omega T} [\sin(2(\omega T - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \delta)) - \sin(2(-\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \delta))] \right\}, \quad (2.37)$$

což je výsledek, který získáme s využitím vztahu $\int \cos^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2} [x + \frac{1}{2} \sin(2x)] + c$. Dosazením vztahu (2.24) přejde (2.37) na jednodušší tvar

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} |\overline{\mathbf{E}}|^2. \quad (2.38)$$

2.2.3 Polarizace rovinné vlny

Uvažujme i nadále reálné složky vektorů pole ze vztahu (2.35) pro vlnu šířící se ve směru osy z . V takovém případě můžeme vektor intenzity elektrického pole rozepsat do složek

$$\begin{aligned} E_x &= \overline{E}_x \cos(kz - \omega t + \delta_x), \\ E_y &= \overline{E}_y \cos(kz - \omega t + \delta_y), \\ E_z &= 0, \end{aligned} \quad (2.39)$$

kteří určují souřadnice koncového bodu vektoru \mathbf{E} . Využitím vztahu pro kosinus součtu a vyloučením výrazu $kz - \omega t$ z (2.39) získáme rovnice

$$\begin{aligned} \frac{E_x}{\overline{E}_x} \sin(\delta_y) - \frac{E_y}{\overline{E}_y} \sin(\delta_x) &= \cos(kz - \omega t) \sin(\delta_y - \delta_x), \\ \frac{E_x}{\overline{E}_x} \cos(\delta_y) - \frac{E_y}{\overline{E}_y} \cos(\delta_x) &= \sin(kz - \omega t) \sin(\delta_y - \delta_x), \end{aligned} \quad (2.40)$$

a sečtením jejich druhých mocnin získáme

$$\left(\frac{E_x}{\overline{E}_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{\overline{E}_y}\right)^2 - 2\frac{E_x E_y}{\overline{E}_x \overline{E}_y} \cos(\delta_y - \delta_x) = \sin^2(\delta_y - \delta_x), \quad (2.41)$$

což je speciální případ rovnice kuželosečky

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2fy + g = 0, \quad (2.42)$$

pro kterou určujeme postupně hodnoty

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & f \\ d & f & g \end{vmatrix}, \quad J = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}, \quad I = a + c. \quad (2.43)$$

Vzhledem k hodnotám, jichž nabývají koeficienty v našem konkrétním případě, nás zajímá pouze že $J \geq 0$, a proto se obecně jedná o rovnici elipsy. Zavedením souřadnic

ξ resp. η , jejichž osy souhlasí s hlavní resp. vedlejší poloosou elipsy získáme

$$\begin{aligned} E_\xi &= E_x \cos(\psi) + E_y \sin(\psi), \\ E_\eta &= -E_x \sin(\psi) + E_y \cos(\psi), \end{aligned} \quad (2.44)$$

kde ψ je úhel, který spolu svírají osy ξ a x . Lze jej vypočítat ze vztahu

$$\tan(2\psi) = \frac{2\bar{E}_x \bar{E}_y \cos(\delta_y - \delta_x)}{\bar{E}_x^2 - \bar{E}_y^2}. \quad (2.45)$$

2.3 Skalární vlnové pole

2.3.1 Metody řešení Helmholtzovy rovnice

2.3.1.1 Spektrum rovinných vln

Předpokládejme, že pro komplexní amplitudu $U(x, y, z)$, kde $\mathbf{r}_P = (x, y, z)$ je bod pozorování, řešíme Helmholtzovu rovnici ve tvaru

$$\nabla^2 U(x, y, z) + k^2 U(x, y, z) = 0. \quad (2.46)$$

Z důvodu, který bude jasný z dalšího, volíme pro funkci $U(x, y, z)$ předpis ve tvaru dvourozměrné Fourierovy transformace

$$U(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(p, q, z) e^{ik(px+qy)} dp dq, \quad (2.47)$$

kde neznámá funkce $A(p, q, z)$ představuje *úhlové spektrum* funkce $U(x, y, z)$. Dosažením rovnice (2.47) do (2.46) a s použitím (A.19) získáme

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} A(p, q, z) + k^2 (1 - p^2 - q^2) A(p, q, z) = 0, \quad (2.48)$$

což je obyčejná diferenciální rovnice *harmonických kmitů*, jejíž řešení můžeme hledat např. ve tvaru

$$A(p, q, z) = C(p, q) e^{ikz\sqrt{1-p^2-q^2}}, \quad (2.49)$$

kde $C(p, q)$ je neznámá funkce. Pro její určení můžeme např. položit druhý člen na pravé straně (2.49) roven jedné, což platí např. při $z = 0$. Potom platí

$$C(p, q) = A(p, q, 0) = A(p, q), \quad (2.50)$$

což je užitečné v případě, že známe nějaký iniciální stav pole $U(x, y, 0)$, protože pravou stranu (2.50) můžeme získat ze vztahu (2.47), resp. z definice inverzní Fourierovy transformace (A.17) a vztahu

$$A(p, q, 0) = \frac{1}{\lambda^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x, y, 0) e^{-ik(px+qy)} dx dy, \quad (2.51)$$

protože platí

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (2.52)$$

Ze vztahu (2.49) vyplývá, že úhlové spektrum se bude měnit se vzdáleností z v závislosti na hodnotě výrazu $\sqrt{1 - p^2 - q^2}$. Pro

$$p^2 + q^2 < 1, \quad (2.53)$$

bude docházet pouze ke změně fáze mezi jednotlivými složkami spektra. Pro

$$p^2 + q^2 > 1, \quad (2.54)$$

budou složky spektra silně tlumeny s rostoucí vzdáleností od roviny $z = 0$, neboť

$$\sqrt{1 - p^2 - q^2} = i\sqrt{p^2 + q^2 - 1}. \quad (2.55)$$

Speciálně pro

$$p^2 + q^2 = 1, \quad (2.56)$$

se budou rovinné vlny šířit ve směru kolmém k ose z a v jejím směru nebude docházet k šíření.

Pro komplexní amplitudu tedy píšeme výsledný vztah

$$U(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(p, q) e^{ik(px+qy+mz)} dpdq, \quad (2.57)$$

kde $m = \sqrt{1 - p^2 - q^2}$. Hodnotu funkce A získáme z (2.51).

2.3.1.2 Metoda Greenovy funkce

Uvažujme skalární vlnové pole $V(\mathbf{r}_M, t)$ splňující rovnici (2.11)

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}_M, t) = \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial^2 V(\mathbf{r}_M, t)}{\partial t^2}. \quad (2.58)$$

Řešení této rovnice budeme hledat ve tvaru funkce oddělující časovou a prostorovou závislost, např.

$$V(\mathbf{r}_M, t) = U(\mathbf{r}_M) e^{-i\omega t}, \quad (2.59)$$

kde funkce $U(\mathbf{r}_M)$ splňuje analogicky k (2.13), (2.18) a (2.22) Helmholtzovu rovnici

$$\nabla^2 U(\mathbf{r}_M) + k^2 U(\mathbf{r}_M) = 0. \quad (2.60)$$

Chceme-li vyřešit difrakční problém v takovém poli, musíme hledat řešení rovnice (2.60) za předpokladu, že $U(\mathbf{r}_M)$ splňuje vhodné okrajové podmínky, jejichž obecný tvar můžeme zapsat

$$\left(aU(\mathbf{r}_M) + b \frac{\partial U(\mathbf{r}_M)}{\partial n} \right)_S = f(\mathbf{r}_M), \quad (2.61)$$

kde S značí plochu, na níž platí uvedené podmínky a n značí vnější normálu plochy S . Řešení Helmholtzovy rovnice (2.60), což je parciální diferenciální rovnice druhého řádu, budeme hledat pomocí Greenovy funkce. Pro obecný lineární diferenciální operátor \mathcal{L} , který aplikujeme na obecnou funkci $U(\mathbf{r})$ tak, že získáváme diferenciální rovnici

$$\mathcal{L}U(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}), \quad (2.62)$$

získáme příslušnou Greenovu funkci daného problému tak, že řešíme

$$\mathcal{L}G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (2.63)$$

kde $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ je hledaná dyadická Greenova funkce.

V případě rovnice (2.60) tedy musí Greenova funkce splňovat rovnici

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P) + k^2 G(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P) = -\delta(\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_P) \quad (2.64)$$

a odpovídající homogenní okrajové podmínky (2.61). Uvažujme tedy obecnou nehomogenní Helmholtzovu rovnici ve tvaru

$$\nabla^2 U(\mathbf{r}_M) + k^2 U(\mathbf{r}_M) = -f(\mathbf{r}_M), \quad (2.65)$$

kterou vynásobíme členem $G(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P)$ a dále rovnici (2.64) vynásobíme $U(\mathbf{r}_M)$ a následně je odečteme. Získáme

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P) \nabla^2 U(\mathbf{r}_M) - U(\mathbf{r}_M) \nabla^2 G(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P) &= \\ = -f(\mathbf{r}_M) G(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P) + \delta(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P) U(\mathbf{r}_M) \end{aligned} \quad (2.66)$$

a následně provedeme integraci přes celý objem V daný ohraničující plochou S , čímž získáme

$$\begin{aligned} \iiint_V \delta(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P) U(\mathbf{r}_M) dV - \iiint_V f(\mathbf{r}_M) G(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P) dV &= \\ = \iiint_V [G(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P) \nabla^2 U(\mathbf{r}_M) - U(\mathbf{r}_M) \nabla^2 G(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P)] dV, \end{aligned} \quad (2.67)$$

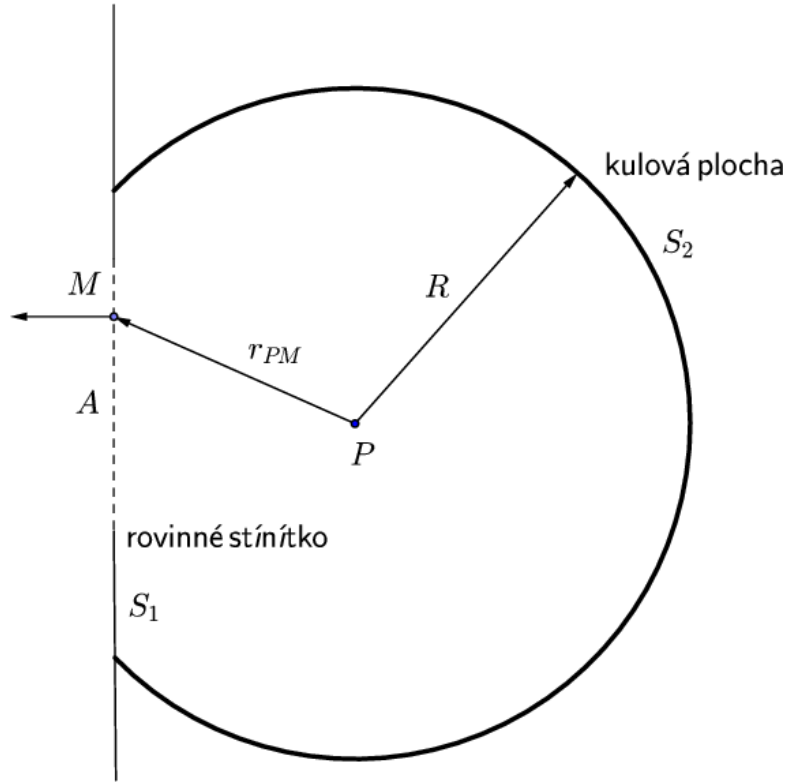
kde pro Diracovu funkci $\delta(x)$ a spojitou funkci $f(x)$ platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0), \quad (2.68)$$

a proto můžeme pomocí Greenovy věty (A.16) psát

$$\begin{aligned} U(\mathbf{r}_P) &= \iiint_V f(\mathbf{r}_M) G(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P) dV + \\ &+ \iint_S G(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P) \nabla U(\mathbf{r}_M) \cdot \mathbf{nd}S - \iint_S U(\mathbf{r}_M) \nabla G(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P) \cdot \mathbf{nd}S. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Pro (2.46) platí $f(\mathbf{r}) = 0$ a proto můžeme určit stav pole v libovolném bodě \mathbf{r}_P uvnitř oblasti uzavřené plochou S , známe-li stav pole na této hraniční ploše a Greenovu funkci



Obrázek 2.1: Geometrie Kirchhoffova řešení

G a to ze vztahu

$$U(\mathbf{r}_P) = \iint_S \left[G(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P) \frac{\partial U(\mathbf{r}_M)}{\partial \mathbf{n}} - U(\mathbf{r}_M) \frac{\partial G(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P)}{\partial \mathbf{n}} \right] dS. \quad (2.70)$$

Rovnice (2.70) využil i Kirchhoff při řešení difrakční úlohy. Plochu S zvolil jako složenou ze dvou dílčích ploch S_1 a S_2 , viz Obrázek 2.1. Protože tvar Greenovy funkce $G(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P)$ závisí na podstatě řešeného problému, volil ji Kirchhoff ve tvaru rozbíhavé kulové vlny

$$G(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P) = \frac{e^{ikr_{PM}}}{4\pi r_{PM}}, \quad (2.71)$$

kde r_{PM} značí délku vektoru $\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_M$. S použitím (A.11) se lze přesvědčit, že (2.71) splňuje rovnici (2.64), protože

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \right) \right) = -\frac{k^2 e^{ikr}}{4\pi r}. \quad (2.72)$$

Integrál ve vztahu (2.70) lze tedy počítat jako součet dvou dílčích integrálů

$$U(\mathbf{r}_P) = \iint_{S_1} \left(G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS_1 + \iint_{S_2} \left(G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS_2, \quad (2.73)$$

kde pro přehlednost vynecháváme argumenty funkcí v integrandech. Před řešením samotného integrálu zmiňme tzv. *vyzařovací podmínky* tak, jak je zavedl Sommerfeld. Ten

je formuloval tak, aby je splňovala např. i Kirchhoffem použitá kulová rozbíhavá vlna, a to ve tvaru podmínky konečnosti

$$|RU| < \text{konst.}, \quad |RG| < \text{konst. pro } R \rightarrow \infty \quad (2.74)$$

a vyzařovací podmínky

$$R \left(\frac{\nabla G \cdot \mathbf{R}}{R} - ikG \right) \rightarrow 0, \quad R \left(\frac{\nabla U \cdot \mathbf{R}}{R} - ikU \right) \rightarrow 0 \quad \text{pro } R \rightarrow \infty, \quad (2.75)$$

a to právě tak, že druhý integrál v (2.73) přes kulovou plochu S_2 , s poloměrem $R_{S_2} \rightarrow \infty$, je roven nule. V našem případě se o jejich platnosti můžeme přesvědčit, protože z rovnice (2.71) plyne

$$\nabla \left(\frac{e^{ikR}}{4\pi R} \right) = \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \left(ik - \frac{1}{R} \right) \frac{\mathbf{R}}{R}, \quad (2.76)$$

kde $\frac{\mathbf{R}}{R}$ je jednotkový vektor ve směru průvodiče kulové plochy. Lze se snadno přesvědčit, že platí

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left(\nabla \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \frac{\mathbf{R}}{R} - ik \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \right) = \lim_{R \rightarrow \infty} -\frac{e^{ikR}}{4\pi R} = 0, \quad (2.77)$$

a kulová rozbíhavá vlna tudíž vyzařovací podmínku splňuje. Stav pole v bodě \mathbf{r}_P je tedy dán pouze vztahem

$$U(\mathbf{r}_P) = \iint_{S_1} \left(G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS_1, \quad (2.78)$$

do kterého je zapotřebí dosadit vhodné hodnoty pole a jeho derivace na hraniční ploše S_1 . Toto je úloha obtížná a Kirchhoff ji vyřešil pomocí předpokladů, že pole a jeho derivace v oblasti otvoru A nabývají stejných hodnot, jako kdyby tam stínítko nebylo. Dalším předpokladem který zavedl je, že v oblasti stínítka mimo otvor je hodnota pole a jeho derivace nulová. Integrace se následně provádí pouze přes plochu otvoru A ve stínítku.

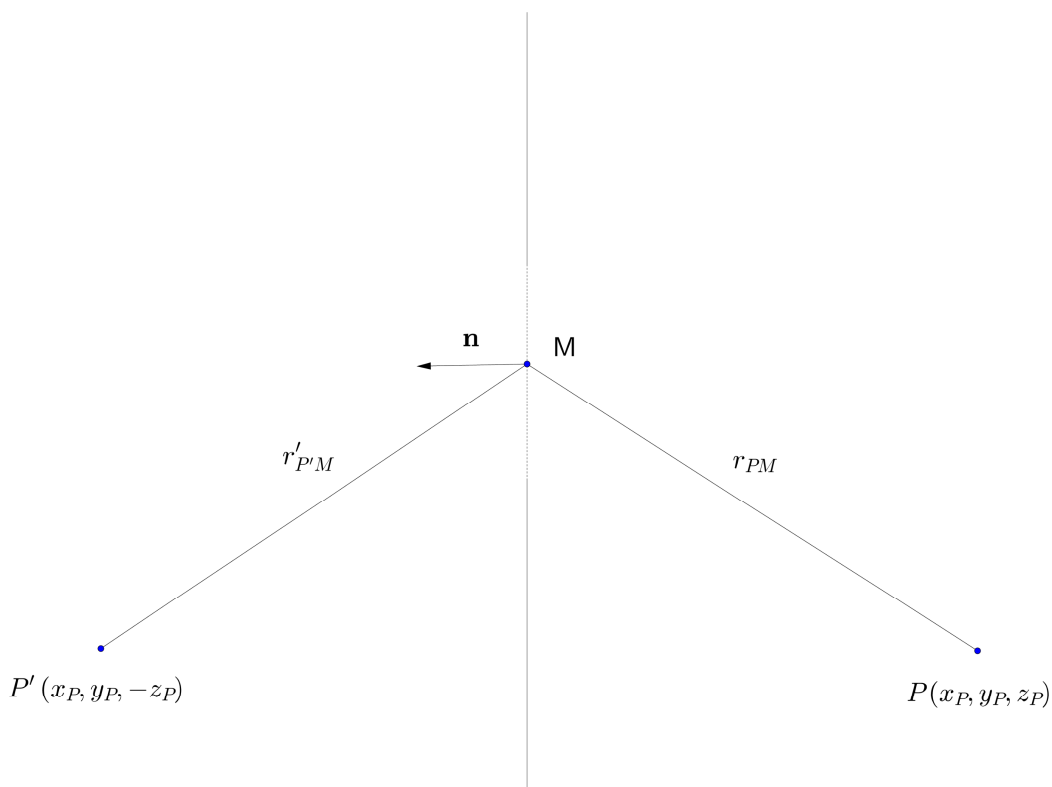
Řešení publikované Kirchhoffem je ovšem zatíženo rozporem, a to kvůli zavedeným hraničním podmínkám, které nejsou dodrženy pro řešení získané z rovnice (2.78) při zpětném dosazení. Toho si byl vědom i Sommerfeld, a proto navrhl podobný postup s pozměněnými předpoklady. Užil tedy metodu Greenovy funkce pro řešení difrakčního problému na otvoru stínítka a pro funkci $G(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P)$ z rovnice (2.64) požadoval, aby byla na ohraničující ploše S buď nulová, nebo byla nulová její první derivace, tedy

$$G(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P)|_S = 0, \quad (2.79)$$

nebo

$$\left. \frac{\partial G(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P)}{\partial n} \right|_S = 0. \quad (2.80)$$

Řešíme-li Helmholtzovu rovnici (2.46), pak z (2.69) získáme pro Greenovu funkci splňující podmínku (2.79) pro stav pole v pozorovacím bodě \mathbf{r}_P vztah



Obrázek 2.2: Geometrie Sommerfeldova řešení

$$U(\mathbf{r}_P) = - \iint_S \left(U \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS, \quad (2.81)$$

a pro Greenovu funkci splňující podmínku (2.80) vztah

$$U(\mathbf{r}_P) = \iint_S \left(G \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS. \quad (2.82)$$

Sommerfeld se rozhodl pro nalezení příslušné Greenovy funkce využít metody obrazu, která je známou a hojně využívanou fyzikální metodou pro řešení polí. Pomocí této metody tedy zavedl bod $\mathbf{r}_{P'}$ který je zrcadlovým obrazem bodu \mathbf{r}_P v rovině stínítka, viz Obrázek 2.2. Pomocí tohoto bodu vytvořil funkci

$$G^-(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P) = \frac{e^{ikr_{PM}}}{4\pi r_{PM}} - \frac{e^{ikr'_{P'M}}}{4\pi r'_{P'M}}, \quad (2.83)$$

splňující podmínku (2.79) a také funkci

$$G^+(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P) = \frac{e^{ikr_{PM}}}{4\pi r_{PM}} + \frac{e^{ikr'_{P'M}}}{4\pi r'_{P'M}}, \quad (2.84)$$

splňující podmínku (2.80). V (2.83) a (2.84) značí $r'_{P'M}$ délku vektoru $\mathbf{r}_{P'} - \mathbf{r}_M$. Je-li bod \mathbf{r}_M umístěn v rovině stínítka, pak platí rovnost $r_{PM} = r'_{P'M}$ a pro takový případ

zjevně z (2.84) máme Greenovu funkci

$$G^+(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P) = 2 \frac{e^{ikr_{PM}}}{4\pi r_{PM}}, \quad (2.85)$$

a dále platí

$$\frac{\partial G^-(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P)}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \nabla G^-(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P), \quad (2.86)$$

a tedy pro gradient Greenovy funkce (2.83) dostaneme

$$\nabla G^-(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P) = -\frac{ik}{4\pi} \left[\left(1 + \frac{i}{kr'_{P'M}}\right) \frac{e^{ikr'_{P'M}}}{r'^2_{P'M}} \mathbf{r}'_{P'M} - \left(1 + \frac{i}{kr_{PM}}\right) \frac{e^{ikr_{PM}}}{r^2_{PM}} \mathbf{r}_{PM} \right]. \quad (2.87)$$

Podle Obrázku 2.2 platí, že

$$\mathbf{r}'_{P'M} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{r}_{PM} \cdot \mathbf{n}, \quad (2.88)$$

a následně dosazením rovnic (2.88) a (2.87) do (2.86) získáme vztah

$$\frac{\partial G^-(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P)}{\partial n} = \frac{i}{\lambda} \left(1 + \frac{i}{kr_{PM}}\right) \frac{e^{ikr_{PM}}}{r^2_{PM}} \mathbf{r}_{PM} \cdot \mathbf{n}, \quad (2.89)$$

protože platí, že $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Pro stav pole v bodě \mathbf{r}_P získáme z rovnice (2.81) *Sommerfeldův integrál*

$$U(\mathbf{r}_P) = -\frac{i}{\lambda} \iint_S U(\mathbf{r}_M) \left(1 + \frac{i}{kr_{PM}}\right) \frac{e^{ikr_{PM}}}{r^2_{PM}} \mathbf{r}_{PM} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (2.90)$$

kde \mathbf{n} značí podle Obrázku 2.2 vektor vnější normály k ploše S . Uvážíme-li nakonec, že vzhledem ke k bude platit podmínka $r_{PM} \gg \lambda$, přejde Sommerfeldův integrál v jednodušší tvar

$$U(\mathbf{r}_P) = -\frac{i}{\lambda} \iint_S U(\mathbf{r}_M) \frac{e^{ikr_{PM}}}{r^2_{PM}} \mathbf{r}_{PM} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (2.91)$$

Pomocí Sommerfeldova integrálu jsme schopni určit stav pole v libovolném bodě \mathbf{r}_P uvnitř oblasti ohraničené uzavřenou plochou S .

2.3.1.3 Fourierova metoda

V předchozím odstavci jsme řešili homogenní Helmholtzovu rovnici zavedením Greenových funkcí s požadovanými vlastnostmi podle okrajových podmínek a odvodili jsme Sommerfeldův difrakční integrál pro rovinné stínítko. V tomto odstavci budeme řešit homogenní Helmholtzovu rovnici s okrajovou podmínkou na sférické ploše pomocí Greenovy funkce a metody řad. Polohový vektor libovolného bodu v trojrozměrném prostoru můžeme vyjádřit jako

$$\mathbf{r} = (x, y, z) = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta), \quad (2.92)$$

kde r, θ, ϕ značí sférické souřadnice, pro které platí $r \in \mathbf{R}_0^+, \theta \in \langle 0, \pi \rangle, \phi \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Se zavedením sférických souřadnic zavádíme také jednotkové vektory ve směru příslušných souřadnic $\mathbf{r}_0, \boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\phi}_0$, které definujeme pomocí vztahů

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \right|}, \quad \boldsymbol{\theta}_0 = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right|}, \quad \boldsymbol{\phi}_0 = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right|}, \quad (2.93)$$

díky kterým jsme schopni převádět vztahy z jedné soustavy souřadnic do druhé, neboť jistě platí

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= \sin \theta \cos \phi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \phi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}, \\ \boldsymbol{\theta}_0 &= \cos \theta \cos \phi \mathbf{i} + \cos \theta \sin \phi \mathbf{j} - \sin \theta \mathbf{k}, \\ \boldsymbol{\phi}_0 &= -\sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j}, \end{aligned} \quad (2.94)$$

kde $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ jsou jednotkové vektory ve směru os x, y, z , pro které naopak platí

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= \sin \theta \cos \phi \mathbf{r}_0 + \cos \theta \cos \phi \boldsymbol{\theta}_0 - \sin \phi \boldsymbol{\phi}_0, \\ \mathbf{j} &= \sin \theta \sin \phi \mathbf{r}_0 + \cos \theta \sin \phi \boldsymbol{\theta}_0 + \cos \phi \boldsymbol{\phi}_0, \\ \mathbf{k} &= \cos \theta \mathbf{r}_0 - \sin \theta \boldsymbol{\theta}_0. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Pomocí vztahů (2.93) a (2.94) můžeme vyjádřit Laplaceův operátor ∇^2 ve sférických souřadnicích ve tvaru (A.11)

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right). \quad (2.96)$$

Budeme-li nyní uvažovat řešení homogenní Helmholtzovy rovnice

$$\nabla^2 U(\mathbf{r}) + k^2 U(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.97)$$

jako funkci sférických souřadnic v separabilním tvaru

$$U(r, \theta, \phi) = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\phi), \quad (2.98)$$

pak po dosazení za Laplaceův operátor ve sférických souřadnicích získáme z rovnice (2.97)

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2 R(r)} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 \Theta(\theta) \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) + \\ + \frac{1}{r^2 \Theta(\theta) \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} + k^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.99)$$

Pomocí jednoduchých algebraických úprav rovnice (2.99) a užitím metody separace proměnných (Fourierovy metody), získáme tři diferenciální rovnice pro jednotlivé sférické souřadnice. První diferenciální rovnice, proměnné ϕ , má tvar

$$\frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} + m^2 \Phi(\phi) = 0, \quad (2.100)$$

kde konstanta m^2 byla volena tak, aby rovnice (2.100) odpovídala rovnici harmonických kmitů, jejíž řešení můžeme psát např. ve tvaru

$$\Phi(\phi) = A_m e^{im\phi}, \quad (2.101)$$

kde A_m je konstanta určovaná z počátečních podmínek. Dále, po dosazení (2.100) zpět do (2.99), získáme pro souřadnici r rovnici

$$r^2 \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + 2r \frac{dR(r)}{dr} + k^2 r^2 R(r) - l(l+1) R(r) = 0, \quad (2.102)$$

což je rovnice, již lze substitucí převést na Besselovu diferenciální rovnici, jejímž řešením jsou Besselovy funkce. Z toho důvodu je konstanta volena ve tvaru $l(l+1)$, kde $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Třetí diferenciální rovnici, pro souřadnici θ , získáme po dosazení předchozích konstant a to ve tvaru

$$\frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} + \tan \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta(\theta) = 0, \quad (2.103)$$

který odpovídá asociované Legendreově diferenciální rovnici, jejímž řešením jsou asociované Legendreovy polynomy. Ty definujeme předpisem

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x), \quad (2.104)$$

kde $P_n(x)$ značí Legendreovy polynomy dané např. Rodriguezovou formulí

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx} \right)^n (x^2 - 1)^n, \quad (2.105)$$

pro $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Besselovy funkce $J_\nu(x)$, definované jako řešení Besselovy diferenciální rovnice, můžeme psát ve tvaru

$$J_\nu(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(\nu+s)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{\nu+2s} \quad (2.106)$$

a

$$J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu J_\nu(x). \quad (2.107)$$

Pro Besselovy funkce platí rekurentní vztahy

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x), \quad (2.108)$$

$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_\nu(x), \quad (2.109)$$

kde $J'_\nu(x)$ značí derivaci Besselovy funkce podle x .

Pomocí Besselových funkcí dále zavádíme Neumannovy funkce $N_\nu(x)$ vztahem

$$N_\nu(x) = \frac{\cos \nu\pi J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi} \quad (2.110)$$

a dále také Hankelovy funkce prvního druhu $H_\nu^{(1)}(x)$ resp. druhého druhu $H_\nu^{(2)}(x)$, jako kombinaci Besselových a Neumannových funkcí

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x), \quad (2.111)$$

resp.

$$H_v^{(2)}(x) = J_v(x) - iN_v(x). \quad (2.112)$$

Pomocí Besselových funkcí se dále zavádějí také sférické Besselovy funkce $j_n(x)$, resp. sférické Hankelovy funkce $h_n^{(1)}(x)$, $h_n^{(2)}(x)$

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+1/2}(x), \quad (2.113)$$

resp.

$$h_n^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{n+1/2}^{(1)}(x), \quad (2.114)$$

$$h_n^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{n+1/2}^{(2)}(x). \quad (2.115)$$

Wronského determinant W dvou funkcí $f(x)$ a $g(x)$ je definován

$$W(f(x), g(x)) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}, \quad (2.116)$$

a speciálně pro kombinace sférických funkcí získáme

$$W(h_v^{(1)}(x), h_v^{(2)}(x)) = h_v^{(1)}(x) h_v^{(2)'}(x) - h_v^{(1)'}(x) h_v^{(2)}(x) = -\frac{2i}{x^2}, \quad (2.117)$$

$$W(h_v^{(1)}(x), j_v(x)) = j_v'(x) h_v^{(1)}(x) - j_v(x) h_v^{(1)'}(x) = -\frac{i}{x^2}. \quad (2.118)$$

Odbočme nyní na chvíli od řešení Helmholtzovy rovnice (2.97) a zabývejme se některými vlastnostmi diferenciálních rovnic. Řešení obyčejné diferenciální rovnice, obsahující separační konstantu, které splňuje hraniční podmínky na symetrických bodech rozsahu nějaké nezávislé proměnné (uvažujeme diferenciální rovnici vzniklou separací proměnných), nazýváme *vlastními funkcemi* a hodnoty separační konstanty volené tak, aby řešení splňovalo zmíněné hraniční podmínky, nazýváme *vlastními čísly* dané diferenciální rovnice. Vlastní funkce, které jsou řešením diferenciálních rovnic, tvoří báze ortogonálních funkcí, které můžeme využít pro reprezentaci obtížně uchopitelné Diracovy delta funkce. Pro obecnou bázi reálných ortogonálních funkcí $\{\phi_n(x), n = 0, 1, 2, \dots\}$ můžeme psát

$$\int_a^b \phi_m(x) \phi_n(x) dx = \delta_{mn}. \quad (2.119)$$

Funkce $\phi_n(x)$ můžeme využít pro rozvoj delta funkce

$$\delta(x-t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \phi_n(x), \quad (2.120)$$

kde koeficienty $a_n(t)$ jsou funkcí proměnné t . Násobíme-li (2.120) funkcí $\phi_m(x)$ a následně výraz zintegrujeme s užitím (2.119), získáme

$$\int_a^b \delta(x-t) \phi_m(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \int_a^b \phi_n(x) \phi_m(x) dx = a_m(t), \quad (2.121)$$

kde index koeficientu a přešel v m , protože změna indexu v sumě je přes n . Odtud tedy plyne zápis delta funkce ve tvaru

$$\delta(x-t) = \delta(t-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(t) \phi_n(x). \quad (2.122)$$

Připomeňme, že hledáme řešení nehomogenní Helmholtzovy rovnice ve tvaru

$$\nabla^2 U(\mathbf{r}) + k^2 U(\mathbf{r}) = -f(\mathbf{r}), \quad (2.123)$$

jejíž homogenní forma je splněna ortogonálními funkcemi Helmholtzova operátoru $\phi_n(\mathbf{r})$

$$\nabla^2 \phi_n(\mathbf{r}) + k_n^2 \phi_n(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.124)$$

a dále víme, že hledaná Greenova funkce $G(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P)$ musí splňovat

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P) + k^2 G(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P) = -\delta(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P), \quad (2.125)$$

kde delta funkce značí jednotkový zdroj. Greenovu funkci z (2.125) můžeme psát ve tvaru rozvoje do vlastních funkcí z (2.124)

$$G(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\mathbf{r}_P) \phi_n(\mathbf{r}_M). \quad (2.126)$$

Dosazením z rovnice (2.126) do (2.125) získáme

$$-\sum_{n=0}^{\infty} b_n(\mathbf{r}_P) k_n^2 \phi_n(\mathbf{r}_M) + k^2 \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\mathbf{r}_P) \phi_n(\mathbf{r}_M) = -\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(\mathbf{r}_M) \phi_n(\mathbf{r}_P) \quad (2.127)$$

protože z (2.124) vyplývá

$$\nabla^2 \phi_n(\mathbf{r}) = -k_n^2 \phi_n(\mathbf{r}), \quad (2.128)$$

a pravá strana (2.127) je rozvoj delta funkce podle (2.122). Abychom vyjádřili tvar koeficientů rozvoje Greenovy funkce $b_n(\mathbf{r}_P)$, využijeme ortogonality vlastních funkcí

$$\begin{aligned} -\sum_{n=0}^{\infty} b_n(\mathbf{r}_P) k_n^2 \phi_n(\mathbf{r}_M) \phi_m(\mathbf{r}_M) + k^2 \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\mathbf{r}_P) \phi_n(\mathbf{r}_M) \phi_m(\mathbf{r}_M) = \\ = -\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(\mathbf{r}_M) \phi_n(\mathbf{r}_P) \phi_m(\mathbf{r}_M), \end{aligned} \quad (2.129)$$

a dále integrujeme

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} b_m(\mathbf{r}_P) (k^2 - k_n^2) \int \phi_n(\mathbf{r}_M) \phi_m(\mathbf{r}_M) d\mathbf{r}_M = \\ = -\sum_{m=0}^{\infty} \phi_m(\mathbf{r}_P) \int \phi_n(\mathbf{r}_M) \phi_m(\mathbf{r}_M) d\mathbf{r}_M, \end{aligned} \quad (2.130)$$

odkud vyjádříme

$$b_n(\mathbf{r}_P)(k^2 - k_n^2) = \phi_n(\mathbf{r}_P). \quad (2.131)$$

Dosažením zpět do (2.126) dostaneme Greenovu funkci

$$G(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi_n(\mathbf{r}_M) \phi_n(\mathbf{r}_P)}{k_n^2 - k^2}, \quad (2.132)$$

která ilustruje např. symetričnost Greenovy funkce, tj. $G(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P) = G(\mathbf{r}_P, \mathbf{r}_M)$.

Uvažujme nyní základní Greenovu funkci odpovídající sférické divergentní vlně ve tvaru

$$G_0(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P) = \frac{e^{ikr_{MP}}}{4\pi r_{MP}}, \quad (2.133)$$

která splňuje rovnici (2.64) a kterou lze považovat za partikulární řešení problému. Tuto funkci lze zapsat pomocí rozvoje do vlastních funkcí Laplaceova operátoru ve sférických souřadnicích a to ve tvaru

$$\frac{e^{ikr_{MP}}}{4\pi r_{MP}} = ik \sum_{n=0}^{\infty} \begin{cases} j_n(kr_P) h_n^{(1)}(kr_M) \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\theta_P, \phi_P) Y_n^{m*}(\theta_M, \phi_M) & r_P < r_M \\ j_n(kr_M) h_n^{(1)}(kr_P) \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\theta_P, \phi_P) Y_n^{m*}(\theta_M, \phi_M) & r_P > r_M \end{cases} \quad (2.134)$$

kde r_{MP} , r_M a r_P jsou délky vektorů $\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_M$, \mathbf{r}_M a \mathbf{r}_P . Normované sféricko-harmonické funkce $Y_n^m(\theta, \phi)$ v rovnici (2.134) definujeme pomocí asociovaných Legendreových funkcí

$$Y_n^m(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos(\theta)) e^{im\phi}, \quad (2.135)$$

a dále uvádíme, že jsou ortogonální, tj.

$$\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} Y_{n_1}^{m_1}(\theta, \phi) Y_{n_2}^{m_2*}(\theta, \phi) \sin\theta d\theta d\phi = \delta_{n_1 n_2} \delta_{m_1 m_2}, \quad (2.136)$$

kde δ_{ij} je Kroneckerovo delta definované jako

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}. \quad (2.137)$$

Greenovu funkci našeho problému budeme hledat ve tvaru

$$G(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P) = G_0(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P) + \kappa(\mathbf{r}_P), \quad (2.138)$$

kde první člen je zmíněné partikulární řešení z (2.133), které nahradíme řadou (2.134) a druhý člen budeme hledat ve tvaru řady Hankelových funkcí prvního druhu a sféricko-harmonických funkcí

$$\kappa(\mathbf{r}_P) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{mn} h_n^{(1)}(kr_P) Y_n^m(\theta_P, \phi_P). \quad (2.139)$$

Výsledná Greenova funkce musí splňovat vyzařovací podmínku

$$\lim_{r_{MP} \rightarrow \infty} r_{MP} \left(\nabla G(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P) \frac{\mathbf{r}_{MP}}{r_{MP}} - ikG(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P) \right) = 0, \quad (2.140)$$

kde se můžeme velice snadno přesvědčit, že funkce z rovnice (2.133) podmínku (2.140) splňuje, neboť platí

$$\lim_{r_{MP} \rightarrow \infty} \frac{e^{ikr_{MP}}}{4\pi r_{MP}} = 0. \quad (2.141)$$

Další podmínka, kterou musí Greenova funkce splňovat je, že bude nulová na kulové ploše o poloměru a , což je stejná okrajová podmínka, jakou klademe na funkci, která je řešením rovnice (2.97), tedy

$$G(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P)|_S = 0, \quad (2.142)$$

kde S značí plochu ohraničující sféry. Kvůli postupu řešení, jež bude následovat, rozdělíme funkci $G_0(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P)$ na

$$G_0(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P) = \begin{cases} G_{0<}(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P) & r_P < r_M \\ G_{0>}(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P) & r_P > r_M \end{cases} \quad (2.143)$$

a stejným způsobem označíme i koeficienty výsledných Greenových funkcí. Pomocí $G_{0<}(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P)$ a podmínky (2.142) získáme pro $\mathbf{r}_P = \mathbf{a}$ rovnici

$$\begin{aligned} ik \sum_{n=0}^{\infty} j_n(ka) h_n^{(1)}(kr_M) \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\theta_P, \phi_P) Y_n^{m*}(\theta_M, \phi_M) = \\ = - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{mn}^< h_n^{(1)}(ka) Y_n^m(\theta_P, \phi_P), \end{aligned} \quad (2.144)$$

ze které jsme s použitím ortogonalit sféricko-harmonických funkcí schopni vypočítat koeficient $A_{mn}^<$

$$A_{mn}^< = - \frac{ik j_n(ka) h_n^{(1)}(kr_M)}{h_n^{(1)}(ka)} Y_n^{m*}(\theta_M, \phi_M), \quad (2.145)$$

a celou funkci $G_{<}(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P)$ můžeme následně psát ve tvaru

$$\begin{aligned} G_{<}(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P) = ik \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n^{(1)}(kr_M)}{h_n^{(1)}(ka)} [j_n(kr_P) h_n^{(1)}(ka) - j_n(ka) h_n^{(1)}(kr_P)] \times \\ \times \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\theta_P, \phi_P) Y_n^{m*}(\theta_M, \phi_M). \end{aligned} \quad (2.146)$$

Stejným způsobem, jakým jsme se dopracovali k rovnici (2.144) s užitím $G_{0<}(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P)$, dostaneme se s užitím $G_{0>}(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P)$ a podmínky $\mathbf{r}_M = \mathbf{a}$ k rovnici

$$\begin{aligned} ik \sum_{n=0}^{\infty} j_n(ka) h_n^{(1)}(kr_P) \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\theta_P, \phi_P) Y_n^{m*}(\theta_M, \phi_M) = \\ = - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{mn}^> h_n^{(1)}(kr_P) Y_n^m(\theta_P, \phi_P), \end{aligned} \quad (2.147)$$

ze které vypočteme koeficient $A_{mn}^>$

$$A_{mn}^> = -ikj_n(ka)Y_n^m(\theta_M, \phi_M), \quad (2.148)$$

a celou funkci $G_>(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P)$ můžeme nyní psát ve tvaru

$$G_>(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P) = ik \sum_{n=0}^{\infty} h_n^{(1)}(kr_P) [j_n(kr_M) - j_n(ka)] \times \\ \times \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\theta_P, \phi_P) Y_n^{m*}(\theta_M, \phi_M). \quad (2.149)$$

Připomeňme, že řešení homogenní Helmholtzovy rovnice můžeme pomocí Greenovy funkce psát ve tvaru

$$U(\mathbf{r}_P) = \iint_S G(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P) \nabla U(\mathbf{r}_M) \cdot \mathbf{nd}S - \iint_S U(\mathbf{r}_M) \nabla G(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P) \cdot \mathbf{nd}S, \quad (2.150)$$

který vzhledem k (2.142) přejde na

$$U(\mathbf{r}_P) = - \iint_S U(\mathbf{r}_M) \frac{\partial G(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P)}{\partial n} dS, \quad (2.151)$$

a musíme tedy vyčíslit derivaci nalezené Greenovy funkce podle normály k ohraničující sféře např. z rovnice (2.146), kde položíme $\mathbf{r}_M = \mathbf{a}$

$$\frac{\partial G(\mathbf{a}, \mathbf{r}_P)}{\partial r_P} = ik^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n^{(1)}(kr_P)}{h_n^{(1)}(ka)} [j_n'(ka) h_n^{(1)}(ka) - j_n(ka) h_n^{(1)'}(ka)] \times \\ \times \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\theta_P, \phi_P) Y_n^{m*}(\theta_M, \phi_M), \quad (2.152)$$

nahradíme hranaté závorky ze vztahu (2.118) a získáme

$$\frac{\partial G(\mathbf{a}, \mathbf{r}_P)}{\partial r_P} = \frac{1}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n^{(1)}(kr_P)}{h_n^{(1)}(ka)} \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\theta_M, \phi_M) Y_n^{m*}(\theta_P, \phi_P). \quad (2.153)$$

Plošný element sféry S o poloměru a ve sférických souřadnicích zapíšeme

$$dS = a^2 \sin \theta_M d\theta_M d\phi_M, \quad (2.154)$$

a dosadíme ho společně se vztahem (2.153) do (2.151) a získáme pro směr vnější normály sféry ohraničující bodový zdroj divergující vlny

$$U(\mathbf{r}_P) = \int_{\phi_M=0}^{2\pi} \int_{\theta_M=0}^{\pi} U(\mathbf{r}_M) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n^{(1)}(kr_P)}{h_n^{(1)}(ka)} \times \\ \times \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\theta_M, \phi_M) Y_n^{m*}(\theta_P, \phi_P) \sin \theta_M d\theta_M d\phi_M. \quad (2.155)$$

Budeme-li pole hledat opět ve tvaru řady

$$U(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n B_{mn}(r) Y_n^{m*}(\theta, \phi), \quad (2.156)$$

pak po dosazení do (2.155) získáme

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n B_{mn}(r_P) Y_n^{m*}(\theta_P, \phi_P) &= \int_{\phi_M=0}^{2\pi} \int_{\theta_M=0}^{\pi} B_{mn}(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n^{(1)}(kr_P)}{h_n^{(1)}(ka)} \times \\ &\times \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\theta_M, \phi_M) Y_n^{m*}(\theta_M, \phi_M) Y_n^{m*}(\theta_P, \phi_P) \sin \theta_M d\theta_M d\phi_M, \end{aligned} \quad (2.157)$$

odkud můžeme pomocí ortogonalit y sféricko-harmonických funkcí určit koeficienty řady (2.156)

$$B_{mn}(r_P) = B_{mn}(a) \frac{h_n^{(1)}(kr_P)}{h_n^{(1)}(ka)}, \quad (2.158)$$

kde označíme

$$T_n(r_P, a) = \frac{h_n^{(1)}(kr_P)}{h_n^{(1)}(ka)}, \quad (2.159)$$

tzv. *tranzitní funkci* Greenovy funkce pro kouli.

Budeme-li uvažovat, že vlna vycházející z počátku projde skrze celou plochu sféry, bude pro stav pole v bodech na sféře zřejmě platit

$$U(\mathbf{a}) = \frac{e^{ika}}{4\pi a} = \frac{ik}{4\pi} h_0^{(1)}(ka). \quad (2.160)$$

Protože funkce (2.160) nezávisí na sférických souřadnicích, dostaneme po použití Laplaceovy řady (2.156) vztah pro koeficienty

$$B_{mn}(a) = \frac{ik}{\sqrt{4\pi}} h_0^{(1)}(ka) \delta_{n0} \delta_{m0}, \quad (2.161)$$

a dále, z definice sféricko-harmonických funkcí, můžeme přímo určit

$$Y_0^0(\theta, \phi) = Y_0^{0*}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}. \quad (2.162)$$

Po dosazení (2.158), (2.161) a (2.162) do (2.156) získáme vztah pro stav pole v libovolném bodě

$$U(\mathbf{r}) = \frac{ik}{4\pi} h_0^{(1)}(kr) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r}, \quad (2.163)$$

což je očekávaný výsledek.

Pro řešení difrakčního problému uvnitř sféry sestavíme novou Greenovu funkci pomocí

rozvoje do vlastních funkcí Laplaceova operátoru. Stejně jako v předchozím, nejprve zavedeme

$$G'_0(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n g_n(r_M, r_P) Y_n^m(\theta_P, \phi_P) Y_n^{m*}(\theta_M, \phi_M), \quad (2.164)$$

kde vzhledem k tomu že $G'_0(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P)$ musí splňovat rovnici (2.125), musí $g_n(r_M, r_P)$ splňovat rovnici (2.102) s odpovídající pravou stranou, tj.

$$r^2 \frac{d^2 g_n(r_M, r_P)}{dr^2} + 2r \frac{dg_n(r_M, r_P)}{dr} + k^2 r^2 g_n(r_M, r_P) - l(l+1) g_n(r_M, r_P) = -\delta(r_M - r_P). \quad (2.165)$$

Budeme-li hledat $g_n(r_M, r_P)$ ve tvaru

$$g_n(r_M, r_P) = \begin{cases} C_n h_n^{(2)}(kr_P) h_n^{(1)}(kr_M) & r_P < r_M \\ C_n h_n^{(1)}(kr_P) h_n^{(2)}(kr_M) & r_P > r_M \end{cases}, \quad (2.166)$$

pak z rovnice (2.165) můžeme integrací získat vztah pro koeficienty C_n

$$-kr_P C_n [h_n^{(1)}(kr_P) h_n^{(2)'}(kr_P) - h_n^{(2)}(kr_P) h_n^{(1)'}(kr_P)] = -\frac{1}{r_P}. \quad (2.167)$$

Pro velké hodnoty argumentu Hankelových funkcí můžeme psát asymptotické rozvoje

$$h_n^{(1)}(x) \approx -i \frac{e^{i(x - \frac{n\pi}{2})}}{x}, \quad (2.168)$$

$$h_n^{(2)}(x) \approx i \frac{e^{-i(x - \frac{n\pi}{2})}}{x}, \quad (2.169)$$

a tudíž, vzhledem k velké hodnotě výrazu kr_P , platí

$$W(h_n^{(1)}(kr_P), h_n^{(2)}(kr_P)) = -\frac{2i}{k^2 r_P^2}. \quad (2.170)$$

Ze vztahu (2.167) potom můžeme určit konstantu C_n

$$C_n = \frac{ik}{2}, \quad (2.171)$$

a Greenova funkce z rovnice (2.164) bude mít tvar

$$G'_0(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P) = \frac{ik}{2} \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n h_n^{(2)}(kr_P) h_n^{(1)}(kr_M) \times \\ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n h_n^{(1)}(kr_P) h_n^{(2)}(kr_M) \times \end{cases} \quad (2.172)$$

$$\times Y_n^m(\theta_P, \phi_P) Y_n^{m*}(\theta_M, \phi_M) \quad r_P < r_M$$

$$\times Y_n^m(\theta_P, \phi_P) Y_n^{m*}(\theta_M, \phi_M) \quad r_P > r_M,$$

kde $G'_0(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P)$ značí Greenovu funkci pro difrakční problém uvnitř sféry. Výslednou Greenovu funkci budeme opět hledat ve tvaru

$$G'(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P) = G'_0(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P) + \psi(r_P, \theta_P, \phi_P), \quad (2.173)$$

kde

$$\psi(r_P, \theta_P, \phi_P) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n D_{mn} h_n^{(2)}(kr_P) Y_n^m(\theta_P, \phi_P). \quad (2.174)$$

Podobným způsobem, jakým jsme dospěli k rovnicím (2.146) a (2.149), s ohledem na to, že vyšetřujeme prostor uvnitř sféry, můžeme určit funkci $G'(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P)$, která bude mít tvar

$$G'(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P) = \frac{ik}{2} \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n h_n^{(2)}(kr_P) \left[h_n^{(1)}(kr_M) - h_n^{(1)}(ka) \right] \times \\ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{h_n^{(2)}(kr_M)}{h_n^{(2)}(ka)} \left[h_n^{(1)}(kr_P) h_n^{(1)}(ka) - h_n^{(1)}(ka) h_n^{(2)}(kr_P) \right] \times \end{cases} \quad (2.175)$$

$$\times Y_n^m(\theta_P, \phi_P) Y_n^{m*}(\theta_M, \phi_M) \quad r_P < r_M$$

$$\times Y_n^m(\theta_P, \phi_P) Y_n^{m*}(\theta_M, \phi_M) \quad r_P > r_M.$$

Pro užití difrakčního integrálu nyní vyčíslíme derivaci Greenovy funkce $G'(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P)$ obdobně jako v rovnicích (2.152) a (2.153) a získáme

$$\frac{\partial G'(\mathbf{a}, \mathbf{r}_P)}{\partial r_P} = -\frac{1}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{h_n^{(2)}(kr_P)}{h_n^{(2)}(ka)} Y_n^m(\theta_M, \phi_M) Y_n^{m*}(\theta_P, \phi_P). \quad (2.176)$$

Hledáme-li opět funkci $U(\mathbf{r})$ ve tvaru řady

$$U(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n E_{mn}(r) Y_n^{m*}(\theta, \phi), \quad (2.177)$$

pak po dosazení (2.176), (2.177) do (2.151) získáme vztah mezi koeficienty

$$E_{mn}(r_P) = E_{mn}(a) \frac{h_n^{(2)}(kr_P)}{h_n^{(2)}(ka)}. \quad (2.178)$$

Pro stav pole v případě konvergentní vlny šířící se směrem k počátku platí pro body na ohraničující sféře o poloměru a

$$U(\mathbf{a}) = \frac{e^{-ika}}{4\pi a} = -\frac{ik}{4\pi} h_0^{(2)}(ka), \quad (2.179)$$

a funkci $U(\mathbf{r})$ stále hledáme ve tvaru (2.177). Ze sféricko-harmonických funkcí nezávisí pouze hodnota funkce $Y_0^0(\theta, \phi)$ na hodnotách argumentů θ, ϕ a proto pro koeficienty Laplaceovy řady (2.177) bude platit

$$E_{mn}(a) = -\frac{ik}{\sqrt{4\pi}} h_0^{(2)}(ka) \delta_{n0} \delta_{m0}, \quad (2.180)$$

a stav pole určíme ze vztahu

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{ik}{4\pi} h_0^{(2)}(kr) = \frac{e^{-ikr}}{4\pi r}. \quad (2.181)$$

Pro vyšetření limitní situace, kdy poloměr ohraničující sféry nabývá velmi velkých hodnot, zapíšeme vztah pro stav pole v integrálním tvaru tak, jak odpovídá difrakčnímu problému uvnitř sféry

$$U(\mathbf{r}_P) = \int_{\phi_M=0}^{2\pi} \int_{\theta_M=0}^{\pi} U(\mathbf{r}_M) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n^{(2)}(kr_P)}{h_n^{(2)}(ka)} \times \\ \times \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\theta_M, \phi_M) Y_n^{m*}(\theta_P, \phi_P) \sin \theta_M d\theta_M d\phi_M, \quad (2.182)$$

do kterého můžeme dosadit asymptotické rozvoje Hankelových funkcí

$$U(\mathbf{r}_P) = \int_{\phi_M=0}^{2\pi} \int_{\theta_M=0}^{\pi} U(\mathbf{r}_M) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{ie^{-i(kr_P - \frac{n\pi}{2})}}{r_P} \frac{a}{ie^{-i(ka - \frac{n\pi}{2})}} \times \\ \times \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\theta_M, \phi_M) Y_n^{m*}(\theta_P, \phi_P) \sin \theta_M d\theta_M d\phi_M, \quad (2.183)$$

a vztah můžeme následně psát jako

$$U(\mathbf{r}_P) = \int_{\phi_M=0}^{2\pi} \int_{\theta_M=0}^{\pi} U(\mathbf{r}_M) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{ae^{ik(a-r_P)}}{r_P} \times \\ \times \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\theta_M, \phi_M) Y_n^{m*}(\theta_P, \phi_P) \sin \theta_M d\theta_M d\phi_M, \quad (2.184)$$

odkud je jasně vidět, že pro velké hodnoty argumentů Hankelových funkcí (pro limitní poloměr ohraničující sféry a radiální vzdálenosti vyšetřovaného bodu) nezáleží u tranzitní funkce na stupni n . Dále můžeme využít známého vztahu pro sféricko-harmonické funkce

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\theta_M, \phi_M) Y_n^{m*}(\theta_P, \phi_P) = \frac{1}{\sin \theta_M} \delta(\theta_M - \theta_P) \delta(\phi_M - \phi_P), \quad (2.185)$$

který dosadíme do (2.184) a získáme

$$U(\mathbf{r}_P) = \int_{\phi_M=0}^{2\pi} \int_{\theta_M=0}^{\pi} U(\mathbf{a}) \frac{ae^{ik(a-r_P)}}{r_P} \delta(\theta_M - \theta_P) \delta(\phi_M - \phi_P) d\theta_M d\phi_M. \quad (2.186)$$

Ve vztahu (2.182) nyní položíme $r_P = a$, potom dostáváme

$$U(\mathbf{r}_P) = \int_{\phi_M=0}^{2\pi} \int_{\theta_M=0}^{\pi} U(\mathbf{r}_M) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\theta_M, \phi_M) Y_n^m(\theta_P, \phi_P) \sin \theta_M d\theta_M d\phi_M. \quad (2.187)$$

Dosadíme-li nyní sem za $U(\mathbf{r}_M)$ vztah pro sbíhavou sférickou vlnu o poloměru a , dostáváme

$$U(\mathbf{r}_P) = \int_{\phi_M=0}^{2\pi} \int_{\theta_M=0}^{\pi} \frac{e^{-ika}}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\theta_M, \phi_M) Y_n^m(\theta_P, \phi_P) \sin \theta_M d\theta_M d\phi_M, \quad (2.188)$$

a užitím (2.185) pak obdržíme

$$U(\mathbf{a}) = \frac{e^{-ika}}{a}. \quad (2.189)$$

Tím jsme ověřili, že i v tomto limitním případě generuje vztah (2.182) správně vstupní pole.

2.4 Vektorové vlnové pole

2.4.1 Spektrum rovinných vln

Připomeňme základní vztahy elektromagnetického pole z kapitoly 1, tj. Maxwellovy rovnice v diferenciálním tvaru

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.190)$$

tedy zákon celkového proudu,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.191)$$

tedy zákon elektromagnetické indukce,

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (2.192)$$

tedy Gaussovu větu elektrostatiky a poslední

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.193)$$

tedy Gaussovu větu magnetismu. K nim připojíme materiálové rovnice pro případ lineárního, homogenního a izotropního prostředí ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E}, \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H}, \\ \mathbf{j} &= \gamma \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (2.194)$$

Význam veličin vyskytujících se v uvedených vztazích byl zmíněn již v kapitole 1, zde pouze připomeňme, že všechny vektorové veličiny jsou funkcí polohového vektoru \mathbf{r} a času t . V prostředí bez nábojů a proudů, tj.

$$\rho = 0, \quad \mathbf{j} = 0, \quad (2.195)$$

se omezíme na harmonický charakter vektorů pole, tj. např. pro vektor intenzity elektrického pole

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad (2.196)$$

a obdobně pro ostatní vektory pole. Dosazením (2.194), (2.195) a (2.196) do Maxwellových rovnic (2.190 - 2.193) získáme

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) &= -i\omega\varepsilon\mathbf{E}_0(\mathbf{r}), \\ \nabla \times \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) &= i\omega\mu\mathbf{H}_0(\mathbf{r}), \\ \nabla \cdot \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) &= 0.\end{aligned}\tag{2.197}$$

Zopakujeme nyní postup, který jsme na začátku kapitoly 2 použili k získání Helmholtzovy rovnice, tedy na první dvě rovnice (2.197) aplikujeme operaci rot a získáme

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}_0(\mathbf{r})) &= -i\omega\varepsilon\nabla \times \mathbf{E}_0(\mathbf{r}), \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}_0(\mathbf{r})) &= i\omega\mu\nabla \times \mathbf{H}_0(\mathbf{r}).\end{aligned}\tag{2.198}$$

Užitím vztahu (A.12) a s přihlédnutím k posledním dvěma rovnicím v (2.197) můžeme jistě stanovit čtveřici vztahů platných pro vektory pole za uvedených předpokladů

$$\begin{aligned}\nabla^2\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) + k^2\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) &= 0,\end{aligned}\tag{2.199}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2\mathbf{H}_0(\mathbf{r}) + k^2\mathbf{H}_0(\mathbf{r}) &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) &= 0.\end{aligned}\tag{2.200}$$

Pro účely dalších výpočtů budeme vektory pole rozkládat do kartézských složek. Pro zjednodušení značení položíme nyní $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(E_x(\mathbf{r}), E_y(\mathbf{r}), E_z(\mathbf{r}))$ a $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Pro rovnice (2.199) tak získáme

$$\begin{aligned}\nabla^2 E_x(x, y, z) + k^2 E_x(x, y, z) &= 0, \\ \nabla^2 E_y(x, y, z) + k^2 E_y(x, y, z) &= 0, \\ \nabla^2 E_z(x, y, z) + k^2 E_z(x, y, z) &= 0, \\ \frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial E_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial E_z(x, y, z)}{\partial z} &= 0.\end{aligned}\tag{2.201}$$

V odstavci 2.3.1.1 jsme se věnovali řešení Helmholtzovy rovnice pro skalární pole. Výsledků tohoto odstavce nyní můžeme využít pro řešení vektorového vlnového pole, protože, jak vidíme z (2.201), jsme získali tři Helmholtzovy rovnice pro jednotlivé složky vektoru intenzity elektrického pole. Nicméně, čtvrtá z rovnic nám také říká, že tyto složky nemůžeme vyšetřovat zcela nezávisle, neboť jsou touto rovnicí svázány. Uveďme zde, pro připomenutí, výsledky z odstavce 2.3.1.1. Pro Helmholtzovu rovnici

$$\nabla^2 U(x, y, z) + k^2 U(x, y, z) = 0,\tag{2.202}$$

můžeme hledat řešení ve tvaru

$$U(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(p, q) e^{ik(px+qy+mz)} dp dq,\tag{2.203}$$

kde význam jednotlivých veličin byl popsán v příslušném odstavci. Zavedme nyní $E_x(x, y, z)$ a $E_y(x, y, z)$ jako nezávislá řešení soustavy (2.201). Tato řešení napíšeme ve tvaru (2.203), tedy

$$\begin{aligned} E_x(x, y, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_x(p, q) e^{ik(px+qy+mz)} dp dq, \\ E_y(x, y, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_y(p, q) e^{ik(px+qy+mz)} dp dq, \end{aligned} \quad (2.204)$$

kde $A_x(p, q)$ a $A_y(p, q)$ jsou složky spektra rovinných vln $\mathbf{A}(p, q)$, ze kterých vypočteme jejich derivace pomocí záměny pořadí derivace a integrace

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial x} &= ik \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p A_x(p, q) e^{ik(px+qy+mz)} dp dq, \\ \frac{\partial E_y(x, y, z)}{\partial y} &= ik \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q A_y(p, q) e^{ik(px+qy+mz)} dp dq. \end{aligned} \quad (2.205)$$

Z poslední rovnice (2.201) určíme

$$E_z(x, y, z) = - \int \left(\frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial E_y(x, y, z)}{\partial y} \right) dz, \quad (2.206)$$

a sem dosadíme vztahy (2.205)

$$E_z(x, y, z) = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{p}{m} A_x(p, q) + \frac{q}{m} A_y(p, q) \right] e^{ik(px+qy+mz)} dp dq. \quad (2.207)$$

Abychom mohli naše řešení prohlásit za platné, musí splňovat všechny rovnice v (2.201), ze kterých jsme ještě nepoužili třetí rovnici. Použijeme-li Laplaceův operátor v kartézských souřadnicích (A.11) získáme z této rovnice

$$\frac{\partial^2 E_z(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z(x, y, z)}{\partial z^2} + k^2 E_z(x, y, z) = 0, \quad (2.208)$$

a proto potřebujeme vyjádřit jednotlivé druhé parciální derivace $E_z(x, y, z)$. Ty jsou podle (2.207)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_z(x, y, z)}{\partial x^2} &= -k^2 p^2 E_z(x, y, z), \\ \frac{\partial^2 E_z(x, y, z)}{\partial y^2} &= -k^2 q^2 E_z(x, y, z), \\ \frac{\partial^2 E_z(x, y, z)}{\partial z^2} &= -k^2 m^2 E_z(x, y, z), \end{aligned} \quad (2.209)$$

a můžeme je dosadit do třetí rovnice (2.201), abychom získali

$$-k^2 E_z(x, y, z) (p^2 + q^2 + m^2) + k^2 E_z(x, y, z) = 0. \quad (2.210)$$

Vektor intenzity elektrického pole \mathbf{E} je za daných předpokladů zcela určen vztahy (2.204) a (2.207). Jediným předpokladem je znalost spektra rovinných vln v rovině apertury.

Pro určení vztahů pro složky vektoru intenzity magnetického pole \mathbf{H} , rozepíšeme Maxwellovy rovnice (2.197) do složek, tedy

$$\begin{aligned} -i\omega\varepsilon E_x(x, y, z) &= \frac{\partial H_z(x, y, z)}{\partial y} - \frac{\partial H_y(x, y, z)}{\partial z}, \\ -i\omega\varepsilon E_y(x, y, z) &= \frac{\partial H_x(x, y, z)}{\partial z} - \frac{\partial H_z(x, y, z)}{\partial x}, \\ -i\omega\varepsilon E_z(x, y, z) &= \frac{\partial H_y(x, y, z)}{\partial x} - \frac{\partial H_x(x, y, z)}{\partial y}, \end{aligned} \quad (2.211)$$

$$\begin{aligned} i\omega\mu H_x(x, y, z) &= \frac{\partial E_z(x, y, z)}{\partial y} - \frac{\partial E_y(x, y, z)}{\partial z}, \\ i\omega\mu H_y(x, y, z) &= \frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial z} - \frac{\partial E_z(x, y, z)}{\partial x}, \\ i\omega\mu H_z(x, y, z) &= \frac{\partial E_y(x, y, z)}{\partial x} - \frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial y}, \end{aligned} \quad (2.212)$$

$$\frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial E_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial E_z(x, y, z)}{\partial z} = 0, \quad (2.213)$$

$$\frac{\partial H_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial H_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial H_z(x, y, z)}{\partial z} = 0. \quad (2.214)$$

Z rovnic (2.211 - 2.214) chceme určit složky $H_x(x, y, z)$, $H_y(x, y, z)$, $H_z(x, y, z)$ a učiníme tak pomocí dříve odvozených vztahů (2.204) a (2.207). Příným dosazením do (2.211) můžeme např. určit

$$H_z(x, y, z) = \frac{k}{\omega\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [pA_y(p, q) - qA_x(p, q)] e^{ik(px+qy+mz)} dp dq. \quad (2.215)$$

Dosazením vztahu

$$\frac{k}{\omega} = \sqrt{\varepsilon\mu}, \quad (2.216)$$

upravíme (2.215)

$$H_z(x, y, z) = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [qA_x(p, q) - pA_y(p, q)] e^{ik(px+qy+mz)} dp dq. \quad (2.217)$$

Vztahy (2.211) v sobě obsahují parciální derivace složek vektoru \mathbf{H} . Abychom těchto rovnic mohli využít, vyčíslíme si je nyní a to pomocí vztahů (2.212)

$$\begin{aligned}
i\omega\mu \frac{\partial H_x(x, y, z)}{\partial y} &= \frac{\partial^2 E_z(x, y, z)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 E_y(x, y, z)}{\partial z \partial y}, \\
i\omega\mu \frac{\partial H_x(x, y, z)}{\partial z} &= \frac{\partial^2 E_z(x, y, z)}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 E_y(x, y, z)}{\partial z^2}, \\
i\omega\mu \frac{\partial H_y(x, y, z)}{\partial x} &= \frac{\partial^2 E_x(x, y, z)}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 E_z(x, y, z)}{\partial x^2}, \\
i\omega\mu \frac{\partial H_y(x, y, z)}{\partial z} &= \frac{\partial^2 E_x(x, y, z)}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E_z(x, y, z)}{\partial x \partial z}, \\
i\omega\mu \frac{\partial H_z(x, y, z)}{\partial x} &= \frac{\partial^2 E_y(x, y, z)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E_x(x, y, z)}{\partial y \partial x}, \\
i\omega\mu \frac{\partial H_z(x, y, z)}{\partial y} &= \frac{\partial^2 E_y(x, y, z)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 E_x(x, y, z)}{\partial y^2},
\end{aligned} \tag{2.218}$$

a následně je dosadíme do (2.211). Odtud získáme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_y(x, y, z)}{\partial z} &= i\omega\varepsilon E_x(x, y, z) + \frac{\partial H_z(x, y, z)}{\partial y}, \\
\frac{\partial H_x(x, y, z)}{\partial z} &= -i\omega\varepsilon E_y(x, y, z) + \frac{\partial H_z(x, y, z)}{\partial x},
\end{aligned} \tag{2.219}$$

dále po dosazení získáme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_y(x, y, z)}{\partial z} &= i\omega\varepsilon E_x(x, y, z) + \frac{1}{i\omega\mu} \left(\frac{\partial^2 E_y(x, y, z)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 E_x(x, y, z)}{\partial y^2} \right), \\
\frac{\partial H_x(x, y, z)}{\partial z} &= -i\omega\varepsilon E_y(x, y, z) + \frac{1}{i\omega\mu} \left(\frac{\partial^2 E_y(x, y, z)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E_x(x, y, z)}{\partial y \partial x} \right),
\end{aligned} \tag{2.220}$$

a po zintegrování dostáváme

$$\begin{aligned}
H_y(x, y, z) &= i\omega\varepsilon \int E_x(x, y, z) dz + \\
&+ \frac{1}{i\omega\mu} \int \left(\frac{\partial^2 E_y(x, y, z)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 E_x(x, y, z)}{\partial y^2} \right) dz,
\end{aligned} \tag{2.221}$$

$$\begin{aligned}
H_x(x, y, z) &= -i\omega\mu \int E_y(x, y, z) dz + \\
&+ \frac{1}{i\omega\mu} \int \left(\frac{\partial^2 E_y(x, y, z)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E_x(x, y, z)}{\partial y \partial x} \right) dz.
\end{aligned} \tag{2.222}$$

Abychom určili použité parciální derivace složek vektoru \mathbf{E} , musíme se vrátit k rovnicím (2.204) a (2.207). Pak pro jednotlivé použité derivace a integrály v (2.221) a (2.222)

platí

$$\begin{aligned}
\int E_x(x, y, z) dz &= \frac{1}{ik} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{m} A_x(p, q) e^{ik(px+qy+mz)} dp dq, \\
\int E_y(x, y, z) dz &= \frac{1}{ik} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{m} A_y(p, q) e^{ik(px+qy+mz)} dp dq, \\
\int \frac{\partial^2 E_y(x, y, z)}{\partial x \partial y} dz &= ik \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{pq}{m} A_y(p, q) e^{ik(px+qy+mz)} dp dq, \\
\int \frac{\partial^2 E_y(x, y, z)}{\partial x^2} dz &= ik \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p^2}{m} A_y(p, q) e^{ik(px+qy+mz)} dp dq, \\
\int \frac{\partial^2 E_x(x, y, z)}{\partial y^2} dz &= ik \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q^2}{m} A_x(p, q) e^{ik(px+qy+mz)} dp dq, \\
\int \frac{\partial^2 E_x(x, y, z)}{\partial y \partial x} dz &= ik \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{pq}{m} A_x(p, q) e^{ik(px+qy+mz)} dp dq,
\end{aligned} \tag{2.223}$$

a po dosazení do (2.221) získáme

$$\begin{aligned}
H_x(x, y, z) &= -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{pq}{m} A_x(p, q) + \frac{1-p^2}{m} A_y(p, q) \right] e^{ik(px+qy+mz)} dp dq, \\
H_y(x, y, z) &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1-q^2}{m} A_x(p, q) + \frac{pq}{m} A_y(p, q) \right] e^{ik(px+qy+mz)} dp dq.
\end{aligned} \tag{2.224}$$

Vektor intenzity magnetického pole je tedy určen pomocí vztahů (2.217) a (2.224). Známe-li funkce úhlového spektra, můžeme vektory \mathbf{E} a \mathbf{H} určovat přímo. V případě, že úhlové spektrum neznáme, můžeme jej určit pomocí známých vektorů intenzit v rovině $z = z_0$ ze vztahů

$$\begin{aligned}
A_x(p, q) &= \frac{1}{\lambda^2} e^{-ikmz_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_x(x, y, z_0) e^{-ik(px+qy)} dx dy \\
A_y(p, q) &= \frac{1}{\lambda^2} e^{-ikmz_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_y(x, y, z_0) e^{-ik(px+qy)} dx dy.
\end{aligned} \tag{2.225}$$

Uvedené vztahy pro určení složek vektorů \mathbf{E} a \mathbf{H} jsou reprezentací elektromagnetického pole pomocí úhlového spektra rovinných vln.

2.4.2 Stratton-Chu integrály

Pro získání hodnot vektorů elektromagnetického pole, tj. intenzity elektrického pole \mathbf{E} a intenzity magnetického pole \mathbf{H} uvnitř objemu V ze známých hodnot na ohraničující ploše S , můžeme využít analogie Greenovy věty (A.16) ve vektorovém tvaru. Mějme tedy dvě vektorové funkce polohy $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ a $\mathbf{Q}(\mathbf{r})$ spojitě a se spojitými derivacemi až do druhého řádu. Závislost těchto vektorů na poloze nebudeme nadále uvádět. Tyto funkce jsou definované v každém bodě uzavřeného objemu V a na jeho ohraničující ploše S . Připomeňme větu o divergenci vektorové funkce \mathbf{F}

$$\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (2.226)$$

kde \mathbf{n} značí vektor vnější normály k ohraničující ploše S . Aplikujeme-li větu o divergenci na vektor $\mathbf{P} \times \nabla \times \mathbf{Q}$, získáme

$$\iiint_V \nabla \cdot (\mathbf{P} \times \nabla \times \mathbf{Q}) dV = \iint_S (\mathbf{P} \times \nabla \times \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{n} dS, \quad (2.227)$$

kde objemový integrál na levé straně můžeme upravit pomocí substituce

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{Q}. \quad (2.228)$$

Vyjádříme-li si divergenci vektorového součinu (A.13)

$$\nabla \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{P} - \mathbf{P} \cdot \nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{P} \cdot \nabla \times \mathbf{Q} - \mathbf{P} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{Q}, \quad (2.229)$$

pak z rovnice (2.227) získáme

$$\iiint_V (\nabla \times \mathbf{P} \cdot \nabla \times \mathbf{Q} - \mathbf{P} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{Q}) dV = \iint_S (\mathbf{P} \times \nabla \times \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (2.230)$$

Záměnou \mathbf{P} a \mathbf{Q} v rovnici (2.230) a jejich odečtením, získáme analogii Greenovy věty ve vektorovém tvaru

$$\begin{aligned} \iiint_V (\mathbf{Q} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{P} - \mathbf{P} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{Q}) dV = \\ = \iint_S (\mathbf{P} \times \nabla \times \mathbf{Q} - \mathbf{Q} \times \nabla \times \mathbf{P}) \cdot \mathbf{n} dS. \end{aligned} \quad (2.231)$$

Při řešení vektorů elektromagnetického pole budeme vycházet z Maxwellových rovnic upravených tak, aby bylo možné se zabývat nespojitostmi na rozhraní prostředí. Z tohoto důvodu se k již známému vektoru \mathbf{j} hustoty proudu (elektrického) přidává také vektor \mathbf{j}^* fiktivní hustoty magnetického proudu a k hustotě náboje (elektrického) ρ také fiktivní hustota ρ^* magnetického náboje. Tyto veličiny z fyzikálního hlediska neexistují, ale jsou užitečné při řešení naší úlohy. Maxwellovy rovnice tedy budeme uvažovat v obecném tvaru

$$\nabla \times \mathbf{H} + i\omega\epsilon\mathbf{E} = \mathbf{j}, \quad (2.232)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} - i\omega\mu\mathbf{H} = -\mathbf{j}^*, \quad (2.233)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon}\rho, \quad (2.234)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\rho^*, \quad (2.235)$$

a k nim také příslušné rovnice kontinuity pro náboje a proudy

$$\nabla \cdot \mathbf{j} - i\omega\rho = 0, \quad (2.236)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j}^* - i\omega\rho^* = 0. \quad (2.237)$$

Aplikujeme-li operátor rot na rovnici (2.232) a (2.233), pak pomocí rovnic (2.234) a (2.235) získáme

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - k^2\mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{j} - \nabla \times \mathbf{j}^*, \quad (2.238)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) - k^2\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{j} + i\omega\varepsilon\mathbf{j}^*. \quad (2.239)$$

Nyní využijeme vektorovou Greenovu větu (2.231), do které dosadíme $\mathbf{P} = \mathbf{E}$ a $\mathbf{Q} = \mathbf{a}\phi$, kde \mathbf{a} je libovolný jednotkový vektor. Funkce $\phi = \frac{e^{ikr}}{4\pi r}$ je základní Greenova funkce pro kouli (rozbíhavá sférická vlna), kde r je vzdálenost mezi bodem pozorování \mathbf{r}_P a elementem v bodě \mathbf{r}_Q . Určíme nyní jednotlivé členy integrálů (2.231). Pro

$$\nabla \times \mathbf{Q} = \nabla \times (\mathbf{a}\phi) = \nabla\phi \times \mathbf{a}, \quad (2.240)$$

získáme výsledek po složkách a pro

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{Q} = \nabla \times (\nabla\phi \times \mathbf{a}) = \mathbf{a}k^2\phi + \nabla(\mathbf{a} \cdot \nabla\phi), \quad (2.241)$$

získáme výsledek z identity (A.12). Z rovnice (2.238) ihned vidíme, že

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{P} = k^2\mathbf{E} + i\omega\mu\mathbf{j} - \nabla \times \mathbf{j}^*. \quad (2.242)$$

Člen

$$\mathbf{Q} \times \nabla \times \mathbf{P} = -\mathbf{a}\phi \times \mathbf{j}^* + j\omega\mu\mathbf{a}\phi \times \mathbf{H}, \quad (2.243)$$

získáme přímo z rovnice (2.233). Pro dosazení do integrálů dále využijeme vektorovou identitu pro smíšený součin

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \quad (2.244)$$

a již můžeme psát

$$\begin{aligned} \iiint_V \left(i\omega\mu\mathbf{j}\phi - \nabla \times \mathbf{j}^*\phi + \frac{1}{\varepsilon}\rho\nabla\phi \right) dV = \\ = \iint_S [i\omega\mu(\mathbf{n} \times \mathbf{H})\phi + (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \nabla\phi + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})\nabla\phi - \mathbf{n} \times \mathbf{j}^*\phi] dS. \end{aligned} \quad (2.245)$$

Uvážíme-li, že platí identita

$$\iiint_V \nabla \times \mathbf{j}^* \phi dV = \iint_S \mathbf{n} \times \mathbf{j}^* \phi dS + \iiint_V \mathbf{j}^* \times \nabla \phi dV, \quad (2.246)$$

kde \mathbf{n} značí vnější normálu k ohraničující ploše S , získáme z (2.245)

$$\begin{aligned} \iiint_V \left(i\omega\mu\mathbf{j}\phi - \mathbf{j}^* \times \nabla\phi + \frac{1}{\varepsilon}\rho\nabla\phi \right) dV = \\ = \iint_S [i\omega\mu(\mathbf{n} \times \mathbf{H})\phi + (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \nabla\phi + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})\nabla\phi] dS. \end{aligned} \quad (2.247)$$

Plošný integrál v (2.247) je ve skutečnosti integrací přes dvě plochy. Jedna ohraničuje objem V , kterým se zabýváme "zvnějšku" a druhá plocha je kulová plocha o velice malém poloměru r_1 kolem středu objemu, kde se vyskytuje singularita funkce ϕ . Díky uvážení této plochy, můžeme integraci v objemovém integrálu přes tuto singularitu odstranit. Vektor vnější normály vůči objemu V na této ploše S_1 je opačný vzhledem ke směru jednotkového vektoru průvodiče \mathbf{r}_0 . Platí

$$\nabla\phi = \left(\frac{1}{r} - ik \right) \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \mathbf{r}_0, \quad (2.248)$$

a pro $r_1 \rightarrow 0$ se příspěvek integrace této kulové plochy redukuje na \mathbf{E} a můžeme psát

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}_P) = \iiint_V \left(i\omega\mu\mathbf{j}\phi - \mathbf{j}^* \times \nabla\phi + \frac{1}{\varepsilon}\rho\nabla\phi \right) dV - \\ - \iint_S [i\omega\mu(\mathbf{n} \times \mathbf{H})\phi + (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \nabla\phi + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})\nabla\phi] dS. \end{aligned} \quad (2.249)$$

Obdobným způsobem (záměnou vektorů) bychom získali pro vektor magnetické indukce

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}_P) = \iiint_V \left(i\omega\varepsilon\mathbf{j}^*\phi + \mathbf{j} \times \nabla\phi + \frac{1}{\mu}\rho^*\nabla\phi \right) dV + \\ + \iint_S [i\omega\varepsilon(\mathbf{n} \times \mathbf{E})\phi - (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \times \nabla\phi - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H})\nabla\phi] dS. \end{aligned} \quad (2.250)$$

Plošné integrály v rovnicích (2.249) a (2.250) představují příspěvky zdrojů, které leží vně plochy S . Lze dokázat, že elektromagnetické pole v uzavřené oblasti je zcela určeno pomocí tečných složek vektorů \mathbf{E} a \mathbf{H} na povrchu a počátečním rozložením pole v uzavřeném objemu. Volíme-li tedy v rovnicích (2.249) a (2.250) složky $\mathbf{n} \times \mathbf{E}$ a $\mathbf{n} \times \mathbf{H}$, pak již nelze volit $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}$ a $\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}$ libovolně. Zavedme nyní nové vektory plošné hustoty elektrického proudu \mathbf{K} , plošné hustoty magnetického proudu \mathbf{K}^* a plošný náboj s hustotou η , pro které platí

$$\mathbf{K} = -\mathbf{n} \times \mathbf{H}, \quad \mathbf{K}^* = \mathbf{n} \times \mathbf{E}, \quad \eta = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}, \quad (2.251)$$

a dále uvažujeme, že se v objemu V ani na hraniční ploše S nevyskytují žádné náboje a proudy. Pole ve vnitřním bodě objemu V je pak dáno

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_P) = \iint_S [i\omega\mu\mathbf{K}\phi - \mathbf{K}^* \times \nabla\phi + \eta\nabla\phi] dS. \quad (2.252)$$

Vzhledem k tomu, že budeme výsledky uvedené výše používat při řešení difrakční úlohy, je nutné se zabývat spojitostí jednotlivých členů (2.252), které určují vektor \mathbf{E} v bodě \mathbf{r}_P . Označme postupně

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}_P) = \iint_S i\omega\mu\mathbf{K}\phi dS, \quad \mathbf{E}_2(\mathbf{r}_P) = \iint_S \mathbf{K}^* \times \nabla\phi dS, \quad (2.253)$$

$$\mathbf{E}_3(\mathbf{r}_P) = \frac{1}{\varepsilon} \iint_S \eta\nabla\phi dS. \quad (2.254)$$

Integrál \mathbf{E}_3 má nespojitost při průchodu plochou S velikosti $\mathbf{n} \cdot \Delta\mathbf{E}_3 = \frac{\eta}{\varepsilon}$, kde $\Delta\mathbf{E}_3$ značí rozdíl hodnot složek vektoru vně a uvnitř plochy S . Vzhledem ke skalárnímu součinu, neovlivňuje tento člen tečnou složku výsledného vektoru, na rozdíl od nespojitosti členu \mathbf{E}_2 nabývající hodnoty $\mathbf{n} \times \Delta\mathbf{E}_2 = \mathbf{K}^*$, který naopak nemění složku kolmou. První člen \mathbf{E}_1 má nespojitě derivace při průchodu plochou S obdobně jako \mathbf{E}_2 .

Uvažujme nyní rovinné stínítko složené z neprůhledné plochy S_2 a otvoru S_1 , které jsou vzájemně oddělené křivkou C . Pakliže bychom chtěli vyšetřovat difrakci na tomto stínítku, tj. určovat složky vektorů elektromagnetického pole v obrazovém prostoru, nemohli bychom přímo užít vztahu (2.252), neboť je platný pouze pro vektorové funkce \mathbf{E} takové, které jsou spojité na celé ploše S , kde plocha S se sestává ze sjednocení bodů ploch S_1 , S_2 a C . Protože předpokládáme křivkové rozložení nábojů a proudů na křivce C , pak pokud toto rozložení při výpočtech nevezmeme v úvahu, nebudou výsledné vztahy splňovat Maxwellovy rovnice (2.232 - 2.232). Označíme-li křivkovou hustotu elektrického náboje σ a křivkovou hustotu magnetického náboje σ^* , pak pro ně platí

$$\mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_2) = i\omega\sigma, \quad \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{K}_1^* - \mathbf{K}_2^*) = i\omega\sigma^*, \quad (2.255)$$

kde \mathbf{n}_1 je jednotkový vektor kolmý k vektoru délkového elementu $d\mathbf{c}$ křivky C a normálovému vektoru \mathbf{n} plochy S . Po dosazení ze vztahů (2.251) získáme

$$\begin{aligned} i\omega\sigma &= \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{n} \times \mathbf{H}_1), \\ i\omega\sigma^* &= \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 - \mathbf{n} \times \mathbf{E}_2). \end{aligned} \quad (2.256)$$

V případě difrakční úlohy předpokládáme, že na ploše S mimo oblast otvoru platí $\mathbf{E}_2 = \mathbf{H}_2 = 0$, a proto je příspěvek křivky k vektoru $\mathbf{E}(\mathbf{r}_P)$ roven

$$\mathbf{E}_4(\mathbf{r}_P) = -\frac{1}{i\omega\varepsilon} \oint_C \nabla\phi\mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{c}, \quad (2.257)$$

a obdobně pro příspěvek k vektoru $\mathbf{H}(\mathbf{r}_P)$ platí

$$\mathbf{H}_4(\mathbf{r}_P) = \frac{1}{i\omega\mu} \oint_C \nabla\phi\mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{c}. \quad (2.258)$$

Jak již bylo řečeno, rozložení nábojů a proudů na křivce C jsme uvažovali, aby naše vektory $\mathbf{E}(\mathbf{r}_P)$ a $\mathbf{H}(\mathbf{r}_P)$ splňovali Maxwellovy rovnice. Vyšetříme nyní, jestli je toto opravdu splněno. Protože víme, že funkce ϕ je řešením Helmholtzovy rovnice, platí pro ni

$$\nabla^2 \phi = -k^2 \phi = -k^2 \frac{e^{ikr}}{4\pi r}, \quad (2.259)$$

a dále vidíme, že

$$\nabla \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1) \times \nabla \phi = 0, \quad (2.260)$$

a proto pro divergenci vektoru $\mathbf{E}(\mathbf{r}_P)$ získáme

$$\begin{aligned} \nabla_P \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_P) = & -\frac{k^2}{i\omega\epsilon} \oint_C \phi \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{c} - k^2 \iint_{S_1} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_1) \phi dS + \\ & + i\omega\mu \iint_{S_1} (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1) \cdot \nabla \phi dS, \end{aligned} \quad (2.261)$$

kde ∇_P značí derivaci podle souřadnic bodu \mathbf{r}_P . Dále platí

$$\iint_S (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \nabla \phi dS = \iint_S \phi \nabla \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS - \oint_C \phi \mathbf{H} \cdot d\mathbf{c}, \quad (2.262)$$

což po dosazení do (2.261) dává

$$\nabla_P \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_P) = -k^2 \iint_{S_1} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_1) \phi dS + i\omega\mu \iint_{S_1} \phi \nabla \times \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{n} dS, \quad (2.263)$$

což podle (2.232) dává vzhledem k integrandům (2.263)

$$\nabla_P \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_P) = 0. \quad (2.264)$$

Obdobně bychom mohli provést odvození pro vektor $\mathbf{H}(\mathbf{r}_P)$. Pomocí vektorových identit z kapitoly A můžeme dále vyšetřit rotaci vektoru $\mathbf{H}(\mathbf{r}_P)$. Např. díky vztahu (A.8) okamžitě vymizí křivkový integrál a po úpravách můžeme psát

$$\begin{aligned} \nabla_P \times \mathbf{H}(\mathbf{r}_P) = & - \iint_{S_1} [(\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1) \cdot \nabla \nabla \phi + k^2 \phi (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1)] dS - \\ & - \iint_{S_1} i\omega\epsilon (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1) \times \nabla \phi dS, \end{aligned} \quad (2.265)$$

a dále

$$\begin{aligned} \nabla_P \times \mathbf{H}(\mathbf{r}_P) = & \oint_C \nabla \phi \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{c} + \\ & + i\omega\epsilon \iint_{S_1} [i\omega\mu (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \phi + (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1) \times \nabla \phi + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_1) \nabla \phi] dS, \end{aligned} \quad (2.266)$$

odkud vidíme, že rovnice (2.232) platí, protože

$$\nabla_P \times \mathbf{H}(\mathbf{r}_P) = -i\omega\varepsilon\mathbf{E}(\mathbf{r}_P). \quad (2.267)$$

Je tedy zřejmé, že pro vektory určené zde uvedeným postupem lze dokázat, že splňují Maxwellovy rovnice a lze jimi úspěšně řešit difrakční úlohy.

2.4.3 Přímá integrace Maxwellových rovnic

V odstavci 2.4.1 jsme se zabývali řešením Maxwellových rovnic pomocí výsledků pro úhlové spektrum rovinných vln skalární funkce. Obdobným způsobem budeme postupovat i v tomto odstavci, avšak místo spektra rovinných vln využijeme výsledky získané Sommerfeldem při řešení difrakčního problému na rovinném stínítku, který je popsán v odstavci 2.3.1.2.

Při řešení, tak jako v předchozím, budeme vycházet z Maxwellových rovnic v lineárním, homogenním a izotropním prostředí bez nábojů a proudů a navíc harmonických v čase. Ty mají známý tvar

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H}(x, y, z) &= -i\omega\varepsilon\mathbf{E}(x, y, z), \\ \nabla \times \mathbf{E}(x, y, z) &= i\omega\mu\mathbf{H}(x, y, z), \\ \nabla \cdot \mathbf{E}(x, y, z) &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{H}(x, y, z) &= 0, \end{aligned} \quad (2.268)$$

a lze z nich odvodit soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) &= 0, \end{aligned} \quad (2.269)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) &= 0. \end{aligned} \quad (2.270)$$

kterou budeme řešit. Výsledkem řešení difrakční úlohy podle kapitoly 2.3.1.2 je Sommerfeldův difrakční integrál

$$U(\mathbf{r}_P) = -\frac{i}{\lambda} \iint_S U(\mathbf{r}_M) \frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}^2} \mathbf{r}_{PM} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (2.271)$$

Tento výsledek platí pro Greenovu funkci splňující podmínku nulovosti na hraniční ploše a uvažuje její derivaci ve směru vnější normály ke stínítku za použití jejího vektoru. Pakliže bychom postupovali jiným způsobem, s uvážením obou hraničních podmínek, a uvážením, že kladný směr osy z je s vektorem vnější normály totožný, získali bychom následující difrakční integrály

$$U(\mathbf{r}_P) = -\frac{1}{2\pi} \iint_S U(\mathbf{r}_M) \left[\frac{\partial}{\partial z_M} \left(\frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}} \right) \right]_{z_M=0} dS, \quad (2.272)$$

$$U(\mathbf{r}_P) = \frac{1}{2\pi} \iint_S \left[\frac{\partial U(\mathbf{r}_M)}{\partial z_M} \right]_{z_M=0} \frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}} dS. \quad (2.273)$$

Opět volíme dvě nezávislé složky řešení první rovnice (2.269), pro které využijeme řešení (2.272), tedy

$$\begin{aligned} E_x(\mathbf{r}_P) &= -\frac{1}{2\pi} \iint_S E_x(\mathbf{r}_M) \left[\frac{\partial}{\partial z_M} \left(\frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}} \right) \right]_{z_M=0} dx_M dy_M, \\ E_y(\mathbf{r}_P) &= -\frac{1}{2\pi} \iint_S E_y(\mathbf{r}_M) \left[\frac{\partial}{\partial z_M} \left(\frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}} \right) \right]_{z_M=0} dx_M dy_M. \end{aligned} \quad (2.274)$$

Z druhé rovnice (2.269) máme pro bod \mathbf{r}_M ležící na hraniční ploše vztah

$$-\frac{\partial E_z(\mathbf{r}_M)}{\partial z_M} \Big|_{z_M=0} = \frac{\partial E_x(\mathbf{r}_M)}{\partial x_M} \Big|_{z_M=0} + \frac{\partial E_y(\mathbf{r}_M)}{\partial y_M} \Big|_{z_M=0}, \quad (2.275)$$

který můžeme dosadit do (2.273) a získáme

$$E_z(\mathbf{r}_P) = -\frac{1}{2\pi} \iint_S \left[\frac{\partial E_x(\mathbf{r}_M)}{\partial x_M} \Big|_{z_M=0} + \frac{\partial E_y(\mathbf{r}_M)}{\partial y_M} \Big|_{z_M=0} \right] \frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}} dx_M dy_M. \quad (2.276)$$

Výraz $E_z(\mathbf{r}_P)$ rozepíšeme

$$E_z(\mathbf{r}_P) = E_z^x(\mathbf{r}_P) + E_z^y(\mathbf{r}_P), \quad (2.277)$$

kde pro jednotlivé části, s použitím pravidla pro integrování per partes, můžeme jistě psát výrazy

$$\begin{aligned} E_z^x(\mathbf{r}_P) &= -\frac{1}{2\pi} \int \left(E_x(\mathbf{r}_M) \frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}} - \int E_x(\mathbf{r}_M) \left[\frac{\partial}{\partial x_M} \left(\frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}} \right) \right]_{z_M=0} dx_M \right) dy_M \\ E_z^y(\mathbf{r}_P) &= -\frac{1}{2\pi} \int \left(E_y(\mathbf{r}_M) \frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}} - \int E_y(\mathbf{r}_M) \left[\frac{\partial}{\partial y_M} \left(\frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}} \right) \right]_{z_M=0} dy_M \right) dx_M \end{aligned} \quad (2.278)$$

které můžeme zjednodušit pomocí limitních přechodů

$$\begin{aligned} \lim_{r_{PM} \rightarrow \infty} E_x(\mathbf{r}_M) \frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}} &= 0, \\ \lim_{r_{PM} \rightarrow \infty} E_y(\mathbf{r}_M) \frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}} &= 0, \end{aligned} \quad (2.279)$$

a známých parciálních derivací

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) = \frac{e^{ikr}}{r} \left(ik - \frac{1}{r} \right), \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}, \quad (2.280)$$

kde $\mathbf{r} = (x, y, z)$ a $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Vztahy pro přímý výpočet složek vektoru intenzity elektrického pole \mathbf{E} na základě známých hodnot v rovině apertury potom jsou

$$\begin{aligned} E_x(\mathbf{r}_P) &= -\frac{1}{2\pi} \iint_S \gamma E_x(\mathbf{r}_M) \frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}} \left(\frac{1}{r_{PM}} - ik \right) dx_M dy_M, \\ E_y(\mathbf{r}_P) &= -\frac{1}{2\pi} \iint_S \gamma E_y(\mathbf{r}_M) \frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}} \left(\frac{1}{r_{PM}} - ik \right) dx_M dy_M, \\ E_z(\mathbf{r}_P) &= \frac{1}{2\pi} \iint_S \left\{ [\alpha E_x(\mathbf{r}_M) + \beta E_y(\mathbf{r}_M)] \frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}} \left(\frac{1}{r_{MP}} - ik \right) \right\} dx_M dy_M, \end{aligned} \quad (2.281)$$

kde

$$\alpha = \frac{x_P - x_M}{r_{PM}}, \quad \beta = \frac{y_P - y_M}{r_{PM}}, \quad \gamma = \frac{z_P}{r_{PM}}, \quad (2.282)$$

jsou substituce členů vzniklých použitím řetězového pravidla pro derivace. Pro určení složek vektoru \mathbf{H} musíme vzít v úvahu druhou z rovnic (2.268) a pro složky pak máme vztahy

$$\begin{aligned} H_x(x, y, z) &= \frac{1}{i\omega\mu} \left(\frac{\partial E_z(x, y, z)}{\partial y} - \frac{\partial E_y(x, y, z)}{\partial z} \right), \\ H_y(x, y, z) &= \frac{1}{i\omega\mu} \left(\frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial z} - \frac{\partial E_z(x, y, z)}{\partial x} \right), \\ H_z(x, y, z) &= \frac{1}{i\omega\mu} \left(\frac{\partial E_y(x, y, z)}{\partial x} - \frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (2.283)$$

Uvedené parciální derivace budeme počítat s výhodou přímo ze vztahů (2.281), neboť derivujeme podle souřadnic vyšetřovaného bodu. Potom nám postačí řetězové pravidlo, pomocí kterého získáme vztahy

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{e^{ikr}}{r^n} \left(\frac{1}{r} - ik \right) \right] &= \alpha \frac{e^{ikr}}{r^n} \left(k^2 + \frac{(n+1)ik}{r} - \frac{(n+1)}{r^2} \right), \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{e^{ikr}}{r^n} \left(\frac{1}{r} - ik \right) \right] &= \beta \frac{e^{ikr}}{r^n} \left(k^2 + \frac{(n+1)ik}{r} - \frac{(n+1)}{r^2} \right), \\ \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{e^{ikr}}{r^n} \left(\frac{1}{r} - ik \right) \right] &= \gamma \frac{e^{ikr}}{r^n} \left(k^2 + \frac{(n+1)ik}{r} - \frac{(n+1)}{r^2} \right). \end{aligned} \quad (2.284)$$

Použitím těchto vztahů dostaneme přímou cestou výsledné vztahy pro určení složek vektoru \mathbf{H} , tj.

$$\begin{aligned}
H_x(\mathbf{r}_P) &= \frac{1}{2\pi i \omega \mu} \iint_S \left\{ \frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}} \left(k^2 + \frac{3ik}{r_{PM}} - \frac{3}{r_{PM}^2} \right) \left[\alpha\beta E_x(\mathbf{r}_M) + \beta^2 E_y(\mathbf{r}_M) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \gamma^2 E_y(\mathbf{r}_M) \right] + 2E_y(\mathbf{r}_M) \frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}^2} \left(\frac{1}{r_{PM}} - ik \right) \right\} dx_M dy_M, \\
H_y(\mathbf{r}_P) &= -\frac{1}{2\pi i \omega \mu} \iint_S \left\{ \frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}} \left(k^2 + \frac{3ik}{r_{PM}} - \frac{3}{r_{PM}^2} \right) \left[\gamma^2 E_x(\mathbf{r}_M) + \alpha^2 E_x(\mathbf{r}_M) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \alpha\beta E_y(\mathbf{r}_M) \right] + 2E_x(\mathbf{r}_M) \frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}^2} \left(\frac{1}{r_{PM}} - ik \right) \right\} dx_M dy_M, \\
H_z(\mathbf{r}_P) &= -\frac{1}{2\pi i \omega \mu} \iint_S \left\{ \frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}} \left(k^2 + \frac{3ik}{r_{PM}} - \frac{3}{r_{PM}^2} \right) [\alpha\gamma E_y(\mathbf{r}_M) - \beta\gamma E_x(\mathbf{r}_M)] \right\} dx_M dy_M.
\end{aligned} \tag{2.285}$$

2.5 Fresnelova a Fraunhoferova aproximace difrakčního integrálu

2.5.1 Aproximace difrakčního integrálu

Uvažujme nyní vztah pro výpočet délky spojnice bodu na apertuře \mathbf{r}_M a vyšetřovaného bodu \mathbf{r}_P za předpokladu, že stínítko se nachází v rovině xy a tedy platí $z_M = 0$. Pro délku této spojnice r_{PM} pak máme vztah

$$r_{PM} = z_P \sqrt{1 + \frac{(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2}{z_P^2}}. \tag{2.286}$$

Připomeňme Taylorovu řadu pro $\sqrt{1+a}$

$$\sqrt{1+a} = 1 + \frac{a}{2} - \frac{a^2}{8} + \frac{a^3}{16} - \frac{5a^4}{128} + \dots, \tag{2.287}$$

ve které v případě *Fresnelovy* aproximace difrakčního integrálu zanedbáme členy druhého a vyššího řádu. Po dosazení do (2.286) získáme

$$r_{PM} = z_P + \frac{(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2}{2z_P}. \tag{2.288}$$

Podle výsledků z kapitoly 2.3.1.2 víme, že pole v libovolném bodě \mathbf{r}_P můžeme určit pomocí Sommerfeldova difrakčního integrálu ve tvaru

$$U(\mathbf{r}_P) = -\frac{i}{\lambda} \iint_S U(\mathbf{r}_M) \frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}^2} \mathbf{r}_{PM} \cdot \mathbf{n} dS, \tag{2.289}$$

do kterého v případě *Fresnelovy* aproximace dosadíme vztah (2.288) a zároveň připomeneme vztah z matematiky

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \tag{2.290}$$

kde $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ značí kosinus úhlu mezi vektory \mathbf{a} a \mathbf{b} . Dosazením vztahů (2.288) a (2.290) do (2.289) získáme

$$U(\mathbf{r}_P) = -\frac{i}{\lambda} e^{ikz_P} \iint_S U(\mathbf{r}_M) \frac{2z_P e^{\frac{ik}{2z_P} [(x_P-x_M)^2 + (y_P-y_M)^2]}}{2z_P^2 + (x_P-x_M)^2 + (y_P-y_M)^2} \cos(\mathbf{r}_{PM}, \mathbf{n}) dS. \quad (2.291)$$

Uvážíme-li, že pro bod \mathbf{r}_P dostatečně vzdálený od roviny apertury, umístěný poblíž osy, je směr spojnice a normály k rovině apertury téměř shodný, pak platí $\cos(\mathbf{r}_{PM}, \mathbf{n}) \approx 1$. Pro takový případ můžeme uvažovat, že převládajícím rozměrem je z_P a ve jmenovateli položit $r_{PM} \approx z_P$. Finálním výrazem pro Fresnelovu aproximaci Sommerfeldova difrakčního integrálu tedy je

$$U(\mathbf{r}_P) = -\frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikz_P}}{z_P} \iint_S U(\mathbf{r}_M) e^{\frac{ik}{2z_P} [(x_P-x_M)^2 + (y_P-y_M)^2]} dS. \quad (2.292)$$

Pomocí vztahu z matematiky pro druhou mocninu dvojčlenu získáme

$$U(\mathbf{r}_P) = -\frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikz_P}}{z_P} \iint_S U(\mathbf{r}_M) e^{\frac{ik}{2z_P} [x_P^2 + y_P^2]} e^{-\frac{ik}{z_P} [x_P x_M + y_P y_M]} e^{\frac{ik}{2z_P} [x_M^2 + y_M^2]} dS, \quad (2.293)$$

kde část, kterou lze vytknout před integrál, označíme

$$C = -\frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikz_P}}{z_P} e^{\frac{ik}{2z_P} (x_P^2 + y_P^2)}. \quad (2.294)$$

Fraunhoferovu aproximaci dostaneme z Fresnelovy pomocí úvah nad vztahem (2.293). Budou-li lineární rozměry otvoru stínítka podstatně menší než vzdálenost vyšetřovaného bodu od něj, bude se jednat o první případ Fraunhoferovy aproximace, kdy platí

$$e^{\frac{ik}{2z_P} (x_M^2 + y_M^2)} \approx 1. \quad (2.295)$$

Druhý případ Fraunhoferovy aproximace nastane tehdy, když na otvor stínítka dopadá přibližně kulová divergentní vlna se středem přibližně v bodě \mathbf{r}_P , tedy

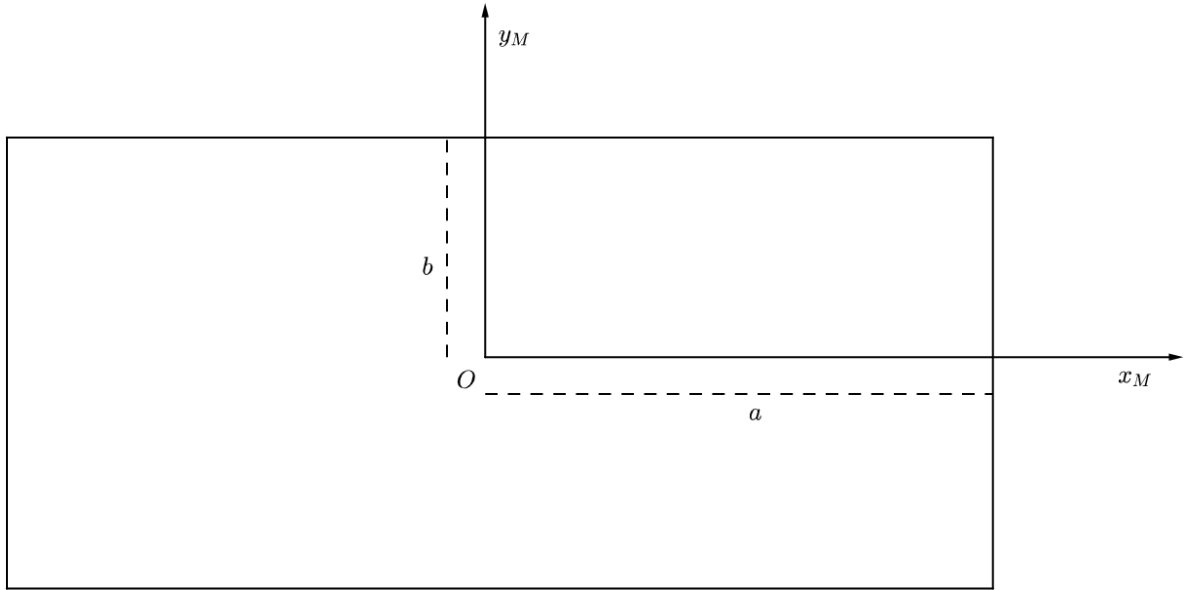
$$U(\mathbf{r}_M) = T(\mathbf{r}_M) e^{-\frac{ik}{z_P} (x_M^2 + y_M^2)}, \quad (2.296)$$

kde $T(\mathbf{r}_M)$ je funkce, která vyjadřuje vlastnosti dopadající vlny v rovině stínítka. Dosazením vztahů (2.295) a (2.296) získáme difrakční integrály

$$\begin{aligned} U(\mathbf{r}_P) &= C \iint_S U(\mathbf{r}_M) e^{-\frac{ik}{z_P} [x_P x_M + y_P y_M]} dS, \\ U(\mathbf{r}_P) &= C \iint_S T(\mathbf{r}_M) e^{-\frac{ik}{z_P} [x_P x_M + y_P y_M]} dS. \end{aligned} \quad (2.297)$$

Nahradíme-li dále

$$u = \frac{x_P}{z_P}, \quad v = \frac{y_P}{z_P}, \quad (2.298)$$



Obrázek 2.3: Obdélníková apertura

ve vztahu (2.297), získáme Fraunhoferovu aproximaci ve tvaru Fourierovy transformace v rovině otvoru stínítka

$$\begin{aligned}
 U(\mathbf{r}_P) &= C \iint_S U(\mathbf{r}_M) e^{-ik[ux_M+vy_M]} dx_M dy_M, \\
 U(\mathbf{r}_P) &= C \iint_S T(\mathbf{r}_M) e^{-ik[ux_M+vy_M]} dx_M dy_M.
 \end{aligned}
 \tag{2.299}$$

2.5.2 Difrakce na obdélníkovém otvoru

Uvažujme nyní Fraunhoferovu difrakci na rovinném stínítku s otvorem ve tvaru obdélníka o stranách $2a$ a $2b$, jehož strany jsou rovnoběžné s pravoúhlým systémem souřadnic bodů v jeho rovině, viz Obrázek 2.3. Pro konstantní hodnotu pole v otvoru stínítka $U(\mathbf{r}_M) = K$ (tento předpoklad je splněn například v případě dopadající rozbíhavé sférické vlny o velkém poloměru) dostaneme ze vztahu (2.299)

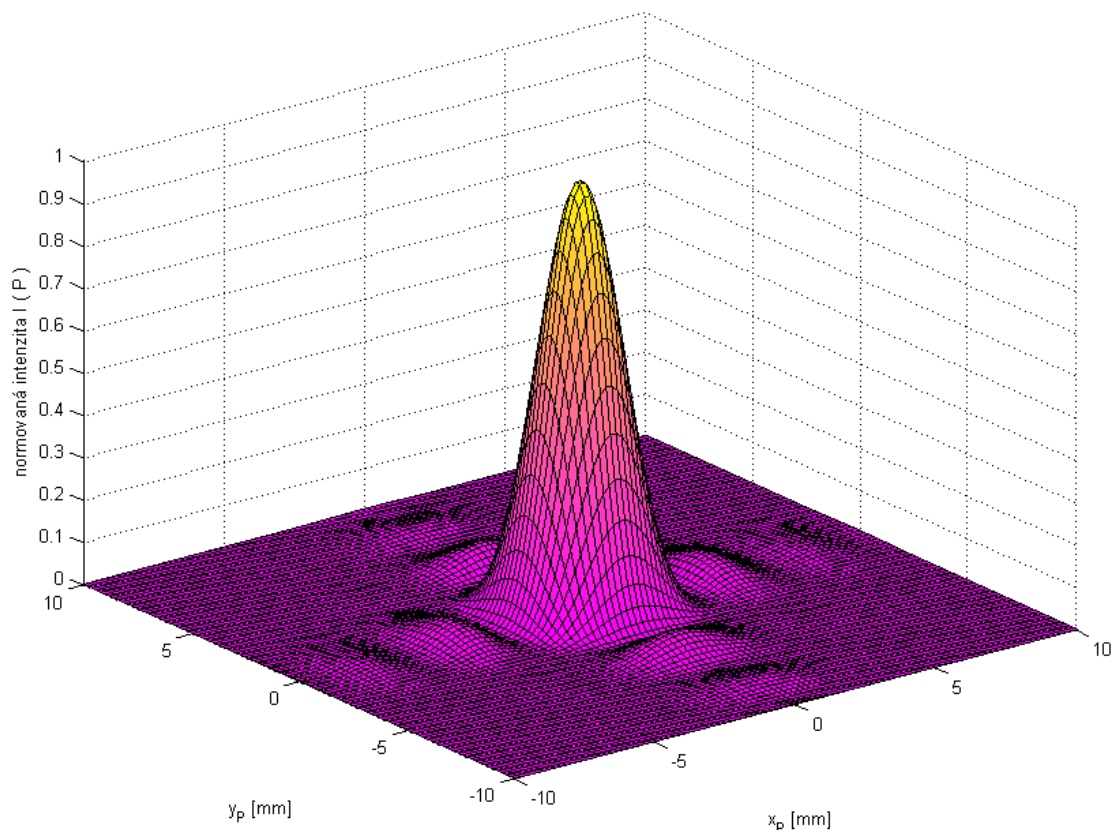
$$U(\mathbf{r}_P) = CK \iint_S e^{-ik(ux_M+vy_M)} dx_M dy_M = CK \int_{-a}^a e^{-iku x_M} dx_M \int_{-b}^b e^{-ikv y_M} dy_M. \tag{2.300}$$

Pro určitý integrál v (2.300) platí

$$\int_{-a}^a e^{-iku x_M} dx_M = -\frac{1}{iku} (e^{-ikua} - e^{ikua}) = \frac{2 \sin(kua)}{ku}, \tag{2.301}$$

a po dosazení zpět získáme

$$U(\mathbf{r}_P) = 4CK \frac{\sin(kua)}{ku} \frac{\sin(kvb)}{kv}. \tag{2.302}$$



Obrázek 2.4: Fraunhoferova difrakce na obdélníkovém otvoru, $z_P = 10\text{mm}$, $a = 1\text{mm}$, $b = 1\text{mm}$

Intenzitu pole v bodě \mathbf{r}_P potom získáme ze vztahu

$$I(\mathbf{r}_P) = |U(\mathbf{r}_P)|^2 = I(0) \left(\frac{\sin(kua)}{kua} \right)^2 \left(\frac{\sin(kvb)}{kvb} \right)^2, \quad (2.303)$$

kde

$$I(0) = \frac{K^2 (4ab)^2}{\lambda^2 z_P^2} \quad (2.304)$$

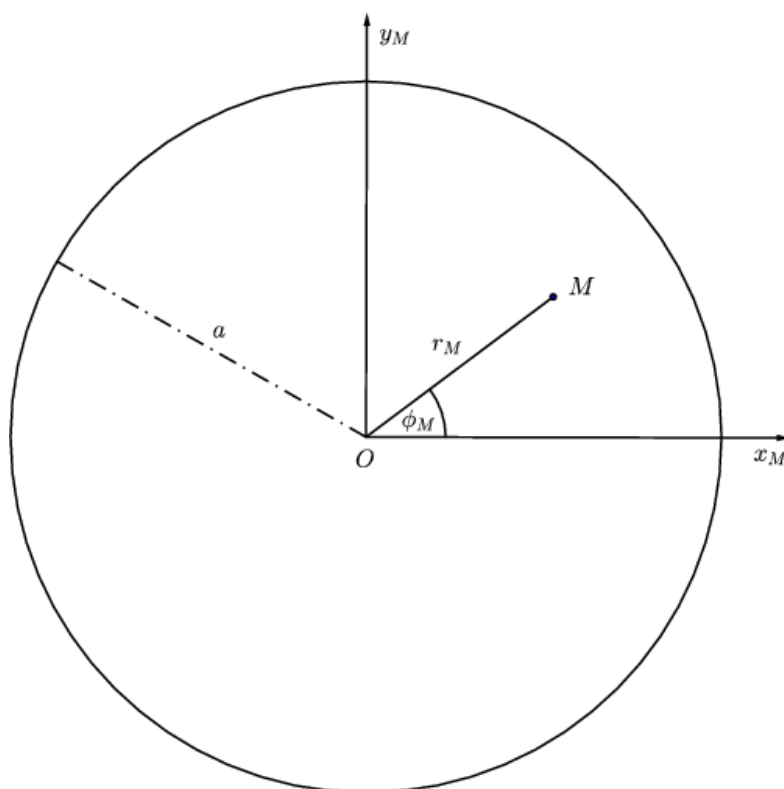
je intenzita pro $u = 0$ a $v = 0$. Normované rozložení intenzity v rovině pozorovacího bodu z_P je ilustrováno na Obrázku 2.4.

Ze vztahu (2.303) je vidět, že nulové hodnoty nabývá intenzita tam, kde nabývá nulových hodnot funkce $\text{sinc}x = \frac{\sin x}{x}$, tedy pro

$$x = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots, \quad (2.305)$$

z čehož je zjevné, že intenzita bude nulová pro

$$kua = \pm n\pi, \quad kvb = \pm m\pi, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.306)$$



Obrázek 2.5: Kruhová apertura

2.5.3 Difrakce na kruhovém otvoru

Podobně jako v předchozím odstavci, i nyní chceme zkoumat rozložení intenzity v místě pozorování, tentokrát ovšem v případě difrakce na kruhovém otvoru ve stínítku o poloměru a , viz Obrázek 2.5. Dle obrázku volíme v rovině otvoru polární souřadnice r_M, ϕ_M , pro něž platí

$$x_M = r_M \cos \phi_M, \quad y_M = r_M \sin \phi_M, \quad (2.307)$$

a dále volíme polární souřadnice ρ_P, ψ_P , v rovině pozorovacího bodu rovnoběžné s rovinou stínítka, pro něž platí

$$u = \rho_P \cos \psi_P, \quad v = \rho_P \sin \psi_P. \quad (2.308)$$

Stejně jako v předchozím, uvažujeme konstantní rozložení hodnoty pole v rovině stínítka a Fraunhoferův integrál má, po dosazení zavedených polárních souřadnic, tvar

$$U(P) = CK \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{-ik\rho_M r_M (\cos \psi_P \cos \phi_M + \sin \psi_P \sin \phi_M)} r_M dr_M d\phi_M. \quad (2.309)$$

Protože platí

$$\cos a \cos b + \sin a \sin b = \frac{1}{2} (e^{i(a-b)} + e^{-i(a-b)}), \quad (2.310)$$

můžeme integrál (2.309) přepsat do tvaru

$$U(P) = CK \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{-ik\rho_P r_M (\cos(\phi_M - \psi_P))} r_M dr_M d\phi_M. \quad (2.311)$$

Tento integrál můžeme dále upravit pomocí integrální reprezentace Besselových funkcí prvního druhu

$$\frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iz \cos \theta} e^{in\theta} d\theta = J_n(z), \quad (2.312)$$

takže pro $n = 0$ získáme

$$U(\mathbf{r}_P) = 2\pi CK \int_0^a J_0(kr_M \rho_P) r_M dr_M. \quad (2.313)$$

Pro derivaci Besselovy funkce prvního druhu platí

$$\frac{d}{dx} (x^m J_m(x)) = x^m J_{m-1}(x), \quad (2.314)$$

odkud pro $m = 0$ můžeme odvodit vzorec pro neurčitý integrál

$$\int x J_0(x) dx = x J_1(x), \quad (2.315)$$

který použijeme v (2.313) a pomocí pravidla o substituci v určitém integrálu vypočteme

$$\int_0^a J_0(kr_M \rho_P) r_M dr_M = \frac{1}{k^2 \rho_P^2} \int_0^{a k \rho_P} J_0(x) x dx = a \frac{J_1(ka \rho_P)}{k \rho_P}, \quad (2.316)$$

a tedy pro hodnotu pole získáme vztah

$$U(\mathbf{r}_P) = 2CK\pi a^2 \frac{J_1(ka \rho_P)}{ka \rho_P}. \quad (2.317)$$

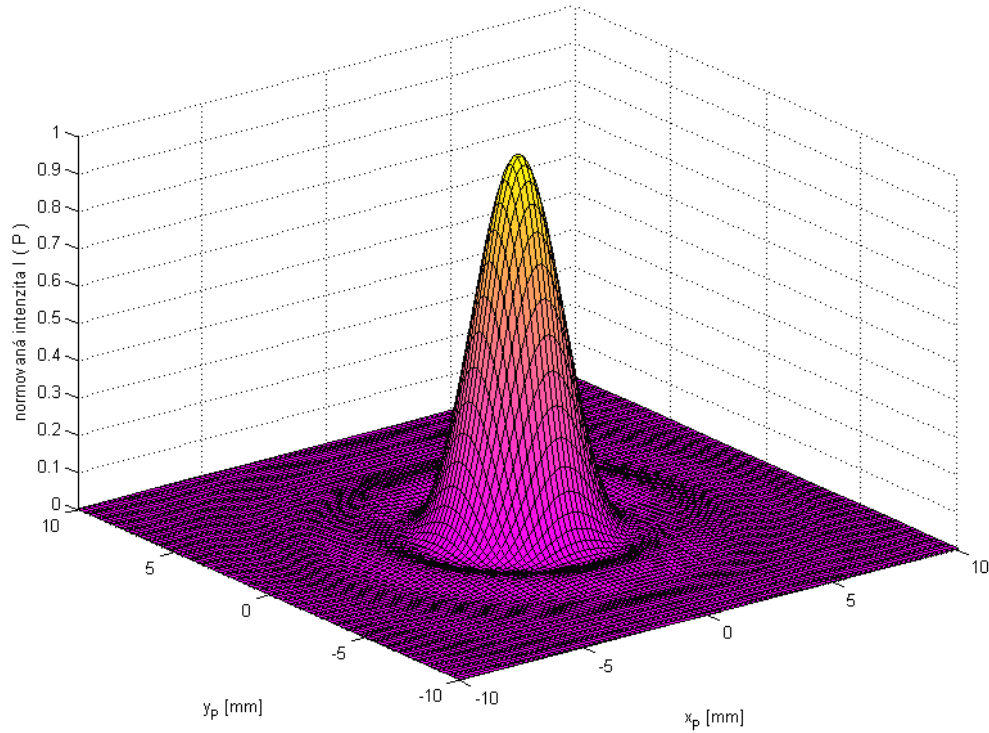
Intenzita pole je pak dána pomocí vztahu

$$I(\mathbf{r}_P) = I(0) \left[\frac{2J_1(ka \rho_P)}{ka \rho_P} \right]^2, \quad (2.318)$$

kde

$$I(0) = \frac{K^2 (\pi a^2)^2}{\lambda^2 z_P^2}. \quad (2.319)$$

Normované rozložení intenzity je ilustrováno na Obrázku 2.6.



Obrázek 2.6: Fraunhoferova difrakce na kruhovém otvoru, $z_P = 10\text{mm}$, $a = 1\text{mm}$

2.5.4 Difrakce na mřížce

Pro vyšetření difrakce na mřížce musíme nejprve uvážit případ, kdy stínítko, za kterým se nachází prostor pozorování, obsahuje více než jeden otvor. Z obecného hlediska se jedná o složitý problém, ale v praxi se často vyskytují případy, kdy jednotlivé otvory ve stínítku mají stejný tvar a rozměry. Uvažujme tedy množinu N takových otvorů, počátky jejich lokálních souřadných soustav v rovině stínítka označme O_1, O_2, \dots, O_N a souřadnice těchto bodů $(x'_{M1}, y'_{M1}), (x'_{M2}, y'_{M2}), \dots, (x'_{MN}, y'_{MN})$. Hodnotu pole v bodě pozorování pak získáme z principu superpozice a Fraunhoferovy aproximace, tj.

$$U(\mathbf{r}_P) = CK \sum_{n=1}^N \iint_A e^{-ik[(x_M+x'_{Mn})u+(y_M+y'_{Mn})v]} dx_M dy_M, \quad (2.320)$$

a tento vztah dále upravíme

$$U(\mathbf{r}_P) = CK \sum_{n=1}^N e^{-ik(x'_{Mn}u+y'_{Mn}v)} \iint_A e^{ik(x_Mu+y_Mv)} dx_M dy_M. \quad (2.321)$$

Difrakční mřížkou budeme nazývat libovolné uspořádání působící na dopadající vlnu nějakou periodickou změnou amplitudy, fáze či obojího současně. Vlastnosti difrakční mřížky je nejvhodnější vyšetřovat pomocí tzv. *přenosové funkce*. Tuto funkci definujeme jako

$$F(x_M, y_M) = \frac{V(x_M, y_M)}{V_0(x_M, y_M)}, \quad (2.322)$$

kde člen

$$V_0(x_M, y_M) = Ae^{ik(u_0x_M + v_0y_M)}, \quad (2.323)$$

představuje rozruch způsobený dopadající rovinnou monochromatickou vlnou ve směru daném směrovými kosiny u_0, v_0 . Uvažujme nyní jednorozměrnou mřížku obsahující N drážek umístěných periodicky za sebou ve vzdálenosti d . Mřížka je umístěna v rovině x_M, y_M , zatímco osa z_M směřuje do prostoru příchodu záření. Uvažujme, že směr šíření záření je v rovině x_M, z_M a úhel dopadu záření vzhledem k mřížce označme θ_0 . Po průchodu mřížkou (sklem) je úhel šíření záření vzhledem k mřížce θ . Označme $p = \sin \theta - \sin \theta_0$. Komplexní amplitudu v bodě \mathbf{r}_P získáme ze vztahu (2.321), kde ovšem integrand násobíme přenosovou funkcí $F(x_M, y_M)$ a vzhledem k popsané situaci (jednorozměrná mřížka má souřadnici $y_M = 0$ můžeme psát

$$U(\mathbf{r}_P) = U(0) \sum_{n=0}^{N-1} e^{-ikndp}. \quad (2.324)$$

Tento vztah vyjadřuje myšlenku, že rozložení záření je stejné, jako to způsobené množstvím koherentních zářičů, které jsou charakterizovány amplitudou $|U(0)|$ a vzájemným fázovým posunem o celočíselné násobky kdp . Řada (2.324) je geometrická řada s kvocienem e^{-ikdp} pro jejíž součet prvních N členů platí

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{-ikndp} = \frac{1 - e^{-ikNdp}}{1 - e^{-ikdp}}, \quad (2.325)$$

a proto můžeme psát

$$U(\mathbf{r}_P) = U(0) \frac{1 - e^{-ikNdp}}{1 - e^{-ikdp}}, \quad (2.326)$$

kde

$$U(0) = CK \int_A F(x_M, 0) e^{-ikpx_M} dx_M. \quad (2.327)$$

Rozložení intenzity v obrazovém prostoru získáme jako v předchozích odstavcích

$$I(\mathbf{r}_P) = |U(\mathbf{r}_P)|^2 = \frac{1 - e^{-ikNdp}}{1 - e^{-ikdp}} \frac{1 - e^{ikNdp}}{1 - e^{ikdp}} |U(0)|^2 = \frac{1 - \cos Nkdp}{1 - \cos kdp} I(0), \quad (2.328)$$

kde

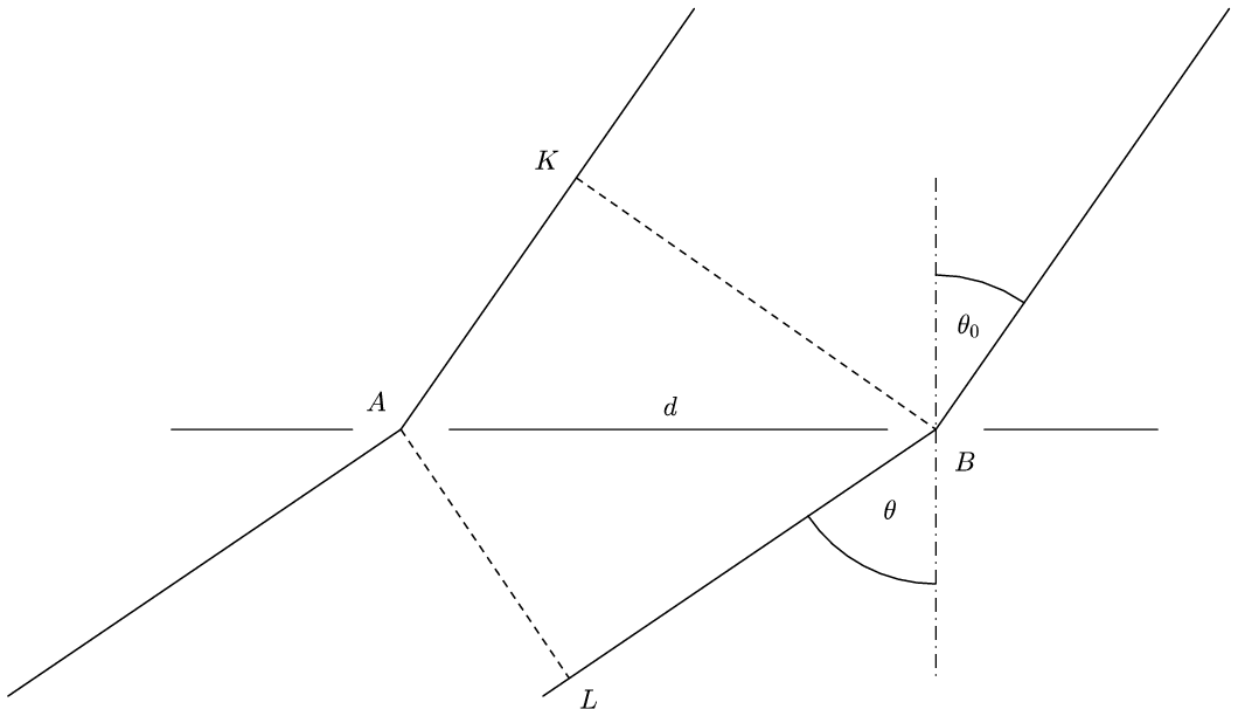
$$I(0) = |U(0)|^2. \quad (2.329)$$

Zavedením funkce

$$H(N, x) = \left(\frac{\sin Nx}{\sin x} \right)^2, \quad (2.330)$$

a uvážením goniometrického vztahu $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ převedeme vztah (2.328) na tvar

$$I(\mathbf{r}_P) = H\left(N, \frac{kdp}{2}\right) I(0). \quad (2.331)$$



Obrázek 2.7: Změna vzájemné vzdálenosti dvou dopadajících paprsků

Rozložení záření můžeme také vyšetřit zkoumáním změny vzájemné vzdálenosti dvou paprsků dopadajících na sousední mezery mřížky, viz Obrázek 2.7. Vyjádříme

$$p = \sin \theta - \sin \theta_0 = \frac{|BL| - |AK|}{d}, \quad (2.332)$$

a pro fázový rozdíl platí $2\pi \frac{dp}{\lambda} = kdp$.
Připomeneme, že platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin Nx}{\sin x} = N, \quad (2.333)$$

a tudíž vidíme, že funkce $H(N, x)$ má maxima velikosti N^2 pro $x = m\pi$. Z rovnice (2.331) vyjádříme pro tato maxima $p = \frac{m\lambda}{d}$, kde $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ je faktor posunutí pro různé průchody mřížkou a nazýváme jej *řádem interference*. Funkce má dále maxima o velikosti výrazně menší než N^2 a to pro $p = \frac{n\lambda}{Nd}$, kde pro $\text{mod}(n, N) = 0$ se jedná o předchozí případ maxima. Funkce $I(\theta)$ ze vztahu (2.331) závisí především na tvaru drážek. Bude-li tato funkce mít hlavní maximum v určitém směru a v jeho okolí bude klesat nepříliš strmě, bude tvar funkce $I(\mathbf{r}_P)$ určen především tvarem funkce $H(N, x)$. Rozložení intenzity pro mřížku sestávající se z posloupnosti proužků o šířce S a délce L , která je osvětlena ze vzdáleného liniového zdroje rovnoběžného s jednotlivými proužky, získáme ze vztahu pro rozložení intenzity pro obdélníkovou aperturu. Bude-li obdélníková apertura osvětlena z liniového zdroje, který s ní bude rovnoběžný, a bude-li se rozměr zdroje i otvoru v ose y_M blížit nekonečnu, můžeme pro rozložení

intenzity v obrazovém prostoru získat

$$I(\mathbf{r}_P)' = \int_{-\infty}^{\infty} I(\mathbf{r}_P) dv = \frac{1}{kb} \left(\frac{\sin kua}{kua} \right)^2 I(0) \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 dt, \quad (2.334)$$

kde

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 dt = \pi, \quad (2.335)$$

a protože $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, upravíme (2.334) na

$$I(\mathbf{r}_P)' = \frac{K^2 (4a)^2 8b}{\lambda z_P^2} \left(\frac{\sin kua}{kua} \right)^2. \quad (2.336)$$

Pro případ mřížky tvořené posloupností takových obdélníkových drážek, můžeme z rovnic (2.331) a (2.336) přímo psát

$$I(\mathbf{r}_P) = \frac{K^2 (2s)^2 4L}{\lambda z_P^2} \left(\frac{\sin \frac{ksu}{2}}{\frac{ksu}{2}} \right)^2 \left(\frac{\sin \frac{Nkdu}{2}}{\sin \frac{kdu}{2}} \right)^2, \quad (2.337)$$

kde $2a = s$ a $2b = L$.

2.5.5 Gaussovské svazky

Gaussovským svazkem nazýváme svazek takový, jehož rozložení intenzity vzhledem k ose svazku odpovídá tvaru funkce $e^{-\frac{r^2}{a}}$, kde r je vzdálenost od osy a a je konstanta. Jedná se o jeden z nejdůležitějších typů světelných svazků, neboť to jsou svazky vyzařované většinou laserů. Pro jejich zkoumání vyjdeme opět z vlnové rovnice

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}_M, t) = \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial^2 V(\mathbf{r}_M, t)}{\partial t^2}, \quad (2.338)$$

kde ν vyjadřuje fázovou rychlost vlnění a \mathbf{r}_M je libovolný bod v prostoru. Budeme opět uvažovat takové vlny, které mají harmonickou časovou závislost a pro jejich prostorovou složku musí platit Helmholtzova rovnice, tj.

$$V(\mathbf{r}_M, t) = U(\mathbf{r}_M) e^{-i\omega t}, \quad (2.339)$$

$$\nabla^2 U(\mathbf{r}_M) + k^2 U(\mathbf{r}_M) = 0. \quad (2.340)$$

Dále předpokládejme, že pole je koncentrováno v okolí jedné podélné souřadnice (z) a v příčném směru výrazně klesá k nule. Řešení Helmholtzovy rovnice pak hledáme ve tvaru

$$U(\mathbf{r}_M) = f(x, y, z) g(z), \quad (2.341)$$

kde $\mathbf{r}_M = (x, y, z)$. Dosadíme-li (2.341) do (2.340) a uvažíme, že platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (f(x, y, z) g(z)) &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} (f(x, y, z)) g(z) + \\ &+ 2 \frac{\partial}{\partial z} (f(x, y, z)) \frac{\partial}{\partial z} (g(z)) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (g(z)) f(x, y, z), \end{aligned} \quad (2.342)$$

pak při zanedbání členu $\frac{\partial^2}{\partial z^2} (f(x, y, z))$ (protože $2ik \frac{\partial}{\partial z} (f(x, y, z)) \gg \frac{\partial^2}{\partial z^2} (f(x, y, z))$) získáme *paraxiální vlnovou rovnici*

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (f(x, y, z)) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (f(x, y, z)) - 2ik \frac{\partial}{\partial z} (f(x, y, z)) = 0. \quad (2.343)$$

Uvažujme nyní osově symetrickou formu řešení rovnice (2.343) ve tvaru

$$f(x, y, z)_0 = A_0 e^{-iP(z)} e^{-\frac{ik\rho^2}{2q(z)}}, \quad (2.344)$$

kde $\rho^2 = x^2 + y^2$ je polární souřadnice bodu v příčné rovině. Dosazením (2.344) do (2.343) získáme

$$e^{-iP(z)} e^{-\frac{ik\rho^2}{2q(z)}} \left\{ -\frac{2ik}{q(z)} - \frac{k^2 \rho^2}{q^2(z)} - 2ik \left[-i \frac{d}{dz} P(z) + \frac{ik\rho^2}{2q^2(z)} \frac{d}{dz} q(z) \right] \right\} = 0, \quad (2.345)$$

kde po úpravě ze třetího členu dostaneme diferenciální rovnici pro funkce $P(z), q(z)$

$$2k \frac{d}{dz} P(z) + \frac{2ik}{q(z)} + \frac{k^2 \rho^2}{q^2(z)} \left\{ 1 - \frac{d}{dz} q(z) \right\} = 0. \quad (2.346)$$

Funkce $P(z)$ resp. $q(z)$ jsou obecně komplexní a určují fázi resp. rozdělení amplitudy a křivost vlnoplochy. Pro libovolné hodnoty ρ je rovnice (2.346) separabilní a to tak, že

$$\frac{d}{dz} q(z) = 1, \quad (2.347)$$

a

$$\frac{d}{dz} P(z) = \frac{-i}{q(z)}. \quad (2.348)$$

Integrací získáme

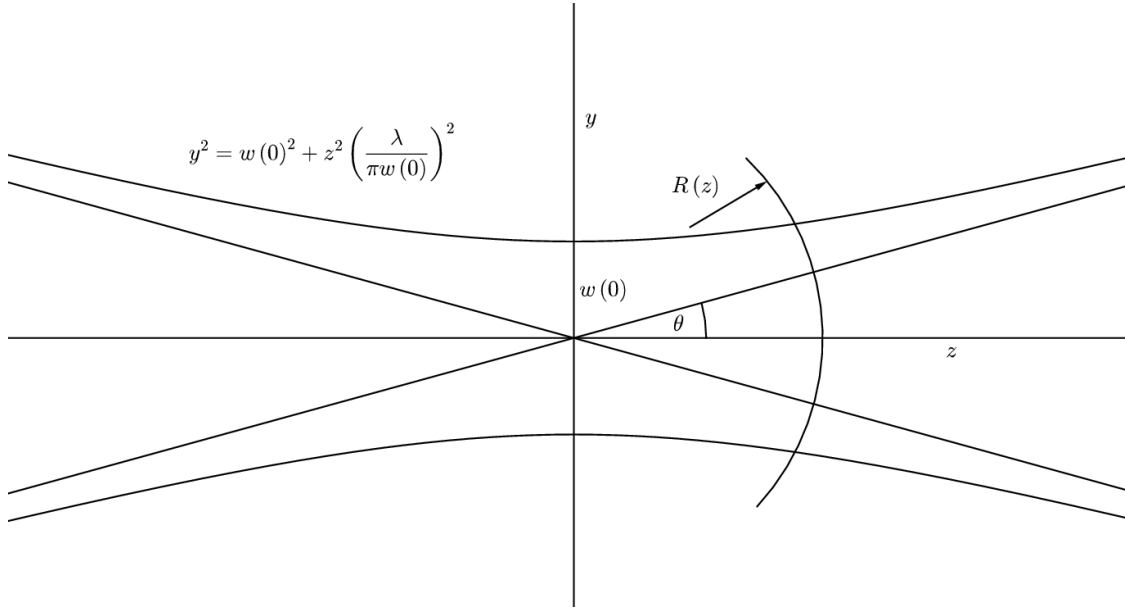
$$q(z) = z + q(0), \quad iP(z) = \ln(z + q(0)) + P(0). \quad (2.349)$$

Uvedeme-li nyní $q(z)$ vyjádřenou na základě poloměru křivosti $R(z)$ a šířky $w(z)$, získáme

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{q(0) + z} = \frac{1}{R(z)} + \frac{-2i}{kw^2(z)}, \quad (2.350)$$

a pak pokud v bodě $z = 0$ je $R(0) = \infty$, získáme

$$q(0) = \frac{ikw^2(0)}{2} = iz_0. \quad (2.351)$$



Obrázek 2.8: Gaussovský svazek

Pomocí dosazení $z = 0$ můžeme určit $P(0) = -\ln(iz_0)$ a upravit

$$iP(z) = \ln\left(1 - i\frac{z}{z_0}\right). \quad (2.352)$$

Pomocí vztahu $\arctan(z) = \frac{1}{2}i(\ln(1-iz) - \ln(1+iz))$ a zavedením substitucí

$$\phi(z) = \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right), \quad w^2(z) = w^2(0)\left(1 + \frac{z^2}{z_0^2}\right), \quad R(z) = z\left(1 + \frac{z_0^2}{z^2}\right), \quad (2.353)$$

získáme vztah pro pole

$$U(\mathbf{r}_M) = \frac{w(0)}{w(z)} e^{-ikz + i\phi - ik\frac{\rho^2}{2R(z)} - \frac{\rho^2}{w^2(z)}}, \quad (2.354)$$

kde $z_0 = \frac{kw^2(0)}{2}$ a $w(0)$ je poloměr nejužšího místa svazku, viz Obrázek 2.8, který popisuje prostorovou změnu šířky paprskového svazku a jeho zakřivení.

Pokud bychom chtěli zkoumat obecnější řešení vyhovující parabolické rovnici (2.343) a získat tak popis gaussovských svazků vyšších řádů, museli bychom uvažovat řešení tvaru

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= F(x, y, z) f_0(x, y, z) = \\ &= g\left(\frac{x}{w(z)}\right) h\left(\frac{y}{w(z)}\right) e^{ik\Theta(z)} f_0(\rho, z, w(z)), \end{aligned} \quad (2.355)$$

keré bychom opět dosadili do paraxiální vlnové rovnice. Po úpravách získáme

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} \frac{d^2}{dx^2} g + 2ik \left[\frac{d}{dz} w - \frac{w}{q} \right] x \frac{1}{g} \frac{d}{dx} f + \frac{1}{h} \frac{d^2}{dy^2} h + \\ + 2ik \left[\frac{d}{dz} w - \frac{w}{q} \right] y \frac{1}{g} \frac{d}{dy} g - 2kw^2 \frac{d}{dz} \Theta = 0, \end{aligned} \quad (2.356)$$

kde jsme pro přehlednost vynechali argumenty jednotlivých funkcí. Víme, že $\frac{w}{q} = \frac{w}{R} - \frac{2i}{kw}$ a proto platí

$$\frac{d}{dz}w - \frac{w}{q} = \frac{2i}{kw}, \quad (2.357)$$

a rovnice (2.356) se zjednoduší na tvar

$$\frac{1}{g} \left[\frac{d^2}{d\tau^2}g - 2\tau \frac{d}{d\tau}g \right] + \frac{1}{h} \left[\frac{d^2}{d\sigma^2}h - 2\sigma \frac{d}{d\sigma}h \right] - 2kw^2 \frac{d}{dz}\Theta = 0, \quad (2.358)$$

kde platí

$$\tau = \sqrt{2} \frac{x}{w}, \quad \sigma = \sqrt{2} \frac{y}{w}, \quad (2.359)$$

a protože diferenciální rovnice (2.358) je podobná diferenciální rovnici, jejímž řešením jsou Hermitovy polynomy, volíme

$$g\left(\frac{x}{w}\right) = H_n(\tau), \quad h\left(\frac{y}{w}\right) = H_m(\sigma), \quad (2.360)$$

kde $H_n(X)$ značí Hermitův polynom řádu n , jehož generující funkce je

$$H_n(X) = (-1)^n e^{X^2} \frac{d^n}{dX^n} e^{-X^2}. \quad (2.361)$$

Zpětným dosazením do rovnice (2.355) a hledáním řešení diferenciální rovnice pro Θ ve tvaru

$$2kw^2 \frac{d}{dz}\Theta = -2(n+m), \quad (2.362)$$

získáme obecné řešení ve tvaru

$$f(x, y, z) = \frac{w(0)}{w(z)} H_n\left(\sqrt{2} \frac{x}{w(z)}\right) H_m\left(\sqrt{2} \frac{y}{w(z)}\right) e^{i[n+m+1] \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right)} e^{\frac{-ik\rho^2}{2R(z)} - \frac{\rho^2}{w^2(z)}} \quad (2.363)$$

Z rovnice (2.354) můžeme pro vlnoplochu svazku psát rovnici

$$kz + \frac{k\rho^2}{2R} - \phi = konst. \quad (2.364)$$

Fázový posun ϕ můžeme vzhledem k ostatním členům zanedbat. Prostorový tvar svazku získáme, budeme-li zkoumat body, ve kterých klesne velikost amplitudy U na $\frac{1}{e}$ původní hodnoty, tj.

$$\frac{\rho^2}{w^2(z)} = 1. \quad (2.365)$$

Po dosazení z (2.353) získáme

$$x^2 + y^2 = w^2(0) \left(1 + \frac{z^2}{z_0^2}\right). \quad (2.366)$$

Úhel, který svírá asymptota hyperboly s osou z , získáme z $\tan \theta = \frac{\lambda}{\pi w(0)}$ a poloměr nejužšího místa svazku $w(0)$ je s úhlem rozbíhavosti pevně spjat tímto vztahem. Nakonec ještě poznamenejme, že z rovnice (2.363) vidíme, že poloměr křivosti R a šířka svazku w jsou stejné pro všechny gaussovské svazky vyšších řádů. K vyšetření vlastností těchto svazků nám tedy postačí pouze vyšetřit nejnižší řád.

Řešení paraxiální vlnové rovnice (2.343) bychom také mohli hledat ve tvaru

$$f_0(x, y, z) = e^{-iP(z)} e^{-ik \left(\frac{x^2}{2q_x(z)} + \frac{y^2}{2q_y(z)} \right)} \quad (2.367)$$

který vyjadřuje eliptický tvar svazků (osy x a y vyšetřujeme vzájemně nezávisle). Dosadíme-li (2.367) do (2.343), získáme diferenciální rovnici

$$\begin{aligned} -k^2 \frac{x^2}{q_x^2(z)} - 2ik \frac{1}{q_x(z)} - k^2 \frac{y^2}{q_y^2(z)} - 2ik \frac{1}{q_y(z)} - \\ - 2ik \left(-i \frac{dP(z)}{dz} + ik \frac{x^2}{2q_x^2(z)} \frac{dq_x(z)}{dz} + ik \frac{y^2}{2q_y^2(z)} \frac{dq_y(z)}{dz} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.368)$$

Odtud získáme následující soustavu diferenciálních rovnic pro jednotlivé funkce

$$\frac{dq_x(z)}{dz} = 1, \quad \frac{dq_y(z)}{dz} = 1, \quad 2i \frac{dP(z)}{dz} = \frac{1}{q_x(z)} + \frac{1}{q_y(z)}, \quad (2.369)$$

a stanovíme hraniční podmínku pro $z = 0$

$$f_0(x, y, 0) = e^{-\left(\frac{x^2}{w_x^2(0)} + \frac{y^2}{w_y^2(0)} \right)}, \quad (2.370)$$

kde zjevně

$$w_x^2(0) = \frac{-i2q_x(0)}{k}, \quad w_y^2(0) = \frac{-i2q_y(0)}{k}, \quad P(0) = 0. \quad (2.371)$$

Řešením rovnic (2.369) získáme

$$q_x(z) = iz_{0x} + z, \quad q_y(z) = iz_{0y} + z, \quad (2.372)$$

kde $z_{0x} = \frac{w_x^2(0)k}{2}$ a $z_{0y} = \frac{w_y^2(0)k}{2}$ a dosazením do třetí rovnice (2.369) dostaneme

$$2iP(z) = \ln \left(1 - \frac{iz}{z_{0x}} \right) + \ln \left(1 - \frac{iz}{z_{0y}} \right). \quad (2.373)$$

Dosadíme-li doposud dosažené výsledky do (2.341), získáme

$$U(\mathbf{r}_M) = \sqrt{\frac{w_x(0)w_y(0)}{w_x(z)w_y(z)}} e^{-ikz + i\frac{\phi_x + \phi_y}{2} - ik \left(\frac{x^2}{2R_x(z)} + \frac{y^2}{2R_y(z)} \right) - \left(\frac{x^2}{w_x^2(z)} + \frac{y^2}{w_y^2(z)} \right)}, \quad (2.374)$$

kde

$$\phi_x = \arctan \left(\frac{z}{z_{0x}} \right), \quad \phi_y = \arctan \left(\frac{z}{z_{0y}} \right), \quad w_x^2(z) = w_x^2(0) \left(1 + \frac{z^2}{z_{0x}^2} \right), \quad (2.375)$$

$$w_y^2(z) = w_y^2(0) \left(1 + \frac{z^2}{z_{0y}^2}\right), \quad R_x(z) = z \left(1 + \frac{z_{0x}^2}{z^2}\right), \quad R_y(z) = z \left(1 + \frac{z_{0y}^2}{z^2}\right) \quad (2.376)$$

Vlnoplochu svazku vyšetříme stejně jako v předchozím ze vztahu (2.374)

$$kz + k \left(\frac{x^2}{2R_x(z)} + \frac{y^2}{2R_y(z)} \right) - \frac{\phi_x + \phi_y}{2} = kz_1, \quad (2.377)$$

odkud při zanedbání členů fáze dostaneme

$$\frac{x^2}{2R_x(z)} + \frac{y^2}{2R_y(z)} = z_1 - z. \quad (2.378)$$

Jak je vidět, vlnoplocha má v každé ose jiné zakřivení, a proto výsledkem je astigmatická vlnoplocha eliptického svazku. Pro prostorový tvar svazku dostaneme

$$\frac{x^2}{w_x^2(z)} + \frac{y^2}{w_y^2(z)} = 1. \quad (2.379)$$

Díky astigmatismu vlnoplochy bude svírat v každé ose jiný úhel a proto platí

$$\tan \theta_x = \frac{\lambda}{\pi w_x(0)}, \quad \tan \theta_y = \frac{\lambda}{\pi w_y(0)}. \quad (2.380)$$

Na závěr zmiňme souvislost mezi Fresnelovou aproximací v Sommerfeldově difrakčním integrálu (viz odstavce 2.3.1.2 a 2.5) a gaussovskými svazky. Víme, že pro hodnotu pole v pozorovacím bodě \mathbf{r}_P , při zavedení Fresnelovy aproximace v Sommerfeldově difrakčním integrálu platí

$$U(\mathbf{r}_P) = -\frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikz_P}}{z_P} \iint_S U(\mathbf{r}_M) e^{\frac{ik}{2z_P} [(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2]} dS. \quad (2.381)$$

Tento integrál tedy počítá s tím, že disponujeme informací o hodnotě pole na hraniční ploše S . Bude-li toto rozložení intenzity odpovídat funkci

$$U(\mathbf{r}_M) = e^{-\frac{x_M^2 + y_M^2}{a^2}}, \quad (2.382)$$

pak pole v pozorovacím bodě je dáno

$$U(\mathbf{r}_P) = -\frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikz_P}}{z_P} \iint_S e^{-\frac{x_M^2 + y_M^2}{a^2}} e^{\frac{ik}{2z_P} [(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2]} dS. \quad (2.383)$$

Zavedením integrálu

$$\mathcal{I}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{p_M^2}{a^2} + \frac{ik(p - p_M)^2}{2z_P}} dp_M, \quad (2.384)$$

upravíme (2.383) na

$$U(\mathbf{r}_P) = -\frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikz_P}}{z_P} \mathcal{I}(x_P) \mathcal{I}(y_P). \quad (2.385)$$

Hodnotu integrálu typu

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} dx, \quad (2.386)$$

můžeme snadno spočítat podle pravidla o substituci, tedy

$$\nu = \sqrt{\alpha} \left(x - \frac{\beta}{2\alpha} \right), \quad (2.387)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} e^{\left(\gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha} \right)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\nu^2} d\nu, \quad (2.388)$$

pro α, β reálná čísla a α nenulové. Jak známo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}, \quad (2.389)$$

a proto víme, že hodnota integrálu (2.384) je

$$\mathcal{I}(p) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{ik}{2z_P}}} e^{\left(\frac{p}{a} \right)^2 \frac{ik}{2z_P \left[\frac{1}{a^2} - \frac{ik}{2z_P} \right]}}. \quad (2.390)$$

Z předchozích vztahů dostáváme po dosazení a úpravách pro pole v bodě \mathbf{r}_P

$$U(\mathbf{r}_P) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{2z_P}{ka^2} \right]^2}} e^{-i \arctan \left[\frac{2z_P}{ka^2} \right] + ik \frac{x_P^2 + y_P^2}{2R_G} + ikz_P - \frac{x_P^2 + y_P^2}{\bar{a}}}. \quad (2.391)$$

kde

$$R_G = z_P \left[1 + \frac{(ka^2)^2}{4z_P^2} \right], \quad \bar{a} = a \sqrt{1 + \left[\frac{2z_P}{ka^2} \right]^2}. \quad (2.392)$$

Kapitola 3

Závěr

V této práci jsem se zaměřil na problematiku řešení difrakční úlohy s využitím poznatků o elektromagnetickém poli. V Úvodní kapitole jsem uvedl Maxwellovy rovnice ve vektorovém diferenciálním a integrálním tvaru, k nim patří rovnice kontinuity a lineární materiálové rovnice. Dále jsem uvedl hraniční podmínky pro složky vektorů elektromagnetického pole a popsal vztah Lorentzovy síly a vektorů elektromagnetického pole. V závěru první kapitoly jsem popsal odvození vektorového a skalárního potenciálu přímo z Maxwellových rovnic. Vektorového a skalárního potenciálu se často využívá při vyšetřování vlastností elektromagnetického pole v radiokomunikaci.

Ve druhé kapitole jsem se již zaměřil na samotné řešení Maxwellových rovnic. Ukázal jsem, že z Maxwellových rovnic přímo vyplývá vlnová rovnice pro vektory elektromagnetického pole a z ní dále, uvažujeme-li vlny s harmonickou časovou závislostí, vyplývá Helmholtzova rovnice. Řešení Helmholtzovy rovnice (se zmíněnou časovou závislostí) je také řešením vlnové rovnice. Proto jsem se v dalších částech druhé kapitoly věnoval řešení Helmholtzovy rovnice, a to jak pro skalární, tak i pro vektorové vlnové pole. Řešení Helmholtzovy rovnice pro skalární vlnové pole lze nalézt mnoha způsoby, z nichž jsem vybral ty, které jsou běžně používané v aplikované optice. Metoda spektra rovinných vln je založena na rozložení funkce pole v prostoru apertury do spektra a výpočtu difrakce s použitím Fourierovy transformace. Metoda Greenovy funkce (Sommerfeldovo a Kirchhoffovo řešení) a Fourierova metoda, jsou metody založené na zavedení Greenovy funkce pro zvolenou geometrii a příslušné diferenciální rovnice, která se následně řeší. Pro vektorové vlnové pole jsem využil předchozí výsledky platné pro skalární vlnové pole s tím rozdílem, že jednotlivé složky vektorů elektromagnetického pole musí splňovat vztahy přímo vyplývající z Maxwellových rovnic. V závěru druhé kapitoly jsem uvedl Fresnelovu a Fraunhoferovu aproximaci v Sommerfeldově difrakčním integrálu. Pomocí Fraunhoferovy aproximace lze přímo analyticky vypočítat rozložení intenzity pole v bodě pozorování pro některé jednoduché geometrie (kruhová apertura, obdélníková apertura a difrakční mřížka). Nakonec jsem odvodil gaussovské svazky z vlnové rovnice a ukázal jejich spojitost s Fresnelovou aproximací v Sommerfeldově difrakčním integrálu.

V této diplomové práci jsem si kladl za cíl:

1. stručně a výstižně shrnout dosavadní poznatky o elektromagnetickém poli ve vztahu k difrakční úloze;
2. uvést možnosti řešení Maxwellových rovnic pomocí řešení vlnové rovnice a z ní

vyplývající Helmholtzovy rovnice;

3. uvést možnosti řešení Helmholtzovy rovnice pomocí skalárního vlnového pole;
4. uvést možnosti řešení Maxwellových rovnic pomocí vektorového vlnového pole;
5. uvést a ilustrovat řešení difrakční úlohy pro běžné geometrie pomocí Fresnelovy a Fraunhoferovy aproximace v Sommerfeldově difrakčním integrálu.

Všechny výše uvedené cíle jsem splnil. Navíc, v této práci, poskytuji ucelený náhled na problematiku matematického řešení difrakce. Za můj vlastní přínos považuji sekci 2.3.1.3, ve které uvádím detailní rozbor difrakčního problému při znalosti pole na sférické ploše, včetně důkazu, že získaná Greenova funkce zpětně generuje původní pole (sférickou vlnu). Mimo to uvádím i řešení difrakční úlohy pomocí Stratton-Chu integrálů, které vycházejí ze zavedení imaginárních magnetických proudů a nábojů. V závěru druhé kapitoly také poskytuji celkem detailní odvození gaussovských svazků z vlnové rovnice.

Práci jsem doplnil o přílohy A a B. V příloze A uvádím některé vzorce, na které se v rámci celého textu odkazují. V příloze B uvádím seznam mých publikací a jejich kopie. Jedná se o práce publikované v recenzovaném časopise *Jemná mechanika a optika* a ve sbornících mezinárodních konferencí (SPIE, DGaO, useR!2015) a studentské Rektorysovy konference.

Literatura

- [1] MIKŠ, Antonín. Aplikovaná optika 10: geometrická a vlnová optika. Vyd. 1. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2000, 259 s. ISBN 80-01-02116-5.
- [2] HAŇKA, Ladislav. Teorie elektromagnetického pole. 2. Bratislava: SNTL, 1982.
- [3] MIKŠ, Antonín. Fyzika 3. Praha: Česká technika - nakladatelství ČVUT, 2008. ISBN 978-80-01-04000-3.
- [4] KVASNICA, Jozef. Teorie elektromagnetického pole. 1. Praha: Československá akademie věd, 1985.
- [5] STRATTON, Julius Adams. Electromagnetic theory. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 1941. ISBN 9780470131534.
- [6] KAWANO, Kenji. a Tsutomu. KITO. Introduction to optical waveguide analysis: solving Maxwell's equations and the Schrodinger equation. New York: J. Wiley, c2001. ISBN 0471406341.
- [7] BORN, Max a Emil WOLF. Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light. 7th ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1999, xxxiii, 952 s. ISBN 0-521-64222-1.
- [8] BLADEL, J. Electromagnetic fields. 2nd ed. Hoboken, N.J.: IEEE/Wiley-Interscience, c2007. ISBN 9780471263883.
- [9] MIKŠ, Antonín a Pavel NOVÁK. Vektorová teorie difrakce elektromagnetických vln. Jemná mechanika a optika, roč. 59, str. 137 - 144
- [10] Mikš, Antonín a Jiří NOVÁK, Pavel Novák. Dvě metody řešení problematiky šíření elektromagnetických vln. příspěvek z konference Technical computing Prague 2006
- [11] KULMON, Pavel a Mikš ANTONÍN. Tři způsoby popisu difrakce světla na otvoru. Jemná mechanika a optika. 2016, 61(3), 243-246. ISSN 0447-6441.
- [12] HSU, Wenyue a Richard BARAKAT. Stratton-Chu vectorial diffraction of electromagnetic fields by apertures with application to small-Fresnel-number systems. J. Opt. Soc. Am. 1994, 11(2), 623 - 629.
- [13] MORSE, Philip a Herman FESHBACH. Methods of Theoretical Physics. 1. New York: McGraw - Hill Book Company, Inc., 1953.
- [14] LALOR, Eamon. Conditions for the Validity of the Angular Spectrum of Plane Waves. J. Opt. Soc. Am. 1968, 58(9), 1235 - 1237.

- [15] KOZACKI, Tomasz. Numerical errors of diffraction computing using plane wave spectrum decomposition. *Optics Communications*. 2008, 281, 4219 - 4223.
- [16] ROTHER, T., M. KAHNERT, A. DOICU a J. WAUER. Surface Green's Function of the Helmholtz Equation in Spherical Coordinates. *Progres In Electromagnetic Research*. 2002, 38, 47 - 95.
- [17] MARTHAY, A. Diffraction of light from an aperture on a spherical surface. *J. Opt. Soc. Am.* 1975, 65(8), 909 - 913.
- [18] JACKSON, John David. *Classical electrodynamics*. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1975. ISBN 0-471-43132-X.
- [19] DUFFY, Dean G. *Green's functions with applications*. Boca Raton, Fla.: Chapman & Hall/CRC, 2001. *Studies in advanced mathematics*. ISBN 1-58488-110-0.
- [20] ARFKEN, George B a Hans-Jurgen WEBER. *Mathematical methods for physicists*. 6th ed. Amsterdam: Elsevier, 2005. ISBN 0-12-059876-0.
- [21] TICHONOV, A. N. a A. A. SAMARSKIJ. *Rovnice matematické fyziky*. 1. Praha 8: ČSAV, 1953.
- [22] STRATTON, Julius a L. J. CHU. Diffraction Theory of Electromagnetic Waves. *Physical Review*. 1939, 56, 99 - 107.
- [23] KOMRSKA, Josef. Difrakce světla [online]. VUT Brno, 1999 [cit. 2016-05-14]. Dostupné z: <http://physics.fme.vutbr.cz/komrska/>. Přednáškový text.
- [24] REKTORYS, Karel. *Přehled užití matematiky*. 7. vyd. Praha: Prometheus, 2000. ISBN 80-7196-179-5.
- [25] CROFT, Anthony, Robert DAVISON a Martin HARGREAVES. *Engineering mathematics: a modern foundation for electronic, electrical and systems engineers*. 2. ed. Harlow [u.a.]: Addison Wesley Publ. Co, 1996. ISBN 0201877449.
- [26] MIKŠ, Antonín a Jiří NOVÁK. *Fyzika I*. Praha: Česká technika - nakladatelství ČVUT, 2006. ISBN 80-01-03411-9.
- [27] KOČANDRLOVÁ, Milada a Jaroslav ČERNÝ. *Geo-matematika I*. Praha: Česká technika - nakladatelství ČVUT, 2008. ISBN 978-80-01-03936-6.
- [28] KOČANDRLOVÁ, Milada. *Geo-matematika II*. V Praze: České vysoké učení technické, 2008. ISBN 978-80-01-04113-0.
- [29] ŠKRÁŠEK, Josef a Zdeněk TICHÝ. *Základy aplikované matematiky*. Praha: SNTL-Nakladatelství technické literatury, 1983.
- [30] KVASNICA, Jozef. *Matematický aparát fyziky*. Vyd. 2. opr. Praha: Academia, 1997. ISBN 80-200-0603-6.
- [31] RUDIN, Walter. *Analýza v reálném a komplexním oboru: učebnice pro vys. školy*. Praha: Academia, 1977.
- [32] Wolfram Mathworld: the web's most extensive mathematics resource [online]. [cit. 2016-05-14]. Dostupné z: <http://mathworld.wolfram.com/>

- [33] Sběrka řešených úloh [online]. [cit. 2016-05-14]. Dostupné z: <http://reseneulohy.cz/cs>
- [34] Vyhledávání v záznamech VVVS [online]. [cit. 2016-05-16]. Dostupné z: <https://www.vvvs.cvut.cz/search/index.php>
- [35] KULMON, Pavel a Mikš ANTONÍN. Vliv prostředí před optickou soustavou na přesnost měření optickými přístroji v geodézii a průmyslu. *Jemná mechanika a optika*. 2014, 59(9), 243-246. ISSN 0447-6441.
- [36] KULMON, Pavel a Mikš ANTONÍN. Tříčlenný pankratický systém pro transformaci gaussovských svazků. *Jemná mechanika a optika*. 2014, 59(11-12), 316-319. ISSN 0447-6441.
- [37] KULMON, Pavel. Vliv výběru bodů z dané oblasti na stabilitu korelačního koeficientu při zpracování obrazových dat. *Jemná mechanika a optika*. 2015, 60(1), 23 - 26.
- [38] Kulmon, P. - Pokorný, P. - Mikš, A. - Novák, J. - Novák, P.: Three-component zoom systems for transformation of Gaussian laser beams. In *Proceedings of SPIE Vol. 9626*. Bellingham (stát Washington): SPIE, 2015, art. no. 962638, p. 962638-1-962638-7. ISSN 0277-786X. ISBN 978-1-62841-815-6.
- [39] Kulmon, P. - Mikš, A. - Novák, P. - Novák, J.: Analysis of three-element zoom systems for laser beam expanders with tunable-focus lenses. In *Proceedings of SPIE Vol. 9578: Current Developments in Lens Design and Optical Engineering XVI*. Bellingham (stát Washington): SPIE, 2015, art. no. 95780W, p. 95780W-1-95780W-10. ISSN 0277-786X. ISBN 978-1-62841-744-9.
- [40] Kulmon, P. – Mikš, A. – Novák, J. – Novák, P.: Influence of selection of discrete set of points on calculation of correlation coefficient in processing of image data. In *DGaO Proceedings (116. Jahrestagung)*. Erlangen: Deutsche Gesellschaft für angewandte Optik e. V., 2015, ISSN 1614-8436.
- [41] Kulmon, P. – Nosková, J. – Mráz, D.: Hough : analytic curves detection using the Hough transform. In *Book of Abstracts UseR!*. 2015, p. 199.
- [42] STUDENTSKÁ KONFERENCE A REKTORYSOVA SOUTĚŽ: SBORNÍK ABSTRAKTŮ [online]. 2015 [cit. 2016-05-22]. Dostupné z: <http://mmg.fjfi.cvut.cz/rektorys/2015/sbornik/sbornik2015.pdf>

Příloha A

Doplňující matematický aparát

V tomto dodatku uvádíme některé matematické vzorce a věty, které jsou používány v průběhu celé práce. Vzhledem k obsahu práce a rozvětvenosti matematického oboru zde přirozeně nejsou všechny, ale pouze ty, které čtenáři usnadní ověření uváděných výpočtů. Čerpali jsme, nejen zde, především z [4, 5, 13, 20, 21, 24–33], a v těchto zdrojích také čtenář může nalézt další informace.

A.1 Diferenciální operátory a vektorové identity

Základní vztahy pro diferenciální operátory

$$\operatorname{grad}\phi = \nabla\phi = \mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}, \quad (\text{A.1})$$

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (\text{A.2})$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla \cdot (\varphi\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \nabla\varphi + \varphi\nabla \cdot \mathbf{A}, \quad (\text{A.4})$$

$$\nabla \times (\varphi\mathbf{A}) = \nabla\varphi \times \mathbf{A} + \varphi\nabla \times \mathbf{A}, \quad (\text{A.5})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}, \quad (\text{A.6})$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}, \quad (\text{A.7})$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\phi = \nabla \times \nabla\phi = 0, \quad (\text{A.8})$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0, \quad (\text{A.9})$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = \nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi = \Delta \phi, \quad (\text{A.10})$$

kde Δ je Laplaceův operátor, který lze zapsat v pravoúhlých nebo sférických souřadnicích následovně

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \quad (\text{A.11})$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}, \quad (\text{A.12})$$

$$\operatorname{div} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}. \quad (\text{A.13})$$

Pravidlo z vektorového počtu pro dvojnásobný vektorový součin

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \quad (\text{A.14})$$

A.2 Integrovní věty

Leibnitzovo integrovní pravidlo pro vektorové funkce $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ polohy \mathbf{r} a času t

$$\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) \, d\mathbf{S} = \iint_S (\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) + [\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}, t)] \cdot \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S} - \oint_C \mathbf{v} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l}. \quad (\text{A.15})$$

Grenova integrovní věta. Je-li V objem ohraničený uzavřenou plochou S a f, g spojitě funkce se spojitými parciálními derivacemi na V pak platí

$$\iiint_V (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) \, dV = \iint_S (f \nabla g - g \nabla f) \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (\text{A.16})$$

kde \mathbf{n} značí vektor vnější normály k ploše S .

A.3 Fourierova transformace

Pro řešení široké palety problémů (především ve tvaru diferenciálních rovnic) se používá *Fourierovy transformace* funkce $f(t)$ ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(\mathbf{x})) &= A^n \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}) e^{-ik\mathbf{X} \cdot \mathbf{x}} \, d^n \mathbf{x}, \\ \mathcal{F}^{-1}(F(\mathbf{X})) &= B^n \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} F(\mathbf{X}) e^{ik\mathbf{X} \cdot \mathbf{x}} \, d^n \mathbf{X}, \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

kde koeficienty jsou vázány podmínkou $\frac{|k|}{2\pi} = AB$. Častá volba koeficientů je $A = 1$ a $B = \frac{|k|}{2\pi}$. Pro derivaci Fourierovy transformace obecně platí

$$\mathcal{F}(f'(t))(s) = is \mathcal{F}(f(t))(s), \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{d}{ds} \mathcal{F}(f(t))(s) = \mathcal{F}(-itf(t))(s). \quad (\text{A.19})$$

Příloha B

Publikace

V tomto dodatku uvádím seznam mých publikací, které jsem publikoval během studia (publikace jsou v rozsahu let 2014 - 2016), a jejich kopie. Kompletní seznam mých publikací je dostupný z [34] (vyhledávání podle příjmení - Kulmon):

- Kulmon, P. - Mikš, A. Vliv prostředí před optickou soustavou na přesnost měření optickými přístroji v geodézii a průmyslu In: Jemná mechanika a optika. 2014, roč. 59, č. 9, s. 243-246. ISSN 0447-6441.
- Kulmon, P. - Mikš, A. Tříčlenný pankratický systém pro transformaci gaussovských svazků In: Jemná mechanika a optika. 2014, roč. 59, č. 11-12, s. 316-319. ISSN 0447-6441.
- Kulmon, P. Vliv výběru bodů z dané oblasti na stabilitu korelačního koeficientu při zpracování obrazových dat In: Jemná mechanika a optika. 2015, roč. 60, č. 1, s. 23-25. ISSN 0447-6441.
- Kulmon, P. - Pokorný, P. - Mikš, A. - Novák, J. - Novák, P. Three-component zoom systems for transformation of Gaussian laser beams In: Proceedings of SPIE Vol. 9626. Bellingham (stát Washington): SPIE, 2015, art. no. 962638, p. 962638-1-962638-7. ISSN 0277-786X. ISBN 978-1-62841-815-6.
- Kulmon, P. - Mikš, A. - Novák, P. - Novák, J. Analysis of three-element zoom systems for laser beam expanders with tunable-focus lenses In: Proceedings of SPIE Vol. 9578: Current Developments in Lens Design and Optical Engineering XVI. Bellingham (stát Washington): SPIE, 2015, art. no. 95780W, p. 95780W-1-95780W-10. ISSN 0277-786X. ISBN 978-1-62841-744-9.
- Kulmon, P. - Mikš, A. - Novák, J. - Novák, P. Influence of selection of discrete set of points on calculation of correlation coefficient in processing of image data In: DGaO Proceedings (116. Jahrestagung). Erlangen: Deutsche Gesellschaft für angewandte Optik e.V., 2015, ISSN 1614-8436.
- Kulmon, P. - Nosková, J. - Mráz, D. Hough: analytic curves detection using the Hough transform In: Book of Abstracts User!. 2015, p. 199.
- Mráz, D. - Kulmon, P. Hough:hledání analytických křivek využitím Houghovy transformace v R In: Studentská konference a Rektorysova soutěž-Sborník abstraktů. Praha: ČVUT, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, 2015, s. 27.

Článek [11] není v komponentě VVVS zatím dohledatelný (publikován 03/2016).

B.1 Článek: Vliv prostředí před optickou soustavou na přesnost měření optickými přístroji v geodézii a průmyslu [35]

9
2014

JMO

JEMNÁ MECHANIKA A OPTIKA

FINE MECHANICS AND OPTICS



Automatizační technika
Bosch Rexroth } To je ono!

ISSN 0447-6441
index 46 723

Bosch Rexroth, spol. s r. o.
Těžební 2, 627 00 Brno
tel. 548 126 111 | info@boschrexroth.cz | www.boschrexroth.cz

The Drive & Control Company

Rexroth
Bosch Group

REDAKČNÍ RADA

Předseda: RNDr. Miloslav VYCHODIL, CSc., Meopta-optika, s.r.o., Přerov, mobil: 731 439 380

Členové: RNDr. Ing. Ján BARTL, CSc., ÚMSAV, Bratislava, prof. RNDr. Dr. Zdeněk BOUCHAL, UP, Olomouc, Ing. Ondřej ČÍP, Ph.D., UPT AV ČR, v.v.i., Brno, Ing. Alexandr DEJNEKA, Ph.D., FZÚ AV ČR, v.v.i., Praha; doc. RNDr. Ondřej HADERKA, Ph.D., SLO UP a FZÚ AV ČR, Olomouc, prof. Ing. Pavol HORŇÁK, DrSc., STU, Bratislava, doc. Ing. Jan HOŠEK, Ph.D., ČVUT Praha, prof. RNDr. Miroslav HRABOVSKÝ, DrSc., SLO UP a FZÚ AV ČR, Olomouc, RNDr. Vladimír CHLUP, Olomouc, RNDr. Lubomír JASTRABÍK, CSc., FZÚ AV ČR, v.v.i., Praha, RNDr. Pavel KLENOVSKÝ, Český metrologický institut, Brno, Ing. Jiří KRSEK, VUT, Brno, doc. RNDr. Vojtěch KRÉSÁLEK, CSc., UTB, Zlín, Ing. Jan KŮR, Mesing, spol. s r.o., Brno, prof. Ing. Martin LIBRA, CSc., ČZU, PRAHA, prof. RNDr. Miroslav LIŠKA, DrSc., VUT, Brno, RNDr. Zdeněk LOŠTÁK, Meopta-optika, s.r.o., Přerov, prof. Ing. Petr LOUDA, CSc., TU, Liberec, doc. RNDr. Miroslav MILER, DrSc., ÚFE AV ČR, v.v.i., Praha, doc. Ing. Jiří NOVÁK, Ph.D., ČVUT, Praha, prof. RNDr. Jan PEŘINA, DrSc., UP, Olomouc, Mgr. Sylvie PETROVÁ, LF MU, Brno, prof. Ing. Jaromír PIŠTORA, CSc., VŠB - TU, Ostrava, RNDr. Michael PROUZA, Ph.D., FZÚ AV ČR, v.v.i., Praha, RNDr. Dagmar SENDEŘÁKOVÁ, Ph.D., UK, Bratislava, RNDr. Petr SCHOVÁNEK, SLO UP a FZÚ AV ČR, Olomouc, prof. RNDr. Anton ŠTRBA, CSc., UK, Bratislava, doc. Ing. Olga TŮMOVÁ, CSc., Západočeská univerzita, Plzeň. Čestný člen Ing. Zdeněk MARTÍNEK, Nové město nad Metují

Gerd HÄUSLER, Lehrstuhl für Optik, Universität Erlangen - Nürnberg, Erlangen (Germany), Michael J. LALOR, Liverpool John Moores University, U. K.; Paul RAUSNITZ, TCI New York, U. S. A.; Rodney J. SOUKUP, University of Nebraska-Lincoln, U. S. A.; M. C. TEICH, Boston University, U. S. A.; Emil WOLF, University of Rochester, U. S. A.

JEMNÁ MECHANIKA A OPTIKA

Vydává Fyzikální ústav Akademie věd České republiky, v.v.i. za spoluúčasti The International Society for Optical Engineering (SPIE/CS) v Nakladatelství Fyzikálního ústavu Akademie věd České republiky, v.v.i.

Ředitel FZÚ AV ČR, v.v.i.: prof. Jan ŘÍDKÝ, DrSc.

Odpovědný zástupce vydavatele: prof. RNDr. Miroslav HRABOVSKÝ, DrSc.
Šéfredaktor: dipl. tech. Jaroslav NEVŘALA

Adresa redakce v Olomouci (předplatné, nakladatelské služby):

SLO UP a FZÚ AV ČR, 17. listopadu 50, 772 07 Olomouc,
tel.: 585 631 576, fax: 585 631 531, e-mail: eva.pelclova@upol.cz

Adresa redakce v Přerově (šéfredaktor): Kabelíkova 1, 750 02 Přerov,
mobil: 776 011 925, e-mail: eva.pelclova@upol.cz

Otisk povolen se svolením redakce a se zachováním autorských práv. Nevýžádané materiály se nevrací. Za původnost a správnost příspěvků odpovídají autoři.

Vychází: 10x ročně (z toho 2 čísla jako dvojčísla)

Předplatné: Celoroční 420,- Kč/rok. Ceny jsou jednotné pro Českou i Slovenskou republiku. Do všech ostatních zemí je časopis JMO distribuován za jednotnou cenu 10 EUR/ks. Pro členy SPIE/CS činí předplatné 120,- Kč/rok. Předplatné pro studenty Bc., Mgr., Ph.D. a studenty středních škol při osobním odběru činí 120 Kč/rok; v případě zaslání poštou 300,- Kč/rok.

Rozšiřuje vydavatel a Podniková prodejna Meopta-optika, s.r.o., Přerov, Kabelíkova 1, 750 02 Přerov.

V Slovenské republice je kontaktní místo: RNDr. Dagmar Senderáková, Ph.D., katedra experimentální fyziky FMFI UK, Mlynská dolina F2/149, SK-842 48 Bratislava, tel. 00421 260 295 391,
e-mail: senderakova@fmph.uniba.sk

V Slovenské republice rozšiřuje a objednávky přijímá:

prof. Ing. Ivo Čáp, CSc., JSMF pobočka Žilina, ul. 1. mája 32, 010 01 Žilina,
e-mail: ivo.cap@fel.uniza.sk

Tiskne TYPOservis Holešov, Masarykova 650, 769 01 Holešov,
tel.: 573 398 746, e-mail: dtp@typoservis.cz

Inzerce: redakce, Kabelíkova 1, 750 02 Přerov,
tel.: 581 243 441, mobil: 776 011 925, e-mail: eva.pelclova@upol.cz
Odborné články jsou lektorovány.

© JEMNÁ MECHANIKA A OPTIKA 2014

JEMNÁ MECHANIKA A OPTIKA

VĚDECKO-TECHNICKÝ ČASOPIS
ROČNÍK 59

9/2014

OBSAH

Vliv prostředí před optickou soustavou na přesnost měření optickými přístroji v geodézii a průmyslu (P. Kulmon, A. Mikš).....	243
Veletrh electronica 2014: Špičkový program na oslavu padesátého výročí	247
Základy fuzzy logiky (F. Tůma, O. Tůmová).....	248
Vývojové trendy ESP (J. Hurtečák, J. Volf).....	250
VDMA Glasstechnik: Trendy engineeringu a technologií na veletrhu glasstec 2014	252
Předpoklad modernizácie osvetlenia pozemných komunikácií (P. Horňák).....	254
Poruchy barvocitu (M. Medová).....	256
Energeticky úsporné řízení měniči frekvence Bosch Rexroth EFC3600	259
Plně integrovaný a přesný systém odměřování IMS-I od firmy Rexroth: přesný, robustní a kompaktní	260
Hlavní téma fasád: velmi tenké solární články transformují fasády domů na elektrárny (S. Pflügge, B. Küppers).....	261
Účastníci ENERGO SUMMITU 2014 se mohou těšit na zajímavé řečníky a aktuální témata (N. Domanjová).....	263
Leonardo da Vinci – večná inšpirácia (P. Horňák).....	264
MSV 2014 v Brně – 1 600 vystavovatelů zaplní výstaviště	267
Aplikovaná optika a mikroskopie 2014 (J. Erlebach).....	268

Bližší informace o poslání časopisu, pokyny pro autory, obsah časopisu apod. je uveden na internetu: <http://jmo.fzu.cz/>

Informace o předplatném podá, objednávky přijímá, objednávky do zahraničí vyřizuje: SLO UP a FZÚ AV ČR, 17. listopadu 50, 772 07 Olomouc, tel.: 585 631 576, e-mail: eva.pelclova@upol.cz.

Cena čísla 40 Kč včetně DPH

Vliv prostředí před optickou soustavou na přesnost měření optickými přístroji v geodézii a průmyslu

Je zkoumán vliv změny termodynamických parametrů prostředí před optickou soustavou na šíření světla. Proměnlivostí indexu lomu prostředí v oblasti měření dochází ke změně délky dráhy světelného paprsku i času měření ve srovnání s konstantním indexem lomu. Takové odchylky mají zásadní vliv na výsledky měření v inženýrské geodézii, stavební geodézii i průmyslu. V článku je shrnut matematický aparát pro analýzu a popis šíření světelného paprsku ovlivněného prostředím použitelný pro zhodnocení přesnosti měřených parametrů.

1. ÚVOD

V oblasti průmyslové metrologie poskytují optické přístroje v současné době nejpřesnější hodnoty parametrů měřeného objektu. Velkou výhodou optických měřicích metod je jejich přesnost, bezkontaktnost a rychlost, s jakou získáváme údaje o měřeném objektu. Vzhledem k tomu, že optické metody jsou bezkontaktní, můžeme je využívat pro měření tvarů a deformací těžko dostupných objektů, které mají velké rozměry nebo se nacházejí ve velké vzdálenosti od měřicího stanoviště a neumožňují tak použití kontaktních metod. Existuje celá řada přístrojů a metod určených pro geodetická a průmyslová měření [1–30]. Popis různých metod měření lze nalézt v [1–14]. V případě měření malých průmyslových prvků, jejichž rozměry se pohybují do několika decimetrů, se nejčastěji používají jednoduché a na obsluhu nenáročné kontaktní metody. Přehled řady měřidel a přístrojů pro tyto metody je uveden např. v [21–24]. V případě bezkontaktních metod pro měření malých průmyslových prvků lze nalézt základní informace o měřicích přístrojích v [25–28]. Jsou-li rozměry měřeného objektu velké a nacházejí-li se ve velké vzdálenosti od měřicího stanoviště, pak nelze běžné kontaktní metody používat a je nutno se obrátit na bezkontaktní metody, jejichž stručný popis a přístrojové zázemí je uvedeno v [14–20]. Při měření tohoto typu objektů se významným způsobem projevuje vliv parametrů prostředí (teploty, tlaku, vlhkosti apod.), které odděluje měřený objekt a měřicí přístroj. Tímto prostředím je prakticky ve všech případech vzduch a musíme tedy detailně znát závislost indexu lomu vzduchu na jeho termodynamických parametrech. Této problematice byla věnována značná pozornost a základní rovnice pro výpočet indexu lomu vzduchu jsou uvedeny např. v [31]. Vzhledem k tomu, že při měření rozlehlých a vzdálených objektů je index lomu vzduchu ovlivňován okolním prostředím a jeho hodnota je v různých místech různá (nehomogenní prostředí) a též se mění s časem, je určení vlivu vzduchu na přesnost měření značně obtížné a exaktní řešení této problematiky v měřicích praxi téměř nemožné [32–34]. Paprsky se v nehomogenním prostředí nešíří po přímce, ale jsou to obecné prostorové křivky, jejichž tvar nelze v praxi přesně určit [34].

2. ŠÍŘENÍ SVĚTLA NEHOMOGENNÍM IZOTROPNÍM PROSTŘEDÍM

Vyšetřujeme nyní situaci znázorněnou na obr. 1. Předpokládejme, že optická soustava OS zobrazuje bod A ležící v rovině η . Necht dále body P a P' jsou středy vstupní pupily ζ a výstupní pupily ζ' optické soustavy. Obrazem bodu A necht je bod A' ležící v rovině η' . Dále předpokládejme, že prostředí před optickou soustavou (předmětový prostor) je izotropní a nehomogenní s indexem lomu

$n = n(x, y, z) = n(\mathbf{r})$ závislým na kartézských souřadnicích (x, y, z) , případně proměnlivým v čase. Prostor před optickou soustavou (obrazový prostor) necht je homogenní a izotropní s konstantním indexem lomu $n' = konst$. Bod O' necht je obrazem bodu O. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že v prostoru za optickou soustavou se šíří paprsek P'A' v rovině $x' = 0$ (meridionální rovina), a tedy bod A' leží na ose. Abychom určili polohu bodu A, jehož obrazem je bod A', provedeme transformaci tohoto paprsku do předmětového prostoru. Vzhledem k tomu, že prostředí obrazového prostoru i materiálu čoček, z kterých je optická soustava tvořena, můžeme považovat za homogenní izotropní prostředí, potom tento paprsek vystoupí z optické soustavy v bodě B jako přímka BA₀, která svírá s osou z úhel ω a protíná rovinu η v bodě A₀. Vzhledem k tomu, že prostředí předmětového prostoru je nehomogenní, nebude ve skutečnosti vystupující paprsek přímka, ale nějaká obecná prostorová křivka, která protne předmětovou rovinu η v bodě A, který nebude totožný s ideálním bodem A₀, ve kterém by tento paprsek protnul předmětovou rovinu v případě, že by předmětové prostředí bylo homogenní. Bude tedy délka křivky BA jiná než délka přímky BA₀, a tedy čas t_{A_0} , za který světlo projde dráhu z bodu A' do bodu A, bude jiný než čas, za který dojde světlo z bodu A' do bodu A₀. Tomuto času pak bude na přímce BA₀ odpovídat bod A_g(x_g, y_g, z_g), který se v předmětovém prostoru bude nacházet v jiném místě než bod A. V důsledku nehomogenity předmětového prostředí tedy dochází k chybě v určení polohy bodu A, neboť za bod A budeme chybně považovat bod A_g. Abychom určili, jak velké chyby měření dojde v důsledku nehomogenity předmětového prostředí, musíme umět propočítat chod paprsku nehomogenním izotropním prostředím.

Uvažujme tedy nehomogenní izotropní prostředí, jehož index lomu n je funkcí prostorových souřadnic, tedy $n = n(x, y, z) = n(\mathbf{r})$. Rovnice paprsku, šířícího se tímto prostředím, je pak dána vztahem [32, 34]

$$\frac{d}{ds} \left[n(\mathbf{r}) \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right] = \nabla n(\mathbf{r}), \quad (1)$$

kde $ds = n(\mathbf{r}) d\tau$ značí element oblouku křivky a ∇ je Hamiltonův (nabla) operátor. Rovnici (1) můžeme též upravit na tvar [34]

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{d\tau^2} = \mathbf{g}(\mathbf{r}), \quad (2)$$

kde

$$\mathbf{r} = (x, y, z)^T, \quad \mathbf{u} = (dx/d\tau, dy/d\tau, dz/d\tau)^T \quad (3)$$
$$\mathbf{g} = n(\partial n / \partial x, \partial n / \partial y, \partial n / \partial z)^T$$

a T značí transpozici vektoru. Pro řešení obyčejné diferenciální rovnice (2) pak můžeme použít Rungeho-Kuttovu metodu [34–36], platí pak pro jednotlivé body paprsku $i = 1, 2, \dots, N$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{i+1} &= \mathbf{r}_i + \Delta\tau \left[\mathbf{u}_i + \frac{1}{6}(\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) \right], \quad \mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \frac{1}{6}(\mathbf{a} + 4\mathbf{b} + \mathbf{c}), \\ \mathbf{u}_i &= d\mathbf{r}_i / d\tau, \\ \mathbf{a} &= \Delta\tau \mathbf{g}(\mathbf{r}_i), \quad \mathbf{b} = \Delta\tau \mathbf{g}(\mathbf{r}_i + \Delta\tau \mathbf{u}_i / 2 + \Delta\tau \mathbf{a} / 8), \\ \mathbf{c} &= \Delta\tau \mathbf{g}(\mathbf{r}_i + \Delta\tau \mathbf{u}_i + \Delta\tau \mathbf{b} / 2). \end{aligned} \quad (4)$$

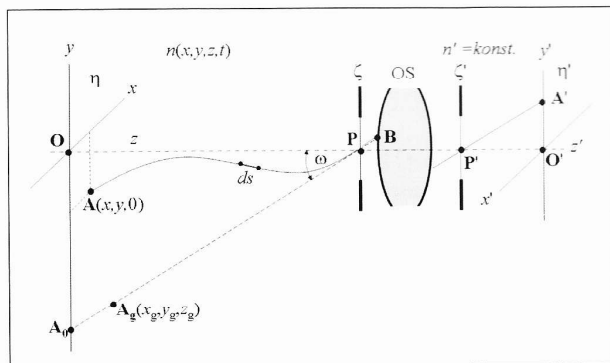
Pomocí předcházejících vztahů pak vypočteme dráhu paprsku šířícího se izotropním nehomogenním prostředím, známe-li závislost indexu lomu prostředí na souřadnicích, tj. známe-li funkci $n(\mathbf{r})$.

Rovnici (1) můžeme přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{1}{n} \left(1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \right) \left(\frac{\partial n}{\partial x} - \dot{x} \frac{\partial n}{\partial z} \right), \\ \ddot{y} &= \frac{1}{n} \left(1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \right) \left(\frac{\partial n}{\partial y} - \dot{y} \frac{\partial n}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

kde tečky označují první a druhou derivaci podle proměnné z :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dz}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dz}, \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dz^2}, \quad \ddot{y} = \frac{d^2y}{dz^2}.$$



Obr. 1 Ilustrace šíření světla nehomogenním prostředím

V případě *optických dálkoměrů* pracujících na principu měření času (time of flight) potřebujeme znát časový interval, za který projde světlo podél paprsku od bodu A do bodu B. Lokální rychlost v , jakou se světlo šíří daným prostředím, závisí na indexu lomu n tohoto prostředí. Vzhledem k tomu, že v nehomogenním izotropním prostředí je index lomu v různých místech prostoru různý, bude i rychlost šíření světla v různých místech prostoru různá. Obecně platí

$$v(\mathbf{r}) = c / n(\mathbf{r}), \quad (6)$$

kde $c = 299\,792\,458 \text{ ms}^{-1}$ je rychlost světla ve vakuu. Známe-li závislost indexu lomu na souřadnicích, tj. funkci $n = n(\mathbf{r})$, potom pomocí rovnic (3) a (4) můžeme vypočítat souřadnice $\mathbf{r}_i = (x^i, y^i, z^i)$ jednotlivých bodů paprsku. Délku s_{AB} křivky AB a čas T_{AB} , za který projde světlo podél paprsku od bodu A do bodu B, potom vypočítáme ze vztahů

$$\begin{aligned} s_{AB} &= \sum_{i=1}^N \sqrt{(\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i)^2} = \sum_{i=1}^N \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2} \\ T_{AB} &= \frac{1}{c} \sum_{i=1}^N n(\mathbf{r}_i) \sqrt{(\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i)^2} = \\ &= \frac{1}{c} \sum_{i=1}^N n(x_i, y_i, z_i) \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Uvažujme nyní pro jednoduchost *rovinný případ*, tj. předpokládejme, že křivka AB leží v rovině (y, z) a její rovnice je dána vztahem

$$y = f(z). \quad (8)$$

Délku s_{AB} křivky AB pak vypočítáme podle známého vztahu z matematiky, platí [35, 36]

$$s_{AB} = \int_{z_i}^{z_f} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2} dz. \quad (9)$$

Délku křivky AB a čas T_{AB} pak vypočítáme ze vztahů (7), když položíme $x_i = 0$, platí

$$\begin{aligned} s_{AB} &= \sum_{i=1}^N \sqrt{(y_{i+1} - y_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2}, \\ T_{AB} &= \frac{1}{c} \sum_{i=1}^N n(0, y_i, z_i) \sqrt{(y_{i+1} - y_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

V případě, že chceme získat analytický tvar dráhy paprsku, vyjádříme vztah (8) ve tvaru

$$y = \sum_{k=0}^K a_k \varphi_k(z), \quad (11)$$

kde a_k jsou koeficienty a $\varphi_k(z)$ jsou vhodně zvolené funkce, např. $\varphi_k(z) = z^k$ apod. Koeficienty a_k vypočítáme např. metodou nejmenších čtverců [35, 36], známe-li řadu hodnot souřadnic (y_i, z_i) jednotlivých bodů paprsku ($i = 1, 2, \dots, N$). Délku křivky AB pak vypočítáme ze vztahu (9).

3. ZÁVISLOST INDEXU LOMU VZDUCHU NA TERMODYNAMICKÝCH PARAMETRECH A JEHO SLOŽENÍ

Výpočet indexu lomu optického prostředí provádíme např. podle Edlénova vzorce [31]. Dle tohoto vzorce je index lomu závislý na teplotě vzduchu, atmosférickém tlaku, vlnové délce záření ve vakuu a zatížení dílčími tlaky. Na základě známé vlnové délky λ [μm] ve vakuu, tlaku p [Pa] okolního vzduchu a jeho teplotě t [°C] pak vypočítáme index lomu n vzduchu pomocí následujících vztahů [31]

$$\begin{aligned} n_s &= 1 + 10^{-8} \left[A + \frac{B}{130 - S} + \frac{C}{38,9 - S} \right], \quad X = \frac{1 + 10^{-8}(E - Ft)p}{1 + Gt} \\ n_p &= 1 + \frac{pX(n_s - 1)}{D} \\ n &= n_p - 10^{-10} \left(\frac{292,75}{t + 273,15} \right) (3,7345 - 0,0401S) p_v, \quad S = \frac{1}{\lambda^2}, \end{aligned} \quad (12)$$

kde p_v [Pa] značí dílčí tlaky. Hodnoty A, B až G jsou empiricky získané konstanty, které nejsou závislé na konkrétní situaci. Pro naše výpočty uvažujeme následující hodnoty konstant [31]: $A = 8342,54, B = 2406147, C = 15998, D = 96095,43, E = 0,601, F = 0,00972, G = 0,003661$.

Pro vlnovou délku λ_{vz} v optickém prostředí, pro které jsme vypočetli index lomu, potom můžeme psát

$$\lambda_{vz} = \frac{\lambda}{n}.$$

Abychom si udělali představu o tom, jak se mění hodnota indexu lomu vzduchu v závislosti na teplotě, jsou v *tabulce 1* uvedeny hodnoty indexu lomu n vzduchu pro několik hodnot teploty t .

Tabulka 1

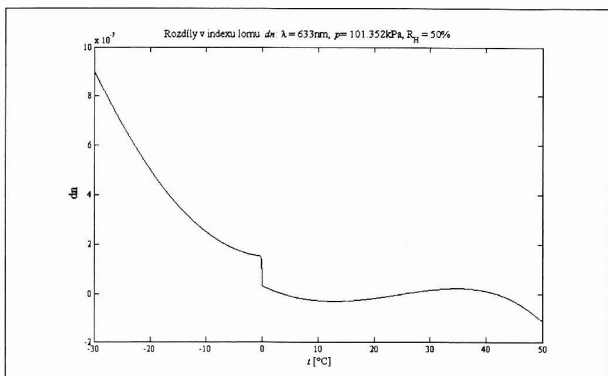
t [°C]	RH [%]	p [Pa]	λ [μm]	n
-40	50	101325	0,633	1,00034195
-20	50	101325	0,633	1,00031487
0	50	101325	0,633	1,00029164
20	50	101325	0,633	1,00027137
40	50	101325	0,633	1,00025314

Jak je z tabulky 1 patrné, je změna hodnoty indexu v rozmezí teplot od -40°C do 40°C rovna $\Delta n = 0,000089$.

Pro praktické výpočty je ve většině případů dostačující použít pro výpočet indexu lomu vzduchu následující vztah [31]

$$n = 1 + 7,86 \times 10^{-4} \frac{p}{273+t} - 1,5 \times 10^{-11} RH(t^2 + 160) \quad (13)$$

kde p je tlak v kPa, t je teplota ve stupních Celsia, a RH je relativní vlhkost v procentech (to znamená, že je v rozmezí od 0 do 100). Tento vzorec je platný pouze pro He-Ne laser vyzařující světlo o vlnové délce $\lambda = 633 \text{ nm}$. Na obr. 2 je znázorněna odchylka Δn indexu lomu vzduchu vypočítaného podle přesnějšího vztahu (12) od indexu lomu vzduchu vypočítaného podle přibližného vztahu (13). Jak je z obr. 2 patrné, je přesnost vztahu (13) pro praxi dostačující.



Obr. 2 Odchylka Δn indexu lomu vzduchu vypočítaného podle přesnějšího vztahu od indexu lomu vzduchu vypočítaného podle přibližného vztahu

Vzhledem k tomu, že termodynamické parametry prostředí mohou být v různých místech prostředí různé, bude index lomu prostředí (např. vzduchu) pro danou vlnovou délku světla záviset na prostorových souřadnicích ($n = n(r)$) a chceme-li provádět přesná měření, musíme znát tuto funkční závislost. V práci [33] je popsána experimentální procedura pro získání takové funkční závislosti. Chceme-li provádět počítačovou simulaci vlivu prostorové závislosti indexu lomu prostředí na přesnost měření vzdáleností, potom musíme tuto závislost umět vyjádřit nějakým předpisem. V obecném případě můžeme index lomu předpokládat ve formě řady

$$n(x, y, z) = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^K a_{ijk} f_i(x) g_j(y) h_k(z), \quad (14)$$

kde $f_i(x)$, $g_j(y)$ a $h_k(z)$ jsou vhodně zvolené funkce dílčích souřadnic. Volíme-li např. $f_i(x) = x^i$, $g_j(y) = y^j$ a $h_k(z) = z^k$, potom nám vztah (14) vyjadřuje mocninou řadu.

4. PŘÍKLADY VÝPOČTU VLIVU INDEXU LOMU VZDUCHU NA PŘESNOST MĚŘENÍ VZDÁLENOSTÍ

Ukažme nyní na několika příkladech vliv indexu lomu vzduchu na přesnost měření vzdáleností. Cílem těchto výpočtů je získat informace o tom, s jakou přesností měření lze v praxi počítat

v případě neideálních „povětrnostních podmínek“, tj. v případě, že budou termodynamické parametry prostředí a jeho složení různé v různých místech prostoru, v kterém probíhá měřicí proces. Pro výpočet indexu lomu $n(r, \lambda)$ vzduchu můžeme v první aproximaci použít zjednodušený vztah (13) ve tvaru

$$n(r, \lambda) = 1 + C(\lambda) \frac{p(r)}{273+t(r)}, \quad (15)$$

kde hodnoty koeficientů $C(\lambda)$ jsou pro několik vlnových délek světla a pro $t = 20^\circ\text{C}$ a $p = 101,325 \text{ kPa}$ uvedeny v tabulce 2.

Tabulka 2

λ [μm]	n	$C(\lambda) \times 10^4$
0,375	1,0002794	8,0791
0,404	1,0002777	8,0306
0,473	1,0002750	7,9511
0,488	1,0002745	7,9383
0,532	1,0002734	7,9072
0,635	1,0002718	7,8589
0,658	1,0002715	7,8511
0,690	1,0002712	7,8417
0,730	1,0002708	7,8316
0,808	1,0002703	7,8161
0,880	1,0002699	7,8054
0,940	1,0002697	7,7983
0,975	1,0002696	7,7948

Uvažujme nejprve zjednodušený dvourozměrný případ, kdy průběh teplotní závislosti v prostředí bude dán předpisem

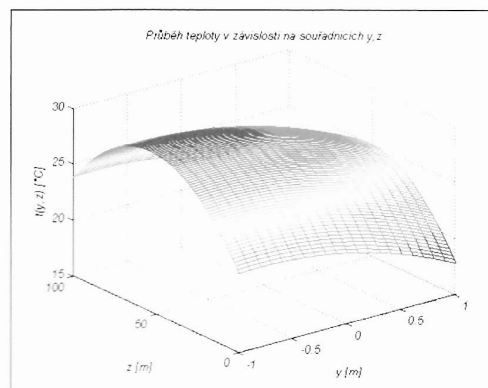
$$t(r) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + b_1 y + b_2 y^2, \quad (16)$$

kde koeficienty polynomu jsou uvedeny v tabulce 3

Tabulka 3

a_0	21,25098522
a_1	0,26893268
a_2	-0,00252381
b_1	-2,15000000
b_2	-1,35714286

a grafický teplotní průběh je ukázán na obr. 3.



Obr. 3 Graf prostorového průběhu teploty

Tato teplotní závislost udává průběh indexu lomu prostředí ve tvaru

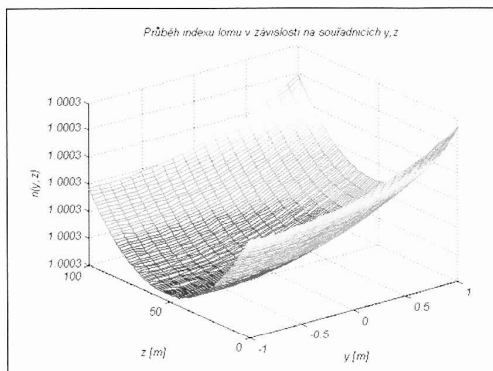
$$n(r) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + d_1 y + d_2 y^2 \quad (17)$$

s koeficienty polynomu uvedenými v tabulce 4.

Tabulka 4

c_0	1,00027001
c_1	-2,55027874e-7
c_2	2,39210791e-9
d_1	2,04201192e-6
d_2	1,29617055e-6

Grafické znázornění průběhu indexu lomu je ukázáno na obr. 4.



Obr. 4 Prostorová závislost indexu lomu prostředí

Dráha paprsku byla počítána numericky a výsledné dvojice souřadnic y, z byly proloženy funkční závislostí danou předpisem

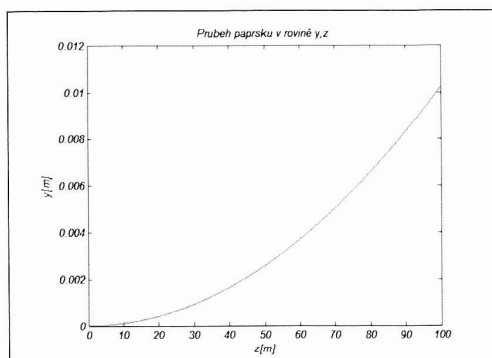
$$y(z) = e_0 + e_1 z + e_2 z^2 + e_3 z^3 + e_4 z^4, \quad (18)$$

kde koeficienty polynomu jsou uvedeny v tabulce 5

Tabulka 5

e_0	2,20270638e-013
e_1	7,69453503e-014
e_2	1,02128578e-006
e_3	-6,41409458e-011
e_4	2,25898579e-010

a jeho průběh v rovině y, z je zobrazen na obr. 5.



Obr. 5 Tvar paprsku v rovině y, z

Čas, za který dorazí světlo z bodu P do bodu A (obr. 1) je $t_{PA} = 3,33722701786924e-007$ s, kde jsme vzali v úvahu, že rychlost světla v prostředí je v různých bodech dráhy různá, a to v důsledku závislosti indexu lomu prostředí na souřadnicích (viz vztah (17)). Dosazením vztahu (18) do vztahu (9) pak pro dráhu paprsku dostáváme

$$s_{PA} = \int_{z_p}^{z_A} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2} dz \approx \int_{z_p}^{z_A} dz + \frac{1}{2} \int_{z_p}^{z_A} \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 dz = (z_A - z_p) + \frac{1}{2} \int_{z_p}^{z_A} (e_1 + 2e_2 z + 3e_3 z^2 + 4e_4 z^3)^2 dz,$$

kde jsme se omežili jen na první členy rozvoje podintegrální funkce, neboť derivace $dy/dz \ll 1$. Integrací předcházejícího vztahu dostáváme

$$s_{PA} = 100,000000698966 \text{ m}.$$

V případě, že by teplota prostředí byla po celé dráze konstantní a byla rovna teplotě v bodě P, a tedy i index lomu prostředí by byl konstantní, potom by čas, za který dorazí světlo z bodu P do bodu A, byl

$$(t_{PA})_{n=\text{konst}} = 3,33724291062207e-007 \text{ s}$$

a délka dráhy paprsku by byla

$$(s_{PA})_{n=\text{konst}} = z_A - z_P = 100 \text{ m}.$$

5. ZÁVĚR

V článku byly uvedeny základní vztahy pro šíření paprsku v nehomogenním prostředí, včetně postupu jejich numerického výpočtu. Byly zkoumány možnosti výpočtu indexu lomu prostředí na základě známých termodynamických parametrů a vlivu jejich změny na výsledný index lomu prostředí. Zkoumány byly odchylky zjednodušeného a komplexního vzorce a rozdíly výsledků pro různé vlnové délky. Dále byl navržen a podrobně zkoumán příklad dvourozměrného rozložení teploty a vliv na šíření, délku dráhy i čas šíření světelného paprsku. Uvedené vztahy lze použít pro analýzu vlivu prostředí na přesnost měření optickými přístroji.

Práce byla vypracována za podpory grantu SGS14/110/OH-K1/2T/11 Českého vysokého učení technického v Praze.

Literatura

- [1] N. Suga, *Metrology Handbook: The Science of Measurement*, (Mitutoyo Ltd. 2007).
- [2] K. H. Grote, E. K. Antonsson, *Springer Handbook of Mechanical Engineering*, (Springer, Berlin 2009).
- [3] W. N. Sharpe, *Springer Handbook of Experimental Solid Mechanics*, Springer 2008.
- [4] F. Träger, *Handbook of Laser and Optics*, Springer, 2007).
- [5] T. Pfeifer, *Production metrology*, (Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2002).
- [6] J. A. Bosch, *Coordinate measuring machines and systems*, (CRC Press, 1995).
- [7] T. Yoshizawa, *Handbook of Optical Metrology: Principles and Applications*, (CRC Press, 2009).
- [8] D. C. Williams, *Optical Methods in Engineering Metrology*, (Chapman & Hall, 1993).
- [9] F. M. Santoyo, *Handbook of optical metrology*, (CRC Press, 2008).
- [10] D. Malacara, *Optical Shop Testing*, New York: John Wiley & Sons, 2007.
- [11] R. Leach, *Optical Measurement of Surface Topography*, Springer 2011.

- [12] G. F. Marshall, G. F. Stutz, *Handbook of optical and laser scanning*. Taylor & Francis Group, 2011.
- [13] G. Vosselman, H. G. Maas, *Airborne and Terrestrial Laser Scanning*, Taylor & Francis, 2010.
- [14] J. Geng, „Structured-light 3D surface imaging: a tutorial,“ *Adv. Opt. Photon.* **3**, 128–160 (2011).
- [15] <http://www.controlsystem.cz>
- [16] <http://www.surphaser.com>
- [17] <http://hds.leica-geosystems.com>
- [18] <http://www.topcon.com>
- [19] <http://www.riegl.com>
- [20] <http://laser-scanner.faro.com>
- [21] <http://www.mitutoyo.co.jp/eng/>
- [22] <http://www.mahr.com>
- [23] <http://www.zeiss.com/>
- [24] <http://www.taylor-hobson.com>
- [25] <http://www.zygo.com>
- [26] <http://www.4dtechnology.com>
- [27] <http://www.triopic.com>
- [28] <http://www.micro-epsilon.com>
- [29] <http://www.scribd.com/doc/61431078/26/Limitations-of-Optical-3D-Sensors>
- [30] T. Peng, S. K. Gupta, Model and algorithms for point cloud construction using digital projection patterns, *Journal of Computing and Information Science in Engineering*, **7(4)**: 372–381, 2007.
- [31] <http://emtoolbox.nist.gov/Wavelength/Documentation.asp#EdlenorCiddor>
- [32] A. Mikš, Vliv atmosféry na přesnost měření v inženýrské geodézii, In: *Jemná mechanika a optika*. 1997, roč. 42, č. 4, s. 120–122.
- [33] A. Mikš, J. Pospíšil, Počítačová simulace vlivu atmosféry na geodetická měření, In: *Stavební obzor*. 1998, roč. 7, č. 7, s. 220–225.
- [34] A. Mikš, *Aplikovaná optika*, Vydavatelství ČVUT, Praha 2009.
- [35] G. A. Korn, T. M. Korn, *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*, Dover Publications, 2000.
- [36] K. Rektorys, *Přehled užité matematiky*, SNTL, Praha 1969.

Pavel Kulmon, katedra fyziky, Fakulta stavební ČVUT, Thákurova 7, 166 29 Praha 6, e-mail: pavel.kulmon@fsv.cvut.cz
 prof. RNDr. Antonín Mikš, CSc., katedra fyziky, Fakulta stavební ČVUT, Thákurova 7, 166 29 Praha 6, e-mail: miks@fsv.cvut.cz

Jedná se o vědecký článek

Veletrh electronica 2014: Špičkový program na oslavu padesátého výročí

Veletrh electronica se i ke svému padesátiletému jubileu opět stává platformou odborných znalostí a výměny informací v elektronické branži. V době od 11. do 14. listopadu 2014 se mohou návštěvníci informovat o celém spektru výrobků a služeb v oblasti elektroniky: od jednotlivých komponentů a systémů, až po aplikace a služby. Hlavní pozornost je letos věnována automobilovému průmyslu, vestavěným systémům, lékařské elektronice a osvětlení, jakož i tématům zastřešujícím tyto oblasti, a to bezpečnosti a energetické účinnosti. Doprovodné konference a fóra budou tato témata rozebírat ještě podrobněji.

Podle výpočtů Centrálního svazu elektrotechnického a elektronického průmyslu (ZVEI) vzrostl celosvětový trh s elektrotechnickými a elektronickými výrobky v loňském roce o čtyři procenta na zhruba 3,6 biliónu EUR. Tento růst se přičítá zejména asijským a americkým trhům. Z této okolnosti těží i německý elektronický průmysl: Ve srovnání s předchozím rokem vzrostl počet zakázek v prvním čtvrtletí roku 2014 o 2,2 procenta. To je pro veletrh electronica 2014 dobré znamení.

Mezinárodní vystavovatelé a návštěvníci z řad odborné veřejnosti

V roce 2012 skoro polovina ze 73 051 návštěvníků a 63 procent z 2 669 vystavovatelů přijela ze zahraničí. Také v letošním roce informuje veletrh electronica prostřednictvím své koncepce „tří pilířů“ (veletrh, konference a rámcový program) o nových technologiích, výrobcích, službách a trendech této branže. Vrchol veletrhu, CEO Roundtable, je věnován tématu:

„Internet věcí: možnosti, výzvy a otázka bezpečnosti“. Veletrh věnuje hlavní pozornost automobilovému průmyslu, vestavěným systémům, lékařské elektronice a osvětlení, jakož i průřezovým tématům - bezpečnosti a energetické účinnosti. Tato témata se mimo jiné odrážejí také v programu panelových diskuzí a přednášek.

Rozsáhlý program konferencí a diskuzních fór

Diskuzní fóra v pavilónech výstaviště zvou k dialogu a výměně názorů. Spektrum jednotlivých fór - automobilový průmysl, vestavěné systémy, elektronika a výstavnictví, stejně jako tržiště plošných spojů a komponentů - je zaměřeno na praxi a informuje návštěvníky o otázkách jak současnosti, tak budoucnosti.

Důkladněji budou tato témata rozebírána v rámci programu konferencí veletrhu electronica.



electronica
inside tomorrow

Konference electronica automotive

Konference electronica automotive je podporována ZVEI a koná se 10. listopadu v ICM - Mezinárodním kongresovém centru Mnichov. Konference se věnuje hlavním technologickým trendům a strategiím mezinárodního automobilového průmyslu. Se svými příspěvky zde vystoupí mimo jiné zástupci těchto společností: Audi, BMW, Daimler, Freescale, Infineon, Intel, OSRAM, Renesas a Visteon. Příspěvky jsou tento rok zaměřeny na osvětlení, aplikace senzor fusion a konektivitu.

Konference Embedded platforms

Tato konference je již podruhé věnována novým technologiím, konkrétním řešením a službám sloužícím k rozvoji vestavěných systémů. Konference se koná 12. a 13. listopadu souběžně s veletrhem electronica v tiskovém centru Ost mnichovského výstaviště.

Kongres Wireless

Kongres pořádají společně specializovaný časopis „Elektronik“, ZVEI a veletrh electronica. Ve dnech 12. a 13. listopadu 2014 budou odborníci z branže diskutovat v ICM - Mezinárodním kongresovém centru Mnichov - o technických aspektech současných i budoucích bezdrátových technologií, zejména s ohledem na jejich průmyslové využití.