České vysoké učení technické v Praze
Fakulta strojní

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Simulace transsonického proudění vlhkého vzduchu s kondenzací

2016 **Miroslav Vrátný**

Fakulta strojní, Ústav technické matematiky

'echnická 4, 166 07 Praha 6 Akademický rok 2015-2016

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

o: Bc. Miroslava Vrátného

oboru: Matematické modelování v technice

ázev: **Simulace transsonického proudění vlhkého vzduchu s kondenzací**

Zásady pro vypracování:

1. Popis modelu rovinného proudění vlhkého vzduchu s nerovnovážnou kondenzací. Formulace úlohy pro proudění v dýze.

2. Popis a naprogramování metody konečných objemů pro řešení nevazkého rovinného proudění vlhkého vzduchu s nerovnovážnou kondenzací.

3. Otestování použitelnosti metody pro výpočty proudění samotné páry.

4. Odladění metody na vhodných testovacích příkladech proudění vlhkého vzduchu v dýze. Rozbor a zpracování získaných výsledků.

ozsah diplomové práce: 30-50 stran včetně obrázků, tabulek a grafů.

1. J. Fořt a kol.: Numerická simulace proudění I, skripta ČVUT, FS

2. J. Blazek: Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications, Elsevier 2001
3. K. A. Goodheart: 3-D Transonic Flow Dynamics with Nonequilibrium Condensation, Ph.D. thesis, TU Mnichov, 2004

edoucí diplomové práce: Doc. Ing. Jan Halama, Ph.D.

atum zadání diplomové práce: 11. 4. 2016

atum odevzdání diplomové práce: 30. 7. 2016

Prof. Ing. Jaroslav Fořt, CSc.	Prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
.....	.....
vedoucí Ú12101	děkan FS, ČVUT v Praze

V Praze dne 11. 4. 2016

odevzdá-li student diplomovou práci včas, je povinen tuto skutečnost předem písemně zdůvodnit, pokud de omluva (předaná prostřednictvím studijního oddělení děkanovi) děkanem uznána, určí děkan studentovi hradní termín konání státní závěrečné zkoušky (zůstávají dva termíny SZZ). Pokud tuto skutečnost student lně neomluví nebo omluva nebude děkanem uznána, určí děkan studentovi termín pro opakování státní věrečné zkoušky. SZZ je možné opakovat pouze jednou (SZŘ čl. 22, odst. 3, 4).

udent bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba ést v diplomové práci.

dání diplomové práce převzal dne: .....

student

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně a uvedl veškerou použitou literaturu.

V Praze dne _____ _____

Miroslav Vrátný

Poděkování

Rád bych poděkoval panu doc. Ing. Janu Halamovi, PhD., za odborné vedení, za pomoc a rady při zpracování této diplomové práce. Mé poděkování patří též mým rodičům za všestrannou podporu během celého studia.

Abstrakt

Diplomová práce se zabývá řešením rovinného transsonického proudění vlhkého vzduchu s kondenzací pomocí metody konečných objemů. Je zde nastíněn její princip a odvození a popsáno schéma AUSM+, které je v práci použito pro veškeré výpočty. Dále je zde naprogramován a odladěn výpočet na různých testovacích úlohách a je ověřeno použití pro proudění čisté vodní páry.

Klíčová slova

numerická simulace, kondenzace, metoda konečných objemů, Lavalova dýza, vlhký vzduch, AUSM+

Abstract

This thesis deals with the solution of planar transsonic flow of humid air with condensation using the finite volume method. The principle and inference of the AUSM+ scheme, which is used for all calculations is indicated in this thesis. There is also programmed and debugged calculation on diferent test cases and it is confirmed for use for flow of pure water steam.

Keywords

numerical simulation, condensation, finite volume method, de Laval nozzle, humid air, AUSM+

Obsah

1 Úvod **1**

2 Model proudění vlhkého vzduchu **3**

2.1 Model vlhkého vzduchu 3

2.2 2D proudění stlačitelné nevazké tekutiny s kondenzací 4

2.3 Formulace úlohy 6

3 Metoda konečných objemů **9**

3.1 AUSM$^+$ schéma 10

4 Validace **13**

4.1 S1 dýza 13

4.2 A1 dýza 21

4.3 Barschdorffova dýza - vodní pára 25

5 Závěr **27**

Kapitola 1

Úvod

Vlhký vzduch je nedílnou součástí našeho života. Jeho chování při proudění ve vysokých rychlostech je často ovlivněno kondenzací vodní páry. Tento proces je natolik složitý, že jeho řešení vyžaduje prostředky numerické matematiky.

Proces kondenzace ve vlhkém vzduchu se často vyskytuje např. při obtékání profilů křídel u letadel. Známé snímky tzv. kondenzačního kužele při nízkých průletech stíhacích letounů jsou jen jedním z těchto případů.

Již ve své bakalářské práci jsem se zabýval jednoduchou simulací jednorozměrného proudění v Lavalově dýze. Pro zachycení složitějších jevů a simulaci v komplexních geometriích je však nutné přejít k vícerozměrné oblasti řešení.

Cílem této diplomové práce je popis a naprogramování kódu pro výpočet proudění vlhkého vzduchu s nerovnovážnou kondenzací pomocí metody konečných objemů.

Nejdříve je zde proveden popis modelu vlhkého vzduchu. Dále práce obsahuje model dvojrozměrného proudění stlačitelné nevazké tekutiny, do kterého je zakomponována část pro modelování nerovnovážné kondenzace.

V další kapitole je odvozen a popsán princip metody konečných objemů. Pro řešení všech případů proudění je použito vhodné schéma AUSM$^+$.

Závěrečná část obsahuje validaci programu na několika testovacích případech. Je zde provedeno srovnání s výsledky z experimentů a simulací dalších autorů. Součástí je také ověření použitelnosti pro simulaci proudění čisté vodní páry.

Kapitola 2

Model proudění vlhkého vzduchu

2.1 Model vlhkého vzduchu

Nejprve je nutné zavést určité pojmy, týkající se termodynamiky vlhkého vzduchu. Označení vlhký vzduch používáme pro směs suchého vzduchu a vodní páry. Důležité je podotknout, že se tyto složky nemohou směšovat v libovolném poměru v celém rozsahu tlaku a teploty [14]. Přestože za atmosferických podmínek silně převažuje suchý vzduch, není možné projevy kondenzace z energetického hlediska zanedbat díky velmi vysoké hodnotě latentního tepla vody. Považování obou složek za ideální plyn pro nás bude dostatečnou aproximací. Při transsonickém proudění se díky vysokému podchlazení a malému podílu vodní páry tvoří kapky velmi malé (řádově 10^{-8} m), je tedy možné zanedbat jejich objem. Předpokládáme také, že kapky jsou unášeny okolním proudem (mají shodné vektory rychlosti s proudem v každém místě) [6].

Součet hmotností jednotlivých složek udává hmotnost směsi

$$m = m_A + m_V + m_L, \tag{2.1}$$

kde m_A, m_V a m_L jsou hmotnosti suchého vzduchu, vodní páry a kapalné vody. Toto indexové značení budeme dále používat i pro jiné veličiny. Důležitou veličinou bude podíl již zkondenzované vody

$$\chi = \frac{m_L}{m} \tag{2.2}$$

a její maximální možná hodnota

$$\chi_{max} = \frac{m_V + m_L}{m}\,. \tag{2.3}$$

Další používanou veličinou bude stupeň nasycení (nebo přesycení při hodnotách větších

než 1)

$$\varphi = \frac{p_V}{p_{V,s}}\,, \tag{2.4}$$

kde p_V je parciální tlak vodní páry a $p_{V,s} = p_{V,s}(T)$ je tlak nasycených par, počítaný podle empirického vzorce dle IAPWS-IF97. Při hodnotách $\varphi \leq 1$ a rovnovážném stavu je někdy takto definovaná relativní vlhkost vzduchu. V programu také využijeme její přepočet na podíl vodní složky

$$\chi_{max} = \frac{\varphi p_{V,s} \frac{R_A}{R_V}}{p + \varphi p_{V,s}\left(\frac{R_A}{R_V} - 1\right)} \tag{2.5}$$

s měrnými plynovými konstantami $R_A = 287\ \mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}, R_V = 461.52\ \mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$. Po jednoduchém odvození se dá dostat ke vztahu pro parciální tlak vodní páry, který budeme dále využívat

$$p_V = \frac{(\chi_{max} - \chi)p}{\chi_{max} - \chi + (1 - \chi_{max})\frac{R_A}{R_V}}\,. \tag{2.6}$$

2.2 Dvojrozměrné proudění stlačitelné nevazké tekutiny s nerovnovážnou kondenzací

Využívaným modelem proudění stlačitelné nevazké tekutiny je systém Eulerových rovnic. Jedná se o soustavu dvou skalárích a jedné vektorové rovnice, které reprezentují zákon zachování hmoty, energie a bilanci hybnosti. Jelikož se jedná o transsonické proudění plynu, můžeme vnější síly zanedbat. Pro modelování homogenní kondenzace byla vybrána metoda Hillových momentů. Tato metoda přidává do modelu další čtyři skalární transportní rovnice se zdrojovými členy (odvození viz [9], [10]). Soustavu lze pro dvojrozměrný případ psát v konzervativním tvaru [10]

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{W})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{W})}{\partial y} = \mathbf{Q}(\mathbf{W}), \tag{2.7}$$

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \\ \rho Q_3 \\ \rho Q_2 \\ \rho Q_1 \\ \rho Q_0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(e+p) \\ \rho u Q_3 \\ \rho u Q_2 \\ \rho u Q_1 \\ \rho u Q_0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ v(e+p) \\ \rho v Q_3 \\ \rho v Q_2 \\ \rho v Q_1 \\ \rho v Q_0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ r_c^3 J + 3\dot{r}\rho Q_2 \\ r_c^2 J + 2\dot{r}\rho Q_1 \\ r_c J + \dot{r}\rho Q_0 \\ J \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{W}$ je vektor konzervativních proměnných, $\mathbf{F}$ a $\mathbf{G}$ jsou vektory toků daných veličin, $\mathbf{Q}$ je vektor zdrojových členů, ρ je hustota, u a v jsou kartézské složky rychlosti, p je tlak a e je celková energie vztažená na jednotku objemu. Dále $Q_k = \sum_{i=1}^{N} r_i^k$ je k-tý moment reprezentující dané rozdělení velikosti kapek [9], r_i je poloměr i-té kapky, $N = Q_0$ je celkový počet kapek v jednotce hmotnosti. Poloměr kapky při jejím vzniku r_c určíme podle vztahu [10]

$$r_c = \frac{2\sigma}{\rho_L R_V T \ln(s)}; \tag{2.8}$$

kde σ je povrchové napětí vody. Vztahy pro výpočet rychlosti nukleace J a růstu kapky $\dot{r}$ byly vybrány z několika dostupných kombinací po důkladném otestování. Pro případy využité k validaci, které jsou uvedené v dalších kapitolách, se nejlépe osvědčil model podle klasické teorie nukleace [17], [10]

$$J = \frac{\rho_V^2}{\rho_L}\sqrt{\frac{2\sigma}{\pi m_V^3}}\exp\left(\frac{-16\pi}{3}\frac{\sigma^3}{m_V \rho_L^2 R_V^3 T^3 \ln^2(s)}\right), \tag{2.9}$$

kde $m_V = 2.99046 \cdot 10^{-26}$kg je hmotnost jedné molekuly vody. Růst již existujících kapek byl nejlépe vystihnut modelem podle Hertze-Knudsena [6]

$$\dot{r} = \frac{\alpha}{\rho_L}\left(\frac{p_V - p_{V,s}}{\sqrt{2\pi R_V T}}\right), \tag{2.10}$$

kde α je korekční koeficient nastavený podle experimentů pro vlhký vzduch na hodnotu 1. Další modely je možné nalézt v [doplnit]. Z předpokladů a vztahů uvedených v předchozí části jsme schopni odvodit vztah pro tlak, který je nutný pro uzavření celého systému rovnic

$$p = (\gamma - 1)\left[e - \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2) + \rho\chi L\right], \tag{2.11}$$

$$\gamma = \frac{\gamma_A(\gamma_V - 1)(1 - \chi_{max})R_A + \gamma_V(\gamma_A - 1)\chi_{max}R_V}{(\gamma_V - 1)(1 - \chi_{max})R_A + (\gamma_A - 1)R_V[\chi_{max} + (\gamma_V - 1)\chi]}, \tag{2.12}$$

kde L je měrné latentní teplo vody, $\gamma_A = 1.4$ a $\gamma_V = 1.32$ jsou Poissonovy konstanty suchého vzduchu a vodní páry. Jelikož se pohybujeme ve velkém rozsahu teplot, jsou hodnoty veličin σ, ρ_L, L místo považování za konstanty počítány podle empirických vztahů, které lze nalézt v [8] (většinou se jedná o polynomiální závislost na teplotě). Dále je možné definovat rychlost zvuku pomocí vztahu (2.12) jako

$$a^2 = \frac{\gamma p}{\rho}. \tag{2.13}$$

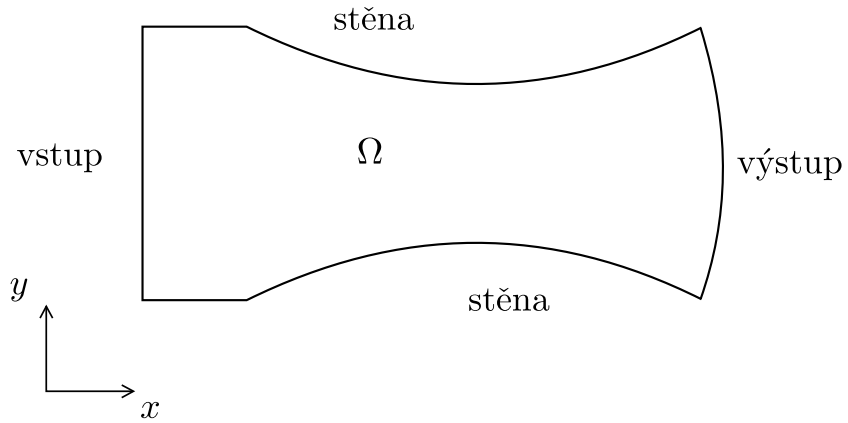
Z hodnot Hillových momentů jsme dále schopni určit průměrný poloměr kapek [10] [9]

$$r_{20} = \sqrt{\frac{Q_2}{Q_0}}. \tag{2.14}$$

Je zde možné použít i kombinace jiných momentů (v příslušných mocninách), tato je však nejpoužívanější. Nyní již můžeme určit podíl zkondenzované vody [10]

$$\chi = \rho_L \frac{4}{3} \pi Q_3. \tag{2.15}$$

2.3 Formulace úlohy



Obrázek 2.1: Oblast řešení - dýza

V této části se budeme zabývat formulací úlohy pro proudění v dýze. Podle obr. 2.1 máme oblast Ω a její hranici $\partial\Omega$ rozdělenou na vstup, výstup a stěnu.

Analýza okrajových podmínek na vstupu a na výstupu se dá najít v [15]. Vstup budeme uvažovat pouze podzvukový. Po nalezení charakteristik zjistíme, že na vstupním

řezu vstupuje do oblasti 7 charakteristik a 1 vystupuje, musíme tedy předepsat 7 podmínek. Obvyklá možnost je předepsání klidového tlaku p_0, klidové teploty T_0, úhlu náběhu α_{in} a všech momentů Q_0, Q_1, Q_2, Q_3. Výstup budeme uvažovat vždy nadzvukový. Všechny charakteristiky v tomto režimu vystupují z oblasti ven, nepředepisujeme proto žádnou podmínku. Na stěně nastavujeme pouze podmínku nepropustnosti, tedy normálová složka rychlosti je nulová. Dále stanovíme počáteční podmínku W_0 konzistentní s okrajovými podmínkami.

Úlohu formulujme následovně [4]: V oblasti Ω hledáme funkci $\mathbf{W}(x, y, t)$, která splňuje následující podmínky:

- Vyhovuje rovnici

$$\int_{t_1}^{t_2} \iint_{\omega} \left(\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{W})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{W})}{\partial y} \right) dxdydt = \int_{t_1}^{t_2} \iint_{\omega} \mathbf{Q}(\mathbf{W}) dxdydt, \qquad (2.16)$$

  pro libovolnou oblast $\omega \subset \Omega$ s dostatečně hladkou hranicí a libovolné $t_2 > t_1 \geq 0$.

- $\mathbf{W}(x, y, t) \in C^1(\Omega \setminus D)$, kde D je množina konečného počtu křivek míry 0.

- Rankinovy-Hugoniotovy podmínky jsou splněny funkcí $\mathbf{W}(x, y, t)$ na těchto křivkách D.

- $\mathbf{W}(x, y, 0) = \mathbf{W}_0$, tedy vyhovuje počáteční podmínce.

- $\mathbf{W}(x, y, 0)$ splňuje výše uvedené okrajové podmínky.

Kapitola 3

Metoda konečných objemů

Ve své bakalářské práci jsem se zabýval metodou konečných diferencí pro simulaci jednorozměrného proudění v dýze. Pro rozšíření na obecnou dvojrozměrnou oblast je vhodné přejít k hojně používané metodě konečných objemů, která vychází z integrálního tvaru výchozích rovnic mechaniky tekutin. Hledáme pouze stacionární řešení, využijeme tedy metodu ustalování. Pomocí této metody hledáme stacionární řešení jako limitní případ nestacionárního pro $t \to \infty$.

Nejprve je nutné zavedení výpočetní sítě. Omezíme se pouze na čtyřúhelníkové strukturované sítě a budeme využívat tzv. cell-centered schéma (více v [3]). Jednotlivé buňky A_{ij} budeme značit obvyklým způsobem, který využívá indexy i ve směru x a j ve směru y. Integrací soustavy (2.7) přes libovolný objem A_{ij} získáváme

$$\iint\limits_{A_{ij}} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}\, dxdy + \iint\limits_{A_{ij}} \operatorname{div}(\mathbf{F}(\mathbf{W}), \mathbf{G}(\mathbf{W}))dxdy = \iint\limits_{A_{ij}} \mathbf{Q}(\mathbf{W})dxdy, \tag{3.1}$$

po použití Greenovy věty

$$\frac{d}{dt} \iint\limits_{A_{ij}} \mathbf{W}dxdy + \oint\limits_{\partial A_{ij}} (\mathbf{F}, \mathbf{G}) \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint\limits_{A_{ij}} \mathbf{Q}dxdy, \tag{3.2}$$

kde $\mathbf{n}$ je vnější jednotková normála objemu A_{ij}. Nyní využijeme větu o střední hodnotě

$$\mathbf{W}_{ij}(t) = \frac{1}{|A_{ij}|} \int\limits_{A_{ij}} \mathbf{W}(x, y, t)dxdy, \tag{3.3}$$

kde $|A_{ij}|$ je velikost plochy daného objemu. Po dosazení získáme

$$\frac{d}{dt}\, \mathbf{W}_{ij} = -\frac{1}{|A_{ij}|} \left[\oint\limits_{\partial A_{ij}} (\mathbf{F}, \mathbf{G}) \cdot \mathbf{n}\, ds - \iint\limits_{A_{ij}} \mathbf{Q}dxdy \right], \tag{3.4}$$

Nyní aproximujeme křivkový integrál součtem toků přes jednotlivé hrany objemu, zdrojový člen aproximujeme konstantní hodnotou v daném objemu. Získáváme tzv. semidiskrétní tvar

$$\frac{d}{dt}\mathbf{W}_{ij} = -\frac{1}{|A_{ij}|}\left[\sum_{k=1}^{4}\mathbf{\Phi}_k S_k - \mathbf{Q}_{ij}|A_{ij}|\right], \tag{3.5}$$

kde $\mathbf{\Phi}_k$ je numerický tok do příslušné vedlejší buňky přes příslušnou hranu. Tento tok je závislý pouze na hodnotách veličin z jedné a z druhé strany na této hraně a na její jednotkové normále. S_k je délka této hrany. Jednoduchým nahrazením časové derivace dopřednou diferencí získáme Eulerovu explicitní metodu

$$\mathbf{W}_{ij}^{n+1} = \mathbf{W}_{ij}^{n} - \frac{\Delta t}{|A_{ij}|}\sum_{k=1}^{4}\mathbf{\Phi}_k S_k + \mathbf{Q}_{ij}\Delta t \tag{3.6}$$

kde $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ je časový krok a t^n značí n-tou časovou vrstvu.

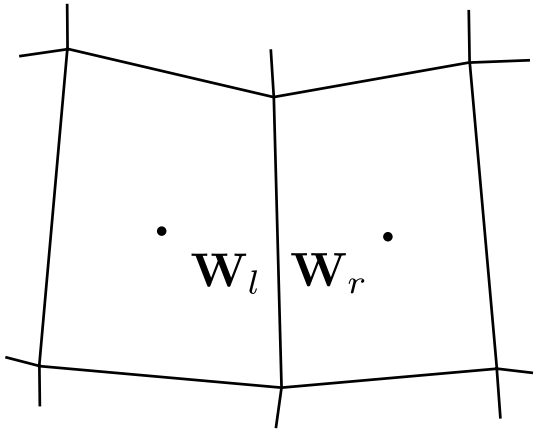
3.1 AUSM$^+$ schéma

Pro veškeré výpočty v této práci bylo zvoleno schéma AUSM$^+$ [12], což je vylepšená varianta původního AUSM (*Advective upstream splitting method*) [13]. Jedná se o vcelku jednoduché, avšak robustní a přesné schéma pro simulaci stlačitelného proudění. Schéma je postaveno na principu rozdělení toků na konvektivní a tlakovou část

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}^c + \mathbf{\Phi}^p, \qquad \mathbf{\Phi}^c = \rho(u,v)\cdot\mathbf{n}\begin{pmatrix} 1 \\ u \\ v \\ (e+p)/\rho \\ Q_3 \\ Q_2 \\ Q_1 \\ Q_0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{\Phi}^p = p\begin{pmatrix} 0 \\ n_x \\ n_y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Zaměříme se nyní na hranu, kde budeme uvažovat stav vlevo $\mathbf{W}_l$ od hrany a stav vpravo $\mathbf{W}_r$ (obr. 3.1). Nejprve spočteme „Machova čísla“ schématu

$$M_l = \frac{(u,v)_l \cdot \mathbf{n}}{a_{\frac{1}{2}}} \tag{3.8}$$



Obrázek 3.1: Stav na levé a pravé straně hrany

$$M_r = \frac{(u,v)_r \cdot \mathbf{n}}{a_{\frac{1}{2}}} \tag{3.9}$$

kde $a_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(a_l + a_r)$ a $\mathbf{n}$ je jednotková normála hrany ve směru počítaného toku. Dále jsou definovány dělící funkce

$$\mathcal{M}^+(M_l) = \begin{cases} M_l, & M_l \geq 1 \\ \frac{1}{4}(M_l+1)^2 + \beta(M_l^2-1)^2, & M_l \in (-1;1) \\ 0, & M_l \leq -1 \end{cases} \tag{3.10}$$

$$\mathcal{M}^-(M_r) = \begin{cases} M_r, & M_r \leq -1 \\ -\frac{1}{4}(M_r-1)^2 - \beta(M_r^2-1)^2, & M_r \in (-1;1) \\ 0, & M_r \geq 1 \end{cases} \tag{3.11}$$

kde β je nastavitelný parametr v rozsahu $-\frac{1}{16} \leq \beta \leq \frac{1}{2}$. V práci byla použita doporučená hodnota $\beta = \frac{1}{8}$. Pomocí těchto funkcí nyní spočteme „Machovo číslo“ na stěně

$$M_{\frac{1}{2}} = \mathcal{M}^+(M_l) + \mathcal{M}^-(M_r) \tag{3.12}$$

a z něho dále „hmotnostní tok“

$$\dot{m}_{\frac{1}{2}} = \begin{cases} \rho_l a_{\frac{1}{2}} M_{\frac{1}{2}}, & M_{\frac{1}{2}} \geq 1 \\ \rho_r a_{\frac{1}{2}} M_{\frac{1}{2}}, & M_{\frac{1}{2}} < 1 \end{cases} \tag{3.13}$$

Obdobně jsou zavedeny dělící funkce pro tlak

$$\mathcal{P}^+(M_l) = \begin{cases} 1, & M_l \geq 1 \\ \frac{1}{4}(M_l+1)^2(2-M_l) + \xi M_l(M_l^2-1)^2, & M_l \in (-1;1) \\ 0, & M_l \leq -1 \end{cases} \tag{3.14}$$

$$\mathcal{P}^-(M_r) = \begin{cases} 1, & M_r \leq -1 \\ \frac{1}{4}(M_r-1)^2(2+M_r) - \xi M_r(M_r^2-1)^2, & M_r \in (-1;1) \\ 0, & M_r \geq 1 \end{cases} \tag{3.15}$$

kde ξ je nastavitelný parametr v rozsahu $-\frac{3}{4} \leq \xi \leq \frac{3}{16}$. Zde byla použita doporučená hodnota $\xi = \frac{3}{16}$. Tyto funkce opět využijeme při výpočtu tlaku na stěně

$$p_{\frac{1}{2}} = \mathcal{P}^+(M_l)p_l + \mathcal{P}^-(M_r)p_r \tag{3.16}$$

Výsledný numerický tok nyní získáme jako

$$\mathbf{\Phi} = \dot{m}_{\frac{1}{2}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ u \\ v \\ (e+p)/\rho \\ Q_3 \\ Q_2 \\ Q_1 \\ Q_0 \end{pmatrix}_{l/r}}_{\mathbf{\Psi}_{l/r}} + p_{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ n_x \\ n_y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.17}$$

kde vektor $\mathbf{\Psi}_{l/r}$ je opět použit podle hodnoty $M_{\frac{1}{2}}$

$$\mathbf{\Psi}_{l/r} = \begin{cases} \mathbf{\Psi}_l, & M_{\frac{1}{2}} \geq 1 \\ \mathbf{\Psi}_r, & M_{\frac{1}{2}} < 1 \end{cases} \tag{3.18}$$

Jelikož se jedná o podmíněně stabilní metodu, je nutné stanovit podmínku pro časový krok. Z důvodu nelinearity schématu byla použita zjednodušená podmínka, vycházející z linearizované podoby a metody charakteristik

$$\Delta t = C \cdot \min_{ij} \frac{\min(\Delta x_{ij}, \Delta y_{ij})}{a_{ij} + \sqrt{u_{ij}^2 + v_{ij}^2}}, \tag{3.19}$$

kde Δx_{ij} a Δy_{ij} jsou nejmenší rozměry buňky A_{ij} ve směru x a y. Konstanta $C \in (0;1\rangle$ je v tomto případě stanovena metodou „pokus-omyl“ a její optimální hodnota pro tuto práci byla nastavena na $C = 0.5$. Analýzu aproximace a konvergence je možné najít např. v [11], [3].

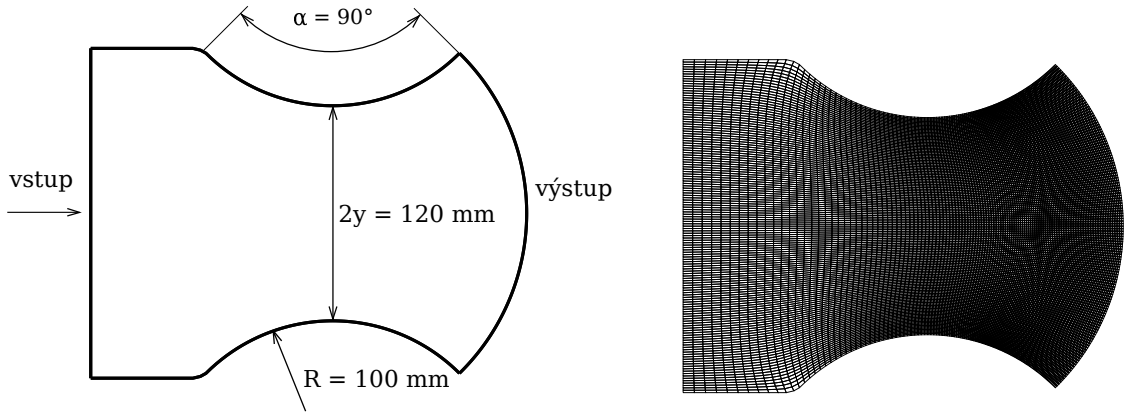
V práci je též použita metoda druhého řádu s lineární rekonstrukcí na stěny buňky a tzv. minmod limiterem (více v [3])

Kapitola 4

Validace

V následující kapitole budou předvedeny výsledky z vytvořeného programu, který využívá metody prezentované v předchozí části práce. Pro validaci použitelnosti programu byly zvoleny dva případy proudění vlhkého vzduchu v různých tvarech Lavalovy dýzy. K těmto případům jsou dostupné výsledky jak z experimentů, tak z numerických simulací. Dále byl zvolen případ pro ověření možnosti použití kódu i pro proudění vodní páry.

4.1 S1 dýza



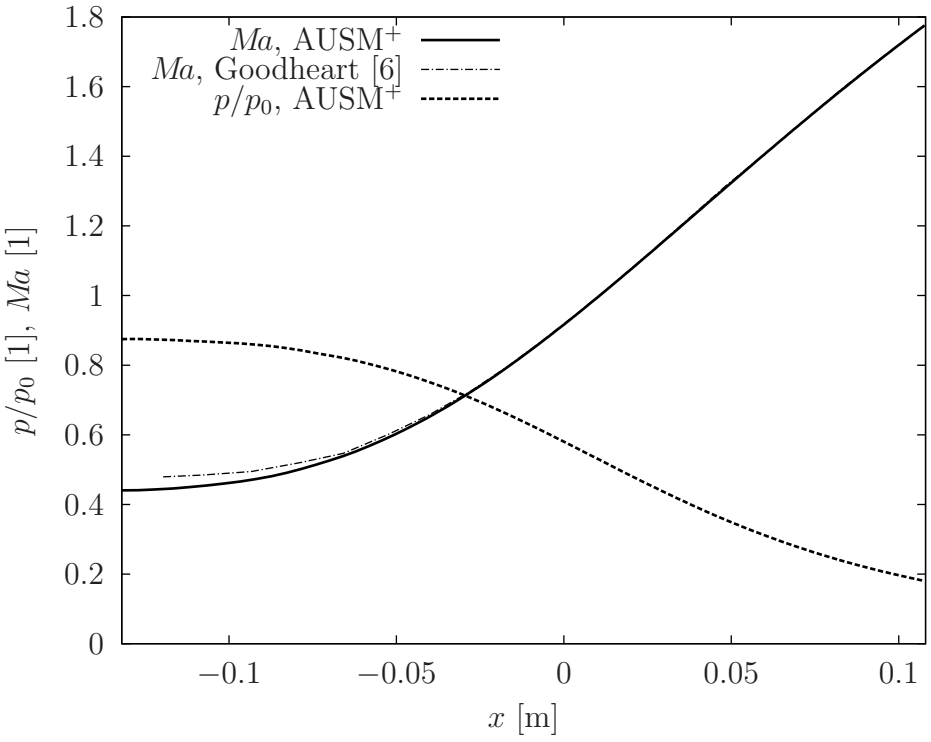
(a) Geometrie S1 dýzy

(b) Výpočtová síť pro S1 dýzu

Obrázek 4.1: Síť a geometrie S1

Prvním ověřovacím případem pro nás bude dýza S1 [16]. Jedná se o Lavalovu dýzu s poměrně velkým zakřivením stěn, jak je vidět na obr. 4.1(a). Tato dýza byla vyvinuta

přímo pro testování efektů, které se vytvářejí při uvolnění latentního tepla z důvodu kondenzace. Výpočtová síť (obr. 4.1(b)) pro tento případ byla generována s předpokladem větších změn veličin za hrdlem, tedy zahuštěna směrem ke konci. Síť obsahuje 130 buněk ve směru x a 140 ve směru y. Výstupní část je zakřivena z důvodu zajištění normálové složky rychlosti v nadzvukovém stavu.

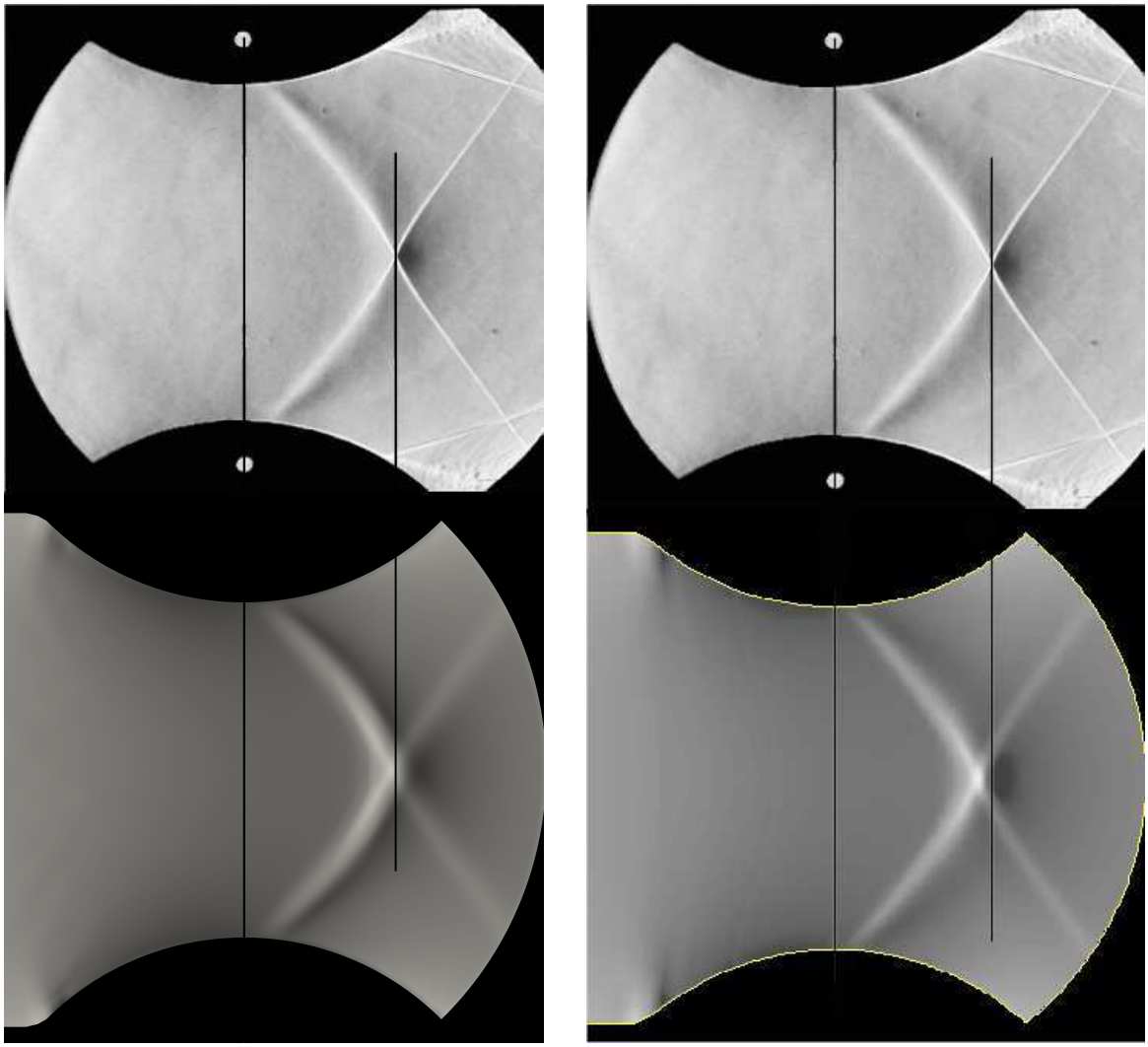


Obrázek 4.2: Machovo číslo a tlak podél osy, $\varphi_0 = 0\%$

Na referenčním grafu 4.2 vidíme průběh Machova čísla a tlaku vztaženého ke klidovému tlaku podél osy dýzy. Proudícím plynem je zde pouze suchý vzduch. Klidové podmínky v tomto případě jsou $p_0 = 100$ kPa, $T_0 = 295$ K a $\varphi_0 = 0\%$. Máme zde srovnání s výsledkem ze simulace podle [6] pomocí Machova čísla. Odchylka na vstupu je nejspíše způsobena rozdílnou délkou vstupního kanálu před zužující se částí (tento rozměr nebyl ve zdroji přesně definován). Ve zbylé části dýzy je shoda dostatečná. Je zde vidět hladký průběh veličin bez rázových vln.

Při zvýšení vlhkosti na $\varphi_0 = 37.2\%$ získáme výsledky, které jsou k vidění na obr. 4.3. Klidové podmínky jsou následující: $p_0 = 100$ kPa, $T_0 = 295$ K a $\varphi_0 = 37.2\%$. Při této klidové vlhkosti se v divergentní části dýzy vytvoří struktura rázových vln (tzv. „X-Shock“), jak je vidět na tzv. šlírových obrázcích. Pomocí této metody je možné op-

ticky zachytit velikost derivace hustoty v určitém směru, je tedy vhodná pro zobrazování rázových vln. K těmto fotografiím je možné se přiblížit i pomocí dat ze simulace, pokud zobrazíme právě derivaci hustoty v daném směru (v tomto případě $\frac{\partial \rho}{\partial x}$) [15]. Na tomto



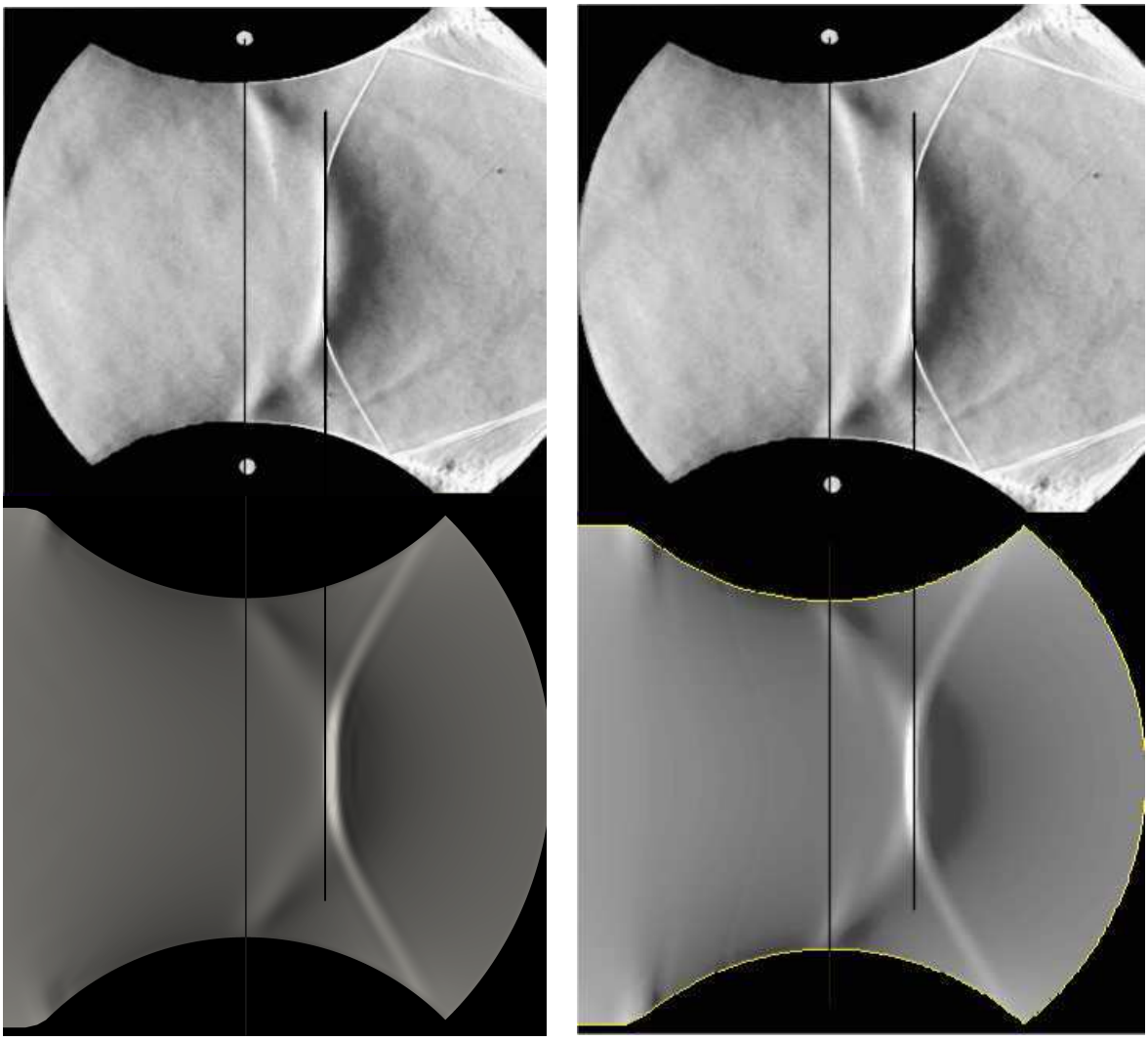
(a) AUSM$^+$ (b) Goodheart [6]

Obrázek 4.3: Porovnání numerických výsledků (dole) s experimentem [16] (nahoře) pomocí šlírového obrázku při $\phi = 37.2\%$

srovnání s experimentem a výsledkem další simulace je vidět dobré zachycení struktury ve tvaru „X“ i její správná poloha. Zásadnější rozdíl oproti experimentu je patrný pouze u stěny v zadní části dýzy. Dochází zde nejspíše k odtržení mezní vrstvy a tím pádem i ke vzniku dalších rázových vln. Jelikož využíváme pouze model nevazké tekutiny, program není schopen tento proces zachytit.

Při dalším nárůstu vlhkosti na hodnotu $\varphi_0 = 71.3\%$ se vznikající struktury posouvají

blíže hrdlu, jak je možné vidět na obr. 4.4. Klidové podmínky jsou tentokrát následující: $p_0 = 100$ kPa, $T_0 = 286.8$ K a $\varphi_0 = 71.3\%$ Ze srovnání výsledků simulace s experimentem je patrná opět dobrá shoda. Interakce s mezní vrstvou a jejím odtržením však v tomto případě nejspíše způsobila posunutí místa dopadu rázové vlny na stěnu. Ve výsledku ze simulace dopadá rázová vlna na stěnu dále po proudu, v experimentu přímo do místa odtržení. Tento jev však opět nejsme schopni zachytit použitím modelu nevazké tekutiny.



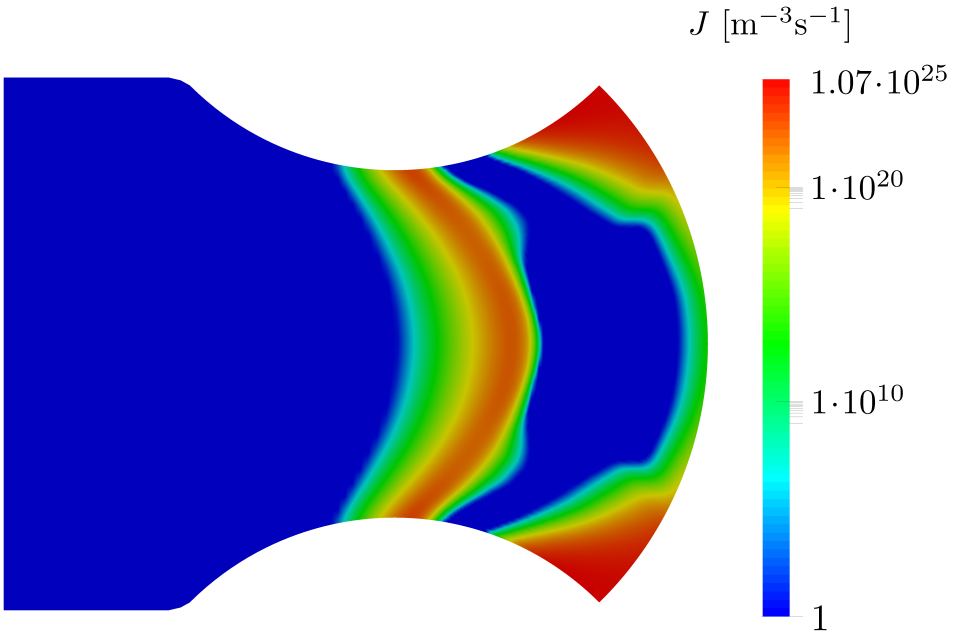
(a) AUSM$^+$ (b) Goodheart [6]

Obrázek 4.4: Porovnání numerických výsledků (dole) s experimentem [16] (nahoře) pomocí šlírového obrázku při $\varphi_0 = 71.3\%$

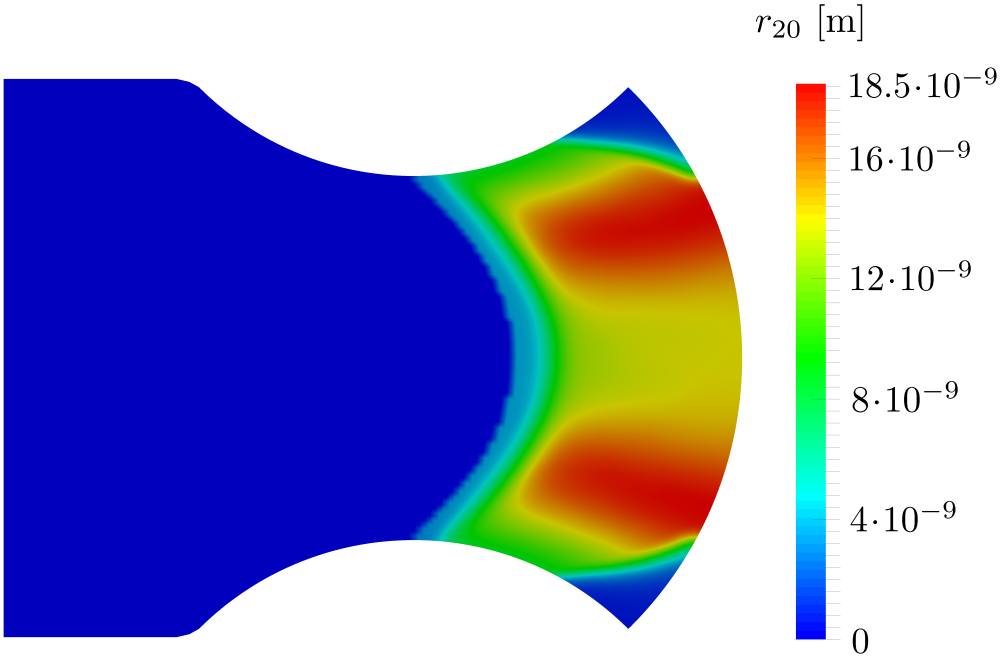
Vsimněme si ještě zajímavých výsledků na obr. 4.5-4.6. Narozdíl od běžnějších typů dýz s menším zakřivením stěn, kde bývá pouze jedna oblast nukleace (okolo hrdla) se zde vyskytuje ještě druhá oblast v zadní části dýzy s ještě vyššími hodnotami (obr.

4.5(a)). Použitý model kondenzace (metoda Hillových momentů) není zcela vhodný pro tyto případy, kde se objevuje sekundární nukleace. Tento problém je vidět na obr. 4.5(b), kde je zobrazen průměrný poloměr kapek. Z tohoto obrázku bychom se mohli domnívat, že v zadních rohzích dýzy se kapky zmenšují nebo zanikají. Tento předpoklad by byl však chybný, což dokazují obrázky 4.6. Vidíme, že se v tomto místě podíl kondenzátu nesnižuje a počet kapek navíc narůstá. Je to dáno ne zcela vhodným zobrazením průměrného poloměru. V místě sekundární nukleace totiž vzniká množství nových kapek, které jsou navíc mnohem menší než kapky konvektivně přivedené. Což způsobuje výrazné snížení průměrného poloměru. Tyto výsledky byly získány při klidových podmínkách $p_0 = 100$ kPa, $T_0 = 295$ K a $\varphi_0 = 37.2\%$.

Pro názornou ukázku rozdílu mezi výpočtem pomocí metod 1. a 2. řádu přesnosti v prostoru je tu obr. 4.7. Je vidět, že metoda 1. řádu zdaleka není schopná zachytit veškeré struktury na stejné síti tak, jako metoda 2. řádu. Pro získání podobných výsledků by musela síť pro metodu 1. řádu obsahovat mnohem více buňek.

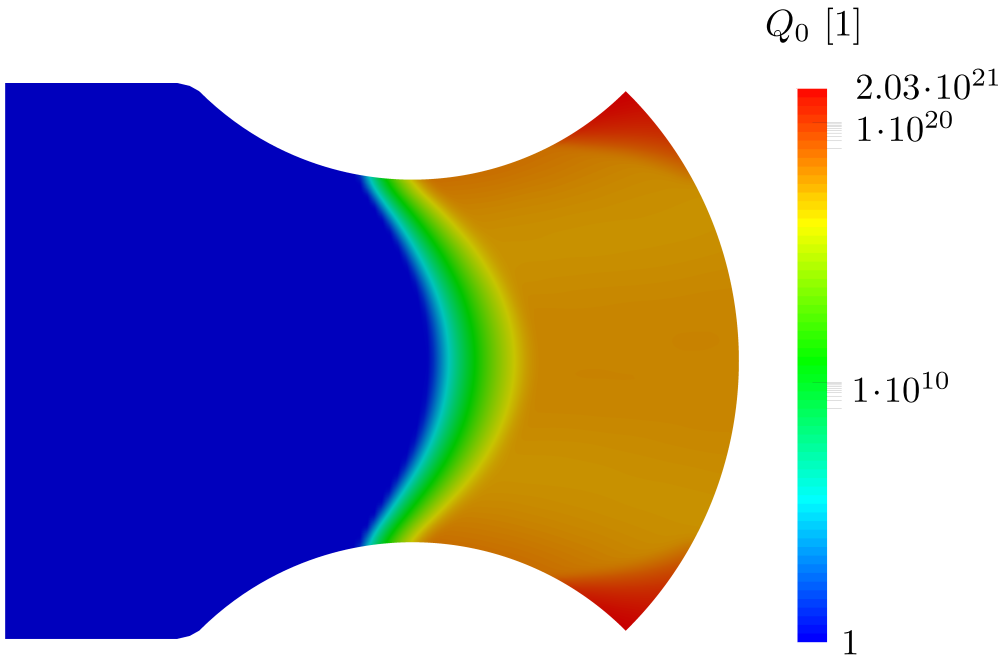


(a) Rychlost nukleace

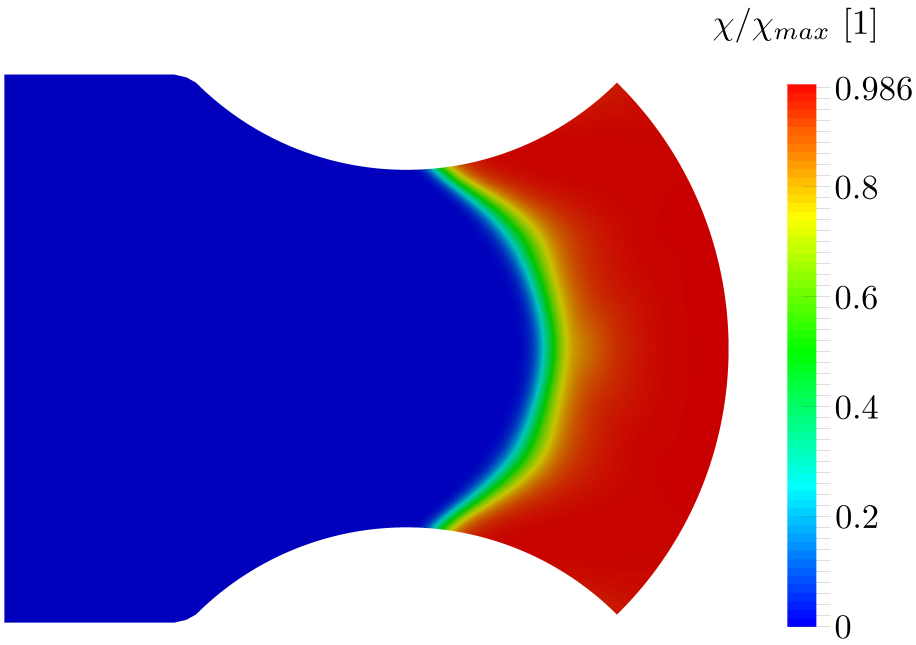


(b) Průměrný poloměr kapek

Obrázek 4.5: $\varphi_0 = 37.2\%$

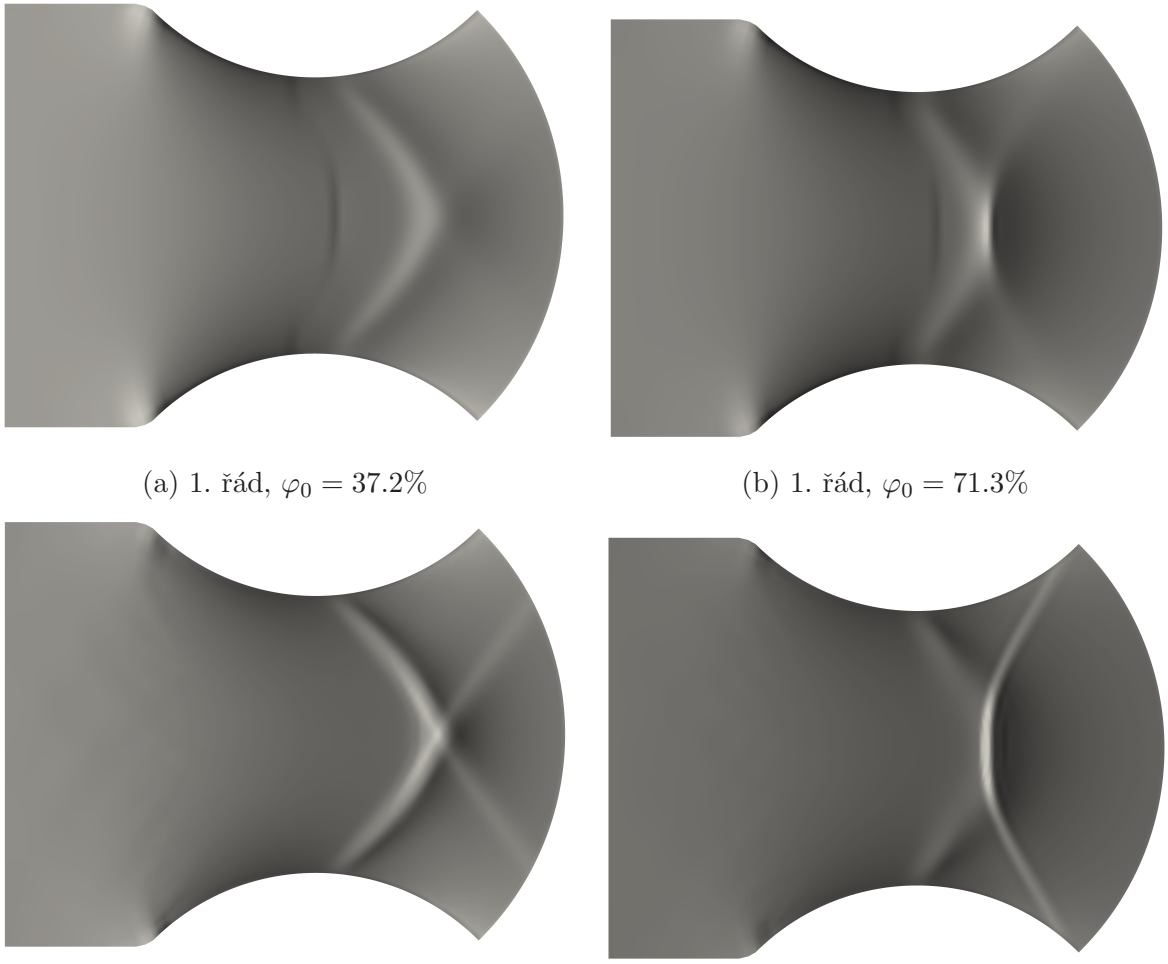


(a) Počet kapek



(b) Vlhkost

Obrázek 4.6: $\varphi_0 = 37.2\%$



(a) 1. řád, $\varphi_0 = 37.2\%$

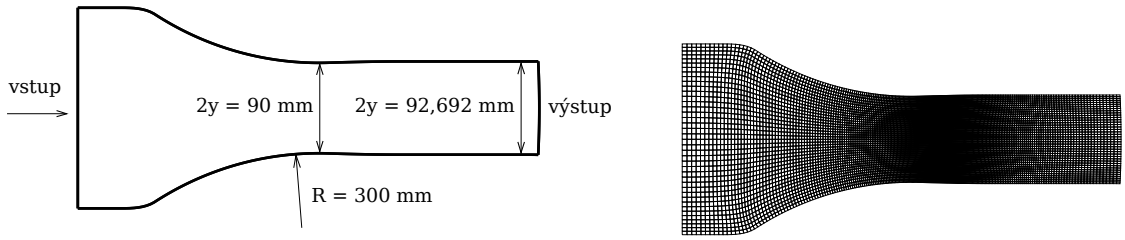
(b) 1. řád, $\varphi_0 = 71.3\%$

(c) 2. řád, $\varphi_0 = 37.2\%$

(d) 2. řád, $\varphi_0 = 71.3\%$

Obrázek 4.7: Porovnání výsledků z metod 1. a 2. řádu přesnosti v prostoru pomocí numerických šlírových obrázků

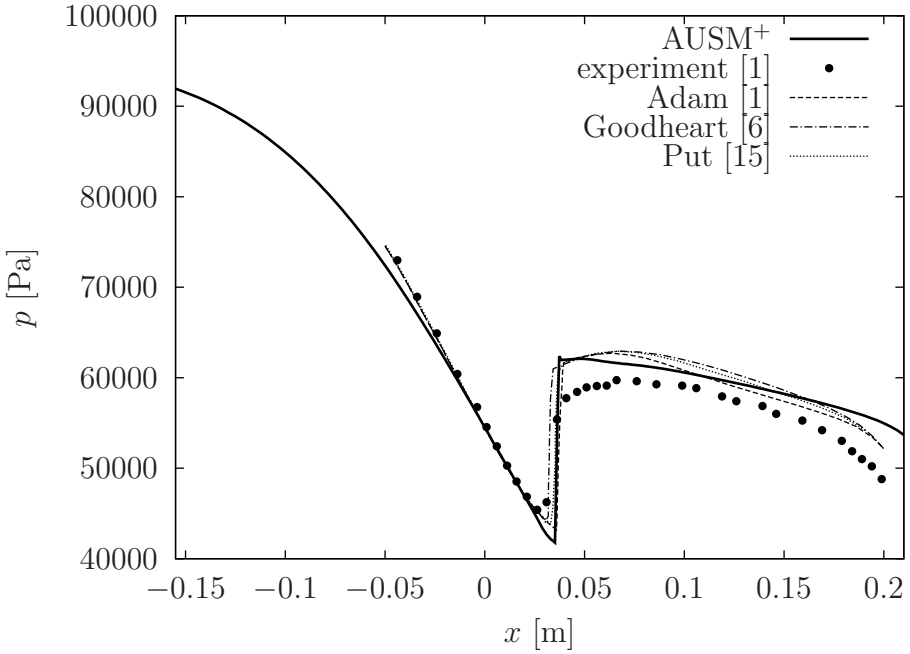
4.2 A1 dýza



(a) Geometrie A1 dýzy (b) Výpočtová síť pro A1 dýzu

Obrázek 4.8: Síť a geometrie A1

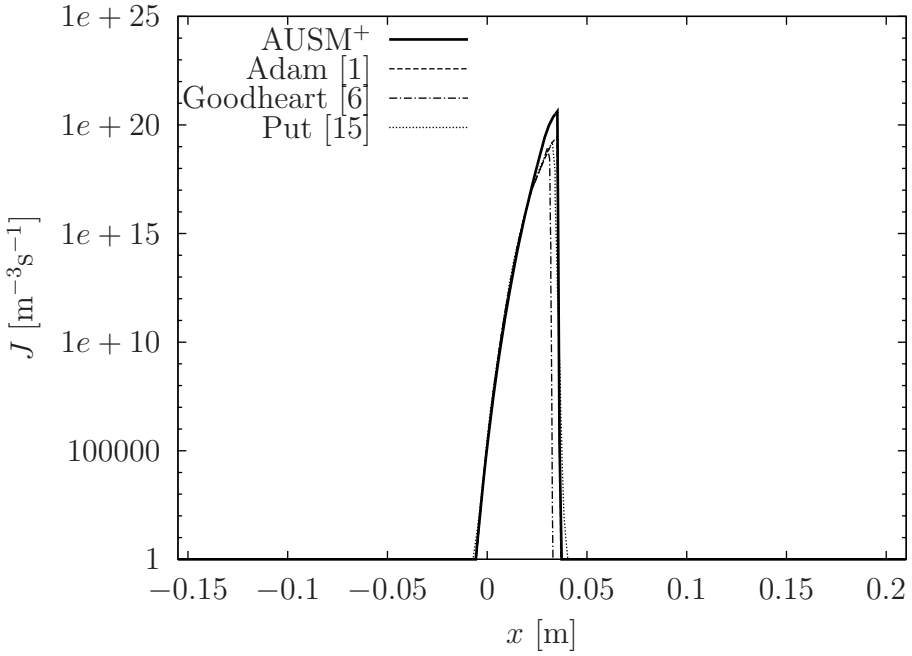
Druhou variantou Lavalovy dýzy pro otestování numerické metody byla zvolena dýza A1 [1]. Na rozdíl od předchozího typu má tato dýza za hrdlem jen velmi pozvolné rozšíření, na které navazuje část s rovnoběžnými stěnami (viz obr. 4.8(a)). Síť pro tento případ (obr. 4.8(b)) byla navržena podle předpokladu výskytu rázových vln se zahuštěním v blízkosti hrdla a za ním. Pro tento případ budeme uvažovat pouze následující klidové podmínky: $p_0 = 100$ kPa, $T_0 = 298.7$ K a $\varphi_0 = 35.6\%$.



Obrázek 4.9: Porovnání výsledků tlaku podél osy

Výsledky tlaku podél osy dýzy můžeme vidět na obr. 4.9. Je zde srovnání jak s expe-

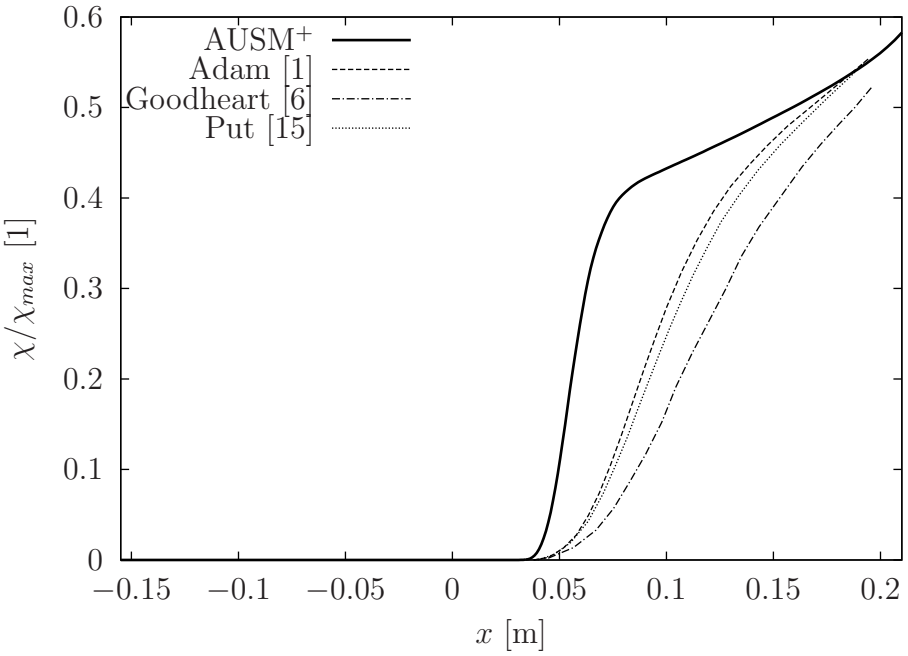
rimentem tak s výsledky dalších simulací. Na tomto grafu je vidět rázová vlna způsobená uvolněním latentního tepla. Poloha rázové vlny je zachycena s výbornou přesností, je však silnější než rázová vlna změřená experimentálně, což je možný důsledek nárůstu mezní vrstvy oproti simulaci s nevazkým modelem (podrobněji vysvětleno v [15]). Při ladění výpočtu byla zjištěna značná citlivost na nepatrné odchylky ve tvaru dýzy především v oblasti za hrdlem, kde není jednoznačně definován přechod k paralelní části.



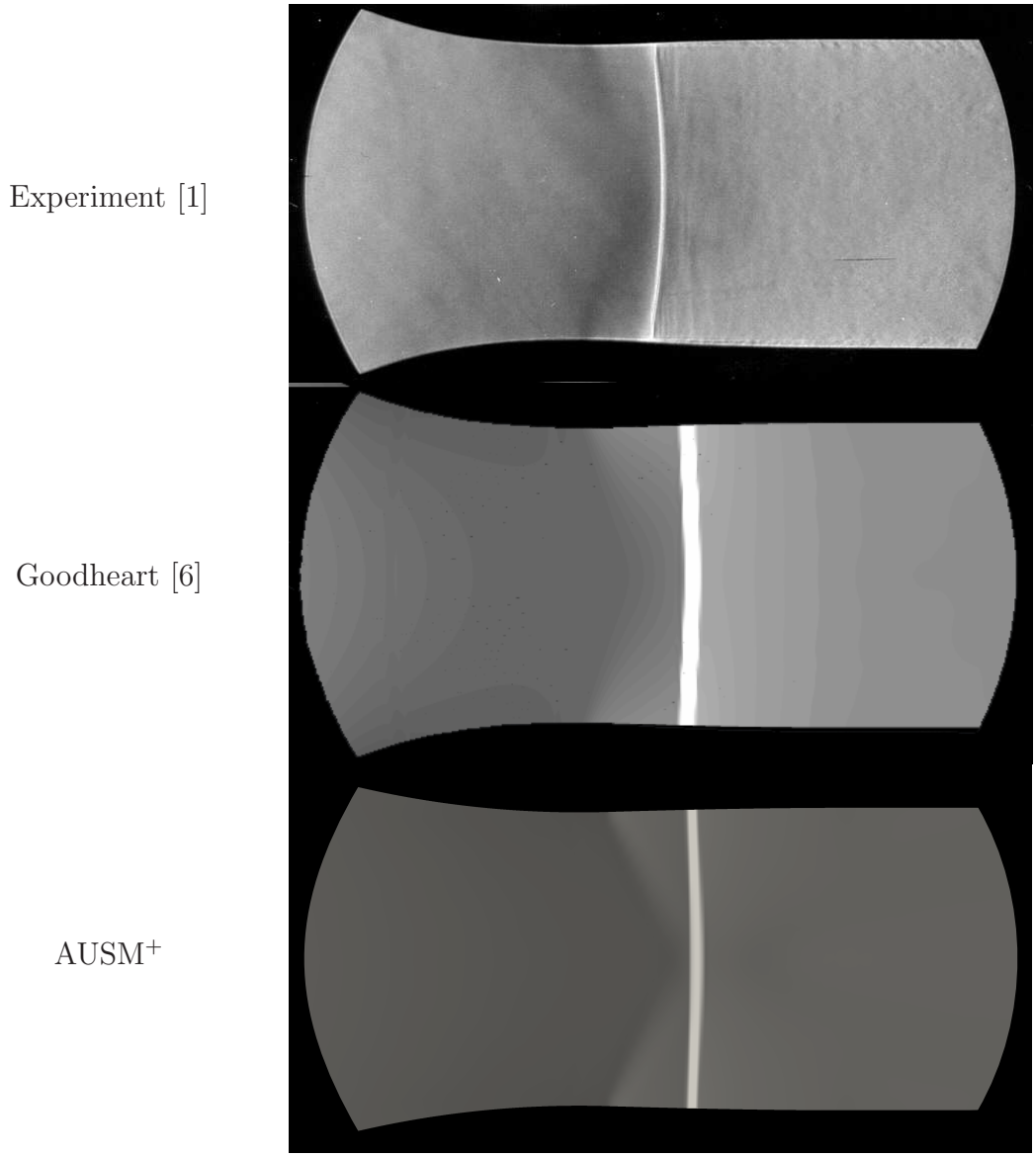
Obrázek 4.10: Porovnání výsledků nukleační rychlosti podél osy

Na dalších grafech 4.10-4.11 je zobrazeno srovnání v nukleační rychlosti a podílu kondenzátu se simulacemi jiných autorů. Maximum nukleační rychlosti je poněkud vyšší než v datech z jiných prací, což by mohlo způsobit viditelnou odchylku v podílu kondenzátu. Z grafu je patrný rychlejší vznik kapek a poté pomalejší růst, odchylka by stála za případné další zkoumání.

Stejně jako v předchozí úloze je zde provedeno ještě srovnání za pomoci šlírových obrázků 4.12. Na fotografii z experimentu je rázová vlna více zahnutá, což může být způsobeno interakcí s mezní vrstvou. Je zde mírně patrný také nárůst mezní vrstvy, což může být příčinou odchylek od nevazkých simulací.



Obrázek 4.11: Porovnání výsledků podílu kondenzátu podél osy



Obrázek 4.12: Porovnání numerických výsledků s experimentem pomocí šlírového obrázku při $\varphi_0 = 35.6\%$

4.3 Barschdorffova dýza - vodní pára

Vyvinutý program byl navržen tak, aby bylo možné jeho použití pomocí jednoduchého nastavení i pro simulaci čisté vodní páry. K ověření správnosti byl zvolen hojně používaný případ Barschdorffovy dýzy [2], jelikož jsou dostupné výsledky z experimentálního měření.

Pomocí nastavení $\chi_{max} = 1$ se rovnice (2.11) zredukuje na známý vztah

$$p = \frac{(\gamma_V - 1)(1-\chi)}{1+\chi(\gamma_V - 1)} \left[e - \frac{1}{2}\rho(u^2+v^2) + \rho\chi L \right], \tag{4.1}$$

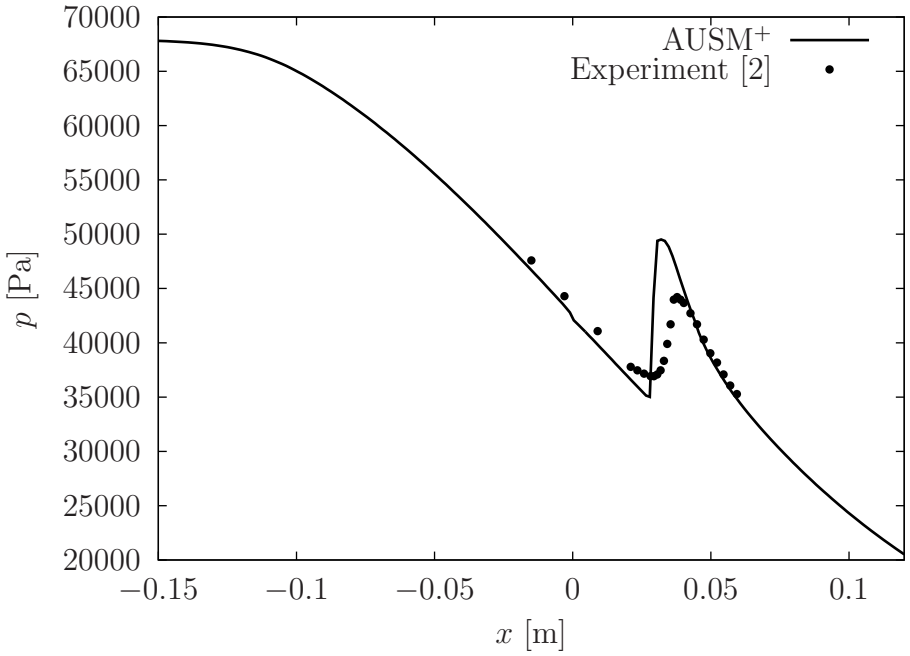
Pro tento případ nastavujeme klidové podmínky na $p_0 = 78390$ Pa a $T_0 = 373.15$ K. Pro příznivější výsledky je nutné provést korekci vztahu pro nukleační rychlost [7]

$$J = \frac{q_c}{1+\phi_{cor}} \frac{\rho_V^2}{\rho_L} \sqrt{\frac{2\sigma}{\pi m_V^3}} \exp\left(\frac{-16\pi}{3} \frac{\beta_{cor}\sigma^3}{m_V \rho_L^2 R_V^3 T^3 \ln^2(s)} \right), \tag{4.2}$$

$$\phi_{cor} = 2\frac{\gamma_V - 1}{\gamma_V + 1} \frac{L}{R_V T} \left(\frac{L}{R_V T} - \frac{1}{2} \right), \tag{4.3}$$

kde korekční koeficienty $\beta_{cor} = 1.328 p_{cor}^{0.3}$, $p_{cor} = 0.65$ volen odhadem podle Mollierova diagramu (vysvětlení v [7]), $q_c \approx 1$.

Graf 4.13 nám znázorňuje porovnání výsledku získaného takto upraveným programem s experimentem. Tlak před a za rázovou vlnou je v dobré shodě, průběh rázové vlny je pro nás dostatečně dobrým výsledkem.



Obrázek 4.13: Porovnání výsledků nukleační rychlosti podél osy

Kapitola 5

Závěr

Cílem mé práce bylo provést simulaci transsonického proudění vlhkého vzduchu s kondenzací v různých typech Lavalovy dýzy.

Úspěšně jsem naprogramoval a odladil výpočet pomocí metody konečných objemů na úlohách dvojrozměrného proudění v dýzách při použití AUSM$^+$ schématu. Výsledky po odladění uspokojivě odpovídají výsledkům z experimentů a simulací dalších autorů, kteří se zabývali touto problematikou.

Zmiňovaný program se dá také snadno použít pro simulaci proudění čisté vodní páry, jak bylo ověřeno na testovací úloze.

Veškeré výpočty jsem naprogramoval v jazyce C, z důvodu vysoké rychlosti výpočtů a snadné paralelizace.

V budoucnu by, kvůli ovlivnění proudění mezní vrstvou v určitých případech byl vhodný přechod především na simulaci vazkého proudění.

Literatura

[1] Adam, S.: *Numerische und experimentelle Untersuchung instationärer Düsenströmungen mit Energiezufuhr durch homogene Kondensation.* Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Universität Karlsruhe, 1996.

[2] Barschdorff, D.: *Verlauf der Zustandgrößen und gasdynamische Zuammenhänge der spontanen Kondensation reinen Wasserdampfes in Lavaldüsen.* Forsch. Ing.-Wes., Vol. 37, No. 5., 1971.

[3] Blazek, J.: *Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications.* Elsevier, 2001, ISBN 0-08-043009-0.

[4] Dobeš, J.: *Numerické řq ešení transsonického proudění v mříži pomocí upwind schématu na nestrukturovaných sítích.* Diplomová práce, Fakulta strojní ČVUT, Praha, 2000.

[5] Fořt, J., Kozel, K., Fürst, J., Halama, J., Dobeš, J.: *Numerická simulace proudění I.* Praha: Vydavatelství ČVUT, 2005, ISBN 80-01-03162-4.

[6] Goodheart, K. A.: *3-D Transonic Flow Dynamics with Nonequilibrium Condensation.* Dissertation, TU Munich, 2004.

[7] Halama, J., Fořt, J.: *Numerical simulation of two-phase flow in a low pressure steam turbine stage.* ENGINEERING MECHANICS, Paper 138, 2012.

[8] Heiler, M.: *Instationäre Phänomene in homogen/heterogen kondensierenden Düsen- und Turbinenströmungen.* Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Universität Karlsruhe, 1999.

[9] Hill, P. G.: *Condensation of Water Vapour during Supersonic Expansion in Nozzles.* Journal of Fluid Mechanics, Vol. 25, part 3, s. 593–620, 1966.

[10] Kelleners, P.: *Simulation of inviscid compressible multi-phase flow with condensation.* Annual Research Briefs 2003, Center for Turbulence Research, University of Twente, 2003.

[11] Kozel, K., Fürst, J.: *Numerické řešení problémů proudění I.* Praha: Vydavatelství ČVUT, 2001, ISBN 80-01-02384-2.

[12] Liou, M.-S.: *A Sequel to AUSM: AUSM$^+$.* Journal of Computational Physics, Vol. 129, s. 364-382, 1996.

[13] Liou, M.-S., Steffen, C. J.: *A New Flux Splitting Scheme.* Journal of Computational Physics, Vol. 107, s. 23-39, 1993.

[14] Nožička, J.: *Základy termomechaniky.* Praha: Vydavatelství ČVUT, 2001, ISBN 8001024091, 9788001024096.

[15] Put, F.: *Numerical Simulation of Condensation in Transonic Flows.* Dissertation, University of Twente, 2003, ISBN 90-365-1948-9.

[16] Schnerr, G. H.: *Homogene Kondensation in stationären transsonischen Strömungen durch Lavaldüsen und um Profile.* Habilitation, Fakultät für Maschinenbau, Universität Karlsruhe (TH), 1986.

[17] Wegener, P. P.: *Nonequilibrium Flows, Part 1.* Marcel Dekker, New York and London, 1969.