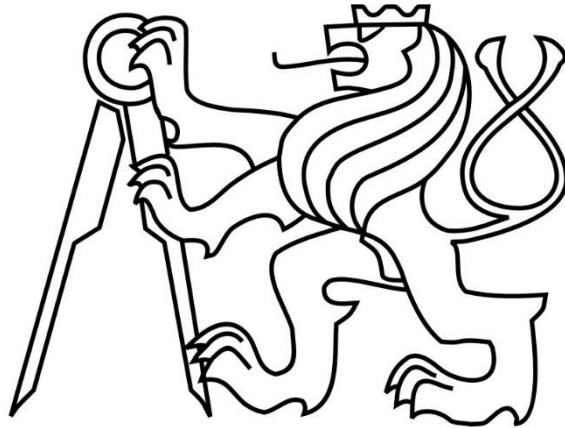


ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta strojní

Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky



BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Napěťová a deformační analýza lepených konstrukcí

2016

Jakub NOVÁK

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Novák** Jméno: **Jakub** Osobní číslo: **419932**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávající katedra/ústav: **Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**
Studijní program: **Teoretický základ strojního inženýrství**
Studijní obor: **bez oboru**

II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

Napětíová a deformační analýza lepených konstrukcí

Název bakalářské práce anglicky:

Stress and strain analysis of bonded structures

Pokyny pro vypracování:

- (1) Rešerše napětíové a deformační analýzy vrstvených laminátů, lepených spojů, porovnání jednotlivých přístupů.
- (2) Výpočtová a experimentální analýza tuhosti zadané vrstvené lepené konstrukce.
- (3) Porovnání výsledků, komentář.

Rozsah grafických prací: 15 stran Rozsah průvodní zprávy: 35 stran

Seznam doporučené literatury:

- (1) Laš, V. Mechanika kompozitních materiálů. 2. přeprac. vydání. Plzeň : ZČU, 2008 .200 s. ISBN 978-80-7043-689-9
- (2) Kollár, L. P. Mechanics of Composite Structures. 2nd ed. New York : Cambridge University Press, 2007. 480 s. ISBN 978-0-521-80165-2
- (3) Balkova, R. Testing of adhesives for bonding of polymer composites. International Journal of Adhesion & Adhesives, 2002, Vol. 22, Issue 3, p. 291-295. ISSN 0143-7496

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

Ing. Ctirad Novotný, Ph.D.

Jméno a pracoviště konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: **11.04.2016**

Termín odevzdání bakalářské práce: **12.08.2016**

Platnost zadání bakalářské práce: _____



Podpis vedoucí(ho) práce



Podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry



Podpis děkana(ky)

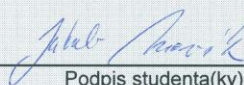
Neodevzdá-li student bakalářskou nebo diplomovou práci v určeném termínu, tuto skutečnost předem písemně zdůvodnil a omluva byla děkanem uznána, stanoví děkan studentovi náhradní termín odevzdání bakalářské nebo diplomové práce. Pokud se však student řádně neomluvil nebo omluva nebyla děkanem uznána, může si student zapsat bakalářskou nebo diplomovou práci podruhé

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

22.4.2016

Datum převzetí zadání



Podpis studenta(ky)

Anotační list

Jméno autora:	Jakub Novák
Název bakalářské práce:	Napěťová a deformační analýza lepených konstrukcí
Anglický název:	Stress and strain analysis of bonded structures
Akademický rok:	2015/2016
Studijní program:	Teoretický základ strojního inženýrství
Obor studia:	Bez oboru
Ústav/odbor:	Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky Odbor pružnosti a pevnosti
Vedoucí bakalářské práce:	Ing. Ctirad Novotný, Ph.D.
Bibliografické údaje:	Počet stran: 51 Počet obrázků: 36 Počet tabulek: 7
Klíčová slova:	Sendvič, laminát, kompozit, lepidlo, laminátová teorie, sendvičová teorie, smyk, průhyb, napětí, deformace
Keywords:	Sandwich, laminate, composite, glue, laminate theory, sandwich theory, shear, deflection, stress, strain
Abstrakt:	Tato práce se zabývá odvozením laminátové a sendvičové teorie a jejich aplikací na konkrétní lepenou sendvičovou konstrukci. Vypočtené průhyby dle jednotlivých teorií jsou porovnány s experimentálním měřením.
Abstract:	This thesis deals with deriving of laminate and sandwich theory and their application on specific bonded sandwich construction. Calculated deflection according to the theories are compared with experimental measurement.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně s využitím poskytnutých konzultací a literatury uvedené v příloženém seznamu.

V Praze dne:

.....

Poděkování

Chtěl bych poděkovat vedoucímu mé bakalářské práce, panu Ing. Ctiradu Novotnému, Ph.D. za odborné vedení, podnětné rady a cenné připomínky, které mi v průběhu vytváření této práce věnoval. Další poděkování patří panu Ing. Karlu Doubravovi, Ph.D. za pomoc při provedení experimentu.

Obsah

Seznam použitých veličin	6
Seznam obrázků	7
Seznam tabulek	8
1. Úvod	9
2. Cíle práce	10
3. Kompozitní materiály	11
3.1. Rozdělení kompozitů	11
4. Lepené spoje	13
4.1. Rozdělení lepidel	13
5. Odvození teorií pro výpočet napětí a průhybu vrstvených desek	15
5.1. Základní vztahy	15
5.1.1. Prostorová napjatost	15
5.1.2. Hookeův zákon	18
5.1.3. Anizotropie materiálu	19
5.2. Laminátová teorie	21
5.2.1. Laminátová teorie bez uvažování smyku	21
5.2.2. Laminátová teorie s uvažováním smykových účinků	25
5.2.3. Způsoby skládání laminátů	27
5.3. Sendvičová teorie	28
5.3.1. Sendvičová teorie s uvažováním smyku	29
5.3.2. Sendvičová teorie bez uvažování smyku	33
6. Sendvičový nosník pro experiment a analytický výpočet	34
7. Experimentální test zadané konstrukce	37
7.1. Měření č. 1	38
7.2. Měření č. 2	40
7.3. Měření č. 3	41
8. Analytický výpočet zadané konstrukce	43
9. Porovnání výsledků	49
10. Závěr	50
Literatura	51

Seznam použitých veličin

Označení	Jednotka	Název
σ	$\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$	tenzor napětí
T_σ	1	transformační matice pro napětí
ε	1	tenzor deformace
T_ε	1	transformační matice pro deformace
C	$\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$	matice tuhosti
S	$\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$	matice poddajnosti
$\gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$	1	příčné zkoso
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$	$\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$	normálové složky napětí
$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$	1	deformace ve směru osy x, y, z
u, v, w	m	posunutí ve směru x, y, z
ψ_x, ψ_y	°	sklon střední roviny laminátu ve směru x, y
ε_m^o	1	vektor deformace střední plochy
Q	$\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$	matice mimoosové tuhosti
N	$\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$	matice výslednic sil vztažených na jednotku délky
M	N	matice momentů vztažených sil na jednotku délky
h_i	m	tloušťka i-té vrstvy laminátu
A	$\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$	matice tahové tuhosti
B	$\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$	matice vazební tuhosti
D	$\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$	matice ohybové tuhosti
k	1	vektor křivostí střední plochy
T_x, T_y	N	vnější smykové síly
F	$\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$	matice smykové tuhosti

Seznam obrázků

<i>Obr. 1: Sendvičová konstrukce</i>	12
<i>Obr. 2: Napětí při prostorové napjatosti</i>	15
<i>Obr. 3: Pootočení souřadného systému o úhel θ</i>	17
<i>Obr. 4: Zobrazení izotropní roviny 23 ve vrstvě vláknového kompozitu</i>	20
<i>Obr. 5: Řez laminátu v rovině xz [1]</i>	21
<i>Obr. 6: Obecný n-vrstvý laminát [1]</i>	23
<i>Obr. 7: Řez laminátu v rovině xz s uvažováním smykových účinků [1]</i>	25
<i>Obr. 8: Řez sendvičové konstrukce v rovině xz s uvažováním smykových účinků [1]</i>	29
<i>Obr. 9: Sendvičové nosníky pro experiment</i>	34
<i>Obr. 10: Konfigurace zkoušky lepidla [8]</i>	35
<i>Obr. 11: Záznam tahové zkoušky lepidla SikaForce - 7710L35 [8]</i>	35
<i>Obr. 12: Zatěžovací stroj FPZ100/1</i>	37
<i>Obr. 13: Planžetový průhyboměr</i>	37
<i>Obr. 14: Konfigurace měření č.1</i>	38
<i>Obr. 15: Vmáčknutí zatěžovacího prvku do nosníku</i>	38
<i>Obr. 16: Graf závislosti průhybu na zátěžné síle ($l=600$ mm, bez podložek)</i>	39
<i>Obr. 17: Graf závislosti deformace na zátěžné síle ($l=600$ mm, bez podložek)</i>	39
<i>Obr. 18: Konfigurace měření č. 2</i>	40
<i>Obr. 19: Graf závislosti průhybu na zátěžné síle ($l=600$ mm, s podložkami)</i>	40
<i>Obr. 20: Graf závislosti deformace na zátěžné síle ($l=600$ mm, s podložkami)</i>	41
<i>Obr. 21: Konfigurace měření č.3</i>	41
<i>Obr. 22: Graf závislosti průhybu na zátěžné síle ($l=300$ mm, s podložkami)</i>	42
<i>Obr. 23: Graf závislosti deformace na zátěžné síle ($l=300$ mm, s podložkami)</i>	42
<i>Obr. 24: Sendvič o třech vrstvách ($l=600$ mm) – konfigurace 1</i>	43
<i>Obr. 25: Průběh napětí σ_{xx} podle sendvičové teorie pro konfiguraci 1</i>	44
<i>Obr. 26: Průběh napětí σ_{xx} podle laminátové teorie pro konfiguraci 1</i>	44
<i>Obr. 27: Sendvič o pěti vrstvách ($l=600$ mm) – konfigurace 2</i>	45
<i>Obr. 28: Průběh napětí σ_{xx} podle laminátové teorie pro konfiguraci 2</i>	45
<i>Obr. 29: Průběh napětí σ_{xx} podle sendvičové teorie pro konfiguraci 2</i>	46
<i>Obr. 30: Sendvič o třech vrstvách ($l=300$ mm) – konfigurace 3</i>	46
<i>Obr. 31: Průběh napětí σ_{xx} podle laminátové teorie pro konfiguraci 3</i>	47
<i>Obr. 32: Průběh napětí σ_{xx} podle sendvičové teorie pro konfiguraci 3</i>	47
<i>Obr. 33: Sendvič o pěti vrstvách ($l=300$ mm) – konfigurace 4</i>	47
<i>Obr. 34: Průběh napětí σ_{xx} podle sendvičové teorie pro konfiguraci 4</i>	48
<i>Obr. 35: Průběh napětí σ_{xx} podle laminátové teorie pro konfiguraci 4</i>	48
<i>Obr. 36: Graf závislosti rozdílu průhybů na vzdálenosti podpor</i>	49

Seznam tabulek

<i>Tab. 1: Vliv uspořádání lamin na matice A, B a D [4]</i>	28
<i>Tab. 2: Hodnoty ze zkoušky lepidla pro stanovení G</i>	36
<i>Tab. 3: Průhyby sendviče o třech vrstvách - konfigurace 1</i>	44
<i>Tab. 4: Průhyby sendviče o pěti vrstvách – konfigurace 2</i>	45
<i>Tab. 5: Průhyby sendviče o třech vrstvách – konfigurace 3</i>	46
<i>Tab. 6: Průhyby sendviče o pěti vrstvách – konfigurace 4</i>	48
<i>Tab. 7: Napětí σ_{xx} spodního potahu pro $F = 800\text{ N}$</i>	49

1. Úvod

Mimořádné vlastnosti kompozitních materiálů, zejména nízká hmotnost při vysoké pevnosti a tuhosti, způsobily jejich velký rozmach napříč všemi odvětvími průmyslu. Téměř každý moderní dopravní prostředek má karoserii z kompozitního materiálu. Snižuje se tím hmotnost, což má za následek nižší spotřebu a lepší jízdní vlastnosti. Možnost složení kompozitu (materiál, orientace vláken, počet vrstev) podle požadovaných vlastností umožňuje jejich maximální využití z hlediska zatěžování a životnosti ve všech konkrétních aplikacích.

Jako nejvhodnější způsob spojení různých konstrukčních materiálů v rámci kompozitní konstrukce se jeví lepení. Jako jedna z mála metod je vhodná ke spojování plastů, které jsou v kompozitních konstrukcích zastoupeny ve velké míře. Při lepení nedochází k mechanickému, ani výraznému tepelnému zásahu do spojovaných materiálů, jako například u svařování.

2. Cíle práce

Pro návrh vrstvených konstrukcí existují teorie o určitých předpokladech. V této práci jsou tyto metody shrnuty a zjišťuje se, zda jsou zjednodušující předpoklady, které jsou součástí teorií, přijatelné pro analýzu konkrétní lepené sendvičové konstrukce. Metody a jejich zjednodušení jsou v práci aplikovány na různé konfigurace lepených sendvičů, kde hodnoty průhybů udávají, zdali je nutné uvažovat při výpočtu lepené sendvičové konstrukce vliv tuhosti vrstev lepidla, a dále jestli je nezbytné do výpočtu zahrnout smykové deformace. Tyto poznatky bude možno využít při procesu dimenzování či pevnostní kontrole.

K dosažení těchto poznatků byly stanoveny cíle práce takto:

- řešení napěťové a deformační analýzy vrstvených laminátů
- výpočtová a experimentální analýza zadané vrstvené lepené konstrukce
- porovnání výsledků, komentář

3. Kompozitní materiály

Kompozitní materiály nebo zkráceně kompozity jsou materiály složené kombinací dvou či více materiálů s odlišnými chemickými a mechanickými vlastnostmi, které dohromady vytvoří nový materiál s vlastnostmi, které nemá samostatně ani jedna z jeho složek. Tento princip dává možnost vytvářet kompozit s volitelnými vlastnostmi s ohledem na pracovní zatěžování. Kompozit se většinou rozděluje na výztuhy (nebo také plnivo či disperze) a matrice (pojivo).

Výztuhy ve formě vláken, koulí, krychlí nebo jiných tvarů dodávají kompozitu požadovanou pevnost a tuhost. Pro výztuhy se užívá široká řada materiálů jako kovy a jejich slitiny, sklo, uhlík, aramid nebo také bor či křemík.

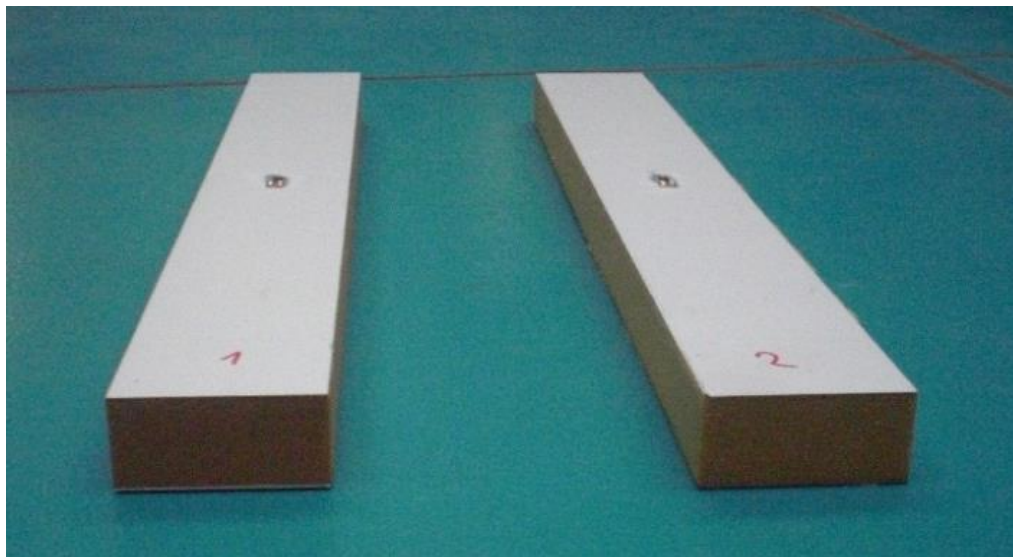
Výztuhy jsou uloženy v matrici, která dává kompozitu výsledný tvar, chrání výztuhy před opotřebením a dodává kompozitu houževnatost. Podle [5] se jako materiály pro matrice používají většinou polymery, minerály nebo kovy. Z polymerů se nejčastěji používají termoplasty a reaktoplasty. Mezi termoplasty se řadí polypropylen (PP), polyamid (PA) nebo polyphenylsulfid (PPS). Matrice z reaktoplastu se nazývají pryskyřice a mají složení na bázi epoxidu, formaldehydu či polyesteru. Z minerálů se na výrobu matric používá křemík, karbidy, uhlík. Z kovů se využívá slitin hliníku a titanu.

3.1. Rozdělení kompozitů

Kompozity se dají rozdělit podle různých kritérií jako tvar a typ výztuže, druhy matrice nebo technologie výroby. Následující rozdělení je převzato z [3]:

- kompozity částicové (výztuž nemá dominantní rozměr)
- kompozity vláknové
 - jednovrstvé
 - dlouhovláknové ($l/d > 100$)
 - s jednosměrným vyztužením
 - s vícesměrným vyztužením
 - krátkovláknové
 - s nahodilou orientací vláken
 - s přednostní orientací vláken
 - vícevrstvé
 - lamináty (vrstvy ze stejných materiálů s jinou orientací vláken)
 - hybridní lamináty nebo také hybridy (vrstvy z různých materiálů)

V této práci se bude řešit sendvičová konstrukce, což je speciální typ hybridního laminátu. Sendvičový materiál je složen z potahů často z vláknových kompozitů, které mají dobré vlastnosti v tahu a jádra většinou z vytvrzené pěny, které má dobré vlastnosti v tlaku a ohybu.



Obr. 1: Sendvičová konstrukce

4. Lepené spoje

Lepení je proces trvalého spojení materiálů za pomoci lepidel. Jak uvádí [6] mezi spojovaným materiálem a lepidlem vznikají adhezní síly, které závisí na vlastnostech povrchu spojovaných materiálů, složení lepidla, parametrech okolního prostředí nebo také na velikosti plochy spoje. Adhezní síly udávají výslednou kvalitu spoje.

Adhezní síly se podle [6] dělí na:

- mechanické (pórovitost a nerovnosti na povrchu spojovaných materiálů)
- specifické
 - chemické (primární chemické vazby)
 - fyzikální (van der Waalsovy síly, elektrostatické síly, difuzní síly, valenční adhezní síly)

4.1. Rozdělení lepidel

Lepidla se dají klasifikovat dle mechanismu vytvrzení, složení nebo účelu použití (lepení dřeva, kovu, plastu, kompozitu apod.) nebo počtu složek.

Podle mechanismu vytvrzení se lepidla se dle [6] a [7] dělí na:

- fyzikálně tuhnoucí (vsáknutí či odpaření rozpouštědel)
 - rozpouštědlová roztoková
 - rozpouštědlová disperzní
 - tavná
- tuhnoucí chemickou reakcí
 - vlivem vlhkosti prostředí
 - přidáním tvrdidla
 - zvýšením teploty

Podle chemického složení se lepidla dělí, jak uvádí [6] :

- lepidla na přírodní bázi
 - anorganická a minerální (asfaltová, silikátová, keramická, metalická)
 - organická (glutinová, škrobová, kaseinová)
- syntetická lepidla
 - epoxidová
 - polyuretanová
 - akrylátová
 - silikony

V této práci byly potahy přilepeny k jádru lepidlem SikaForce 7710 L35 od firmy Sika. Jak uvádí [8], jedná se dvousložkové polyuretanové lepidlo určeno speciálně pro lepení sendvičových konstrukcí.

5. Odvození teorií pro výpočet napětí a průhybu vrstvených desek

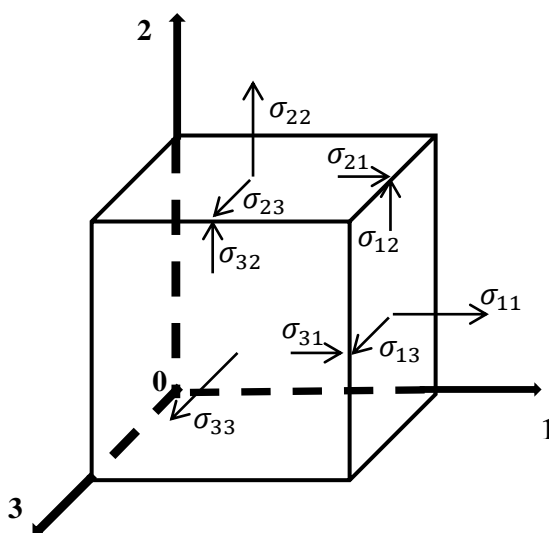
Pro výpočet sendvičových konstrukcí existuje několik teorií. V laminátové teorii se daná sendvičová konstrukce bere jako vícevrstvý laminát. Jedná se o obecnější postup, který se dá použít pro většinou kompozitních konstrukcí. Sendvičová teorie je v podstatě zjednodušená laminátová teorie, která se aplikuje pro výpočet pouze sendvičových konstrukcí.

5.1. Základní vztahy

Následující vztahy jsou nezbytné pro odvození laminátových i sendvičových teorií. Jako odezva na vnější zatížení poddajného tělesa vznikají v tělese vnitřní účinky. Napětí lze definovat jako intenzitu vnitřní síly. Všechny následující výpočty, stejně jako Hookeův zákon, platí v oblasti lineární pružnosti. Velkou výhodou kompozitu je, že se dají vlastnosti ovlivňovat uspořádáním vláken nebo orientací lamin. Každý typ uspořádání má odlišný postup výpočtu. Zásadní rozdíl je ve složení matice tuhosti resp. matice poddajnosti.

5.1.1. Prostorová napjatost

Při mechanickém zatěžování vzniká v tělese napjatost. Podle typu zatěžování je rozdělena na jednoosou, dvouosou a trojosou napjatost.



Obr. 2: Napětí při prostorové napjatosti

Napjatost je v pravouhlém souřadném systému $0(1,2,3)$ popsána tenzorem napětí, který má tvar

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

kde prvky na diagonále představují normálová napětí a prvky mimo diagonálu reprezentují napětí smyková.

V každém bodě namáhaného tělesa existují hlavní roviny. Jde o takové roviny, ve kterých jsou smyková napětí nulová. Působí v nich pouze normálové složky napětí, které se nazývají hlavní napětí. Tenzor napětí se v tomto případě zredukuje do tvaru

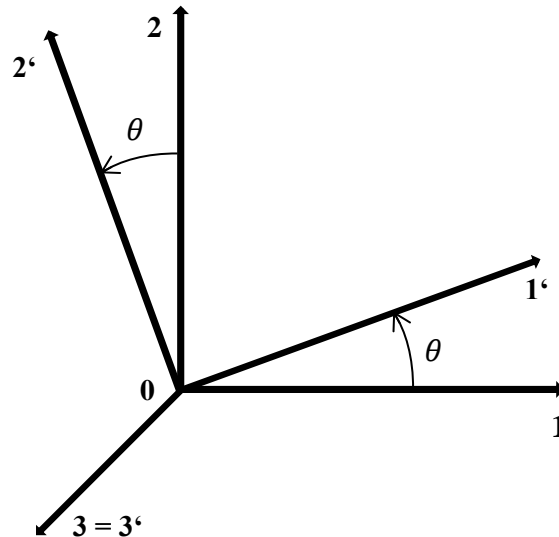
$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Z platnosti zákona o sdružených napětích plyne, že

$$\sigma_{12} = \sigma_{21}, \quad \sigma_{13} = \sigma_{31}, \quad \sigma_{23} = \sigma_{32}, \quad (3)$$

tudíž tenzor napětí bude symetrický a bude obsahovat jen 6 nezávislých parametrů. Někdy je výhodné zapisovat složky napětí vektorem

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}. \quad (4)$$



Obr. 3: Pootočení souřadného systému o úhel θ

V mnoha případech se osa symetrie materiálu neshoduje s osou zatížení. Vektor napětí lze pro výhodnost přetrafovat z jednoho souřadného systému do jiného pomocí tzv. transformační matice neboli matice směrových kosinů T_σ . Vztah pro transformaci souřadného systému $0(1, 2, 3)$ do systému $0(1', 2', 3')$ o úhel θ bude.

$$\sigma' = T_\sigma \sigma, \quad (5)$$

kde T_σ bude

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & 0 & 0 & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 0 & 0 & -2\sin\theta\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix}. \quad (6)$$

V tělese při zatěžování vzniká nejen napjatost, ale také deformace. Deformace lze, s využitím analogie s napětím, sestavit do tenzoru deformace

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

po aplikaci zákona o sdružených deformacích je možno zapsat složky deformací do vektoru deformace

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

kde γ jsou příslušné zksoy.

Vektor deformace v pootočeném systému $\boldsymbol{\varepsilon}'$ se vyjádří obdobně jako napětí pomocí vztahu

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \mathbf{T}_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (9)$$

kde \mathbf{T}_ε je transformační matice pro vektor deformace, která je identická s \mathbf{T}_σ .

5.1.2. Hookeův zákon

Hookeův zákon definuje vztah mezi napětím a deformací vznikajících v namáhaném tělese v oblasti lineárního elastického chování materiálů. Při jednoosé napjatosti bude Hookeův zákon rovnicí přímky. Ta má sklon podle vlastností materiálu namáhané konstrukce. Pro obecnou napjatost má zákon tvar

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

který lze zapsat jako

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (11)$$

kde \mathbf{C} je matice tuhosti, ve které $C_{ij} = C_{ji}$, pro $i \neq j$. Matice je tím pádem symetrická a obsahuje jen 21 nezávislých prvků. Pro výpočet deformace se využívá vztah

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{S} \boldsymbol{\sigma} , \quad (12)$$

kde \boldsymbol{S} matice poddajnosti. Z těchto dvou vztahů plyne, že

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{S}^{-1} . \quad (13)$$

5.1.3. Anizotropie materiálu

Anizotropie popisuje vlastnosti v daném směru v závislosti na uspořádání materiálů. Uspořádáním kompozitní konstrukce se dají tyto vlastnosti měnit. Při výpočtu se uspořádání konstrukce projeví v matici tuhosti resp. poddajnosti. Rozlišuje se několik druhů uspořádání.

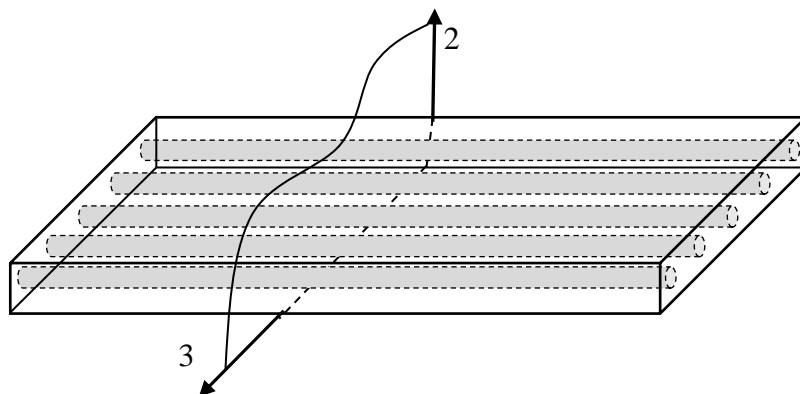
Obecný anizotropní materiál je typický tím, že nemá žádnou rovinu symetrie materiálových vlastností. Matice tuhosti zůstává ve stejném tvaru, jako je v rovnici (10). Ať už je obecný anizotropní materiál namáhán pouze normálovým napětím nebo pouze smykovým napětím, tak podle [3] dojde v obou případech ke změně rozměrů i tvaru, tedy $\varepsilon \neq 0$ a $\gamma \neq 0$.

Ortotropní materiál má tu vlastnost, že má tři materiálové osy symetrie. V případě, že jsou polohy rovin symetrie elastických vlastností dány osami souřadného systému 0(1,2,3) se matice tuhosti se v tomto případě zredukuje do tvaru

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{32} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} . \quad (14)$$

Jelikož stále platí symetrie, bude mít tato matice pouze 6 nezávislých parametrů. Jak uvádí [3], při namáhání takového materiálu dochází pouze normálovým napětím jen ke změně rozměrů ($\varepsilon \neq 0$ a $\gamma = 0$). Naopak při zatěžování pouze smykovým napětím dojde jen ke zkosu ale nikoliv k deformaci ($\gamma \neq 0$ a $\varepsilon = 0$).

Většina vláknových kompozitů patří mezi *příčně izotropní* materiály. Ty mají jednu izotropní rovinu, která bývá ve směru kolmém na vlákna. V této rovině jsou materiálové vlastnosti stejné. Z tohoto důvodu bývají vláknové kompozity definovány elastickými konstantami ve směru vláken a ve směru kolmém na vlákna. Pro případ zatěžování v jiném směru se musí matice tuhosti vhodně přepočítat. Takto přepočítaná matice se nazývá matice mimoosové tuhosti a značí se Q . Její odvození je obsaženo v [1], ale tato práce se jím nebude zabývat.



Obr. 4: Zobrazení izotropní roviny 23 ve vrstvě vláknového kompozitu

Matice tuhosti při konfiguraci na obr.4 má tvar

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{32} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22}-C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Izotropní materiál se vyznačuje stejnými vlastnostmi ve všech rovinách materiálové symetrie. V takovém případě bude mít matice tuhosti pouze 2 nezávislé členy.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

5.2. Laminátová teorie

Analytický výpočet kompozitů se provádí pomocí laminátové teorie. Podle [1] se při výpočtu laminátů s poměrem šířky k tloušťce větším než 10 dají získat poměrně přesné výsledky využitím laminátové teorie bez uvažování příčných deformací, která je na výpočet jednodušší než laminátová teorie s uvažováním příčných smykových deformací, kterou je vhodné použít při výpočtu tlusté desky, která má poměr šířky k tloušťce menší než 10.

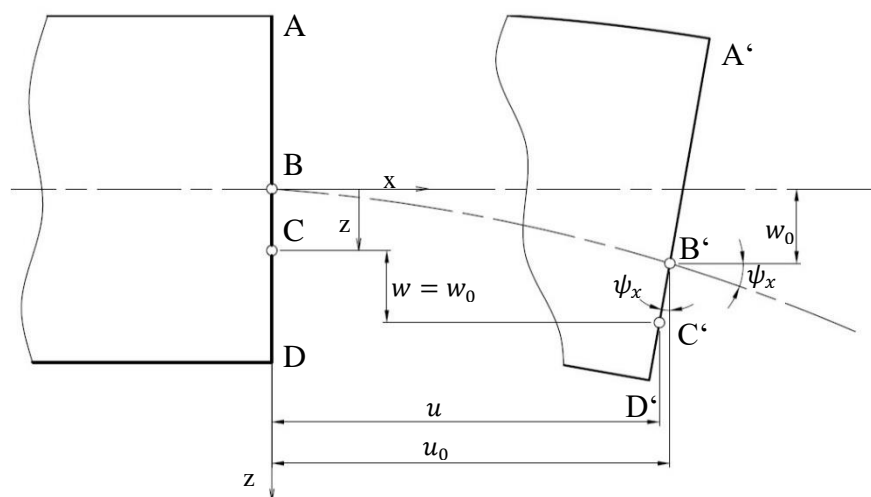
5.2.1. Laminátová teorie bez uvažování smyku

Pro odvození následujících vztahů převzatých z [1] je nutné definovat několik předpokladů. Jsou založeny na Kirchhoffově hypotéze. Souřadný systém je $0(x,y,z)$.

- všechny laminy jsou kvazihomogenní
- tloušťka laminy je řádově menší než ostatní její rozměry → rovinná napjatost

$$\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$$

- posunutí jsou malá
- laminy jsou spojeny ideálním spojem → spojitá deformace
- příčné posunutí se mění lineárně
- normálová vzdálenost od střední roviny zůstává konstantní → $\varepsilon_{zz} \cong 0$
- lineární závislost mezi napětím a deformacemi
- všechny vrstvy jsou uvažovány jako izotropní



Obr. 5: Řez laminátu v rovině xz [1]

Vlivem deformace vznikají v bodě B posuvy u_0 , v_0 , w_0 . Pro posuv bodu C platí

$$\begin{aligned}
u &= u_0 - z\psi_x \\
v &= v_0 - z\psi_y \\
w &= w_0,
\end{aligned}
\tag{17}$$

kde ψ je sklon střední roviny laminátu ve směru příslušné osy

$$\psi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad \psi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y}.
\tag{18}$$

Po derivaci posuvů dostaneme Cauchyho vztahy

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y},
\end{aligned}
\tag{19}$$

kteřé můžeme přepsat do maticového tvaru

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix} - z \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^o \\ \varepsilon_{yy}^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}
\tag{20}$$

nebo zkráceně

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \boldsymbol{\varepsilon}_m^o + z\mathbf{k},
\tag{21}$$

kde $\boldsymbol{\varepsilon}_m^o$ jsou deformace střední plochy a \mathbf{k} jsou křivosti desky. Po dosazení do vztahu $\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{Q} \boldsymbol{\varepsilon}'$ dostane vzorec pro výpočet napětí v k-té vrstvě

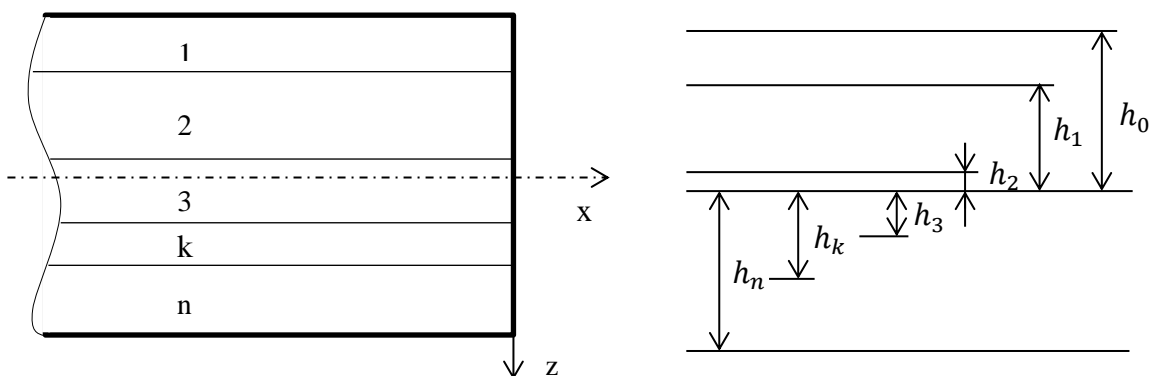
$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^o \\ \varepsilon_{yy}^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix},
\tag{22}$$

kde \mathbf{Q} je matice mimoosové tuhosti.

Pro propojení vnějšího zatěžování a deformací laminátu se používá ekvivalentní systém sil $N [Nm^{-1}]$ (síla na jednotku délky) a momentů $M [N]$ (moment na jednotku délky) působící na příčný průřez v k-té vrstvě ($h_k \div h_{k-1}$). Pro získání celkových výslednic je nutno sečíst účinky ve všech vrstvách.

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz \quad (23)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} z dz$$



Obr. 6: Obecný n-vrstvý laminát [1]

Po spojení výrazů (20), (21) a (22) vznikne konstitutivní vztah pro výpočet měrných sil a momentů namáhaného obecného n-vrstvého laminátu, které můžeme sloučit do jedné maticové rovnice

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^o \\ \varepsilon_{yy}^o \\ \gamma_{xy}^o \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}, \quad (24)$$

kde jednotlivé prvky matice jsou dány vztahy

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k (h_k - h_{k-1}), \quad (25)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k (h_k^2 - h_{k-1}^2),$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k (h_k^3 - h_{k-1}^3).$$

Výraz lze také zapsat ve zkráceném tvaru

$$\begin{bmatrix} N \\ \dots \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \dots & B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B & \dots & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m^o \\ \dots \\ \mathbf{k} \end{bmatrix}, \quad (26)$$

kde \mathbf{A} je matice tahové tuhosti, \mathbf{B} je matice vazební tuhosti a \mathbf{D} je matice ohybové tuhosti. Tento zápis se využívá pro výpočet měrných sil a momentů \mathbf{N} a \mathbf{M} při znalosti vektoru deformace ve střední rovině $\boldsymbol{\varepsilon}_m^o$ a křivosti \mathbf{k} . Ve značném množství případů je cílem stanovit $\boldsymbol{\varepsilon}_m^o$ a \mathbf{k} , pro známé hodnoty \mathbf{N} a \mathbf{M} . Výraz (26) je proto nutno invertovat.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m^o \\ \dots \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} & \dots & \bar{\mathbf{B}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\mathbf{B}} & \dots & \bar{\mathbf{D}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ \dots \\ M \end{bmatrix}, \quad (27)$$

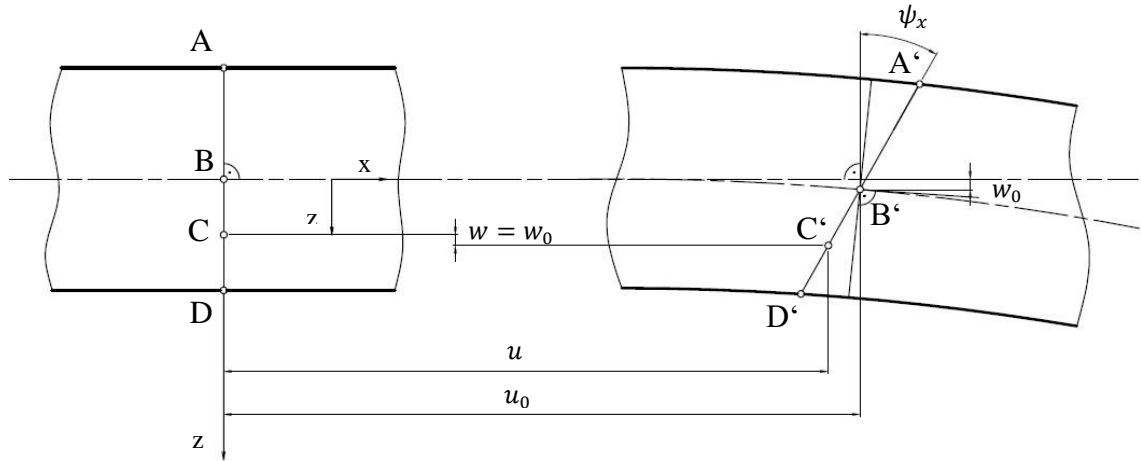
kde

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}} &= \mathbf{A}^* + \mathbf{B}^* \mathbf{D}^{-1} \mathbf{B}^{*T} \\ \bar{\mathbf{B}} &= \mathbf{B}^* \mathbf{D}^{*-1} \\ \bar{\mathbf{D}} &= \mathbf{D}^{*-1} \\ \mathbf{A}^* &= \mathbf{A}^{-1} \\ \mathbf{B}^* &= \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \\ \mathbf{C}^* &= \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} = -\mathbf{B}^{*T} \\ \mathbf{D}^* &= \mathbf{D} - \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (28)$$

Matice $\bar{\mathbf{A}}$ je matice tahové poddajnosti, $\bar{\mathbf{B}}$ je matice vazební poddajnosti a $\bar{\mathbf{D}}$ je matice ohybové poddajnosti.

5.2.2. Laminátová teorie s uvažováním smykových účinků

Při uvažování smykových je nutno zavést předpoklady stejné jako u laminátové teorie bez smykových (3.2.1) s tím, že nyní dojde při zatížení desky k natočení úsečky AD tak, že již není totožná se střední rovinou desky ($\varepsilon_{zz} \neq 0$).



Obr. 7: Řez laminátu v rovině xz s uvažováním smykových účinků

Z geometrie je dáno

$$\begin{aligned} u &= u_0 - z\psi_x \\ v &= v_0 - z\psi_y \\ w &= w_0, \end{aligned} \quad (29)$$

kde u_0 , v_0 a w_0 jsou posuvy střední roviny desky a ψ_x a ψ_y jsou úhly natočení kolmice ke střední rovině příslušné osy. Derivací lze obdobně jako u laminátové teorie bez smykových účinků získat Cauchyho vztahy, které nyní budou rozsáhlejší z důvodu uvažování smykových účinků

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial \psi_y}{\partial y}, \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0, \\ \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (30)$$

$$\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial y} - \psi_y,$$

$$\gamma_{zx} = 2\varepsilon_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial x} - \psi_x.$$

Toto pole deformací lze zapsat v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} - \psi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} - \psi_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 - z \mathbf{k}_x \\ \varepsilon_{yy}^0 - z \mathbf{k}_y \\ \gamma_{xy}^0 - z \mathbf{k}_{xy} \\ \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{zx}^0 \end{bmatrix}, \quad (31)$$

kde \mathbf{k}_x , \mathbf{k}_y a \mathbf{k}_{xy} jsou modifikované křivosti, γ_{yz}^0 a γ_{zx}^0 jsou zkosení na střední ploše, které jsou nezávislé na souřadnici z . Platí tedy

$$\gamma_{yz} = \gamma_{yz}^0, \quad \gamma_{zx} = \gamma_{zx}^0 \quad (32)$$

Nyní již je možno napsat vztah pro napětí k -té vrstvy, který má tvar

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} & 0 & 0 \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{54} & C'_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{zx}^0 \end{bmatrix}, \quad (33)$$

kde prvky C'_{ij} vzniknou transformací matice tuhosti při pootočení souřadného systému.

$$\begin{aligned} C'_{44} &= C_{44} \cos^2 \theta + C_{55} \sin^2 \theta \\ C'_{45} &= C'_{54} = (C_{55} - C_{44}) \sin \theta \cos \theta \\ C'_{55} &= C_{44} \sin^2 \theta + C_{55} \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (34)$$

Je vidět, že se jedná o laminátovou teorii bez uvažování smykových účinků rozšířenou o dva řádky vzniklé při uvažování příčných smykových deformací, které jsou

$$\begin{bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} C'_{44} & C'_{45} \\ C'_{54} & C'_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^o \\ \gamma_{zx}^o \end{bmatrix}. \quad (35)$$

Analogicky lze ze vztahu (22) vyvodit vzorec pro výpočet vnějších sil T_y a T_x , které způsobují smyk

$$\begin{bmatrix} T_y \\ T_x \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix} dz \quad (36)$$

již je možno přepsat vztah (36) do tvaru

$$\begin{bmatrix} T_y \\ T_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{44} & F_{45} \\ F_{54} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^o \\ \gamma_{zx}^o \end{bmatrix}, \quad (37)$$

kde

$$F_{ij} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) (C'_{ij}) \quad \text{pro } i, j = \{4, 5\} \quad (38)$$

Konstitutivní rovnice pro výpočet vnějších sil pro dané materiálové hodnoty a deformace je

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ T_y \\ T_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{44} & F_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{54} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^o \\ \varepsilon_{yy}^o \\ \gamma_{xy}^o \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \\ \gamma_{yz}^o \\ \gamma_{zx}^o \end{bmatrix}. \quad (39)$$

5.2.3. Způsoby skládání laminátů

Anizotropie materiál má i pro výpočet podle laminátové teorie zásadní vliv. Vhodným uspořádáním je možno prvky matic \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{D} zredukovat a odstranit vazbu mezi

určitými typy zatěžování. Různé způsoby jsou zobrazeny v Tab. 1. Tyto způsoby se dají kombinovat.

Tab. 1: Vliv uspořádání lamin na matice A , B a D [4]

A	B	D
Symetrický laminát		
$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix}$
Žádná vazba mezi tahem a krutem		
Vyvážený laminát		
$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}$
Žádná vazba mezi tahem a smykem		
Ortotropní laminát		
$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}$
Žádná vazba mezi tahem a smykem, mezi ohybem a krutem, mezi tahem a krutem		
Izotropní laminát		
$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A_{11} - A_{12}}{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{B_{11} - B_{12}}{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{D_{11} - D_{12}}{2} \end{bmatrix}$
Žádná vazba mezi tahem a smykem, mezi ohybem a krutem, mezi tahem a krutem		

5.3. Sendvičová teorie

Sendvičová teorie je určitým zjednodušením laminátové teorie. Aplikuje se na výpočet sendvičových konstrukcí. Výpočet lze obdobně jako pro laminátovou teorii provést s uvažováním a bez uvažování smykových účinků. Sendvičová konstrukce je specifický druh kompozitu, který se skládá z potahů a matrice. Potahy bývají

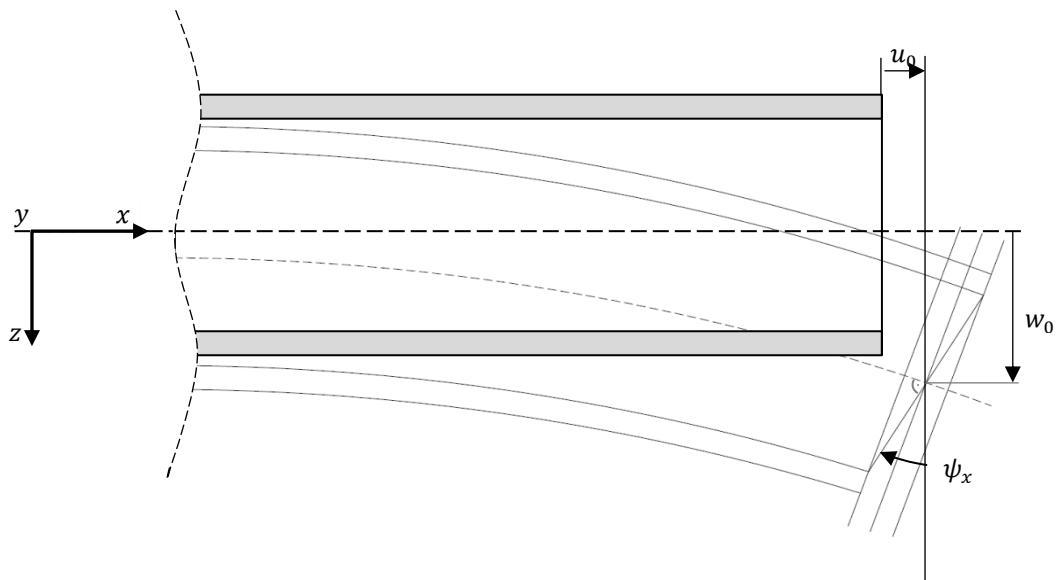
z vláknových kompozitů, mají vysokou pevnost v tahu a jsou určeny k přenášení smykových napětí. Matrice bývá z vytvrzené pěny, má dobré vlastnosti v tahu a slouží k přenášení osových sil způsobených většinou ohybem.

5.3.1. Sendvičová teorie s uvažováním smyku

Vztahy pro dolní potah jsou v následujícím odvození označeny indexem 1, pro horní potah indexem 2 a jádro je označeno c.

Pro odvození je nutné zavést předpoklady uvedené v [1]:

- výpočet platí v oblasti Hookeova zákona
- deformace jsou malé
- $h \gg h_1, h_2$
- posunutí potahů u a v jsou konstantní po celé jejich tloušťce
- $\varepsilon_{zz} = 0$ příčné posunutí w je nezávislé na souřadnici z
- jádro přenáší pouze smyková napětí σ_{yz}^c a $\sigma_{zx}^c \rightarrow \sigma_{xx}^c = \sigma_{yy}^c = \sigma_{zz}^c = \sigma_{xy}^c = 0$
- potahy nepřenáší smyková napětí a normálová napětí ve směru $z \rightarrow \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zz} = 0$
- všechny vrstvy jsou uvažovány jako izotropní



Obr. 8: Řez sendvičové konstrukce v rovině xz s uvažováním smykových účinků [1]

Následující odvození je převzato z [1], které opět vyplývá z geometrie, kde posuvy jádra jsou

$$\begin{aligned} u_c &= u_0 - z\psi_x, \\ v_c &= v_0 - z\psi_y. \end{aligned} \quad (40)$$

Posunutí dolního potahu jsou

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 - \frac{h}{2} \psi_x, \\ v_1 &= v_0 - \frac{h}{2} \psi_y. \end{aligned} \quad (41)$$

Posunutí horního potahu jsou

$$\begin{aligned} u_2 &= u_0 + \frac{h}{2} \psi_x, \\ v_2 &= v_0 + \frac{h}{2} \psi_y. \end{aligned} \quad (42)$$

Pro celý sendvič platí, že

$$w = w_0 \quad (43)$$

Pole deformací se stanoví pro každou část sendviče samostatně. Pro dolní potah má při zanedbání smykových účinků tvar

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^1 &= \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{h}{2} \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, \\ \varepsilon_{yy}^1 &= \frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - \frac{h}{2} \frac{\partial \psi_y}{\partial y}, \\ \gamma_{xy}^1 &= \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{h}{2} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (44)$$

Pole deformace je možno zapsat do maticového tvaru

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix} - \frac{h}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} - \frac{h}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{k}_x \\ \mathbf{k}_y \\ \mathbf{k}_{xy} \end{bmatrix}, \quad (45)$$

kde ε^0 jsou deformace střední plochy a \mathbf{k} jsou křivosti desky. Horní potah se odvodí obdobným způsobem. Pole deformací pro horní potah je

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^2 \\ \varepsilon_{yy}^2 \\ \gamma_{xy}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \frac{h}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{k}_x \\ \mathbf{k}_y \\ \mathbf{k}_{xy} \end{bmatrix}, \quad (46)$$

Pole deformací jádra lze také zapsat do dvou vektorů. První vyjadřuje deformační pole střední roviny a ohybové deformační pole a má tvar

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^c \\ \varepsilon_{yy}^c \\ \gamma_{xy}^c \\ \gamma_{yz}^c \\ \gamma_{zx}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 - z\mathbf{k}_x \\ \varepsilon_{yy}^0 - z\mathbf{k}_y \\ \gamma_{xy}^0 - z\mathbf{k}_{xy} \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} - \psi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} - \psi_x \end{bmatrix}. \quad (47)$$

Napětí v dolním potahu se stanoví obdobně, jako v rovnici (21). Jelikož je zaveden předpoklad, že potahy nepřenášejí napětí ve směru z jsou tři složky napětí nulové. Zbylé složky napětí jsou definovány vztahem

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \varepsilon_{zz}^1 \end{bmatrix}. \quad (48)$$

V horním potahu se napětí stanoví analogicky

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^2 \\ \varepsilon_{yy}^2 \\ \varepsilon_{zz}^2 \end{bmatrix}. \quad (49)$$

V rovnicích (48) a (49) představují členy Q_{ij} prvky matice mimoosové tuhosti. V předpokladech také stojí, že jádro přenáší pouze smyková napětí, a proto je vztah pro výpočet napětí

$$\begin{bmatrix} \sigma_{yz}^c \\ \sigma_{zx}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{44} & C'_{45} \\ C'_{54} & C'_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^c \\ \gamma_{zx}^c \end{bmatrix}, \quad (50)$$

kde prvky C'_{ij} představují složky matice tuhosti. Dále je nutno zavést konstitutivní vztahy, které propojí působení vnějších silových účinků a napětí v sendviči. V maticovém tvaru má konstitutivní vztah složení

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ T_y \\ T_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} & 0 & 0 \\ C_{11} & C_{12} & C_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ C_{61} & C_{62} & C_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{44} & F_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{54} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \mathbf{k}_x \\ \mathbf{k}_y \\ \mathbf{k}_{xy} \\ \gamma_{yz}^c \\ \gamma_{zx}^c \end{bmatrix}. \quad (51)$$

V levém vektoru prvky označené N a M představují výslednice sil resp. momentů působících na příčný řez sendviče. Prvky T označují výslednice sil působících na jádro kolmo na rovinu xy . Prvky v matici, která zahrnuje materiálové vlastnosti sendviče, se stanoví

$$\begin{aligned} A_{ij} &= A_{ij}^1 + A_{ij}^2, \\ B_{ij} &= \frac{h}{2}(A_{ij}^2 - A_{ij}^1), \\ C_{ij} &= C_{ij}^1 + C_{ij}^2, \\ D_{ij} &= \frac{h}{2}(C_{ij}^2 - C_{ij}^1), \end{aligned} \quad (52)$$

kde jsou jednotlivé prvky definovány

$$\begin{aligned} A_{ij}^1 &= \sum_{k=1}^{n_1} (Q_{ij})_k (h_k - h_{k-1}), \\ A_{ij}^2 &= \sum_{k=1}^{n_2} (Q_{ij})_k (h_k - h_{k-1}), \\ C_{ij}^1 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_1} (Q_{ij})_k (h_k^2 - h_{k-1}^2), \\ C_{ij}^2 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_2} (Q_{ij})_k (h_k^2 - h_{k-1}^2), \\ F_{ij} &= h C_{ij}^c, \end{aligned} \quad (53)$$

kde n_1 a n_2 jsou počty vrstev v horním popřípadě dolním potahu. Konstitutivní vztah lze také zapsat do zkráceného maticového tvaru

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{Q}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_m^0 \\ \mathbf{k} \\ \gamma^c \end{bmatrix} \quad (54)$$

5.3.2. Sendvičová teorie bez uvažování smyku

V předpokladech stojí, že jádro přenáší pouze smyková napětí. V případě, že se nebude uvažovat vliv smyku, jádro teoreticky nepřenáší žádné napětí, ale pouze vymezuje vzdálenost mezi potahy. Výsledné síly tedy závisí pouze na vlastnostech potahů a všechny prvky týkající se jádra nebo smyku jsou nulové. Konstitutivní vztah pro výpočet sil a momentů je

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_m^0 \\ k \end{bmatrix}, \quad (55)$$

kde se prvky submatic A, B, C, D stanoví stejně jako u sendvičové teorie s uvažováním smyku, tedy ze vztahu (52).

6. Sendvičový nosník pro experiment a analytický výpočet

V době tvorby této práce probíhal projekt na půdě školy, který se zabýval vývojem sendvičové konstrukce pro dopravní prostředky MHD, kde vzrůstají nároky cestujících na výbavu, a proto je k zachování přijatelné spotřeby a provozuschopnosti velmi žádoucí nízká hmotnost samotné konstrukce. Zároveň nesmí dojít ke snížení mechanických vlastností. V rámci tohoto výzkumu bylo k dispozici několik sendvičových konstrukcí, ze kterých byly použity nosníky pro analytický výpočet a experimentální test.

Sendvičové nosníky jsou zobrazeny na obr.9 a mají šířku 90 mm, výšku 41,6 mm a délku 700 mm. Kvůli zjednodušení jsou všechny materiály uvažovány jako izotropní materiál, který je definován dvěma elastickými konstantami. Potahy byly z pozinkovaného ocelového plechu o tloušťce 0,6 mm a modulu pružnosti v tahu 210000 MPa. Jádra měla tloušťku 40 mm a byla z materiálu Airex C70.55,. Výrobce udává modul pružnosti v tahu je 45 MPa , modul pružnosti v tlaku je 69 MPa a modul pružnosti ve smyku je 22 MPa. V této práci bude použit modul pružnosti E , který je definován průměrnou hodnotou E v tahu a E v tlaku, což je 57 MPa a Poissonovo číslo ν , které se stanoví

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \rightarrow \nu = \frac{E}{2G} - 1 = \frac{57}{2 \cdot 22} - 1 = 0,3. \quad (56)$$



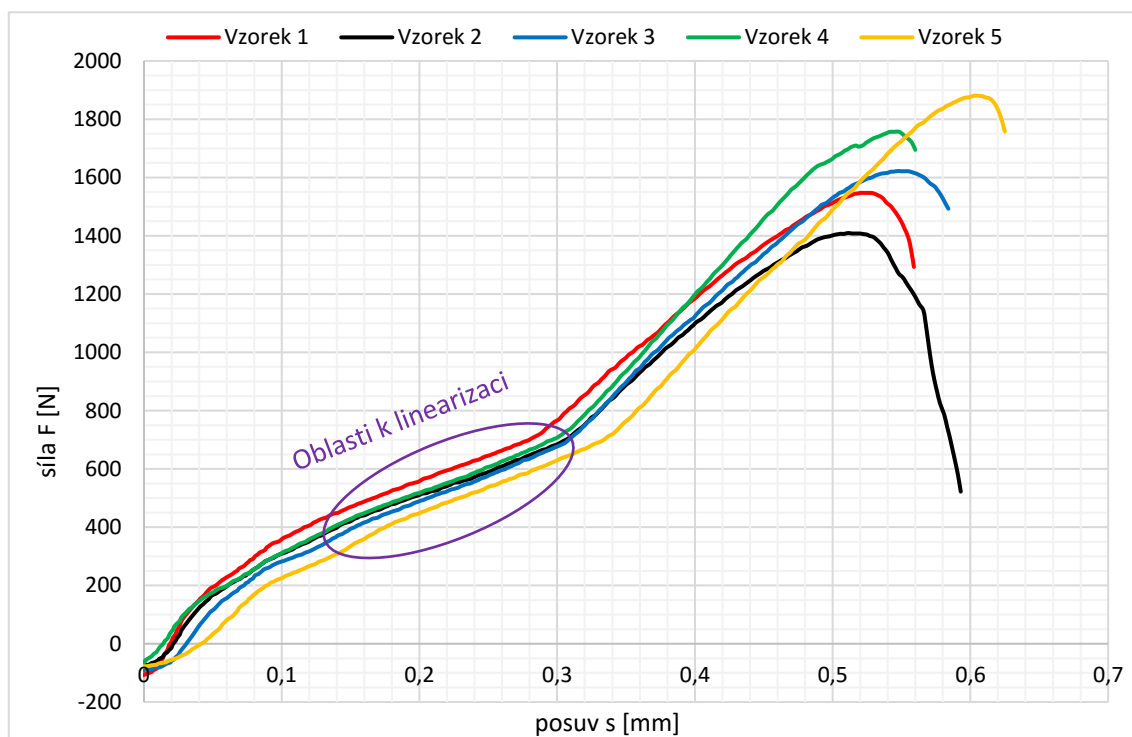
Obr. 9: Sendvičové nosníky pro experiment

Potahy byly přilepeny k jádru dvousložkovým polyuretanovým lepidlem SikaForce 7710L35 o uvažované tloušťce 0,2 mm. Jelikož je zaveden předpoklad, že lepidlo přenáší pouze smyková napětí je jediným potřebným parametrem modul pružnosti ve smyku G , který se stanovil zkouškou, jak uvádí [8]. V experimentu bylo měřeno pět vzorků.

K vyhodnocení byly použity lineární oblasti zobrazené v záznamu smykové zkoušky na obr. 11.



Obr. 10: Konfigurace zkoušky lepidla [8]



Obr. 11: Záznam tahové zkoušky lepidla SikaForce - 7710L35 [8]

Z vyznačené oblasti se pro všechny vzorky po linearizaci průběhů stanovila směrnice. Po přepočítání se ze závislosti posuvu na síle stanovila rovnice

$$\tau = G \gamma, \quad (57)$$

kde jediná neznámá je modul pružnosti ve smyku G . Odvození bylo stanoveno pro zvolenou hodnotu síly $F = 500 \text{ N}$. Všechny použité hodnoty jsou uvedeny v tab. 2.

Plocha A udává rozměry lepeného spoje, tloušťka t udává výšku lepené vrstvy, s je posuv a γ je zkos.

Tab. 2: Hodnoty ze zkoušky lepidla pro stanovení G

Vzorek	lineární rovnice	A [mm ²]	τ [N/mm ²]	t [mm]	s [mm]	γ [1]
č.1	F =1745,2s	292,5	1,709	1,25	0,2865	0,2253
č.2	F =1783,3s	302,5	1,653	1,28	0,2804	0,2156
č.3	F= 1650,6s	295,0	1,695	1,2	0,3029	0,2453
č.4	F =1797,7s	310,0	1,613	1,2	0,2781	0,2315
č.5	F =1778,5s	302,5	1,653	1,22	0,2811	0,2265
			τ_{prum}			γ_{prum}
			1,665			0,2288
G = 7,274 MPa						

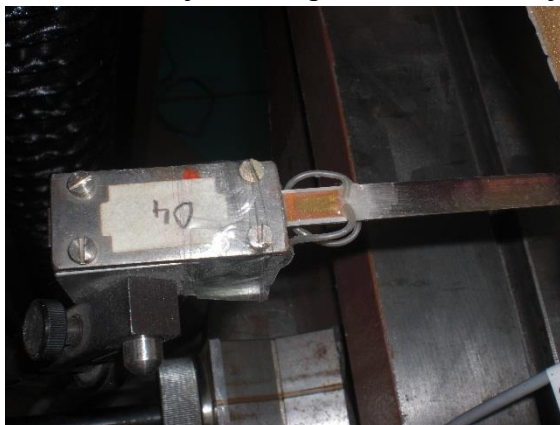
7. Experimentální test zadané konstrukce

Jeden z cílů měření bylo při zatěžování stanovit závislost deformace a průhybu nosníku na zatěžovací síle, který se porovná s analyticky získanými hodnotami průhybu podle různých výpočtových metod. Další cíl byl posoudit vliv smyku pro různé vzdálenosti podpor. Ke splnění těchto cílů byl proveden třibodý ohyb pro dvě konfigurace – 600 mm a 300 mm. Třibodý ohyb byl zvolen pro jednoduchost a proveditelnost experimentu.



Obr. 12: Zatěžovací stroj FPZ100/1

Experiment byl proveden v těžkých laboratořích Ústavu mechaniky, biomechaniky a mechatroniky FS ČVUT v Praze. Měření bylo provedeno na analogově digitálním řízeném zatěžovacím stroji FPZ 100/1 (obr.12). Pro stanovení průhybu byl použit planžetový průhyboměr (obr.13) a k měření deformace byl použit fóliový tenzometr připevněn na spodní straně potahu nosníku. Signály z měřících přístrojů byly přes připájené kontakty vedeny do počítače, který je zpracovával a zobrazil na monitoru ve formě grafů. Všechna data z měření jsou k dispozici a CD, které je součástí práce.



Obr. 13: Planžetový průhyboměr

7.1. Měření č. 1



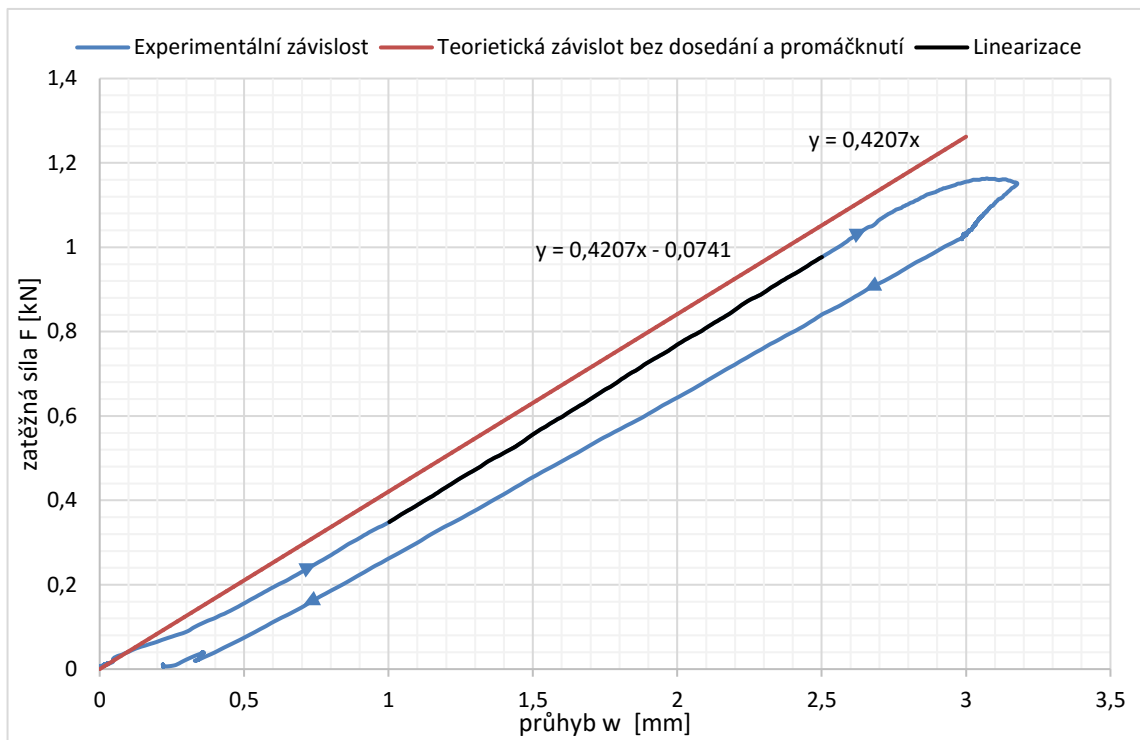
Obr. 14: Konfigurace měření č.1

Pro první měření byly podpory vzdáleny 600 mm. Na počátku zatěžovací křivky je nelineární část, kterou způsobily vůle v realizovaném zátěžném řetězci. Po počátečním dosedání byla odezva průhybu na síle přibližně lineární až do síly cca 1 kN. V průběhu zatěžování začalo docházet ke vmáčknutí zátěžného prvku zatěžovacího stroje do potahu nosníku (obr. 15). Odezva na sílu přestala být lineární a měření bylo ukončeno.

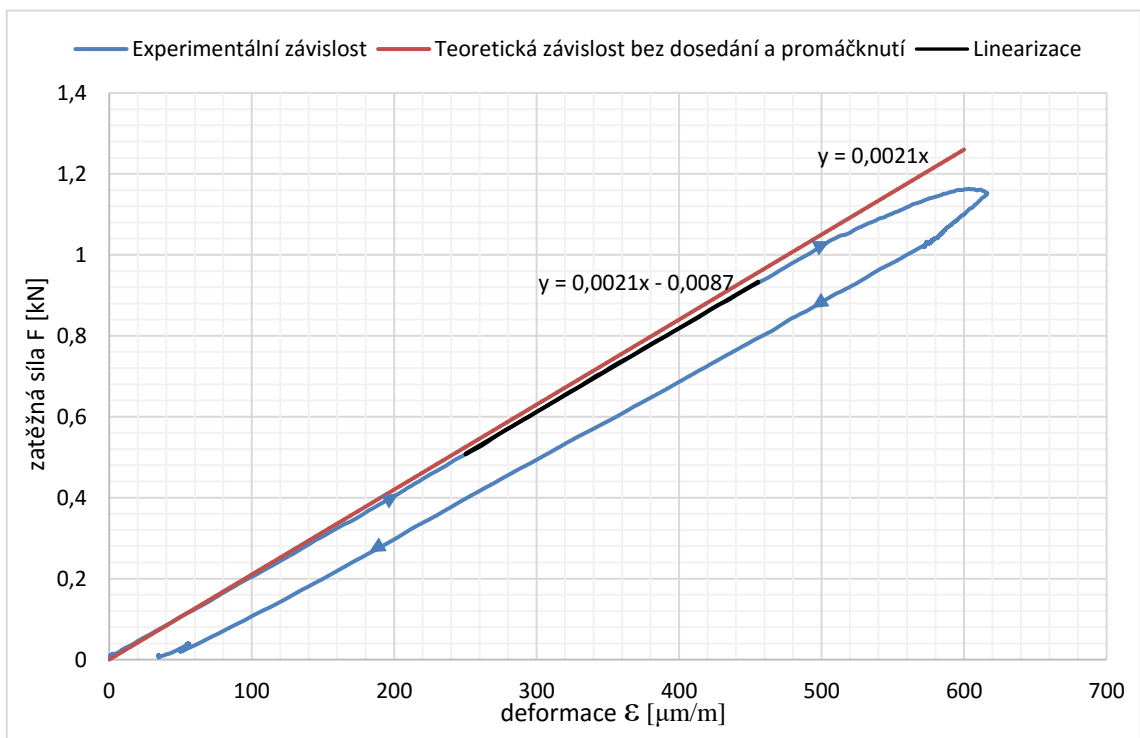


Obr. 15: Vmáčknutí zatěžovacího prvku do nosníku

V grafech (obr. 16 a obr. 17) jsou, kromě závislosti síly na průhybu a síly na deformaci získaných měření, vyneseny teoretické odezvy při odstranění dosedání a nelineárních částí při promáčknutí. Teoretická odezvy byly stanoveny linearizací, která byla provedena pro všechna měření ve vyznačené oblasti. Odezvy po linearizaci jsou popsány rovnicemi zobrazenými v grafu. Z příslušných rovnic se dá stanovit průhyb a deformace pro teoreticky libovolnou zatěžovací sílu.

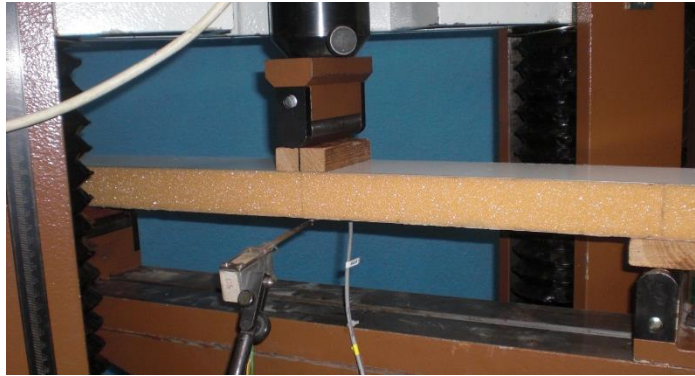


Obr. 16: Graf závislosti průhybu na zátěžné síle ($l=600$ mm, bez podložek)



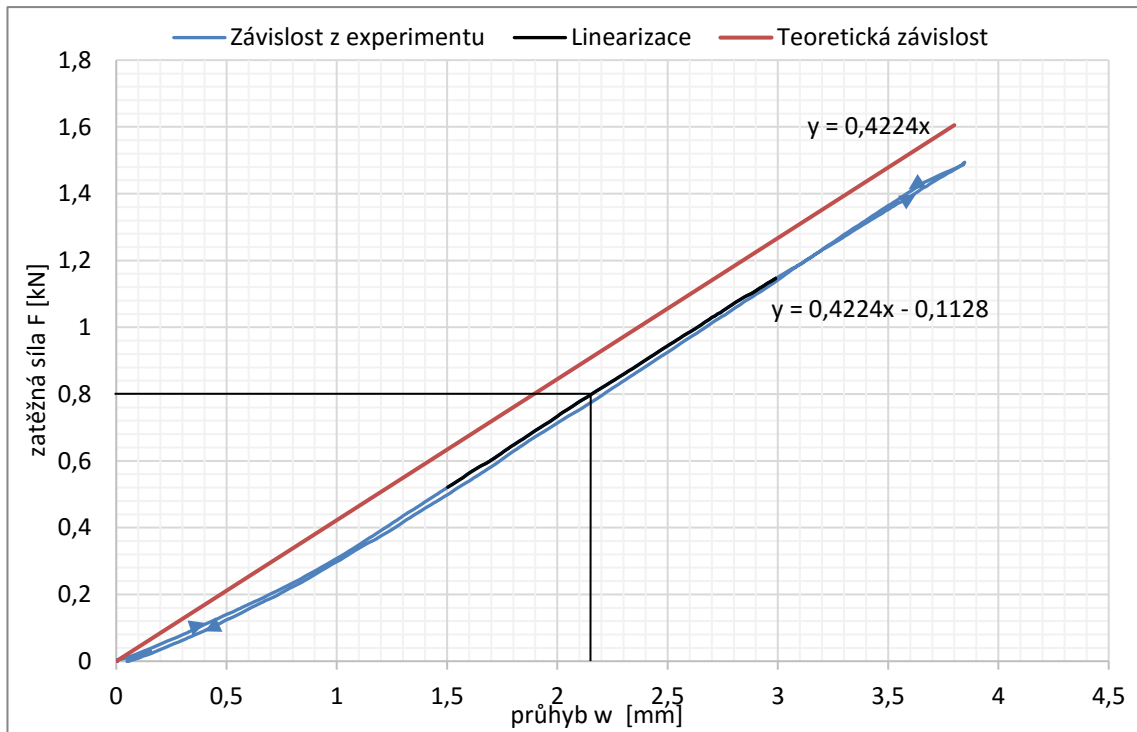
Obr. 17: Graf závislosti deformace na zátěžné síle ($l=600$ mm, bez podložek)

7.2. Měření č. 2

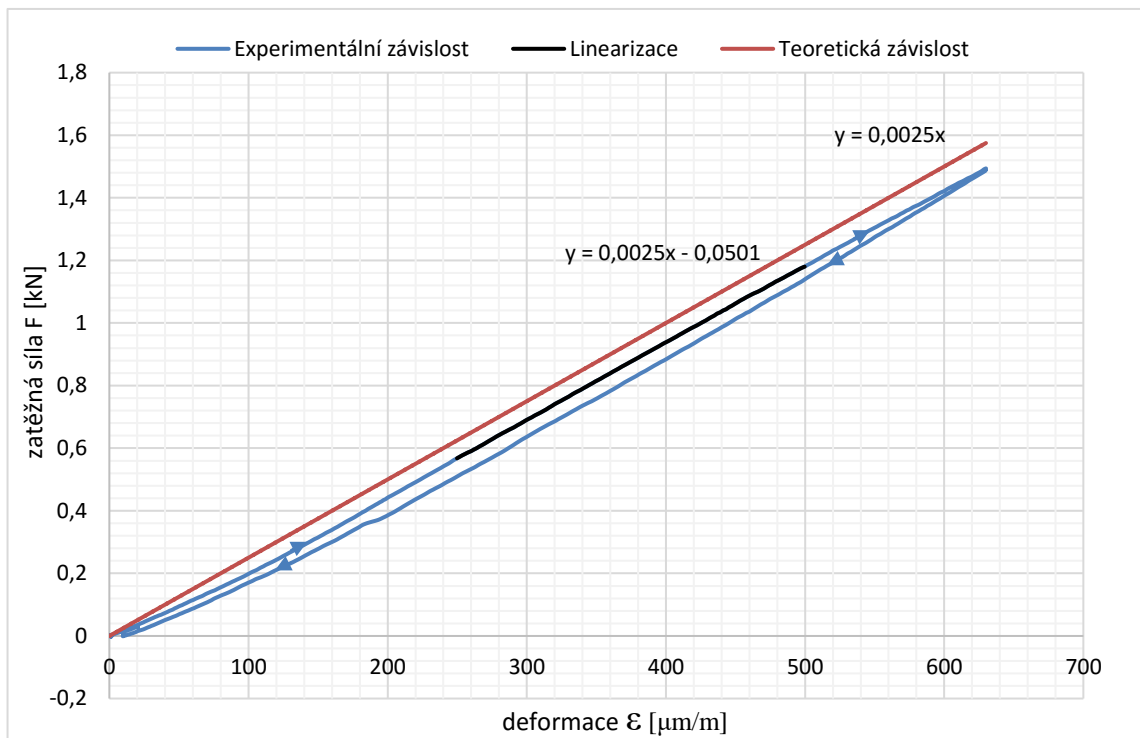


Obr. 18: Konfigurace měření č. 2

Vzdálenost podpor zůstala nezměněna, ale byly použity podložky, které rozloží tlak od zatěžovací síly na větší plochu, aby nedošlo znovu k promáčknutí. Konfigurace úlohy je zobrazena na obr.18. Díky podložkám bylo možno provést měření do síly 1,5 kN a závislost stále byla lineární. Průběh odlehčovací křivky byl téměř totožný s zatěžovací křivkou, což znamená, že se nosník plasticky nezdeformoval. V grafu závislosti průhybu na zátěžné síle je vyznačena hodnota průhybu pro $F=800\text{N}$, která se bude v později v práci porovnávat s vypočtenými hodnotami.



Obr. 19: Graf závislosti průhybu na zátěžné síle ($l=600\text{ mm}$, s podložkami)



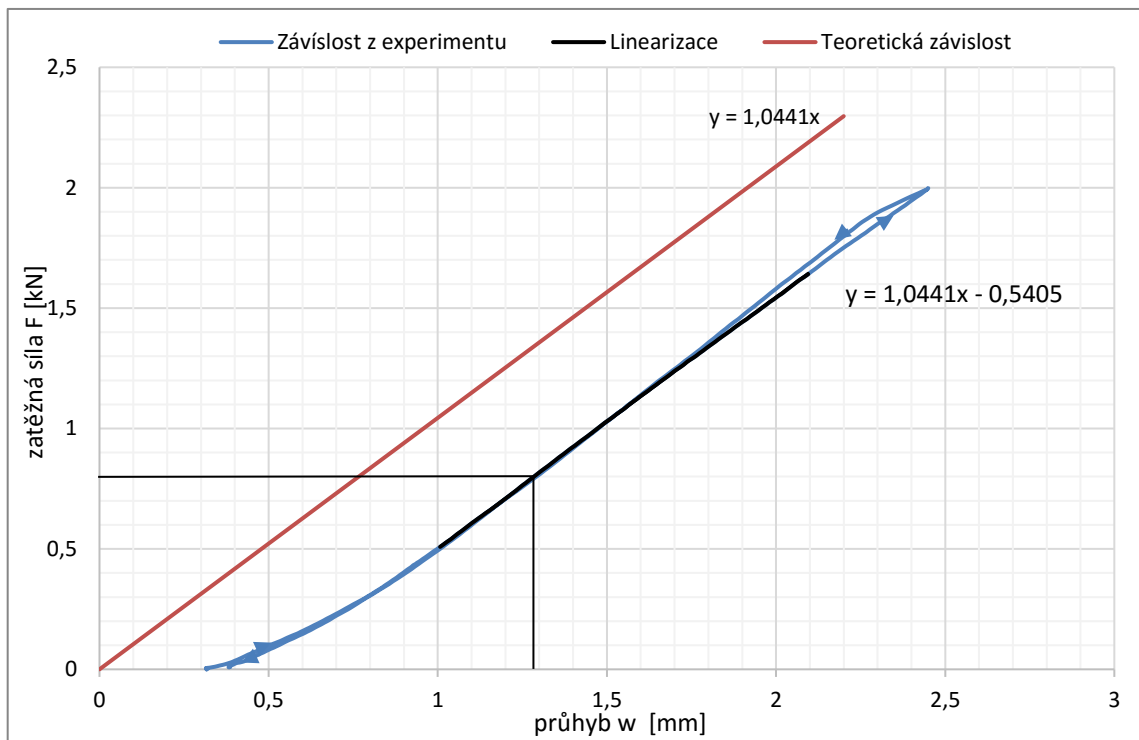
Obr. 20: Graf závislosti deformace na zátěžné síle ($l=600$ mm, s podložkami)

7.3. Měření č. 3

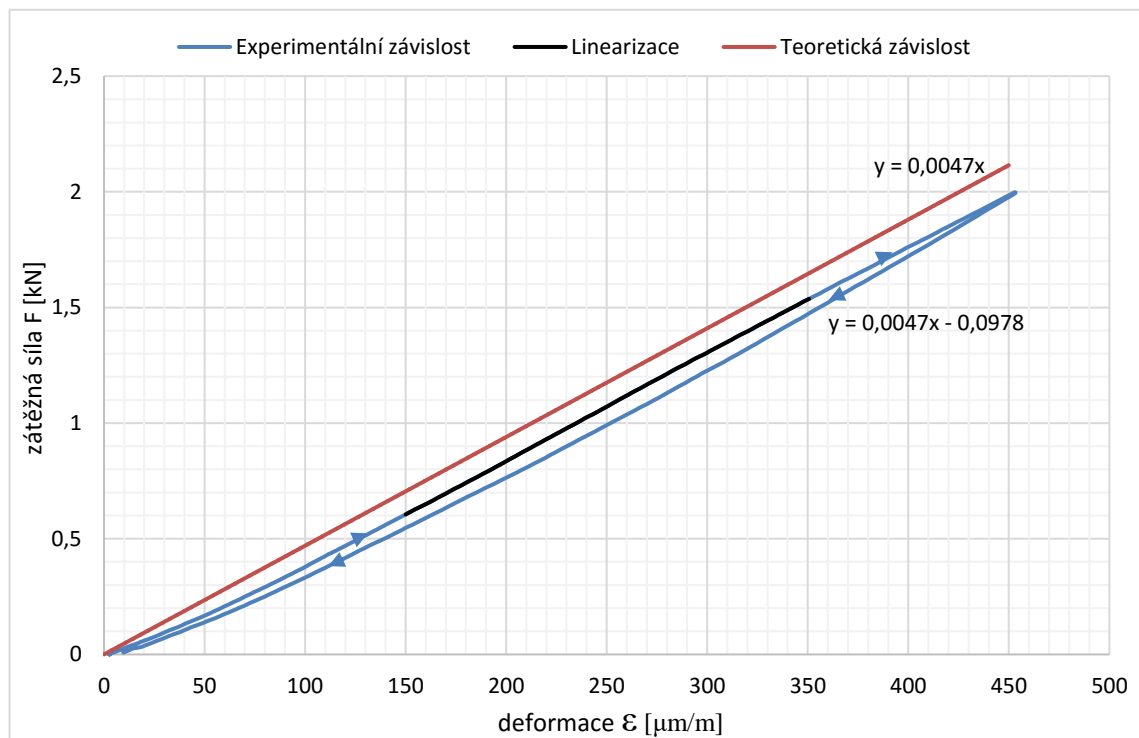


Obr. 21: Konfigurace měření č.3

Při posledním měření byly podpory vzdáleny 300 mm a opět byly použity podložky. Znovu se na počátku experimentu projevilo dosedání součástí. Konfigurace úlohy je zobrazena na obr.21. Grafy závislostí průhybu a deformace na síle jsou zobrazeny na obr.22 a obr.23. Na obr. 22 je opět vyznačen průhyb pro sílu $F=800$ N.



Obr. 22: Graf závislosti průhybu na zátěžné síle ($l=300$ mm, s podložkami)



Obr. 23: Graf závislosti deformace na zátěžné síle ($l=300$ mm, s podložkami)

Měření bylo pro každou konfiguraci provedeno pouze jednou. Pro statisticky přesnější výsledky by bylo vhodné každé měření opakovat pro více vzorků.

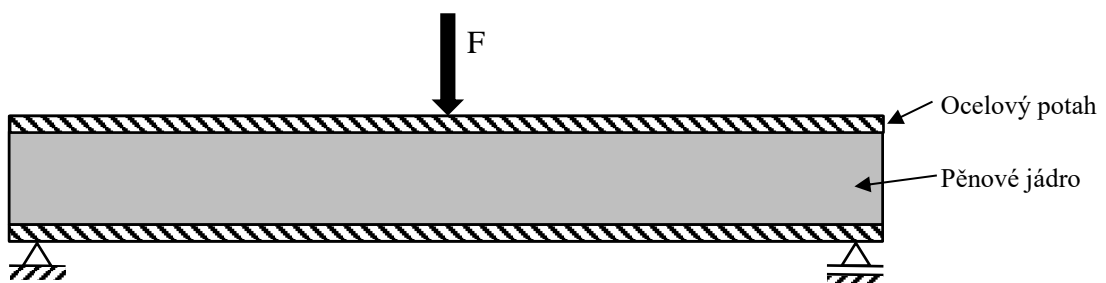
8. Analytický výpočet zadané konstrukce

V této kapitole budou vypočteny průhyby a napětí, podle teorií odvozených v předešlých kapitolách, pro nosník z kapitoly 6 ve čtyřech konfiguracích tříbodého ohybu, který byl zvolen pro jednoduchost a proveditelnost experimentu. Konfigurace tedy jsou:

- konfigurace 1 - sendvič o třech vrstvách (potahy, jádro) při vzdálenosti podpor 600 mm (obr. 24)
- konfigurace 2 - sendvič o pěti vrstvách (potahy, vrstvy lepidla, jádro) při vzdálenosti podpor 600 mm (obr. 25)
- konfigurace 3 - sendvič o třech vrstvách (potahy, jádro) při vzdálenosti podpor 300 mm (obr. 26)
- konfigurace 4 - sendvič o pěti vrstvách (potahy, vrstvy lepidla, jádro) při vzdálenosti podpor 300 mm (obr. 27)

Ve výpočtech se objevují matice tuhosti C , transformovaná matice tuhosti C' a matice mimoosové tuhosti Q , ale jelikož uvažujeme všechny vrstvy konstrukce izotropní, takže pro všechny vrstvy platí, že mají materiálové vlastnosti nezávislé na směru zatěžování, tudíž jsou všechny tyto matice identické.

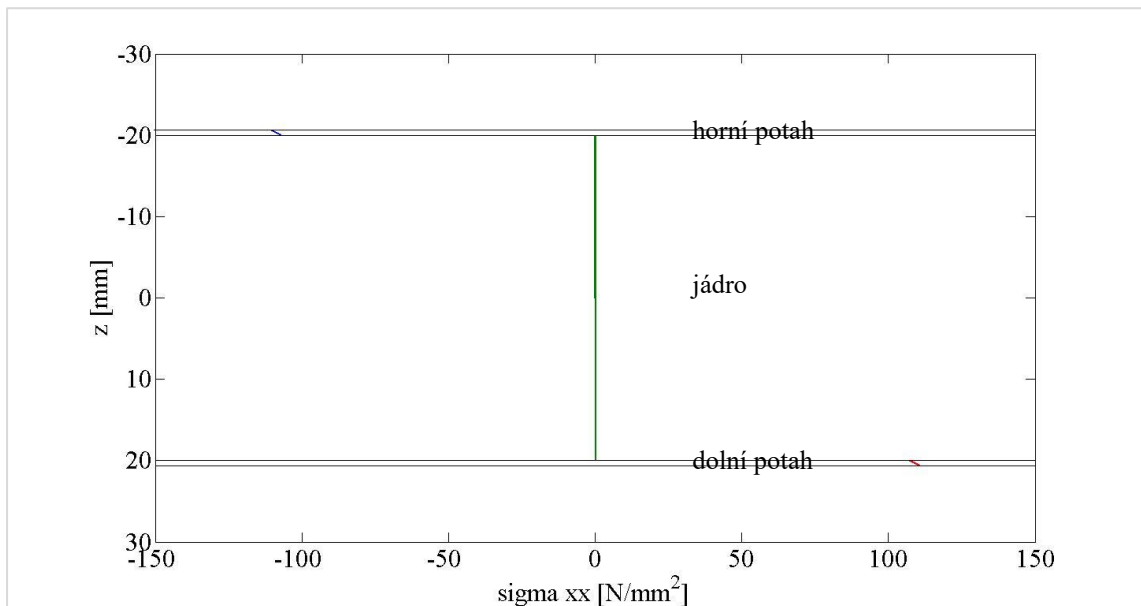
Uvažovaná síla byla ve všech případech $F=800\text{N}$. Hodnoty průhybů těchto konfigurací se budou v závěru práce dále porovnávat a stanoví se odchylky, které vzniknou zanedbáním tuhosti vrstvy lepidla nebo použitím teorie, která neuvažuje smykové deformace. Veškeré výpočty budou provedeny programem vytvořeným v prostředí MATLABu jako součást této práce (program k dispozici na CD). Výsledky výpočtu průhybu a experimentu budou spolu pro přehlednost sepsány do tabulek. Budou zde také zobrazeny průběhy normálového napětí ve směru x σ_{xx} v místě pod silou F .



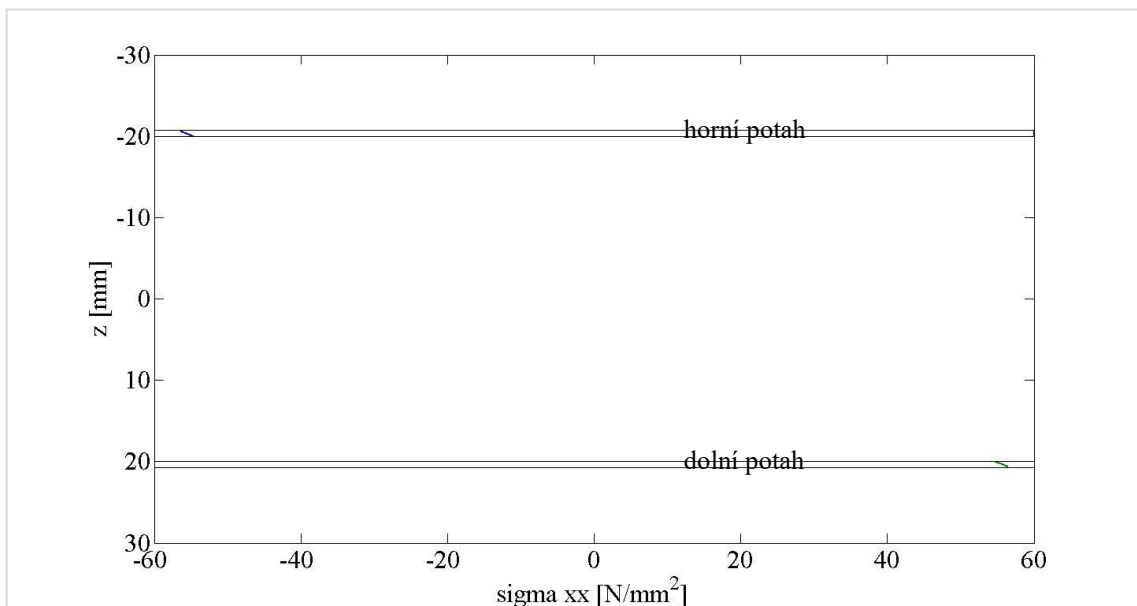
Obr. 24: Sendvič o třech vrstvách ($l=600\text{ mm}$) – konfigurace 1

Tab. 3: Průhyby sendviče o třech vrstvách - konfigurace 1

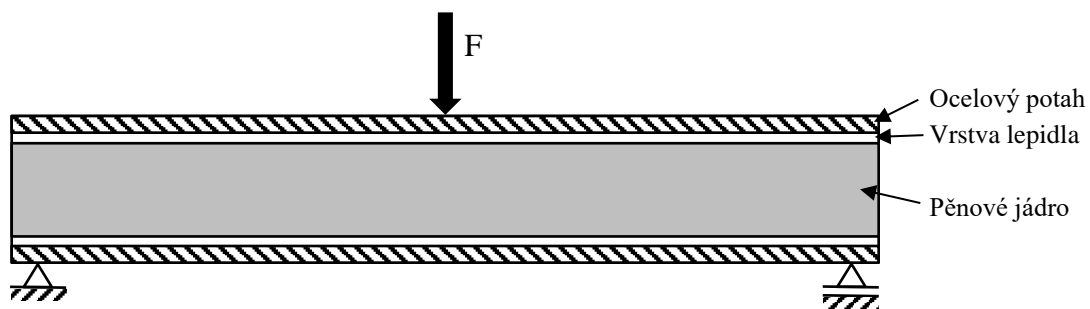
Průhyb w [mm] pro $F=800$ N		
	Laminátová teorie	Sendvičová teorie
S uvažováním smykových sil	0,71	1,88
Bez uvažování smykových sil	0,70	0,38
Experimentální test	2,16	



Obr. 26: Průběh napětí σ_{xx} podle laminátové teorie pro konfiguraci 1



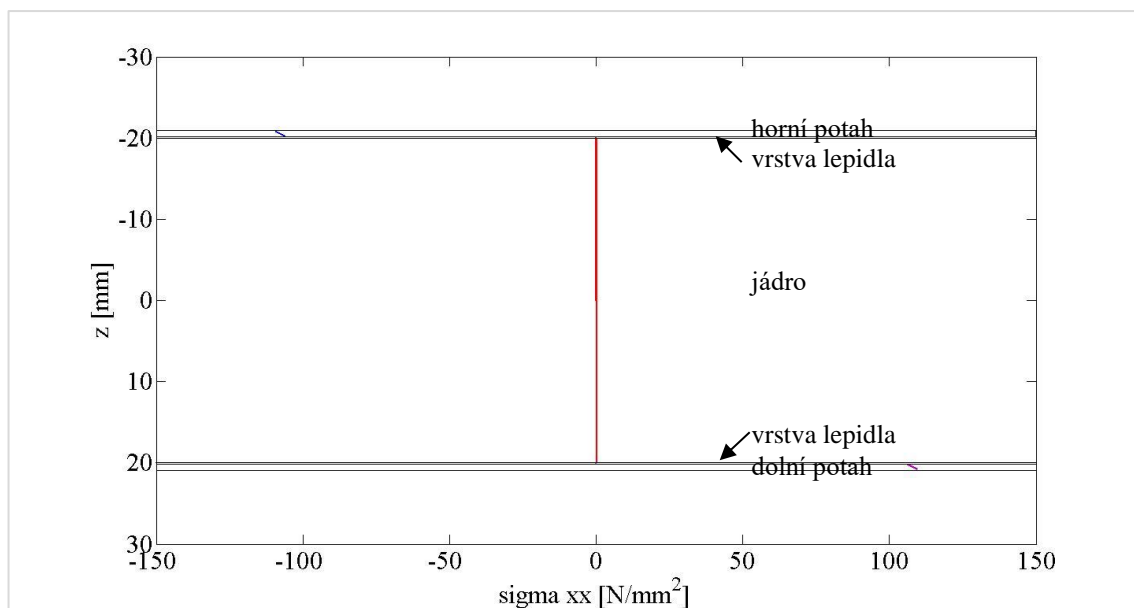
Obr. 25: Průběh napětí σ_{xx} podle sendvičové teorie pro konfiguraci 1



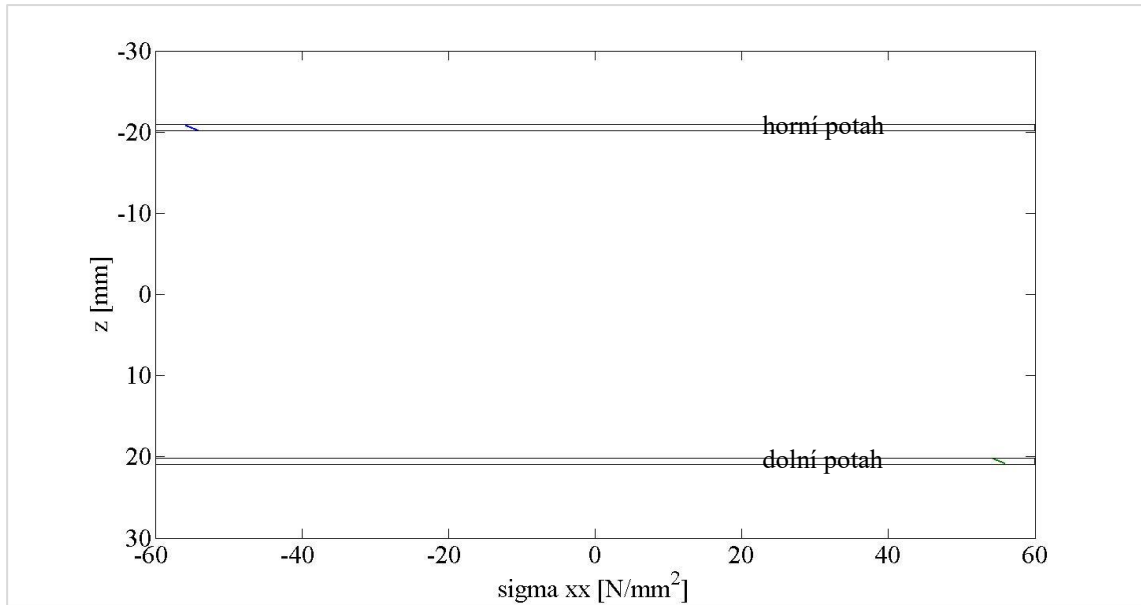
Obr. 27: Sendvič o pěti vrstvách ($l=600$ mm) – konfigurace 2

Tab. 4: Průhyby sendviče o pěti vrstvách – konfigurace 2

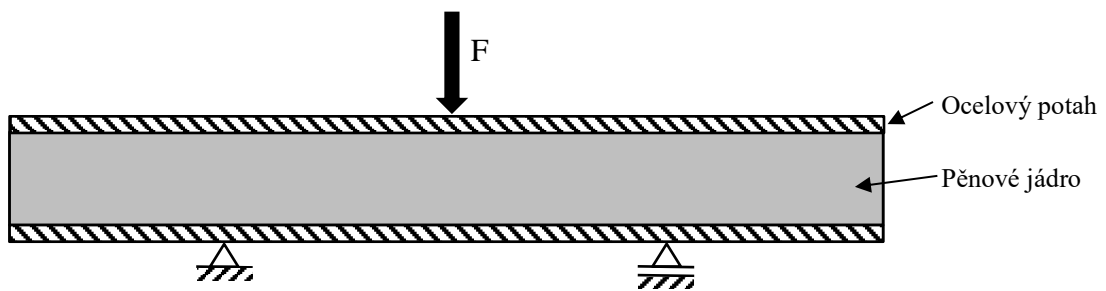
Průhyb w [mm] pro $F=800$ N		
	Laminátová teorie	Sendvičová teorie
S uvažováním smykových sil	0,70	1,25
Bez uvažování smykových sil	0,68	0,35
Experimentální test	2,16	



Obr. 28: Průběh napětí σ_{xx} podle laminátové teorie pro konfiguraci 2



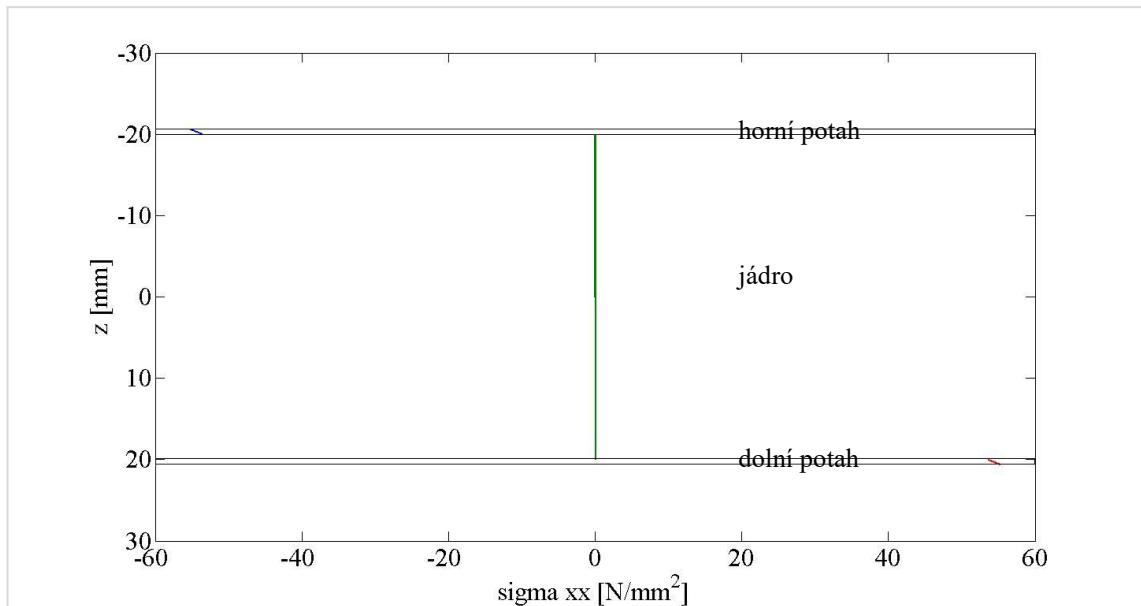
Obr. 29: Průběh napětí σ_{xx} podle sendvičové teorie pro konfiguraci 2



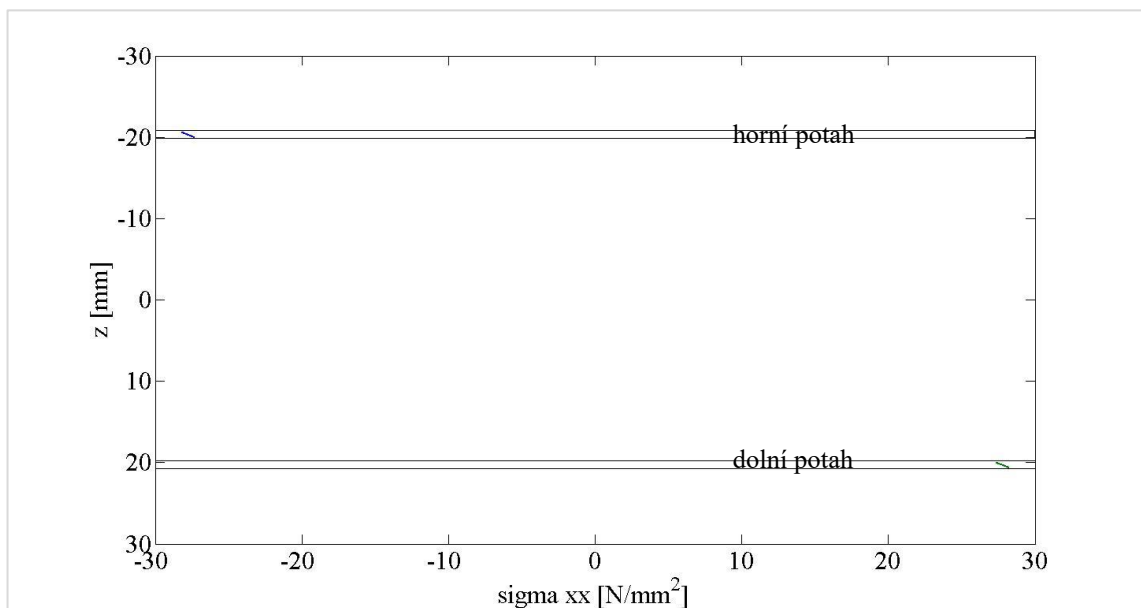
Obr. 30: Sendvič o třech vrstvách ($l=300$ mm) – konfigurace 3

Tab. 5: Průhyby sendviče o třech vrstvách – konfigurace 3

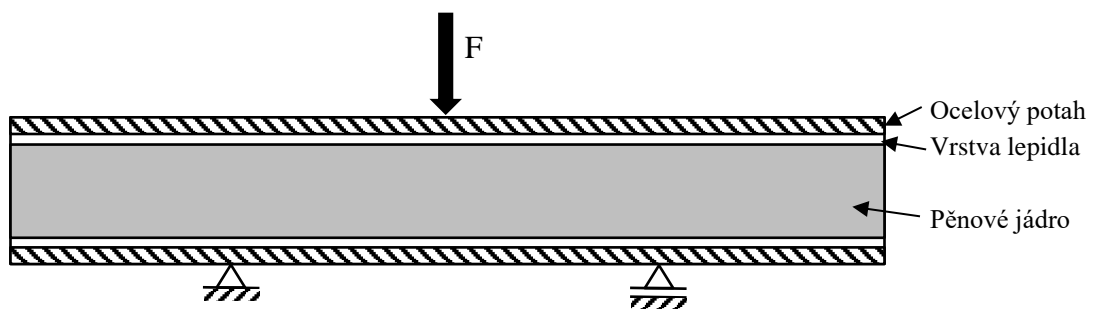
Průhyb w [mm] pro $F=800$ N		
	Laminátová teorie	Sendvičová teorie
S uvažováním smykových sil	0,09	0,80
Bez uvažování smykových sil	0,09	0,04
Experimentální test	1,29	



Obr. 31: Průběh napětí σ_{xx} podle laminátové teorie pro konfiguraci 3



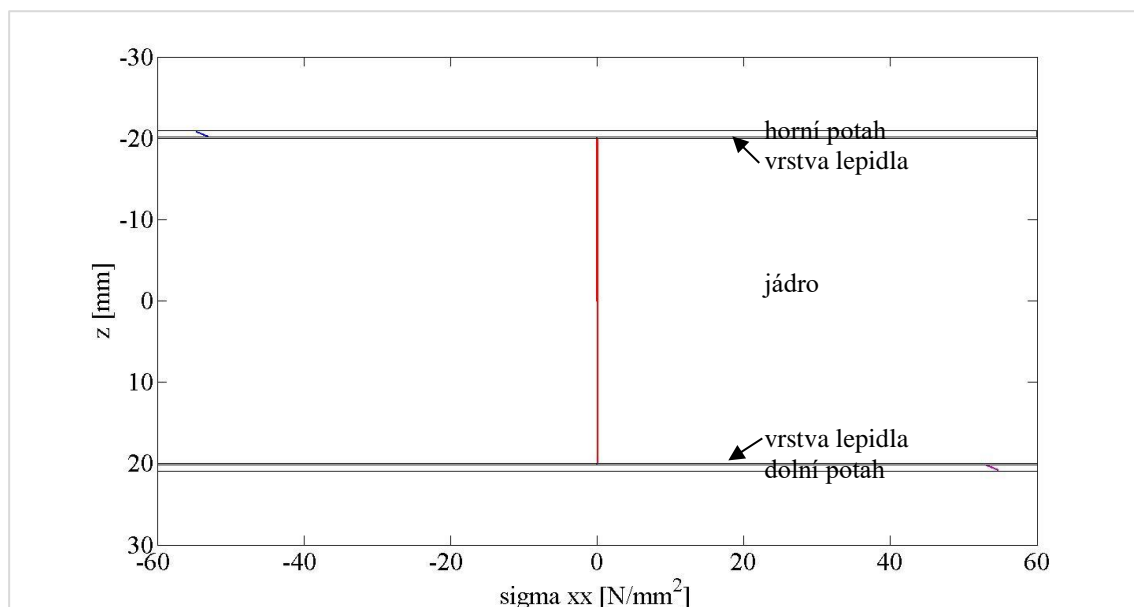
Obr. 32: Průběh napětí σ_{xx} podle sendvičové teorie pro konfiguraci 3



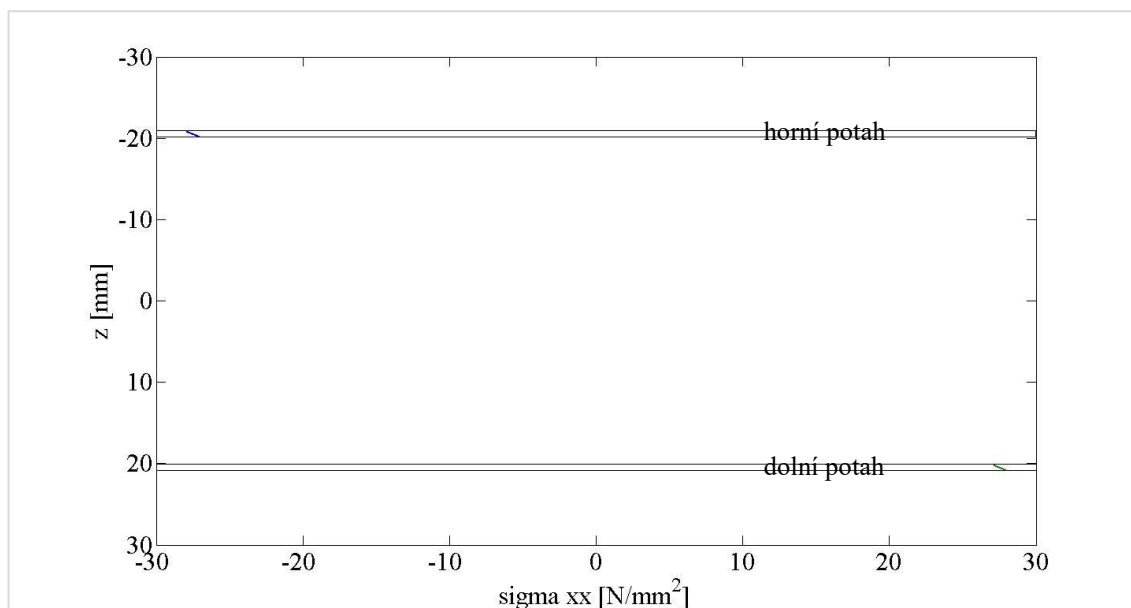
Obr. 33: Sendvič o pěti vrstvách ($l=300$ mm) – konfigurace 4

Tab. 6: Průhyby sendviče o pěti vrstvách – konfigurace 4

Průhyb w [mm] pro $F=800$ N		
	Laminátová teorie	Sendvičová teorie
S uvažováním smykových sil	0,09	0,50
Bez uvažování smykových sil	0,09	0,04
Experimentální test	1,29	



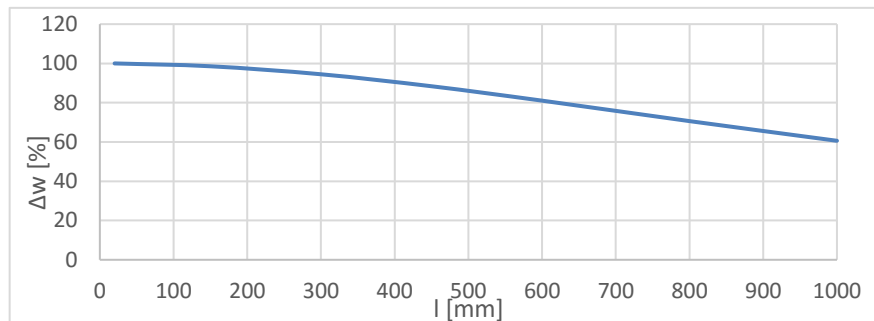
Obr. 35: Průběh napětí σ_{xx} podle laminátové teorie pro konfiguraci 4



Obr. 34: Průběh napětí σ_{xx} podle sendvičové teorie pro konfiguraci 4

9. Porovnání výsledků

Z výsledků zobrazených v osmé kapitole vyplývá několik zajímavých informací. Výpočet průhybu pomocí laminátové teorie s uvažováním smyku a bez uvažování smyku se ve všech zkoušených případech liší jen minimálně. U sendvičové teorie se procentuální rozdíl průhybu při uvažování smykových deformací a bez jejich uvažování mění v závislosti na vzdálenosti podpor viz obr.36. Průhyb podle sendvičové teorie s uvažováním smyku vyšel vždy vyšší než ostatní vypočtené průhyby. Dále je také zřejmé, že při výpočtu dle všech teorií má uvažování vrstev použitého lepidla zanedbatelný vliv na výsledný průhyb. Vypočtené průhyby podle sendvičové teorie se smykem byly cca dvojnásobné oproti průhybu z experimentu. Průhybu dle laminátové teorie se smykem i bez smyku a sendvičové teorie bez uvažování smyku vyšly pro zadanou konstrukci přibližně o řád menší než průhyb z experimentu, což je příliš optimistický (ve smyslu malý) odhad průhybu. Hodnota normálového napětí ve směru x, stejně jako hodnoty průhybů, byla ovlivněna vrstvou použitého lepidla minimálně. Srovnání napětí σ_{xx} pro spodní potah z výpočtu a experimentu je sepsáno v tab7. Jádro a vrstvy lepidla téměř nepřenášely normálové napětí. Vrstvy přenášejí hlavně smykové napětí, ale průběhem smykového napětí se tato práce nezabývá.



Obr. 36: Graf závislosti rozdílu průhybů na vzdálenosti podpor

Tab. 7: Napětí σ_{xx} spodního potahu pro $F = 800\text{ N}$

$\sigma_{xx} [\text{N}/\text{mm}^{-2}]$ pro $F = 800\text{ N}$		
	$l = 600\text{ mm}$	$l = 300\text{ mm}$
Laminátová teorie	110,4	55,2
Sendvičová teorie	56,3	28,1
Experiment	72,4	40,7

10. Závěr

V této práci byly shrnuty metody analýzy vrstvených laminátů a to laminátová teorie a sendvičová teorie. Tyto metody je možné použít jak při pevnostní kontrole, tak při dimenzování. Experimentem a analyticky se stanovily průhyby a napětí pro zadaný sendvičový nosník.

Poznatky zjištěné v této práci jsou, že v žádné z metod není potřeba uvažovat vrstvy použitého lepidla, kterými jsou potahy spojeny s jádrem, kromě pevnostní analýzy, kde může dojít k prvnímu porušení ve vrstvě lepidla. Analýzou a experimentálním testem zadané sendvičové konstrukce se zjistilo, že uvažování smykových účinků při výpočtu průhybu použitím laminátové teorie není nutné. U sendvičové teorie se rozdíl průhybu při a bez uvažování smyku zvyšuje zmenšováním vzdálenosti podpor.

Literatura

- [1] LAŠ, Vladislav. *Mechanika kompozitních materiálů. 2.*, přeprac. vyd. Plzeň: Západočeská univerzita, 2008. ISBN 978-80-7043-689-9.
- [2] LENERT, Jiří. *Mechanika kompozitních materiálů. 1.* vyd. Ostrava: VŠB-Technická univerzita, 2002. ISBN 80-248-0026-8.
- [3] VRBKA, Jan. *Mechanika kompozitů*. In: Vysoké učení technické v Brně [online]. Brno: Fakulta strojního inženýrství VUT v Brně, 2008 [cit. 2016-06-03]. Dostupné z: https://www.vutbr.cz/www_base/priloha.php?dpid=83340
- [4] KOLLAR, Laszlo P. a George S. SPRINGER. *Mechanics of composite structures*. Cambridge: Cambridge University, 2003. ISBN 978-051-1057-038.
- [5] GAY, Daniel, S. V. HOA a Stephen W. TSAI. *Composite materials: design and applications*. Boca Raton, FL: CRC Press, 2003. ISBN 15-871-6084-6.
- [6] GREGOR, Miroslav. Technologie a technika lepení - základní informace. In: *Lepidla.cz* [online]. Broumov: Z - TRADE s. r. o., 2013 [cit. 2016-07-11]. Dostupné z: <http://www.lepidla.cz/cs/a/technologie-a-technika-lepeni--zakladni-informace.html>
- [7] PETERKA, Jindřich. *Lepení konstrukčních materiálů ve strojírenství*. Praha: SNTL, 1980.
- [8] DOUBRAVA, Karel a Michal SMOLEN. *Zkoušky lepidel a sendvičů*. Fakulta strojní ČVUT v Praze, 2012.