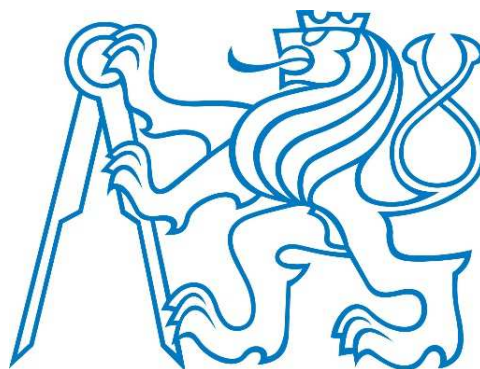


ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

FAKULTA STROJNÍ



BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vyvažování tuhých těles

## I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Kocián** Jméno: **Vladislav** Osobní číslo: **420527**  
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**  
Zadávací katedra/ústav: **Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**  
Studijní program: **Teoretický základ strojního inženýrství**  
Studijní obor: **bez oboru**

## II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

**Vyvažování tuhých těles**

Název bakalářské práce anglicky:

**Balancing of rigid bodies**

Pokyny pro vypracování:

1) Proveďte rešerši zařízení a metodiky určování nevyváženosti rotujících součástí a jejich vyvažování. 2) Navrhněte výukovou úlohu na vyvažování těles s orientací na tvorbu výukového modelu. Předpokládaný rozsah práce: 35 stran.

Seznam doporučené literatury:

Stejskal V.; Brousil J., Stejskal V.: Mechanika III. Praha: ČVUT v Praze, 1993. ISBN 80-01-00918-1.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

**Ing. Jan Zavřel Ph.D.**

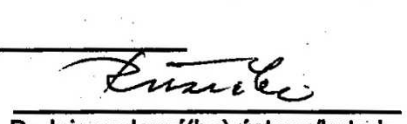
Jméno a pracoviště konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: **21.04.2016**

Termín odevzdání bakalářské práce: **12-08-2016**

Platnost zadání bakalářské práce: \_\_\_\_\_

  
Podpis vedoucí(ho) práce

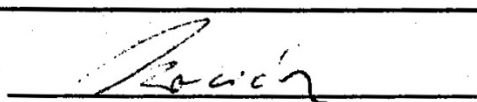
  
Podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

  
Podpis děkana(ky)

## III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

**25.4.2016**

Datum převzetí zadání

  
Podpis studenta(ky)

## Anotační list

<b>Jméno autora:</b>	Vladislav Kocián
<b>Název bakalářské práce:</b>	Vyvažování tuhých těles
<b>Anglický název:</b>	Balancing of rigid bodies
<b>Akademický rok:</b>	2015/2016
<b>Studijní obor:</b>	Teoretický základ strojího inženýrství
<b>Ústav, obor:</b>	Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky Odbor mechaniky a mechatroniky
<b>Vedoucí bakalářské práce:</b>	Ing. Jan Zavřel, Ph.D.
<b>Bibliografické údaje:</b>	81 stran 57 obrázků 1 tabulka 3 schémata 7 příloh příloha - CD
<b>Klíčová slova:</b>	Vyvažování, Tuhé těleso, Nevyváženost, Rotor, Odstředivá síla
<b>Key words:</b>	Balancing, Rigid body, Unbalance, Rotor, Centrifugal force

## **Abstrakt**

Tato bakalářská práce se zabývá problematikou vyvažování tuhých těles. Na začátku práce je popsáno, jak lidé dospěli k potřebě zavést a postupně zdokonalovat technologie vyvažování. Dále jsou uvedeny základní poznatky z teorie vyvažování, včetně příčin vzniku nevyváženosti a následně její důsledky. V další části práce je přehled aparatury na měření projevů nevyváženosti a jsou popsány v praxi používané metody na odstranění těchto projevů. Hlavním cílem této práce je navrhnout na základě znalostí z teorie vyvažování výukový model, který by bylo možno používat pro praktickou ukázkou vyvažovacího postupu. Důraz je přitom kladen na realizovatelnost výukové úlohy a názornost pro případné řešitele.

## **Abstract**

This bachelor's thesis deals with balancing of rigid bodies. At the beginning of this thesis there is a description of what lead people to the need of implementing and progressively improving balancing technologies. Then the basics of balancing are mentioned including the cause of unbalance and its consequences. Following chapters give an overview of equipment used for measuring the effects of unbalance and describe some of the most used methods for eliminating these effects. The main goal of this thesis is to design an educational model that could be used for a practical demonstration of a balancing process. It is important to make the design so that the school exercise based of it could be put into practice and would be illustrative for potential solver.

# Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady uvedené v přiloženém seznamu literatury.

V Praze dne \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

podpis

## Poděkování

Děkuji vedoucímu mé bakalářské práce, panu Ing. Janu Zavřelovi, Ph.D., za cenné rady a připomínky při vypracovávání této bakalářské práce a za čas investovaný do konzultací a do kontroly této práce. Dále děkuji svým rodičům za podporu a možnost bezstarostného studia.



# Obsah

1. Přehled použitých značek a zkratek.....	7
2. Úvod.....	9
3. Cíle práce .....	11
4. Z teorie vyvažování .....	12
4.1 Příčiny vzniku nevyváženosti.....	14
4.2 Projevy nevyváženosti rotoru .....	14
4.3 Obecná nevyváženost .....	15
4.4 Druhy nevyváženosti .....	17
4.4.1 Nevyváženost statická .....	17
4.4.2 Nevyváženost kvazistatická .....	18
4.4.3 Nevyváženost momentová (dvojicová) .....	19
4.4.4 Nevyváženost obecná (dynamická) .....	19
4.5 Dynamické vyvažování tuhých a poddajných rotorů .....	20
5. Měření projevů nevyváženosti .....	21
5.1 Měření amplitudy určující veličiny kmitání.....	21
5.2 Měření fáze kmitu .....	22
5.3 Akcelerometr.....	23
5.3.1 Piezoelektrický akcelerometr .....	23
5.3.2 Kapacitní MEMS akcelerometr .....	24
5.3.3 Piezorezistivní akcelerometr.....	24
5.4 Snímače rychlosti .....	25
5.5 Snímače výchylky (polohy) .....	26
5.5.1 Indukčnostní snímače polohy .....	26



6.	Vyvažovací metody .....	27
6.1	Vyvažování v jedné rovině.....	27
6.1.1	Statické vyvažování – přípravky a metody.....	27
6.1.2	Třípolohová metoda .....	30
6.1.3	Dvoupolohová metoda .....	31
6.1.4	Jednopolohová metoda .....	33
6.2	Vyvažování ve dvou rovinách.....	34
6.2.1	Pravá rovina - levá rovina .....	34
6.2.2	Postupná eliminace statické a dvojicové nevyváženosti.....	35
7.	Vyvažovací stroje .....	36
7.1	Rezonanční (doběhové) vyvažovací stroje.....	37
7.2	Kompenzační vyvažovací stroje .....	37
7.3	Vyvažovací stroje s přímou indikací naměřených veličin.....	38
8.	Praktická část – návrh výukového modelu .....	40
8.1	První návrh modelu .....	40
8.2	Druhý návrh modelu .....	42
8.3	Optimalizace modelu .....	43
8.4	Pohybové rovnice rotujícího tělesa.....	45
8.5	Odvození rovnic pro vyvažování tuhých těles.....	48
8.6	Řešení výukové úlohy – vyvážení tuhého rotoru .....	52
8.6.1	Hmotové vlastnosti rotoru.....	52
8.6.2	Hmotové vlastnosti nevyvážku .....	55
8.6.3	Hmotové vlastnosti soustavy.....	59
8.6.4	Řešení vyvažovacích rovnic – metoda inverzní matice.....	61
8.6.5	Řešení vyvažovacích rovnic – symbolický výpočet .....	62

8.7	Dynamika výukového modelu.....	66
8.7.1	Rozběh rotoru s nevyvážkem.....	66
8.7.2	Výpočet přidavného zatížení od nevyváženosti .....	68
9.	Závěr .....	74
10.	Seznam obrázků, schémat a tabulek .....	75
11.	Použité zdroje a literatura .....	78
12.	Seznam příloh .....	81

## 1. Přehled použitých značek a zkratek

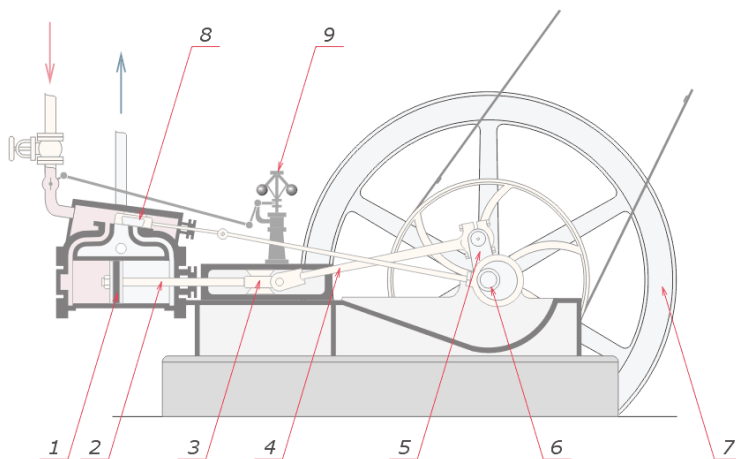
$a$ [ $m \cdot s^{-2}$ ]	... zrychlení
$D$ [ $kg \cdot m^2$ ]	... deviační moment
$D_n, D_t, D_b$ [ $N$ ]	... setrvačné síly
$e, r$ [ $m$ ]	... poloměry
$F$ [ $N$ ]	... síla
$H$ [ $kg \cdot m \cdot s^{-1}$ ]	... hybnost
CHOS	... centrální hlavní osa setrvačnosti
$I$ [ $kg \cdot m^2$ ]	... moment setrvačnosti
$L$ [ $kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$ ]	... moment hybnosti
$l$ [ $m$ ]	... délka rotoru
$m$ [ $kg$ ]	... hmotnost
$M$ [ $N \cdot m$ ]	... moment síly
$M^D$ [ $N \cdot m$ ]	... moment setrvačnosti
MEMS	... z anglického „micro-electro-mechanical systems“
$N$ [ $m \cdot kg$ ]	... velikost nevyvážku
$n$ [ $min^{-1}$ ]	... otáčky za minutu
OR	... osa rotace
$P$ [ $W$ ]	... výkon

$R [N]$	... velikost reakce
$S$	...středisko hmotnosti
$t [s]$	... čas
$V [m.kg]/[m^3]$	... velikost vývažku/objem
$v [m.s^{-1}]$	... rychlost
$W [m.kg]$	... velikost pomocného vývažku
$x_T [m]$	... souřadnice těžiště
$X_V [m]$	... velikost výkmitu
$\omega [s^{-1}]$	... úhlová rychlost
$\alpha [s^{-2}]/[m]$	... úhlové zrychlení/příčinkový činitel
$\beta [-]$	... polohový úhel
$\varepsilon [m]$	... excentricita
$\varphi [-]$	... fáze
$\rho [kg.m^{-3}]$	... hustota
$\psi [-]$	... polohový úhel

## 2. Úvod

Historie lidstva je spjata se stálou snahou o snížení námahy potřebné k vykonání nezbytné práce pro udržení života. Produktem této snahy jsou mimo jiné mechanismy i tak jednoduché, jako je například páka. Po prvních objevech následovala řada dalších a již Leonardo da Vinci (1452 – 1519) využíval ve svých vynálezech principy statické vyváženosti, což prostředkem k usnadnění pohybu mechanismů pomocí pohyblivých protizávaží [2] [7].

První stroje s rotujícími součástmi pracovaly při nízkých otáčkách a jejich případné nevyvážení se projevilo nejvíce jistou nerovnoměrností chodu. Na počátku 19. století se začaly rozšiřovat Wattovy parní stroje (Obrázek 1), které měly mohutný základní rám, který mohl pohlcovat nepříjemné účinky nevyvážené hmoty, navíc jejich otáčky dosahovaly pouze hodnot 30 až 40 min<sup>-1</sup>. Až koncem 19. století byly otáčky zvyšovány postupně na 150 min<sup>-1</sup>, výjimečně až 300 min<sup>-1</sup>, což výrazně zvýšilo namáhání celé konstrukce. Problémem tou dobou nebylo ani tak vlastní vyvážení těžkého setrvačníku, ale setrvačné účinky jiných pohyblivých částí mechanismu (posuvný píst a křížák, ojnice a klikový hřídel) [7].



Obrázek 1 – Wattův parní stroj  
(wikipedia.org)

- 1 – Píst
- 2 – Pístní tyč
- 3 – Křížák
- 4 – Ojnice
- 5 – Klika čepu ojnice
- 6 – Excentrický mechanismus
- 7 – Setrvačník
- 8 – Šoupátko
- 9 – Wattův odstředivý regulátor

Na přelomu 19. a 20. století byly do průmyslu zaváděny parní turbíny a kompresory, jejichž rotory dosahovaly vysokých provozních otáček. Kolem roku 1900 existovaly turbíny s otáčkami 3000 min<sup>-1</sup> a během následujících dvaceti let byly vyrobeny turbíny s otáčkami až 7500 min<sup>-1</sup> [7]. Při takto vysokých otáčkách je nezbytně nutné, aby rotační

součást byla co nejlépe vyvážena, jelikož dynamické účinky takovéto soustavy jsou velmi silné. Na scénu vstoupilo dynamické vyvažování ve dvou rovinách a různé metody měření kmitání soustav.

### 3. Cíle práce

Na základě zadání této bakalářské práce jsem stanovil cíle, kterých se pokusím během jejího psaní dosáhnout. Tyto cíle jsou uvedeny v této krátké kapitole.

Cílem mé bakalářské práce je seznámit čtenáře se základy problematiky vyvažování tuhých těles. Po přečtení úvodních kapitol by mělo být objasněno, co se rozumí pojmem nevyváženost, co je příčinou jejího vzniku a proč se ji snažíme před uvedením rotační součásti do provozu odstranit.

Úkolem rešerše je poskytnout obecný přehled o procesu vyvažování. Vyvažovací proces začíná potřebou změřit vnější projevy nevyváženosti, pokračuje volbou vhodné vyvažovací metody a končí provedením samotného vyvažování. Cílem této části práce je uvést nejpoužívanější zařízení a postupy při provádění těchto jednotlivých kroků.

Výstupem praktické části této práce by měl být model součásti, kterou je třeba vyvážit. Tento model by měl být vhodný pro použití ve výukové úloze a jeho rozměry a hmotnost je třeba volit tak, aby ho bylo možno po případné výrobě využít při laboratorním cvičení. Součástí praktické části by mělo být řešení problému vyvážení navrhnutého modelu.

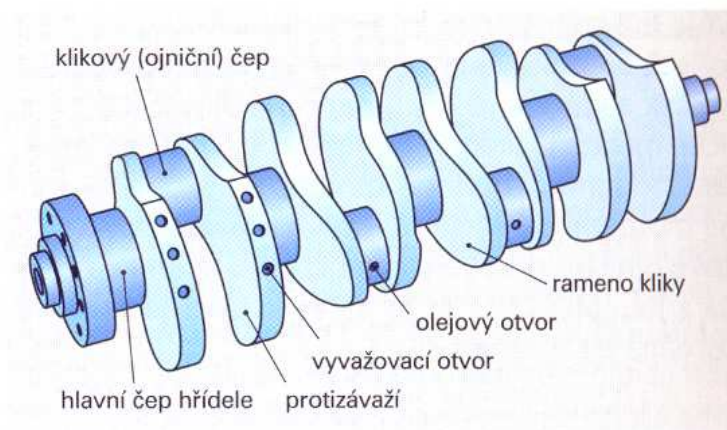
## 4. Z teorie vyvažování

V technické praxi je většina součástí jdoucích z výroby nevyvážena a musí být podstoupeny další operace, abychom se této nevyváženosti zbavili. Pojmeme nevyváženost označujeme takový stav rotační součásti, kdy hlavní centrální osa setrvačnosti rotoru není shodná s osou rotace. Postup, při kterém se snažíme odstranit nežádoucí nevyváženost, nazýváme vyvažování a je to záměrné přidávání či ubírání hmoty s cílem sloučit obě uvedené osy v jednu.

To, jak moc je rotační součást nevyvážena, nám udávají nevyvážky  $N$ . Nevývažek je definován svou hmotností  $m$  a vzdáleností jeho těžiště od osy rotace  $e$  (*poloměr nevyvážku*) vztahem  $N = me$ . Vyjadřuje odstředivou sílu podělenou kvadrátem úhlové rychlosti, tj.  $N = \frac{F}{\omega^2}$  [7]. Z toho plyne, že rozměr nevyvážku se udává v  $m \cdot kg$ . Přípustnou nevyváženost rotoru o hmotnosti  $M$  s provozními otáčkami  $\omega$  kvantifikujeme veličinou  $\varepsilon_p \omega$  [ $mm \cdot s^{-1}$ ] [11]:

$$\varepsilon_p \omega = \frac{me}{M} \omega 10^3 \quad (4.1)$$

Při vyvažování není většinou možné dosáhnout úplného odstranění nevyváženosti. Nevyváženost tělesa po provedení vyvažovací operace se nazývá *zbytková nevyváženost*. Ta musí být menší, než přípustná nevyváženost, která je určena na základě budoucího využití součásti. Některé technické aplikace vyžadují absolutně minimální zbytkové nevyvážení, jedná se především o součásti pracující při vysokých



Obrázek 2 – klikový hřídel s vyvažovacími otvory (publi.cz)



otáčkách. Jako příklad takového typu součásti můžeme uvést klikový hřídel motorů automobilů (Obrázek 2), jehož otáčky se mohou dostat i na  $7000 \text{ min}^{-1}$ .

Pro jiné strojní součásti jsou přípustné vyšší hodnoty zbytkové nevyváženosti, jelikož nepracují při tak vysokých provozních otáčkách. Jako příklad můžeme uvést řezací buben řezačky John Deere 7780<sup>1</sup>, jehož pracovní otáčky jsou  $1000 \text{ min}^{-1}$  [16]. Na Obrázku 3 je příklad obdobného řezacího bubnu od firmy Krone.



Obrázek 3 – příklad řezacího bubnu - firma Krone (liva.cz)

Existují i technické aplikace, ve kterých je naopak nevyváženost požadována. Jako známý příklad lze uvést vibrace u mobilních telefonů. Ty jsou vyvolány vibračními motorky (viz Obrázek 4), které využívají nevyvážené hmoty k vytvoření vibrací, které se přenáší do těla telefonu. Tyto motorky jsou miniaturní konstrukce, avšak pracují při velmi vysokých otáčkách (až  $10000 \text{ min}^{-1}$ ) a jsou tedy schopny vyvolat kmitání dost silné, aby bylo rozpoznatelné pro lidské tělo [13].



Obrázek 4 – vibrační motorek z telefonu Nokia Lumia 610 (mobilcentrum.cz)

---

<sup>1</sup> Jedná se o samojízdnu polní řezačku.

## 4.1 Příčiny vzniku nevyváženosti

Příčiny vzniku nevyváženosti lze rozdělit do 4 nadřazených kategorií [10] [7]:

- Projekční nevyváženost – důsledek špatného konstrukčního řešení
  - Chybné uspořádání součástí
  - Odchytky způsobené kumulací chyb z tolerancí rozměrů
- Výrobní nevyváženost – nedokonalost výroby, nedodržení výrobních postupů či použití nevhodné technologie
  - Nehomogenní materiál (hlavně u odlitků a výrobků tvářených za studena)
  - Neobrobené plochy
  - Trvalá deformace ohnutím, naražením, ...
  - Chyby při montáži
- Funkční nevyváženost – způsobená funkcí stroje (např. působení pracovních látek v odstředivých bubnech, pračky, vibrační motorky, ...)
- Provozní nevyváženost – deformace rotoru vlivem provozního zatížení
  - Uvolnění částí rotoru odstředivými silami
  - Deformace vyvolané teplotami rotoru při pracovním zatížení, nesymetrické rozložení teplotního pole při stojícím rotoru
  - Usazování cizích látek na povrchu rotoru (zasolování u parních turbín, prach na rotorech elektrických strojů, ...)

## 4.2 Projevy nevyváženosti rotoru

Nevyváženost vyvolaná výrobními, ale i funkčními příčinami je zdrojem budících sil, které působí na rám stroje a přes základ ovlivňuje celé okolí stroje. Dynamickými silami od nevyváženosti je přidavně namáhán rotor i ložiskové uložení a při zvýšeném kmitání může dojít k vymezení vůle mezi rotorem a statorem a tím pádem ke zničení celého stroje. Účinky nevyváženosti jsou ještě silnější, pokud jsou provozní otáčky blízké některé z vlastních frekvencí celé soustavy tvořené rotorem, ložiskovými podpěrami, statorem a základem spolu se vzájemnými dynamickými tuhostmi těchto částí [7]. Účinky nevyváženosti však nemusí být okamžité a mohou se projevit i jinak, než kritickým lomem součásti.

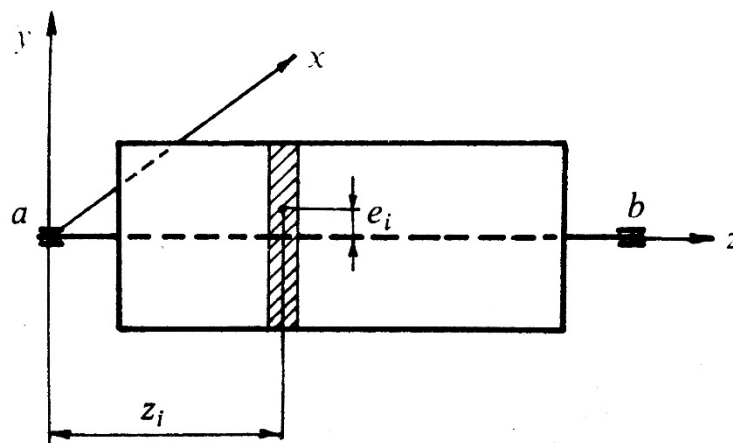
Další projevy nevyváženosti:

- Snížená životnost strojů
- Zvýšená poruchovost
- Snížená životnost maziv a ložisek
- Zvýšená hladina rezonancí, hluku
- Snížená přesnost/produktivita strojů

Při provozu nevyvážených součástí obecně dochází ke snížení bezpečnosti práce. Vibrace mohou například snížit tření ve šroubovém spoji do té míry, že se rozpadne. Při kmitání elektrických součástí může dojít k porušení vodičů, následnému zkratu a k ohrožení úrazem elektrickým proudem [4].

#### 4.3 Obecná nevyváženost

U obecného rotoru je rozložení nevyváženosti podél délky zcela nepravidelné. Mějme rotor schematicky nakreslený na *Obrázku 5*, který rozdělíme na  $n$  nekonečně malých dílků. Hmotnosti jednotlivých dílků označíme  $m_i$  a vzdálenosti těžišť jednotlivých dílků od osy  $z$   $e_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ).



Obrázek 5 – schematické znázornění rotoru (převzato ze zdroje [7])

Při otáčení tohoto rotoru úhlovou rychlostí  $\omega$  bude v těžišti každého z elementárních dílků působit odstředivá síla o velikosti

$$F_i = m_i e_i \omega^2 \quad (4.2)$$

S výhodou můžeme tyto síly rozložit do složek ve směru os x a y:

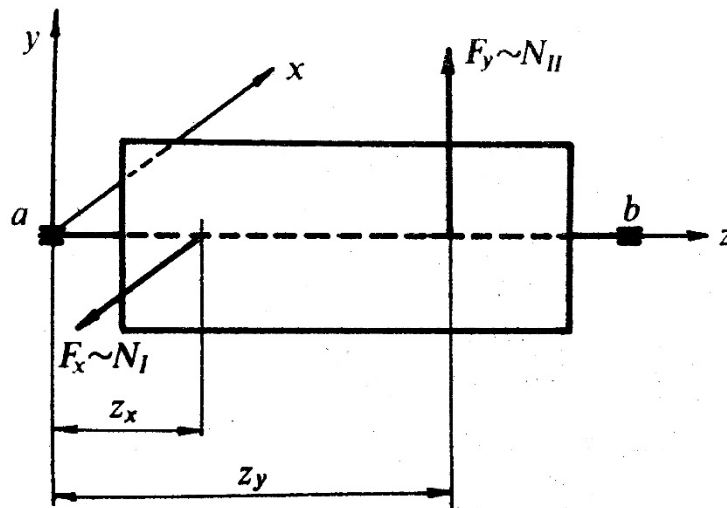
$$F_{ix} = m_i e_{ix} \omega^2 \quad (4.3)$$

$$F_{iy} = m_i e_{iy} \omega^2 \quad (4.4)$$

Sečtením síly od  $n$  dílků dostaneme celkovou sílu působící ve směru osy x, respektive y:

$$F_x = \omega^2 \sum_{i=1}^n m_i e_{ix} \quad (4.5)$$

$$F_y = \omega^2 \sum_{i=1}^n m_i e_{iy} \quad (4.6)$$



Obrázek 6 – rozklad sil do směrů os x a y (převzato ze zdroje [7])

Pro určení souřadnic působišť náhradních sil použijeme podmínku rovnováhy momentů k ložisku  $a$ . Suma momentů od sil  $F_{ix}$  k ose y, na které leží bod  $a$  musí být rovna momentu k té samé ose od výslednice  $F_x$ . Píšeme tedy podle Obrázku 6:

$$M_x(a) = \omega^2 \sum_{i=1}^n m_i e_{ix} z_i = \omega^2 \left( \sum_{i=1}^n m_i e_{ix} \right) z_x \quad (4.7)$$

$$z_x = \frac{\sum_{i=1}^n m_i e_{ix} z_i}{\sum_{i=1}^n m_i e_{ix}} \quad (4.8)$$

Obdobně pro  $F_y$ :

$$M_y(a) = \omega^2 \sum_{i=1}^n m_i e_{iy} z_i = \omega^2 \left( \sum_{i=1}^n m_i e_{iy} \right) z_y \quad (4.9)$$

$$z_y = \frac{\sum_{i=1}^n m_i e_{iy} z_i}{\sum_{i=1}^n m_i e_{iy}} \quad (4.10)$$

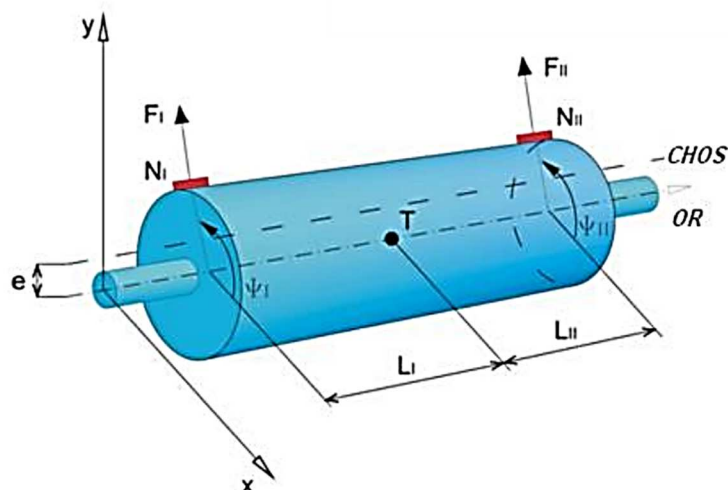
Tímto způsobem jsme dokázali popsat obecnou nevyváženost pomocí dvou náhradních nevyvážků. Ze vztahů je také patrné, že souřadnice působišť náhradních sil nejsou závislé na úhlové rychlosti, z čehož plyne důležitý poznatek, že vyvažování můžeme provádět při libovolných otáčkách [7].

#### 4.4 Druhy nevyváženosti

Z teoretického hlediska mohou vznikat čtyři speciální druhy nevyvážeností, které jsou určeny vzájemným vztahem mezi osou rotace rotoru a hlavní centrální osou setrvačnosti rotoru [3]. Tento vztah je přímo svázán s umístěním nevyvážků na rotující součásti. Popíšme teoretický rotor pomocí jeho délky  $l$  a dále jej charakterizujme pomocí dvou nevyvážků  $N_1$  a  $N_2$ , jejichž poloha je určena rovinami, ve kterých leží a úhly  $\psi_1$  a  $\psi_2$  [7].

##### 4.4.1 Nevyváženost statická

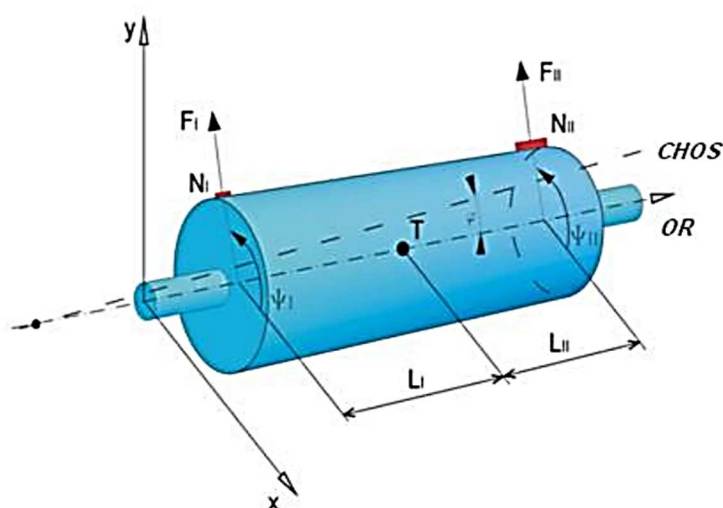
Předpokládejme, že roviny, v nichž leží oba nevyvážky jsou od těžiště symetricky vzdáleny o vzdálenost  $l/2$ . Velikost prvního nevyvážku  $N_1$  se rovná velikosti  $N_2$  a polohové úhly  $\psi_1$  a  $\psi_2$  jsou shodné. V takovémto případě dojde pouze k posunutí hlavní centrální osy setrvačnosti z osy rotoru (*Obrázek 7*) a obě osy budou rovnoběžné – rotor je staticky nevyvážen [3]. Při rotaci staticky nevyváženého tuhého rotoru sice vznikají odstředivé síly, ale moment těchto sil vzhledem k těžišti je nulový [7]. Takto nevyvážený rotor je možné vyvážit umístěním pouze jednoho vývažku do roviny těžiště kolmé k ose rotoru [18].



Obrázek 7 – nevyváženost statická (kvm.tul.cz)

#### 4.4.2 Nevyváženost kvazistatická

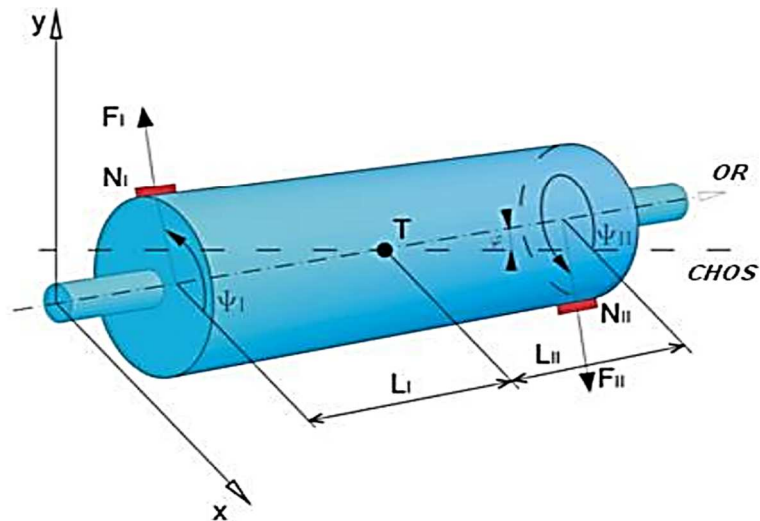
Pokud budou polohové úhly  $\psi_1$  a  $\psi_2$  stejné, ale velikosti nevyvážků  $N_1$  a  $N_2$  rozdílné, dojde k posunutí i natočení hlavní centrální osy setrvačnosti od osy rotace a tyto dvě osy budou vzájemně různoběžné (Obrázek 8). Oba nevyvážky dávají po složení výslednici, která bude ležet v rovině určené osou rotace a hlavní centrální osou setrvačnosti. Z toho plyne, že kvazistatickou nevyváženost lze odstranit umístěním jednoho nevyvážku do té samé roviny [3] [7].



Obrázek 8 – nevyváženost kvazistatická (kvm.tul.cz)

#### 4.4.3 Nevyváženost momentová (dvojicová)

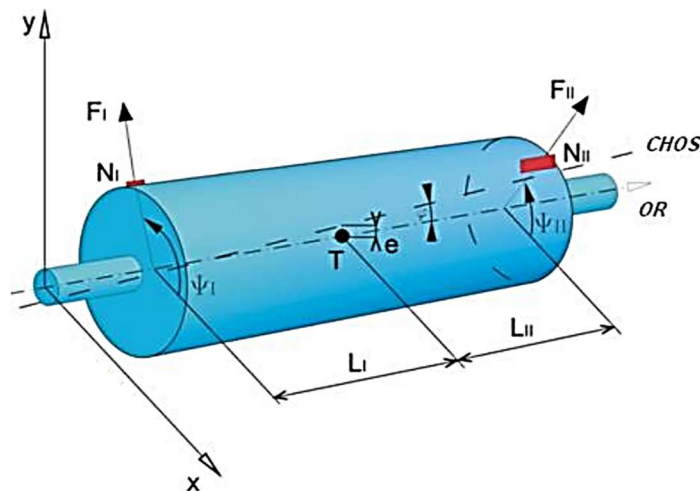
Nevyváženost dvojicová vzniká, pokud máme na rotoru dva stejné nevyvážky, mezi jejichž polohovými úhly je  $180^\circ$  ( $\psi = |\psi_1 - \psi_2| = 180^\circ$ ). V takovémto případě dojde pouze k natočení hlavní centrální osy setrvačnosti rotoru a ta bude protínat osu rotace ve středu rotoru (Obrázek 9), který je zároveň těžištěm (k posunu těžiště v tomto případě nedochází). Výslednice vektorů nevyvážek  $N_1$  a  $N_2$  je nulová [3] [7].



Obrázek 9 – nevyváženost momentová (kvm.tul.cz)

#### 4.4.4 Nevyváženost obecná (dynamická)

V praxi se jedná o nejčastější typ nevyváženosti. Nevyvážky  $N_1$  a  $N_2$  i polohové úhly  $\psi_1$  a  $\psi_2$  jsou zcela obecné a hlavní centrální osa setrvačnosti s osou rotace jsou mimoběžné (Obrázek 10). Tento druh nevyváženosti je kombinací nevyváženosti statické a dvojicové, z nichž větší dopad na chod součásti má většinou nevyváženost statická [3] [7].



Obrázek 10 – nevyváženost dynamická (kvm.tul.cz)

#### 4.5 Dynamické vyvažování tuhých a poddajných rotorů

V této práci se omezíme na dynamické vyvažování tuhých rotorů a nebudeme se zabývat problematikou rotorů poddajných. Za tuhý rotor můžeme považovat takový, který se za rotace nedeformuje působením odstředivých sil. Neměnnost svého tvaru si zachovává nezávisle na frekvenci otáčení či na způsobu uložení. Při rotaci nevyváženého tuhého rotoru vznikají v ložiskách nežádoucí reakce. Velikost těchto reakcí závisí na poloze osy rotace vzhledem k hlavní ose setrvačnosti, na úhlové rychlosti rotoru  $\omega$  a na úhlovém zrychlení  $\alpha$ . Vhodným umístěním vhodných vyvažovacích hmot do dvou libovolných vyvažovacích rovin lze tyto nežádoucí dynamické účinky eliminovat a rotor se stane vyváženým. Problematika vyvážení poddajného rotoru je složitější. Volnost ve výběru vyvažovacích rovin má za následek to, že nevyváženost není obecně kompenzována v místě, kde působí a v rotoru tedy vzniká vnitřní ohybový moment. U dostatečně tuhého rotoru z toho pro nás neplynou žádné negativní vlivy, avšak u „málo“ tuhých rotorů je tento efekt nezanedbatelný z hlediska bezpečnosti provozu. Dynamická tuhost rotoru je závislá na otáčkách a při tzv. kritických otáčkách klesá teoreticky na nulové hodnoty [7]. Tímto způsobem se i z tuhého rotoru může stát rotor poddajný. V takovém případě se vlivem deformací i velmi dobře vyvážený rotor stává nevyváženým a reakce do ložisek velice rychle rostou. Dynamický průhyb může velice snadno dosáhnout hodnot, kdy dochází k trvalým deformacím rotoru, či dokonce ke kritickému lomu. O dynamice pružného rotoru se lze dočíst např. ve zdroji [5], v téže publikaci je popsáno přímo i kmitání hřídele vyvolané nevyvážeností (str. 92).



## 5. Měření projevů nevyváženosti

Pro určení nevyváženosti dané součásti je třeba měřit vnější projevy odstředivých sil, které jsou důsledkem oné nevyváženosti. Měření se většinou provádí v místě ložiskových podpěr. Obvykle se snažíme změřit amplitudu a fázi první harmonické některé z určujících veličin kmitání. Amplitudy jednotlivých veličin (poloha, rychlost, zrychlení) jsou vázány integrací, popř. derivací, je tedy možné dané veličiny vzájemně přepočítávat. Tento přepočet však není vždy přesný, jelikož např. při integraci přicházíme o integrační konstanty. Je tedy třeba zvážit na základě charakteru kmitání, kterou z výše uvedených veličin je neoptimálnější měřit [7].

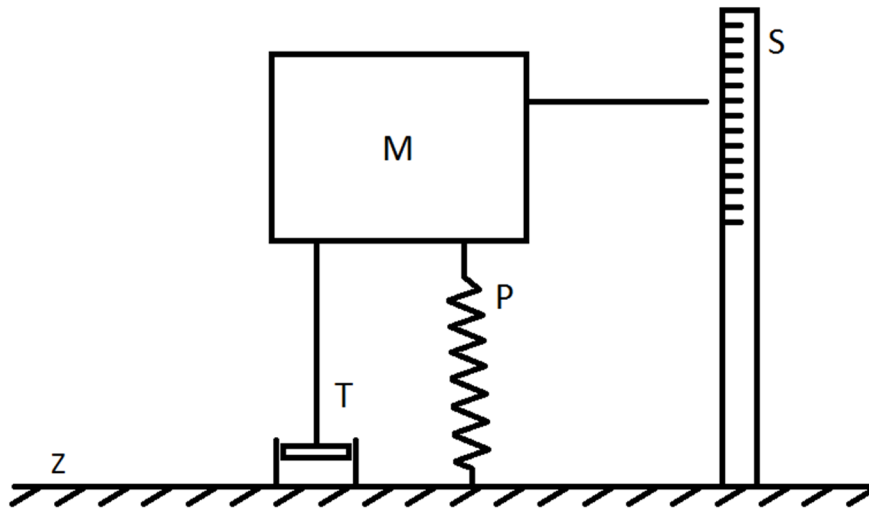
### 5.1 Měření amplitudy určující veličiny kmitání

Přístroje na měření amplitudy kmitání obsahují tři základní složky: snímací, převodovou a indikační. Podle toho, na jakém principu pracuje snímací část přístroje, rozdělujeme je na přístroje mechanické, optické a elektrické. Snímací část měřicího systému je nejdůležitější, jelikož rozhoduje o způsobu dodání příkonu pro část indikační – příkon může být dodáván buď ze samotné kmitající soustavy, nebo z pomocného zdroje ovládaného výstupním signálem snímače kmitů. Podle umístění rozdělujeme snímače na absolutní a relativní.

Pomocí relativních snímačů měříme kmitání soustavy vzhledem k jinému, referenčnímu tělesu. Jedna část snímače je pevně spojena s referenčním tělesem a s druhou částí (která se pohybuje spolu s kmitající soustavou) je spojena mechanicky, opticky, či jiným způsobem.

Absolutní snímače jsou mechanicky pevně spojeny s místem měření a obsahují tzv. seizmickou soustavu, jejíž hmotu můžeme s jistou dávkou nepřesnosti považovat za těleso v absolutním klidu. Schéma takové seizmické soustavy je zobrazeno na *Obrázku 11*. Základna  $Z$  je kmitající místo pevně spojeno s měřicí stupnicí  $S$ . Dále je přes pružinu připojena setrvačná hmota  $M$ . Při kmitání systému dochází k vzájemnému pohybu základny a setrvačné hmoty, který je vhodně tlumen tlumičem  $T$ . Právě tento

relativní pohyb lze měřit na stupnici  $S$ , popř. tímto pohybem je podmíněn vznik napěťového signálu pro převodník či indikátor [7].



Obrázek 11 – schéma seizmického systému (převzato ze zdroje [7])

## 5.2 Měření fáze kmitu

Pojmem fáze kmitu máme na mysli úhel, který svírá vektor kmitu s danou referenční rovinou. Fázi můžeme určit pouze u harmonického kmitání a jedná se o argument sinové funkce popisující toto kmitání. Při vyvažování je znalost fáze kmitání klíčová pro zvolení správné polohy vývažku. Je tedy nutné měřit fázi co nejpřesněji, což je občas problematické, obzvláště při provozním vyvažování, kdy dochází k ovlivnění kmitání i jinými vlivy, než pouze nevyvážeností. Pro měření fáze kmitání musíme vytvořit vazbu mezi rotační součástí a měřícím aparátem.

Podle způsobu vytvoření této vazby rozdělujeme přenos informace na mechanický, optický, fotoelektrický a elektrický. Realizace měření přes mechanickou vazbu je vývojově nejstarší a v současnosti už nemá velké uplatnění v technické praxi. Při optické vazbě se využívá stroboskop jako vazební člen. Stroboskopickou lampou osvětlujeme intenzivními záblesky rotor. Kmitočet záblesků je stejný, jako frekvence otáčení rotoru. Záblesky jsou vyvolány elektrickými impulsy, které jsou odvozeny ze signálu elektromagnetického snímače. Připevněním stupnice (0 až 360°) na rotor jsme schopni odečítat fázový úhel proti pevné značce. Měření fáze touto metodou je výhodné v tom, že jej lze provádět prakticky na jakémkoli strojním zařízení, avšak přesnost této metody je nízká. Mezi novější typy indikátorů patří ty, které pracují s elektrickou vazbou. Jako

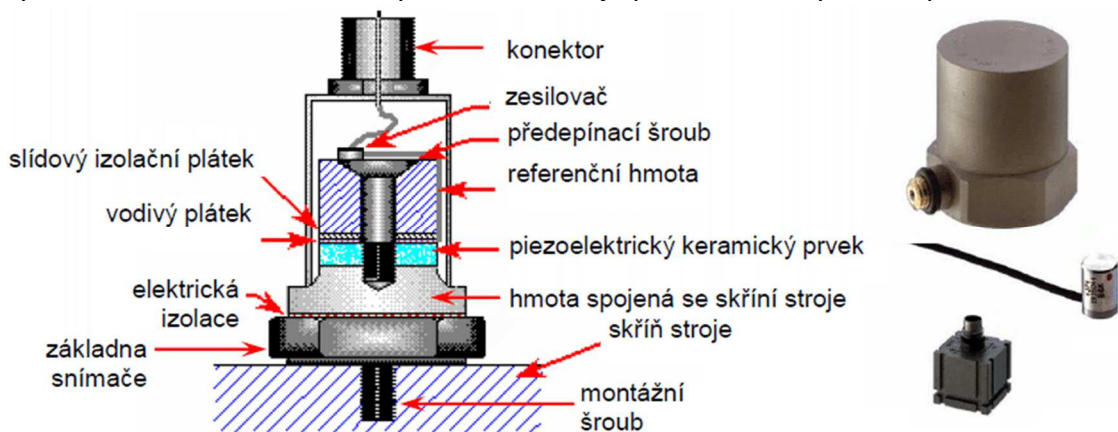
příklad můžeme uvést indukční měniče fáze. Skládají se ze dvou generátorů – vysílacího a přijímacího. Úhlová poloha rotoru přijímacího generátoru je libovolně nastavitelná. V tomto rotoru se indukují napětí s konstantní amplitudou s kmitočtem shodným s otáčkami vyvažované součásti. Fáze indukovaného napětí je pak dána natočením rotoru přijímacího generátoru. Při měření této fáze porovnáváme úhlové posunutí napětí snímače vzhledem k referenčnímu napětí [7].

### 5.3 Akcelerometr

Akcelerometr neboli snímač zrychlení, je zpravidla absolutní snímač kmitání, který k snímání pohybu využívá nejčastěji seizmickou hmotu. Jsou v praxi hojně využívaným typem snímače, především díky masové výrobě polovodičových technologií a snadno dostupným digitálním obvodům zpracování signálu a komunikace. Nevýhodou je, že při montáži akcelerometru se změní hmotnost měřeného objektu a může dojít i k ovlivnění frekvenčních vlastností. Proto není vhodné využívat tyto snímače na malé objekty. V současnosti se běžně využívají tři typy akcelerometrů – piezoelektrický, kapacitní MEMS a piezorezistivní [3] [12].

#### 5.3.1 Piezoelektrický akcelerometr

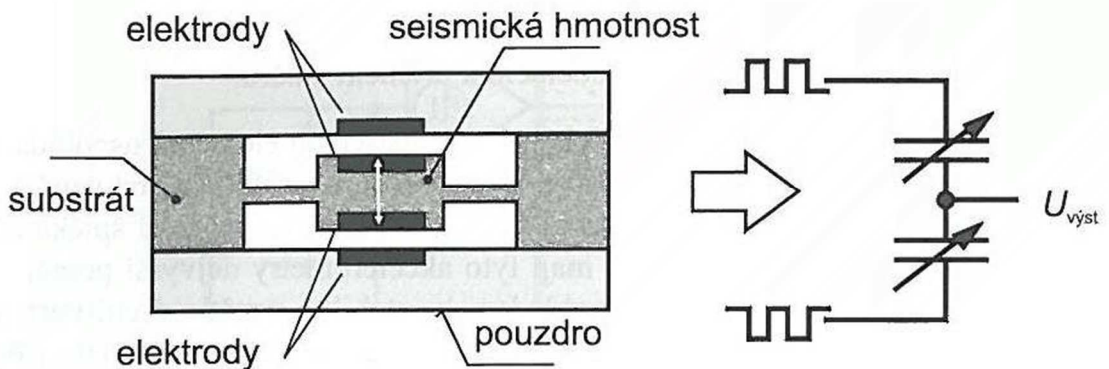
Jejich funkce je založena na piezoelektrickém jevu. Zabudovaný piezokrystal (Obrázek 12) vytváří při své deformaci signál, který je přímo úměrný zrychlení. Snímače pracující na tomto principu se vyznačují malou hmotností, dobrou citlivostí a vysokou vlastní frekvencí. V základním provedení jsou použitelné v rozsahu jednotek  $Hz$  až do přibližně  $40\text{ kHz}$ . Díky tomu, že je jejich základna oddělena od snímací části, jsou také vysoce odolné vůči mechanickým vlivům a lze je používat i za vyšších teplot [12].



Obrázek 12 – piezoelektrický akcelerometr (převzato ze zdroje [12])

### 5.3.2 Kapacitní MEMS akcelerometr

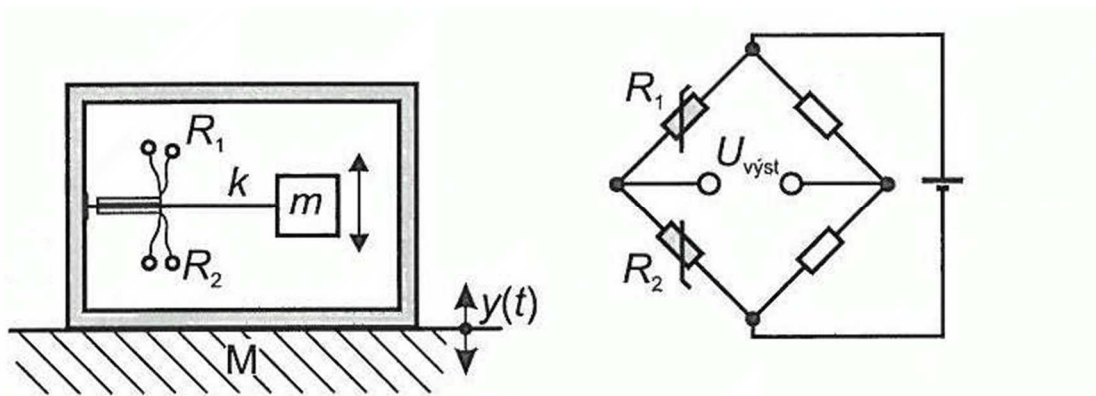
Kapacitní MEMS (MicroElectroMechanical Systems) akcelerometry jsou široce využívaným typem snímače po dobu posledních deseti let. Jejich funkce je založena na měření vychýlení mikrometrové mechanické soustavy pomocí změny kapacity pohyblivých elektrod vůči elektrodám pevným (změna kapacity kondenzátoru). Na následujícím obrázku je schéma takového snímače.



Při pohybu seismické hmoty se, jak je patrné z *Obrázku 13*, jedna kapacita zvětšuje a druhá zmenšuje, vyhodnocuje se tedy rovnou rozdíl hodnot kapacit. Naznačená struktura je zabudována společně s analogovými a digitálními obvody uvnitř integrovaného obvodu, což poskytuje velice odolný a spolehlivý senzor. Jejich frekvenční rozsah bývá 0 až 6 kHz. Vyznačují se malými rozměry, ale většinou jsou dražší a méně odolné, než snímače piezoelektrické [12].

### 5.3.3 Piezorezistivní akcelerometr

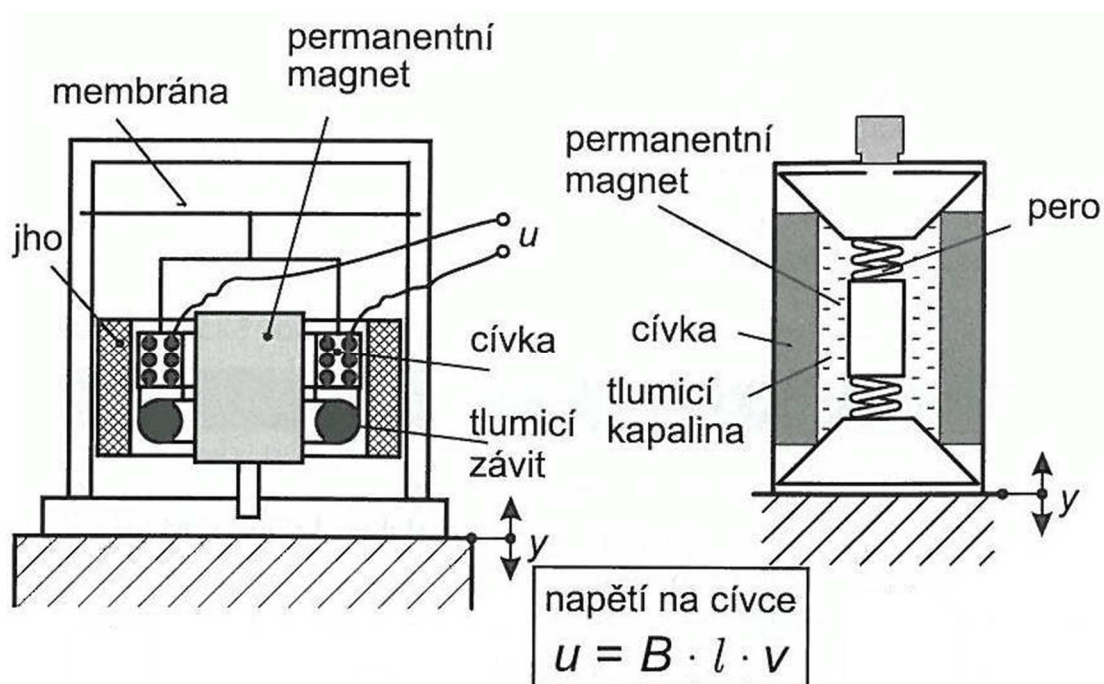
Tento typ snímače lze také vyrobit jako integrovaný MEMS technologií a obvykle slouží k měření amplitudy zrychlení. Mají poměrně široký frekvenční i dynamický rozsah. Jsou založeny na piezorezistivním jevu, který způsobuje ovlivnění rezistivity materiálu krystalografickou orientací hmoty. Při namáhání ohybem se mění rezistivita piezorezistivních elementů uspořádaných do Wheatsonova můstku, viz *Obrázek 14*. Frekvenční rozsah se pohybuje mezi 0 a 7 kHz [12].



Obrázek 14 – piezorezistivní akcelerometr (převzato ze zdroje [12])

### 5.4 Snímače rychlosti

Jsou složeny ze seizmické hmoty (permanentní magnet) uložené na velmi měkkých pružinách a obklopené cívkou (Obrázek 15).



Obrázek 15 – možná provedení snímače rychlosti (převzato ze zdroje [12])

Snímače rychlosti, na rozdíl od akcelerometrů, pracují na vyšší, než vlastní frekvenci. Pružiny jsou použity tak, aby permanentní magnet zůstal v klidu při frekvencích vyšších, než je 10 Hz. K tomuto účelu bývá také přítomna tlumicí kapalina. V pracovních frekvencích snímače rychlosti (většinou 10 až 1500 Hz) se pohybem cívky indukuje napětí, které slouží přímo pro monitorování kmitání. Tento typ snímače se v současné

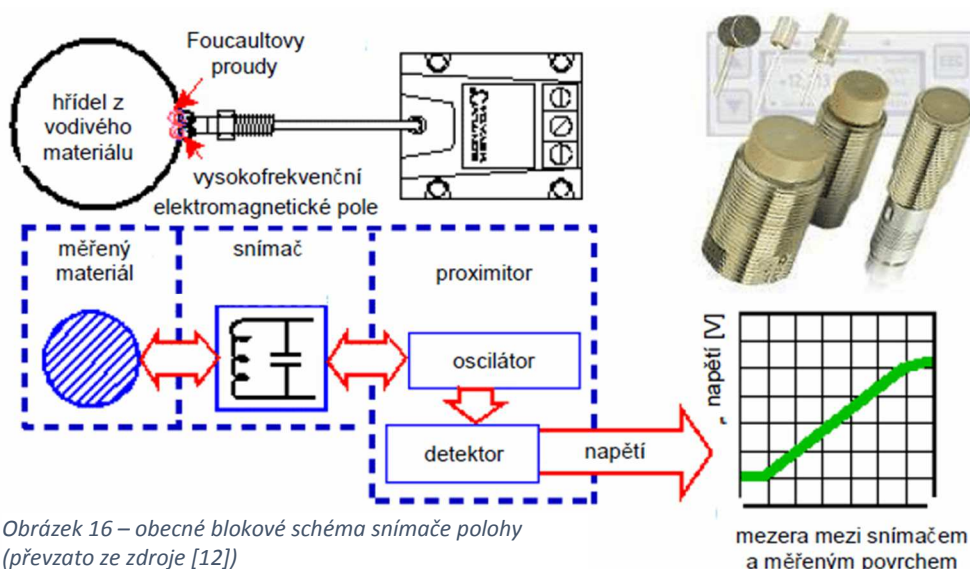
době příliš nepoužívá, jelikož obsahuje značné množství mechanických součástí ve srovnání s např. akcelerometry [1].

## 5.5 Snímače výchylky (polohy)

Tyto snímače lze obecně sestavit na principu indukčním, indukčnostním, kapacitním, magnetickém nebo optickém. V současnosti se v diagnostice vibrací nejčastěji využívají snímače indukčnostní, své uplatnění nachází i snímače pracující na optickém principu. Často se vyrábí jako bezkontaktní snímače. Jejich velkou výhodou ve strojní praxi je, že jimi lze měřit přímo výchylky rotujících součástí, na rozdíl od akcelerometrů a snímačů rychlosti, kde jsme omezeni na měření kmitání nerotačních součástí. Můžeme tedy mnohem efektivněji odhadnout např. riziko kolize rotoru se statorem a podobně. Důležitost tohoto využití vedla ke vzniku systémů, které dokáží nepřetržitě a v reálném čase kontrolovat vzdálenost součástí, mezi nimiž musí zůstat při provozu vůle [1] [3].

### 5.5.1 Indukčnostní snímače polohy

Využívají závislost indukčnosti cívky na hustotě vířivých proudů (Foucaultovy proudy). Jsou to bezkontaktní snímače s vysokou citlivostí a velmi rychlou odezvou. Vzhledem k jejich vysokofrekvenčnímu principu jde o snímače citlivé na parazitické vlivy, jako je např. vnější elektromagnetické pole, délka kabelu, atd. Kvůli této negativní vlastnosti se vyrábí jako integrované s kovovým stínícím krytem, který spolu s cívkou obsahuje i základní část elektroniky [12] [19]. Obecné schéma snímače polohy zobrazuje *Obrázek 16*.



## 6. Vyvažovací metody

Vyvažovací postupy tuhých rotorů lze rozdělit do dvou hlavních skupin podle počtu rovin, které pro vyvažování využíváme [7]:

- Vyvažování v jedné rovině
  - statické
  - za rotace – buď na vyvažovacích strojích, nebo ve vlastním rámu
- Vyvažování ve dvou (více) rovinách
  - na vyvažovacích strojích
  - ve vlastním rámu (provozní vyvažování)

Volba jedné z možných metod závisí na různých faktorech. Vyvažování v jedné rovině je doporučeno provádět pouze u rotorů s malou axiální délkou, kde dochází k minimálnímu momentovému namáhání. Mezi vyvažováním v jedné či více rovinách [3] je třeba rozhodnout i na základě prostorové dostupnosti součásti, jelikož ne vždy je možno provést vyvažování v libovolné rovině. Dalším z hlavních faktorů je velikost vyvažované součásti. Pokud je ku příkladu třeba vyvážit velice těžkou strojní součást, není vhodné ji transportovat do laboratorního prostředí. V takovém případě je optimálním řešením provádět vyvažování přímo ve vlastním rámu (uložení) součásti. Stejnou metodu volíme, pokud je demontáž stroje příliš složitá, nebo pokud by jeho odstávka na delší dobu byla příliš nákladná.

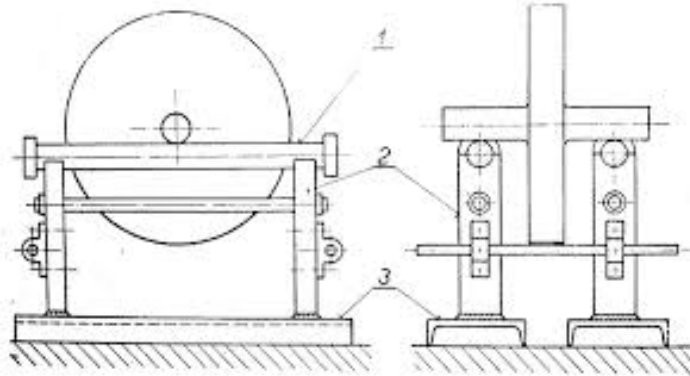
### 6.1 Vyvažování v jedné rovině

Tyto vyvažovací postupy se používají pro rotory malé axiální délky [10], na kterých se téměř neprojevuje momentové namáhání. Jsou vhodné pro rotory pracující při nízkých provozních otáčkách. Lze jimi odstranit statickou nevyváženost.

#### 6.1.1 Statické vyvažování – přípravky a metody

Při statickém vyvažování se nechá těleso volně kývat nebo odvalovat na vhodném přípravku. Nejjednodušším typem takového přípravku jsou tzv. vyvažovací pravítka (někdy také vyvažovací ližiny) [8]. Na takovýto přípravek jsou kladeny následující

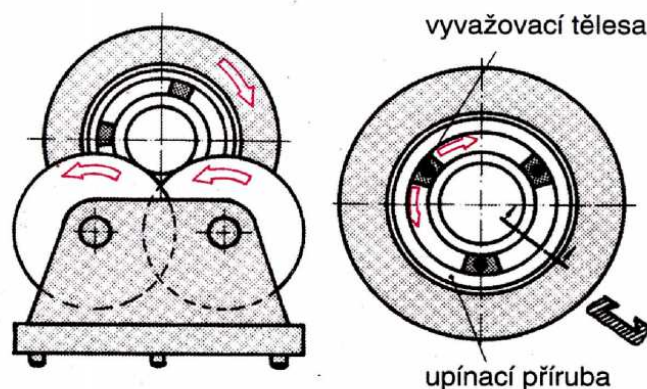
požadavky: plochy ližin musí být vodorovné, povrch dostatečně tvrdý (nejlépe kalený) a velmi hladce obrobený, aby bylo co nejmenší tření. Nevýhodou vodorovných pravítek je fakt, že na nich lze vyvažovat součásti pouze se stejnými průměry čepů. Pokud by průměry čepů byly rozdílné, docházelo by při odvalování k prokluzu, čímž by bylo znemožněno přesné vyvažování. Přesnost vyvážení se citelně snižuje i při stejných



Obrázek 17 – zařízení pro statické vyvažování (převzato ze zdroje [7])

poloměrech čepů, avšak vyrobených s jinou výrobní tolerancí. Další nepřesnosti mohou vzniknout při šikmém nastavení součásti vzhledem k ližinám. Vyvažovací pravítka zobrazuje *Obrázek 17*. Vyvažovaná součást je umístěna na vyvažovací pravítce kruhového průřezu (1), která jsou podepřena v podpěrách (2) a přivařena k základovým příčnicům (3).

Jako spolehlivější se prokázaly přípravky, které jako stykových ploch využívají válečků. Použitím válečků se odstraní většina problémů, které vznikají při použití vyvažovacích



Obrázek 18 – statické vyvažování brusného kotouče na vyvažovací přípravku (domes.spssbrno.cz)

pravítek, především nezáleží na průměru čepů, jelikož se válečky otáčejí navzájem nezávisle. Jako opěrnou plochu lze například použít přímo vnější kroužky valivých ložisek pro odvalování vyvažované součásti. Při zatížení ložiska v něm však vzniká třecí moment,



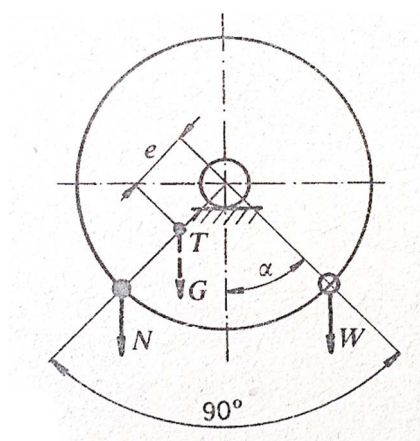
který snižuje přesnost takového přípravku. Optimálním řešením se jeví použít jako opěrné plochy pouze disky, které jsou navíc přesazeny přes sebe, čímž se dosáhne minimálního třecího momentu v ložiskách, která nesou tyto disky [7]. Takový přípravek je na *Obrázku 18*.

Samotné vyvažování se na výše zmíněných přípravcích provádí následovně. Vyvažované těleso se nechá volně odvalovat, dokud se neustanoví do rovnovážné polohy. Po jeho zastavení musí platit, že se těžiště nachází na ose kolmé k rovině odvalování. Nyní je třeba určit velikost nevyvážku  $N$ . Připevníme-li nyní na určitý poloměr  $r_N$  pomocný vývažek  $W$  známé hmotnosti, ale do polohy o  $90^\circ$  pootočené od místa, kde se ustanovilo vyvažované těleso při odvalování, soustava zaujme novou polohu, ve které je v rovnováze moment od původního nevyvážku  $N$  s momentem od vývažku  $W$ . Platí tedy podle *Obrázku 19*

$$m_N r_N \cos(\alpha) = m_W r_N \sin(\alpha) \quad (6.1)$$

Po odměření úhlu  $\alpha$  určíme hmotnost nevyvážku  $m_N$  ze vztahu

$$m_N = m_W \tan(\alpha) \quad (6.2)$$



*Obrázek 19 – postup statického vyvažování (převzato ze zdroje [7])*

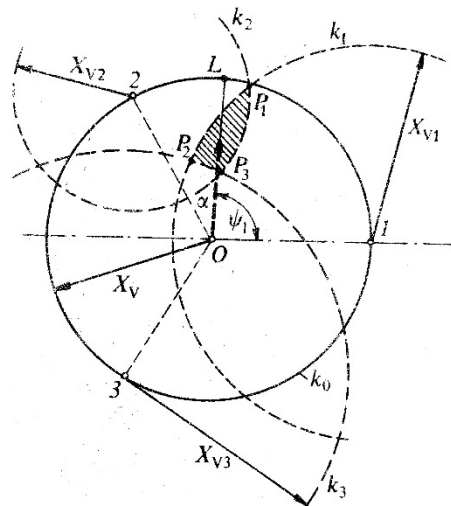
V jedné rovině lze vyvažovat součásti i za rotace, a to buď na odstředivých vyvažovacích strojích, či ve vlastním rámu (provozní vyvažování) [7]. V následující části práce se zaměříme na vyvažovací metody používané při provozním vyvažování, jelikož jejich postupy platí obecně.

### 6.1.2 Třípolohová metoda

Popis a postup této metody je převzat ze zdroje [7]

Při této metodě se vyvažovaná součást roztáčí na vyvažovací otáčky. Během čtyř vyvažovacích běhů se na součást umísťuje hmota známé hmotnosti. Tento pomocný vývažek se postupně umístí do tří míst vzájemně otočených o  $120^\circ$  – třípolohová metoda. Tato metoda nevyžaduje měření fáze kmitů. Postup je následující:

- 1) První běh: po ustálení na vyvažovacích otáčkách se v místě  $A$  změří výkmity  $X_V$  výchylky kmitů.
- 2) Druhý, třetí a čtvrtý běh: pomocný vývažek  $W$  se postupně připojuje na vyvažovanou součást do míst 1, 2, 3 vzájemně otočených o  $120^\circ$  a po ustálení na vyvažovacích otáčkách se změří výkmity  $X_{V1}, X_{V2}, X_{V3}$  v místě  $A$ .



Obrázek 20 – třípolohová metoda (převzato ze zdroje [7])

- 3) Graficky se určí příčinkový činitel  $\alpha$ , který slouží k výpočtu hmotnosti  $m_V$  hledaného nevyvážku. Postup konstrukce (Obrázek 20):
  - a) kolem zvoleného počátku  $O$  se opíše kružnice  $k_0$  s poloměrem  $X_V$ ;

- b) na kružnici  $k_0$  se vynesou body 1, 2, 3 odpovídající místům připojení pomocného vývažku  $W$ ;
- c) v bodě 1 se nachází střed kružnice  $k_1$  o poloměru  $X_{V1}$  – sestrojí se popsaná kružnice. Tento postup opakujeme analogicky pro body 2 a 3. Všechny tři kružnice by se teoreticky měly protnout v jednom bodě, ale vlivem nelinearit soustavy a určitých nepřesností měření většinou vzniknou průsečíky tři –  $P_1, P_2, P_3$ ;
- d) spojnice těžiště trojúhelníku  $P_1P_2P_3$  s bodem  $O$  je příčinkový činitel  $\alpha$ . Jeho směr určuje jednoznačně rovinu nevyváženosti a jeho průsečík s  $k_0$  udává „lehké místo“  $L$  součásti;
- e) hmotnost  $m_V$  hledaného vývažku  $V$  je dána vztahem

$$m_V = \frac{X_V}{\alpha} m_W \frac{r_W}{r_V} \quad (6.3)$$

- 4) Vypočtený vývažek o hmotnosti  $m_V$  se připojí do místa  $L$  a při stejných otáčkách, jako dříve se změří výchylky  $X_V^*$  kmitů v místě  $A$ .
- 5) Nepodaří-li se tímto vyvažovacím krokem dosáhnout žádaného stupně vyvážení, je třeba celý postup opakovat – nový pomocný vývažek se volí úměrný hodnotě  $X_V^*$ .

### 6.1.3 Dvoupolohová metoda

Popis a postup této metody je převzat ze zdroje [7]

Tato metoda je podobná metodě třípolohové, jak však název napovídá, umísťují se pomocné vývažky pouze do dvou míst, která jsou vzájemně otočena o  $180^\circ$ . Postup při využití dvoupolohové metody:

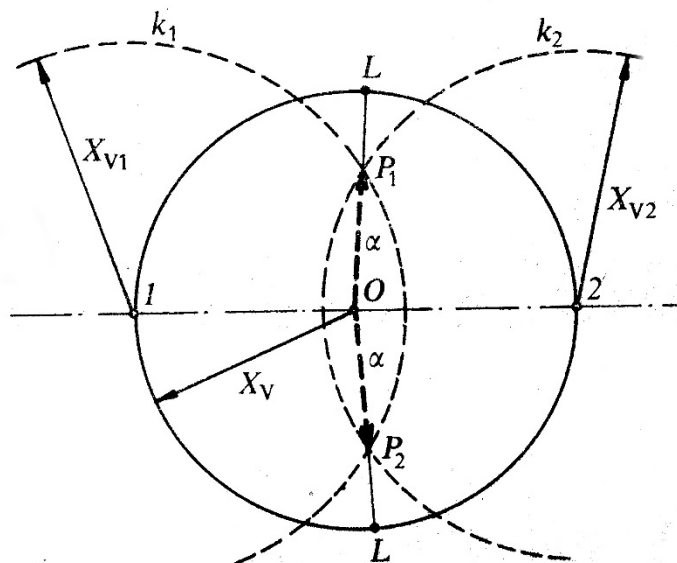
- 1) První běh: motor se uvede do otáček a v místě  $A$  se změří výkmit  $X_V$  kmitů
- 2) Druhý a třetí běh: pomocný vývažek  $W$  se připojí do zvolené polohy 1. (respektive 2) na vyvažovaném tělese a při stejných otáčkách jako u prvního běhu se změří výkmit  $X_{V1}$  ( $X_{V2}$ ) v místě  $A$ .

3) Z naměřených hodnot se určí příčinkový čítel  $\alpha$  potřebný pro výpočet hmotnosti hledaného vývažku  $V$  následujícím způsobem (Obrázek 21):

- kolem zvoleného počátku  $O$  se opiše kružnice  $k_0$  s poloměrem  $X_V$ ;
- na kružnici  $k_0$  se vyznačí body 1, 2, které odpovídají polohám pomocného vývažku  $W$ ; kolem bodu 1 se opiše kružnice  $k_1$  s poloměrem  $X_{V1}$  a analogicky sestrojíme kružnici v bodě 2;
- kružnice  $k_1$  a  $k_2$  se protnou v průsečících  $P_1, P_2$  a spojnice  $OP_1$ , resp.  $OP_2$  je hledaný příčinkový čítel  $\alpha$ ; jeho průsečík  $L$  s kružnicí  $k_0$  udává „lehké místo“; tato úloha je dvojznačná;
- hmotnost hledaného vývažku  $V$  určíme ze vztahu:

$$m_V = \frac{X_V}{\alpha} m_W \frac{r_W}{r_V} \quad (6.4)$$

- Vypočtený vývažek se připojí do jedné z určených poloh  $L$  a změří se výkmity výchylky kmitů v místě  $A$ ; zjistí-li se, že po připojení vývažku se výkmity snížily, byla zvolena správná poloha; pokud se naopak výkmity zvýší, musí se vývažek přemístit do druhé z určených poloh  $L$  – čtvrtý, resp. pátý běh.
- Nesníží-li se výkmity výchylky kmitů na požadovanou mez, celý postup je třeba opakovat, volí se však menší pomocný vývažek.



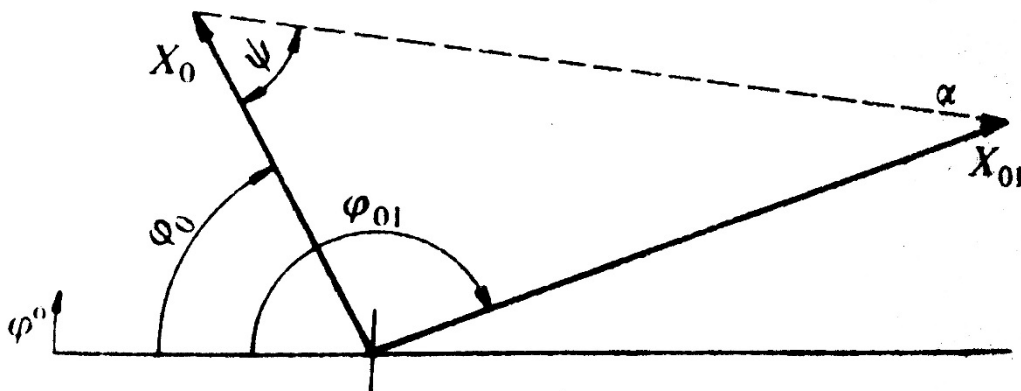
Obrázek 21 – dvoupolohová metoda (převzato ze zdroje [7])

#### 6.1.4 Jednopolohová metoda

Popis této metody uvádí zdroj [10] a postup této metody je převzat ze zdroje [7]

Tato metoda je jednou z nejpoužívanějších metod provozního vyvažování. Příčinkový činitel se zde určuje z rozdílu dvou hodnot vibrací, předpokládá se přitom lineární závislost mezi měřenými hodnotami. Je proto vhodné nejdříve rozhodnout, zda se na vyvažované součásti mohou objevovat výraznější nelinearity. Výhodou této metody je, že při nízkém počtu běhů získáme potřebná data pro vyvážení rotoru. Na druhou stranu musíme během jednotlivých běhů určovat mimo amplitudy i fázi kmitů, což vyžaduje lepší technické vybavení, než předchozí dvě metody, kde bylo třeba znát pouze velikost výkmitu. Postup při vyvažování touto metodou:

- 1) První běh: motor se uvede do otáček a změří se amplituda  $X_0$  i fáze  $\varphi_0$  výchylky kmitů v místě  $A$ .
- 2) Druhý běh: do libovolného místa na vyvažované součásti se připevní pomocný vývažek o hmotnosti  $m_W$  a při stejných otáčkách jako při prvním běhu se změří amplituda  $X_{01}$  a fáze  $\varphi_{01}$  výchylky kmitů v místě  $A$ .



Obrázek 22 – jednopolohová metoda (převzato ze zdroje [7])

- 3) Vyhodnocení měření se provede tak, že se ve zvoleném měřítku vynesou do polárního diagramu zjištěné vektory kmitů z obou běhů (Obrázek 22). Rozdíl vektorů  $X_{01} - X_0$  udává příčinkový činitel  $\alpha$ . Úhel  $\psi$ , o který by se tento vektor musel otočit, aby splynul s vektorem  $X_0$ , ale měl opačný smysl, udává polohu hledaného

vývažku na rotoru vzhledem k poloze, v níž byl připojen pomocný vývažek  $W$ . Smysl otáčení je obvykle u každé aparatury udán, nebo je třeba ho určit experimentálně.

4) Hmotnost hledaného vývažku se určí z rovnice

$$m_V = \frac{X_0}{\alpha} m_W \frac{r_W}{r_V} \quad (6.5)$$

5) Vypočtený vývažek se připojí do určeného místa a provede se kontrolní měření. Nedosáhne-li se požadovaného stupně vyvážení, postup se opakuje, ale s menší hmotností pomocného vývažku  $W$ .

## 6.2 Vyvažování ve dvou rovinách

Rotory větší axiální délky a většinu rotorů pracujících při vyšších provozních otáčkách je třeba vyvažovat ve dvou vyvažovacích rovinách. Takové tuhé rotory se obvykle vyvažují na vyvažovacích strojích (vyvažovačkách) s elektrickým rámem, které udají uživateli přímo velikosti a polohy nevyvážků nebo vývážků. Vyvažováním ve dvou rovinách je možno odstranit účinky jak statické, tak dvojicové nevyváženosti. Pokud je nutné provést vyvážení rotoru ve dvou rovinách za provozních podmínek, lze tak učinit tzv. střídavým vyvažováním ve dvou rovinách tak, že se postupně vyvažuje první, resp. druhá rovina některým z vyvažovacích postupů uvedených v kapitole 6.1. Jelikož se při tomto vyvažovacím postupu nedbá vzájemného vlivu vyvažovacích rovin, je obvykle třeba po tom, co se připojí vývažek do druhé vyvažovací roviny, znovu dovyvážit rotor v první vyvažovací rovině. Existují i metody tzv. současného vyvažování, které vyžadují teoreticky menší počet běhů, avšak tyto postupy jsou většinou spjaty s relativně složitým vyhodnocováním. O těchto metodách se zde nebude zmiňovat, lze se o nich dočíst např. ve zdroji [7]. Uvedu pouze dvě z metod, které se v současnosti používají pro vyvažování na vyvažovacích strojích.

### 6.2.1 Prává rovina - levá rovina

Tento vyvažovací postup sestává ze dvou kroků: provedou se dvě korekce nevyváženosti v předem definované pravé a levé rovině. Vyvažovací stroj (počítač) během jednoho

běhu vypočítá a zobrazí celkem čtyři hodnoty (*Obrázek 23*): velikost vývažku a jeho úhel pro pravou rovinu a velikost vývažku a jeho úhel pro levou rovinu [6].

#### 6.2.2 Postupná eliminace statické a dvojicové nevyváženosti

Jedná se o postup, při kterém je třeba vykonat čtyři operace přidávání (odebírání) hmoty. Vyvažovací stroj vypočítá a zobrazí čtyři hodnoty: velikost vývažku a jeho úhel pro statické vyvážení a velikost vývažku a úhel pro momentové vyvážení. Vývažek pro statické vyvážení je třeba vydělit dvěma a tyto poloviční vývažky umístit se stejným polohovým úhlem na levou i pravou vyvažovací rovinu. Vývažek pro momentové vyvážení se umístí do levé roviny do polohy dané zobrazeným polohovým úhlem. Do pravé roviny se umístí stejný vývažek, avšak jeho poloha musí být o  $180^\circ$  pootočena vůči poloze levého vývažku. Tento postup je běžně využíván v průmyslové praxi.

Vývažky pro odstranění statické a momentové nevyváženosti lze spojit v rámci každé z vyvažovacích rovin v jeden. Je třeba pouze správně provést vektorový součet vektorů obou vývažků.

Postupnou eliminaci statické a dvojicové nevyváženosti je také možné provést pouze ve třech krocích. Je ovšem nutné znát polohu těžiště vyvažované součásti. Statickou nevyváženost je pak možné odstranit přidáním pouze jednoho vývažku, a to do roviny, ve které leží těžiště součásti [6].



*Obrázek 23 – parametry vývažků určené počítačem (catalog.schenck-usa.com/products)*

## 7. Vyvažovací stroje

Pojmem vyvažovací stroj (tzv. vyvažovačka) rozumíme speciální zařízení určené k zjišťování polohy a velikosti nevyvážku na rotoru [15]. Moderní vyvažovací stroje poskytují kromě těchto informací rovnou i údaje o tom, kde přidat, popř. ubrat hmotu k dosažení vyváženosti rotoru. V současnosti existuje celá řada speciálních vyvažovacích strojů, určených pro vyvažování konkrétních součástí. Na vyvažovacích strojích lze vyvažovat součásti od hmotnosti několika gramů do hmotnosti několika desítek tisíc kilogramů. Jako příklady takových součástí lze uvést: elektromotory, ventilátory, CD, turbíny, kotoučové brzdy, vrtule a mnoho dalších. Širokou škálu specializovaných vyvažovaček nabízí např. firma Schenk RoTec, katalog jejich výrobků lze najít ve zdroji [17].

Vyvažovací stroje lze obecně rozdělit na dva typy [15]:

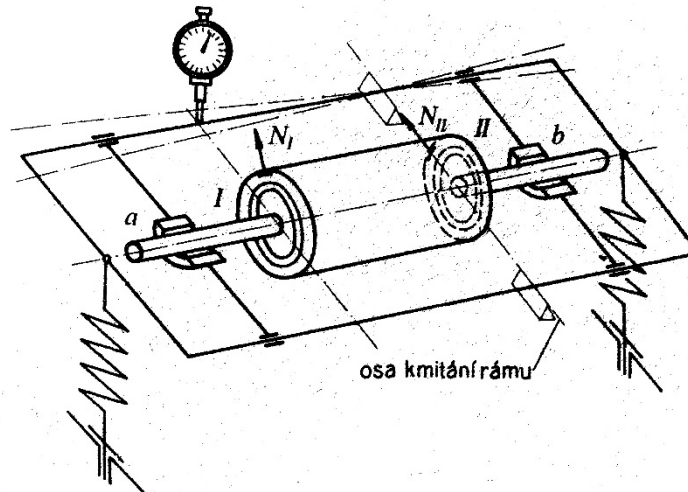
- a) s měkkým uložením (anglicky *soft-bearing*)
- b) s tuhým uložením (anglicky *hard-bearing*)

Rozdíl mezi těmito typy strojů však nespočívá v typu ložisek, jak napovídá anglický název, ale v uložení (pružné x tuhé) ložiskových podpěr. U strojů s poddajnými ložiskovými podpěrami je měřítkem nevyváženosti kmitání těchto podpěr a u strojů s tuhými ložiskovými podpěrami je mírou nevyváženosti velikost dynamických reakcí odstředivých sil, vzniklých při rotaci vyvažovaného tělesa. Oba typy vyvažovaček mají své výhody i nevýhody. Stroje s tuhým uložením jsou obecně všestrannější, lze je používat na součásti s širokou škálou hmotností a vyžadují pouze jednorázovou kalibraci. Stroje s měkkým uložením nelze používat na tak velký rozsah hmotností, jako stroje s uložením tuhým. Také kalibrace zařízení je náročnější – vyžaduje připevnění několika známých vývažků, aby se zjistily dynamické účinky na stroj; mimo to je třeba pro každou součást provádět kalibraci nanovo. Na druhou stranu lze na stroji s měkkým uložením dosáhnout velice vysoké přesnosti měření nevyváženosti. Tyto stroje jsou vhodné především pro velkosériovou výrobu dílů s vysokými požadavky na zbytkovou nevyváženost [15]. V následující části této kapitoly uvedu tři principiálně odlišné druhy vyvažovacích strojů a u každého popíši základní princip funkce.



## 7.1 Rezonanční (doběhové) vyvažovací stroje

Jedná se o vývojově nejstarší typ vyvažovacích strojů. Vyrábí se buď se dvěma pružnými ložiskovými stojany, nebo s pružně uloženým rámem (Obrázek 24).



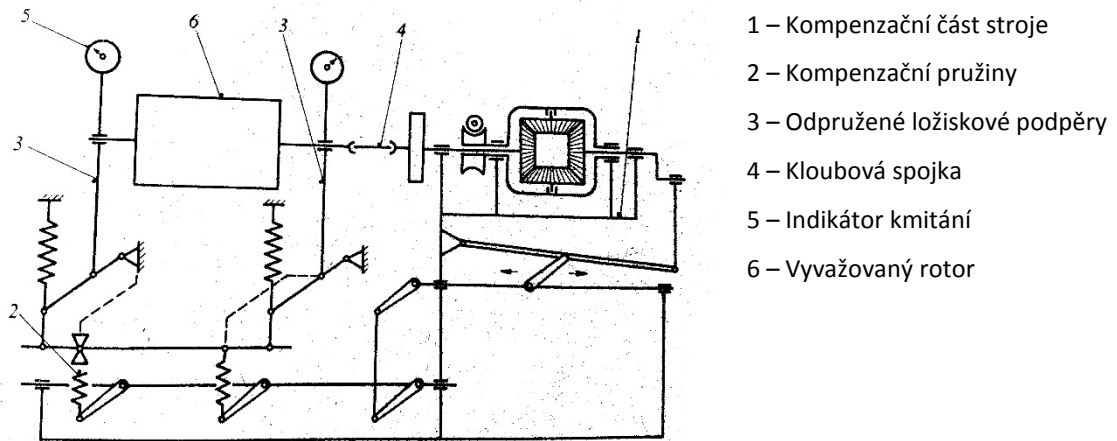
Obrázek 24 – doběhový vyvažovací stroj s rámem (převzato ze zdroje [7])

Pružné členy jsou výměnné, aby bylo možno měnit vlastní frekvence stojanů nebo rámu podle hmotnosti vyvažované součásti. Rotory se roztáčejí prostřednictvím elektromagnetické spojky na otáčky vyšší, než je vlastní frekvence systému. Spojka se po dosažení těchto otáček odpojí a rotor se nechá volně dobíhat. Velikost rozkmitu ložiskových podpěr se měří při přechodu rotoru přes kritické otáčky uložení. Vyvažovací otáčky doběhových vyvažovaček bývají pod  $800 \text{ min}^{-1}$ , jelikož přebíhání rezonance při vyšších otáčkách by mohlo být nebezpečné. Výhodou těchto strojů je, že nevyváženost rotoru není ovlivněna jeho pohonem, že při rezonanci se potlačí rušivé vlivy vyšších kmitočtů, a že systém je vzhledem k malému tlumení velmi citlivý. Na těchto strojích lze dosáhnout zbytkové nevyváženosti asi  $5 \mu\text{m}$  [7].

## 7.2 Kompenzační vyvažovací stroje

Tyto vyvažovací stroje se skládají ze dvou částí. První z těchto částí je tvořena buď pružnými ložiskovými podpěrami, nebo pružně uloženým rámem – stejně, jako je tomu u doběhových vyvažovaček. Druhou část tvoří kompenzační zařízení, jehož účelem je eliminovat vliv budících sil vyvolaných nevyvážeností. Na kompenzačních vyvažovačkách lze určit velikost i polohu vývažku prakticky při jednom běhu a bez potřeby přidávání

pomocných vývažků. Vyrábí se ve třech provedeních, které se liší především způsobem kompenzace nevyvážených sil: kompenzace mechanickými silami pružin (Obrázek 25), kývavými nebo rotujícími hmotovými silami, nebo elektromagnetickými silami.



Obrázek 25 – kompenzační vyvažovací stroj (převzato ze zdroje [7])

Vyvažovací otáčky u kompenzačních strojů se pohybují v rozmezí 200 až 700 min<sup>-1</sup>. Kmitavý pohyb je měřen a kompenzován při provozu v rezonanci, proto jsou pružné členy stavitelné podle hmotnosti vyvažované součásti (stejně jako u doběhových strojů). Indikátor kmitání slouží pouze jako registrace dosažení nulové polohy. Velikost a poloha nevyvážky se odečítá na ukazatelích kompenzačního zařízení. Vyvažovací proces je rychlý, ale kompenzační systém omezuje přesnost stroje a mechanický rám jeho citlivost. Na těchto strojích lze dosáhnout zbytkové vyváženosti 10 až 5 μm [7].

### 7.3 Vyvažovací stroje s přímou indikací naměřených veličin

Jedná se o nejmodernější vyvažovací stroje. Vyvažovaná součást je uložena v ložiskových podpěrách a na vhodných místech jsou umístěny snímače vibrací, nejčastěji používané jsou snímače rychlosti a zrychlení (Kapitola 5). Zároveň se měří rychlost otáčení vyvažované součásti a její relativní fáze. Časový rozdíl mezi touto fází a maximem vibrací udává úhel, ve kterém leží nevyváženost. Tento úhel ve spojení s údajem o velikosti nevyvážky určuje vektor nevyváženosti [15].

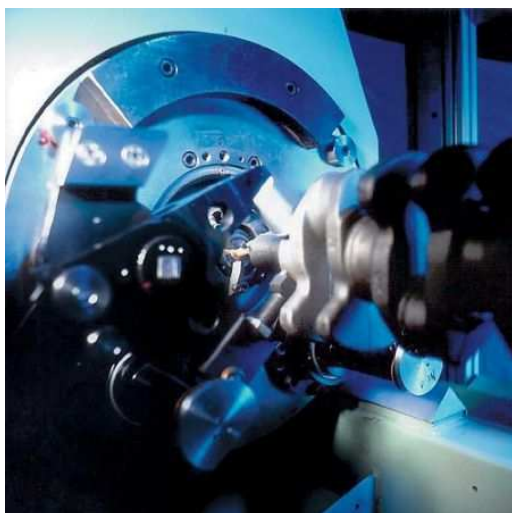
Vyvažovací stroje s přímou indikací naměřených veličin lze rozdělit na dva typy:

- a) stroje nadrezonanční – vyvažovací otáčky jsou vyšší, než je vlastní frekvence systému, který se skládá z vyvažovaného rotoru uloženého

v pružných ložiskových podpěrách. Je měřen kmitavý pohyb těchto podpěr, z čehož se vyhodnocuje stav nevyváženosti. Tyto stroje odpovídají vyvažovačkám s měkkým uložením popsaným na začátku této kapitoly;

- b) stroje podrezonanční – vyvažovací otáčky jsou nižší, než je vlastní frekvence systému, který se skládá z vyvažovaného rotoru uloženého v tuhých ložiskových podpěrách. Je měřena velikost dynamické reakce vyvolané nevyvážeností. Tyto stroje odpovídají vyvažovačkám s tuhým uložením popsaným na začátku této kapitoly.

Pro vyvažování se používají konstantní otáčky s možností jejich volby podle druhu a hmotnosti vyvažovaného rotoru a podle způsobu uložení. Rozsah těchto otáček se pohybuje mezi 100 a 60000  $\text{min}^{-1}$ . Tento druh vyvažovacích strojů dokáže dosáhnout velice vysoké přesnosti určení vývažku potřebného k odstranění nevyváženosti. Ve zvláštních případech s využitím speciálních konstrukcí lze dosáhnout zbytkové nevyváženosti až 0,01  $\mu\text{m}$  [7].



Obrázek 26 – detail vyvažovačky klikových hřídelů s automatickým odvrtáváním materiálu ([catalog.schenck-usa.com/products](http://catalog.schenck-usa.com/products))

Vyvažovací stroje s přímou indikací naměřených veličin se používají také jako plně automatizované součásti výrobních linek. V takovém případě jde o speciální stavebnicové vyvažovací stroje s přídatnými zařízeními pro automatické odstranění nevyváženosti. Pojem přídatná zařízení označuje automatizované vrtací, frézovací nebo navařovací jednotky s automatickým podáváním a natáčením vyvažovaných součástí [7]. Příklad automatizovaného vyvažovacího stroje poskytuje *Obrázek 26*.

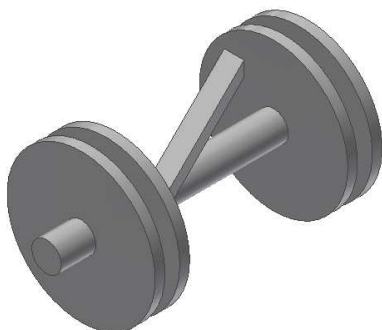
## 8. Praktická část – návrh výukového modelu

V této části bakalářské práce popíši svůj postup při tvorbě návrhu výukové úlohy zaměřené na tematiku dynamického vyvažování tuhých těles. Výukovou úlohu jsem tvořil s důrazem na realizovatelnost modelu, který je základním podkladem pro úlohu. Model je navržen s orientací na použití vyvažovací metody ve dvou rovinách na základě matematického výpočtu.

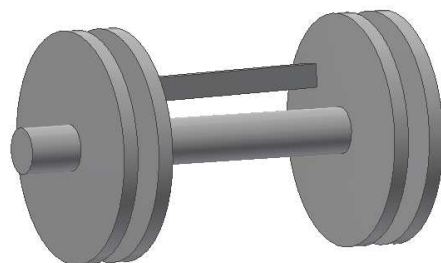
Model pro tuto část práce jsem vytvořil v CAD programu Autodesk Inventor a potřebné výpočty prováděl v programu MATLAB.

### 8.1 První návrh modelu

Model jsem volil tak, aby se slučoval se strojírenskou praxí a inspiroval jsem se typickou strojní součástí, kterou je třeba vyvažovat – klikový hřídel. Skutečný model klikového hřídele by byl pro potřeby této práce příliš složitý, tak jsem provedl řadu zjednodušení.



Obrázek 27 – první návrh modelu



Obrázek 28 – první návrh modelu (jiný pohled)

Modelem je hřídel se čtyřmi kotouči, které slouží jako vyvažovací roviny a excentricky umístěnou příčkou, která na náš jinak dokonale vyvážený rotor přidává pro účely úlohy nevyváženost (Obrázek 27, Obrázek 28). V dalších částech této práce budu na samotnou příčku odkazovat jako na „nevývažek“. Zbylou část modelu kromě příčky budu nazývat „rotor“. Na takovémto modelu lze provádět vyvažování ve čtyřech rovinách přidáváním či ubíráním hmoty. Ubírání hmoty není pro účely výukového modelu optimální, jelikož by vyžadovalo vrtání do kotoučů a tím by úloha nebyla opakovatelná. Přidávání materiálu by bylo možno realizovat nalepením materiálu na jednu z osmi ploch. Tento

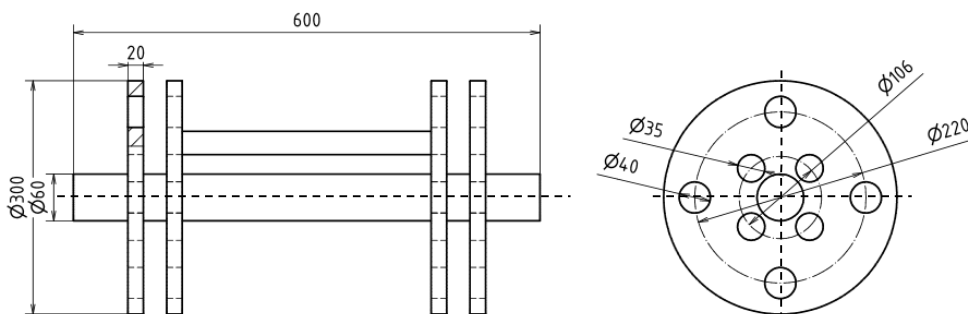
postup by byl vhodný z toho hlediska, že materiál by bylo možno umístit bez omezení na celou dostupnou plochu (ve smyslu poloměru a úhlu od referenční roviny). Provádět operaci lepení na výukovém modelu je však značně nepraktické a proto jsem se rozhodl pro návrh rotoru, který by měl v kotoučích díry již z výroby (Obrázek 29, Obrázek 30). Na takovém rotoru lze snadno provádět vyvažování přidáváním závaží typu šroub – matice do připravených otvorů. Na hmotu, která bude přidána do otvorů budu v dalších částech práce odkazovat jako na „vývažek“.



Obrázek 29 – návrh rotoru s otvory ve vyvažovacích rovinách

Jako materiál rotoru jsem zvolil plast ABS s ohledem na budoucí možnou výrobu modelu na 3D tiskárně. Tento materiál je vhodný i pro jeho relativně nízkou hustotu (hustota z materiálových vlastností v programu Autodesk Inventor:  $\rho_{ABS} = 1060 \text{ kg/m}^3$ ), která je asi sedmkrát menší, než hustota běžné oceli. Výukový model nebude tím pádem zbytečně těžký.

Schematický náčrtek prvního návrhu modelu:



Obrázek 30 – rozměry prvního návrhu

## 8.2 Druhý návrh modelu

Pomocí programu Autodesk Inventor jsem si nechal spočítat hmotové vlastnosti modelu.

The screenshot shows the 'Tělesa' (Bodies) tab in Autodesk Inventor. The part is named 'Součást' and is made of 'ABS plast'. The density is set to 1,060 g/cm<sup>3</sup> and the required precision is 'Nizká'. The mass properties are as follows:

Obecné vlastnosti	
Hmotnost	7,207 kg (Relativní)
Povrch	771002,474 mm <sup>2</sup>
Objem	6799132,199 mm <sup>3</sup>
Těžiště	
X	0,000 mm (Relativní)
Y	3,953 mm (Relativní)
Z	300,000 mm (Relativní)

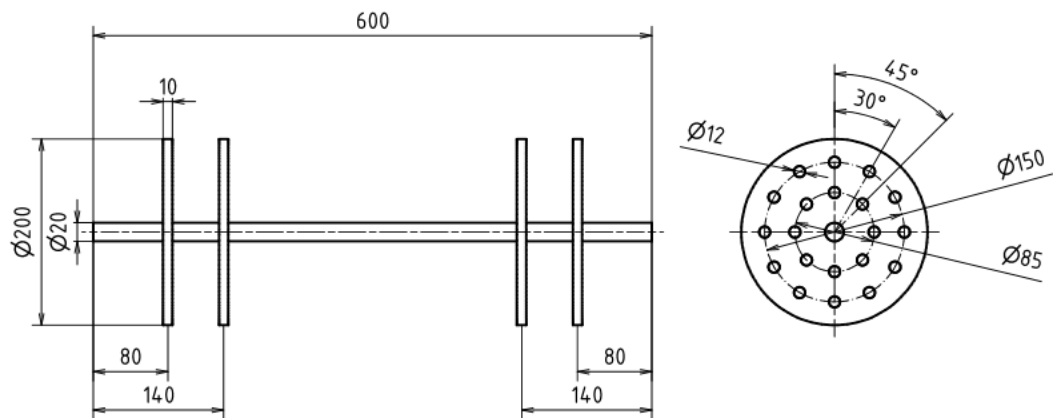
Below the mass properties, the 'Vlastnosti setrvačnosti' (Inertia Properties) section is visible, with 'Globální' selected. The moments of inertia are:

Momenty hmotnosti					
Ixx	932532,095 kg	Vypočteno pomocí negativního integrálu			
Ixy	-0,000 kg mm <sup>2</sup>	Iyy	931429,686 kg		
Ixz	-1736,704 kg m	Iyz	-8547,840 kg m	Izz	64873,670 kg m <sup>2</sup>

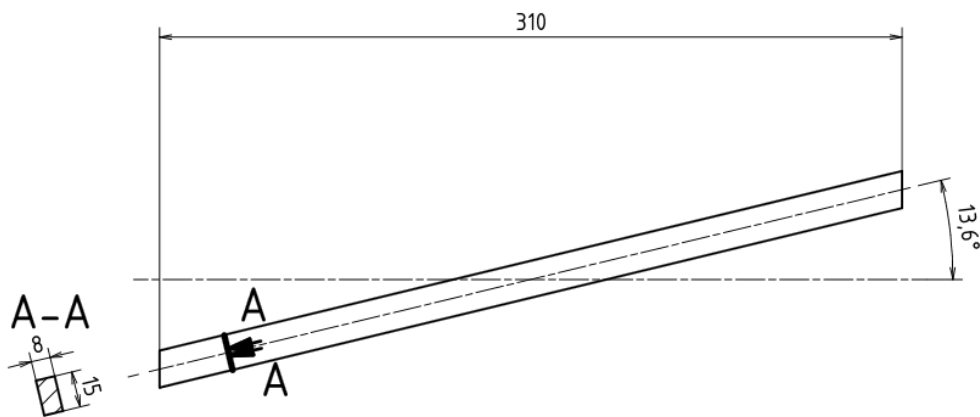
Obrázek 31 – hmotové vlastnosti prvního návrhu

Hmotnost prvního návrhu modelu je 7,2 kg, což je příliš vysoká hmotnost. Na výrobu tohoto modelu by bylo potřeba velké množství materiálu a zacházení s takovýmto modelem by bylo nepraktické. Je tedy třeba provést úpravy modelu s cílem snížení celkové hmotnosti. Zmenšil jsem průměr osového hřídele, zmenšil rozměry nevývažku, zmenšil šířku kotoučů a přidal větší počet otvorů do kotoučů, což kromě žádaného snížení hmotnosti poskytne i více možností pro umístění vývažků. Po provedení těchto úprav jsem zjistil, že hmotnost modelu je již vyhovující, avšak poměr hmotnosti nevývažku ku rotoru je příliš malý. Výsledná excentricita těžiště by byla příliš malá a dynamické účinky by se pro účely úlohy neprojevíly dostatečně. Rozhodl jsem se tedy skládat model z dvou samostatných, na rozdíl od prvního návrhu fyzicky oddělených, součástí – rotoru (Obrázek 32) a nevývažku (Obrázek 33). Jako materiál nevývažku jsem zvolil hliník, jehož hustota je vyšší, než hustota plastu ABS – hustota hliníku opět převzata z programu Autodesk Inventor:  $\rho_{Al} = 2700 \text{ kg/m}^3$ . Tím dosáhneme vyššího vlivu nevyváženosti na chod rotoru.

Schematický náčrt druhého návrhu modelu:



Obrázek 32 – rozměry druhého návrhu (rotor)



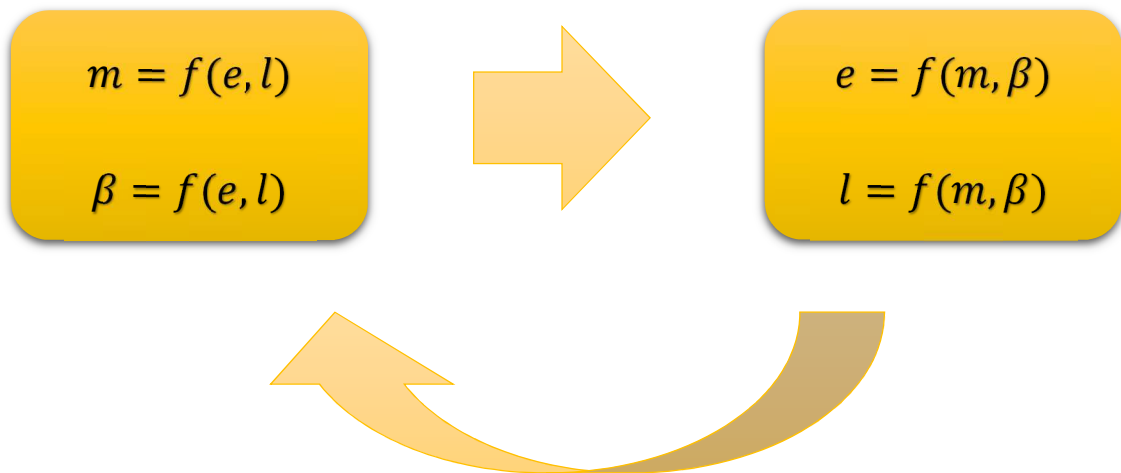
Obrázek 33 – rozměry druhého návrhu (nevývažek)

### 8.3 Optimalizace modelu

Aby byl výukový model smysluplný, musí výsledky z rovnic pro vyvažování být takové, které půjde na finální model aplikovat. Čtyři rovnice pro vyvažování [11] ve dvou rovinách obsahují osm neznámých, jak si ukážeme dále v této práci. Tyto neznámé jsou: poloha roviny vývažku, poloměr vývažku, úhel vývažku a hmotnost vývažku, od každého ze jmenovaných dvě, jelikož máme dvě vyvažovací roviny. Pro vyřešení čtyř rovnic o osmi neznámých musíme čtyři neznámé volit. V našem případě je možnost volby omezená, jelikož poloha rovin vývažků a poloměry vývažků budou pevně dány konstrukcí rotoru. Dopočítané hodnoty budou tedy úhly umístění vývažků a jejich hmotnosti. Hmotnost

vývažku pro nás není víceméně omezující, pokud se bude pohybovat v rozumných řádech, ideálně desítky gramů. Jako závaží se bude využívat šroub s maticí a obě tyto součásti je možno zbrousit na požadovanou hmotnost. Problém nastává u úhlu vývažku, jelikož jsme omezeni polohou otvorů na rotoru. Postup optimalizace jsem zvolil takový, že jsem nejdříve dopočítal z parametrů druhého návrhu modelu hmotnosti vývažků a úhly vývažků, úhly vývažků jsem následně zaokrouhlil na celé desítky a hmotnosti a úhly jsem následně použil pro zpětný výpočet polohy vyvažovacích rovin a poloměry vývažků. S novými rozměry modelu jsem opět počítal jako s parametry a tento postup opakoval (*Schéma 1*), dokud jsem nezískal optimální rozměry modelu, které budou poskytovat „rozumné“ výsledky. Schematické zobrazení finální verze výukového modelu tvoří *Přílohu 1*. Výpočty jsem prováděl v programu MATLAB, použitý skript tvoří *Přílohu 2*. Postup je znázorněn na následujícím schématu, kde:

- $m$  ... hmotnost vývažku
- $\beta$  ... úhel vývažku
- $e$  ... poloměr vývažku
- $l$  ... poloha vyvažovací roviny



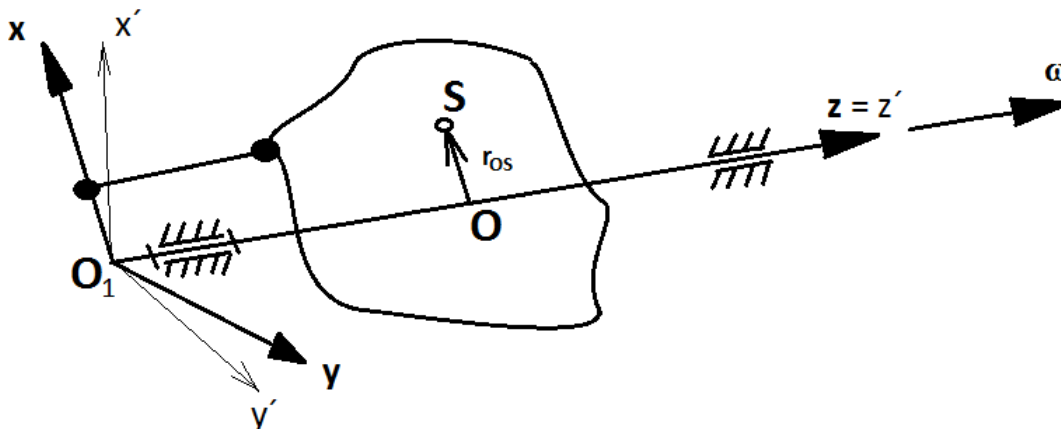
*Schéma 1 – postup při optimalizaci modelu*

V následujících kapitolách uvedu odvození čtyř rovnic (podmínek) pro dynamické vyvážení rotoru, které jsem používal pro výše zmíněné výpočty.



## 8.4 Pohybové rovnice rotujícího tělesa

Těleso se střediskem hmotnosti v bodě  $S$  rotuje kolem osy  $z = z'$  v pevném souřadnicovém systému  $x'y'z'$ . Vektor  $r_{OS}$  udává vzdálenost střediska hmotnosti od osy rotace a je vyjádřen v souřadnicovém systému  $xyz$ , který rotuje spolu s tělesem na *Obrázku 34*.



*Obrázek 34 – rotace tělesa [11]*

Pro odvození pohybových rovnic použijeme Newtonovy a Eulerovy dynamické rovnice, které vychází z časových změn hybnosti a momentu hybnosti [9] [11].

Časová změna hybnosti:

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_i \quad (8.1)$$

tedy

$$m\mathbf{a}_S = \sum_i \mathbf{F}_i \quad (8.2)$$

kde z *Obrázku 34* (podle principů normálového a tečného zrychlení)

$$\mathbf{a}_S = \begin{bmatrix} -r_{OS}\omega_z^2 \\ r_{OS}\alpha_z \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.3)$$

Dosažením získáme tři složkové pohybové rovnice

$$m(-r_{OS}\omega_z^2) = \sum_i \mathbf{F}_{ix} \quad (8.4)$$

$$m(r_{OS}\alpha_z) = \sum_i \mathbf{F}_{iy} \quad (8.5)$$

$$0 = \sum_i \mathbf{F}_{iz} \quad (8.6)$$

Časová změna momentu hybnosti:

$$\frac{d\mathbf{L}_{O_1}}{dt} = \sum_i \mathbf{M}_{iO_1} \quad (8.7)$$

Po rozvedení do Eulerovy dynamické rovnice ( $\mathbf{I}_{O_1}$  značí matici setrvačnosti)

$$\frac{d\mathbf{L}_{O_1}}{dt} = \mathbf{I}_{O_1} \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_{O_1} \boldsymbol{\omega} = \sum_i \mathbf{M}_{iO_1} \quad (8.8)$$

Rozepsáno do maticového tvaru (využijeme  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_{O_1} \boldsymbol{\omega} = \hat{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{I}_{O_1} \boldsymbol{\omega}$ , kde  $\hat{\boldsymbol{\omega}}$  značí antisymetrickou matici k vektoru úhlové rychlosti)

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I_x & -D_{xy} - D_{xz} \\ -D_{yx} & I_y & -D_{yz} \\ -D_{zx} - D_{zy} & & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x & -D_{xy} - D_{xz} \\ -D_{yx} & I_y & -D_{yz} \\ -D_{zx} - D_{zy} & & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \sum_i \mathbf{M}_{iO_1} \quad (8.9) \end{aligned}$$

Pro případ rotace kolem osy z platí:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad a \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_z \end{bmatrix} \quad (8.10)$$

Po dosazení dostáváme další tři složkové pohybové rovnice

$$-D_{xz}\alpha_z + D_{yz}\omega_z^2 = \sum_i \mathbf{M}_{iO_1x} \quad (8.11)$$

$$-D_{yz}\alpha_z - D_{xz}\omega_z^2 = \sum_i \mathbf{M}_{iO_1y} \quad (8.12)$$

$$I_z\alpha_z = \sum_i \mathbf{M}_{iO_1z} \quad (8.13)$$

Těchto šest rovnic použijeme v dalších částech práce k odvození rovnic dynamického vyvažování a k výpočtu namáhání ložiskových podpěr od nevyváženého tělesa.

## 8.5 Odvození rovnic pro vyvažování tuhých těles

Pro odvození využijeme výše odvozené pohybové rovnice. S užitím d'Alambertova principu [9] můžeme výše uvedené pohybové rovnice psát ve tvaru:

$$-m(-r_{OS}\omega_z^2) + \sum_i \mathbf{F}_{ix} = 0 \quad (8.14)$$

$$-m(r_{OS}\alpha_z) + \sum_i \mathbf{F}_{iy} = 0 \quad (8.15)$$

$$\sum_i \mathbf{F}_{iz} = 0 \quad (8.16)$$

Složky setrvačných sil v těchto rovnicích můžeme označit jako setrvačnou sílu normálovou a tečnou

$$D_n = mr_{OS}\omega_z^2 \quad (8.17)$$

$$D_t = mr_{OS}\alpha_z \quad (8.18)$$

Stejně tak pro Eulerovy dynamické rovnice:

$$-(-D_{xz}\alpha_z + D_{yz}\omega_z^2) + \sum_i \mathbf{M}_{iO_1x} = 0 \quad (8.19)$$

$$-(-D_{yz}\alpha_z - D_{xz}\omega_z^2) + \sum_i \mathbf{M}_{iO_1y} = 0 \quad (8.20)$$

$$-I_z\alpha_z + \sum_i \mathbf{M}_{iO_1z} = 0 \quad (8.21)$$

Složky setrvačných momentů v těchto rovnicích lze označit jako setrvačné dvojice  $\mathbf{M}_O^D$

$$\mathbf{M}_{O_1x}^D = D_{xz}\alpha_z - D_{yz}\omega_z^2 \quad (8.22)$$

$$\mathbf{M}_{O_1y}^D = D_{yz}\alpha_z + D_{xz}\omega_z^2 \quad (8.23)$$

$$\mathbf{M}_{O_1z}^D = I_z\alpha_z \quad (8.24)$$

Součty složek sil  $\mathbf{F}_i$  a součty složek momentů  $\mathbf{M}_{O_i}$  představují především složky reakcí v ložiskových podpěrách, které nesou rotor. Z uvedených vztahů je patrné, že tyto reakce jsou obecně nenulové. Jsou způsobeny setrvačnými silami, které podle výše uvedených rovnic záleží na rozložení hmoty rotoru kolem osy rotace. Podmínky vyvážení získáme z podmínek nulových setrvačných sil, čímž eliminujeme přídavné dynamické namáhání ložisek.

Předpokládejme, že rotor se otáčí konstantními otáčkami ( $\omega_z = konst., \alpha_z = 0$ ). Při těchto podmínkách je tečná setrvačná síla rovna nule ( $D_t = 0$ ). Aby byly všechny setrvačné síly nulové, musí navíc platit:  $D_n = 0$ , což je pro libovolnou úhlovou rychlost podle rovnice (8.17) možno splnit pouze pokud

$$r_{OS} = 0 \quad (8.25)$$

což je statická podmínka vyvážení. Nazývá se statická, protože ji lze určit za klidu rotoru [11].

Pro dynamické vyvážení rotoru musíme ještě při  $\alpha_z = 0$  splnit podmínky  $\mathbf{M}_{O_1x}^D = 0$  a  $\mathbf{M}_{O_1y}^D = 0$ , a to pro libovolnou úhlovou rychlost  $\omega_z$ . Tyto požadavky jsou podle rovnic (8.22 a 8.23) splnitelné podmínkami

$$D_{yz} = 0 \quad (8.26)$$

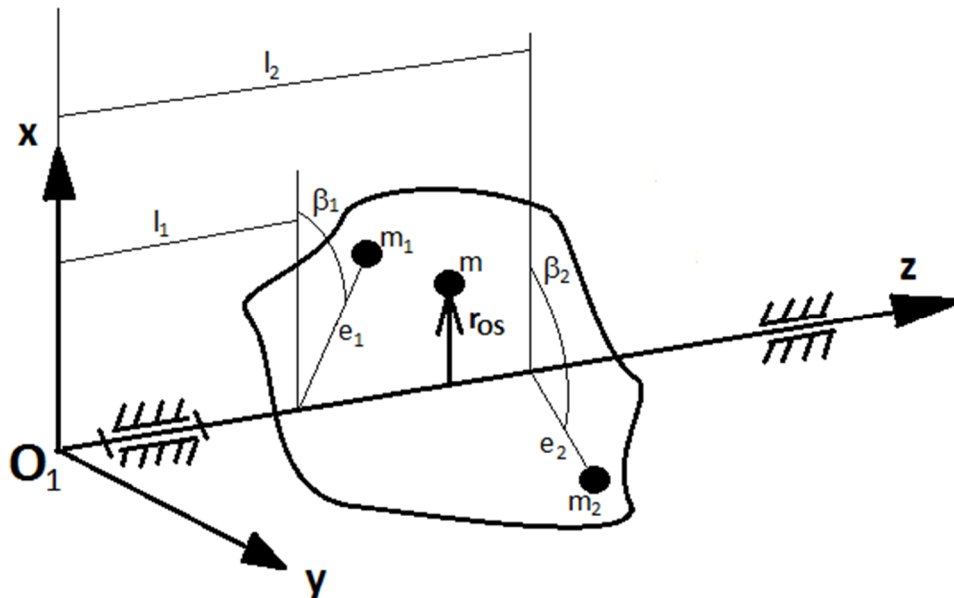
$$D_{xz} = 0 \quad (8.27)$$

což jsou dynamické podmínky vyvážení. Obdobně jako pro statické podmínky se nazývají dynamické, protože je lze vyšetřovat pouze při pohybu rotoru [11].

Pokud je zároveň splněna podmínka statického i dynamického vyvážení je osa rotace rotoru shodná s jeho hlavní centrální osou setrvačnosti a rotor je dynamicky vyvážen.

Vidíme také, že pokud je rotor vyvážen při konstantních otáčkách, tak zůstává vyvážen i při  $\alpha_z \neq 0$ , jelikož nevznikají žádné přídavné setrvačné účinky.

Nyní aplikujeme získané podmínky vyvažování na rotor, jehož středisko hmotnosti je ve vzdálenosti  $r_{OS}$  od osy rotace, a který budeme vyvažovat ve dvou vyvažovacích rovinách přidáním dvou vyvažovacích hmot  $m_1$  a  $m_2$  podle *Obrázku 35*.



Obrázek 35 – vyvažování ve dvou rovinách [11]

Pro dosažení statické podmínky rovnováhy musíme umístit hmotu tak, aby byla výsledná normálová setrvačná síla rovna nule [11]

$$D_n = (m + m_1 + m_2)r'_{OS}\omega^2 = 0 \quad (8.28)$$

tedy, aby nové středisko hmotnosti leželo na ose rotace, tedy  $r'_{OS} = 0$ . Tuto podmínku rozepíšeme do směru osy x

$$r'_{OSx} = \frac{mr_{OS} + m_1e_1\cos\beta_1 + m_2e_2\cos\beta_2}{m + m_1 + m_2} = 0 \quad (8.29)$$

a do směru osy y

$$r'_{OSy} = \frac{m_1e_1\sin\beta_1 + m_2e_2\sin\beta_2}{m + m_1 + m_2} = 0 \quad (8.30)$$

Z těchto dvou rovnic získáváme první dvě rovnice pro vyvážení přídatnými hmotami

$$mr_{Os} + m_1 e_1 \cos \beta_1 + m_2 e_2 \cos \beta_2 = 0 \quad (8.31)$$

$$m_1 e_1 \sin \beta_1 + m_2 e_2 \sin \beta_2 = 0 \quad (8.32)$$

Dynamická podmínka vyvážení vychází z požadavku nulových setrvačných momentů. Toho dosáhneme umístěním hmoty tak, aby deviační moment po přidání této hmoty byl nulový [11]

$$D'_{yz} = D_{yz} + m_1 e_1 \sin \beta_1 l_1 + m_2 e_2 \sin \beta_2 l_2 = 0 \quad (8.33)$$

$$D'_{xz} = D_{xz} + m_1 e_1 \cos \beta_1 l_1 + m_2 e_2 \cos \beta_2 l_2 = 0 \quad (8.34)$$

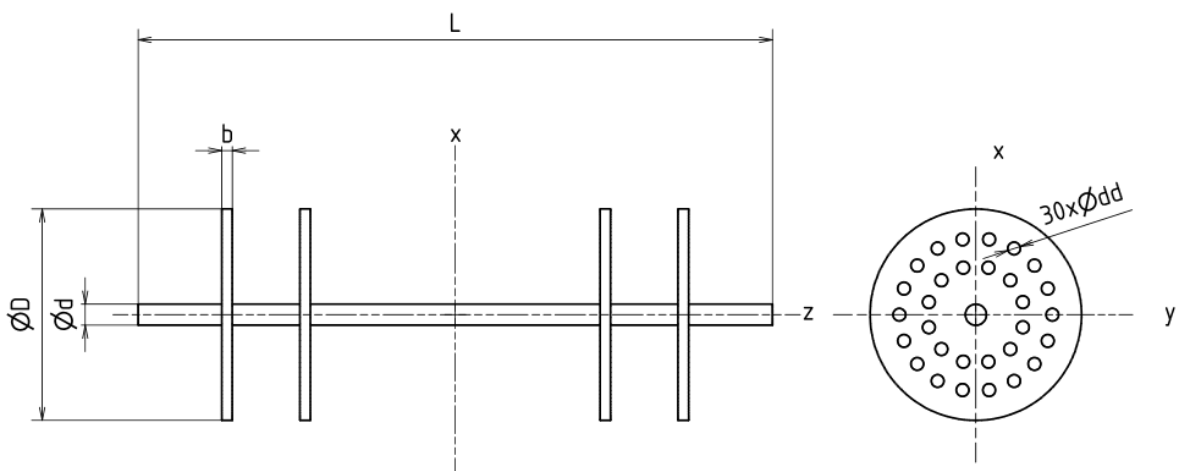
Získali jsme tak čtyři dříve zmiňované rovnice o osmi neznámých.

## 8.6 Řešení výukové úlohy – vyvážení tuhého rotoru

Naším úkolem je určit vývažky, které je třeba umístit do dvou ze čtyř možných vyvažovacích rovin tak, abychom dosáhli vyvážení modelu podle Přílohy 1. Postup rozdělím na dílčí části a ke každé uvedu schematický obrázek a informace potřebné pro výpočet. Uvedu výpočtové vzorce, ale dosazovat do nich nebudu, jelikož jsem všechny výpočty prováděl v programu MATLAB. Uvádět budu pouze výsledky.

### 8.6.1 Hmotové vlastnosti rotoru

Nejdříve spočítáme objem a hmotnost rotoru podle Obrázku 36



Obrázek 36 – rotor

Dáno:  $L = 600 \text{ mm}$ ,  $D = 200 \text{ mm}$ ,  $d = 20 \text{ mm}$ ,  $b = 10 \text{ mm}$ ,  $d_d = 12 \text{ mm}$ ,  $\rho_R = 1060 \text{ kg/m}^3$

$$V_R = \frac{\pi d^2}{4} L + 4 \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} b - 120 \frac{\pi d_d^2}{4} b \quad (8.35)$$

$$V_R = 0,0012968 \text{ m}^3 \quad (8.36)$$

$$m_R = V_R \rho_R \quad (8.37)$$

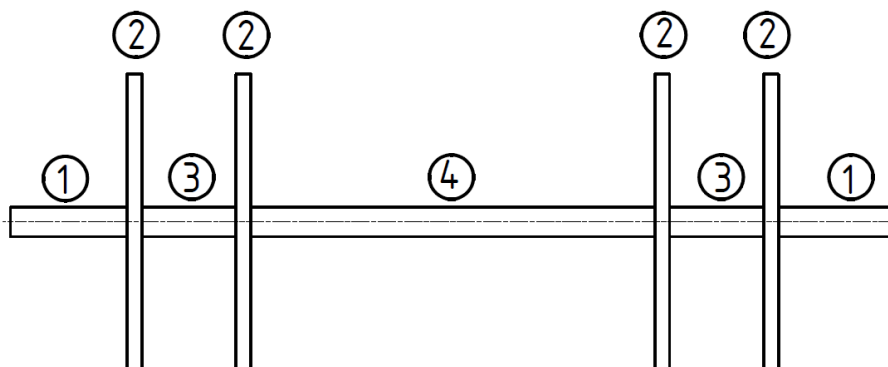
$$m_R = 1.3747 \text{ kg} \quad (8.38)$$



Dále budeme potřebovat momenty setrvačnosti rotoru k jednotlivým osám. Začneme momentem setrvačnosti k ose z. Moment setrvačnosti válce o hmotnosti  $m$  a poloměru  $R$  k jeho ose je [9]

$$I = \frac{1}{2}mR^2 \quad (8.39)$$

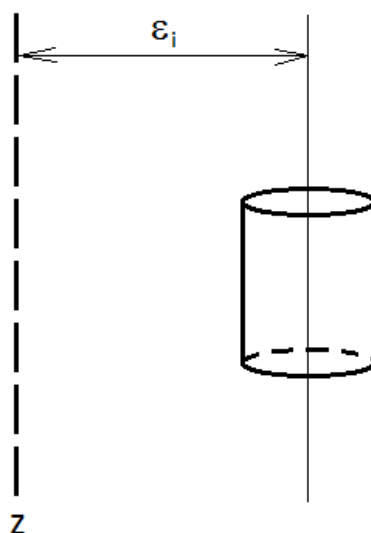
Rotor rozdělíme s využitím symetrie na čtyři válce, viz *Obrázek 37*



*Obrázek 37 – dílčí "válců"*

$$I'_{Rz} = 2I_{1z} + 4I_{2z} + 2I_{3z} + I_{4z} \quad (8.40)$$

Od toho momentu setrvačnosti musíme odečíst pomyslné momenty setrvačnosti děr, abychom dostali skutečný moment setrvačnosti rotoru k ose z.



*Obrázek 38 – "moment setrvačnosti děr"*

Na *Obrázku 38* značí  $\varepsilon_i$  poloměr příslušné roztečné kružnice, na které leží sady děr. K výpočtu pomyslného momentu setrvačnosti využijeme Steinerovu větu [11] o momentu setrvačnosti tělesa k ose procházející mimo jeho těžiště. Podle ní dostáváme

$$I_{di} = \frac{1}{2} m_d R_d^2 + m_d \varepsilon_i^2 \quad (8.41)$$

Výsledný moment setrvačnosti rotoru k ose z je tedy

$$I_{Rz} = I'_{Rz} - 48I_{d1} - 72I_{d2} = 0,0060935 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (8.42)$$

Při výpočtu momentu setrvačnosti k osám x a y se postupuje obdobně. Pro moment setrvačnosti válce o hmotnosti  $m$  a délce  $L$  k ose, která je kolmá na osu onoho válce a prochází jeho těžištěm platí

$$I = \frac{1}{12} mL^2 \quad (8.43)$$

Výpočet těchto dvou momentů setrvačnosti nebudu provádět, protože by byl zbytečně zdlouhavý a není náplní této práce. Tato složitost je způsobena tím, že každá z děr má jinou vzdálenost od osy x, respektive y. Uvedu pouze, že by byl prováděn opět pomocí Steinerovy věty. Potřebné hmotové vlastnosti převezmu z programu Autodesk Inventor. Podle *Obrázku 39* je tedy

$$I_{Rx} = I_{Ry} = 0,0482516 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (8.44)$$

**Tělesa**

Součást

Materiál

ABS plast

Hustota  Požadovaná přesnost

**Obecné vlastnosti**

Hmotnost  X  Těžiště

Povrch  Y

Objem  Z

**Vlastnosti setrvačnosti**

Momenty hmotnosti

Ixx  Vypočteno pomocí negativního integrálu

Ixy  Iyy

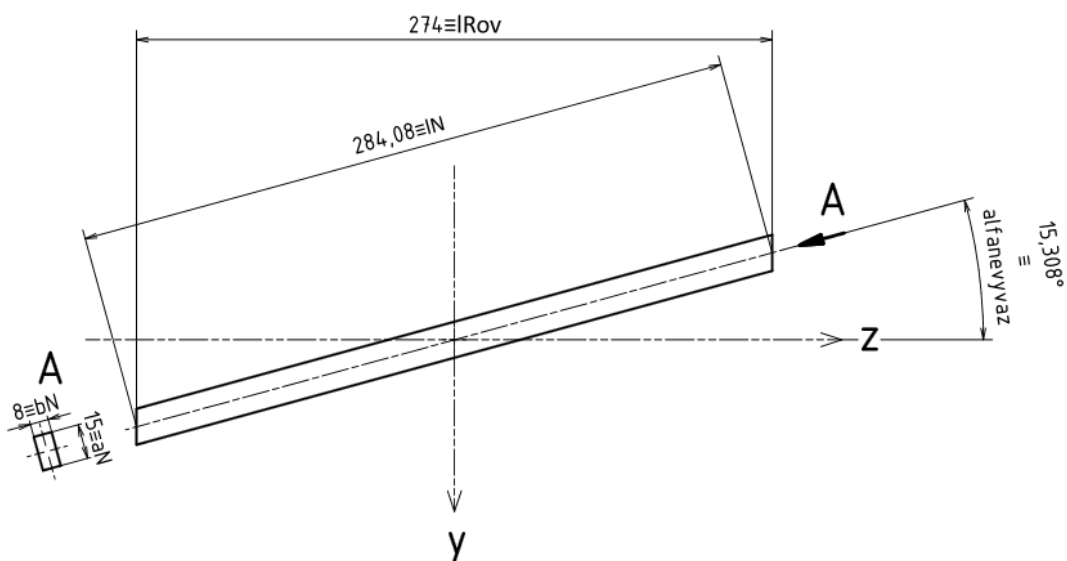
Ixz  Iyz  Izz

Obrázek 39 – hmotové vlastnosti rotoru

Z uvedeného obrázku je také patrné, že všechny deviační momenty jsou nulové, jelikož v každé rovině je rotor symetrický alespoň podle jedné osy.

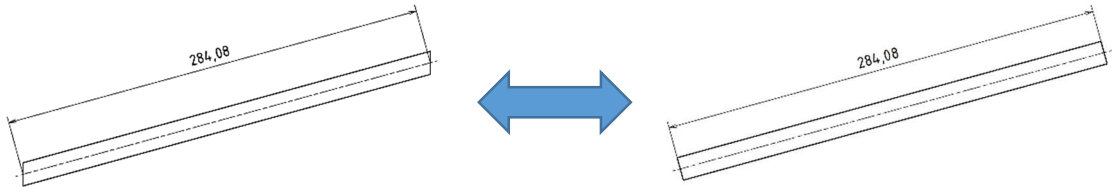
### 8.6.2 Hmotové vlastnosti nevážky

Stejně jako u rotoru začneme základními veličinami, které budeme později potřebovat k výpočtům – objem a hmotnost. Rozměry nevážky udává *Obrázek 40*.



Obrázek 40 – nevážek

Skutečný tvar nevývažku můžeme při výpočtech nahradit kvádrem se základnou 8 x 15 a výškou 284,08 mm (Obrázek 41). Při určování hmotnosti se touto náhradou nedopustíme žádné chyby a u deviačního momentu a momentu setrvačnosti se dopustíme chyby zanedbatelné.



Obrázek 41 – náhrada nevývažku

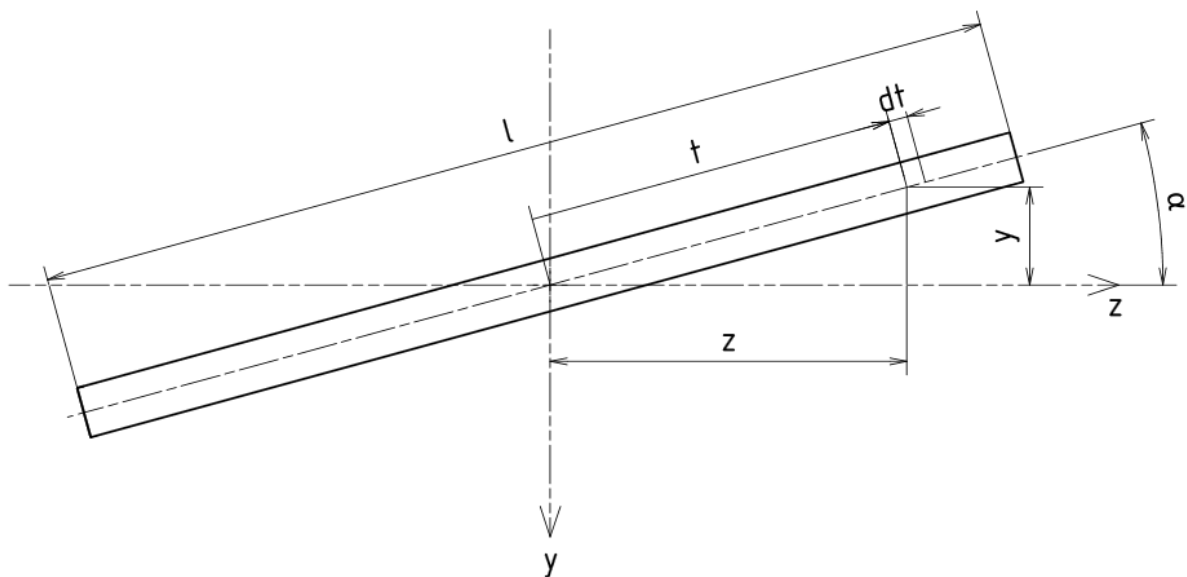
Objem a hmotnost nevývažku

$$V_N = a_N * b_N * l_N \quad (8.45)$$

$$m_N = V_N \rho_N = a_N * b_N * l_N * \rho_N \quad (8.46)$$

$$m_N = 0,092042 \text{ kg} \quad (8.47)$$

Dále spočítáme podle Obrázku 42 deviační momenty nevývažku. Jediný nenulový je deviační moment k rovině yz a je zároveň jedinou nesymetricky rozloženou hmotou na našem modelu, což způsobuje momentové nevyvážení.



Obrázek 42 – výpočet deviačního momentu a momentu setrvačnosti

$$y = -t \sin(\alpha), z = t \cos(\alpha), dm = \frac{m_N}{l} dt \quad (8.48)$$

$$\begin{aligned} D_{yz} &= \int_{M_N} yz \, dm = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} -t \sin(\alpha) t \cos(\alpha) \frac{m_N}{l} dt = \\ &= -\frac{m_N \sin(2\alpha)}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} t^2 dt = -\frac{m_N \sin(2\alpha)}{l} \left[ \frac{t^3}{3} \right]_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} = \\ &= -\frac{m_N \sin(2\alpha)}{6l} \left( \frac{l^3}{8} - \left( -\frac{l^3}{8} \right) \right) = -\frac{m_N l^2 \sin(2\alpha)}{24} \end{aligned} \quad (8.49)$$

Po dosazení příslušných hodnot

$$D_{Nyz} = -0,00015762 \, \text{kg} \cdot \text{m}^2 \quad (8.50)$$

Následně musíme spočítat momenty setrvačnosti nevývažku ke stejnému souřadnicovému systému, jako je systém rotoru. Uvedu opět pouze výpočet momentu setrvačnosti k ose z. U dalších os by se postupovalo obdobně.

Moment setrvačnosti nevývažku k ose z spočítáme jako součet momentů setrvačnosti k rovinám xz a yz [9]:

$$I_{Nz} = I_{Nyz} + I_{Nzx} \quad (8.51)$$

Pro výpočet  $I_{Nzx}$  použijeme *Obrázek 42*.

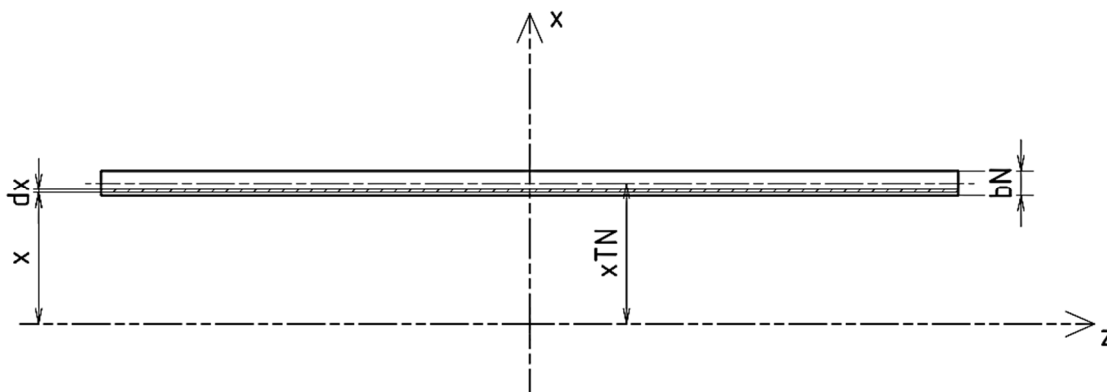
$$I_{Nzx} = \int_{M_N} y^2 \, dm \quad (8.52)$$

$$y = -t \sin(\alpha), y^2 = t^2 (\sin(\alpha))^2, dm = \frac{m_N}{l} dt \quad (8.53)$$

$$I_{Nzx} = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} t^2 (\sin(\alpha))^2 \frac{m_N}{l} dt = \frac{m_N}{l} (\sin(\alpha))^2 \left[ \frac{t^3}{3} \right]_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} =$$

$$= \frac{m_N l^2 (\sin(\alpha))^2}{12} \quad (8.54)$$

Výpočet  $I_{Nyz}$  provedeme podle Obrázku 43.



Obrázek 43 – moment setrvačnosti nevývažku k rovině yz

$$I_{Nyz} = \int_M x^2 dm \quad (8.55)$$

$$dm = \frac{m_N}{b_N} dx \quad (8.56)$$

$$I_{Nyz} = \int_{x_{TN} - \frac{b_N}{2}}^{x_{TN} + \frac{b_N}{2}} x^2 \frac{m_N}{b_N} dx = \frac{m_N}{b_N} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{x_{TN} - \frac{b_N}{2}}^{x_{TN} + \frac{b_N}{2}} \quad (8.57)$$

Po úpravě dostáváme

$$I_{Nyz} = m_N x_{TN}^2 + m_N \frac{b_N^2}{12} \quad (8.58)$$

A pro celkový moment setrvačnosti:

$$I_{Nz} = I_{Nzx} + I_{Nyz} = \frac{m_N l^2 (\sin(\alpha))^2}{12} + m_N x_{TN}^2 + m_N \frac{b_N^2}{12} \quad (8.59)$$

$$I_{Nz} = 0,00023002 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (8.60)$$

Zbylé momenty setrvačnosti rotoru převezmeme opět z programu Autodesk Inventor, viz *Obrázek 44*.

Obrázek 44 – hmotové vlastnosti nevážku

$$I_{Nx} = 0,00062084 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (8.61)$$

$$I_{Ny} = 0,00076272 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (8.62)$$

### 8.6.3 Hmotové vlastnosti soustavy

Celková hmotnost modelu

$$m = m_R + m_N \quad (8.63)$$

$$m = 1,467 \text{ kg} \quad (8.64)$$

Celkové momenty setrvačnosti

$$I_x = I_{Rx} + I_{Nx} = 0,048872 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (8.65)$$

$$I_y = I_{Ry} + I_{Ny} = 0,049014 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (8.66)$$

$$I_z = I_{Rz} + I_{Nz} = 0.006324 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (8.67)$$

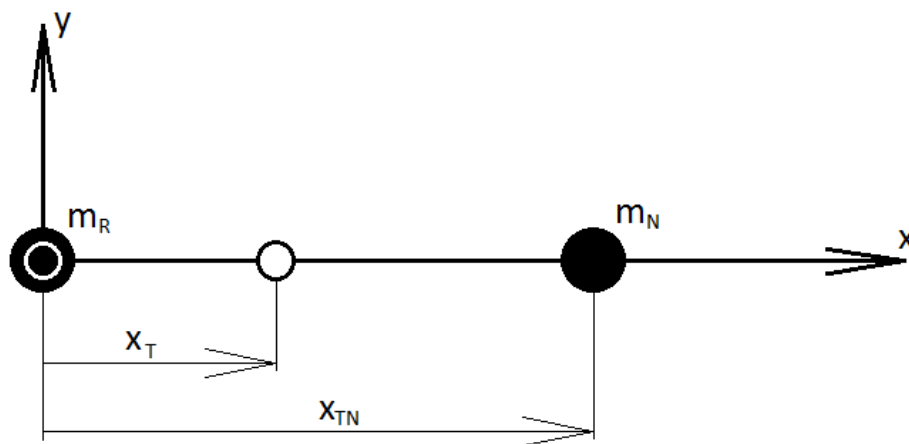
Deviační momenty

$$D_{xy} = 0 \quad (8.68)$$

$$D_{xz} = 0 \quad (8.69)$$

$$D_{yz} = D_{Nyz} = -0,00015762 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (8.70)$$

Dále si spočítáme polohu těžiště naší soustavy. Určíme ji z jednoduché podmínky statické rovnováhy podle *Obrázku 45*.



*Obrázek 45 – poloha těžiště*

$$m_R x_T = m_N (x_{TN} - x_T) \quad (8.71)$$

$$x_T = \frac{x_{TN} m_N}{m_R + m_N} \quad (8.72)$$

$$x_T = 0.0028239 \text{ m} \quad (8.73)$$



Nyní známe všechny hmotové vlastnosti naší soustavy potřebné k řešení vyvažovacích rovnic a k určení dynamických účinků naší nevyvážené soustavy na ložiska. Výpočty hmotových vlastností jsou prováděny ve skriptu *dynamika.m*, který řeší pouze tuto problematiku, a proto ho v této práci neuvádím. Lze ho nalézt na přiloženém paměťovém médiu.

#### 8.6.4 Řešení vyvažovacích rovnic – metoda inverzní matice

K řešení vyvažovacích rovnic jsem využil programu MATLAB. Nejdříve je třeba nahrát známé parametry soustavy potřebné k provedení výpočtů. K tomuto účelu slouží skript *parametry.m*, který tvoří Přílohu 3.

K žádanému výsledku se můžeme dostat, když soustavu čtyř rovnic převedeme na maticovou soustavu a vyřešíme pomocí inverzní matice.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{c} \quad (8.74)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{c} \quad (8.75)$$

$$\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_1 & e_2 \\ 0 & 0 & e_1 l_1 & e_2 l_2 \\ e_1 l_1 & e_2 l_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \cos \beta_1 \\ m_2 \cos \beta_2 \\ m_1 \sin \beta_1 \\ m_2 \sin \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -mr \\ 0 \\ -D_{yz} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.76)$$

Toto řešení realizuje skript *maticovy\_vypocet.m* (Příloha 4). Tímto postupem získáme řešení, které pro nás však není zcela vyhovující. Naše čtyři rovnice o nyní již pouze čtyřech neznámých mají totiž celkem čtyři možná řešení. Toto je dáno charakterem rovnic a vzhledem k naší problematice je to i logické – vektor  $\mathbf{b}$  obsahuje jako složky součiny hmotnosti a polohových úhlů, tudíž např. záporná hmotnost a záporný polohový úhel mají z hlediska rovnice stejný efekt, jako kladná hmotnost a kladný polohový úhel (znaménka se vyruší). Tzn., pokud uberu hmotu na „jedné straně“ součásti, zapůsobím na ni stejně, jako kdybych tu samou hmotu na „druhé straně“ součásti přidal. Z hlediska praktického dopadu výsledku jsou však tyto možnosti rozdílné, jelikož my máme možnost hmotu pouze přidávat. Potřebujeme tedy získat všechna čtyři možná řešení a z nich vybrat to, které je pro nás realizovatelné.

### 8.6.5 Řešení vyvažovacích rovnic – symbolický výpočet

Při tomto postupu využijeme symbolickou knihovnu v MATLABu, díky níž můžeme naše neznámé zadat jako symboly a jako se symboly s nimi také počítat. Tímto postupem dokážeme získat všechna čtyři možná řešení, z kterých vybereme to, které splňuje podmínku přidávání hmoty. Na *Obrázku 46* a *Obrázku 47* jsou zobrazeny nejdůležitější části skriptu.

```
1 close all; clear;
2
3 %Načtení parametrů soustavy
4 parametry
5
6 %Neznámé (nevývažek a úhel beta)
7 syms m1 m2 betal beta2
8
9 %Rovnice pro statické vyvážení
10 R1 = m*r*cos(fi) + m1*e1*cos(betal) + m2*e1*cos(beta2) == 0;
11 R2 = m*r*sin(fi) + m1*e1*sin(betal) + m2*e1*sin(beta2) == 0;
12
13 %Rovnice pro dynamické vyvážení
14 R3 = DyZ + m1*e1*sin(betal)*l2 + m2*e1*sin(beta2)*l3 == 0;
15 R4 = DxZ + m1*e1*cos(betal)*l2 + m2*e1*cos(beta2)*l3 == 0;
16
17 %Řešení neznámých
18 [m1v, m2v, betalv, beta2v] = solve(R1, R2, R3, R4, m1, m2, betal, beta2);
```

Obrázek 46 – část skriptu na řešení vyvažovacích rovnic (1)

```
48 for indexreseni = 1:4
49     if (m1v(indexreseni) > 0 && m2v(indexreseni) > 0)
50         RESENI=[double(m1v(indexreseni)), double(m2v(indexreseni)),
double(betalv(indexreseni))*180/pi, double(beta2v(indexreseni))*180/pi];
51     end
52 end
53
54 disp(' ')
55 disp('Pro naše požadavky je vyhovující řešení v rovinách l2 - l3:')
56 disp('      m1v      m2v      betalv      beta2v')
57 disp(RESENI)
```

Obrázek 47 – část skriptu na řešení vyvažovacích rovnic (2)

Celý skript se nazývá *vyvazeni\_v\_rovinach\_l2\_l3.m* a tvoří *Přílohu 5* této práce. Počítá hmotnost a polohový úhel vyvažovací hmoty, kterou je třeba umístit na náš model,

abychom dosáhli dynamického vyvážení. Výpis z „Command Window“ po provedení skriptu zobrazuje *Obrázek 48*.

```

Command Window
>> parametry
>> vyvazeni_v_rovinach_l2_l3
-----Kontrola dosazením v pořádku.-----
-----Kontrola dosazením v pořádku.-----
-----Kontrola dosazením v pořádku.-----
-----Kontrola dosazením v pořádku.-----

Hmotnosti vývažků a úhly (ve stupních) pro jejich umístění pro dosažení dynamického vyvážení jsou:
      mlv      m2v      betalv      beta2v
-0.046562  -0.046562    15.003    -15.003
 0.046562  -0.046562   -165    -15.003
-0.046562   0.046562    15.003     165
 0.046562   0.046562   -165     165

Pro naše požadavky je vyhovující řešení v rovinách l2 - l3:
      mlv      m2v      betalv      beta2v
 0.046562   0.046562   -165     165
fx >> |

```

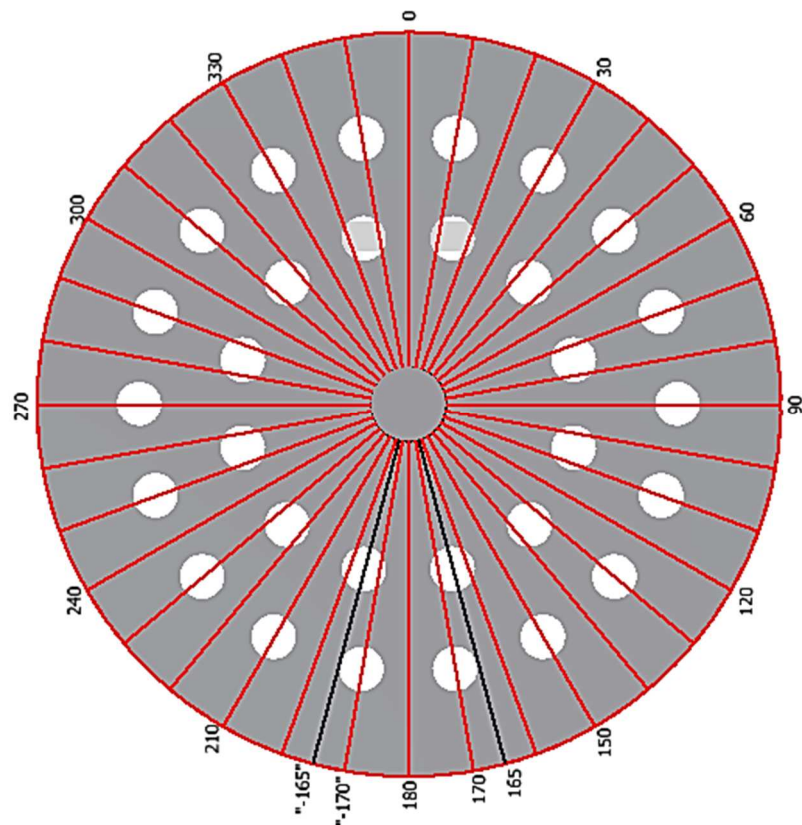
Obrázek 48 – výpis z "Command Window" – MATLAB

Na přiloženém paměťovém médiu jsou uloženy skripty *vyvazeni\_v\_rovinach\_l2\_l4.m* a *vyvazeni\_v\_rovinach\_l1\_l4.m*. Oba se od *Přílohy 5* liší pouze ve vyvažovacích rovnicích. Slouží, stejně jako *Příloha 5*, k výpočtu hmotností a polohových úhlů vývažků, pouze při použití jiných vyvažovacích rovin. Možnost volby různých vyvažovacích rovin a poloměrů je výhodná, jelikož ne vždy je možné použít libovolnou rovinu (poloměr) pro vyvažování, ať už z důvodů konstrukčních, technologických, montážních, či jiných. V následující tabulce je několik možností umístění hmoty pro vyvážení.

Roviny	Poloměry	Hmotnosti [g]	Polohy [°]
l2 a l3	l2: e1; l3: e1	m1: 46,6; m2: 46,6	$\beta_1: -165; \beta_2: 165$
	l2: e2; l3: e2	m1: 29,6; m2: 29,6	$\beta_1: -165; \beta_2: 165$
l2 a l4	l2: e2; l4: e1	m1: 35,1; m2: 37,0	$\beta_1: -170; \beta_2: 165$
	l2: e2; l4: e2	m1: 35,1; m2: 23,5	$\beta_1: -170; \beta_2: 165$
l1 a l4	l1: e2; l4: e2	m1: 29,1; m2: 29,1	$\beta_1: -170; \beta_2: 170$
	l1: e1; l4: e2	m1: 45,7; m2: 23,5	$\beta_1: -170; \beta_2: 170$

Tabulka 1 – řešení vyvažovacích rovnic v jednotlivých rovinách

V tabulce odpovídají vyvažovací roviny (I1 až I4) značení podle *Obrázku 50*. Poloměr  $e_1$  je menší z obou dostupných poloměrů (*Obrázek 49*). Červenou barvou jsou v tabulce značena řešení, která nám nevyhovují z hlediska požadavku na polohový úhel pro umístění vývažků. Matematicky se sice jedná o správné řešení, pro nás je však nepoužitelné, viz následující obrázek.

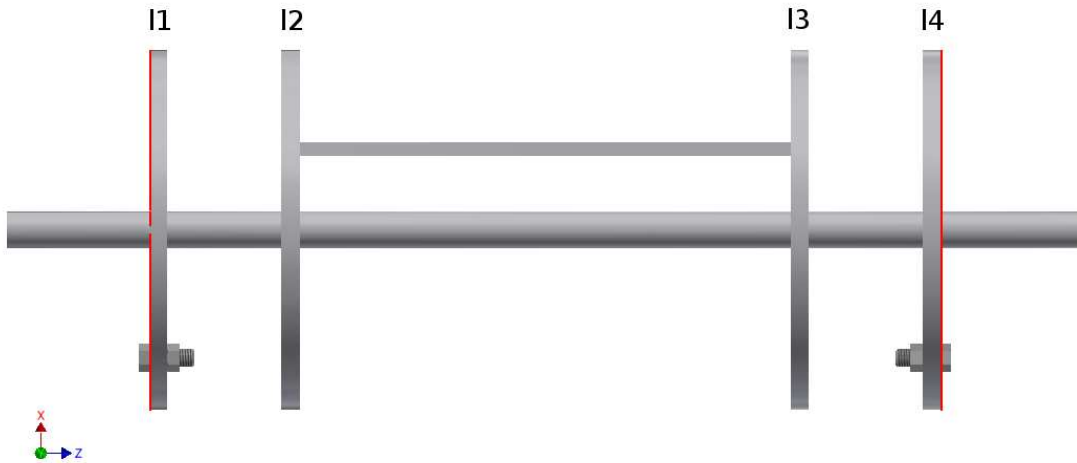


*Obrázek 49 – polohové úhly pro vyvažování*

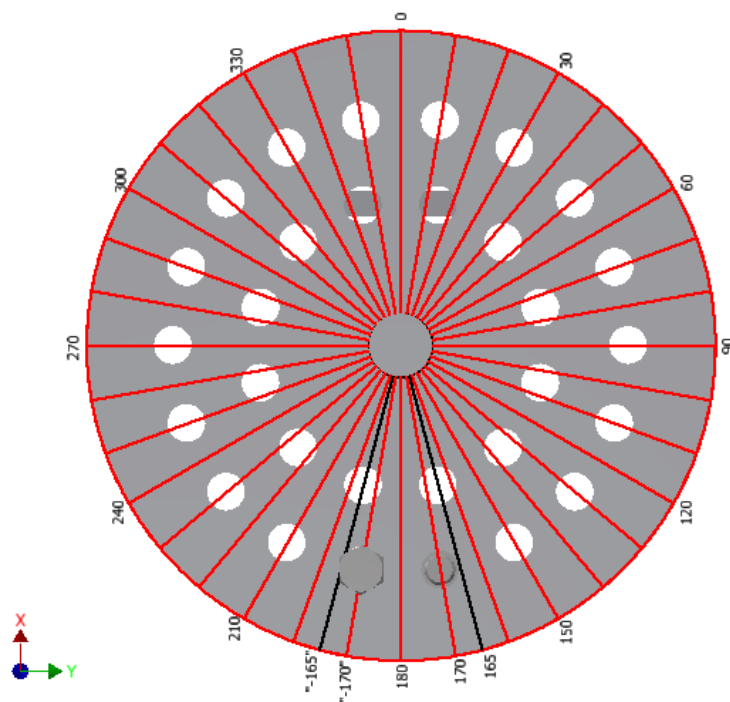
Z *Obrázku 49* je patrné, proč jsou červeně zvýrazněná řešení z tabulky nevhodná. Předpokládají umístění vyvažovací hmoty na místa, která nejsou dostupná – není připravena díra pro přidání hmoty.

Ve výše uvedené *Tabulce 1* nejsou všechny možné kombinace vyvažovacích rovin a poloměrů pro umístění vývažků. Slouží spíše pro zdůraznění rozmanitosti řešení při možnosti využití více rovin, respektive více poloměrů vývažků. Nesmíme však zapomenout vzít v potaz vhodnost jednotlivých řešení.

Příklad realizace přidání vyvažovací hmoty při vyvažování v rovinách I1 a I4 zobrazuje *Obrázek 50* a *Obrázek 51*. Jako vyvažovací hmotu použijeme, jak bylo již dříve uvedeno, dvojici šroub – matice.



*Obrázek 50 – vyvážení pomocí šroubového spoje (rovina xz)*



*Obrázek 51 – vyvážení pomocí šroubového spoje (rovina xy)*

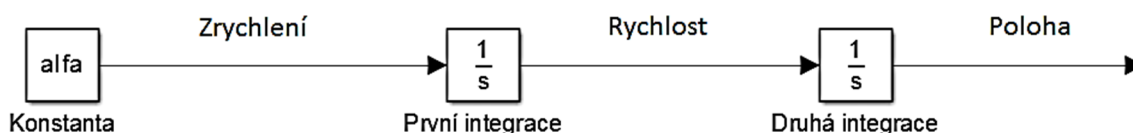
Tento způsob přidání vyvažovací hmoty je pro účely výukového modelu obzvláště vhodný, protože ho lze provést velmi jednoduše a rychle. Při prvním provedení bude třeba upravit hmotnost šroubového spoje tak, aby odpovídala vypočítané hmotnosti vývažku.

## 8.7 Dynamika výukového modelu

V této části práce se zaměříme na dynamické vlastnosti našeho výukového modelu. Budeme uvažovat pohon soustavy elektromotorem a vyšetříme rozběh této soustavy. Zanedbáme tření, odpor prostředí a další vlivy působící na danou soustavu a nahradíme je pouze velice zjednodušeným „modelovým odporem“, který nám zajistí, že se model ustálí na konečných otáčkách, které budou odpovídat otáčkám elektromotoru. Dále také zanedbáme gravitaci, která kvůli excentricitě těžiště modelu ovlivňuje jeho rozběh i reakce v ložiskovém uložení. Ověřil jsem, že tento vliv je z hlediska dynamiky výukového modelu zanedbatelný. Z průběhu rozběhu získáme pomocí pohybových rovnic přídavné dynamické účinky, které zatěžují uložení modelu, a ověříme, zda tyto účinky zmizí po přidání vyvažovací hmoty určené v předešlé kapitole.

### 8.7.1 Rozběh rotoru s nevyvážkem

K určení průběhu tří dynamických veličin (zrychlení, rychlost, poloha) musíme provést integraci v čase. Tento matematický úkon provedeme v Simulinku od MATLABu, pomocí něhož můžeme provést integraci velice jednoduše a získáme hodnoty požadovaných veličin v diskrétních časových okamžicích, dostatečně blízkých na to, abychom dokázali následně vykreslit funkce žádaných veličin. Integrace probíhá podle *Schéma 2*:



*Schéma 2 – postup integrace*

Simulink má vlastní paměť a data z něj musíme nahrát do paměti MATLABu (Workspace), abychom s nimi mohli dále pracovat. K tomu slouží funkční blok „To Workspace“, který data ukládá vždy jako tabulku, kde první sloupec udává časový okamžik a druhý hodnotu dané veličiny v onom okamžiku.

Jako pohon zvolíme dvoupólový asynchronní elektromotor SIEMENS 1LF7060-2AB [14]. Příkon tohoto elektromotoru je 0,18 kW a otáčky jsou  $2895 \text{ min}^{-1}$ . Z těchto údajů spočítáme zjednodušeně moment, kterým budeme pohánět náš model.

$$M_{elm} = 9550 \frac{P_{elm}}{n_{elm}} = 9550 \frac{0,18}{2895} = 0,59378 \text{ Nm} \quad (8.77)$$

Nyní máme všechny údaje potřebné pro vykreslení rozběhu elektromotoru. Níže je uvedeno schéma ze Simulinku, které jsem vytvořil pro získání potřebných dat.

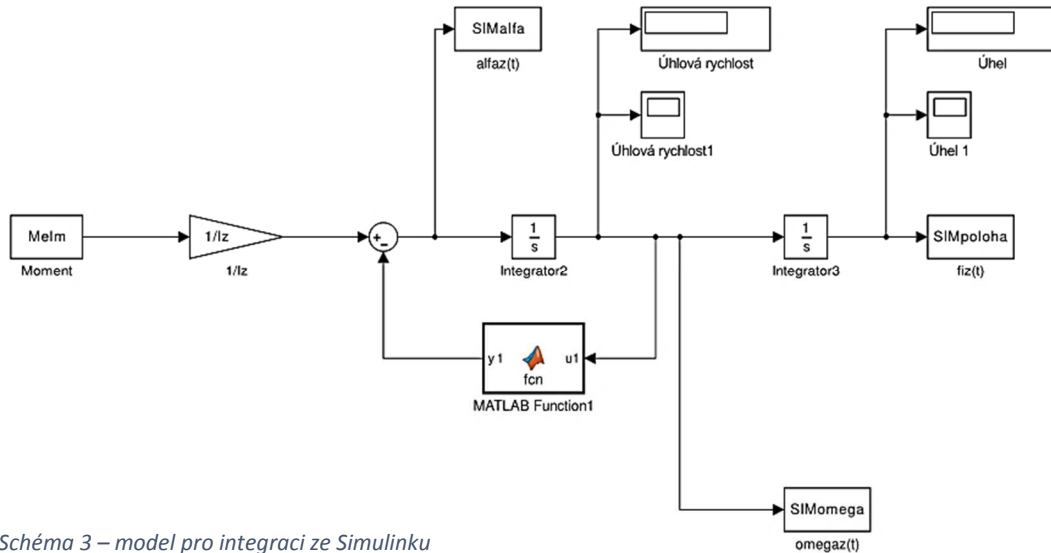
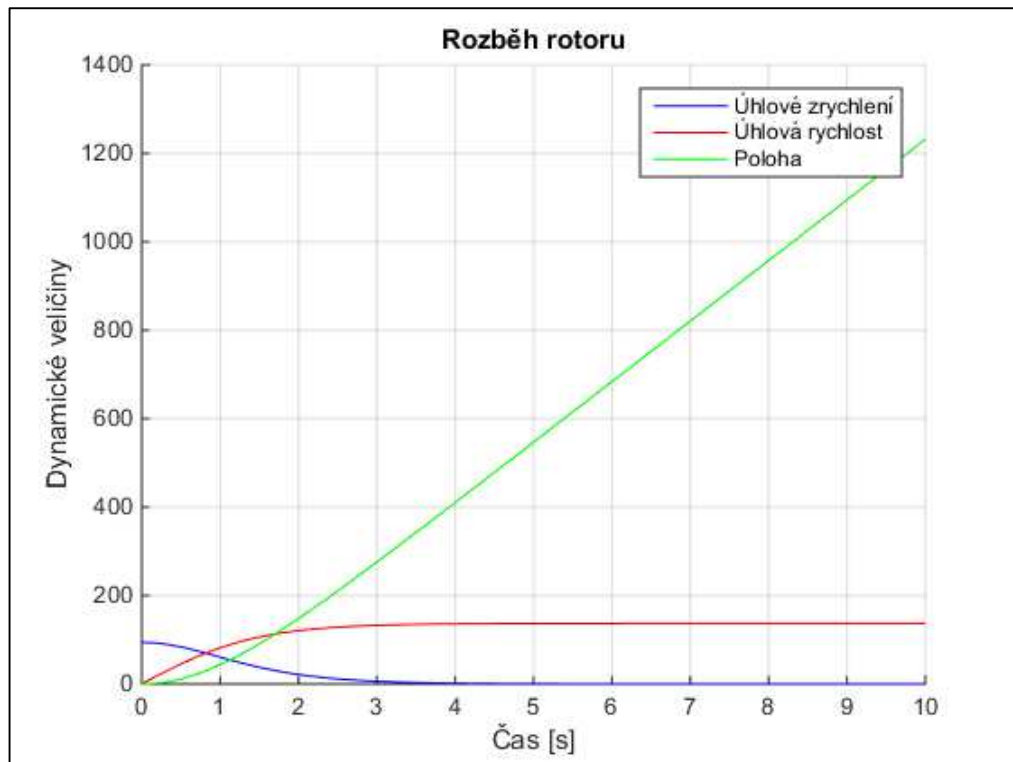


Schéma 3 – model pro integraci ze Simulinku

Zpracování získaných dat je prováděno pomocí skriptu *vypocet\_reakci.m*, který je celý uveden jako *Příloha 6*. Jako výstup tohoto skriptu získáváme mimo jiné následující graf (*Obrázek 52*). Všechny znázorněné veličiny jsou v základních jednotkách.



Obrázek 52 – rozběh rotoru

### 8.7.2 Výpočet přídavného zatížení od nevyváženosti

Při určování přídavného dynamického zatížení od nevyváženého rotoru vyjdeme z šesti dříve odvozených pohybových rovnic (8.4 až 8.6 a 8.11 až 8.13). Pomocí nich získáme přídavné momenty a síly, které vznikají vlivem nevyváženosti rotujícího tělesa. Tyto momenty a silové účinky pak musí přirozeně zachytit uložení tělesa a rám stroje, což nepříznivě ovlivňuje životnost celé konstrukce. Pro vytvoření pohybových rovnic popisujících rotaci modelu využijeme d'Alambertova principu. V diskrétních časových okamžicích známe velikost úhlového zrychlení a úhlové rychlosti, můžeme tedy psát

$$D_n(t) = mr_{OS}\omega_z^2(t) \quad (8.78)$$

$$D_t(t) = mr_{OS}\alpha_z(t) \quad (8.79)$$

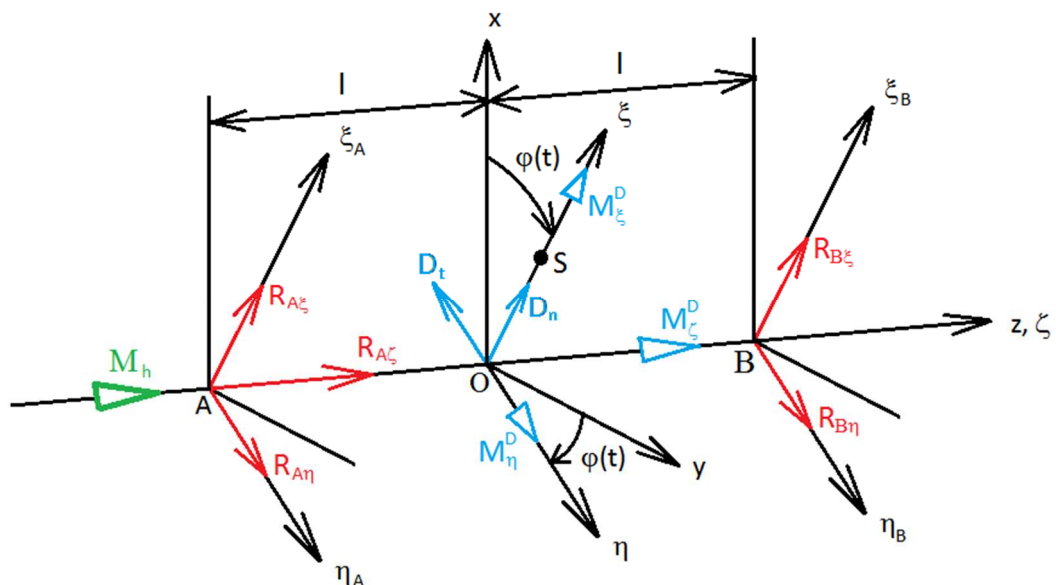
$$D_b(t) = 0 \quad (8.80)$$

$$M_\xi^D(t) = D_{xz}\alpha_z(t) - D_{yz}\omega_z^2(t) \quad (8.81)$$

$$M_\eta^D(t) = D_{yz}\alpha_z(t) + D_{xz}\omega_z^2(t) \quad (8.82)$$

$$M_\zeta^D(t) = -I_z\alpha_z(t) \quad (8.83)$$

Model uvolníme od rámu a přidáme reakce od ložisek. Silové účinky působící na rotující těleso uvolněné od rámu zobrazuje *Obrázek 53* ( $S$  – středisko hmotnosti)



Obrázek 53 – uvolnění modelu [9]



Modře jsou zobrazeny setrvačné účinky, zeleně hnací moment a červenou barvou jsou označeny reakce od ložisek. Z *Obrázku 53* můžeme psát pět rovnic rovnováhy, tři silové a dvě momentové, pomocí nichž určíme pět neznámých reakcí.

$$\xi: R_{A\xi} + D_n + R_{B\xi} = 0 \quad (8.84)$$

$$\eta: R_{A\eta} - D_t + R_{B\eta} = 0 \quad (8.85)$$

$$\zeta: R_{A\zeta} = 0 \quad (8.86)$$

$$M_{O\xi}: R_{A\eta}l - R_{B\eta}l + M_{\xi}^D = 0 \quad (8.87)$$

$$M_{O\eta}: -R_{A\xi}l + R_{B\xi}l + M_{\eta}^D = 0 \quad (8.88)$$

Z třetí z výše uvedených rovnic přímo získáváme reakci do axiálního směru, která je nulová. Postupným vyjadřováním a dosazováním neznámých v ostatních rovnicích získáme zbylé čtyři neznámé reakce.

$$R_{A\xi} = \frac{M_{\eta}^D}{2l} - \frac{D_n}{2} \quad (8.89)$$

$$R_{B\xi} = -\frac{M_{\eta}^D}{2l} - \frac{D_n}{2} \quad (8.90)$$

$$R_{A\eta} = -\frac{M_{\xi}^D}{2l} + \frac{D_t}{2} \quad (8.91)$$

$$R_{B\eta} = \frac{M_{\xi}^D}{2l} + \frac{D_t}{2} \quad (8.92)$$

Všechny výše uvedené reakce jsou časově závislé a spočítáme je ze setrvačných účinků, které v příslušných časových okamžicích známe. Pro promítnutí reakce do směrů pevného souřadnicového systému použijeme pro ložisko A transformace

$$R_{Ax} = R_{A\xi} \cos(\varphi) - R_{A\eta} \sin(\varphi) \quad (8.93)$$

$$R_{Ay} = R_{A\xi} \sin(\varphi) + R_{A\eta} \cos(\varphi) \quad (8.94)$$

Pro ložisko B obdobně

$$R_{Bx} = R_{B\xi} \cos(\varphi) - R_{B\eta} \sin(\varphi) \quad (8.95)$$

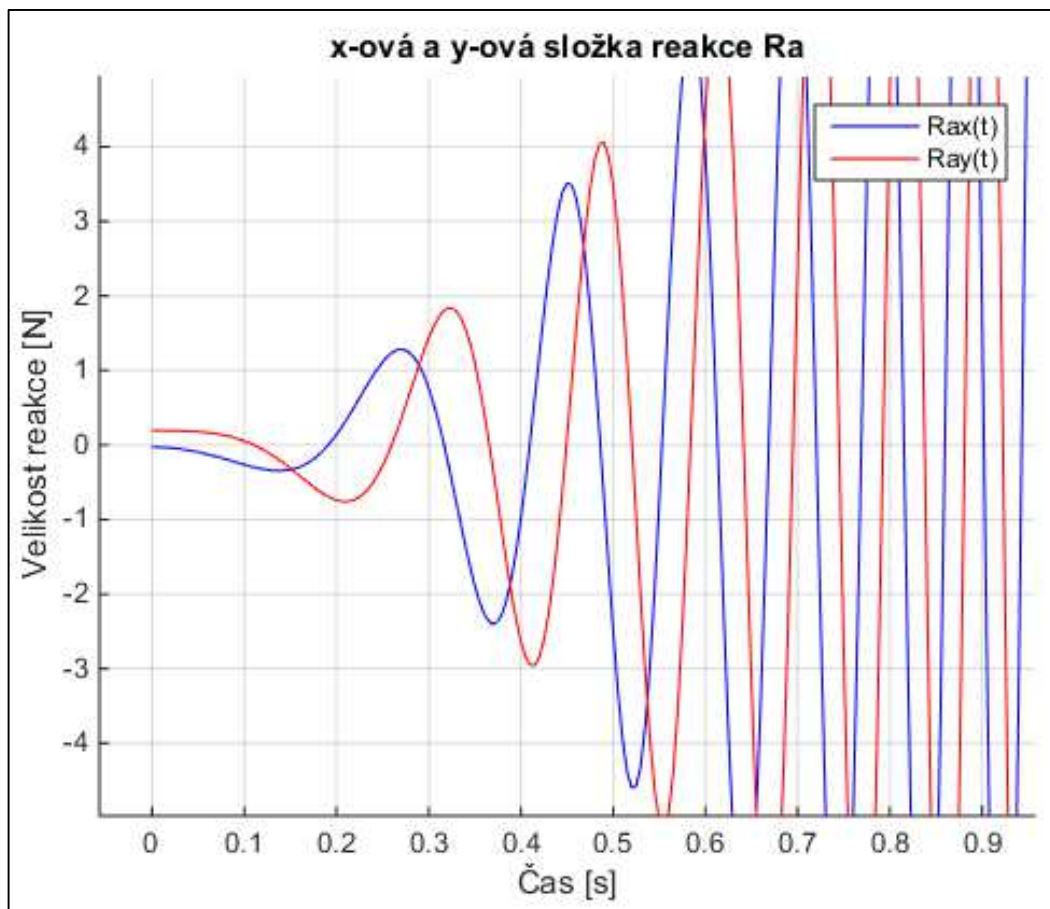
$$R_{By} = R_{B\xi} \sin(\varphi) + R_{B\eta} \cos(\varphi) \quad (8.96)$$

Celková velikost reakce v ložisku A a v ložisku B

$$R_A = \sqrt{R_{A\xi}^2 + R_{A\eta}^2} = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} \quad (8.97)$$

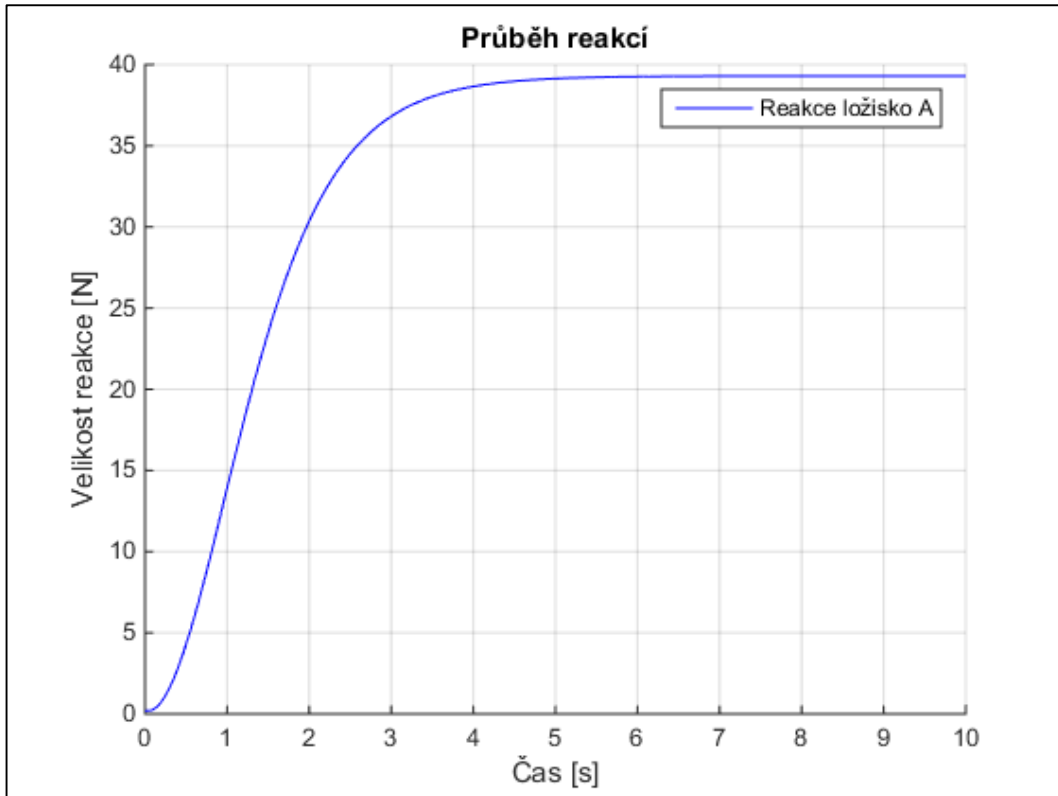
$$R_B = \sqrt{R_{B\xi}^2 + R_{B\eta}^2} = \sqrt{R_{Bx}^2 + R_{By}^2} \quad (8.98)$$

Grafické znázornění  $R_{Ax}(t)$  a  $R_{Ay}(t)$  (x-ová a y-ová složka reakce v ložisku A v čase) zobrazuje *Obrázek 54* – je patrné, že otáčením rotoru se mění vektor zatížení ložisek. Uložení rotoru většinou nebývá stejně únosné ve všech směrech, což nám poukazuje na další škodlivý efekt způsobený nevyvážeností.

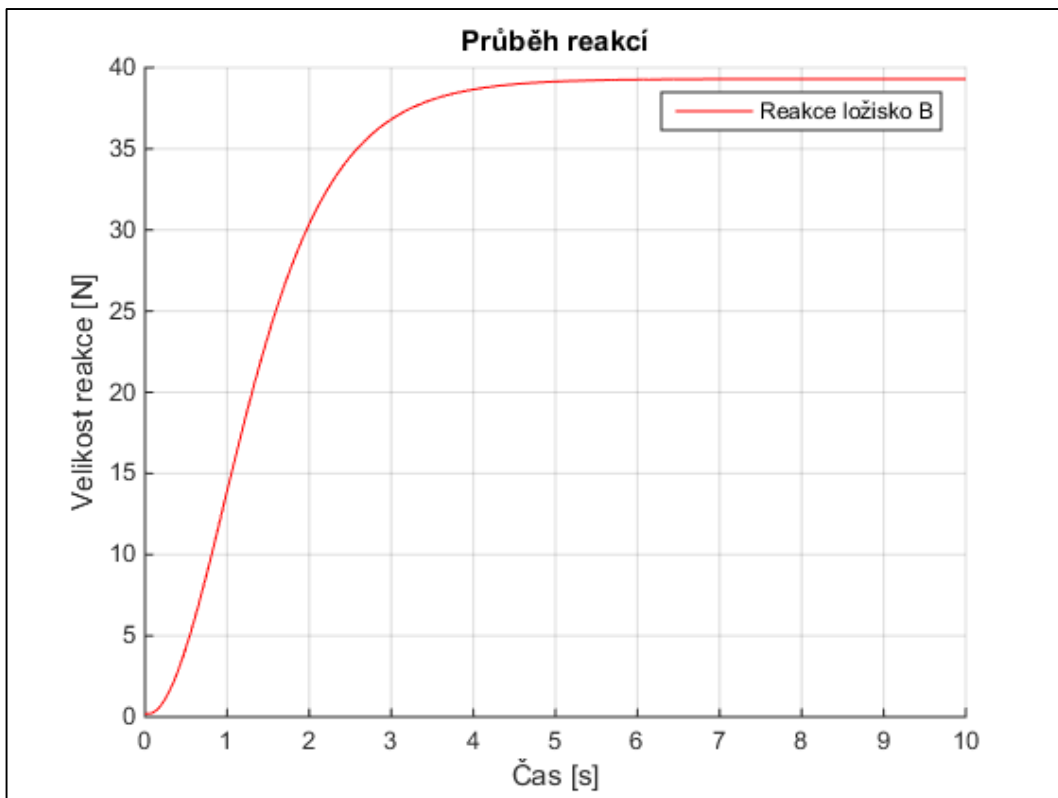


*Obrázek 54 – x-ová a y-ová složka reakce v ložisku A*

Grafické znázornění průběhu reakce v ložisku A a v ložisku B – Obrázek 55 a Obrázek 56



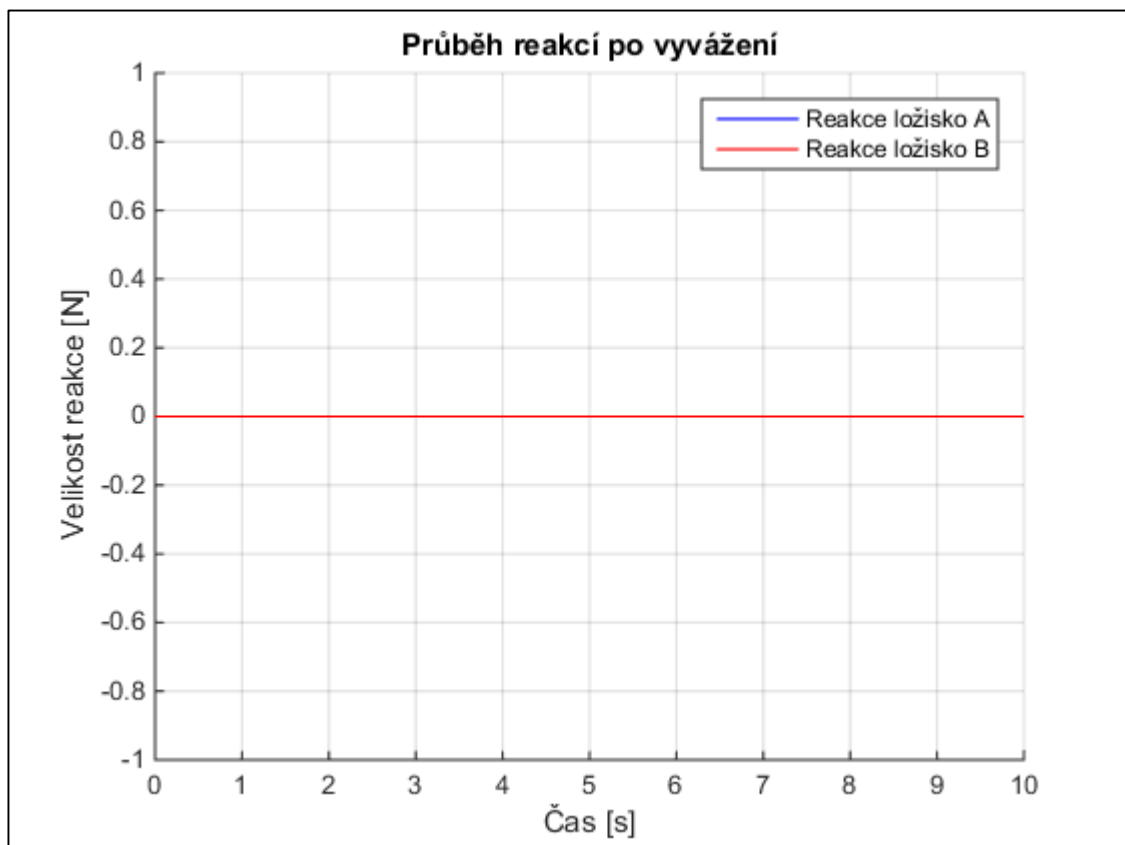
Obrázek 55 – průběh reakce v ložisku A



Obrázek 56 – průběh reakce v ložisku B

Z Obrázku 55 a Obrázku 56 vidíme, že velikost reakce v ložisku A je stejná, jako velikost reakce v ložisku B, což je důsledkem symetrie modelu nevyváženého rotoru. V časovém úseku od 0 do cca 6 sekund dochází k zrychlování rotoru (viz. Obrázek 52) na konečné otáčky a vidíme, že velikost reakce během tohoto intervalu narůstá. Toto je typickým projevem nevyváženosti rotujícího tělesa. Zdůrazňuji, že znázorněné reakce jsou reakce pouze na dynamické účinky a není zahrnut vliv gravitace, jelikož se nejedná o dynamický účinek.

Nyní zobrazíme průběh reakcí po přidání vyvažovací hmoty podle výsledků z *Tabulky 1*. Zvolíme například řešení, které využívá roviny I2, I3 a na obou těchto rovinách poloměr  $e_1$ . Realizaci tohoto vykreslení provedeme pomocí skriptu *vypocet\_reakci\_vyvázeno.m*, který je přiložen na paměťovém médiu.



Obrázek 57 – přídavné dynamické reakce po vyvážení

Reakce v ložisku A i v ložisku B jsou podle Obrázku 57 po celou dobu nulové (na grafu obě křivky splývají v jednu). Nezáleží na tom, zda rotor stojí, zrychluje, či rotuje za konstantních otáček. Při jakémkoliv stavu rotoru nám nevzniká přídavné dynamické namáhání ložiskového uložení. Tohoto stavu jsme dosáhli vhodným přidáním hmoty na

rotor, čímž jsme sloučili hlavní centrální osu setrvačnosti rotoru s osou rotace, která je dána geometrickou osou ložiskového uložení. Potvrdili jsme také předpoklad, že rotor vyvážený za konstantních otáček zůstává vyvážen i při jeho rozběhu či doběhu. Reakce vznikající v uložení před vyvážením se blíží hodnotě  $40\text{ N}$ , což je relativně veliké číslo, vezmeme-li v potaz, že modelové těleso má hmotnost pouze  $1,5\text{ kg}$  a otáčí se otáčkami  $1300\text{ min}^{-1}$ . Tento poměr nám umožňuje představu toho, jak velká přídatná zatížení vznikají při rotaci několikatunové strojní součásti (např. parní turbína), či součásti pracující za mnohem vyšších provozních otáček, přičemž vyšší otáčky mají mnohem větší vliv na přídatné zatížení, jelikož odstředivá síla, jako hlavní zdroj tohoto zatížení roste s kvadrátem úhlové rychlosti.

## 9. Závěr

V této práci jsem provedl rešeršní studii, zabývající se zařízeními a metodikami pro určování nevyváženosti rotujících součástí. Náplní rešerše je také přehled v praxi používaných metod pro odstranění nevyváženosti a ukázky strojů, na nichž se eliminace nevyváženosti provádí. Rešerše poskytuje obecný přehled o technologiích, které jsou v současnosti využívány v oblasti vyvažování tuhých těles.

V praktické části této práce se mi podařilo navrhnout model nevyváženého tělesa pro použití při výuce. Tento model má rozměry a hmotnost, které jsou vhodné pro jeho možnou budoucí výrobu a použití při laboratorních cvičeních. Součástí práce je postup při řešení vyvažování tohoto modelu ve dvou vyvažovacích rovinách. Mimo to jsem uvedl průběhy reakcí v uložení modelu před vyvážením a po vyvážení. Z těchto grafů lze konstatovat, že se vyvažováním podařilo odstranit přídavné dynamické namáhání rámu od nevyváženosti.

V budoucnu je možnost pokusit se zrealizovat navrženou výukovou úlohu v praxi. To by obnášelo vyrobení navrženého modelu a stavbu jednoduchého vyvažovacího zařízení s potřebnými senzory pro měření skutečné nevyváženosti modelu. Na rozdíl od mé idealistické představy modelu by byl skutečný výrobek zatížen nepřesnostmi výroby, nehomogenitou materiálu a dalšími vlivy. Existuje i možnost rozšíření problematiky o vyvažování poddajných rotorů a případné zpracování tématiky do diplomové práce.

## 10. Seznam obrázků, schémat a tabulek

Obrázek 1 – Wattův parní stroj (wikipedia.org) .....	9
Obrázek 2 – klikový hřídel s vyvažovacími otvory (publi.cz).....	12
Obrázek 3 – příklad řezacího bubnu - firma Krone (liva.cz).....	13
Obrázek 4 – vibrační motorek z telefonu Nokia Lumia 610 (mobilcentrum.cz).....	13
Obrázek 5 – schematické znázornění rotoru (převzato ze zdroje [7]).....	15
Obrázek 6 – rozklad sil do směrů os x a y (převzato ze zdroje [7]).....	16
Obrázek 7 – nevyváženost statická (kvm.tul.cz).....	18
Obrázek 8 – nevyváženost kvazistatická (kvm.tul.cz).....	18
Obrázek 9 – nevyváženost momentová (kvm.tul.cz).....	19
Obrázek 10 – nevyváženost dynamická (kvm.tul.cz).....	19
Obrázek 11 – schéma seizmického systému (převzato ze zdroje [7]).....	22
Obrázek 12 – piezoelektrický akcelerometr (převzato ze zdroje [12]).....	23
Obrázek 13 – kapacitní akcelerometr (převzato ze zdroje [12]) .....	24
Obrázek 14 – piezorezistivní akcelerometr (převzato ze zdroje [12]).....	25
Obrázek 15 – možná provedení snímače rychlosti (převzato ze zdroje [12]) .....	25
Obrázek 16 – obecné blokové schéma snímače polohy (převzato ze zdroje [12]) .....	26
Obrázek 17 – zařízení pro statické vyvažování (převzato ze zdroje [7]).....	28
Obrázek 18 – statické vyvažování brusného kotouče na vyvažovacím přípravku (domes.spssbrno.cz) .....	28
Obrázek 19 – postup statického vyvažování (převzato ze zdroje [7]) .....	29
Obrázek 20 – třípolohová metoda (převzato ze zdroje [7]).....	30
Obrázek 21 – dvupolohová metoda (převzato ze zdroje [7]) .....	32
Obrázek 22 – jednopolohová metoda (převzato ze zdroje [7]).....	33

Obrázek 23 – parametry vývažků určené počítačem (catalog.schenck-usa.com/products).....	35
Obrázek 24 – doběhový vyvažovací stroj s rámem (převzato ze zdroje [7] .....	37
Obrázek 25 – kompenzační vyvažovací stroj (převzato ze zdroje [7].....	38
Obrázek 26 – detail vyvažovačky klikových hřídelů s automatickým odvrtáváním materiálu (catalog.schenck-usa.com/products).....	39
Obrázek 27 – první návrh modelu .....	40
Obrázek 28 – první návrh modelu (jiný pohled) .....	40
Obrázek 29 – návrh rotoru s otvory ve vyvažovacích rovinách.....	41
Obrázek 30 – rozměry prvního návrhu .....	41
Obrázek 31 – hmotové vlastnosti prvního návrhu .....	42
Obrázek 32 – rozměry druhého návrhu (rotor).....	43
Obrázek 33 – rozměry druhého návrhu (nevývažek) .....	43
Obrázek 34 – rotace tělesa [11].....	45
Obrázek 35 – vyvažování ve dvou rovinách [11] .....	50
Obrázek 36 – rotor .....	52
Obrázek 37 – dílčí "válce" .....	53
Obrázek 38 – "moment setrvačnosti děr" .....	53
Obrázek 39 – hmotové vlastnosti rotoru.....	55
Obrázek 40 – nevývažek .....	55
Obrázek 41 – náhrada nevývažku .....	56
Obrázek 42 – výpočet deviačního momentu a momentu setrvačnosti.....	56
Obrázek 43 – moment setrvačnosti nevývažku k rovině yz.....	58
Obrázek 44 – hmotové vlastnosti nevývažku .....	59
Obrázek 45 – poloha těžiště .....	60



Obrázek 46 – část skriptu na řešení vyvažovacích rovnic (1) .....	62
Obrázek 47 – část skriptu na řešení vyvažovacích rovnic (2) .....	62
Obrázek 48 – výpis z "Command Window" – MATLAB .....	63
Obrázek 49 – polohové úhly pro vyvažování .....	64
Obrázek 50 – vyvážení pomocí šroubového spoje (rovina xz).....	65
Obrázek 51 – vyvážení pomocí šroubového spoje (rovina xy) .....	65
Obrázek 52 – rozběh rotoru.....	67
Obrázek 53 – uvolnění modelu [9] .....	68
Obrázek 54 – x-ová a y-ová složka reakce v ložisku A .....	70
Obrázek 56 – průběh reakce v ložisku B .....	71
Obrázek 55 – průběh reakce v ložisku A.....	71
Obrázek 57 – přídavné dynamické reakce po vyvážení.....	72
Schéma 1 – postup při optimalizaci modelu.....	44
Schéma 2 – postup integrace.....	66
Schéma 3 – model pro integraci ze Simulinku .....	67
Tabulka 1 – řešení vyvažovacích rovnic v jednotlivých rovinách.....	63

## 11. Použité zdroje a literatura

- [1] ADAMS, Maurice L. *Rotating machinery vibration: from analysis to troubleshooting*. 2nd ed. Boca Raton: CRC Press/Taylor, c2010. ISBN 14-398-1870-3.
- [2] BALDA, Miroslav. Vyvažování ve strojírenství. In: *Readgur.com: Document publishing* [online]. Plzeň [cit. 2016-07-02]. Dostupné z: <http://readgur.com/doc/168958/vyva%C5%BEov%C3%A1n%C3%AD-ve-stroj%C3%ADrenstv%C3%AD>
- [3] BILOŠ, Jan a Alena BILOŠOVÁ. *Aplikovaný mechanik jako součást týmů konstruktérů a vývojářů: studijní opora* [online]. Ostrava: Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, 2012 [cit. 2016-08-22]. ISBN 978-80-248-2755-1. Dostupné z: <http://projekty.fs.vsb.cz/147/ucebniopory/978-80-248-2755-1.pdf>
- [4] DULA, Jan. *Sbližování teorie s praxí: Metrologie ve strojírenství* [online]. Uherské Hradiště, 2012 [cit. 2016-08-22]. Dostupné z: <http://www.uh.cz/szesgsm/files/sblizovani/pdf/vyvazovani.pdf>
- [5] GASCH, Robert, Herbert PFÜTZNER, Karel JULIŠ, Vladimír BORŮVKA a Bohumil FRYML. *Dynamika rotorů*. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1980.
- [6] GRIM, Gary K., John W. HAILER a Bruce J. MITCHELL. The Basics of Balancing 202. In: *BTI: Precision Measurement and Testing Equipment and Services* [online]. Whitmore Lake, Michigan, 2014 [cit. 2016-08-09]. Dostupné z: <http://balancetechnology.com/wp/wp-content/uploads/2014/02/Basics-of-Balancing-202.pdf>
- [7] JULIŠ, Karel, Vladimír BORŮVKA a Bohumil FRYML. *Základy dynamického vyvažování*. 1. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1979.
- [8] SMOLEK, Jan. Kontrola a měření strojních zařízení: Metody vyvažování. In: *SPŠ a VOŠT Sokolská, Brno* [online]. Brno [cit. 2016-08-08]. Dostupné z: [http://domes.spssbrno.cz/web/DUMy/STT,%20KOM/VY\\_32\\_INOVACE\\_24-07.pdf](http://domes.spssbrno.cz/web/DUMy/STT,%20KOM/VY_32_INOVACE_24-07.pdf)
- [9] STEJSKAL, Vladimír, Stanislav STEJSKAL a Jaromír BROUSIL. *Mechanika III*. Praha: ČVUT, 1993. ISBN 80-010-0918-1.

- [10] TOMEH, Elias. Provozní vyvažování rotorů. In: *Katedra vozidel a motorů: Fakulta strojní, Technická universita v Liberci* [online]. Liberec [cit. 2016-08-08]. Dostupné z: <http://www.kvm.tul.cz/getFile/id:1862>
- [11] VALÁŠEK, Michael, Zbyněk ŠIKA a Václav BAUMA. *Mechanika B*. V Praze: Vydavatelství ČVUT, 2004. ISBN 80-010-2919-0.
- [12] VOJÁČEK, Antonín. Měření vibrací pro diagnostiku opotřebených strojů. In: *HW.cz: Vše o elektronice a automatizaci* [online]. Praha: 2014 [cit. 2016-08-10]. Dostupné z: <http://automatizace.hw.cz/mereni-a-regulace/mereni-vibraci-pro-diagnostiku-opotrebeni-stroju.html>
- [13] Už vím, jak funguje vibrační vyzvánění. *MobilMania.cz: O mobilech víme vše* [online]. 2004 [cit. 2016-07-15]. Dostupné z: <http://www.mobilmania.cz/clanky/uz-vim-jak-pracuje-vibracni-vyzvaneni/sc-3-a-1108267/default.aspx>
- [14] Elektromotor SIEMENS 1LF7060-2AB , 0.18kW,2895ot. *Vlastimil Moravec Elektromotory: Elektromotory SIEMENS* [online]. [cit. 2016-06-05]. Dostupné z: <http://www.elektromotory.net/siemens/1lf7-ab-3000-otacek/1lf7-060-2ab10.html>
- [15] Balancing machine. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2016 [cit. 2016-08-22]. Dostupné z: [https://en.wikipedia.org/wiki/Balancing\\_machine](https://en.wikipedia.org/wiki/Balancing_machine)
- [16] Řezačka John Deere 7780. *Agrozet České Budějovice a.s.* [online]. České Budějovice [cit. 2016-08-22]. Dostupné z: <http://www.agrozetshop.cz/rezacka-john-deere-7780/d-124014-c-972/>
- [17] Schenck RoTec: Product Catalog. *Schenck RoTec: Balancing machines and diagnostic systems* [online]. [cit. 2016-08-09]. Dostupné z: <http://www.schenck-rotec.cz/products/catalog.php>
- [18] Proč je vyvažování tak důležité? *Schenck RoTec: balancing machines and diagnostic systems* [online]. 2016 [cit. 2016-07-14]. Dostupné z: <http://www.schenck-rotec.cz/why-balancing/index.php>

- [19]** Vibration Measurement; Vibration Sensors; Measuring Vibration Precisely. *Lion Precision: Precise Noncontact Sensors and experts to help you use them* [online]. 2013 [cit. 2016-08-01]. Dostupné z: <http://www.lionprecision.com/tech-library/appnotes/general-0020-vibration-measurement.html>

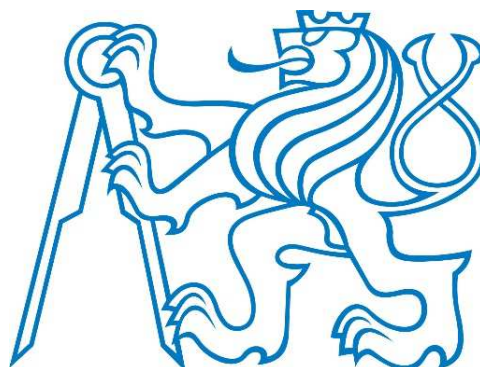
## 12. Seznam příloh

- Příloha 1 – schematické zobrazení výukového modelu
- Příloha 2 – skript *bachelorsthesis\_navrh\_parametru.m*
- Příloha 3 – skript *parametry.m*
- Příloha 4 – skript *maticovy\_vypocet.m*
- Příloha 5 – skript *vyvazeni\_v\_rovinach\_l2\_l3.m*
- Příloha 6 – skript *vypocet\_reakci.m*
- Příloha 7 – obsah a popis přiloženého CD



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

FAKULTA STROJNÍ

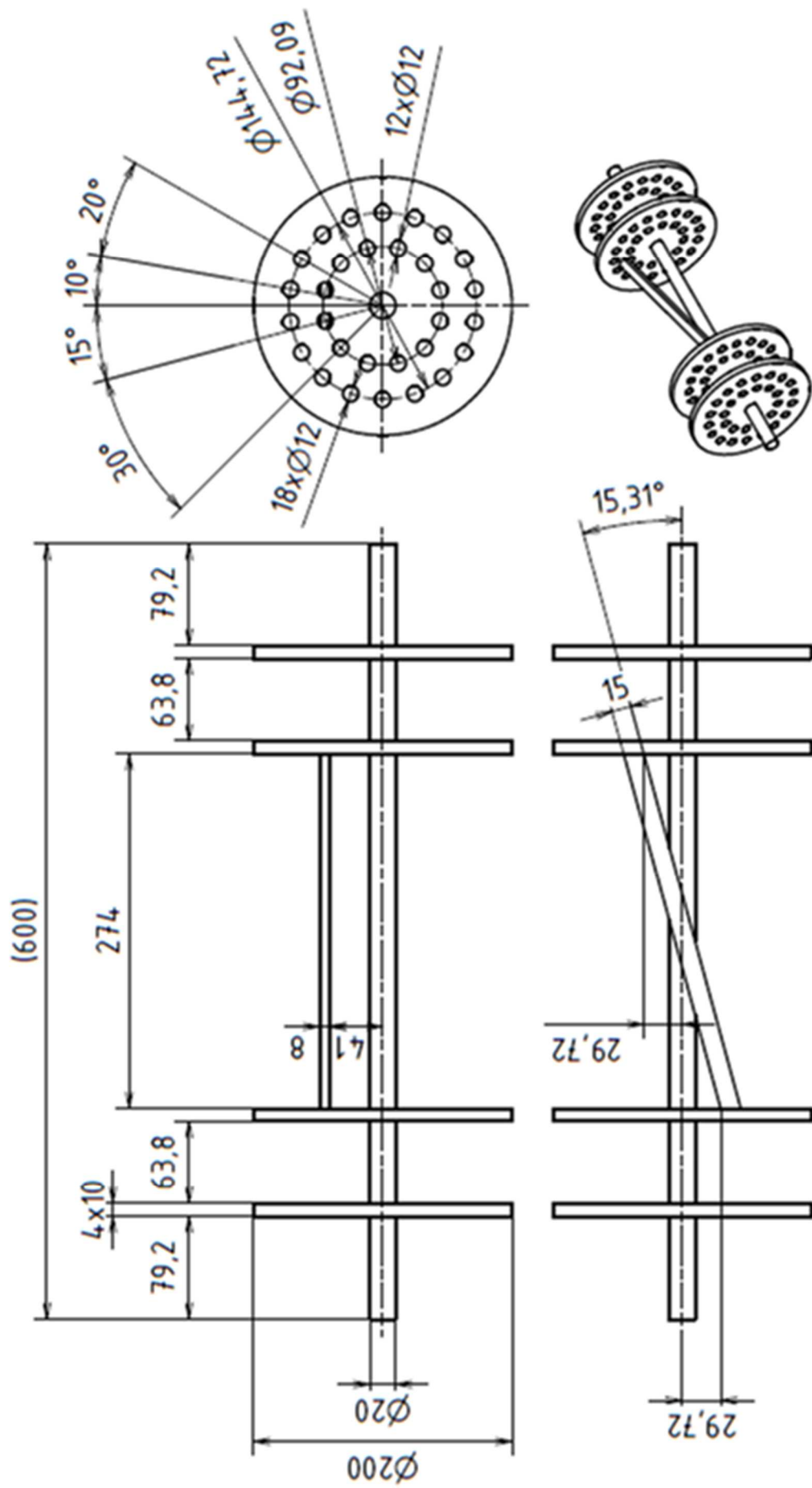


BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

PŘÍLOHOVÁ ČÁST

Vyvažování tuhých těles

# Příloha 1





## Příloha 2

```
%SKRIPT PRO NAVRH ROZMERU ROTORU%
close all; %clear all;

%Definice rotoru
m = 1.526; %[kg] ... Celková hmotnost včetně nevyvážku
r = 0.402/1000; %[m]

%Definice nevyvážku
mN = 0.103; %[kg]
lN = 318.944/1000; %[m]
alfa = atan(2*37.5/310); %[rad]

%Deviační momenty
Dyz = (mN*lN^2*sin(2*alfa))/24; %[kg*m^2]
Dxz = 0; %[kg*m^2]

%Sady závaží (gramy)
m1 = 26.0*10^-3;
m2 = 26.0*10^-3;

%Úhly
beta1=-170.0/180*pi;
beta2=170.0/180*pi;

%Neznámé (polohy kotoučů a děr)
syms e1 e2 l1 l2 l3 l4

%Rovnice pro statické vyvážení
R1 = m*r + m1*e2*cos(beta1) + m2*e2*cos(beta2) == 0;
R2 = m1*e2*sin(beta1) + m2*e2*sin(beta2) == 0;

%Rovnice pro dynamické vyvážení
R3 = Dyz + m1*e2*sin(beta1)*l2 + m2*e2*sin(beta2)*l3 == 0;
R4 = Dxz + m1*e2*cos(beta1)*l2 + m2*e2*cos(beta2)*l3 == 0;

%Řešení neznámých
[e1v,e2v,l2v,l3v] = solve(R1, R2, R3, R4, e1, e2, l2, l3);

X1=double(e1v)*1000; X2=double(e2v)*1000;
X3=double(l2v)*1000; X4=double(l3v)*1000;
disp(' ')
X = ['Výsledný poloměr e1 je: ', num2str(X1), ' [mm]'];
disp(X)
X = ['Výsledný poloměr e2 je: ', num2str(X2), ' [mm]'];
disp(X)
X = ['Výsledná vzdálenost l2 je: ', num2str(X3), ' [mm]'];
disp(X)
X = ['Výsledná vzdálenost l3 je: ', num2str(X4), ' [mm]'];
disp(X)
```

## Příloha 3

```
%-----Skript pro načtení parametrů soustavy--
-----%
%Definice rotoru
d = 20/1000; %[m] ... Průměr hřídele
D = 200/1000; %[m] ... Průměr kotouče
L = 600/1000; %[m] ... Délka hřídele
b = 10/1000; %[m] ... Šířka kotouče
dd = 12/1000; %[m] ... Průměr děr
roR = 1060; %[kg/m^3] ... Hustota plastu ABS
V = (pi*d^2)/4*L+pi*(D^2-d^2)*b-120*(pi*(dd^2)/4)*b; %[m^3]
... Objem rotoru
mR = roR*V; %[kg] ... Hmotnost rotoru
e1 = 46.0463/1000; %[m] ... Poloha vnitřních děr
e2 = 72.3585/1000; %[m] ... Poloha vnějších děr
l1 = -215.8/1000; %[m] ... Poloha vyvažovací roviny 1 (225)
l2 = -142.0/1000; %[m] ... Poloha vyvažovací roviny 2 (142)
l3 = -12; %[m] ... Poloha vyvažovací roviny 3
l4 = -11; %[m] ... Poloha vyvažovací roviny 4
l = 260/1000; %[m] ... Vzdálenost k ložiskovým podpěrám

%Definice nevyvažku
aN = 15/1000; %[m] ... Rozměr nevyvažku
bN = 8/1000; %[m] ... Rozměr nevyvažku
lRov = 2*abs(l2)-b; %[m] ... Vzdálenost mezi vnitřními
rovinami
alfanevyvaz = atan(2*0.0375/lRov); %[rad]
lN = lRov/cos(alfanevyvaz); %[m]
roN = 2700; %[kg/m^3] ... Hustota hliníku
mN = aN*bN*lN*roN; %[kg] ... Hmotnost nevyvažku

%Celková hmotnost a poloha těžiště
m = mR + mN; %[kg]
xTN = 45/1000; %[m]
r = xTN*mN/(mR+mN); %[m] ... Poloha těžiště

%Deviační momenty
Dyz = -(mN*lN^2*sin(2*alfanevyvaz))/24; %[kg*m^2]
Dxz = 0; %[kg*m^2]

%Počáteční poloha rotoru
fi = 0; %[rad]

%Parametry elektromotoru SIEMENS 1LF7060-2AB ,
0.18kW,2895ot
nelm = 2895; % Otáčky [rpm]
Pel = 0.18; % Výkon v [kW]
Mel = 9550*Pel/nelm;
```

## Příloha 4

`%Výpočet maticově`

```
A=[e1 e1 0 0;0 0 e1 e1;0 0 e1*12 e1*13;e1*12 e1*13 0 0];
c=[-m*r,0,-Dyz,0]';
b=inv(A)*c;
b1=A\c;

beta1 = atan(b(3)/b(1))*180/pi
m1 = b(1)/cos(beta1/180*pi)
beta2 = atan(b(4)/b(2))*180/pi
m2 = b(2)/cos(beta2/180*pi)
```

## Příloha 5 – strana 1/2

```
close all; clear;

%Načtení parametrů soustavy
parametry

%Neznámé (nevývažek a úhel beta)
syms m1 m2 beta1 beta2

%Rovnice pro statické vyvážení
R1 = m*r*cos(fi) + m1*e1*cos(beta1) + m2*e1*cos(beta2) ==
0;
R2 = m*r*sin(fi) + m1*e1*sin(beta1) + m2*e1*sin(beta2) ==
0;

%Rovnice pro dynamické vyvážení
R3 = Dy z + m1*e1*sin(beta1)*l2 + m2*e1*sin(beta2)*l3 == 0;
R4 = Dx z + m1*e1*cos(beta1)*l2 + m2*e1*cos(beta2)*l3 == 0;

%Řešení neznámých
[m1v, m2v, beta1v, beta2v] = solve(R1, R2, R3, R4, m1, m2,
beta1, beta2);

%Kontrola výpočtu
R1k = zeros (1, 4);
R2k = zeros (1, 4);
R3k = zeros (1, 4);
R4k = zeros (1, 4);
for i = 1:4
R1k(i) = double(m*r*cos(fi) + m1v(i)*e1*cos(beta1v(i)) +
m2v(i)*e1*cos(beta2v(i)));
R2k(i) = double(m*r*sin(fi) + m1v(i)*e1*sin(beta1v(i)) +
m2v(i)*e1*sin(beta2v(i)));
R3k(i) = double(Dy z + m1v(i)*e1*sin(beta1v(i))*l2 +
m2v(i)*e1*sin(beta2v(i))*l3);
R4k(i) = double(Dx z + m1v(i)*e1*cos(beta1v(i))*l2 +
m2v(i)*e1*cos(beta2v(i))*l3);
end

for i = 1:4
    if (abs(R1k(i)) <= 1*10^-10) && (abs(R2k(i)) <= 1*10^-
10)) && (abs(R3k(i)) <= 1*10^-10)) && (abs(R4k(i)) <= 1*10^-
10))
        disp('-----
Kontrola dosazením v pořádku.-----
-----')
    else
        disp('-----Chyba
při kontrole.-----')
    end
end
```

## Příloha 5 – strana 2/2

```
        pause
    end
end

RESENI_navrh=[double(m1v), double(m2v),
double(beta1v)*180/pi, double(beta2v)*180/pi];

disp(' ')
disp('Hmotnosti vývažků a úhly (ve stupních) pro jejich
umístění pro dosažení dynamického vyvážení jsou:')
disp('      m1v          m2v          beta1v
beta2v')
disp(RESENI_navrh)

for indexreseni = 1:4
    if (m1v(indexreseni) > 0 && m2v(indexreseni) > 0)
        RESENI=[double(m1v(indexreseni)),
double(m2v(indexreseni)),
double(beta1v(indexreseni))*180/pi,
double(beta2v(indexreseni))*180/pi];
    end
end

disp(' ')
disp('Pro naše požadavky je vyhovující řešení v rovinách l2
- l3:')
disp('      m1v          m2v          beta1v
beta2v')
disp(RESENI)
```

## Příloha 6 – strana 1/2

```
%-----Výpočet reakcí do uložení rotoru-----  
-----%  
  
%Vzdálenost ložiska od počátku souřadnicového systému  
l = 0.26;  
  
%Setrvačné účinky  
Dn = m*r*(SIMOmega.Data).^2;  
Dt = m*r*(SIMalfa.Data);  
MDksi = Dxz.*SIMalfa.Data - Dyz*(SIMOmega.Data).^2;  
MDeta = Dyz.*SIMalfa.Data + Dxz*(SIMOmega.Data).^2;  
  
%Výpočet reakcí ve směru os ksí a éta  
Raksi = MDeta/(2*l) - Dn/2;  
Rbksi = - MDeta/(2*l) - Dn/2;  
  
Raeta = -MDksi/(2*l) + Dt/2;  
Rbeta = MDksi/(2*l) + Dt/2;  
  
Rax = Raksi.*cos(SIMpoloha.Data) -  
Raeta.*sin(SIMpoloha.Data);  
Rbx = Rbksi.*cos(SIMpoloha.Data) -  
Rbeta.*sin(SIMpoloha.Data);  
  
Ray = Raksi.*sin(SIMpoloha.Data) +  
Raeta.*cos(SIMpoloha.Data);  
Rby = Rbksi.*sin(SIMpoloha.Data) +  
Rbeta.*cos(SIMpoloha.Data);  
  
Ra = (Raksi.^2+Raeta.^2).^0.5;  
Rb = (Rbksi.^2+Rbeta.^2).^0.5;  
  
%Vykreslení reakcí  
cas = 0:0.005:10;  
hold on  
grid on  
  
plot(cas, SIMalfa.Data, 'b')  
plot(cas, SIMOmega.Data, 'r')  
plot(cas, SIMpoloha.Data, 'g')  
title('Rozběh rotoru')  
xlabel('Čas [s]')  
ylabel('Dynamické veličiny')  
legend('Úhlové zrychlení', 'Úhlová rychlost', 'Poloha');
```

## Příloha 6 – strana 1/2

```
figure
grid on
hold on
plot(cas, Ra, 'b')
title('Průběh reakcí')
xlabel('Čas [s]')
ylabel('Velikost reakce [N]')
legend('Reakce ložisko A');
```

```
figure
grid on
hold on
plot(cas, Rb, 'r')
title('Průběh reakcí')
xlabel('Čas [s]')
ylabel('Velikost reakce [N]')
legend('Reakce ložisko B');
```

```
figure
grid on
hold on
plot(cas, Rax, 'b')
plot(cas, Ray, 'r')
title('x-ová a y-ová složka reakce Ra')
xlabel('Čas [s]')
ylabel('Velikost reakce [N]')
legend('Rax(t)', 'Ray(t)');
```

## Příloha 7

Obsah přiloženého CD (řazeno podle adresářů):

- **Autodesk Inventor** – obsahuje CAD model vyvažovaného tělesa z praktické části této bakalářské práce
- **Bakalářská práce** – elektronické verze této práce ve formátech *.docx* a *.pdf*
- **MATLAB** – obsahuje všechny skripty potřebné k provedení výpočtů uvedených v praktické části této bakalářské práce; exekucí skriptu *vyvazovani.m* lze provést všechny tyto výpočty najednou
- **Přílohy ve formátu PDF** – elektronické verze příloh této bakalářské práce ve formátech *.pdf*