

České vysoké učení technické v Praze, Fakulta elektrotechnická



*Katedra elektroenergetiky*

*BAKALÁŘSKÁ PRÁCE*

# **Určování frekvence a fázorů v elektroenergetice**

*Vypracoval:* **Filipp Frolov**

*Vedoucí práce:* **Doc. Dr. Ing. Jan Kyncl**

Praha 2016

### ***Prohlášení***

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

V Praze dne: .....

.....

*Filipp Frolov*

### ***Poděkování***

Děkuji vedoucímu bakalářské práce Doc. Dr. Ing. Janu Kynclovi za účinnou metodickou, pedagogickou a odbornou pomoc a další cenné rady při zpracování mé bakalářské práce.

## Anotace

V této bakalářské práci jsou porovnány metody určování frekvence a fázorů. První metoda je vzorkovací, druhá metoda byla navržena na ČVUT-FEL K13115. V praktické části je popsána jak se dá využít výsledky měření pro stanovení fázorů, a měření na reálně impedanci. Cílem je prozkoumat novou metodu a vytvořit průhledný popis algoritmu, realizovat algoritmus v prostředí Wolfram Mathematica, navrhnout dálnější aplikaci nové metody.

## Abstract

The subject of this bachelor project is comparison methods for determining frequency and phasor. The first is sampling method and the second is development at CTU FEL-K13115. The practical part describes how you can apply the results of determine and measurements on the real impedance. The purpose is look into new method, describe the algorithm, and implement the algorithm in Wolfram Mathematica.

## Klíčové slova

Frekvence, perioda, vzorkovací frekvence, rovnice přímky, interpolace, vzorkovací metoda, relativní chyba, statistická metoda, fázor, komplexní číslo, základní operace s komplexní čísly.

## Key words

Frequency, period, frequency of sampling, equation of straight line, interpolation, sampling method, relative mistake, statistical method, phasor, complex number, basic operation with complex number.

České vysoké učení technické v Praze  
Fakulta elektrotechnická  
katedra elektroenergetiky

## ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student: **Filipp Frolov**

Studijní program: Elektrotechnika, energetika a management  
Obor: Aplikovaná elektrotechnika

Název tématu: **Určování frekvence a fázorů v elektroenergetice**

Pokyny pro vypracování:

1. Seznamte se s problematikou určování frekvence a fázorů v elektroenergetice.
2. Vybrané metody zpracování signálu naprogramujte v prostředí Wolfram Mathematica.
3. Porovnejte výsledky metod aplikovaných na několik typických průběhů vyskytujících se v elektroenergetice.
4. Porovnejte přesnost metod při určení činného a jalového výkonu.
5. Proveďte měření na reálné impedanci a data zpracujte.

Seznam odborné literatury:

- [1] Kyncl, Novotný: Číslicové a analogové obvody, skriptum ČVUT
- [2] IEEE standard c.37.118.1 2011
- [3] Haasz, V. - Sedláček, M.: Elektrická měření. Přístroje a metody (2. vydání). Monografie ČVUT, Praha 2003.

Vedoucí: doc. Jan Kyncl Dr. Ing.

Platnost zadání: do konce zimního semestru 2017/2018

doc. Ing. Zdeněk Müller, Ph.D.  
vedoucí katedry



prot. Ing. Pavel Ripka, CSc.  
děkan

V Praze dne 18. 4. 2016

## Obsah:

1. Úvod .....	7
2. Vzorkovací metoda.....	8
2.1 Měření pomocí vzorkovací metody.....	9
2.2 Parametry vzorkovací metody .....	11
3. Statistická metoda.....	15
4. Porovnání metod.....	19
5. Simsonuv integral.....	21
6. Fázory .....	22
7. Výkony.....	25
8. Porovnání přesnosti metod při určení činného a jalového výkonu .....	28
9. Měření na reálné impedanci .....	28
10. Vyhodnocení měření.....	37
11. Závěr.....	37
12. Přílohy .....	39
12.1 Grafické ukázky vstupního signálu .....	40
12.2 Výpočtová část .....	42
13. Seznam použité literatury .....	42

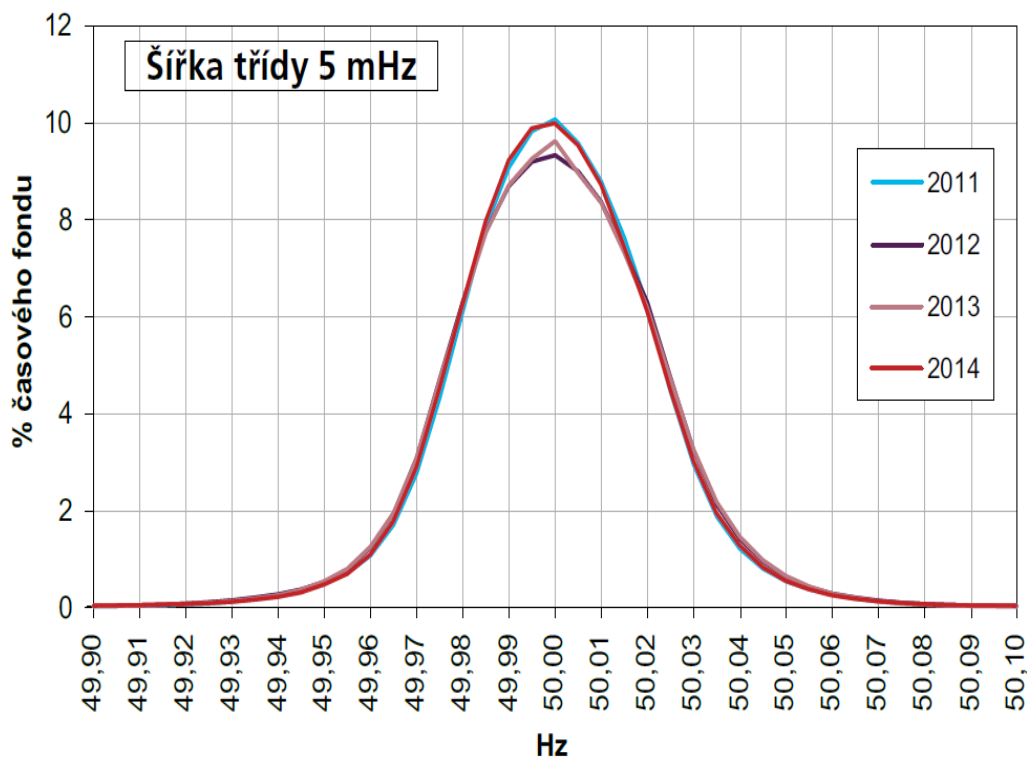
## 1. Úvod

Elektrizační soustava ES je nejdůležitější dílcí soustavou energetického hospodářství. Je to centrálně a jednotně řízený soubor paralelně pracujících elektráren, elektrických rozvodných a přenosových zařízení a elektrických spotřebičů, se společnou výkonovou rezervou.

Hlavním úkolem ES je spolehlivá dodávka dostatečného množství elektrické energie všem odběratelům, v dohodnuté kvalitě, s minimálními náklady, při zaručené bezpečnosti práce.

Nejdůležitějšími provozními parametry určujícími kvalitu elektrické energie jsou kmitočet a napětí. Jelikož se v každém okamžiku musí rovnat vyráběné činné a jalové výkony spotřebovaným, pak například při změně zatížení ve spotřebě, se mění oba kvalitativní parametry do okamžiku, kdy dojde k opětovnému vyrovnání výkonové rovnováhy mezi zdroji a spotřebou. Obvykle dovolená odchylka od jmenovitého kmitočtu 50 Hz je  $\pm 0,1$  Hz, u napětí  $\pm 5$  % od hodnoty jmenovitého napětí v uzlu.

### Odchytky kmitočtu od nominální hodnoty (50 Hz)

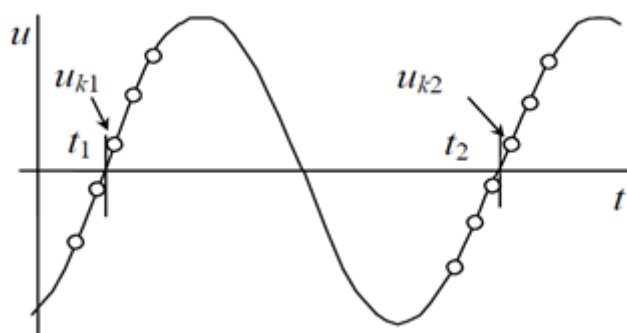


Obrázek č.1

## 2. Vzorkovací metoda

Určení kmitočtu z vzorkovaného průběhu. Tato metoda založena na pozorování vstupního signálu pomocí osciloskopu a nastavení určité úrovně, pro zjednodušení považujeme úroveň nastavenou na 0. Budeme předpokládat, že máme k dispozici navzorkovaný signál a známe vzorkovací periodu i počet vzorků za sekundu.

Vstupní signál protne zvolenou úroveň. Na základě získaných údajů se dá spočítat perioda signálu a kmitočet.



Obrázek č.2

$k_1$  – číslo vzorku po 1. průchodu signálu  $u$  nulou

$k_2$  – číslo vzorku po 2. průchodu signálu  $u$  nulou

Periodu spočítáme pomocí vztahu

$$T = (k_2 - k_1)T_s;$$

$T_s$  je perioda vzorkování

Pak spočítáme kmitočet pomocí vztahu

$$f = \frac{1}{T}$$



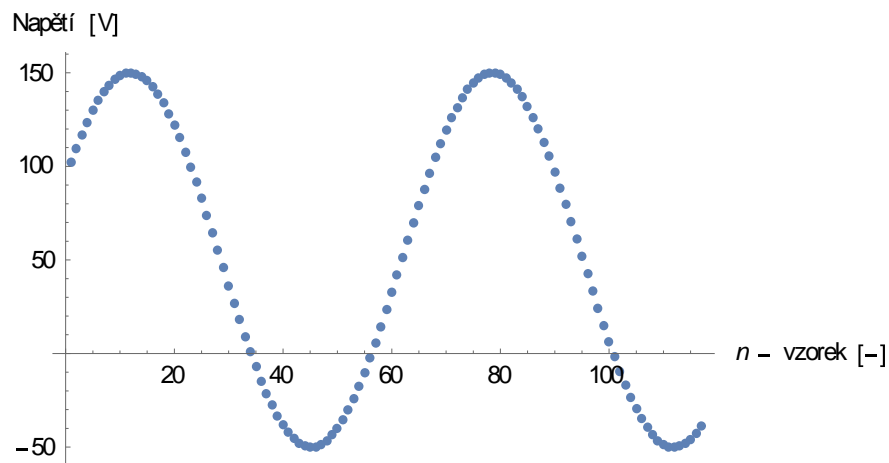
Tato metoda může dávat nepřesný výsledek v případě když na periodu bude neceločíselný počet vzorku. Ale to se dá ošetřit, v dalších případech budeme brát hodnoty získané pomocí interpolací mezi body, které se nachází v okolí úrovně. Budeme měnit hodnotu úrovně. Výsledek metody bude výsledek záležet na námi zvolených parametrech (počet bodů pro interpolaci a úroveň).

## 2.1 Měření pomocí vzorkovací metody

Teď se podíváme jak funguje vzorkovací metoda v praxe. Na vstupu budeme mít sinusový signál. Každý sinusový signál můžeme popsat pomocí rovnice.

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) + C$$

Kde  $A$  - amplituda,  $\omega$  - uhlová frekvence ( $\omega=2 \cdot \pi \cdot f$ ),  $f$  - frekvence,  $t$  - čas,  $\varphi$  - fázový posun,  $C$  – konstanta.



Obrázek č.3

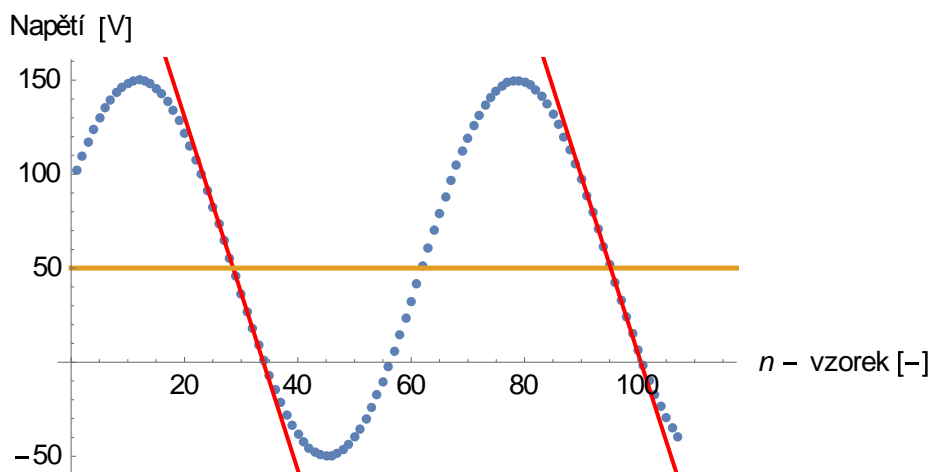
Máme k dispozici signál jehož rovnice je

$$y(t) = 100 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot t + 0.546) + 50$$

$$A=100, \omega= 2 \cdot \pi \cdot f (f=50 \text{ Hz}), \varphi= 0.546, C=50.$$

Signál navzorkován frekvencí  $f_{vz} = 3.3 \text{ kHz}$ . ( $t_{vz}=0.0003 \text{ s}$ )

Jak bude fungovat vzorkovací metoda: Zadáme vhodnou úroveň například 50.



Obrázek č.4

Vidíme dvě přímky, každá přímka má rovnici ve tvaru:

$$y(x) = a \cdot x + b$$

Rovnice úrovně:

$$y(x) = konst$$

Dosadíme číselné hodnoty do rovnic.

První přímka:

$$y_1(x_1) = 318.336 - 9.40194 \cdot x_1$$

Druhá přímka:

$$y_2(x_2) = 945.809 - 9.40912 \cdot x_2$$

Rovnice úrovně:

$$y_3(x) = 50$$

Výpočet periody funkce:

$$y_1(x_1) = y_2(x_2) = y_3(x) = 50$$

První rovnice:

$$50 = 318.336 - 9.40194 \cdot x_1 \rightarrow x_1 = 28.5405;$$

Druhá rovnice:

$$50 = 945.809 - 9.40912 \cdot x_2 \rightarrow x_2 = 95.2065;$$

$$T = (x_2 - x_1) \cdot t_{vz} = (95.2065 - 28.5405) \cdot 0.0003 \text{ s} = 0.0199998 \text{ s}$$

Frekvence:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.0199998 \text{ s}} = 50.0005 \text{ Hz}$$

50.0005 Hz - spočítaná frekvence signalu.

Relativní chyba metody:

$$\Delta = \left| \frac{50.0005 - 50}{50} \right| \cdot 100 \% = 0.001 \%$$

Závěr: pomocí vzorkovací metody jsme změřili frekvenci signálu  $f = 50.0005 \text{ Hz}$ , relativní chyba měření je 0.001 %. V další kapitole se podíváme, co se stane, když vstupní signál bude obsahovat šum.

## 2.2 Parametry vzorkovací metody

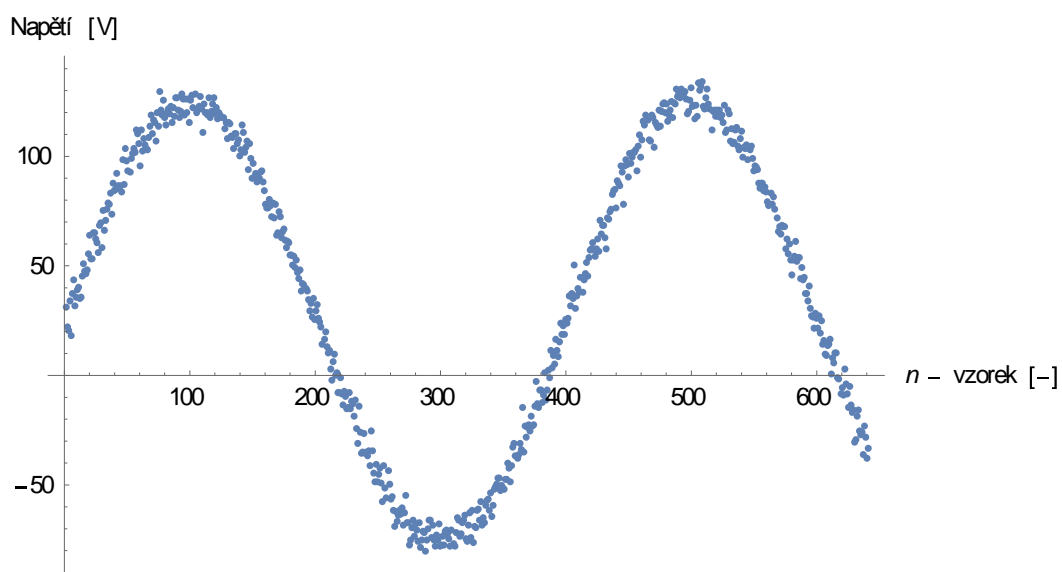
V této kapitole se podíváme jaký výsledek nám dá vzorkovací metoda, když vstupní signál bude obsahovat šum. K dispozici máme signál, jehož parametry jsou:

$$y(t) = 100 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot t + 0.001) + 25 + R$$

$A=100$ ,  $\omega= 2 \cdot \pi \cdot f$  ( $f=50 \text{ Hz}$ ),  $\varphi= 0.001$ ,  $C=25$ ,  $R$  je náhodný šum z intervalu  $[-5; +5]$

$f_{vz}= 20 \text{ kHz}$  ( $t_{vz}=0.00005 \text{ s}$ )

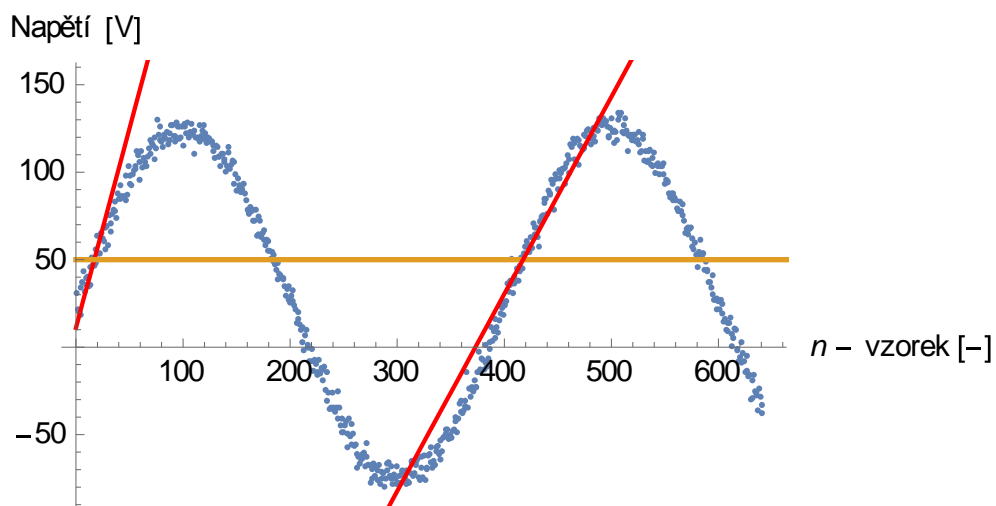
Zkoumaný signál bude vypadat takto:



Obrázek č.6

$$y(t) = 100 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot t + 0.001) + 25 + R$$

Provedeme výpočet pomocí vzorkovací metody, jak jsme to udělali v kapitole 2.



Obrázek č.7

První přímka:

$$y_1(x_1) = 11.0485 + 2.27838 \cdot x_1$$

Druhá přímka:

$$y_2(x_2) = -420.369 + 1.12688 \cdot x_2$$

Rovnice úrovně:

$$y_3(x) = 50$$

$$T = (x_2 - x_1) \cdot t_{vz} = (417.409 - 17.0962) \cdot 0.00005 \text{ s} = 0.0200156 \text{ s}$$

Frekvence:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.0200156 \text{ s}} = 49.9609 \text{ Hz}$$

Relativní chyba metody:

$$\Delta = \left| \frac{49.9609 - 50}{50} \right| \cdot 100 \% = 0.0782 \%$$

Vychodnocení výsledku: pomocí vzorkovací metody: změřili jsme frekvenci signálu, který obsahoval šum, výsledná frekvence  $f = 49.9609 \text{ Hz}$ , chyba měření  $0.0782 \%$ . U každé metody se snažíme, aby relativní chyba měření byla co nejmenší. V této metodě se dá ovlivnit výsledek měření změnou počtu bodů pro interpolaci.

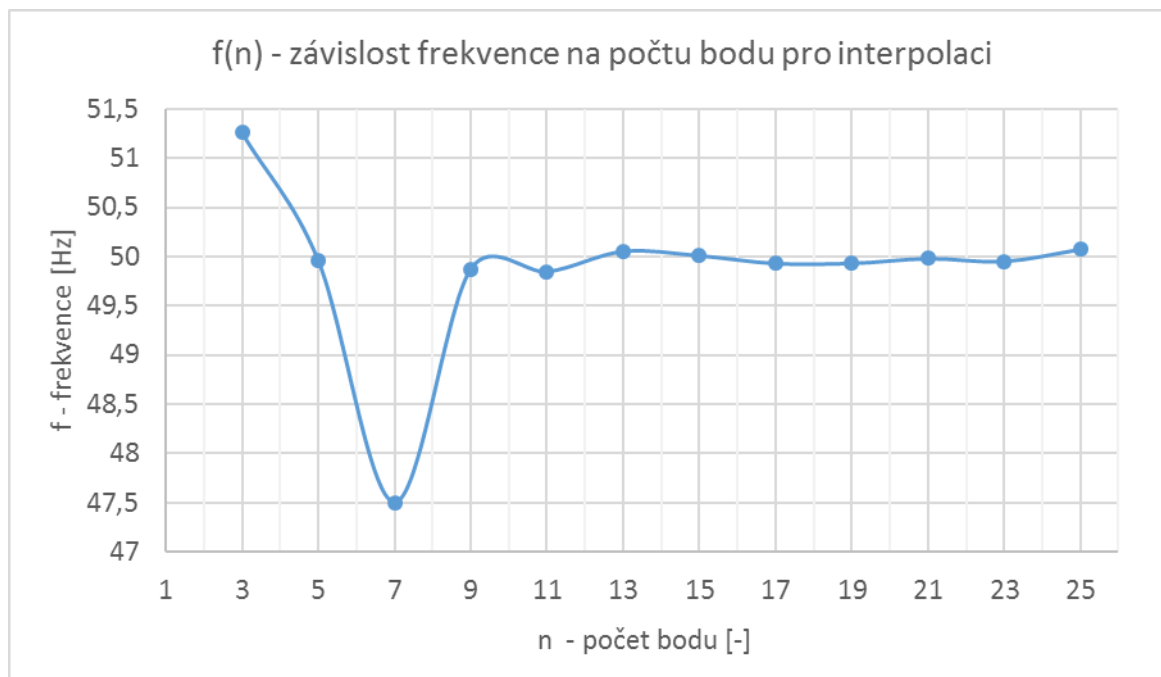
V kapitole 2 jsme mluvili o ideálním signálu, který neobsahuje šum, proto relativní chyba měření nám vyšla tak malá. Pomocí interpolací mezi dvěma body jsme spočítali výsledný bod protnutí. Pak pomocí řešení jednoduchých rovnic jsme získali kořeny a periodu funkce. V kapitole 3 jsme nemáme ideální signál, a proto chyba měření vyšla větší. Postupovali jsme stejným způsobem, udělali jsme interpolaci mezi dvěma body abychom získali správný bod protnutí, a jak tyto body v sobě obsahují šum tak i bod protnutí je šumem ovlivněn. Opravíme to tím, že uděláme lineární aproximaci pomocí většího počtu bodů ( $n=3,5,7,\dots,25$ ).

n [-]	T [ms]	f [Hz]	$\Delta$ [%]
3	19.509	51.259	2.517
5	20.016	49.961	0.078
7	21.052	47.500	4.999
9	20.052	49.871	0.259
11	20.062	49.846	0.307
13	19.979	50.052	0.103
15	19.996	50.009	0.019
17	20.028	49.929	0.142
19	20.028	49.930	0.141
21	20.008	49.979	0.041
23	20.020	49.950	0.099
25	19.971	50.072	0.144

Tabulka č.1

n – počet bodu pro lineární proklad, T – perioda, f – frekvence,  $\Delta$  - relativní chyba

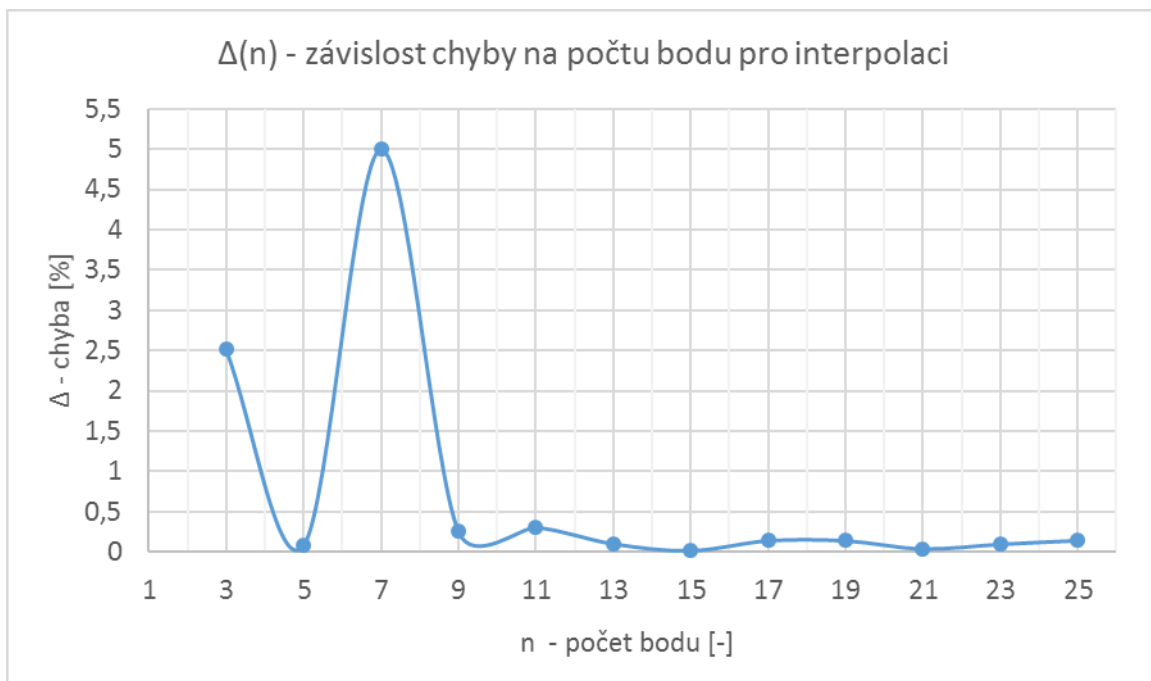
Hodnoty z tabulky použijeme pro grafy f(n) a  $\Delta(n)$  které jsou na další straně.



Graf č.1

Podíváme-li se do grafu, vidíme, že na začátku grafu (n=3,5,7) se hodnota frekvence mění skokově, pak když jsme zvětšili počet bodu (n=9,11,...,25)

frekvence přestala měnit svou hodnotu skokově a začala se nacházet v určitém intervalu, což vylepšilo výsledek měření. Můžeme říct, že optimální počet bodů pro interpolaci v intervalu  $n = [13; 21]$ . O čem pak hovoří graf  $\Delta(n)$ , v intervalu  $n = [13; 21]$  hodnota chyby nám vychází pod 0.5 % což je pro některé účely přijatelná hodnota.



Graf č.2

Závěr: Vzorkovací metodou můžeme měřit frekvence signálu s dostatečně malou chybou při větším počtu bodů pro regresi  $n = [13; 21]$ , pro náš výzkum relativní chyba vyšla pod 0.5 %. V další kapitole se podíváme na statistickou metodu měření frekvence.

### 3. Statistická metoda.

Tato metoda je založena na statistickém zpracování dat. Algoritmus je členěn na několik částí. Jedná se o měření frekvence signálu jejíž součástí je i informace o věrohodnosti výsledné hodnoty ve formě střední kvadratické odchylky.

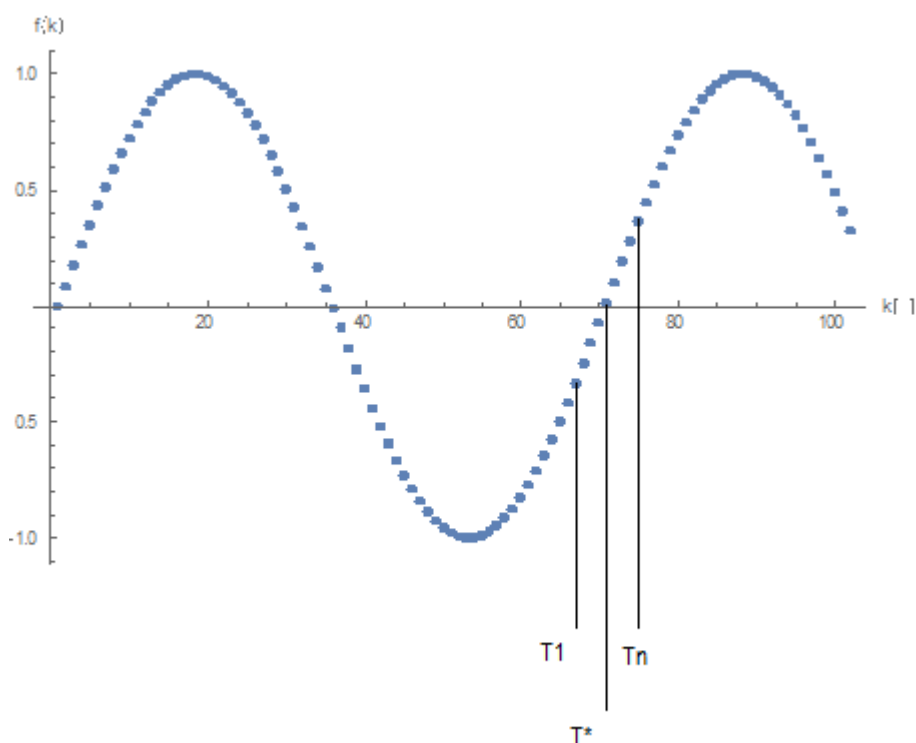
Pro základní výpočet jsou využity následující vztahy. Vztah pro střední hodnotu funkce

$$X_{str} = \frac{1}{T} \int_{t=t_0}^{t_0+T} f(t) dt$$

Vztah pro rozptyl, dále označovaný Sigma kvadrát.

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

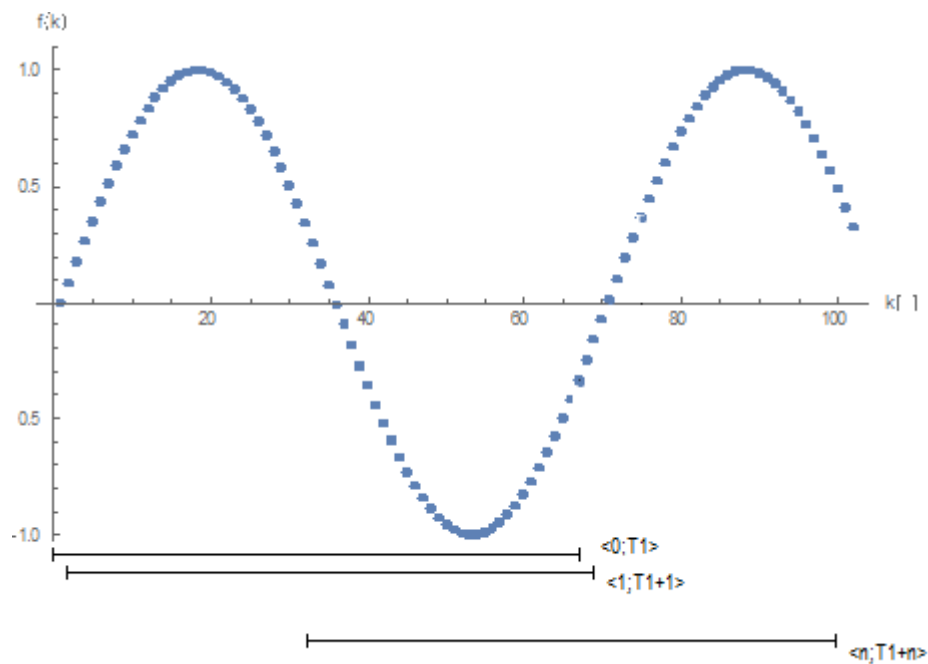
Výpočet probíhá následujícím způsobem. Předpokládejme, že hledaná perioda signálu  $T^*$  se pohybuje v rozmezí vzorků  $T_1$  až  $T_n$ .



Obrázek č.8

Naším cílem najít správnou periodu  $T^*$ , které bude odpovídat nejmenší hodnota  $\sigma^2$ . Na začátek spočítáme střední hodnotu funkce z intervalu  $\langle 0; T_1 \rangle$ . Když máme spočítanou střední hodnotu, pak posuneme výpočetní interval o jeden vzorek dopředu  $\langle 1; T_1 + 1 \rangle$ . Pokračujeme dál do chvíle když  $T_1+n$  se rovná poslednímu vzorku. Ted' můžeme spočítat  $\sigma^2$ , a tím pádem máme body  $(T_1; \sigma^2)$ .  $T_1$  budeme říkat perioda výpočetního okna.

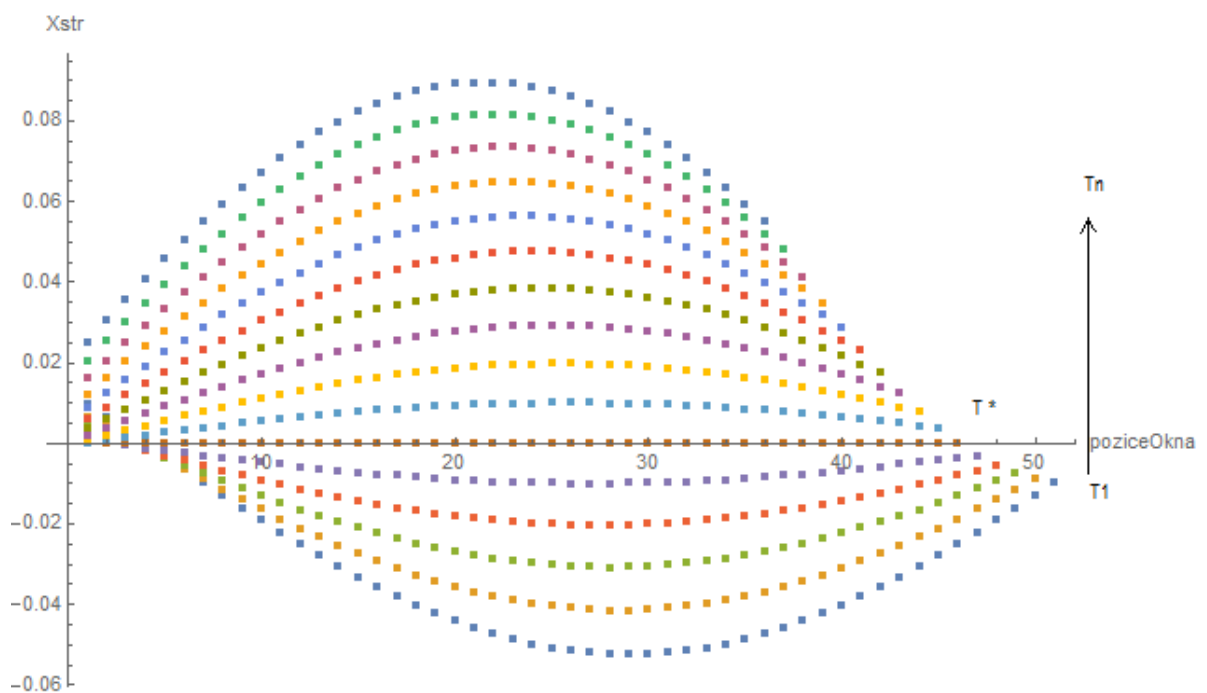




Obrázek č.9

Nadále prodloužíme periodu výpočetního okna o jeden vzorek. Začneme v intervalu  $\langle 0; T_2 \rangle$  kde  $T_2=T_1+1$  a postupujeme stejným způsobem jak jsme postupovali před tím. Pokračuje v počítání do  $\langle m; T_n + m \rangle$ .

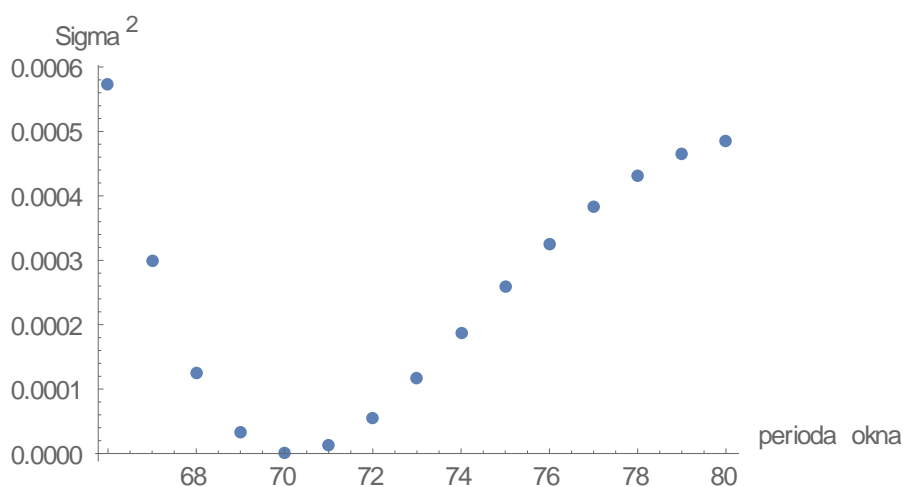
Podíváme se na graf, ve kterém na ose x budeme mít pozice výpočetního okna na ose y  $X_{str}$ .



Obrázek č.10

Podíváme-li se na čáry které jsou na grafu, každá čára má různou barvu. Každé barvě odpovídá různá délka periody výpočetního okna. Vidíme že pro správnou délku výpočetního okna  $T^*$  hodnota  $X_{str}$  je konstantní, to znamená že  $T^*$  je správná perioda.

Nyní jsme schopni spočítat výslednou periodu, máme k dispozici soubor dat ve tváru  $(T; \sigma^2)$  uděláme z toho graf  $\sigma^2(T) = f(T)$ , budeme hledat minimum funkce  $f(T)$ . Uděláme to tak že vezmeme tři body s nejmenší sigma kvadrát a proložíme je parabolou a z prokladu najdeme souřadnice vrcholu.



Obrázek č.11

$$T^* = \frac{y_1 + 2 \cdot x_2 \cdot y_1 - 4 \cdot x_2 \cdot y_2 - y_3 + 2 \cdot x_2 \cdot y_3}{2(y_1 - 2 \cdot y_2 + y_3)}$$

$$\sigma^{2*} = -\frac{y_1^2 + (-4 \cdot y_2 + y_3)^2 - 2 \cdot y_1 \cdot (4 \cdot y_2 + y_3)}{8 \cdot (y_1 - 2 \cdot y_2 + y_3)}$$

Získáním hledané periody  $T^*$  a jí odpovídající  $\sigma^{2*}$  je proces získání frekvence u konce. Získaná perioda má tvar počtu vzorků, odpovídající skutečné periodě. Pro získání skutečné periody  $T$  je nutné vynásobit vzorkovací periodou  $T_{vzor}$ .

$$T = T^* \cdot T_{vzor}$$

Hledaná frekvence je pak:

$$f = \frac{1}{T}$$

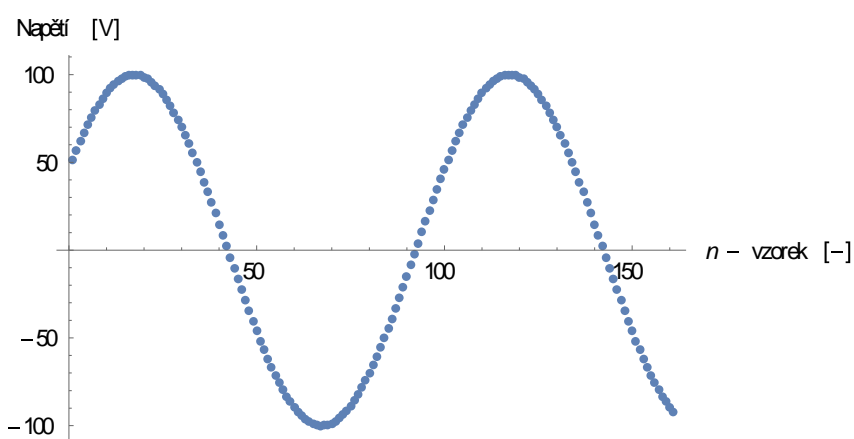
V další kapitole budeme porovnávat tyto dvě metody mezi sebou.

#### 4. Porovnání metod

V této kapitole se podíváme na rozdíly ve výsledcích mezi metodami.

K dispozici máme vstupní signál jehož tvar je :

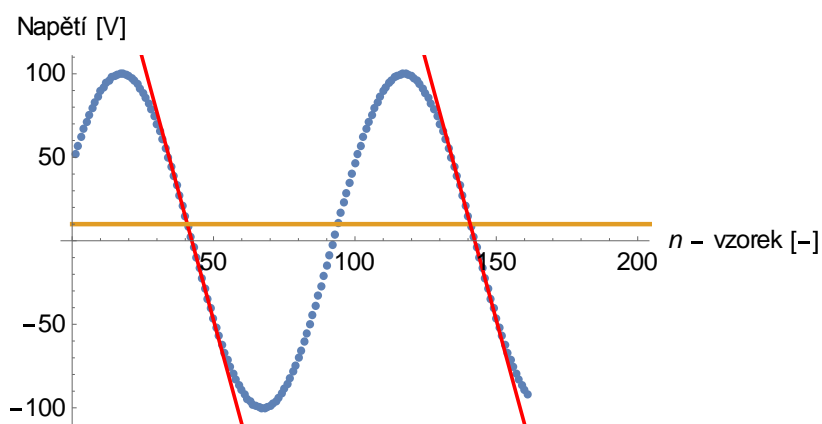
$$y(t) = 100 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot t + 0.543)$$



Obrázek č.12

$f_{vz}=5\text{kHz}$  ( $t_{vz}=0.0002$ )

Vzorkovací metoda dá nám výsledek:



Obrázek č.13

První přímka:

$$y_1(x_1) = 263.948 - 6.23154 \cdot x_1$$

Druhá přímka:

$$y_2(x_2) = 887.102 - 6.23154 \cdot x_2$$

Rovnice úrovně:

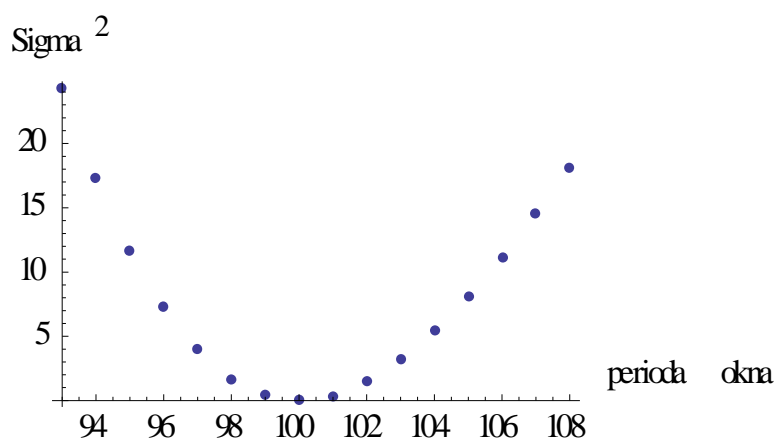
$$y_3(x) = 10$$

$$T = (x_2 - x_1) \cdot t_{vz} = (140.752 - 40.752) \cdot 0.0002 \text{ s} = 0.0200 \text{ s}$$

Frekvence:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.0200 \text{ s}} = 50 \text{ Hz}$$

Statistická metoda dá nám výsledek:



Obrázek č.14

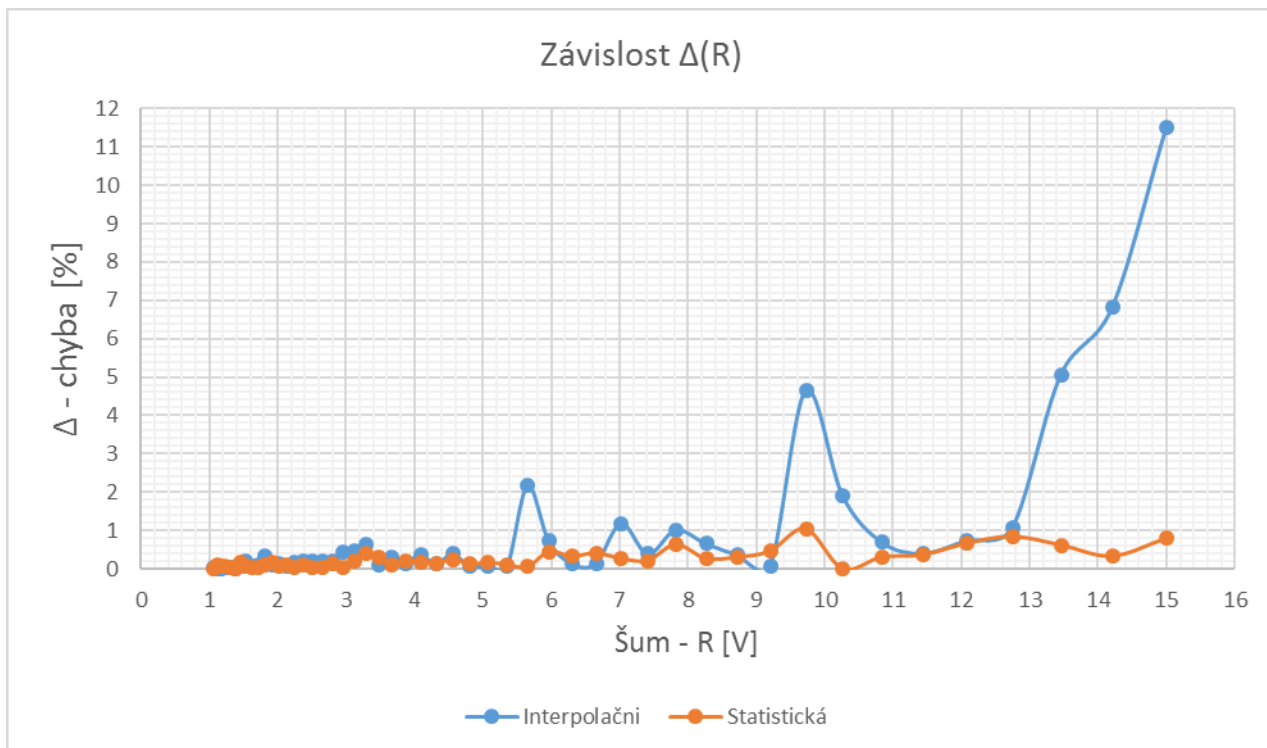
Perioda:

$$T = T^* \cdot T_{vzor} = 100 \cdot 0.0002 \text{ s} = 0.0200 \text{ s}$$

Frekvence:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.0200 \text{ s}} = 50 \text{ Hz}$$

Získali jsme stejné výsledky, což znamená že obě metody fungují správně. Vzhledem k tomu že vstupní signál byl čistý a neměl žádný šum, šlo o ideální situace. Ve skutečnosti každý měřený signál v sobe obsahuje šum, podívejme se tedy na výsledky obou metod když postupně budeme zvyšujeme poměr šumu k vstupnímu signálu.

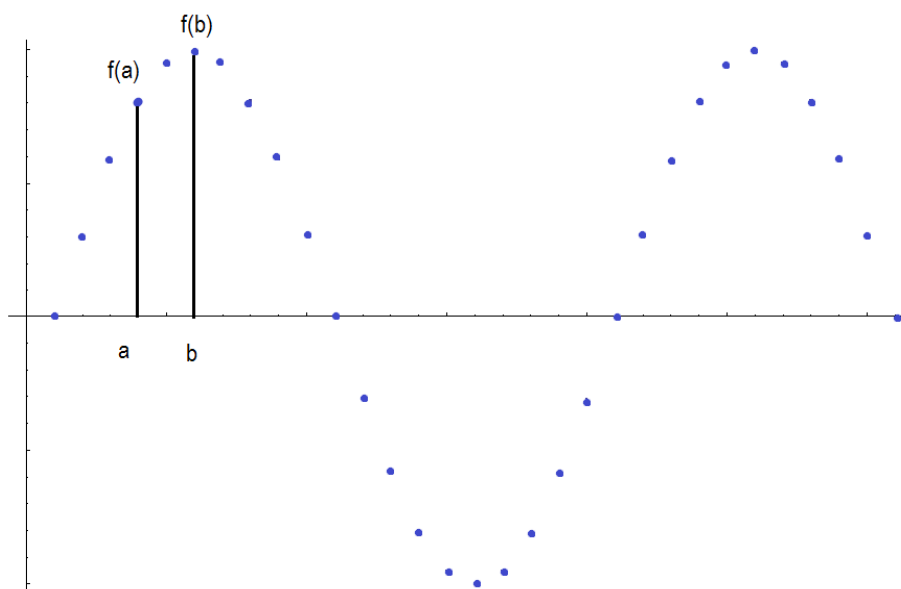


Graf č.3

Graf  $\Delta(R)$  ukazuje závislost relativní chyby měření na amplitudě šumu. Vidíme, že pro statistickou metody hodnota relativní chyby se nachází pod 1 %, když u vzorkovací metody relativní chyba začíná růst když hodnota šumu větší než 12 % amplitudy vstupního signálu. Tabulka s hodnotami pro graf je v přílohách (tabulka č.8)

## 5. Simsonuv integral

V předchozích kapitolách jsem popsal stanovení frekvence diskretního signálu. Teď se podíváme na to jak pomocí Simpsonova pravidla můžeme stanovit určitý integrál signálu.



Obrázek č.15

Simpsonovo pravidlo nám říká, že integrál mezi body  $a$  i  $b$  přibližně se rovná

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

Pro výpočet integrálu pomocí Simpsonova pravidla je nutno vědět funkční hodnoty v bodech  $a$  i  $b$  plus funkční hodnotu v bode  $\frac{a+b}{2}$ . Ze vztahu je vidět, že čím budou body blíže k sobe, tím integrál bude přesnější. Celkový integrál dostaneme sumou přes všechny bodu signálu. Teď jsme můžeme zjistit hodnotu integrálu, což pro je nas nutné, protože chceme získat fázor vstupního signálu.

## 6. Fázory

Každý periodický signál můžeme náhradit Fourierivou řadou

$$\begin{aligned} f^*(t) &= a_0 + a_1 \cdot \cos\left(1 \cdot 2\pi \frac{t}{T}\right) + a_2 \cdot \cos\left(2 \cdot 2\pi \frac{t}{T}\right) + \dots + a_n \cdot \cos\left(n \cdot 2\pi \frac{t}{T}\right) + \\ &+ b_1 \cdot \sin\left(1 \cdot 2\pi \frac{t}{T}\right) + b_2 \cdot \sin\left(2 \cdot 2\pi \frac{t}{T}\right) + \dots + b_n \cdot \sin\left(n \cdot 2\pi \frac{t}{T}\right) = \\ &= a_0 + \sum_{i=1}^n \left[ a_i \cdot \cos\left(i \cdot 2\pi \frac{t}{T}\right) + b_i \cdot \sin\left(i \cdot 2\pi \frac{t}{T}\right) \right] \end{aligned}$$

Kde:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T f^*(t) dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{t=0}^T f^*(t) \cdot \cos\left(k \cdot 2\pi \frac{t}{T}\right) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{t=0}^T f^*(t) \cdot \sin\left(k \cdot 2\pi \frac{t}{T}\right) dt$$

V předchozí kapitole bylo popsáno jakým způsobem můžeme vypočítat integrál.

Nadále se podíváme jak souvisejí koeficienty Fourerovy řady s fázory. Začneme od Eulerůva vztahu:

$$e^{j\psi} = \cos(\psi) + j \cdot \sin(\psi)$$

Ze vztahu vyplývá že:

$$\sin(\psi) = \text{Im}(e^{j\psi})$$

máme k dispozici obecný sinusový signál popsáný rovnicí:

$$u_b(t) = U_M \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

Uděláme z něj fázor jednoduše:

$$u_b(t) = U_M \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) = \text{Im}(U_M \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}) = \text{Im}(\tilde{U}_M \cdot e^{j\omega t})$$

kde:

$$\tilde{U}_M = U_M \cdot e^{j\varphi} - \text{fázor v měřítku maximalních hodnot}$$

Obdobně budeme postupovat v případě jestli signál bude cosinusový:

$$u_a(t) = U_M \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

Pro cosinus platí:

$$\cos(\omega \cdot t) = \sin\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Přepíšeme rovnice s použitím vztahu pro cosinus:

$$u_a(t) = U_M \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) = U_M \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \text{Im}\left(U_M \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}\right)$$

Provedeme záměnu:

$$\tilde{U}_M = U_M \cdot e^{j\varphi} \quad - \text{fázor v měřítku maximalních hodnot}$$

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = j \quad - \text{Eulerův vztah}$$

Dostaneme

$$\text{Im}\left(U_M \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}\right) = \text{Im}(\tilde{U}_M \cdot j \cdot e^{j\omega t})$$

Napíšeme oba vztahy pod sebou

$$u_b(t) = U_{Mb} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) = \text{Im}(\tilde{U}_{Mb} \cdot e^{j\omega t})$$

$$u_a(t) = U_{Ma} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) = \text{Im}(\tilde{U}_{Ma} \cdot j \cdot e^{j\omega t})$$

Jak bylo uvedeno na začátku této kapitoly, každý periodický signál můžeme napsat ve tvaru řady, což je součet sinu a cosinu s příslušnými koeficienty.

$$\begin{aligned} u(t) &= u_b(t) + u_a(t) = b_k \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) + a_k \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) = \\ &= \text{Im}(b_k \cdot e^{j\omega t}) + \text{Im}(a_k \cdot j \cdot e^{j\omega t}) = \text{Im}[(b_k + a_k \cdot j) \cdot e^{j\omega t}] \end{aligned}$$

Kde  $a_k$  i  $b_k$  jsou koeficienty Fourierovy řady.

V této kapitole jsme zkoumali nahrazování periodického signálu Fourierivou řadou, a z řady jsme udělali fázory, pokud máme k dispozici fázory můžeme přejít k výkonům a impedancím.



## 7. Výkony

V této kapitole si ukážeme konkrétní příklad na zpracování signálu. Pomocí fázorů zavedeme vztahy pro činný a jalový výkon.

Elektrický výkon je definován:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) \quad [W, V, A]$$

Napětí a proud popíšeme pomocí harmonických funkcí:

$$u(t) = U_M \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_U) = U_M \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{t}{T} + \varphi_U\right)$$

$$i(t) = I_M \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_I) = I_M \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{t}{T} + \varphi_I\right)$$

Pro periodické průběhy je často výhodné vyjádřit výkon pomocí střední hodnoty výkonu:

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_{t=t_1}^{t=t_1+T} p(t) \cdot dt$$

Dosadím do integrálu vztahy pro napětí a proud a získáme výsledek:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \cdot \int_{t=t_1}^{t=t_1+T} p(t) \cdot dt = \frac{1}{T} \cdot \int_{t=t_1}^{t=t_1+T} u(t) \cdot i(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \int_{t=t_1}^{t=t_1+T} U_M \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{t}{T} + \varphi_U\right) \cdot I_M \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{t}{T} + \varphi_I\right) dt = \\ &= \frac{U_M \cdot I_M}{T} \cdot \int_{t=t_1}^{t=t_1+T} \sin\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{t}{T} + \varphi_U\right) \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{t}{T} + \varphi_I\right) dt = \frac{U_M \cdot I_M}{2} \cdot \cos(\varphi_U - \varphi_I) \end{aligned}$$

Výraz prepíšeme pomocí efektivních hodnot:

$$U_{eff} = \frac{U_M}{\sqrt{2}}, \quad I_{eff} = \frac{I_M}{\sqrt{2}}$$

$$P = \frac{U_M \cdot I_M}{2} \cdot \cos(\varphi_U - \varphi_I) = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos(\varphi_U - \varphi_I)$$

Cosinus můžeme napsat pomocí Eulerova vztahu jako:

$$\cos(\varphi_U - \varphi_I) = \operatorname{Re}[e^{j(\varphi_U - \varphi_I)}]$$

$$\begin{aligned} P &= U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos(\varphi_U - \varphi_I) = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \operatorname{Re}[e^{j(\varphi_U - \varphi_I)}] = \\ &= \operatorname{Re}[U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot e^{j(\varphi_U - \varphi_I)}] = \operatorname{Re}[U_{eff} \cdot e^{j\varphi_U} \cdot I_{eff} \cdot e^{j(-\varphi_I)}] = \\ &= \operatorname{Re}[\tilde{U}_{eff} \cdot \hat{I}_{eff}^*] \end{aligned}$$

Kde  $\hat{I}_{eff}^*$  - komplexní sdružené číslo.

Dostali jsme vztah pro činný výkon. Stejným způsobem dostaneme vztah pro jalový výkon.

$$P_c = \operatorname{Re}[\tilde{U} \cdot \hat{I}^*] \quad [W]$$

$$Q_j = \operatorname{Im}[\tilde{U} \cdot \hat{I}^*] \quad [VAr]$$

kde  $\tilde{U}$  – fázor napětí,  $\hat{I}^*$  – fázor proudu (komplexně sdružené číslo)

Zavedeme vztah pro impedanci  $\hat{Z}$ , impedance, je to podíl fázoru napětí k fázoru proudu.

$$\hat{Z} = \frac{\tilde{U}}{\hat{I}} \quad [\Omega]$$

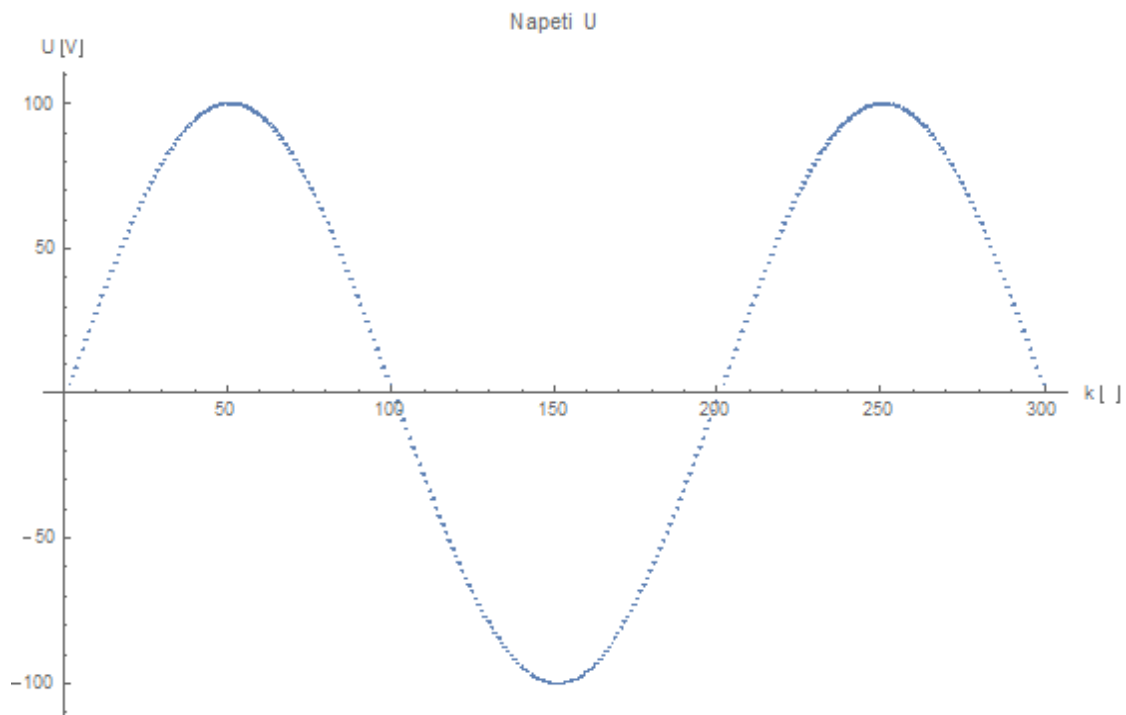
Budeme předpokládat, že máme k dispozici napětí ve tvaru

$$u(t) = 100 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot t)$$

A impedanci

$$\hat{Z} = 1 + 0.5 \cdot j \quad [\Omega]$$

Signál reprezentující napětí máme navorkovaný frekvencí  $f_{vz} = 200$  Hz. ( $t_{vz} = 0.005$  s)



Obrázek č.16

Pomocí statistické metody získáme frekvence. Statistická metoda dala výsledek  $f = 49.999$  Hz. Pak pomocí Fourierove řady získáme fázor napětí. Fázor napětí vyšel  $\hat{U} = 100$  V. Ted' známe fázor napětí a impedanci, zbývá dopočítat fázor proudu.

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{\hat{Z}} = \frac{100}{1+0.5 \cdot I} = \frac{100 \cdot (1-0.5 \cdot I)}{(1+0.5 \cdot I) \cdot (1-0.5 \cdot I)} = \frac{100-50 \cdot I}{1.25} = 80 - 40 \cdot I \quad [A]$$

Z fázoru proudu uděláme komplexně sdružené číslo

$$\hat{I}^* = 80 + 40 \cdot I \quad [A]$$

Dosadíme fázory napětí a proudu do vztahy pro výkony

$$P_{\zeta} = Re[\hat{U} \cdot \hat{I}^*] = Re[100 \cdot (80 + 40 \cdot I)] = 8000 \quad [W]$$

$$Q_j = Im[\hat{U} \cdot \hat{I}^*] = Im[100 \cdot (80 + 40 \cdot I)] = 4000 \quad [VAr]$$

Ukázali jsme jak můžeme aplikovat výsledky z předchozích kapitol.

## 8. Porovnání přesnosti metod při určení činného a jalového výkonu

V této kapitole podíváme se na přesnosti metod při určení činného a jalového výkonu. Pro simulaci průběhů použijeme hodnoty z předchozí kapitoly. Fázor napětí je 100 V, hodnota impedanci je  $1+0,5i$ . Provedl jsem několik simulací, pro různé hodnoty šumu.

R	Statisticka				Interpolacni			
	$f_u$	$f_i$	P cinny	Q jalovy	$f_u$	$f_i$	P cinny	Q jalovy
[%]	[Hz]	[Hz]	[%]	[%]	[Hz]	[Hz]	[%]	[%]
1	49.98	49.98	0.06	0.05	50.02	50.00	0.03	0.57
2	49.98	49.98	0.06	0.73	49.98	50.05	0.27	0.08
3	49.96	50.02	0.15	0.85	49.70	50.10	0.78	3.32
4	49.96	49.94	0.34	2.48	50.33	49.86	1.37	8.03
5	49.94	49.95	1.43	1.91	49.98	50.17	2.74	0.53
6	49.86	49.99	0.55	0.36	50.01	49.92	0.10	2.26
7	50.13	49.89	0.17	2.19	49.64	49.86	0.65	4.28
8	49.87	50	0.42	4.33	49.63	50.23	1.43	10.34
9	50.07	49.98	1.77	5.67	49.66	49.45	0.28	1.09
10	49.95	50.02	0.76	0.93	48.78	49.58	1.79	11.85
15	50.12	50.06	0.10	4.13	49.31	49.94	6.00	8.7
20	49.92	49.9	1.3	2.91	50.08	50.15	1.81	3.23

Tabulka č.3

Z výsledků simulací dá se posoudit, že statistická metoda má menší relativní chybu při určení činného a jalového výkonu a to způsobeno tím, že frekvence zjištěná pomocí statistické metody má přesnější hodnotu. Jinak pro integraci jsem používal stejnou metodu v obou případech, lišilo se to pouze ve stanovení hodnoty frekvenci napětí a proudu.

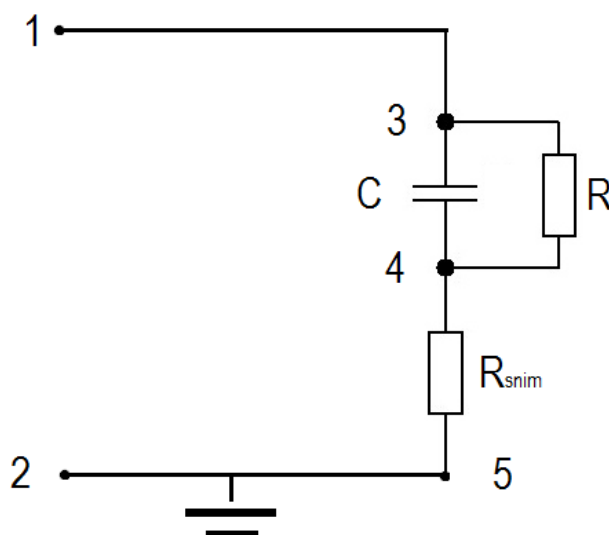
## 9. Měření na reálné impedanci

V této kapitole bude popsáno jak jsem prováděl měření na reálné impedanci. Dostal jsem impedanci, o které jsem jenom věděl, že to je paralelní zapojení odporu a kondenzátoru. Podle předpokladu odpor byl 1,049 k $\Omega$ , a kapacita byla 7,08  $\mu$ F. Cíl měření byla zda se pomocí statistické metody zjistit hodnotu frekvenci naměřených průběhů napětí a proudu, udělat fázory napětí a proudu, spočítat impedanci přípravku a dostat hodnoty odporu a kapacity.



Obrázek č.17

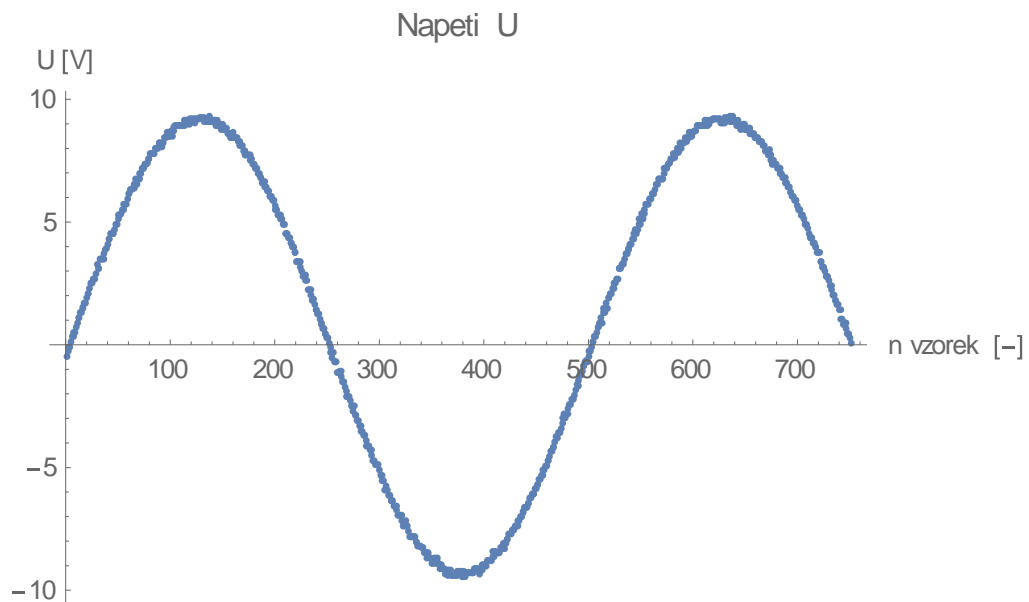
Přípravek jsem zapojil podle schématu.



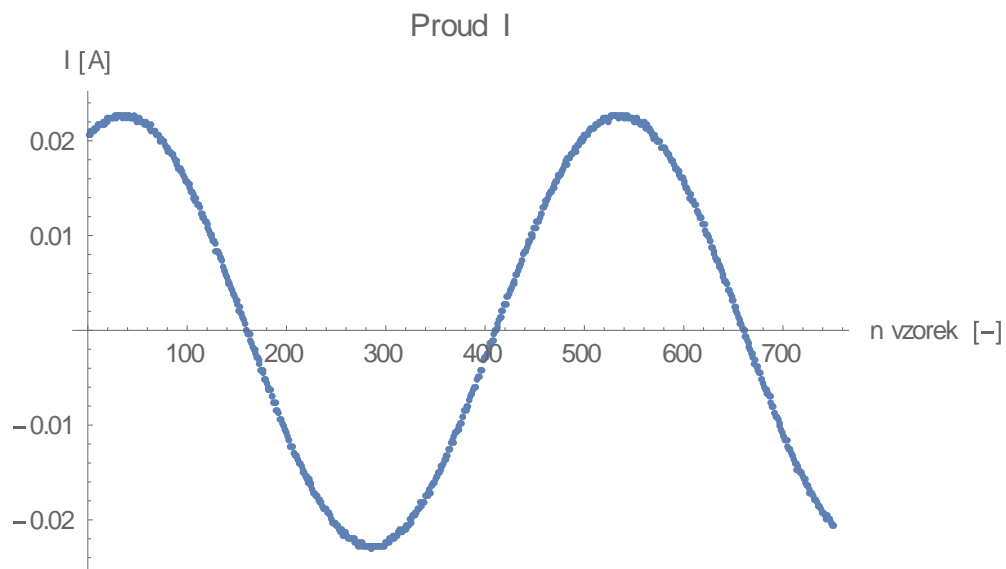
Obrázek č.18

Mezi svorky 1-2 byl zapojen zdroj napětí, mezi svorky 3-4 byla zapojena měřena impedance, mezi svorky 4-5 byl zapojen snímací odpor. Ten byl zapojen kvůli tomu, že měření bylo prováděno pomocí osciloskopu, průběh napětí na snímacím odporu vydělíme hodnotou odporu a dostaneme průběh proud obvodem. Snímací odpor měl hodnotu  $23 \Omega$ .

Měření bylo provedeno pro několik hodnot vstupního napětí. První hodnota napětí 10 V sinusový signál o frekvenci 50 Hz. Pro 10 V dostal jsem tyto průběhy na přípravku .



Obrázek č.19



Obrázek č.20

Vzorkovací frekvence byla 25 kHz. Dostal jsem tyto výsledky.

Frekvence napětí [Hz]	50.0049
Frekvence proudu [Hz]	50.0108
Fázor napětí [V]	$9.2684 - 0.2397i$
Fázor proudu [A]	$0.0095 + 0.0206i$
Činný výkon [W]	0.0836
Jalový výkon [Var]	-0.1932
Zdánlivý výkon [VA]	0.2105
Účinnost [-]	0.3970
Impedance [ $\Omega$ ]	$162.0939 - 374.6397i$

Tabulka č.4

Hodnota impedance vyšla  $162.0939 - 374.6397i$ . Potřebujeme upravit impedanci abychom dostali hodnoty odporu a kapacity, a to tak že, zapišme vztah pro paralelní řazení impedanci:

$$\frac{1}{Z} = Z^{-1} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\frac{1}{i \cdot \omega \cdot C}} = \frac{1}{R} + i \cdot \omega \cdot C = G \text{ } [\Omega^{-1}]$$

Kde G – je admitance, hodnoty odporu a kapacity dostaneme:

$$R = \frac{1}{\text{Re}[G]} \text{ } [\Omega]$$

$$C = \frac{\text{Im}[G]}{\omega} \text{ } [F]$$

Dosadím do vztahu:

$$R = \frac{1}{\text{Re}[Z^{-1}]} = \frac{1}{\text{Re}[(162.0939 - 374.6397i)^{-1}]} = 1027.98 \text{ } [\Omega]$$

$$C = \frac{\text{Im}[Z^{-1}]}{\omega} = \frac{\text{Im}[(162.0939 - 374.6397i)^{-1}]}{2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{50.0049 + 50.0108}{2}\right)} = 7.15 \text{ } [\mu F]$$

Pro výpočet  $\omega$  použil jsem střední hodnotu frekvencí napětí a proudu.

Hodnota odporu vyšla  $1027.98 \text{ } \Omega$ , hodnota kapacity vyšla  $7.15 \text{ } \mu F$ .

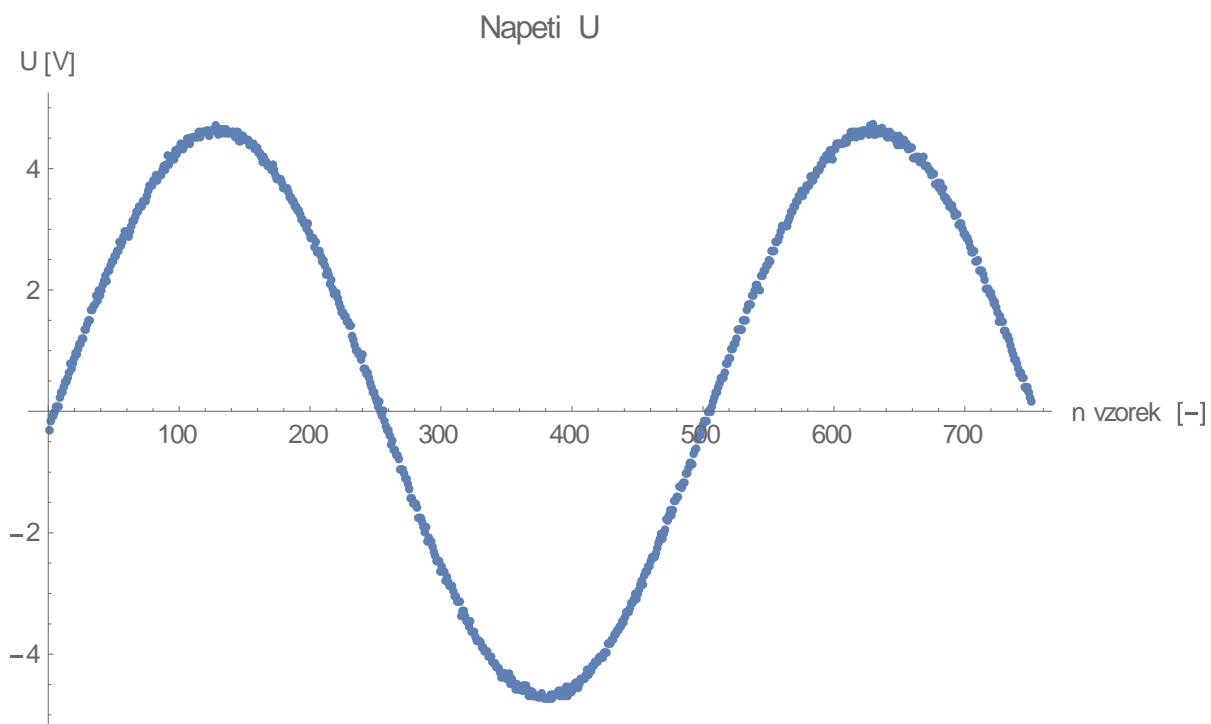
Podíváme se na relativní chyby měření:

$$\Delta R = \left| \frac{1049 - 1027.98}{1049} \right| \cdot 100\% = 2 \%$$

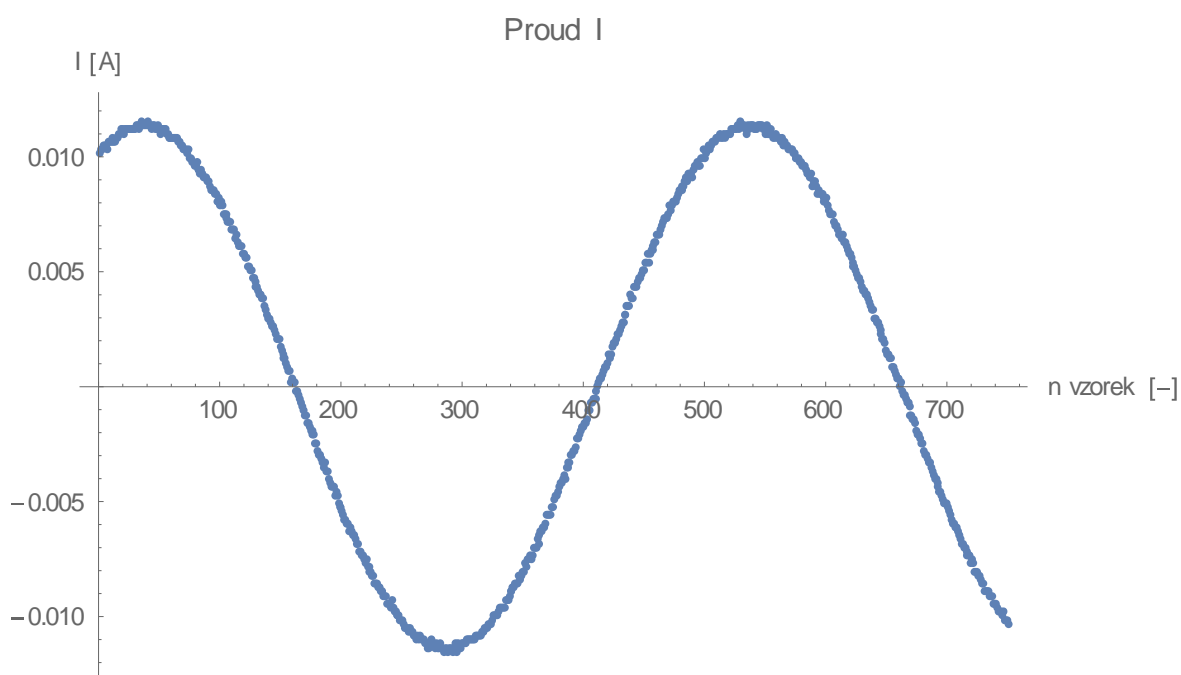
$$\Delta C = \left| \frac{7.08 \cdot 10^{-6} - 7.15 \cdot 10^{-6}}{7.08 \cdot 10^{-6}} \right| \cdot 100\% = 0.98 \%$$

Dokázal jsem, pomocí statistické metody, změřit hodnoty odporu a kapacity zapojených paralelní s relativní chybou kolem 2 %.

Podíváme se na další měření, pro další měření jsem použil signál o menší amplitudě. Na vstup jsem dal 5 V sinusový signál o frekvenci 50 Hz. Dostal jsem tyto průběhy na přípravky.



Obrázek č.21



Obrázek č.22

Vzorkovací frekvence je stejná, 25 kHz.

Podíváme se na výsledky které nam dá statistická metoda a aplikaci výsledků:



Frekvence napětí [Hz]	49.9924
Frekvence proudu [Hz]	50.0073
Fázor napětí [V]	4.6558 – 0.2009i
Fázor proudu [A]	0.0049 + 0.0102i
Činný výkon [W]	0.0212
Jalový výkon [Var]	–0.0486
Zdánlivý výkon [VA]	0.053
Účinnost [-]	0.4
Impedance [Ω]	162.881 – 375.276i

Tabulka č.5

Použijeme stejný postup jak jsme to dělali v případě s 10 V signálem.

$$R = \frac{1}{\operatorname{Re}[Z^{-1}]} = \frac{1}{\operatorname{Re}[(162.881 - 375.276i)^{-1}]} = 1023.24 \text{ } [\Omega]$$

$$C = \frac{\operatorname{Im}[Z^{-1}]}{\omega} = \frac{\operatorname{Im}[(162.881 - 375.276i)^{-1}]}{2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{49.9924 + 50.0073}{2}\right)} = 7.12 \text{ } [\mu\text{F}]$$

Pro výpočet  $\omega$  použil jsem střední hodnotu frekvenci napětí a proudu.

Dostali jsme hodnotu odporu 1023.24 Ω, a hodnota hodnota kapacity 7.12 μF.

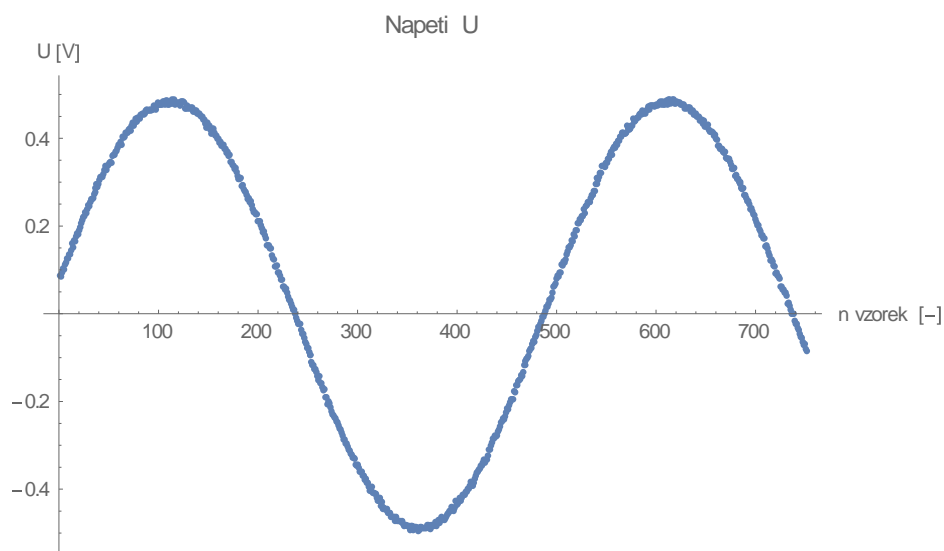
Podíváme se na relativní chyby měření:

$$\Delta R = \left| \frac{1049 - 1023.24}{1049} \right| \cdot 100\% = 2.45 \%$$

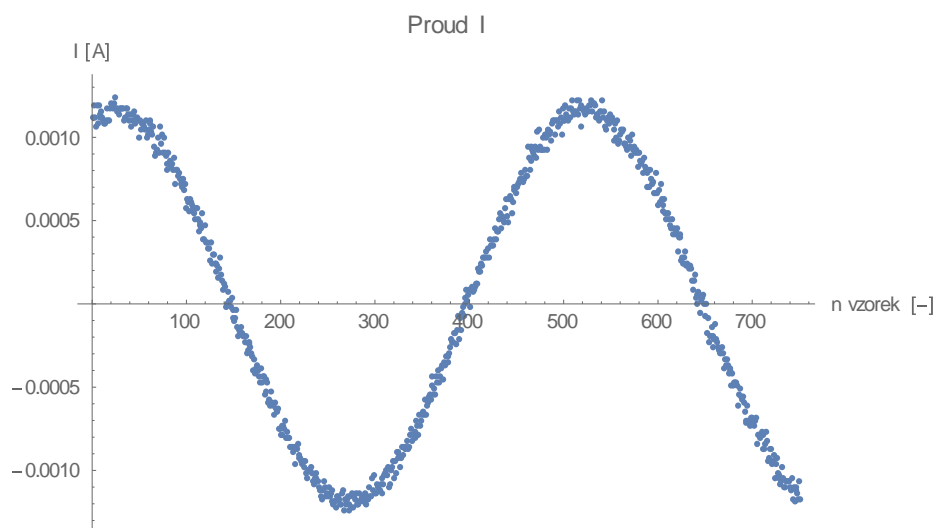
$$\Delta C = \left| \frac{7.08 \cdot 10^{-6} - 7.12 \cdot 10^{-6}}{7.08 \cdot 10^{-6}} \right| \cdot 100\% = 0.56 \%$$

Změřili jsem odpor a kapacitu přípravku a pořád mám malou relativní chybu měření.

Pak jsem snížil vstupní napětí a dal na vstup 0.5 V. Dostal jsem tyto průběhy napětí a proudu.



Obrázek č.23



Obrázek č.24

Vzorkovací parametry máme stejné 25 kHz. Z obrázku 24 můžeme vidět, že průběh proudu už má šum, a předpokládám větší relativní chybu měření. Opět uděláme s výsledky měření:

Frekvence napětí [Hz]	49.9874
Frekvence proudu [Hz]	50.0312
Fázor napětí [V]	$0.4784 + 0.0851i$
Fázor proudu [A]	$0.4784 + 0.0851i$
Činný výkon [W]	0.0002
Jalový výkon [Var]	-0.0005
Zdánlivý výkon [VA]	0.0005
Účinnost [-]	0.436
Impedance [ $\Omega$ ]	$182.258 - 375.455i$

Tabulka č.6

Aplikujeme vztahu pro odpor a kapacitu znovu:

$$R = \frac{1}{\operatorname{Re}[Z^{-1}]} = \frac{1}{\operatorname{Re}[(182.258 - 375.455i)^{-1}]} = 955.7 \text{ } [\Omega]$$

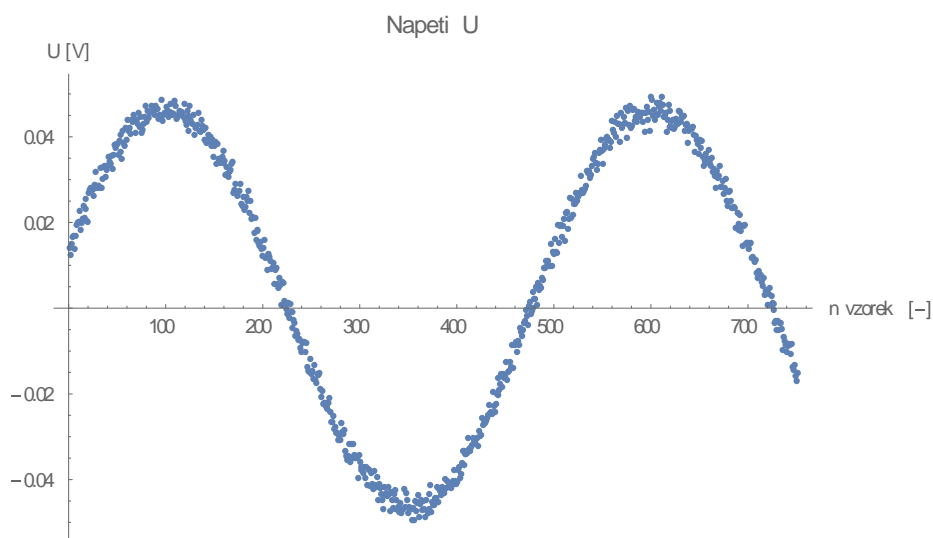
$$C = \frac{\operatorname{Im}[Z^{-1}]}{\omega} = \frac{\operatorname{Im}[(182.258 - 375.455i)^{-1}]}{2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{49.9874 + 50.0312}{2}\right)} = 6.86 \text{ } [\mu\text{F}]$$

Hodnoty odporu a kapacity se liší od předpokládaných a už rozdíl je poměrně značný. Co se týče relativní chyby tak ta vyšla:

$$\Delta R = \left| \frac{1049 - 955.7}{1049} \right| \cdot 100\% = 8.89 \%$$

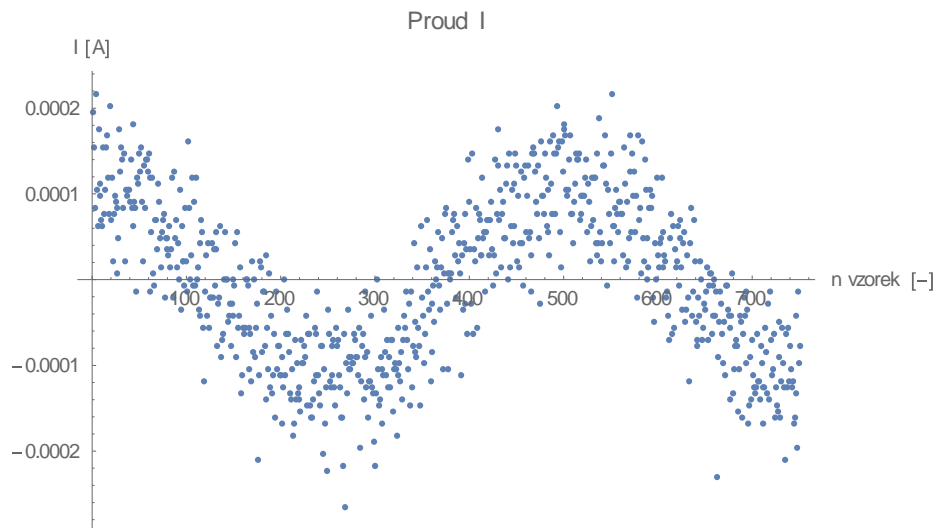
$$\Delta C = \left| \frac{7.08 \cdot 10^{-6} - 6.86 \cdot 10^{-6}}{7.08 \cdot 10^{-6}} \right| \cdot 100\% = 3.11 \%$$

I přes to že relativní chyba začíná růst, měřil jsem dál a na vstupní svorky jsem dal 120 mV. A dostal tyto průběhy:



Obrázek č.25

Průběh napětí neodpovídá předpokladům, jak můžeme posoudit z obrázku 25, maximální hodnota napětí je přibližně 50-55 mV při vstupním napětí 120 mV. Budeme pracovat s těmito hodnotami dál. A pokusíme se dostat rozumný výsledek.



Obrázek č.26

Vidíme, že průběh hodně zašuměný, protože hodnota proudu je moc malá. Zase sestavíme tabulku s výsledky a podíváme se na hodnoty odporu a kapacity.

Frekvence napětí [Hz]	49.9724
Frekvence proudu [Hz]	49.9915
Fázor napětí [V]	$0.0444 + 0.0143i$
Fázor proudu [A]	$3.5302 \cdot 10^{-6} + 0.0001i$
Činný výkon [W]	$1.8468 \cdot 10^{-6}$
Jalový výkon [Var]	$-5.1626 \cdot 10^{-6}$
Zdánlivý výkon [VA]	$5.483 \cdot 10^{-6}$
Účinnost [-]	0.3368
Impedance [ $\Omega$ ]	$133.951 - 374.446i$

Tabulka č.7

$$R = \frac{1}{\text{Re}[Z^{-1}]} = \frac{1}{\text{Re}[(133.951 - 374.446i)^{-1}]} = 1180.67 \text{ } [\Omega]$$

$$C = \frac{\text{Im}[Z^{-1}]}{\omega} = \frac{\text{Im}[(133.951 - 374.446i)^{-1}]}{2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{49.9724 + 49.9915}{2}\right)} = 7.53 \text{ } [\mu\text{F}]$$

Dostali jsem výsledky odpovídající změřeným průběhům, a podíváme se na relativní chyby měření:

$$\Delta R = \left| \frac{1049 - 1180.67}{1049} \right| \cdot 100\% = 12.55 \%$$

$$\Delta C = \left| \frac{7.08 \cdot 10^{-6} - 7.53 \cdot 10^{-6}}{7.08 \cdot 10^{-6}} \right| \cdot 100\% = 6.35 \%$$

I přes to, že jsem měl zašuměný průběh proudu, a napětí neodpovídalo předpokladům, získal jsem poměrně rozumné výsledky.

## 10. Vyhodnocení měření

Porovnáme výsledky měření mezi sebou.

Vstupní napětí	Odpor	Relativní chyba	Kapacita	Relativní chyba
[V]	[ $\Omega$ ]	[%]	[ $\mu$ F]	[%]
10	1027.98	2	7.15	0.98
5	1023.24	2.45	7.12	0.56
0.5	955.7	8.89	6.86	3.11
0.12	1180.67	12.55	7.53	6.35

Tabulka č.8

Podářilo se změřit hodnotu impedance a zjistit velikosti odporu a kapacity. Když se podíváme do tabulky 7, tak je vidět, že minimální relativní chyba měření vyšla pro největší vstupní napětí 10 V. Dost rozumný výsledek dalo měření při 5 V na vstupu. Co se týče ostatních měření tak relativní chyba kolem 8-12 % pro hodnotu odporu, což by se dalo říct, že měření je orientační. Relativní chyba pro hodnotu kapacity 3-6 %. Dalo by se udělat mnoha různých měření a zkusit změnit jak frekvenci vstupního signálu tak i tvar a podívat se na výsledky, ale to není tématem této práce.

## 11. Závěr

V této práci jsem popsal dvě metody určování frekvence, s využitím lineárního prokladu a statistickou. Obě metody jsem naprogramoval v prostředí Wolfram Mathematica. Po naprogramování metod bylo snadné porovnat obě metody mezi sebou. Statistická metoda dávala přesnější výsledek pro všechny signály co jsem zkoušel a při větších šumech dokázala dát správný výsledek. Pak jsem zkusil aplikovat výsledky a to tak, že jsem udělal numerickou integraci signálu a stanovil fázor příslušného signálu. Stejným způsobem jsem postupoval v případě dvojic signálů, což byly dvojice napětí a proudu. Po

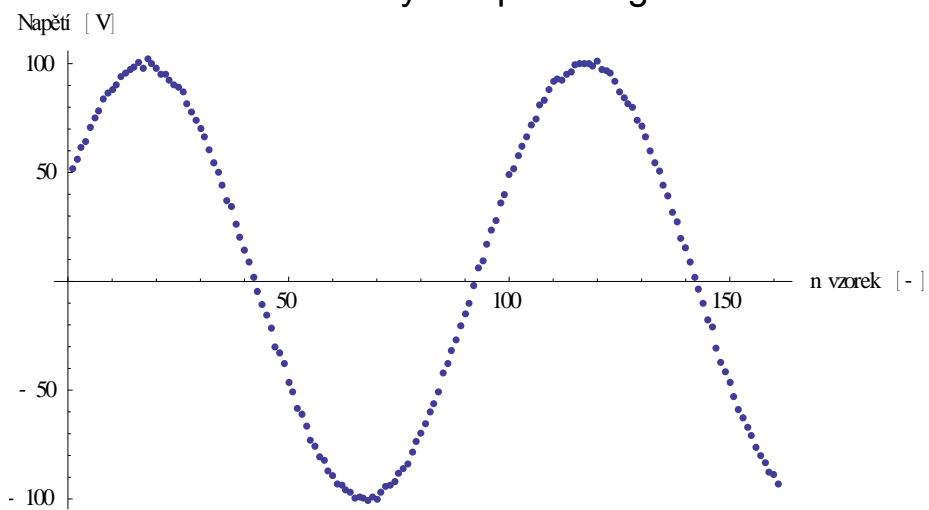
vypočtu fázorů napětí a proudu můžeme přejít na stanovení výkonu a vypočtu impedance obvodu. Pak jsem provedl měření na reálně impedanci a stanovil jsem hodnoty příslušných prvků obvodu, v mém případě hodnoty odporu a kapacity. Pro další výzkum zůstává například analýza nesinusových signálů a porovnání s použitím FFT.

## 12. Přílohy

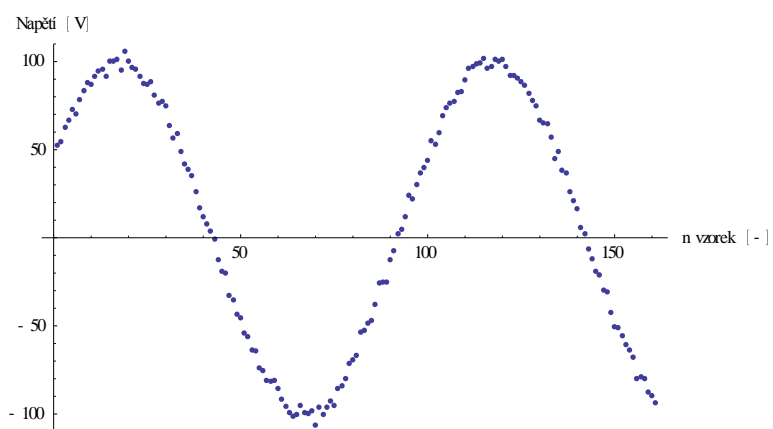
šum R [V]	Vzokrovací metoda			Statistická metoda		
	T [ms]	f [Hz]	$\Delta$ [%]	T [ms]	f [Hz]	$\Delta$ [%]
1.06	20.007	49.982	0.035	20.022	49.994	0.013
1.11	19.997	50.007	0.015	20.005	49.953	0.095
1.18	20.003	49.992	0.015	19.978	49.972	0.057
1.24	20.009	49.977	0.046	20.009	49.974	0.051
1.31	20.005	49.988	0.024	20.006	50.022	0.045
1.38	20.003	49.992	0.016	20.027	50.007	0.014
1.46	20.012	49.969	0.062	19.996	49.909	0.183
1.54	20.038	49.905	0.189	19.961	49.962	0.076
1.63	19.984	50.039	0.079	20.081	50.009	0.019
1.72	20.021	49.948	0.104	20.058	49.987	0.027
1.81	19.931	50.174	0.348	20.022	49.947	0.106
1.92	20.019	49.952	0.097	20.039	49.921	0.158
2.02	20.024	49.940	0.121	19.966	49.972	0.055
2.13	20.013	49.967	0.066	20.027	49.946	0.108
2.25	19.969	50.078	0.155	20.048	49.987	0.025
2.38	19.959	50.102	0.203	20.026	50.054	0.108
2.51	19.957	50.107	0.213	20.032	49.977	0.047
2.65	19.962	50.096	0.192	20.022	49.985	0.031
2.8	20.039	49.903	0.193	20.010	49.932	0.135
2.95	20.085	49.787	0.425	20.089	50.010	0.020
3.12	20.093	49.769	0.461	20.065	50.098	0.196
3.29	20.130	49.677	0.645	20.082	49.798	0.406
3.48	20.020	49.949	0.102	20.054	49.855	0.291
3.67	20.063	49.842	0.316	19.957	49.945	0.110
3.87	20.027	49.932	0.135	20.126	49.903	0.195
4.09	19.924	50.191	0.382	19.946	50.086	0.172
4.32	20.024	49.941	0.119	20.061	49.933	0.134
4.56	19.922	50.196	0.391	20.092	49.881	0.238
4.81	20.016	49.959	0.082	20.206	49.936	0.128
5.08	20.014	49.965	0.070	19.999	49.920	0.161
5.36	20.011	49.971	0.057	20.061	49.944	0.112
5.66	20.444	48.915	2.171	20.072	49.975	0.050
5.97	20.147	49.635	0.729	20.131	49.779	0.444
6.31	20.027	49.933	0.133	19.833	49.838	0.325
6.66	20.029	49.927	0.146	19.877	49.796	0.410
7.03	20.240	49.407	1.186	20.066	49.866	0.268
7.42	19.923	50.193	0.387	19.842	50.108	0.215
7.83	20.205	49.493	1.013	20.022	49.687	0.631
8.27	20.132	49.672	0.657	20.005	50.134	0.268
8.73	20.072	49.820	0.360	19.978	49.848	0.305
9.21	19.986	50.036	0.071	20.009	49.771	0.461
9.73	19.112	52.324	4.649	20.006	49.489	1.032
10.27	19.626	50.953	1.906	20.027	50.003	0.005
10.84	20.140	49.651	0.697	19.996	49.849	0.303
11.44	19.920	50.202	0.403	19.961	49.820	0.362
12.08	19.853	50.371	0.741	20.081	49.674	0.657
12.75	19.786	50.541	1.082	20.058	50.422	0.837
13.46	21.066	47.469	5.062	20.022	50.310	0.617
14.21	18.723	53.410	6.820	20.039	49.836	0.330
15	17.937	55.750	11.501	19.966	50.398	0.789

Tabulka č.8

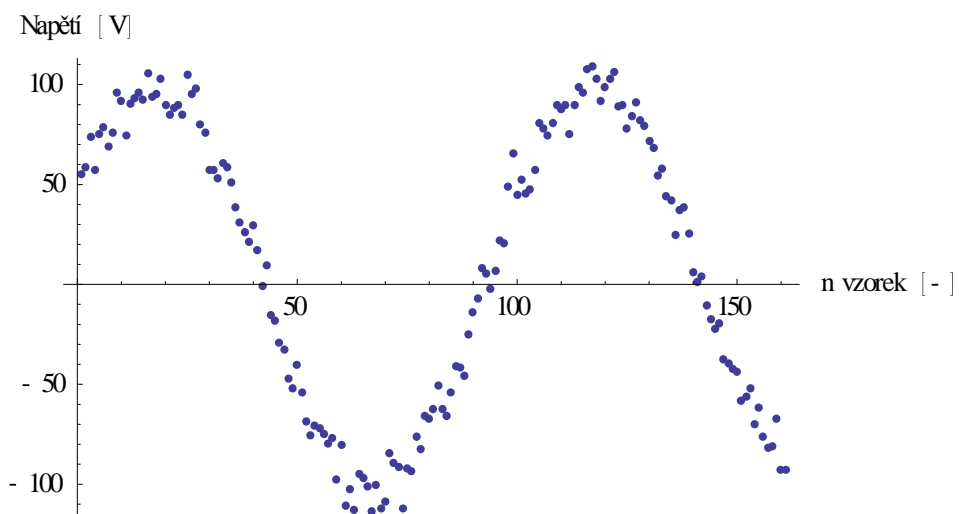
## 12.1 Grafické ukázky vstupního signálu



Šum 1.06 V

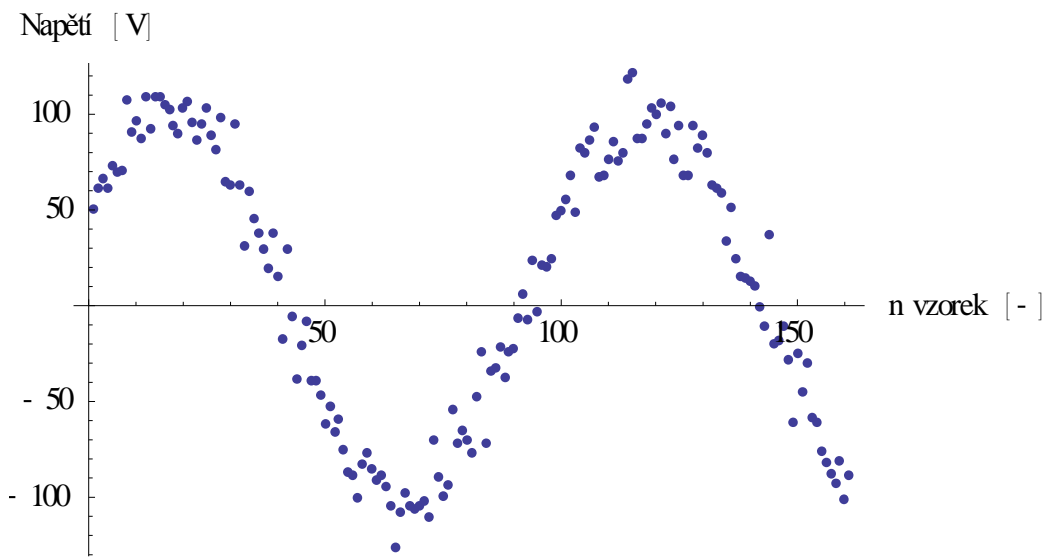


Šum 2.8 V

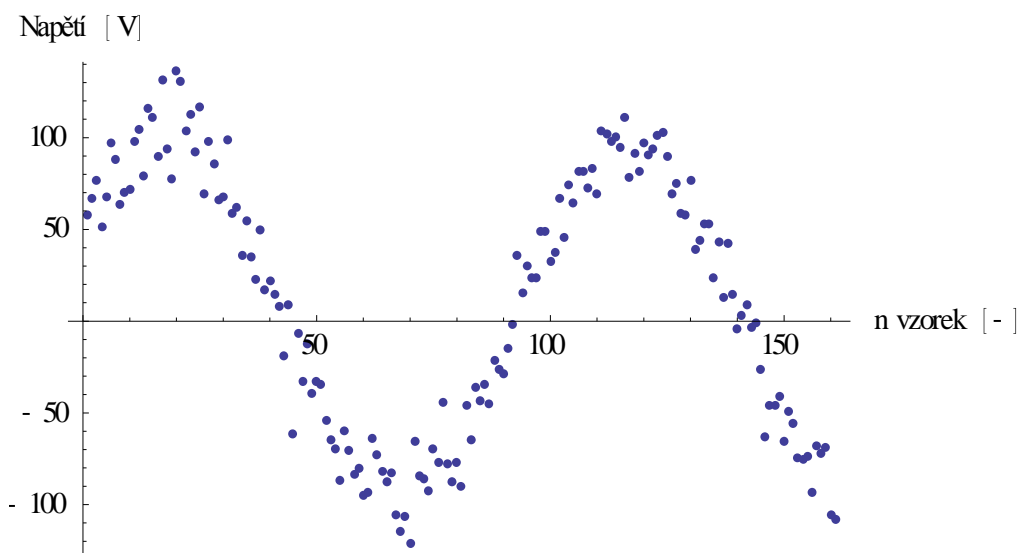


Šum 9.21 V

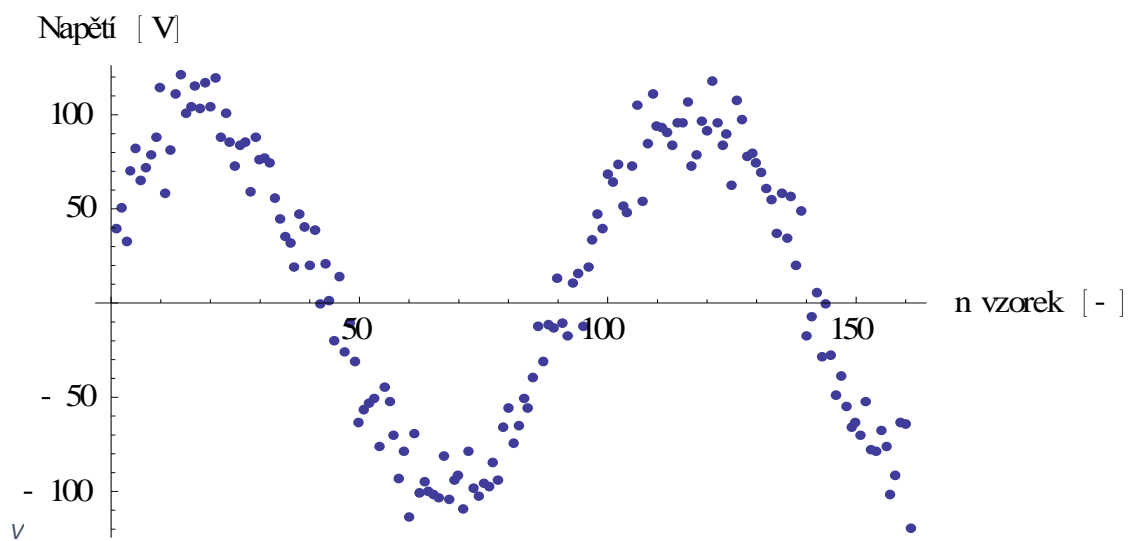




Šum 12.75 V



Šum 14.21



Šum 15 V

## 12.2 Výpočtová část

Příloha 1) VzorkovacíMetoda.nb

Příloha 2) Statisticka+Aplikace.nb

Příloha 3) Vzorkovací\_Statisticka(s grafy).nb

## 13. Seznam použité literatury

[1] Fejt, Z.: Elektroenergetika. Praha : Ediční středisko Českého vysokého učení technického, 1981

[2] Haasz, V. - Sedláček, M.: Elektrická měření. Přístroje a metody. Monografie ČVUT, Praha 2003

[3] Kyncl, Novotný: Číslicové a analogové obvody, skriptum ČVUT