



**ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE**

---

**Fakulta strojní**

**Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**

**Řešení problému toku sypkých hmot v průmyslových zásobnících**

Bakalářská práce

Studijní program: Teoretický základ strojního inženýrství

Vedoucí práce: Dr. Ing. Tomáš Vampola

**Autor práce: Martin Fayad**



## ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

pro: **Martina Fayada**

obor: Teoretický základ strojního inženýrství

Název tématu: **Řešení problému toku sypkých hmot v průmyslových zásobnících**

Zásady pro vypracování:

1. Seznamte se s problematikou modelování toku sypkých hmot v průmyslových zásobnících
2. Seznamte se základními vztahy umožňující popisovat pole napjatostí v obecném 3D kontinuu
3. Dle odborné publikace rekonstruujte výpočetní postup pro analýzu rychlostních a napjatostních polí v modelu průmyslového zásobníku
4. Prověřte shodu empirických vztahů návrhu geometrie průmyslových zásobníků s rekonstruovaným výpočetním postupem
5. Odlad'te výpočetní nástroj pro interpretaci rychlostních a napjatostních polí v modelu průmyslového zásobníku



Rozsah grafických prací: cca 10 stran

Rozsah práce: cca 20 stran

Seznam odborné literatury:

- Stejskal V., Valášek M.: Kinematics and Dynamics of Machinery. Marcel Dekker, Inc., New York 1996
- Nguyen T.V., Brennen C., Sabersky R.H.: Gravity Flow of Granular Materials in Conical Hoppers, Journal of Applied Mechanics, (49), 1979, p.p. 529-535

Vedoucí diplomové práce: prof. Dr. Ing. Tomáš Vampola  
Konzultant:

Neodevzdá-li student bakalářskou nebo diplomovou práci v určeném termínu, tuto skutečnost předem písemně zdůvodnil a omluva byla děkanem uznána, stanoví děkan studentovi náhradní termín odevzdání bakalářské nebo diplomové práce. Pokud se však student řádně neomluvil nebo omluva nebyla děkanem uznána, může si student zapsat bakalářskou nebo diplomovou práci podruhé

*Bakalář bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů, a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.*

Zadání bakalářské práce převzal dne: 30.4.2015

30.4.2015  
.....  
bakalář

Datum zadání bakalářské práce: 30.4.2015

Datum odevzdání bakalářské práce: 19.6.2015

.....  
Prof. Ing. Milan Růžička, CSc.  
Vedoucí Ú 12105

.....  
Prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.  
děkan

V Praze dne 30.4.2015



## Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady uvedené v příloženém seznamu. Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu § 60 zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů.

V Praze dne .....

..... podpis



## **Poděkování**

Rád bych poděkoval Dr. Ing. Tomáši Vampolovi za jeho rady a čas, který mi věnoval při řešení dané problematiky. Také mu děkuji za pomoc při gramatické kontrole práce.



## **Abstrakt**

Obsahem této práce je příspěvek k řešení problému toku sypkých hmot v průmyslových zásobnících. Úvod práce je věnován základní teorii sypké hmoty, je popsána její fyzikální podstata a jsou uvedeny její definice a mechanicko-fyzikální závislosti. V teoretické části je provedena rekonstrukce matematického modelu popisující napjatostní a rychlostní pole v kónické nádobě resp. v průmyslovém zásobníku. Zvláštní část práce tvoří návrh korekce, který slouží k zpřesnění výpočetního modelu.



## Obsah

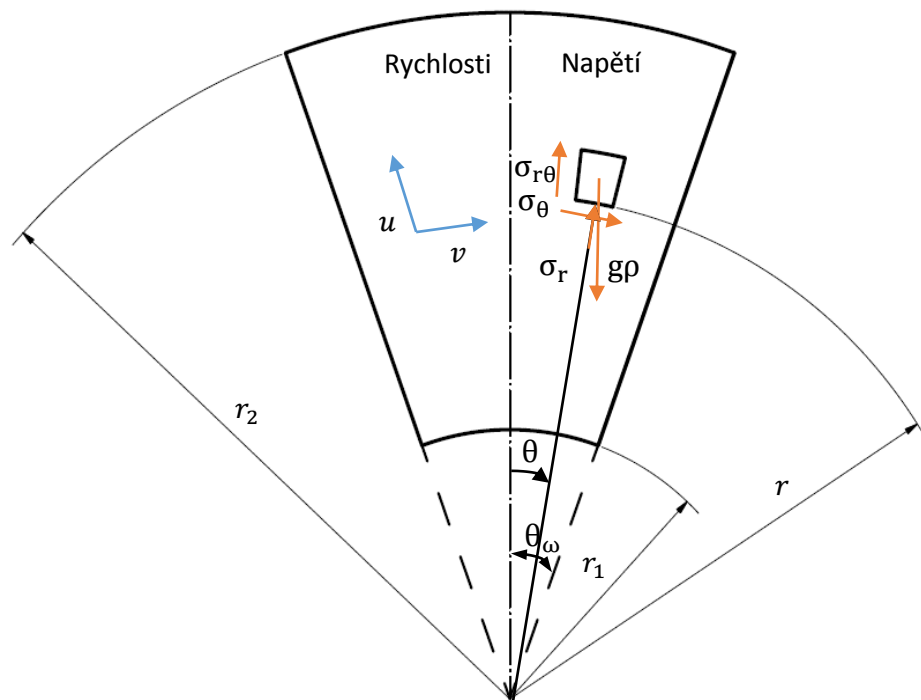
Úvod.....	2
Sestavení základních vztahů mechaniky kontinua.....	4
Rovnice kontinuity .....	4
Pohybové rovnice .....	5
Sypké hmoty .....	9
Sypný úhel $\vartheta$ .....	9
Úhel vnitřního tření $\varphi$ .....	10
Úhel stěnového tření $\delta$ .....	10
Matematický model popisující napjatostní a rychlostní pole sypkých hmot v kónické nádobě .....	11
Napjatostní pole.....	11
$\Psi$ úhel natočení řezu .....	12
$\sigma$ průměrné napětí.....	13
Rychlostní pole.....	15
Poznámky k matematickému modelu rychlostního a napjatostního pole .....	18
Aplikace matematického modelu a ověření výsledků s empirickými vztahy.....	19
Návrh teoretické korekce matematického modelu .....	26
Způsob korekce .....	26
Závěr .....	33
Příloha .....	34
Zdrojový kód .....	34
Výpočet úhlu natočení řezu .....	38
Zdroje .....	40



## Úvod

Jedním z nejvíce závažných problémů týkající se toku soudržného sypkého materiálu v průmyslových zásobnících je vznik tzv. kleneb nad výsypným otvorem. Jedním z úkolů mechaniky sypkých hmot je studium chování sypkých hmot v definované geometrii. Při návrhu průmyslového zásobníku tak, aby se netvořily klenby, je nutné využít vztahů popisující rychlostní a napjatostní pole sypkých hmot v kónické nádobě.

Podstatou klenby je, že přenáší vlastní tíhu do stěn a žádnou sílu do spodních vrstev. V případě sypkých kohézních materiálů, jejichž zrnitost a úhel vnitřního tření dosahují vyšších hodnot, vznikají pevnější klenby a může nastat zamezení toku sypké hmoty nad výsypným otvorem. Tomu lze předejít dimenzováním dostatečně velkého otvoru a většího úhlu mezi vertikálou a stěnou výsypky [1].



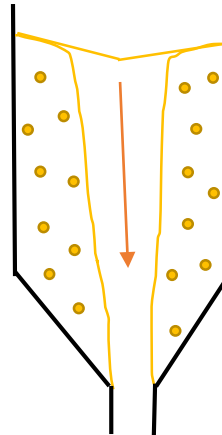
Obr. 1 Schéma kónického zásobníku

Se zamezením toku materiálu také souvisí tzv. „mrtvé zóny“. Ty vznikají při jádrovém toku, kdy je materiál vně jádra nehybný. Nevýhodou jádrového toku je, že materiál, který je do zásobníku nasypán jako první, vytéká ze zásobníku jako





poslední. Pokud je vyprazdňování příliš pomalé nebo se materiál nestihne vypustit do konce provozu, dochází ke zhutnění materiálu a může dojít k postupnému rozrůstání „mrtvé zóny“. To způsobí snížení nebo dokonce zamezení toku sypké hmoty [1].



Obr. 2 Jádrový tok

Řešení toku sypkého materiálu je závažným problémem, který se dotýká jak ekonomického tak bezpečnostního odvětví.

Zamezí-li se tok sypkého materiálu v průmyslovém zásobníku při vzniku klenby nebo postupným narůstáním mrtvé zóny, je nutné jej obnovit. Toho lze docílit různými vibračními přístroji, které odstraní zhutnělý materiál od stěn. Tento způsob však představuje riziko. Frekvence budící síly vibračního přístroje způsobí rezonanci u průmyslového zásobníku nebo jeho komponent. Proto se většinou obnovuje tok manuálně. Pracovníci, kteří odstraňují klenbu musí dodržovat striktně daná pravidla bezpečnosti, neboť může dojít k utržení celé klenby materiálu, což by mohlo vést ke smrtelným úrazům. Při odstraňování zhutnělého materiálu naopak hrozí nebezpečí propadnutí do materiálu a díky sypkým vlastnostem i k uvíznutí. To je nebezpečné především proto, že materiál je v mnoha případech toxický.

Z hlediska ekonomického může odstávka kvůli zamezení toku materiálu znamenat vysokou finanční ztrátu. Při obvyklých rozměrech průmyslových zásobníků může být samotné obnovování toku materiálu záležitostí i několika dní. Finanční ztráty způsobené odstávkou, výdaje spojené s obnovou toku a riziko, které může hrozit pracovníkům při čištění, jsou natolik závažné, že problematice toku se věnovala značná pozornost [1].



V této bakalářské práci bude snahou provést rekonstrukci vztahů dle [2] pro řešení toku sypkého materiálu v průmyslovém zásobníku a jeho dimenzování.

## Sestavení základních vztahů mechaniky kontinua

V následujícím textu jsou uvedeny základní vztahy potřebné pro odvození matematického modelu, umožňující vyjádřit rychlostní a napjatostní pole sypkých hmot v průmyslovém zásobníku.

### Rovnice kontinuity

Diferenciální tvar rovnice kontinuity v obecném tvaru [3]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0. \quad (1)$$

Za předpokladů, že

- Sypký materiál je nestlačitelný  
 $\rho = \text{konst.}$
- Objemový poměr celkové směsi je konstantní

$$e = \frac{V_{\text{vzduch}} + V_{\text{voda}}}{V_{\text{sypký materiál}}} = \text{konstantní},$$

se rovnice kontinuity výrazně zjednoduší. Pro objasnění druhé podmínky je třeba uvažovat konstantní koncentraci vzduchových mezer v sypkém materiálu. Sypký materiál má určitou vlhkost. Tato podmínka však neuvažuje proces vypařování.

Z toho vyplývá, že celková hustota sypkého materiálu se s časem nemění  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ .

Rovnici kontinuity je dle předpokladů upravena na

$$\rho \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad / \rho. \quad (2)$$



Výsledná rovnice kontinuity se rovná

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0. \quad (3)$$

Transformací (3) do cylindrických souřadnicích má rovnice kontinuity tvar

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_x) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (u_y) + \frac{\partial}{\partial z} (u_z) = 0. \quad (4)$$

Zavedením substituce  $u_x = u(r)$ ,  $u_y = v(\theta)$ ,  $u_z = 0$ ,  $\varphi = \theta$ , je získána výsledná rovnice kontinuity v diferenciálním tvaru [4], ze které je odvozen matematický model pro rychlostní pole v kónické nádobě (Průmyslovém zásobníku)

$$\frac{\partial u}{\partial r} + 2 \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{v}{r} \cot \theta = 0. \quad (5)$$

### Pohybové rovnice

Při řešení silových účinků v kónické nádobě se vychází z pohybové rovnice dynamické rovnováhy v diferenciálním tvaru [5]

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -p \nabla + \nabla \vec{\tau} + \rho \vec{f}. \quad (6)$$

Vztah (6) je rozepsána do dvou složkových rovnic užitého souřadného systému.

- 1) V radiálním směru je složková pohybová rovnice rovna



$$\begin{aligned} & \rho \left[ \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi^2}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right] \\ & = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\tau_{r\varphi}) - \frac{\tau_{\varphi\varphi}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \\ & + \rho g \cos \theta. \end{aligned} \quad (7)$$

Za předpokladu, že

- Rychlost proudění je závislá na poloze a je ustálená v čase

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} = 0$$

- Ve směru  $z$  je rychlost proudění nulová

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0,$$

lze (7) dále upravit na

$$\begin{aligned} & \rho \left[ u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi^2}{r} \right] \\ & = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\tau_{r\varphi}) - \frac{\tau_{\varphi\varphi}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \\ & + \rho g \cos \theta. \end{aligned} \quad (8)$$

Zavedením substitučních vztahů  $u_r = u(r)$ ,  $u_\varphi = v(\theta)$ ,  $u_z = 0$ ,  $\varphi = \theta$ ,  $\tau = \sigma$ ,

lze přeformulovat rovnici (8) na

$$\begin{aligned} & \rho \left[ u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} \right] \\ & = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\sigma_{r\varphi}) - \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} \\ & + \rho g \cos \theta. \end{aligned} \quad (9)$$

Jelikož je uvažováno tlakové namáhání za kladné, je rovnice upravena a tím je získána výsledná pohybová rovnice v diferenciálním tvaru ve sférických souřadnicích v radiálním směru [6], ze které odvodím matematický model pro napjatostní pole v kónické nádobě (Průmyslovém zásobníku). Výsledná rovnice má tvar



$$\begin{aligned} -\rho \left[ u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} \right] \\ = \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} [2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_\alpha + \sigma_{r\theta} \cot \theta] + \rho g \cos \theta. \end{aligned} \quad (10)$$

2) V tangenciálním směru je pohybová rovnice rovna

$$\begin{aligned} \rho \left[ \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\varphi u_r}{r} + u_z \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \right] \\ = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\varphi}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\tau_{\varphi\varphi}) + \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} \\ + \rho g \sin \theta. \end{aligned} \quad (11)$$

Za předpokladů, že

- Rychlost proudění je závislá pouze na poloze a je ustálená v čase

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} = 0$$

- Ve směru  $z$  je rychlost proudění nulová

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0,$$

Lze (11) dále upravit na

$$\begin{aligned} \rho \left[ u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\varphi u_r}{r} \right] \\ = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\varphi}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\tau_{\varphi\varphi}) + \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} \\ + \rho g \sin \theta. \end{aligned} \quad (12)$$

Zavedením substitučních vztahů  $u_r = u(r)$ ,  $u_\varphi = v(\theta)$ ,  $u_z = 0$ ,  $\varphi = \theta$ ,  $\tau = \sigma$ ,

lze (12) přeformulovat na

$$\begin{aligned} \rho \left[ u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} \right] \\ = -r \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sigma_{\theta\theta}) + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \rho g \sin \theta. \end{aligned} \quad (13)$$



Jelikož je tlakové namáhání uvažováno za kladné, je rovnice upravena a tím je získána výsledná pohybová rovnice v diferenciálním tvaru ve sférických souřadnicích v tangenciálním směru, ze které je odvozen matematický model pro napjatostní a rychlostní pole v kónické nádobě (Průmyslovém zásobníku) [7].

$$\begin{aligned} -\rho \left[ u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} \right] & \quad (14) \\ & = \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} [(\sigma_{\theta} - \sigma_{\alpha}) \cotg \theta + 3\sigma_{r\theta}] - \rho g \sin \theta. \end{aligned}$$



## Sypké hmoty

Sypká hmota je tvořena částicemi různého tvaru a velikosti. Svými specifickými fyzikálními vlastnostmi nelze jednoznačně sypkou hmotu zařadit mezi tekutiny nebo pevné látky. Podobně jako tekutiny dokáže vyplnit libovolně tvarovanou nádobu. Na rozdíl od tekutin existuje v sypkých hmotách smykové napětí i za klidu, což se například projevuje kuželovitým tvarem volné plochy. Pro popis vlastností sypkých hmot existuje velké množství parametrů. Do matematického modelu se však zavedou jen ty, na nichž nejvíce závisí chování v průmyslovém zásobníku. V inženýrské praxi jsou důležité tyto parametry materiálu při popisu sypkých hmot:

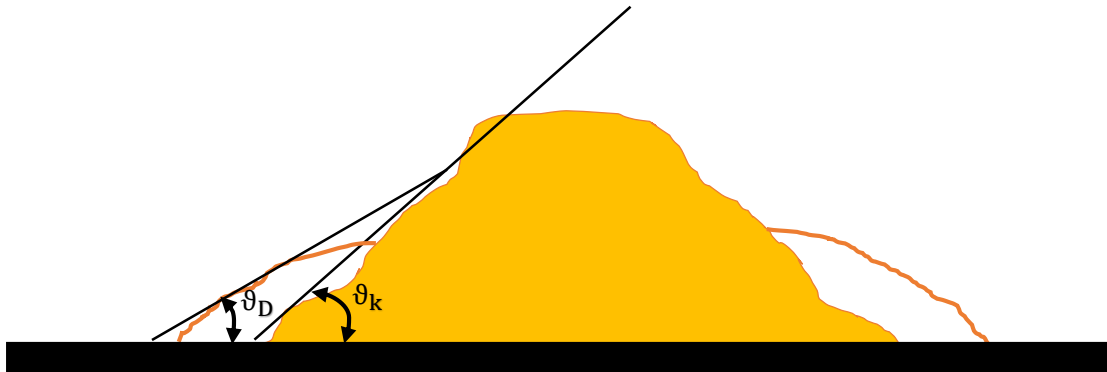
- Zrnitost
- Vlhkost
- Měrná, objemová sypká hmotnost
- Sypný úhel
- Úhel vnitřního tření
- Úhel stěnového tření
- Soudržné napětí [8].

V této bakalářské práci se bude počítat s matematickým modelem, který uvažuje úhel stěnového tření, vyjadřující třecí vlastnosti stěn zásobníku a dále úhel vnitřního tření, charakterizující sypký materiál.

### Sypný úhel $\vartheta$

Statický sypný úhel  $\vartheta_s$  je úhel, který svírá tečna svahu sypkého materiálu k rovině podložky, na které je sypký materiál nasypán. Dále existuje dynamický sypný úhel  $\vartheta_D$ , který lze změřit, necháme-li podložku chvíli vibrovat. Úhel tečny svahu k podložce se zmenší, takže  $\vartheta_s > \vartheta_D$ .

Měření hodnot se provádí experimentální metodou. Sypký materiál se nasype do válcové nádoby a postupným zvedáním nádoby se vytváří svah, ze kterého se odečte statický a dynamický sypný úhel [8].



Obr. 3 Sypný úhel klidový a dynamický

### Úhel vnitřního tření $\varphi$

Úhel vnitřního tření uvažuje tření mezi jednotlivými zrny materiálu. Jeho hodnota odpovídá směrnici tečny ke křivce, která vyjadřuje závislost mezi smykovým a normálovým napětím při prokluzu částic materiálu při pohybu po podložce. Měření úhlu vnitřního tření se provádí na smykovém přístroji (Jenikeho smykový přístroj) a rotačním přístroji (Shultzeho rotační přístroj).

### Úhel stěnového tření $\delta$

Při styku sypkého materiálu se stěnami průmyslového zásobníku vzniká tření. Parametr popisující velikost tohoto tření se nazývá úhel stěnového tření a je velmi významný při navrhování průmyslových zásobníků. Měření úhlu stěnového tření lze provést na stejných zařízeních jako při měření úhlu vnitřního tření. Velikost úhlu stěnového tření se dá významně ovlivnit:

- Materiálem zásobníku.  
Čím je drsnost stěn zásobníku menší, tím je úhel stěnového tření nižší.
- Teplotou  
Jak teplota sypkého materiálu, tak zásobníku mění úhel stěnového tření
- Vlhkostí
- Korozí





Je-li materiál zásobníku vyroben z uhlíkové oceli, může korodovat a tak vytvořit plochu s větším koeficientem tření.

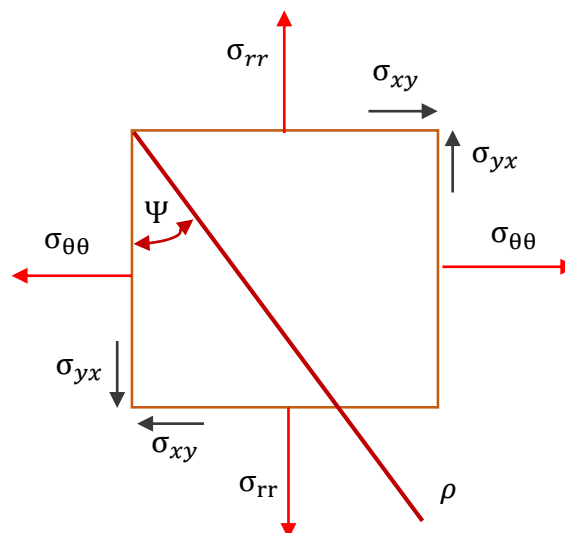
- Únava zásobníku abrazí

Při tomto typu únavy se zvětší drsnost povrchu zásobníku, což povede ke zvětšení tření mezi sypkým materiálem a zásobníkem [8].

## Matematický model popisující napjatostní a rychlostní pole sypkých hmot v kónické nádobě

### Napjatostní pole

Pro analytické řešení napjatosti v kónické nádobě použijí odvozené vztahy [9], které vyjadřují složky napjatosti na základě průměrného napětí a úhlu natočení řezu  $\Psi$  v diferenciálním segmentu. Úhel natočení řezu je takový úhel, který stanovuje polohu hlavních rovin. Úhel natočení řezu je odvozen z Mohrovy kružnice [10].



Obr. 4 Úhel natočení řezu pro obecnou rovinnou napjatost

Odvozené vztahy dle [9] lze rozepsat:

Napětí v radiálním směru:

$$\sigma_r = \sigma(1 + \sin\varphi \cos 2\Psi)$$



Napětí ve směru natočení:

$$\sigma_{\theta} = \sigma(1 - \sin\varphi \cos 2\Psi)$$

Smykové napětí

$$\sigma_{r\theta} = \sigma(\sin\varphi \cos 2\Psi) \quad (15)$$

kde  $\sigma$  je průměrné napětí  $\varphi$  je úhel vnitřního tření a  $\Psi$  je úhel natočení řezu.

Jelikož je tok sypkého materiálu osově souměrný, je napětí ve směru kolmém na osu zásobníku hlavním napětím. Vzhledem k existenci dvou hlavních napětí a to většího a menšího hlavního napětí  $\sigma_1$  a  $\sigma_2$ , budeme dále počítat pouze s větším hlavním napětím  $\sigma_1$ . To je mimo jiné ve shodě s Haar-Karmánovou hypotézou, že v osově symetrickém proudění je obvodové napětí  $\sigma_{\omega}$  rovno největšímu napětí [11] a lze tedy psát že:

Hlavní (větší) napětí

$$\sigma_{\omega} = \sigma_1 = \sigma_{\alpha} = \sigma(1 + \sin\varphi). \quad (16)$$

Pro popis pole napjatosti je nutné nalézt 2 neznámé. Úhel vnitřního tření a úhel stěnového tření se odečte z tabulek pro daný materiál, a nebo jej vypočteme ze vztahů, které byly odvozeny na základě experimentů. Neznámé jsou  $\sigma$  průměrné napětí a  $\Psi$  úhel natočení řezu.

### $\Psi$ úhel natočení řezu

Použitím rozvoje v řadu se získá přibližné řešení úhlu natočení řezu.

Pro přibližné řešení se bude uvažovat rozvoj do prvního řádu. Tím se zároveň sníží počet neznámých konstant na jednu a lze psát, že:

$$\Psi = \frac{\pi}{2} + \gamma_1 \left( \frac{\theta}{\theta_{\omega}} \right). \quad (17)$$

Z odvozené rovnice kontinuity (5) je získán vztah [12] mezi úhlem natočení řezu na stěně, úhlem stěnového tření a úhlem vnitřního tření. Tento vztah má tvar

$$\sin\varphi \sin 2\Psi_{\omega} = -\text{tg}\delta(1 - \sin\varphi \sin 2\Psi_{\omega}). \quad (18)$$

Postup výpočtu  $\Psi_{\omega}$  je v příloze. Úhel natočení řezu na stěně je tedy dán rovnicí



$$\Psi_{\omega} = \frac{1}{2} \left[ \arccos \left( -\frac{\operatorname{tg} \delta}{\sqrt{(1 - \operatorname{tg} \delta) \sin \varphi}} \right) + \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\operatorname{tg} \delta} \right) \right]. \quad (19)$$

Přibližné řešení úhlu natočení řezu na stěně zásobníku se rovná

$$\Psi(\theta_{\omega}) = \Psi_{\omega} = \frac{\pi}{2} + \gamma_1. \quad (20)$$

Z toho vyplývá konstanta

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} \left[ \arccos \left( -\frac{\operatorname{tg} \delta}{\sqrt{(1 - \operatorname{tg}^2 \delta) \sin \varphi}} \right) + \operatorname{arctg} \left( -\frac{1}{\operatorname{tg} \delta} \right) \right] - \frac{\pi}{2}. \quad (21)$$

Z této konstanty také vyplývá skutečnost, že hodnoty vnitřního tření a úhlu stěnového tření nemohou být libovolné, ale jsou na sobě závislé. Existují vztahy, z kterých lze dopočítat jeden ze dvou úhlu při znalosti druhého. V některých případech, je lepší získat hodnoty úhlů z experimentálního měření.

Ze vztahů (17,21) je získán kompletní vztah pro přibližné řešení úhlu natočení řezu

$$\Psi = \frac{\pi}{2} + \gamma_1 \left( \frac{\theta}{\theta_{\omega}} \right) = f(\theta). \quad (22)$$

### $\sigma$ průměrné napětí

Výchozí rovnice pro řešení průměrného napětí jsou odvozeny z pohybových rovnic (10,14), rovnice kontinuity (5) a podmínky izotropie, která vychází z Mohr-Coulombovi teorie porušení a má tvar [13]

$$\frac{(\sigma_r - \sigma_{\theta})}{\sigma_{r\theta}} = \frac{\left( \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{u}{r} \right)}{\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)}. \quad (23)$$

Řešení bude obdobné jako v předchozím případě. Opět je použit rozvoj v řadu

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_2 \left( \frac{\theta}{\theta_{\omega}} \right)^2. \quad (24)$$



Konstanty  $\sigma_0$  a  $\sigma_2$  lze odvodit z rovnic [14]. Rovnice, ze které je odvozena konstanta  $\sigma_0$  má tvar

$$\frac{\sigma_0}{\rho g r_1} = \frac{1}{(\omega - 1)(1 - \sin\varphi)} \left(\frac{r}{r_1}\right) - \frac{2F}{(\omega + 4)(1 - \sin\varphi)} \left(\frac{r}{r_1}\right)^{-4} + A \left(\frac{r}{r_1}\right)^\omega. \quad (25)$$

Konstanty  $F$  a  $A$  jsou důsledek integrace vztahů.  $F$  je zároveň tzv. modifikované Froudeho číslo.

Pro zjednodušení rovnic je zavedena substituce

$$\omega = \frac{4\sin\varphi}{1 - \sin\varphi} \left(1 - \frac{\gamma_\omega}{\theta_\omega}\right). \quad (26)$$

Je zřejmé, že pro získání konstanty  $\sigma_0$  je nutno nejprve získat konstanty  $F$  a  $A$ . Ty jsou získány z okrajových podmínek.

Za předpokladu že na výstupu ze zásobníku  $r = r_1$  je  $\sigma_0 = 0$ , a na volném povrchu  $r = r_2$  je  $\sigma_0 = a$  ("a" je počáteční napětí na povrchu) jsou získány dvě rovnice o dvou neznámých, ze kterých jsou spočítány konstanty  $F$  a  $A$ .

Za použití stejného předpokladu je konstanta  $\sigma_2$  získána z výchozí rovnice [15]

$$\frac{\sigma_2}{\rho g r_1} = \left[ \frac{\gamma_\omega(4\theta_\omega + 3\gamma_\omega)}{(\omega - 1)(1 - \sin^2\varphi)} + \frac{\theta_\omega^2}{2(1 + \sin\varphi)} \right] \left(\frac{r}{r_1}\right) - \frac{2\gamma_\omega(\theta_\omega - 3\gamma_\omega)F\sin\varphi}{(\omega + 4)(1 - \sin^2\varphi)} \left(\frac{r}{r_1}\right)^{-4} + \frac{A\gamma_\omega(\omega\theta_\omega + 3\theta_\omega + 3\gamma_\omega)\sin\varphi}{1 + \sin\varphi} \left(\frac{r}{r_1}\right)^\omega. \quad (27)$$

Přibližné řešení pro průměrné napětí má pak tvar

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_2 \left(\frac{\theta}{\theta_\omega}\right)^2, \quad (28)$$

který je dosazen do vztahů odvozených podle Sokolovskije (15,16)

$$\sigma_r = \sigma(1 + \sin\varphi \cos 2\Psi)$$



$$\sigma_{\theta} = \sigma(1 - \sin\varphi \cos 2\Psi)$$

$$\sigma_{r\theta} = \sigma(\sin\varphi \cos 2\Psi)$$

$$\sigma_{\alpha} = \sigma(1 + \sin\varphi).$$

Parametry, které ovlivňují průměrné napětí  $\sigma$  jsou  $\sigma_0, \theta, \theta_{\omega}, \varphi, \rho, g, r, r_1, r_2$ . Je třeba si uvědomit, že úhel stěnového tření  $\delta$  neovlivňuje průměrné napětí  $\sigma$ . Je obsažen až v úhlu natočení v řezu  $\Psi$ .

$$\Psi = f(\theta), \sigma = f(\theta, r).$$

## Rychlostní pole

Pro přibližné řešení je použit rozvoj v řadu

$$u = u_0 + u_2 \left( \frac{\theta}{\theta_{\omega}} \right)^2, \quad (29)$$

kde  $u(r, \theta)$  je rychlost v libovolném místě nádoby. Nejprve je nutné nalézt konstanty  $u_0, u_2$ , které vycházejí z Froudeho čísla [16]. Froudeho číslo je používáno pro zkoumání pohybu prostředí s vyšší hustotou zatížené silovým polem. V tomto případě gravitačním polem

$$F = \frac{v^2}{gl}. \quad (30)$$

Je-li Froudeho číslo aplikováno na tento případ, zavedena substituce  $v = U$  a za charakteristický rozměr dosazeno  $r_1 = l$ , pak lze psát, že

$$F = \frac{U^2}{gr_1}. \quad (31)$$

Z tohoto vztahu je výjádřena rychlost sypkého materiálu v ose konické nádoby

$$U = \sqrt{Fgr_1}. \quad (32)$$



Je zřejmé, že osou kónické nádoby proudí sypký materiál největší rychlostí

$$u_0 = U \left( \frac{r_1}{r} \right)^2.$$

Je nutné upravit vztah tak, aby odrážel skutečné chování materiálu v celém zásobníku a k tomu je třeba vzít v úvahu fyzikální vlastnosti sypké hmoty, polohu v zásobníku, úhel mezi vertikálou (osou) a stěnou zásobníku, rozměry zásobníku a předpoklad nulové rychlosti na stěnách.

Froudeho číslo, které je získáno z výpočtu napjatostního pole zahrnuje vše kromě předpokladu nulové rychlosti na stěnách a gravitačního zrychlení. Vlastní tíha je však zahrnuta ve Froudeho vztahu (32), ze kterého je vyjádřena rychlost  $U$ .

Předpoklad nulové rychlosti je ošetřen v konstantě  $u_2$  [17]

$$u_2 = -3\gamma_\omega \theta_\omega U \left( \frac{r_1}{r} \right)^2, \quad (33)$$

kde  $\gamma_\omega$  je konstanta, která zajistí nulovou rychlost na stěně.

Do perturbační rovnice je dosazeno  $u_2$  a  $u_0$ , jejíž tvar je

$$u = u_0 + u_2 \left( \frac{\theta}{\theta_\omega} \right)^2.$$

Po dosazení je získána rovnice

$$u = U \left( \frac{r_1}{r} \right)^2 - 3\gamma_\omega \theta_\omega U \left( \frac{r_1}{r} \right)^2 \left( \frac{\theta}{\theta_\omega} \right)^2. \quad (34)$$

Je zřejmé, že největší rychlost je v ose nádoby, tedy při  $\theta = 0$ .

Pro získání nulové rychlosti na stěně je dosazena okrajová podmínka:

při  $\theta = \theta_\omega$  je  $u = 0$

$$u(\theta_\omega, r) = U \left( \frac{r_1}{r} \right)^2 - 3\gamma_\omega \theta_\omega U \left( \frac{r_1}{r} \right)^2 \left( \frac{\theta_\omega}{\theta_\omega} \right)^2 = 0. \quad (35)$$

Z toho lze vyjádřit potřebná konstanta

$$\gamma_\omega = \frac{1}{3\theta_\omega}, \quad (36)$$



a tedy i kompletní rovnice pro přibližné řešení rychlostního pole v průmyslovém zásobníku. Tato rovnice popisuje rychlost proudění sypké hmoty v každém místě uvnitř zásobníku. Rovnice je však sestavená tak, že nemůže dosahovat záporných hodnot a nemůže tak identifikovat, při kterých hodnotách parametrů se proudění zastaví.

Je tedy nutná nová rovnice, která bude popisovat průměrnou rychlost na výtoku [17]. Její tvar je

$$u_{\text{průměrná}} = \frac{\int_0^{\theta_\omega} u_{r=r_1} \sin\theta d\theta}{1 - \cos\theta_\omega}. \quad (37)$$

Po integraci má rovnice tvar

$$u_{\text{průměrná}} = \frac{U + 2 + \cos\theta_\omega(\theta_\omega^2 - U - 2) - 2\theta_\omega \sin\theta_\omega}{1 - \cos\theta_\omega}. \quad (38)$$

Průměrná rychlost na výtoku vychází přibližně stejně jako hodnoty z rovnice pro celé rychlostní pole zásobníku v oblasti  $r_1$

$$u_{\text{průměrná}} \sim u(r_1).$$

Průměrná rychlost  $u_{\text{průměrná}}$  je použita v numerických výpočtech pro nalezení mezních parametrů výsypky, při kterých sypká hmota přestane téct. Případ, kdy  $u_{\text{průměrná}} < 0$  je považován za stav, kdy se sypká hmota kónickou nádobou nepohybuje. Z rovnice pro  $u_{\text{průměrná}}$  je zřejmé, že při dimenzování zásobníku podle uvedeného matematického modelu se bude dimenzovat především úhlem mezi vertikálou a stěnou výsypky  $\theta_\omega$ . Dále se bude dimenzovat s parametry, ze kterých plyne konstanta  $U$ . Těmi budou úhel vnitřního tření (tedy použitý materiál) a poloměr výpustního otvoru  $x$ , ze kterého je vyjádřeno  $r_1 = \frac{x}{\sin\theta_\omega}$ .



### Poznámky k matematickému modelu rychlostního a napjatostního pole

- Tento model vyžaduje tyto vstupní parametry
  - Úhel stěnového tření  $\delta$
  - Úhel vnitřního tření  $\varphi$
  - Rozměry zásobníku ( $\theta_\omega r_1 r_2$ )
  - Hustota sypkého materiálu
- Bude-li na volný povrch působit počáteční napětí, změní se rychlostní pole. Tato závislost platí pouze do určité hodnoty úhlu vnitřního tření  $\varphi$ .
- Numericky lze pomocí tohoto modelu dimenzovat mezní parametry zásobníku, ve kterém bude sypká hmota téct. Mezní parametry závisejí především na polovičním úhlu zásobníku  $\theta_\omega$ , poloměru otvoru výpustě a úhlu vnitřního tření  $\varphi$ .
- Při numerických výpočtech je vhodné zavést veličinu  $r_1$  parametricky, tzn., že se zvolí poloměr otvoru „x“ a na základě polovičního úhlu výsyvky  $\theta_\omega$  se vyjádří poloměr  $r_1$ .

$$r_1 = \frac{x}{\sin\theta_\omega}$$

- Jelikož je nádoba symetrická, řešení problému je pouze v jedné polovině průřezu osou nádoby.





## Aplikace matematického modelu a ověření výsledků s empirickými vztahy

Matematický model byl ověřen na skutečném zásobníku.

Geometrická konfigurace skutečného průmyslového zásobníku je získána z výkresu FPV-019-001.

Kde

$$r_1 = 0,0523 \text{ m, (poloměr otvoru } x = 3 \text{ cm)}$$

$$r_2 = 0,5 \text{ m}$$

$$h = 0,4 \text{ m}$$

$$\theta_\omega = 32,21^\circ.$$

Parametry pro sypný materiál (písek) mají hodnoty [18]

$$\delta = 21,5^\circ$$

$$\varphi = 31^\circ$$

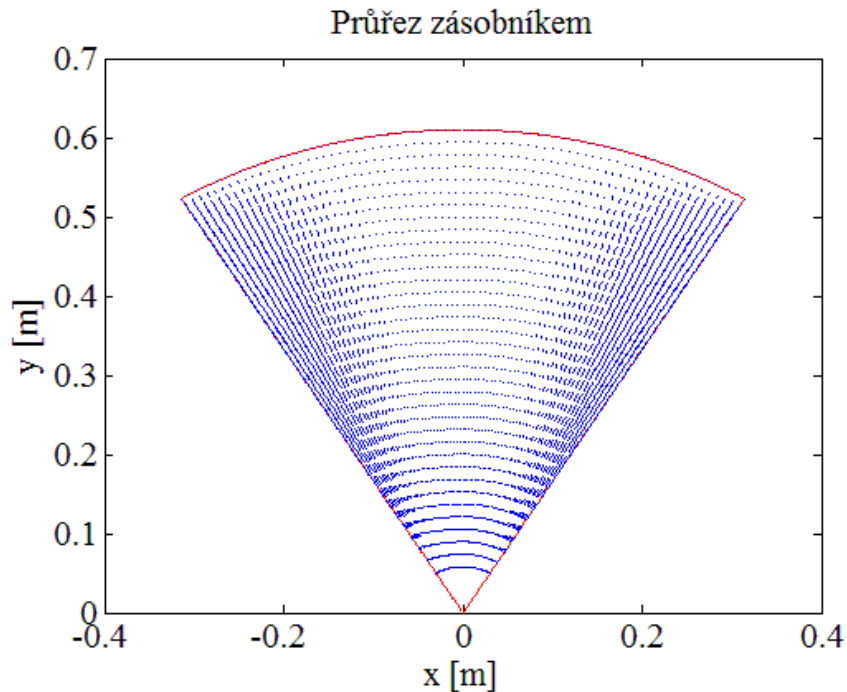
$$\rho = 1600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

Matematický model je navržen především pro řešení s volným povrchem. Přestože je tento model navržen i pro případné přidání počátečních podmínek na volném povrchu, bude se předpokládat, že zásobník je naplněn pouze do vzdálenosti  $r_2$ . Přibližné řešení pro tento problém by bylo počítání se vztahem pro normálové napětí způsobené tíhou sypkého materiálu ve válcové nádobě nad volným povrchem, tedy  $\sigma = \frac{\rho g D}{4f_w K}$ , kde  $D$  je průměr válcové nádoby,  $f_w$  je koeficient, který závisí na úhlu stěnového tření a  $K$  je konstanta, jejíž velikost je závislá na výšce válcové nádoby [1]. Výsledkem tohoto vztahu by byla pouze orientační hodnota napětí působícího na volný povrch a to z toho důvodu, že nejsou známy přesné hodnoty koeficientu  $f_w$ , který závisí na úhlu stěnového tření a konstanty  $K$ . Pro získání přesnějších výsledků se bude při aplikaci matematického modelu počítat s volným povrchem. Průřez skutečným průmyslovým zásobníkem bude shodný jako v *Obr. 1*.

Prvním výstupem matematického modelu je průřez průmyslovým zásobníkem, ve kterém hustota čar vyjadřuje poměr velikosti průměrného napětí



v daném místě k maximálnímu průměrnému napětí. Tento výstup názorně vyjadřuje rozložení napjatostního pole v průmyslovém zásobníku.

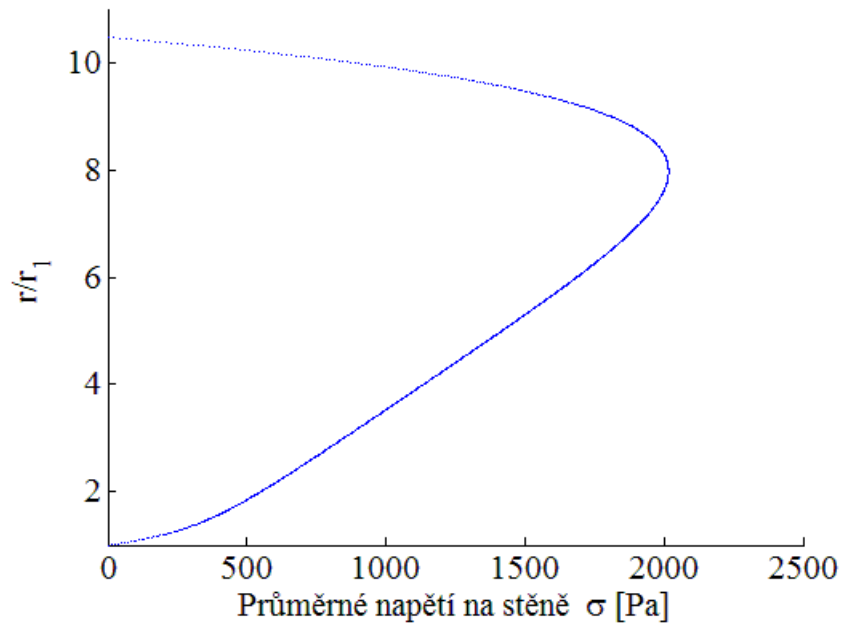


*Obr. 5 Napjatostní pole v průřezu zásobníku*

Dále je analyzováno lokální namáhání stěn v závislosti na poloze, která je vyjádřena jako poměr  $\frac{r}{r_1}$ . Tato závislost je experimentálně změřena a závislost, která je numericky spočítána z matematického modelu je v dobré shodě jak s experimentálními daty, tak s jinými matematickými modely [18].



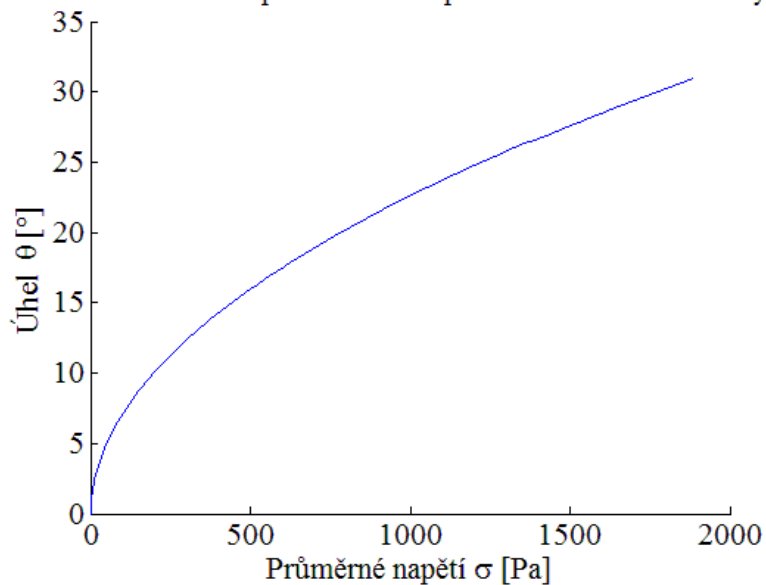
Závislost průměrného napětí  $\sigma$  na stěně zásobníku a polohy



Obr. 6 Namáhání stěn zásobníku

Na základě této závislosti je určeno místo maximálního namáhání na stěně, což přibližně odpovídá  $\frac{r}{r_1} = 8$ , takže  $r = 0,4$  m a pro tuto oblast je nalezen průběh napětí v závislosti na úhlu od vertikály (osy).

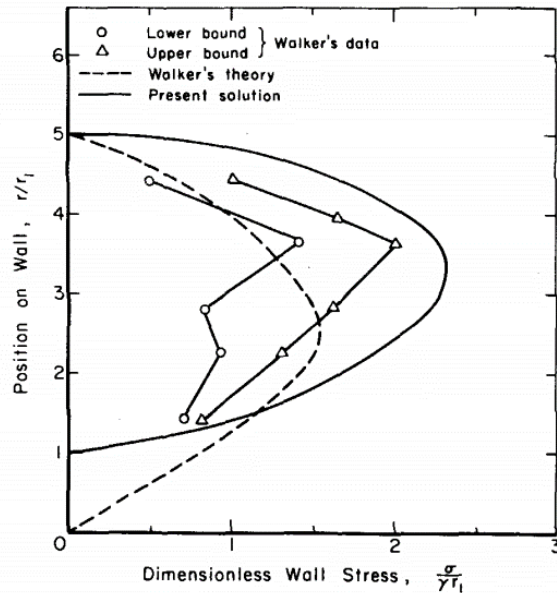
Závislost velikosti průměrného napětí  $\sigma$  na úhlu od vertikály  $\theta$



Obr. 7 Namáhání v průmyslovém zásobníku v závislosti na úhlu od vertikály a v oblasti  $r = 0,4$  m



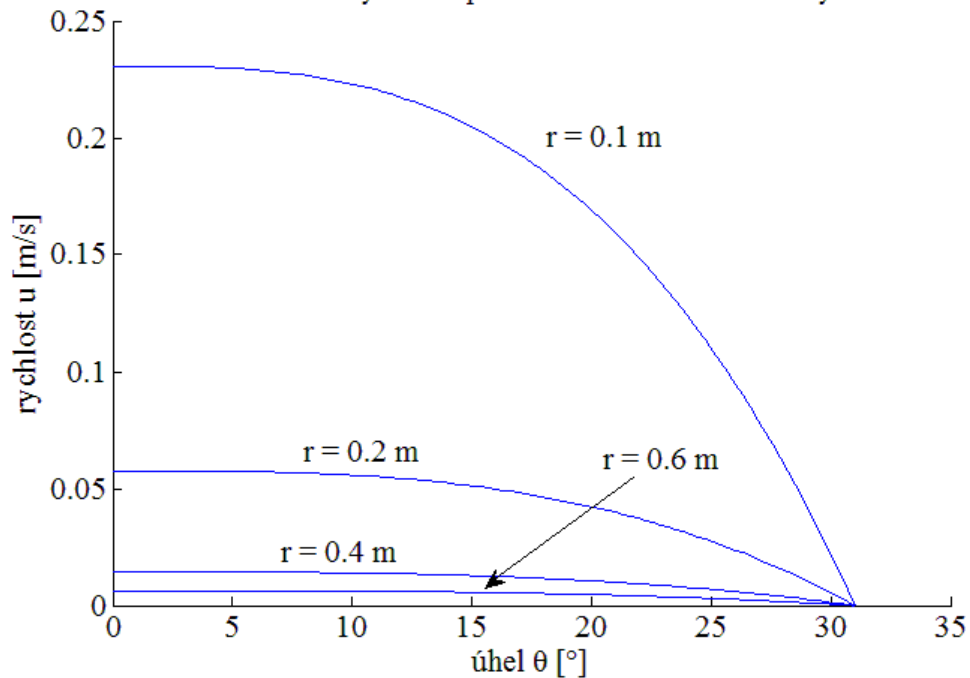
Matematický model z hlediska napjatostního pole dává výsledky, které jsou v dobré shodě s jinými matematickými modely a experimentálními měření [18].



Obr. 8 Namáhání na stěnách průmyslového zásobníku dle jiných matematických modelů.

Kromě okolí výpustě, kde materiál volně vytéká, dosahuje rychlostní pole v celém zásobníku přibližně stejných hodnot.

Závislost rychlosti proudění na úhlu od vertikály

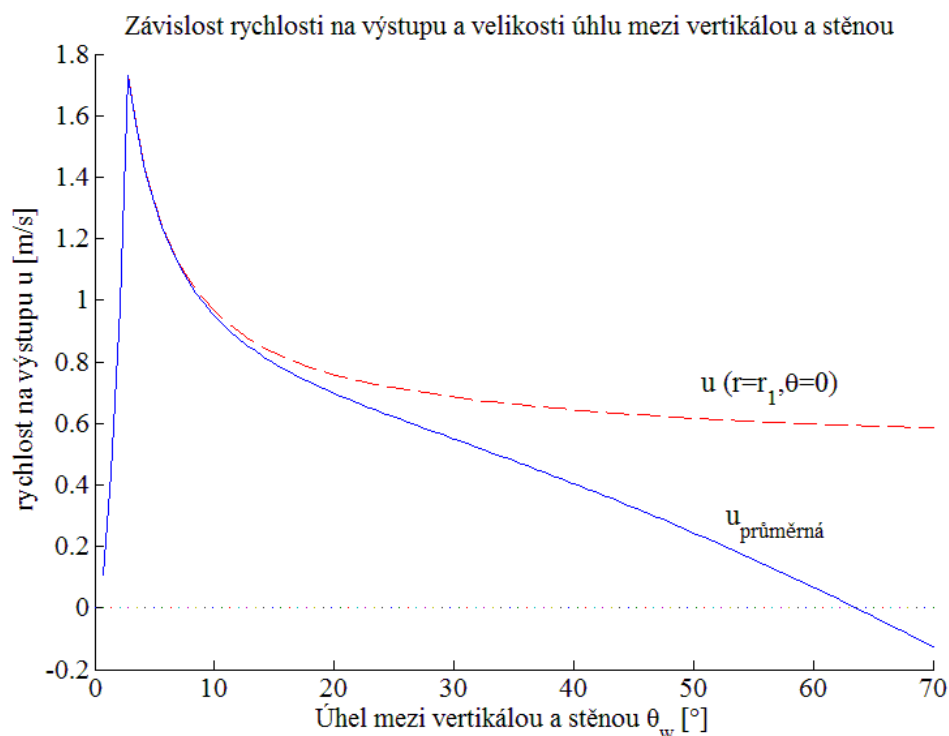


Obr. 9 Rychlostní pole v průmyslovém zásobníku v určitých oblastech



Z grafu je vidět, že rychlost proudění v oblasti volného povrchu ( $r = 0,61$  m) se blíží nule. Naopak čím blíže k výpusti ( $r = 0,058$  m), tím rychleji sypká hmota proudí. Největší rychlost proudění je dosahována při  $\theta = 0$ , tedy v ose zásobníku. Na stěnách zásobníku je rychlost nulová. Z fyzikálního hlediska model odpovídá skutečnému chování sypkých hmot v průmyslovém zásobníku.

Mnohem důležitější je však určit rychlost proudění na výstupu a definovat, při jakých mezních parametrech přestane sypká hmota téct. Jak již bylo zmíněno při sestavování modelu, existují dva vztahy, které určují rychlost u výpustě. Rychlost na výstupu lze získat ze vztahu, kterým je definováno celé rychlostní pole uvnitř zásobníku  $u(r = r_1, \theta = 0)$ . Nebo průměrnou rychlostí  $u_{\text{průměrná}}$  získanou předchozím vztahem, která může dosahovat záporných hodnot a tedy určit mezní parametry pro proudění sypké hmoty.

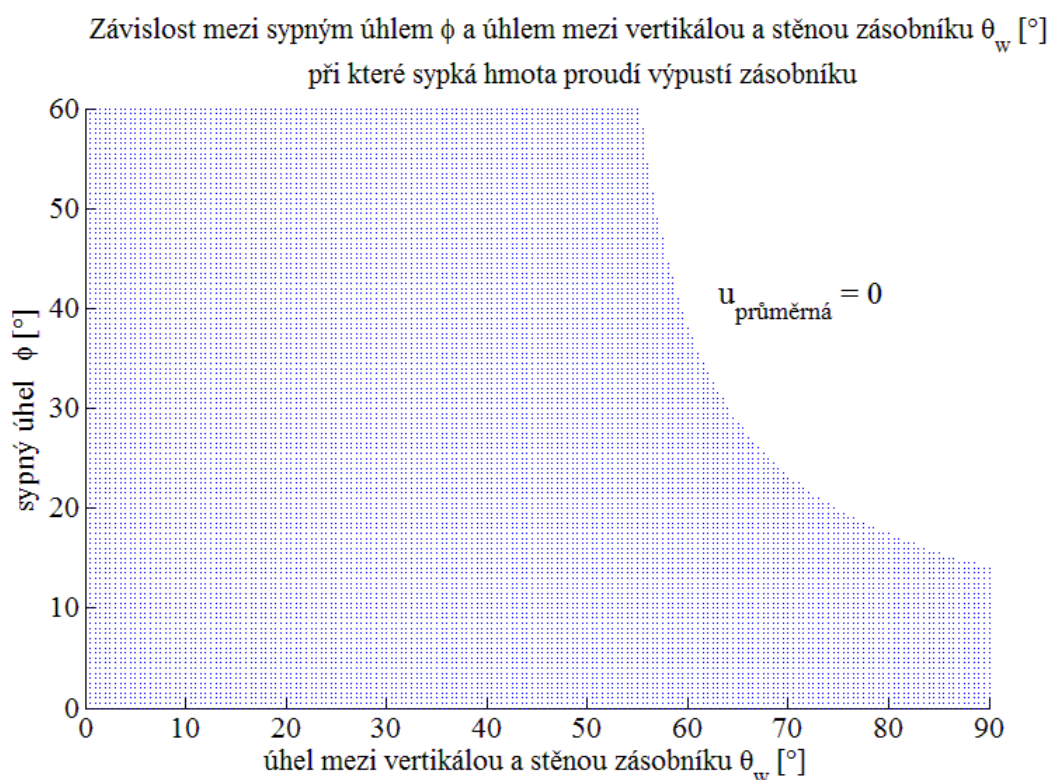


Obr. 10 Rychlost sypkých hmot na výstupu ze zásobníku podle dvou vztahů[35][38]

Z grafu je vidět, že u obou vztahů je jistá míra nejistoty, neboť v praxi se proudění zastaví přibližně v rozmezí úhlu mezi vertikálou a stěnou zásobníku mezi



35° - 45°. Na základě těchto výsledků byl matematický model testován pro různá nastavení a bylo zjištěno, že tento matematický model není v žádném případě navržen pro zjišťování mezních parametrů. Ukázalo se, že tření, jež je nejvýznamnější mezní parametr, má jen malý vliv v této závislosti. Na druhou stranu největší roli hraje poloměr otvoru výpustě, který bylo potřeba nastavit na hodnotu několika milimetrů, aby bylo docíleno zastavení proudění na 40° úhlu mezi vertikálou a stěnou zásobníku.



Z matematického modelu byla získána inverzní závislost k závislosti na Obr.10 a to mezi úhlem vnitřního tření  $\phi$  a úhlem mezi vertikálou a stěnou zásobníku  $\theta_w$ , při kterém sypká hmota proudí. Je vidět, že tato závislost je diskutabilní, neboť i pro úhel  $\theta_w > \frac{\pi}{2}$  by sypká hmota proudila. Znalost této závislosti je však nejpodstatnější částí při dimenzování zásobníku. Z tohoto důvodu je v další kapitole navržené částečné řešení korekce matematického modelu. Tato korekce spočívá v tom, že se tato závislost experimentálně změří a zavede se do matematického modelu. Jelikož tření není jediným parametrem, na kterém závisí proudění sypké



hmoty, bylo by přesnější zavést do korekce více parametrů, toto však není součástí této bakalářské práce.



## Návrh teoretické korekce matematického modelu

Předpokládá se, že matematický model popisující rychlostní pole v průmyslovém zásobníku u výpustě je problematický, což vede k tomu, že není možné přesně definovat, kdy se proudění zastaví. Snahou bude nalézt řešení, které umožní korekci matematického modelu tak, aby odpovídalo co nejpřesněji skutečnému chování sypkých hmot. Parametr, kterým se bude korigovat matematický model je úhel vnitřního tření, a to i přesto, že s ním již model počítá.

### Způsob korekce

Součinitel korekce  $\xi_{\text{korekce}}$  je funkce, kterou je potřeba nalézt, a její nalezení spočívá v extrapolaci experimentálně změřených dat. Jedná se o závislost mezi korekčními parametry a úhlem mezi vertikálou a stěnou výsypky, pro stav, kdy sypký materiál přestane téct. V této bakalářské práci je součinitel korekce vztažen pouze na jeden parametr a to na úhel vnitřního tření.

Matematický model popisuje rychlost toku sypké hmoty u výpustě dvěma vztahy. První dokáže popsat rychlost proudění v každém místě průmyslového zásobníku, avšak hodnoty nedosahují záporných hodnot a nulových hodnot je dosahováno pouze na stěnách zásobníku. Druhý vztah je odvozen z prvního a vyjadřuje průměrnou rychlost proudění u výpustě. Druhý vztah je však považován za problematický a právě tento vztah se použije pro korekci.

Prvním krokem korekce je, určit od kterého úhlu mezi vertikálou a stěnou zásobníku  $\theta_{\omega}$  se první a druhý vztah začnou rozcházet. Jestliže  $u_1$  je rychlost z prvního vztahu a  $u_{\text{průměrná}}$  je průměrná rychlost u výpustě, pak  $Z = 1 - \frac{u_{\text{průměrná}}}{u_1}$  je velikost odchylky mezi oběma rychlostmi. Pokud je například  $Z = 10 \%$ , lze říct, že v tomto bodě již ani jeden vztah není věrohodný. Z grafu se odečte, při kterém úhlu  $\theta_Z$  je chyba 10 procent.





Výsledná rychlost proudění je získána vynásobením průměrné rychlosti  $u_{\text{průměrná}}$  s korekční funkcí, která bude mít tvar paraboly, a to z toho důvodu, že i samotná průměrná rychlost má tvar podobný parabole viz. *obr 10*.

Výsledný vztah pro rychlost má tvar

$$u_{\text{výsledná}} = u_{\text{průměrná}} K, \quad (39)$$

kde  $K$  je korekční funkce a je rovna

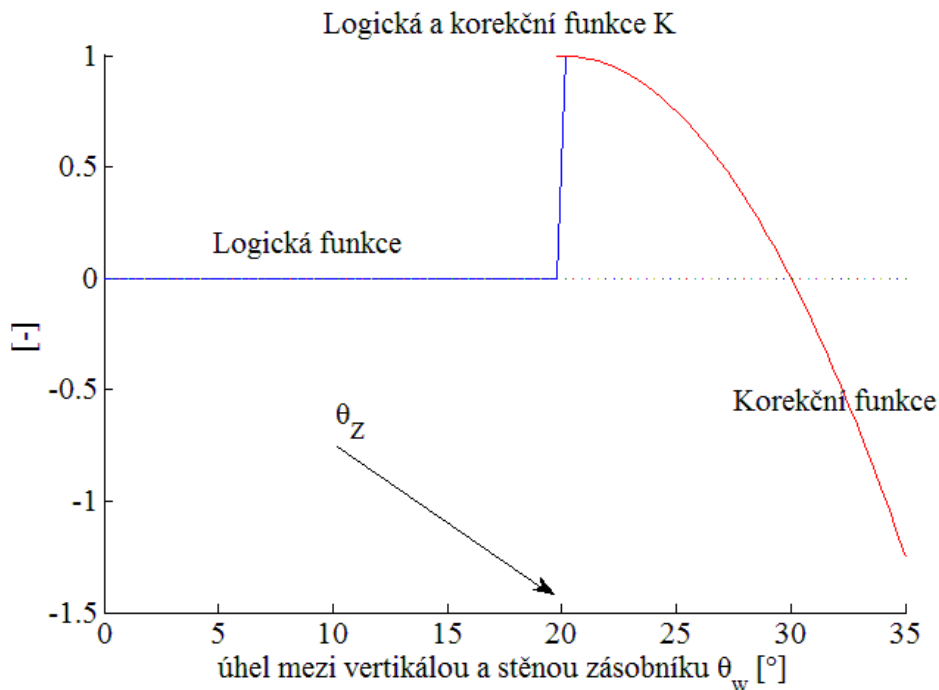
$$K = \left( -\frac{1}{\alpha} (\theta_{\omega} - \theta_z)^2 + 1 \right)^{\text{abs}([\beta])}. \quad (40)$$

Funkce  $K$  není nic jiného než konstantní funkce, která se od úhlu  $\theta_z$  transformuje na klesající parabolu. Strmost této paraboly bude určovat veličina  $-\frac{1}{\alpha}$ , která by uvažovala všechny korekční parametry. V tomto návrhu korekce je uvažován pouze jeden parametr, tření, a proto  $\alpha = \xi_{\text{korekce}}$

Funkce  $\beta = \left[ \sin \left( \frac{\theta_{\omega}}{\theta_z} \pi \right) \right]$  je logická funkce nabývající hodnot 1 a 0 pomocí funkce celá část. Je-li  $\beta = 0$  pak korekční funkce se rovná 1. Je-li  $\beta = 1$ , pak korekční funkce se rovná parabole



### Korekční funkce K a logická funkce $\beta$



Obr. 12 Princip korekční a logické funkce

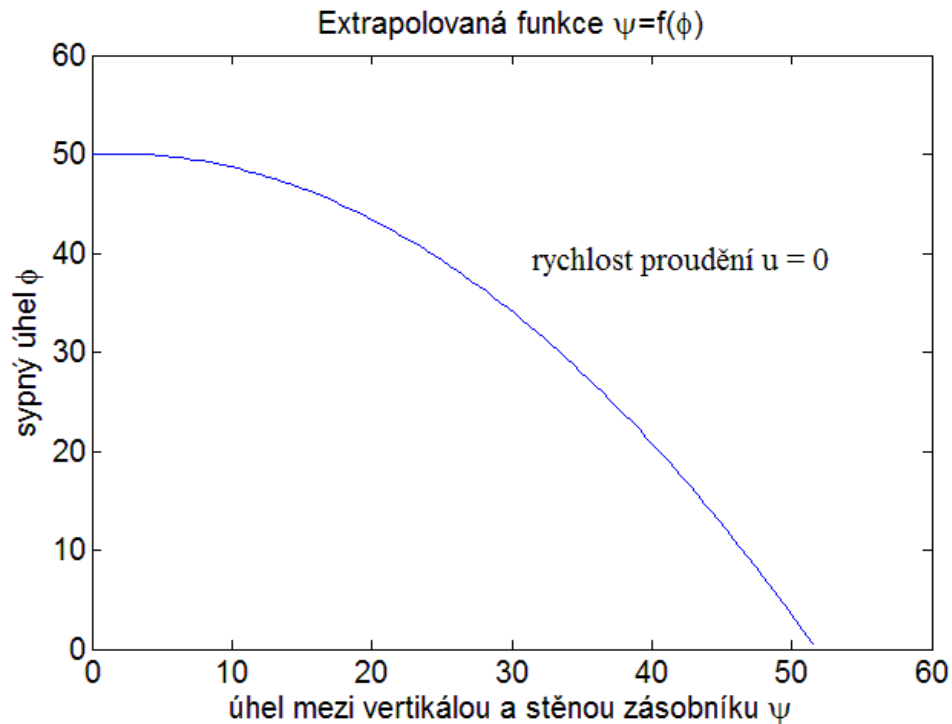
#### Experimentální data

Byl vytvořen pouze model korekce. Chybí už jen  $\xi_{\text{korekce}} = f(\varphi)$ . Z experimentálních dat je třeba určit závislost úhlu vnitřního tření  $\varphi$  pro hodnoty  $\theta_\omega$  při kterých se zastaví proudění v průmyslovém zásobníku. Z této závislosti je extrapolován vztah  $\theta_\omega = f(\varphi) = \psi$

Uvažujme, že z experimentálních dat byla získána tato funkce

(41)

$$\psi = f(\varphi) = -0,02\varphi^2 + 0,07\varphi + 50, \quad \text{při } u = 0$$



Obr. 13 Uvažovaná závislost ze které se získá korekční funkce

Tato funkce  $\psi$  je dosazena za  $\theta_\omega$  do vztahu výsledné rychlosti (39)

$u_{\text{výsledná}} = 0$ , tedy

$$u_{\text{výsledná}} = u_{\text{průměrná}} K = 0.$$

Po dosazení má vztah tvar

$$u_{\text{výsledná}} = u_{\text{průměrná}} \left( -\frac{1}{\alpha} (\psi - \theta_z)^2 + 1 \right)^{\text{abs}([\beta])} = 0 \quad (42)$$

Z této rovnice je vyjádřena funkce  $\alpha = (\psi - \theta_z)^2$ , která vyjadřuje strmost paraboly, a je známo, že  $\alpha = \xi_{\text{korekce}} = f(\varphi)$ .

Výsledný vztah korekce je pak

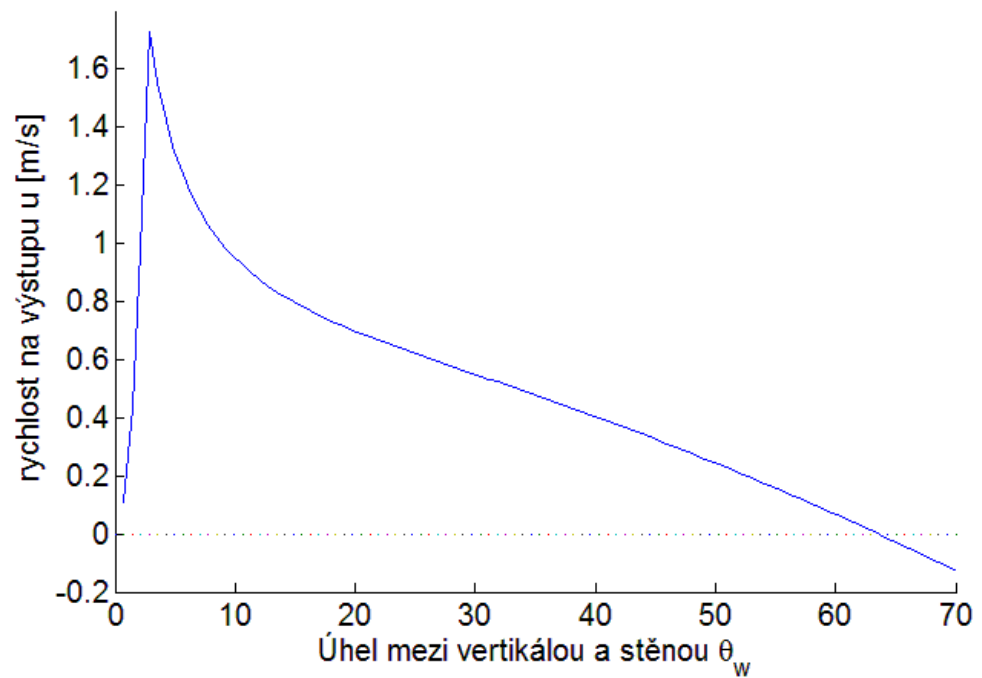
$$u_{\text{výsledná}} = u_{\text{průměrná}} \left( -\frac{1}{\xi_{\text{korekce}}} (\theta_\omega - \theta_z)^2 + 1 \right)^{\text{abs}([\sin(\frac{\theta_\omega}{\theta_z}\pi)])} \quad (43)$$

Nyní je korekční funkce aplikována na matematickém modelu skutečného průmyslovém zásobníku.

Nejprve při použití materiálu s úhlem vnitřního tření  $\varphi = 31^\circ$  bez korekční funkce.



### Závislost rychlosti na výstupu na velikosti úhlu mezi vertikálou a stěnou



Obr. 14 Rychlost na výstupu ze zásobníku bez korekce

Nyní bude použita korekce s uvažovanou extrapolovanou funkcí

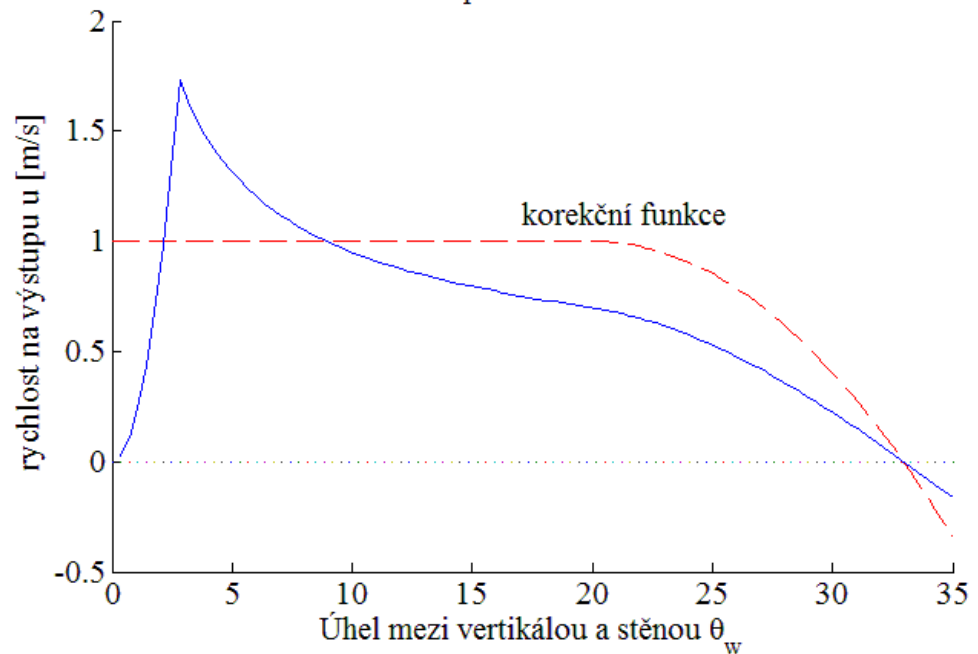
$$\psi = f(\varphi) = -0,02\varphi^2 + 0,07\varphi + 50, \quad \text{při } u = 0.$$

Znamená to tedy, že by se při úhlu vnitřního tření  $\varphi = 31^\circ$  mělo proudění zastavit, jestliže úhel mezi vertikálou a stěnou přesáhne

$$\psi = f(\varphi) = -0,02(31)^2 + 0,07(31) + 50 = \mathbf{32,9^\circ} \text{ při } u = 0.$$



Závislost rychlosti na výstupu na velikosti úhlu mezi vertikálou a stěnou po korekci



Obr. 15 Rychlost na výstupu ze zásobníku s korekcí

Z grafu je vidět, že proudění se zastavilo přesně podle extrapolované funkce (41).

$$\psi = f(\varphi) = -0,02\varphi^2 + 0,07\varphi + 50, \quad \text{při } u = 0.$$

Matematický model byl zkoumán při různých parametrech a ukázalo se, že rozměr  $r_2$  nemá téměř vliv na zastavení proudění. Naopak velký vliv má velikost otvoru, avšak až při nastavení extrémně malých hodnot. Proto by bylo vhodné se při volení dalšího korekčního parametru, který by korigoval matematický model, uchýlit k hledání souvislosti mezi poměrem velikosti granule sypkého materiálu a otvorem zásobníku. Zavedení takového parametru by mohl být součinitel poměru ploch  $\xi_{\text{poměr}}$ . Je to poměr mezi plochou otvoru  $S_{\text{otvor}} = \pi r_{\text{otvor}}^2$  a plochou granule, která je získána jednoduchým odvozením. Má-li koule objem  $V = \frac{4}{3}\pi r_{\text{koule}}^3$  a obsah  $S_{\text{koule}} = \pi r_{\text{koule}}^2$  je nutné nalézt takovou úpravu, aby byla z objemu získána plocha, tedy

$$S = \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{3}{4} V}$$



Pro průměrnou plochu granule je tedy odvozen vztah

$$S_{\text{granule}} = \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{3}{4} \tilde{V}_{\text{granule}}} \quad (44)$$

Součinitel poměru ploch je tedy roven  $\xi_{\text{poměr}} = \frac{S_{\text{granule}}}{S_{\text{otvor}}}$ . Obtížné je však zavedení součinitele poměru ploch do korekční funkce a nalézt odpovídající vztah, který by odpovídal skutečnému chování. Nalezení tohoto vztahu však vyžaduje ověření experimenty.



## Závěr

V úvodu této bakalářské byl vytyčen cíl rekonstruovat vztahy pro řešení toku sypkých hmot v průmyslovém zásobníku a jeho dimenzování dle [2]. Řešení mělo obsahovat výpočet napjatostního a rychlostního pole uvnitř zásobníku. Na základě několika podkladů se se podařilo rekonstruovat matematický model, který podal velmi reálné výsledky při zkoumání napjatosti, kterou způsobuje sypký materiál nejen na stěnách, ale v každém bodě průmyslového zásobníku. Tyto výsledky jsou v dobré shodě s jinými matematickými modely, které jsou zveřejněny v podkladech, ze kterých byl tento model rekonstruován [18]. Při programování v Matlabu se podařilo vytvořit model průmyslovým zásobníkem ve kterém lze zobrazit rozložení napjatostního a rychlostního pole v celém rozsahu.

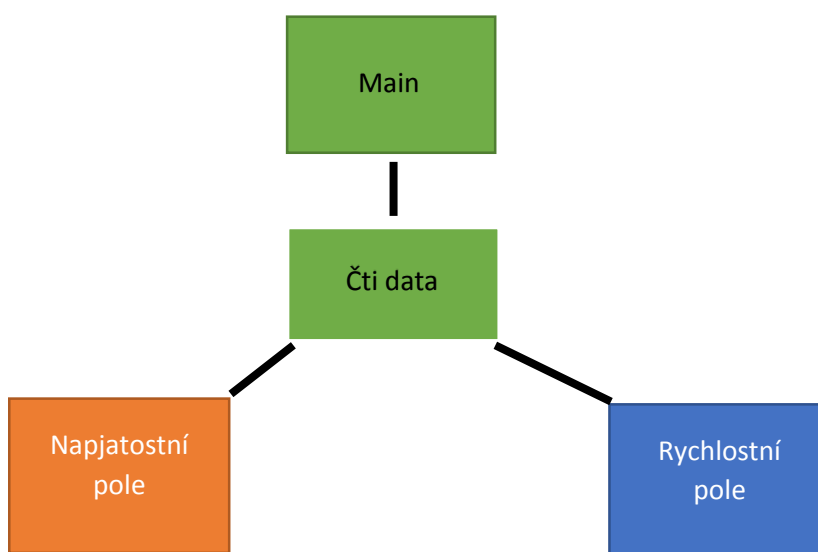
Matematický model dává reálné výsledky i při výpočtu rychlostního pole. Chování toku sypké hmoty uvnitř průmyslového zásobníku dle matematického modelu lze považovat za věrohodné. Při zvýšení úhlu vnitřního tření se rychlost zmenší. Ukázalo se, že model je navržen pro zjišťování rychlosti toku sypké hmoty u výtoku ze zásobníku, avšak v tomto ohledu nedává věrohodné výsledky. Proto byla navržena korekce, která modifikuje matematický model tak, aby dával reálné výsledky. Navržená korekce však musí čerpat z experimentálně naměřených dat. Vzhledem k časovému omezení byla navržena pouze korekce, která není závislá na modelu, ale pouze jej usměrňuje. Je možné, že lze najít obecnou souvislost mezi více parametry, která by se zakomponovala do korekce a tato korekce by mohla existovat jako nezávislý doplněk k matematickému modelu. S každým dalším experimentálním měřením by tento doplněk byl o krok blíže k přesnějšímu dimenzování průmyslových zásobníků.



## Příloha

Numerický výpočet matematického modelu byl prováděn v programu Matlab 2014a ve studentské verzi. Při sestavování matematického modelu bylo použito více souborů na sobě nezávislých, avšak jádro všech souborů tvořil základní kód, který vypočítal všechny potřebné veličiny. Z tohoto důvodu zde bude zveřejněn jen jádrový kód.

*Schéma programu:*



V jádrovém kódu jsou také vypočteny matice pro napjatostní a rychlostní pole, ve které jsou uloženy hodnoty rychlostí a všech napětí pro každý bod průmyslového zásobníku. Přístup do těchto matic je velmi jednoduchý, neboť je sestaven tak, aby samotné pole matic odpovídalo průřezu průmyslového zásobníku. To znamená, že hodnoty v řádku matice zleva do prava odpovídají hodnotám v průmyslovém zásobníku od vertikály ke stěně zásobníku. Horní řádek odpovídá volnému povrchu a dolní řádek výpusti.

### Zdrojový kód

```
%SI Jednotky  
rad=pi/180; % převod na radiány  
fi=31*rad; % úhel vnitřního tření (písek)
```





```
sig=21.5*rad; % úhel stěnového tření (písek)
thetaw=31*rad; % úhel mezi vertikálou a stěnou zásobníku
gamaw=1/(3*thetaw); % Konstanta, která zajistí nulovou rychlost na stěně

pp=0; % 1-tlak působí na volný povrch, 0- volný povrch. Pouze jako logický
spínač v kódu
h=0.4; % Výška válcové části nad zásobníkem
r2=0.61; %horní mez sypky
ro=1600; %hustota
g=9.81; % gravitační zrychlení
x=0.03; % poloměr otvoru
r1=x/sin(thetaw) %nastavení r1 – dolní mez sypky
tlak=h*ro*g; %Tlak pusobící na volný povrch (pouze při pp=1)
%Počáteční podmínky při výpočtu konstant A a F
a1=tlak*pp/(ro*g*r1); %%PP na r2
a3=tlak*pp/(ro*g*r1); %%PP na r2

%-Konstanty
omega=(4*sin(fi)/(1-sin(fi)))*(1+gamaw/thetaw);

% substituce exponentu
t=r2/r1;

%F0 a A0 a U0 volny povrch
F=((omega+4)/(2*(omega-1))) * ((1-t^(1-omega))/(1-t^(-4-omega))) *
(1+(thetaw/(2*(1+sin(fi))))*(14*gamaw*sin(fi)+5*thetaw*sin(fi)-thetaw));
A=((2*F/((omega+4)*(1-sin(fi))))*t^(0-4)-t^(1/((omega-1)*(1-
sin(fi)))))/(t^(omega));
F0=F;
A0=A;
U0=(F*g*r1)^(1/2);

% gama1 – konstanta pro výpočet úhlu natočení v řezu
gama1=0.5*(acos((-tan(sig))/(((1-tan(sig))^(1/2)*sin(fi))))+atan(1/(tan(sig))))-pi/2;

%% %% Výpočet konstant F a A

%substituce exponentu
mm=t^(-4);
%Výpočet 3 různých konstant F a A, které jsem odvodil a které vycházejí přibližně
stejně

a2=0;
b=1/((omega-1)*(1-sin(fi)));
c=2/((omega+4)*(1-sin(fi)));
```



```
a1=tlak*pp/(ro*g*r1);  
A1=(b*t-b*mm+a2*mm-a1)/(mm-t^omega);  
F1=(b-a2+A1)/c;  
U1=(F1*g*r1)^(1/2);
```

```
%%% Rovnice 14, zjištění A2 a F2, možnost přidat počáteční podmínku  
a3=h*ro*g*pp; %% PP pro r2;
```

```
a4=0;  
b2=gamaw*(4*thetaw+3*gamaw)*sin(fi)/((omega-1)*(1-sin(fi)*sin(fi)));  
b2=b2+(thetaw^2)/(2*(1+sin(fi)));  
c2=2*gamaw*(thetaw-3*gamaw)*sin(fi)/((omega+4)*(1-sin(fi)*sin(fi)));  
d2=gamaw*(omega*thetaw+3*thetaw+3*gamaw)*sin(fi)/(1+sin(fi));  
A2=(b2*t-b2*mm+a4*mm-a3)/(d2*mm-d2*t^omega);  
F2=(a4-b2-d2*A)/c2;  
U2=(F2*g*r1)^(1/2);
```

```
% Volím konstanty A a F, se kterými budu na dalé počítat.
```

```
A=A1;  
F=F1;  
U=U1;
```

```
%%% Algoritmus pro výpočet napjatostního a rychlostního pole a uložení do matic
```

```
% Na kolik řádků a sloupců rozdělím matici. Ve výsledku se bude jednat o matici  
s rozměrem (dilku+1)X(dilku+1)  
dilku=30;
```

```
kroktheta=thetaw/dilku;  
krokr=(r2-r1)/dilku;
```

```
% Ukládání do matice
```

```
for k=1:(dilku+1)
```

```
    r=r1+(k-1)*krokr;  
    krokmatice(k,1)=r;  
    for j=1:(dilku+1)  
        theta=(j-1)*kroktheta;
```

```
    % úhel natočení v řezu
```

```
    psi=(pi/2)+gama1*(theta/thetaw);
```

```
    % rychlost v určitém bodě
```



```
u=U1*((r1/r)^2)-3*gamaw*thetaw*U1*((r1/r)^2)*((theta/thetaw)^2);
```

```
% rychlost na stěně (jen pro zkoušku)
```

```
uwall=U*((r1/r)^2)-3*gamaw*thetaw*U*((r1/r)^2);  
Muwall(dilku+2-k,1)=uwall;
```

```
% MATICE RYCHLOSTI
```

```
Mu(dilku+2-k,j)=u;
```

```
% PRŮMĚRNÉ NAPĚTÍ
```

```
sigma2=(b2*(r/r1)+c2*F*(r/r1)^(0-4)+A*d2*(r/r1)^omega)*(ro*g*r1);  
sigma0=h*ro*g*pp;  
sigma=sigma0+sigma2*(theta/thetaw)^2;
```

```
% MATICE PRŮMĚRNÉHO NAPĚTÍ
```

```
Msigma(dilku+2-k,j)=sigma0+sigma2*(theta/thetaw)^2;
```

```
% MATICE ostatních napětí
```

```
Msigmar(dilku+2-k,j)=sigma*(1+sin(fi)*cos(2*psi));  
Msigmatheta(dilku+2-k,j)=sigma*(1-sin(fi)*cos(2*psi));  
Msigmathetar(dilku+2-k,j)=sigma*(sin(fi)*cos(2*psi));  
Msigmaalfa(dilku+2-k,j)=sigma*(1+sin(fi));
```

```
end  
end
```

```
% Zobrazení napětí na stěně zásobníku
```

```
for zz=1:1:dilku+1  
    hold on  
    plot(Msigmanew(dilku+2-zz,dilku+1),krokmatice(zz,1)/r1)  
    Msigmanew(zz,dilku+1)  
    krokmatice(zz,1)/r1  
end  
ylabel('r/r_{1}');  
xlabel('Průměrné napětí na stěně {\sigma} [Pa]');  
title('Závislost průměrného napětí {\sigma} na stěně zásobníku a polohy');
```

```
% maximální hodnoty ze všech napětí (Není podstatné, pro vlastní účel při  
zobrazování)
```

```
Maxu=ones(1,1);  
Max=ones(5,1);  
Max(1,1)=max(max(Msigmar));  
Max(2,1)=max(max(Msigmathetar));  
Max(3,1)=max(max(Msigmatheta));
```



$\text{Max}(4,1)=\max(\max(\text{Msigmathetar}));$   
 $\text{Max}(5,1)=\max(\max(\text{Msigmaalfa}));$   
 $\text{Maxu}(1,1)=\max(\max(\text{Mu}));$   
 $\text{Maxhodnota}=\max(\max(\text{Max}));$

## Výpočet úhlu natočení řezu

Řešení vychází z metody R-Alpha  
Z rovnice

$$\sin\varphi \sin 2\Psi_\omega = -\text{tg}\delta(1 - \sin\varphi \sin 2\Psi_\omega)$$

je potřeba vyjádřit úhel natočení v řezu  $\Psi_\omega$

Substituce

- $\sin\varphi = H$
- $\text{tg}\delta = -a$
- $2\Psi_\omega = x$
- $1 = b$

Dosadím zpátky do rovnice

$$H\sin x = a(1 - H\sin x)$$

$$1\sin x + a\sin x = \frac{a}{H}$$

$$b\sin x + a\sin x = \frac{a}{H}$$

$$y = R\sin(x - \text{alfa})$$

$$y = R\sin x \sin\alpha + R\cos x \cos\alpha$$

$$b\sin x + a\cos x = R\sin x \sin\alpha + R\cos x \cos\alpha$$

$$a\cos x = R\cos x \cos\alpha$$

$$a = R\cos\alpha$$

$$b = R\sin\alpha$$

$$\frac{b}{a} = \frac{R\sin\alpha}{R\cos\alpha}$$

$$\alpha = \text{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$R(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = b^2 + a^2$$

$$R = \sqrt{b^2 + a^2}$$

$$y = b\sin x + a\cos x = R\cos(x - \alpha) = \frac{a}{H}$$

$$\cos(x - \alpha) = \frac{a}{HR}$$

$$x - \alpha = \arccos\left(\frac{a}{HR}\right)$$



$$x = \arccos\left(\frac{a}{HR}\right) + \alpha$$

po dosazení substitute

$$\Psi_{\omega} = \frac{1}{2} \left[ \arccos\left(-\frac{\operatorname{tg}\delta}{\sqrt{(1 - \operatorname{tg}^2\delta)\sin\varphi}}\right) + \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\operatorname{tg}\delta}\right) \right]$$



## Zdroje

- [1] Jenike, A. W., Storage and Flow of solids, Bulletin No.123, Utah Engineering Experiment Station, Utah, 1964
- [2] Journal of Applied Mechanics, "Gravity Flow of Granular Materials in Conical Hoppers," Vol.46, 1979, p.530
- [3] Ústav procesní a zpracovatelské techniky, ČVUT v Praze, Fakulta strojní.
- [4] Deming, W.E., and Mehring, A.L., "The Gravitational Flow of Granular Materials and other Comminuted Solids," Industrial and Engineering Chemistry, Vol. 21, 1929, p.661
- [5] Ústav procesní a zpracovatelské techniky, ČVUT v Praze, Fakulta strojní.  
[http://www1.fs.cvut.cz/cz/U218/pedagog/predmety/3rocnik/phth/i\\_phth.htm](http://www1.fs.cvut.cz/cz/U218/pedagog/predmety/3rocnik/phth/i_phth.htm)
- [6] Rose, H.E. and Tanaka, T., "Rate of Discharge of Granular Materials From Bins and Hoppers," Engineers, London, Vol.208, 1959, p.465
- [7] Jenike, A. W., "Steady Gravity Flow of Frictional Cohesive Solids in Converging Channels" ASME Journal of Applied Mechanics, Vol.31, 1964, p5
- [8] <http://projekty.fs.vsb.cz/147/ucebniopory/978-80-248-2732-2.pdf>
- [9] Sokolovskii, U.V., Statics of Granular Media, 1965, Pergamon Press.
- [10] Michalec, Jiří. Pružnost a pevnost I. Vyd. 3. Praha: ČVUT, 2009
- [11] S.B. Savage, The mass flow of granular materials derived from coupled velocity-stress fields, British J.Appl.Phys.16, 1885-1888(1965)
- [12] S.B.Savage., Gravity flow of cohesionless bulk solids in converging conical channel, International Journal of Mechanical Science, Vol.9, 1963, p651
- [13] Jenike, A. W., and Johanson, J. R., "Bin Loads," Journal of the structural Division, Proceedings of the ASCE, Vol.94, 1968, p.1011
- [14] Jenike, A. W., Johanson, J. R., and Carson, J.W., "Bin Loads-Part2: Concepts," ASME Journal of Engineering for industry, vol.95, 1973, p.1;
- [15] Jenike, A. W., Johanson, J. R., and Carson, J.W., "Bin Loads-Part3: Mass Flow Bins," ASME Journal of Engineering for industry, vol.95, 1973, p.6;
- [16] Journal of Applied Mechanics, "Gravity Flow of Granular Materials in Conical Hoppers," Vol.46, 1979, p.532
- [17] Journal of Applied Mechanics, "Gravity Flow of Granular Materials in Conical Hoppers," Vol.46, 1979, p.531
- [18] Journal of Applied Mechanics, "Gravity Flow of Granular Materials in Conical Hoppers," Vol.46, 1979, p.533