

**ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE**

**Fakulta strojní, Ústav mechaniky,**

**biomechaniky a mechatroniky**

DIPLOMOVÁ PRÁCE

**MODELOVÁNÍ A ŘÍZENÍ PODDAJNÝCH MECHANISMŮ  
ROBOTŮ**

Autor: **Jiří Plecháček**

Vedoucí diplomové práce: **prof. Ing. Zbyněk Šika Ph.D.**

**2015**

## Anotační list

|                              |  |
|------------------------------|--|
| <b>Jméno autora:</b>         | Jiří Plecháček   |
| <b>Název DP:</b>             | Modelování a řízení poddajných mechanismů robotů   |
| <b>Anglický název:</b>       | Modeling and Control of Flexible Mechanisms of Robots  |
| <b>Akademický rok:</b>       | 2014/2015  |
| <b>Obor studia:</b>          | Mechatronika   |
| <b>Ústav/Odbor:</b>          | Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky<br>Odbor mechaniky a mechatroniky   |
| <b>Vedoucí DP:</b>           | prof. Ing. Zbyněk Šika Ph.D.   |
| <b>Konzultant:</b>           | Ing. Jiří Volech   |
| <b>Bibliografické údaje:</b> | 70 stran, 50 obrázků, 1 příloha  |
| <b>Klíčová slova:</b>        | Newton-Eulerovy rovnice, inverzní kinematika, 3d poddajný mechanismus, Computed Torques, identifikace, optimalizace pid regulátoru   |
| <b>Keywords:</b>             | Newton-Euler's equations, inverse kinematics, 3d flexible mechanism, Computed Torques, identification, optimization of pid regulator |

### **Anotace:**

Práce se zabývá dynamickým modelováním poddajných prostorových mechanismů. První část popisuje sestavení inverzní kinematiky a dynamiky čtyřramenného robotického manipulátoru a následně syntézu a optimalizaci jeho řízení metodou „Computed Torques“. Druhá část práce zahrnuje sestavení a identifikaci poddajného dynamického modelu naklápěcího vláknového mechanismu Quadrosphere. Identifikace je provedena optimalizací hmotnostních parametrů modelu.

### **Abstrakt:**

The work deals with the dynamic modeling of 3d flexible mechanisms. First part describes inverse kinematics and dynamics of four bar robotic manipulator and then synthesis and optimization of control through method Computed Torques. Second part describes how to build and identify flexible dynamic model of tilting fibrous mechanism Quadrosphere. Identification was performed through optimization of weight parameters.

## Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů zde uvedených a s přispěním odborných konzultací pana prof. Ing. Zbyňka Šiky Ph.D. a pana Ing. Jiřího Volecha a Ing. Ladislava Mráze.

Podpis .....

## Poděkování

Děkuji vedoucímu diplomové práce prof. Ing. Zbyňku Šikovi, Ph.D. za odborné vedení a za poskytnuté rady. Děkuji též panu Ing. Ladislavu Mrázovi a Ing. Jiřímu Volechovi za konzultace problémů.

# Obsah

|       |   |    |
|-------|---|----|
| 1     | Úvod.....   | 8  |
| 2     | Cíle práce.....   | 9  |
| 3     | Použité metody.....   | 9  |
| 3.1   | Maticová metoda řešení kinematiky mechanismů.....                   | 10 |
| 3.1.1 | Poloha .....  | 10 |
| 3.1.2 | Rychlost.....   | 11 |
| 3.1.3 | Zrychlení.....  | 12 |
| 3.1.4 | Současné pohyby .....   | 13 |
| 3.2   | Newton-EulEROVY pohybové rovnice .....                              | 14 |
| 3.2.1 | Přímá dynamická úloha .....   | 16 |
| 3.2.2 | Inverzní dynamická úloha .....                                      | 17 |
| 3.3   | Metoda kompozitních tuhých těles rozšířená na tělesa poddajná ..... | 17 |
| 3.4   | Computed Torques.....   | 18 |
| 4     | Optimalizace řízení experimentálního robotického ramene.....        | 20 |
| 4.1   | Inverzní kinematika manipulátoru.....                               | 22 |
| 4.1.1 | Pracovní prostor.....   | 24 |
| 4.1.2 | Trajektorie .....   | 25 |
| 4.1.3 | Výpočet inverzí kinematiky .....                                    | 26 |
| 4.2   | Dynamický model manipulátoru .....                                  | 28 |
| 4.2.1 | Hmotnostní charakteristiky manipulátoru .....                       | 29 |
| 4.2.2 | Vektor $\mathbf{a}_{Ti}$ .....                                      | 29 |
| 4.2.3 | Vektor $\boldsymbol{\omega}_i$ .....                                | 30 |
| 4.2.4 | Vektor $\boldsymbol{\alpha}_i$ .....                                | 31 |
| 4.2.5 | Vektory $\sum \mathbf{F}_i$ a $\sum \mathbf{n}_i$ .....             | 31 |

|       |  |    |
|-------|--|----|
| 4.2.6 | Matice hmotnosti a vektor pravé strany .....                                   | 35 |
| 4.3   | Řízení .....   | 36 |
| 4.3.1 | Optimalizace pid regulátoru .....  | 37 |
| 4.3.2 | Přídavné odměřování .....  | 39 |
| 4.3.3 | Výsledky simulací .....  | 41 |
| 5     | Modelování a identifikace naklápěcího vláknového mechanismu Quadrosphere ..... | 44 |
| 5.1   | Popis mechanismu Quadrosphere .....  | 44 |
| 5.2   | Dynamický model mechanismu Quadrosphere .....                                  | 47 |
| 5.2.1 | Vektory směrů vláken .....   | 48 |
| 5.2.2 | Tuhosti vláken .....   | 53 |
| 5.2.3 | Síly ve vláknech .....   | 54 |
| 5.2.4 | Vlastní pohybové rovnice .....   | 56 |
| 5.3   | Identifikace .....   | 61 |
| 5.3.1 | Linearizace .....  | 62 |
| 5.3.2 | Optimalizace .....   | 64 |
| 5.3.3 | Výsledky optimalizace .....  | 65 |
| 6     | Závěr .....  | 65 |
| 7     | Seznam obrázků .....   | 67 |
| 8     | Citovaná literatura .....  | 69 |
| 9     | Příloha na CD .....  | 71 |

# 1 Úvod

Práce má dvě hlavní témata. První se zabývá modelováním a simulací řízení poddajného robotického manipulátoru metodou „Computed Torques“ a návrhem pid regulátoru, který je k řízení použit. Robotické rameno je součástí projektu: GA13-39057S Zvyšování tuhosti robotů pomocí polohové zpětné vazby a redundantního měření. Výzkum se zabývá řízením paralelních a sériových manipulačních struktur. Zkoumá se použití různých metod řízení, jedna z nich je právě metoda „Computed Torques“. Je vypracováno několik konceptů odměřování deformací ramen manipulátorů. Reálný model robotického ramene se bude stavět v laboratoři ústavu mechaniky a výsledky simulací na něm bude možné experimentálně potvrdit. Druhá část práce zahrnuje tvorbu a identifikaci poddajného dynamického modelu vláknového mechanismu Quadrosphere, který je součástí projektu: GAP101/11/1627 Naklápěcí mechanismy založené na vláknové paralelní kinematické struktuře s bezvůlovým řízením. Identifikovaný dynamický model může být použit pro návrh řízení mechanismu Quadrosphere, který je postaven v laboratoři mechaniky. Tato práce byla podpořena grantem Studentské grantové soutěže ČVUT č. SGS13/177/OHK2/3T/12 Mechatronika a adaptronika.

Oba mechanismy jsou modelovány poddajně. K modelování poddajných mechanismů můžeme přistupovat různými způsoby. Můžeme modelovat přímo jednotlivá tělesa jako deformovatelná nebo do modelu zahrnout poddajné spojovací členy, které samy nemají hmotnost, ale zahrnují pouze poddajnost a silové působení.

V modelu nemusí být poddajná všechna tělesa. Víme-li například, že deformace některého tělesa nemají na chování mechanismu podstatný vliv, pak nemá smysl toto těleso modelovat poddajně a tím udělat model zbytečně náročný na výpočet.

Obecně má poddajný mechanismus více stupňů volnosti, než ekvivalentní mechanismus s tuhými tělesy. Deformace poddajných těles a následně polohy konkrétních bodů na těchto tělesech se totiž nedají vyjádřit kinematikou, ale jsou závislé na silovém působení. Tělesa, která jsou v mechanismu modelována poddajně nebo jsou připojena poddajnými členy musí mít proto svoji polohu popsanou nezávislými souřadnicemi. V ekvivalentním tuhém mechanismu by to byly souřadnice kinematicky závislé. Tímto způsobem jsou generovány další stupně volnosti.

## 2 Cíle práce

Práce si klade za cíl seznámit čtenáře s modelováním poddajných prostorových mechanismů a s metodou řízení „Computed Torques“, která využívá dynamický model mechanismu.

V první části bude konkrétně popsána kinematika robotického manipulátoru, jeho dynamika a následně vytvořen řídicí algoritmus na základě metody „Computed Torques“. Dále bude optimalizována přesnost řízení. Budou provedeny simulace řízení manipulátoru po určené trajektorii. Nakonec bude použit koncept přídavného odměřování deformací ramen manipulátoru a porovnána přesnost řízení s jeho použitím a bez.

V druhé části bude sestaven poddajný dynamický model vláknového mechanismu Quadrosphere. Model bude dále identifikován s reálným mechanismem v laboratoři ústavu mechaniky, na kterém byla provedena měření. Bude popsána identifikace modelu pomocí optimalizace jeho hmotnostních parametrů

## 3 Použité metody

Nejdříve popíši teorii a metody, které jsem během vypracování používal. Při řešení mechanismů se vychází z popisu pohybu mechanismu v čase - kinematiky, na který navazuje připojení dynamiky, tedy silových účinků způsobujících tento pohyb a vznikajících při něm.

Existuje mnoho metod řešení kinematiky mechanismů. Mezi nejdůležitější z nich patří metoda trigonometrická, metoda vektorová a metoda maticová. Metoda maticová spočívá v transformaci souřadnic mezi jednotlivými zavedenými souřadnicovými systémy pomocí transformačních matic. Její hlavní výhodou je komplexnost a možnost využití pro prostorové mechanismy.

Základní metodou řešení dynamiky mechanismů je metoda uvolňování spočívající v připojení silových účinků na jednotlivá tělesa a sestavení pohybových rovnic pro ně. Podrobně bude popsáno řešení dynamiky prostorového mechanismu pomocí Newton-Eulerových rovnic. Dále je stručně popsáno sestavení dynamických rovnic metodou kompozitních tuhých těles rozšířenou na tělesa poddajná.



Nakonec je probrána metoda řízení „Computed Torques“, která je založena na inverzi dynamiky systému.

### 3.1 Maticová metoda řešení kinematiky mechanismů

Kapitola 3.1 a 3.2 čerpají z [1] [2].

#### 3.1.1 Poloha

Pro využití této metody je třeba zavést rozšířený radius vektor bodu v prostoru

$$\mathbf{r}_{aM} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{aM} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

kde  $\mathbf{u}_{aM}$  je radius vektor bodu  $M$  v souřadnicovém systému  $a$ .

Pro transformaci radius vektoru ze souřadného systému  $b$  do souřadného systému  $a$  lze použít transformační matici  $\mathbf{T}_{ab}$

$$\mathbf{r}_{aM} = \mathbf{T}_{ab} \mathbf{r}_{bM} \quad (3.2)$$

Transformační matice  $\mathbf{T}_{ab}$  lze rozepsat takto

$$\mathbf{T}_{ab} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{ab} & \mathbf{u}_{ab} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

kde  $\mathbf{u}_{ab}$  je vektor popisující posunutí souřadného systému  $b$  vzhledem k systému  $a$

$$\mathbf{u}_{ab} = \begin{bmatrix} x_{ab} \\ y_{ab} \\ z_{ab} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$\mathbf{S}_{ab}$  je matice směrových kosinů vyjadřující natočení těchto souřadných systémů. Získáme ji pomocí matic základních pohybů (pouze rotací), které vypadají následovně

$$\mathbf{S}_x(\varphi_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_x & -\sin\varphi_x \\ 0 & \sin\varphi_x & \cos\varphi_x \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{S}_y(\varphi_y) = \begin{bmatrix} \cos\varphi_y & 0 & \sin\varphi_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi_y & 0 & \cos\varphi_y \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_z(\varphi_z) = \begin{bmatrix} \cos\varphi_z & -\sin\varphi_z & 0 \\ \sin\varphi_z & \cos\varphi_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformační matici  $\mathbf{S}_{ab}$  pro sférický pohyb popsáný pomocí Cardanových úhlů (využity k popisu mechanismu Quadrosphere) lze potom vyjádřit jako součin těchto matic

$$\mathbf{S}_{ab} = \mathbf{S}_x(\varphi_x) \mathbf{S}_y(\varphi_y) \mathbf{S}_z(\varphi_z) \quad (3.6)$$

Pro transformaci ze systému  $a$  do  $b$  lze použít inverzní matici k matici  $\mathbf{T}_{ab}$  tedy matici  $\mathbf{T}_{ab}^{-1}$ , kterou nazveme  $\mathbf{T}_{ba}$

$$\mathbf{T}_{ba} = \mathbf{T}_{ab}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{ab}^T & -\mathbf{S}_{ab} \mathbf{u}_{ab} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

### 3.1.2 Rychlost

Časovou derivací souřadnice  $\mathbf{r}_{aM}$  (když  $\mathbf{r}_{bM} = \text{konst}$ ) dostaneme

$$\mathbf{v}_{aM} = \dot{\mathbf{r}}_{aM} = \mathbf{T}_{ab} \mathbf{r}_{bM} \quad (3.8)$$

Zavádíme matici  $\mathbf{V}_{b,ab}$  pro rychlost  $b : a$ , pro transformaci matice  $\mathbf{T}_{ab}$  na matici  $\mathbf{T}_{ab}$

$$\dot{\mathbf{T}}_{ab} = \mathbf{T}_{ab} \mathbf{V}_{b,ab} \quad (3.9)$$

Proto

$$\mathbf{V}_{b,ab} = \mathbf{T}_{ab}^{-1} \dot{\mathbf{T}}_{ab} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{ab}^T \dot{\mathbf{S}}_{ab} & \mathbf{S}_{ab}^T \dot{\mathbf{u}}_{a,ab} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Stejně tak zavádíme matici  $\mathbf{\Omega}_{b,ab}$  pro úhlovou rychlost  $b : a$

$$\dot{\mathbf{S}}_{ab} = \mathbf{S}_{ab} \mathbf{\Omega}_{b,ab} \quad (3.11)$$

Proto

$$\mathbf{\Omega}_{b,ab} = \mathbf{S}_{ab}^{-1} \dot{\mathbf{S}}_{ab} = \mathbf{S}_{ab}^T \dot{\mathbf{S}}_{ab} \quad (3.12)$$

$\mathbf{\Omega}_{b,ab}$  je antisymetrická singulární matice, v níž vystupují pouze prvky vektoru úhlové rychlosti  $b : a$  ( $\boldsymbol{\omega}_{ab}$ ). Zapišeme ji takto:

$$\boldsymbol{\Omega}_{b,ab} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}_{b,ab} \quad (3.13)$$

Dosazením získáváme

$$\mathbf{V}_{b,ab} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_{b,ab} & \mathbf{S}_{ab}^T \dot{\mathbf{u}}_{a,ab} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Pro rozšířený vektor rychlosti dostaneme

$$\mathbf{v}_{aM} = \mathbf{T}_{ab} \mathbf{V}_{b,ab} \mathbf{r}_{bM} \quad (3.15)$$

První index  $b$  v matici rychlosti  $\mathbf{V}_{b,ab}$  značí referenční bod základního rozkladu – počátek souřadného systému  $b$  ( $O_b$ ). Pro zjednodušení budu dále uvažovat tento rozklad a používat značení

$$\mathbf{V}_{ab} = \mathbf{V}_{b,ab} \quad (3.16)$$

### 3.1.3 Zrychlení

Druhou derivací polohy podle času získáme pro zrychlení

$$\mathbf{a}_{aM} = \dot{\mathbf{T}}_{ab} \mathbf{r}_{bM} \quad (3.17)$$

kde  $\mathbf{a}_{aM} = \dot{\mathbf{v}}_{aM} = \ddot{\mathbf{r}}_{aM}$  je rozšířený vektor zrychlení bodu  $M$  v systému  $a$ . Matici  $\dot{\mathbf{T}}_{ab}$  lze vyjádřit pomocí dříve uvedených matic.

$$\dot{\mathbf{T}}_{ab} = \dot{\mathbf{T}}_{ab} \mathbf{V}_{ab} + \mathbf{T}_{ab} \dot{\mathbf{V}}_{ab} \quad (3.18)$$

Zavedeme matici zrychlení  $\mathbf{A}_{ab}$

$$\mathbf{A}_{ab} = \dot{\mathbf{V}}_{ab} \quad (3.19)$$

udává zrychlení  $b : a$ , referenčním bodem základního rozkladu je bod  $O_b$ . Dosazením za  $\dot{\mathbf{T}}_{ab}$  a  $\dot{\mathbf{V}}_{ab}$  obdržíme

$$\dot{\mathbf{T}}_{ab} = \mathbf{T}_{ab} (\mathbf{A}_{ab} + \mathbf{V}_{ab}^2) \quad (3.20)$$

kde zavedeme

$$\mathbf{B}_{ab} = \mathbf{A}_{ab} + \mathbf{V}_{ab}^2 \quad (3.21)$$

a tuto matici nazveme celkovou maticí zrychlení  $b : a$ .

Stejně tak druhou časovou derivací matice směrových kosinů  $\mathbf{S}_{ab}$  dostaneme

$$\dot{\mathbf{S}}_{ab} = \dot{\mathbf{S}}_{ab} \boldsymbol{\Omega}_{ab} + \mathbf{S}_{ab} \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{ab} = \mathbf{S}_{ab} (\boldsymbol{\Omega}_{ab}^2 + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{ab}) \quad (3.22)$$

kde zavedeme matici úhlového zrychlení  $\mathbf{C}_{ab}$

$$\mathbf{C}_{ab} = \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{ab} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_z & \alpha_y \\ \alpha_z & 0 & -\alpha_x \\ -\alpha_y & \alpha_x & 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Dosazením do celkové matice zrychlení  $\mathbf{B}_{ab}$  získáme

$$\mathbf{B}_{ab} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ab} + \boldsymbol{\Omega}_{ab}^2 & \mathbf{S}_{ab}^T \ddot{\mathbf{u}}_{a,ab} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Tato matice vyjadřuje zrychlení tělesa  $b : a$  s referenčním bodem základního rozkladu  $O_b$ . Levé horní submatice vyjadřuje zrychlení relativního sférického pohybu, pravá horní submatice vyjadřuje zrychlení referenčního bodu  $O_b$ . Dosazením získáváme vztah pro výpočet zrychlení

$$\mathbf{a}_{aM} = \mathbf{T}_{ab} \mathbf{B}_{ab} \mathbf{r}_{bM} \quad (3.25)$$

### 3.1.4 Současné pohyby

K současným pohybům dochází, když se ve zvoleném souřadnicovém systému pohybuje jiný systém, ve kterém může být další atd. Výsledný pohyb bodu v koncovém (nebo jiném) souřadnicovém systému je tedy složen z několika současných pohybů. Radius vektor zvoleného bodu  $M$  v prvním souřadném systému lze vyjádřit pomocí transformačních matic

$$\mathbf{r}_{1M} = \mathbf{T}_{12} \mathbf{T}_{23} \cdots \mathbf{T}_{n-1,n} \mathbf{r}_{nM} \quad (3.26)$$

což lze zapsat jako

$$\mathbf{r}_{1M} = \mathbf{T}_{1n} \mathbf{r}_{nM} \quad (3.27)$$

Kde

$$\mathbf{T}_{1n} = \mathbf{T}_{12} \mathbf{T}_{23} \cdots \mathbf{T}_{n-1,n} \quad (3.28)$$

$\mathbf{T}_{1n}$  je transformační matice složeného pohybu. Obdobně vztah pro výslednou rychlost

$$\mathbf{v}_{1M} = \dot{\mathbf{T}}_{1n} \mathbf{r}_{nM} \quad (3.29)$$

Po dosazení za  $\mathbf{T}_{1n}$  (3.28) a derivaci podle času obdržíme

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{1M} = & (\dot{\mathbf{T}}_{12} \mathbf{T}_{23} \dots \mathbf{T}_{n-1,n} + \mathbf{T}_{12} \dot{\mathbf{T}}_{23} \dots \mathbf{T}_{n-1,n} + \dots \\ & + \mathbf{T}_{12} \mathbf{T}_{23} \dots \dot{\mathbf{T}}_{n-1,n}) \mathbf{r}_{nM} \end{aligned} \quad (3.30)$$

použitím matic rychlosti (3.10)

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{1M} = & (\mathbf{T}_{12} \mathbf{V}_{12} \mathbf{T}_{23} \dots \mathbf{T}_{n-1,n} + \mathbf{T}_{12} \mathbf{T}_{23} \mathbf{V}_{23} \dots \mathbf{T}_{n-1,n} + \dots \\ & + \mathbf{T}_{12} \mathbf{T}_{23} \dots \mathbf{T}_{n-1,n} \mathbf{V}_{n-1,n}) \mathbf{r}_{nM} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Vztah pro výsledné zrychlení analogicky

$$\mathbf{a}_{1M} = \ddot{\mathbf{T}}_{1n} \mathbf{r}_{nM} \quad (3.32)$$

Dosazení za  $\mathbf{T}_{1n}$  a následná druhá časová derivace vede na komplikované vztahy. Pro dva současné pohyby je vztah následující

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{1M} = & (\ddot{\mathbf{T}}_{12} \mathbf{T}_{23} + 2\dot{\mathbf{T}}_{12} \dot{\mathbf{T}}_{23} + \mathbf{T}_{12} \ddot{\mathbf{T}}_{23}) \mathbf{r}_{3M} = \\ = & (\mathbf{T}_{12} \mathbf{B}_{12} \mathbf{T}_{23} + 2\mathbf{T}_{12} \mathbf{V}_{12} \mathbf{T}_{23} \mathbf{V}_{23} + \mathbf{T}_{12} \mathbf{T}_{23} \mathbf{B}_{23}) \mathbf{r}_{3M} \end{aligned} \quad (3.33)$$

## 3.2 Newton-Eulerovy pohybové rovnice

Pro popis dynamiky je vhodné rozložit obecný prostorový pohyb tělesa na translační pohyb těžiště jako hmotného bodu a rotační pohyb tělesa kolem těžiště.

Pro translaci těžiště tělesa platí základní Newtonova pohybová rovnice.

$$m \mathbf{a}_T = \sum \mathbf{F} \quad (3.34)$$

$$\mathbf{a}_T = [a_{Tx} \ a_{Ty} \ a_{Tz}]^T = [\ddot{x}_T \ \ddot{y}_T \ \ddot{z}_T]^T \quad (3.35)$$

kde  $\mathbf{a}_T$  je zrychlení těžiště vyvolané výslednicí sil  $\sum \mathbf{F}$ . K jejímu sestavení je třeba znát všechny působící síly. Pro volné těleso (nepodrobno vazbám) jsou to pouze akční síly, pro vázané je třeba připojit ještě reakční síly, jimiž při uvolňování tělesa nahrazujeme účinek kinematických vazeb. Detailní popis sestavení výslednice  $\sum \mathbf{F}$  bude v kapitole (4.2.5). Pro konkrétní řešení je třeba vektorovou rovnici (3.34) rozepsat na 3 skalární (složkové) rovnice.

$$ma_{Tx} = \sum F_x \quad (3.36)$$

$$ma_{Ty} = \sum F_y$$

$$ma_{Tz} = \sum F_z$$

Je důležité, aby složky zrychlení i sil byly vyjádřeny v hlavním nepohyblivém souřadném systému.

Pro popis rotace tělesa kolem těžiště lze použít Eulerovy dynamické rovnice pro sférický pohyb.

$$\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} = \sum \mathbf{n} \quad (3.37)$$

$\mathbf{I}$  je matice setrvačnosti

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x & -D_{xy} & -D_{xz} \\ -D_{xy} & I_y & -D_{yz} \\ -D_{xz} & -D_{yz} & I_z \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

$I_x, I_y, I_z$  jsou momenty setrvačnosti tělesa k příslušným osám.  $D$  jsou deviační momenty k příslušným osám. Tato matice je konstantní pouze v lokálním souřadném systému pevně spojeném s tělesem. Je výhodné tohoto využít, aby se vztahy zjednodušily. Proto všechny vektory rovnice (3.37) budeme vyjadřovat v lokálním systému tělesa.  $\boldsymbol{\omega}$  je vektor úhlové rychlosti rotace a  $\boldsymbol{\alpha}$  je vektor úhlového zrychlení,  $\sum \mathbf{n}$  je vektor výslednice momentu působícího na těleso. Ten opět obsahuje jak akční tak reakční momenty. Popis sestavení  $\sum \mathbf{n}$  bude v kapitole (4.2.5) [1].

$$\boldsymbol{\omega} = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T \quad (3.39)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_x \ \alpha_y \ \alpha_z]^T = [\dot{\omega}_x \ \dot{\omega}_y \ \dot{\omega}_z]^T \quad (3.40)$$

Složky vektoru  $\boldsymbol{\omega}$  jsou obsaženy v matici úhlových rychlostí  $\boldsymbol{\Omega}_{i,0i}$ , definované v kapitole (3.3). Jsou to úhlové rychlosti tělesa  $i$  vůči pevnému rámu 0 a jsou vyjádřené v lokálním souřadném systému tělesa  $i$ .

$$\mathbf{\Omega}_{i,0i} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}_{i,0i} \quad (3.41)$$

$$\mathbf{\Omega}_{i,0i} = \mathbf{S}_{0i}^T \mathbf{S}_{0i} \quad (3.42)$$

$\mathbf{S}_{0i}$  je rotační matice ze systému  $i$  do 0 a je funkcí nezávislých souřadnic, které popisují polohu mechanismu (konkrétně tedy jen úhlových).

Vektor  $\boldsymbol{\alpha}$  získáme jednoduše derivací vektoru  $\boldsymbol{\omega}$ . Po roznásobení vektorové rovnice (3.37) také dostáváme 3 skalární rovnice.

$$I_x \alpha_x + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z + D_{xy} (\omega_x \omega_z - \alpha_y) - D_{xz} (\omega_x \omega_y + \alpha_z) + D_{yz} (\omega_z^2 - \omega_y^2) = \sum n_x \quad (3.43)$$

$$I_y \alpha_y + (I_x - I_z) \omega_z \omega_x + D_{yz} (\omega_y \omega_x - \alpha_z) - D_{yx} (\omega_y \omega_z + \alpha_x) + D_{zx} (\omega_x^2 - \omega_z^2) = \sum n_y$$

$$I_z \alpha_z + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y + D_{zx} (\omega_z \omega_y - \alpha_x) - D_{zy} (\omega_z \omega_x + \alpha_y) + D_{xy} (\omega_y^2 - \omega_x^2) = \sum n_z$$

Pro každé těleso máme potenciálně 6 dynamických rovnic. To odpovídá počtu stupňů volnosti tělesa v prostoru. Pokud je těleso vázáno má jen

$$i = 6 - r \quad (3.44)$$

stupňů volnosti, přičemž  $r$  je počet stupňů volnosti odebraných vazbou. Při uvolňování tělesa z vazby, která mu odebírá  $r$  stupňů volnosti, musíme tělesu přidat  $r$  složek reakčních silových účinků. Tím jsme ekvivalentně nahradili vazbu. V dynamických rovnicích tělesa s  $i$  stupni volnosti bude vystupovat  $i$  nezávislých souřadnic a  $r$  reakčních silových účinků [1].

Analogicky popis mechanismu s  $n$  tělesy a  $i$  stupni volnosti bude obsahovat  $6n$  dynamických rovnic,  $i$  nezávislých souřadnic (popisují polohu mechanismu) a  $r = 6n - i$  složek reakčních silových účinků mezi tělesy.

### 3.2.1 Přímá dynamická úloha

Máme určit časový průběh pohybu mechanismu a známe časové průběhy pohonných (akčních) sil. Mechanismus má  $i$  st. vol. a  $n$  těles.

$n$  vektorových rovnic (3.34) a (3.37) zapíšeme do následujícího tvaru. Postup bude popsán v kapitole (4.2.6).

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{Q} \quad (3.45)$$

$\mathbf{x}$  je vektor neznámých o rozměru  $(6n, 1)$ .

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

$\mathbf{R}$  je vektor reakcí o rozměru  $(6n - i, 1)$ ,  $\mathbf{a}$  je zrychlení nezávislých souřadnic  $(i, 1)$ .

Vztah (3.45) je soustava diferenciálních rovnic, kterou řešíme postupnou integrací v čase.

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{Q} \quad (3.47)$$

Do integrace jdou samozřejmě jen zrychlení  $\mathbf{a}$ .

### 3.2.2 Inverzní dynamická úloha

Máme určit časový průběh pohonných (akčních) sil a známe časový průběh pohybu mechanismu.

$$\mathbf{x}_{inv} = \mathbf{M}_{inv}^{-1} \cdot \mathbf{Q}_{inv} \quad (3.48)$$

$\mathbf{x}$  je vektor neznámých  $(6n, 1)$ .

$$\mathbf{x}_{inv} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{F} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

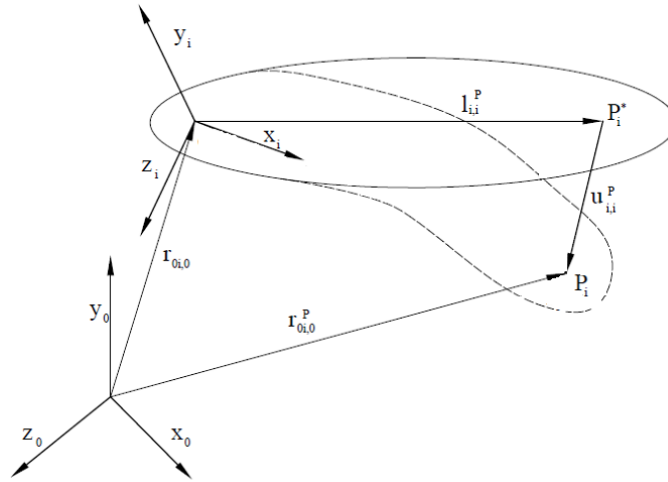
$\mathbf{F}$  je vektor pohonných sil  $(i, 1)$ . V tomto případě řešíme soustavu lineárních příp. nelineárních algebraických rovnic pro příslušné časové okamžiky pohybu, které máme zadány. Úloha inverzní dynamiky je obecně snazší než úloha přímá.

### 3.3 Metoda kompozitních tuhých těles rozšířená na tělesa poddajná

Metoda vyjadřuje deformaci tělesa jako lineární kombinaci několika jeho vlastních tvarů, které získáme z mkp analýzy tělesa. Čím více vlastních tvarů použijeme tím je vyjádření deformace přesnější. Poloha tělesa je popsána jednak relativními či nezávislými souřadnicemi, tyto souřadnice vyjadřují polohu tuhého tělesa. Dále zde vystupují souřadnice



deformační, které představují koeficienty lineární kombinace vlastních tvarů a vyjadřují tedy deformaci. Jejich počet je stejný jako počet použitých vlastních tvarů tělesa. Zrychlení všech souřadnic se počítají z dynamických rovnic sestavených symbolickým algoritmem [3] [4].



Obrázek 1 - deformace tělesa [4]

Zdeformovaná poloha bodu  $P$  tělesa  $i$ .

$$\mathbf{r}_{0i,0}^P = \mathbf{r}_{0i,0} + \mathbf{S}_{0i}(\mathbf{l}_{i,i}^P + \mathbf{u}_{i,i}^P) \quad (3.50)$$

$\mathbf{r}_{0i,0}$  vektor polohy počátku lokálního souřadného systému tělesa  $i$ , vyjádřený v globálním souřadném systému.  $\mathbf{l}_{i,i}^P$  je vektor polohy nezdeformovaného bodu  $P^*$  v lokálním systému tělesa. Deformace tělesa v bodě  $P$  je vyjádřena vektorem  $\mathbf{u}_{i,i}^P$ , který je dán lineární kombinací vlastních tvarů.  $\mathbf{r}_{0i,0}$  a  $\mathbf{S}_{0i}$  jsou funkcí nezávislých souřadnic a  $\mathbf{u}_{i,i}^P$  je funkcí deformačních souřadnic [3] [4].

### 3.4 Computed Torques

Velká část teorie řízení mechanismů je vypracována pro lineární systémy, proto pokud chceme navrhovat řízení pro nelineární systém, postupujeme většinou přes jeho linearizaci. Ta se provádí vždy v určité poloze mechanismu a správně nahrazuje jeho chování jen v blízkém okolí této polohy. Navržený řídicí regulátor proto nemusí pracovat ve vzdálené poloze uspokojivě.

Metoda řízení „Computed Torques“ je založena na inverzi dynamiky systému. A patří mezi metody globální linearizace a měla by zajistit správné chování regulátoru v celém pracovním prostoru mechanismu [5].

Vztah (3.51) vyjadřuje inverzní dynamiku systému.

$$x = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix} = \mathbf{M}(\mathbf{q})_{inv}^{-1} \cdot \mathbf{Q}_{inv}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \quad (3.51)$$

Teorie získání matice  $\mathbf{M}_{inv}$  a vektoru  $\mathbf{Q}_{inv}$  byla popsána v kapitole (3.2.2). Praktický postup pro konkrétní mechanismus bude podrobně popsán v kapitole (4.2.6). Vektor neznámých  $x$  obsahuje reakce  $\mathbf{R}$  a pohonné silové účinky  $\boldsymbol{\tau}$ , které realizují pohyb  $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}$ . Metoda „Computed Torques“ zavádí místo  $\ddot{\mathbf{q}}$  vstup  $\mathbf{r}$ . Tvar vektoru  $\mathbf{r}$  při použití pid regulátoru vyjadřuje vztah (3.53) [5].

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{r} \quad (3.52)$$

$$\mathbf{r} = \ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{K}_P \Delta \mathbf{q} + \mathbf{K}_I \int \Delta \mathbf{q} + \mathbf{K}_D \Delta \dot{\mathbf{q}} \quad (3.53)$$

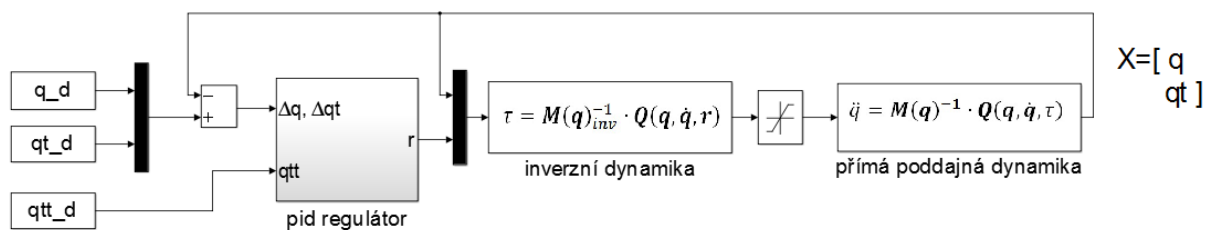
$$\mathbf{0} = \Delta \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_P \Delta \mathbf{q} + \mathbf{K}_I \int \Delta \mathbf{q} + \mathbf{K}_D \Delta \dot{\mathbf{q}} \quad (3.54)$$

$\ddot{\mathbf{q}}_d$  je vektor požadovaného zrychlení kloubových souřadnic, který získáme z inverzní kinematiky. Matice  $\mathbf{K}_P, \mathbf{K}_I, \mathbf{K}_D$  mají na diagonálách konstanty pid regulátoru pro jednotlivé motory, pokud jich má mechanismus více.  $\Delta \mathbf{q}$  a  $\Delta \dot{\mathbf{q}}$  jsou odchylky polohy a rychlosti.

$$\Delta \mathbf{q} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q} \quad (3.55)$$

$$\Delta \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}_d - \dot{\mathbf{q}} \quad (3.56)$$

$\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d$  je požadovaná poloha a rychlost z inverzní dynamiky,  $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$  je aktuální poloha a rychlost mechanismu, ze senzorů nebo v případě simulace z poddajného modelu. Schéma řízení metodou „Computed Torques“ je na obrázku 2.



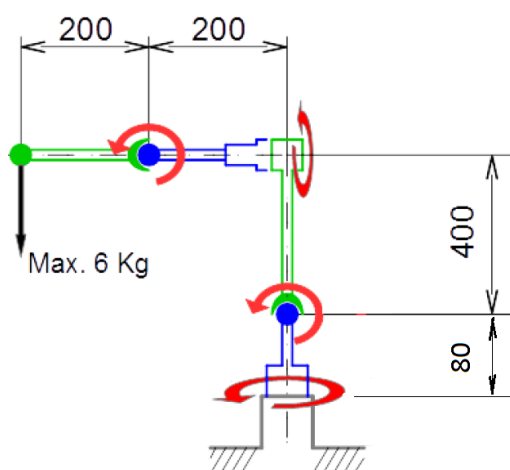
Obrázek 2 - Computed Torques

K provedení simulace potřebujeme znát kinematiku a dynamiku systému, metody k jejich řešení byly probrány.

## 4 Optimalizace řízení experimentálního robotického ramene

Robotické rameno má vzniknout v laboratoři ústavu mechaniky. Manipulátor je součástí projektu: GA13-39057S Zvyšování tuhosti robotů pomocí polohové zpětné vazby a redundantního měření. Projekt se zabývá řízením paralelních a sériových struktur manipulačních mechanismů.

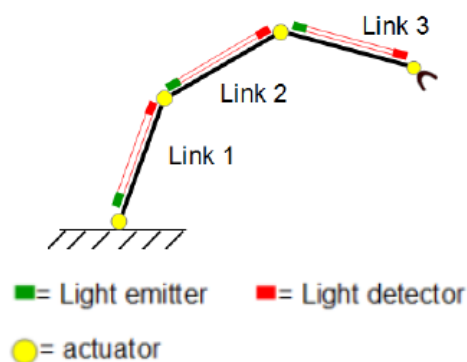
Manipulátor má čtyři ramena. Jednotlivá ramena jsou spojena rotačními klouby, ve kterých jsou přímo umístěny motory s převodovkami. Jeho struktura je na obrázku 3.



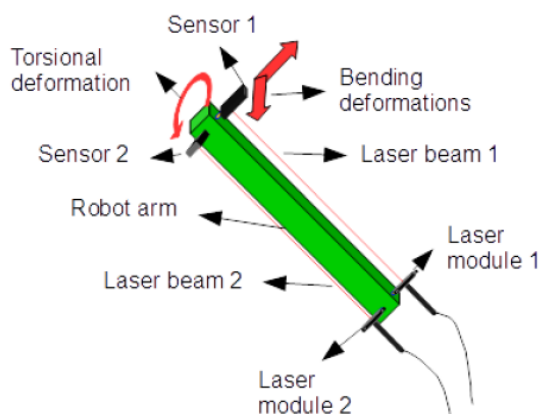
Obrázek 3 - schéma manipulátoru [6]

Senzory polohy budou namontovány přímo na motorech a budou odměřovat jejich natočení. Natočení motorů odpovídá relativnímu natočení jednotlivých ramen. Řídicí systém pak bude pracovat s těmito informacemi. Deformace převodovek a obecně všech částí mezi dvěma

motory však mají vliv na polohu efektoru, ale řídicí systém o nich neví. V projektu je připraven koncept přídavného odměřování deformací ramen a výzkum má zjistit jak se změní přesnost polohování koncového efektoru. Zjednodušené schéma odměřování pro tři ramena je na obrázcích 4 a 5.



Obrázek 4 - koncept odměřování [6]



Obrázek 5 - přídavné odměřování [6]

Laserový paprsek bude vycházet ze zdroje na jednom konci ramene a bude detekován na druhém konci. Použitím dvou paprsků bude možné určit ohybové a torzní deformace ramene. Řídicí systém bude na základě těchto informací deformace ramen kompenzovat jiným natočením motorů.

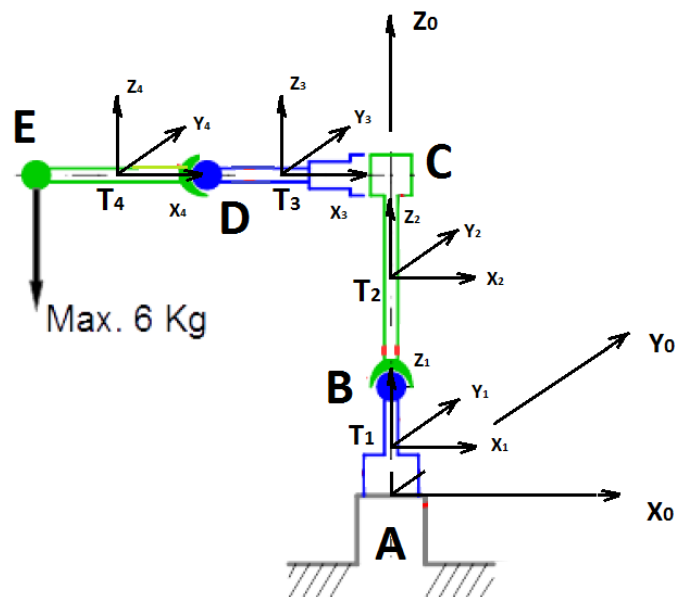
V tuto chvíli ještě manipulátor nestojí. Experimenty bylo tedy potřeba udělat simulačně. Mým úkolem je provést simulaci řízení manipulátoru metodou „Computed Torques“ s přídavným odměřováním a zjistit přesnost polohování koncového efektoru.

Realitu bude simulovat poddajný dynamický model manipulátoru. Z něho můžeme získat informace o poloze libovolného bodu mechanismu. Abych odsimulovat výše uvedený koncept odměřování, budu z poddajného modelu využívat pouze informace, které budou reálně získávány pomocí senzorů. Tzn. natočení motorů a deformace ramen. Deformace převodovek odměřovány nebudou.

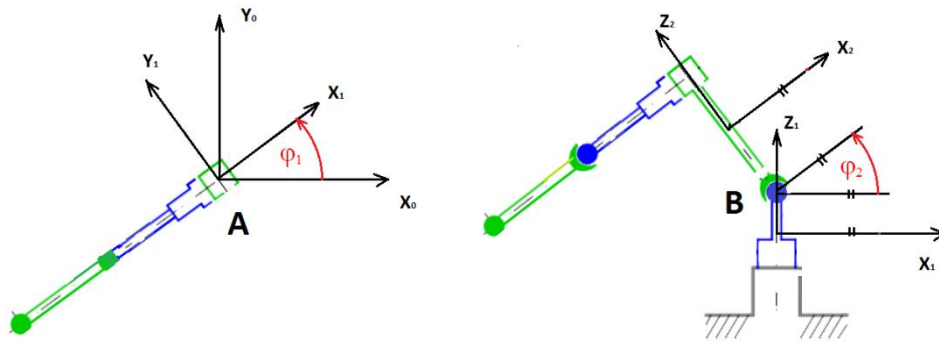
Nyní popíši řešení inverzní kinematiky a dynamiky manipulátoru, které potřebujeme pro simulaci řízení metodou „Computed Torques“

#### 4.1 Inverzní kinematika manipulátoru

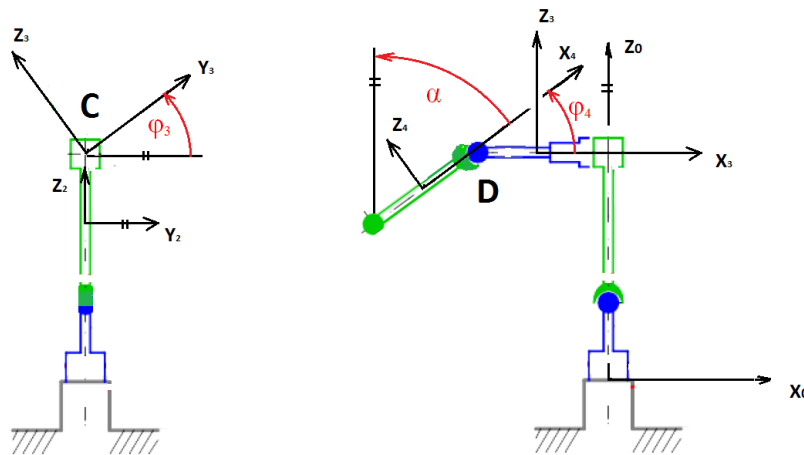
Manipulátor má čtyři ramena mezi nimiž jsou rotační klouby  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ . Jedná se o mechanismus se 4 stupni volnosti, jehož poloha je popsána 4 nezávislými úhly natočení ramen (kloubové souřadnice). Struktura a rozměry v  $mm$  jsou na obrázku 3. Zavedení nezávislých souřadnic a lokálních souřadných systémů je na následujících obrázcích.



Obrázek 6 - souřadné systémy [6]



Obrázek 7 – klouby A a B [6]



Obrázek 8 – klouby C a D [6]

Počátek lokálního souřadného systému je vždy v těžišti konkrétního ramena. Polohu koncového efektoru v hlavním souřadném systému vyjádříme pomocí transformačních matic (3.3) jako funkci nezávislých souřadnic  $q$ .

$$\mathbf{q} = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \varphi_3 \ \varphi_4]^T \quad (4.1)$$

$$\mathbf{r}_{0E} = \mathbf{T}_{04}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{r}_{4E} \quad (4.2)$$

$$\mathbf{r}_{4E} = \left[-\frac{l_4}{2} \ 0 \ 0 \ 1\right]^T \quad (4.3)$$

$$\mathbf{T}_{01} = \mathbf{T}_{\varphi_z}(\varphi_1) \cdot \mathbf{T}_z\left(\frac{l_1}{2}\right) \quad (4.4)$$

$$\mathbf{T}_{02} = \mathbf{T}_{01} \cdot \mathbf{T}_z\left(\frac{l_1}{2}\right) \cdot \mathbf{T}_{\varphi_y}(-\varphi_2) \cdot \mathbf{T}_z\left(\frac{l_2}{2}\right)$$

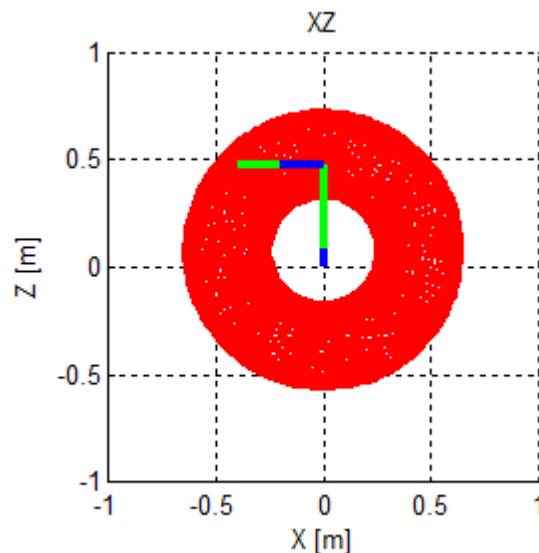
$$\mathbf{T}_{03} = \mathbf{T}_{02} \cdot \mathbf{T}_z\left(\frac{l_2}{2}\right) \cdot \mathbf{T}_{\varphi_x}(\varphi_3) \cdot \mathbf{T}_x\left(-\frac{l_3}{2}\right)$$

$$\mathbf{T}_{04} = \mathbf{T}_{03} \cdot \mathbf{T}_x\left(-\frac{l_3}{2}\right) \cdot \mathbf{T}_{\varphi_y}(-\varphi_4) \cdot \mathbf{T}_x\left(-\frac{l_4}{2}\right)$$

(4.2) je vztah pro přímou kinematiku manipulátoru. Úloha inverzní kinematiky je složitější, protože ze známého vektoru  $\mathbf{r}_{0E}$  potřebujeme zjistit vektor nezávislých souřadnic  $\mathbf{q}$ . Řešení navíc nalezneme pouze pokud bude bod  $\mathbf{r}_{0E}$  ležet v pracovním prostoru manipulátoru.

#### 4.1.1 Pracovní prostor

Pracovní prostor, můžeme stanovit z přímé kinematiky bodu  $E$  (4.2). Intervaly možných natočení jednotlivých kloubů diskretizujeme a pro všechny vzájemné kombinace těchto hodnot natočení si vykreslíme polohu bodu  $E$ .



Obrázek 9 - řez pracovním prostorem

Pracovní prostor manipulátoru se nachází mezi dvěma koulemi o poloměrech  $r_1 \doteq 0.64 \text{ m}$  a  $r_2 \doteq 0.25 \text{ m}$  a středem v kloubu  $B$ .

### 4.1.2 Trajektorie

Ze znalosti pracovního prostoru jsem nyní mohl navrhnout experimentální trajektorii koncového efektoru. Aby se později daly ověřit přednosti „Computed Torques“, zvolil jsem trajektorii tvaru spirály. Při pohybu po spirále se budou měnit všechny natočení kloubů. Při pohybu po určitých symetrických trajektoriích byly, některé úhly konstantní, což se nehodí pro pozdější optimalizaci regulátoru, při které by měly být zahrnuty pohyby všech os.

Vektor kartézských souřadnic spirály v globálním souřadnicovém systému  $r_{0S}$  jsem vyjádřil jako funkci polárních souřadnic  $r$  a  $\varphi$ , přičemž poloměr  $r$  se postupně zvětšuje a je také funkcí  $\varphi$ .

$$x_{0S} = 0.45 + \frac{\varphi}{50} \cos(\varphi) \quad (4.5)$$

$$y_{0S} = 0 + \frac{\varphi}{50} \sin(\varphi)$$

$$z_{0S} = 0.1 + 0.1 \sin(\varphi)$$

Vztahy (4.5) dvakrát derivujeme pro získání rychlosti a zrychlení na trajektorii. Zvolené parametry nezávislé polární souřadnice  $\varphi$  jsou následující.

$$\varphi = \dot{\varphi} \cdot t \quad [rad] \quad (4.6)$$

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 + \ddot{\varphi} \cdot t \quad [rad/s]$$

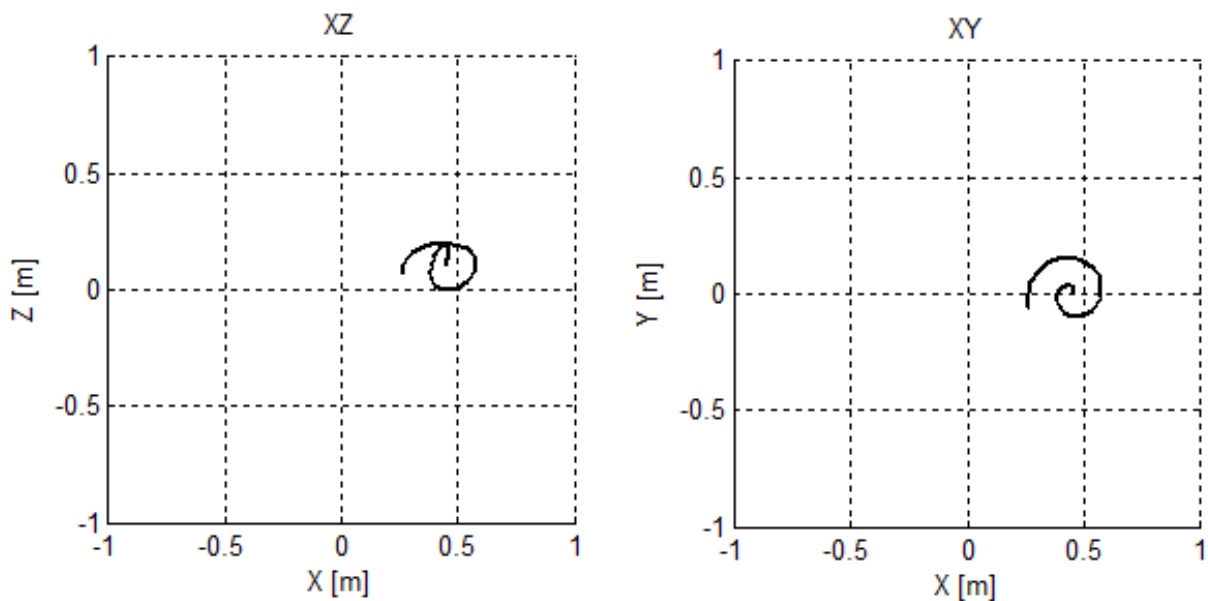
$$\ddot{\varphi} = 1 \quad [rad/s^{-2}]$$

$$\dot{\varphi}_0 = 0.25 \quad [rad/s]$$

$$t = 0 \div 3 \quad [s]$$

Konstanty ve vztazích (4.5) jsem stanovil tak, aby spirála co nejdéle spadala do pracovního prostoru a  $\dot{\varphi}_0, \ddot{\varphi}$  ve (4.6) jsem si zvolil.

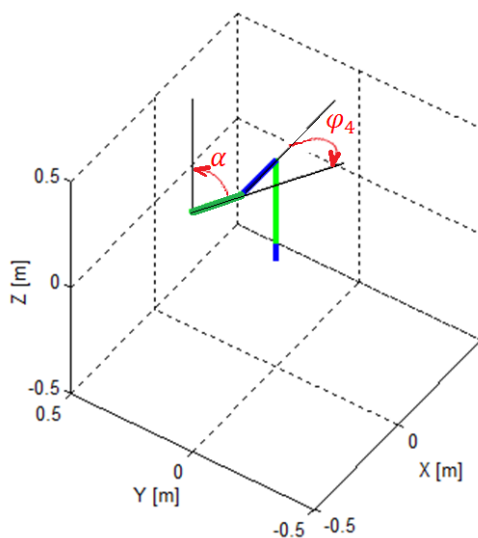




Obrázek 10 - experimentální trajektorie

#### 4.1.3 Výpočet inverzí kinematiky

Trajektorii jsem diskretizoval s časovým krokem  $0.01s$  na 301 bodů. Pro každý bod trajektorie potřebujeme nyní určit takové kloubové souřadnice  $q$ , které zajistí aby se koncový efektor nacházel právě v tomto bodě. Manipulátor má 4 stupně volnosti tzn. že musíme požadovanou polohu efektoru definovat 4 parametry. Zatím máme tři kartézské souřadnice bodu trajektorie. Čtvrtým parametrem bude úhel  $\alpha$ , kterým nastavíme sklon posledního ramene. Úhel  $\alpha$  je zakreslen na obrázcích 8 a 11. Pozor úhly  $\alpha$  a  $\varphi_4$  nemusí ležet v jedné rovině.  $\alpha$  je definován v rovině tvořené ramenem 4 a svislicí rovnoběžnou s osou  $Z_0$ . Úhel  $\varphi_4$  je měřen v rovině tvořené rameny 3 a 4.



Obrázek 11 – úhel  $\alpha$

Úhel  $\alpha$  může být nastaven libovolně od 0 do 90 stupňů. Při manipulaci s předmětem, nastavíme úhlem  $\alpha$  jeho prostorovou orientaci. Samozřejmě pouze v jedné ose. Nyní už máme čtyři parametry a můžeme sestavit rovnice inverzní kinematiky. Vazbu efektoru na trajektorii a sklon posledního ramene pod úhlem  $\alpha$  vyjadřují vztahy (4.7) a (4.8).

$$\mathbf{r}_{0E} = \mathbf{r}_{0S} \quad (4.7)$$

$$(z_{0D} - z_{0E})^2 = (l_4 \cos(\alpha))^2 \quad (4.8)$$

$$\mathbf{r}_{0E} = [x_{0E} \quad y_{0E} \quad z_{0E}]^T \quad (4.9)$$

$$\mathbf{r}_{0S} = [x_{0S} \quad y_{0S} \quad z_{0S}]^T \quad (4.10)$$

$$\mathbf{r}_{0D} = [x_{0D} \quad y_{0D} \quad z_{0D}]^T \quad (4.11)$$

$\mathbf{r}_{0S}$  je vektor bodu trajektorie,  $\mathbf{r}_{0D}$  a  $\mathbf{r}_{0E}$  jsou vektory kloubu  $D$  a efektoru. Vztahy (4.7) a (4.8) zapíšeme do vektoru vazbových rovnic.

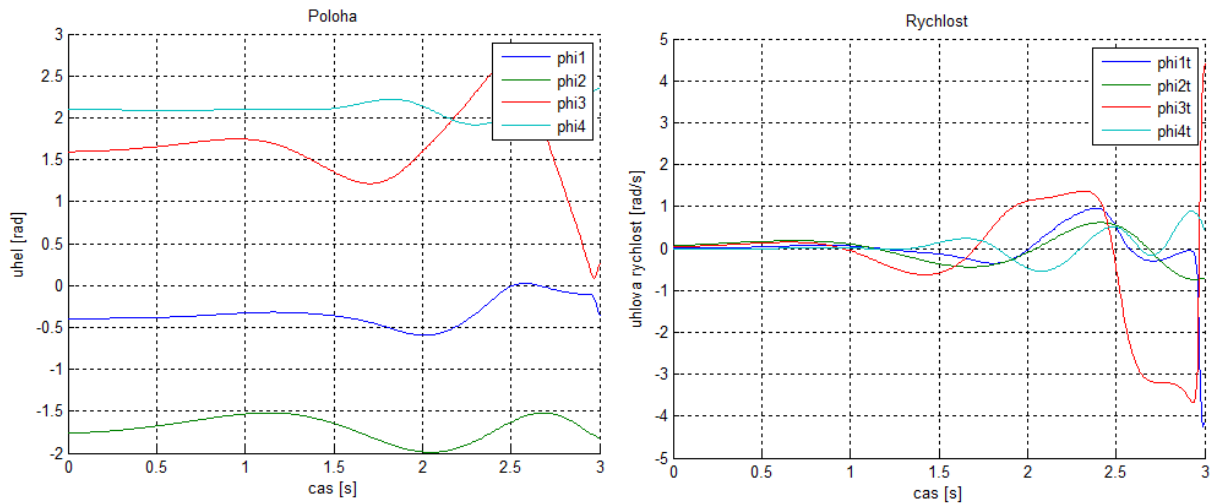
$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{0E} - \mathbf{r}_{0S} \\ (z_{0D} - z_{0E})^2 - (l_4 \cos(\alpha))^2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.12)$$

Za  $\mathbf{r}_{0E}$  dosadíme první 3 řádky roznásobeného vztahu (4.2) a za  $\mathbf{r}_{0D}$  totéž ze vztahu (4.13).

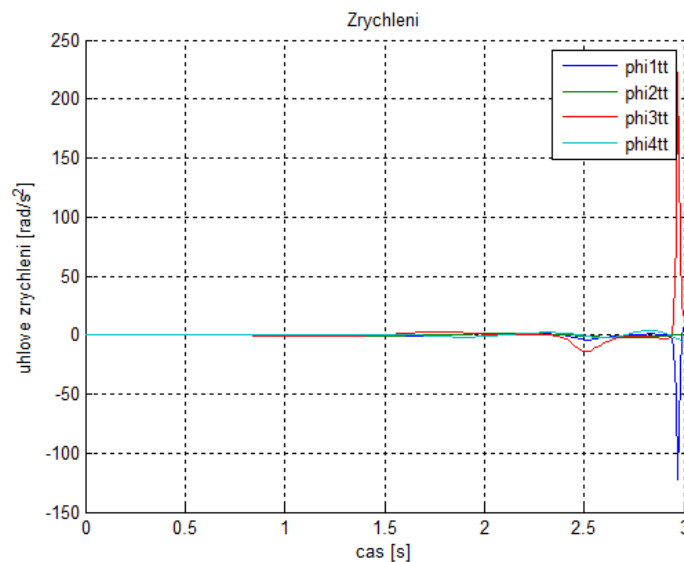
$$\mathbf{r}_{0D} = \mathbf{T}_{03} \mathbf{r}_{3D} \quad (4.13)$$

$$\mathbf{r}_{3D} = \left[-\frac{l_3}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 1\right]^T$$

Dostali jsme čtyři nelineární rovnice pro neznámé  $\mathbf{q}$ . Rovnice (4.12) vyřešíme pro všechny body trajektorie Newtonovou iterační metodou popsanou v [7].  $\dot{\mathbf{q}}$  a  $\ddot{\mathbf{q}}$  určíme z lineárních vztahů (2.32) z [7].



Obrázek 12 – průběhy  $q$  a  $\dot{q}$



Obrázek 13 -  $\ddot{q}$

## 4.2 Dynamický model manipulátoru

Pro každé ze čtyř ramen sestavíme 6 dynamických rovnic (3.34) , (3.37). Celkem jich bude 24. Tyto rovnice potřebují sestavit analyticky v uzavřeném tvaru. Kvůli jejich složitosti však není možné je rozepisovat ručně na papíře. Využil jsem proto symbolického matematického formalizmu, který je obsažen v Matlabu v symbolic toolboxu. Stačí jen definovat symbolické proměnné a Matlab už sám provede roznásobení složitých maticových rovnic příp. jejich derivace a také zjednoduší složité výsledné výrazy.

#### 4.2.1 Hmotnostní charakteristiky manipulátoru

Ramena modelují jako tyče s poloměrem  $r_i$ , délkou  $l_i$  a hustotou  $\rho$ .

$$m_i = \rho \cdot l_i \cdot \pi r_i^2 \quad (4.14)$$

Maticе setrvačnosti je vyjádřena vždy k těžišti ramene, vůči němuž je rameno symetrické, a proto budou deviační momenty nulové. Těžiště je uprostřed ramene.

$$\mathbf{I}_i = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Moment setrvačnosti vůči ose kolmé na rameno a procházející jeho těžištěm.

$$I = \frac{1}{12} m_i \cdot l_i^2 \quad (4.16)$$

Moment setrvačnosti k podélné ose ramene.

$$I = \frac{1}{2} m_i \cdot r_i^2 \quad (4.17)$$

Tady bych jenom upozornil, že pro první dvě ramena je podélnou osou osa  $Z$  a pro rameno 3 a 4 je to osa  $X$ .

#### 4.2.2 Vektor $\mathbf{a}_{Ti}$

Vektor zrychlení těžiště tělesa  $i$ . Musí být vyjádřen v systému 0. Použijeme maticový zápis.

$$\mathbf{r}_{0Ti} = \mathbf{T}_{0i} \mathbf{r}_{iT_i} \quad (4.18)$$

$$\mathbf{r}_{iT_i} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T$$

$\mathbf{T}_{0i}$  máme rozepsány v (4.4). Vztahy (4.18) následně dvakrát derivujeme podle času, abychom získali zrychlení. Vyžil jsem na to příkaz *jacobian(r, x)*, který udělá Jakobiho matici parciálních derivací vektoru  $\mathbf{r}$  podle prvků z vektoru  $\mathbf{x}$ . Obešel jsem se tak bez rychlostních matic (3.10) a matic zrychlení (3.19).

$$\mathbf{a}_{0Ti} = \ddot{\mathbf{r}}_{0Ti} = [a_{x0Ti} \quad a_{y0Ti} \quad a_{z0Ti} \quad 0]^T \quad (4.19)$$

Nesmíme zapomenout odstranit z vektoru poslední nulu, aby měl dimenzi tři.

```

phi=[phi1; phi2; phi3; phi4];
phit=[phi1t; phi2t; phi3t; phi4t];
phitt=[phi1tt; phi2tt; phi3tt; phi4tt];

v0T1=jacobian(r0T1,phi)*phit;
a0T1=jacobian(v0T1,phi)*phit + jacobian(v0T1,phit)*phitt;

```

Obrázek 14 - příkaz jacobian

### 4.2.3 Vektor $\omega_i$

Vektor  $\omega_i$  musíme vyjádřit vždy v lokálním systému tělesa  $i$ . Prvky tohoto vektoru jsou obsaženy v matici úhlových rychlostí  $\Omega_{i,0i}$  (3.13), kterou získáme ze vztahu (3.12). Vektor  $\omega_i$  pak z ní získáme jednoduše.

$$\omega_i = [\Omega_{i,0i}(3,2) \quad \Omega_{i,0i}(1,3) \quad \Omega_{i,0i}(2,1)]^T \quad (4.20)$$

Vyjádříme si jednotlivé rotační matice a jejich derivace pro použití ve vztahu (3.12).

Díličí rotační matice.

$$S_{01} = S_{\varphi_z}(\varphi_1) \quad (4.21)$$

$$S_{12} = S_{\varphi_y}(-\varphi_2)$$

$$S_{23} = S_{\varphi_x}(\varphi_3)$$

$$S_{34} = S_{\varphi_y}(-\varphi_4)$$

Vztahy (4.22) představují matice úhlových rychlostí těchto základních rotací. Použijeme je k výpočtu derivací rotačních matic (4.21) podle vztahu (3.12).

$$\Omega_{\varphi_x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varphi_x \\ 0 & \varphi_x & 0 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$$\Omega_{\varphi_y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \varphi_y \\ 0 & 0 & 0 \\ -\varphi_y & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Omega_{\varphi_z} = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_z & 0 \\ \varphi_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Derivace matic (4.21).

$$\dot{\mathbf{S}}_{01} = \mathbf{S}_{\varphi_z}(\varphi_1) \cdot \boldsymbol{\Omega}_{\varphi_z}(\varphi_1) \quad (4.23)$$

$$\dot{\mathbf{S}}_{12} = \mathbf{S}_{\varphi_y}(-\varphi_2) \cdot \boldsymbol{\Omega}_{\varphi_y}(-\varphi_2)$$

$$\dot{\mathbf{S}}_{23} = \mathbf{S}_{\varphi_x}(\varphi_3) \cdot \boldsymbol{\Omega}_{\varphi_x}(\varphi_3)$$

$$\dot{\mathbf{S}}_{34} = \mathbf{S}_{\varphi_y}(-\varphi_4) \cdot \boldsymbol{\Omega}_{\varphi_y}(-\varphi_4)$$

Rotační matice do systém 0.

$$\mathbf{S}_{02} = \mathbf{S}_{01} \cdot \mathbf{S}_{12} \quad (4.24)$$

$$\mathbf{S}_{03} = \mathbf{S}_{02} \cdot \mathbf{S}_{23}$$

$$\mathbf{S}_{04} = \mathbf{S}_{03} \cdot \mathbf{S}_{34}$$

Jejich derivace

$$\dot{\mathbf{S}}_{02} = \dot{\mathbf{S}}_{01} \cdot \mathbf{S}_{12} + \mathbf{S}_{01} \cdot \dot{\mathbf{S}}_{12} \quad (4.25)$$

$$\dot{\mathbf{S}}_{03} = \dot{\mathbf{S}}_{02} \cdot \mathbf{S}_{23} + \mathbf{S}_{02} \cdot \dot{\mathbf{S}}_{23}$$

$$\dot{\mathbf{S}}_{04} = \dot{\mathbf{S}}_{03} \cdot \mathbf{S}_{34} + \mathbf{S}_{03} \cdot \dot{\mathbf{S}}_{34}$$

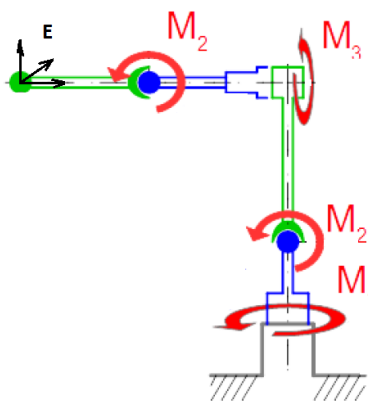
Ted' můžeme sestavit 4 matice úhlových rychlostí (3.13) a z nich 4 vektory úhlové rychlosti (4.20).

#### 4.2.4 Vektor $\alpha_i$

Vektor  $\alpha_i$  získáme derivací  $\omega_i$ , k čemuž jsem opět použil příkaz *jacobian*.

#### 4.2.5 Vektory $\sum F_i$ a $\sum n_i$

V nich vystupují hnací, zátěžné, reakční a tíhové síly a momenty.

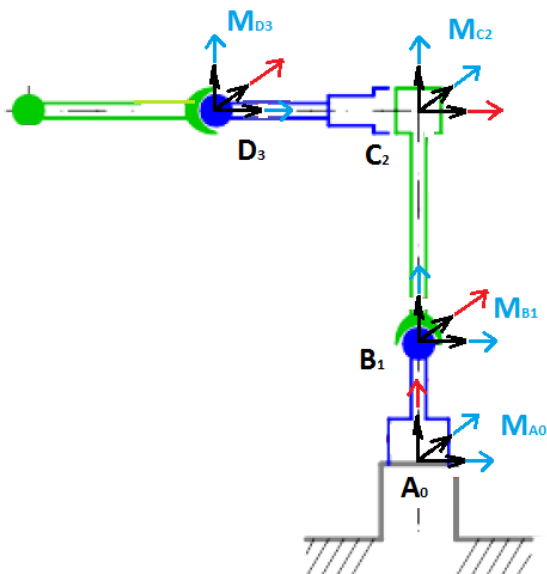


Obrázek 15 - hnací momenty a zatížení efektoru [6]

Kladný směr hnacích momentů souhlasí s kladným směrem kloubových souřadnic. Zátěžná síla  $E$  je součtem setrvačné a gravitační síly působící na těleso o hmotnosti  $m$  zavěšené na efektoru. Těleso je bráno jako hmotný bod.

$$E = -m\mathbf{a}_E - m[0 \ 0 \ g]^T \quad (4.26)$$

$\mathbf{a}_E$  je vektor zrychlení efektoru.



Obrázek 16 - reakce v kloubech [6]

Kloub umožňuje rotaci pouze kolem jedné osy (jeden stupeň volnosti) a tudíž pět stupňů volnosti odebrává. V každém kloubu bude pět neznámých reakčních účinků. Tři silové účinky zajišťují, aby se kloub nerozpojil. Dva momentové účinky zamezují rotacím ve zbývajících dvou osách.

Na obrázku 16 jsou reakční síly kresleny černě a reakční momenty modře. Ve směru otáčení kloubu je složka reakčního momentu nakreslena červeně. Je to reakce od motoru, který zpětně působí na rameno, na kterém je upevněn. Tato složka není neznámou, má stejnou velikost jako moment motoru, ale opačné znaménko.

Z dynamických rovnic vypočítáme hodnoty složek reakcí, abychom ale věděli v jakém souřadném systému jsou vyjádřeny a jaká je jejich kladná orientace, musíme je nejdříve definovat.

Základní složky reakčních sil a momentů (bez indexu souřadného systému a v kladném směru os), které vypočteme z rovnic, jsou vyjádřeny v souřadném systému, kde se reakce vyskytla poprvé při postupu od rámu. Tzn. reakce **A** se vyskytuje poprvé na rámu, proto budou její základní složky vyjádřeny v systému 0, stejně jako složky momentu  $\mathbf{M}_A$ . Reakce **B** a moment  $\mathbf{M}_B$  se poprvé objevují na rameni 1 a mají tedy složky bez indexů vyjádřeny v systému 1.

$$\mathbf{A}_0 = [A_x \quad A_y \quad A_z]^T \quad (4.27)$$

$$\mathbf{B}_1 = [B_x \quad B_y \quad B_z]^T$$

$$\mathbf{C}_2 = [C_x \quad C_y \quad C_z]^T$$

$$\mathbf{D}_3 = [D_x \quad D_y \quad D_z]^T$$

$$\mathbf{M}_{A0} = [M_{Ax} \quad M_{Ay} \quad -M_1]^T \quad (4.28)$$

$$\mathbf{M}_{B1} = [M_{Bx} \quad M_2 \quad M_{Bz}]^T$$

$$\mathbf{M}_{C2} = [-M_3 \quad M_{Cy} \quad M_{Cz}]^T$$

$$\mathbf{M}_{D3} = [M_{Dx} \quad M_4 \quad M_{Dz}]^T$$

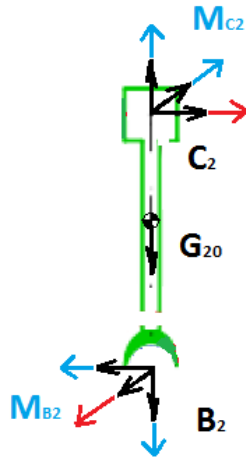
Při sestavování vektorů  $\sum \mathbf{F}_i$  a  $\sum \mathbf{n}_i$  pro jednotlivá tělesa, musíme reakční síly a momenty transformovat z jejich základních vyjádření (4.27) a (4.28) do jiných souřadných systémů. Indexování těchto různých vyjádření může být dosti nepřehledné, ale transformace reakcí mezi systémy jsou nezbytné pro správnost sestavení dynamických rovnic.

Důležité je při přechodu mezi tělesy dodržovat také zákon akce a reakce a měnit znaménka reakčních účinků.



Pro názornost popíši sestavení  $\sum \mathbf{F}_i$  a  $\sum \mathbf{n}_i$  pro těleso 2, pro ostatní je to analogické. Podrobné rozepsání metody je ve skriptu *generator\_M\_Q\_Minv\_Qinv.m* v příloze na cd.

Na těleso 2 působí jeho tíha  $\mathbf{G}_{20}$ , a reakční síly a momenty  $\mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2$  a  $\mathbf{M}_{B2}, \mathbf{M}_{C2}$ , v nichž je již zahrnut hnací moment motoru 2 a reakční moment motoru 3.



Obrázek 17 - těleso 2

Reakce  $\mathbf{B}_1$  a  $\mathbf{M}_{B1}$  musíme transformovat ze systému 1 do systému 2 a zároveň dodržet zákon akce a reakce.

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{S}_{12}^T \cdot (-\mathbf{B}_1) \quad (4.29)$$

$$\mathbf{M}_{B2} = \mathbf{S}_{12}^T \cdot (-\mathbf{M}_{B1}) \quad (4.30)$$

Reakce  $\mathbf{C}_2$  a moment  $\mathbf{M}_{C2}$  mají už v systému 2 svoje základní vyjádření. Dále transformujeme reakce  $\mathbf{B}_2$  a  $\mathbf{C}_2$  do hlavního systému 0.

$$\mathbf{B}_{20} = \mathbf{S}_{02} \cdot \mathbf{B}_2 \quad (4.31)$$

$$\mathbf{C}_{20} = \mathbf{S}_{02} \cdot \mathbf{C}_2 \quad (4.32)$$

Tíha  $\mathbf{G}_{20}$  je již v systému 0. V Eulerových rovnicích nevystupuje, protože vzhledem k těžišti nevytváří žádný moment.

$$\mathbf{G}_{20} = [0 \quad 0 \quad -m_2g]^T \quad (4.33)$$

Suma sil, působících na těžiště tělesa 2, vyjádřená v hlavním systému.

$$\sum \mathbf{F}_{20} = \mathbf{B}_{20} + \mathbf{C}_{20} + \mathbf{G}_{20} \quad (4.34)$$

Suma momentů otáčejících těleso 2 kolem jeho těžiště, vyjádřená v systému 2.

$$\sum \mathbf{n}_2 = \mathbf{M}_{B_2} + \mathbf{M}_{C_2} + \mathbf{r}_{B_2} \times \mathbf{B}_2 + \mathbf{r}_{C_2} \times \mathbf{C}_2 \quad (4.35)$$

$$\mathbf{r}_{B_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{l_2}{2} \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

$$\mathbf{r}_{C_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{l_2}{2} \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

Vektory  $\mathbf{r}_{B_2}$  a  $\mathbf{r}_{C_2}$  jsou ramena, na kterých působí síly  $\mathbf{B}_2$  a  $\mathbf{C}_2$  při otáčení ramena 2 okolo těžiště a jsou vyjádřena v systému 2.

#### 4.2.6 Matice hmotnosti a vektor pravé strany

Máme pro všechny čtyři ramena sestaveny rovnice (3.34), (3.37). Posledním krokem je získání matice hmotnosti a vektoru pravé strany. Abychom to mohli udělat zapíšeme rovnice v tomto tvaru.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} m\mathbf{a}_{T_1} - \sum \mathbf{F}_{10} \\ \mathbf{I}_1 \cdot \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{I}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_1 - \sum \mathbf{n}_1 \\ \vdots \\ m\mathbf{a}_{T_4} - \sum \mathbf{F}_{40} \\ \mathbf{I}_4 \cdot \boldsymbol{\alpha}_4 + \boldsymbol{\omega}_4 \times \mathbf{I}_4 \cdot \boldsymbol{\omega}_4 - \sum \mathbf{n}_4 \end{bmatrix} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (4.38)$$

Neznámé jsou v rovnicích různě roztroušeny, ruční sestavování matice hmotnosti nepřipadá v úvahu. Víme ovšem, že neznámé v rovnicích vystupují pouze lineárně. Uděláme Jakobiho matici parciálních derivací vektoru rovnic  $\mathbf{R}$  podle jednotlivých neznámých (pomocí příkazu *jacobian*). Neznámé tím vymizí a Jakobiho matice bude zároveň maticí hmotnosti.

$$M_{ij} = \frac{\partial R_i}{\partial x_j} \quad (4.39)$$

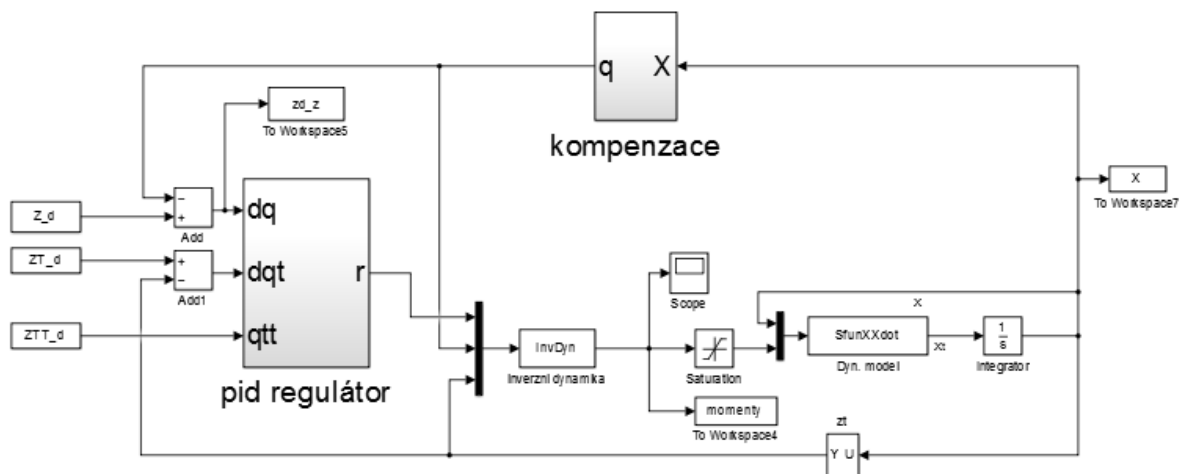
Vektor pravé strany získáme ze (4.38) jako

$$\mathbf{Q} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{R} \quad (4.40)$$

Pokud jsou ve vektoru neznámých  $\mathbf{x}$  reakce a zrychlení nezávislých souřadnic, získáme  $\mathbf{M}$  a  $\mathbf{Q}$  pro přímou dynamiku. Obsahuje-li  $\mathbf{x}$  reakce a pohonné momenty, získáme  $\mathbf{M}_{inv}$  a  $\mathbf{Q}_{inv}$  pro inverzní dynamiku.

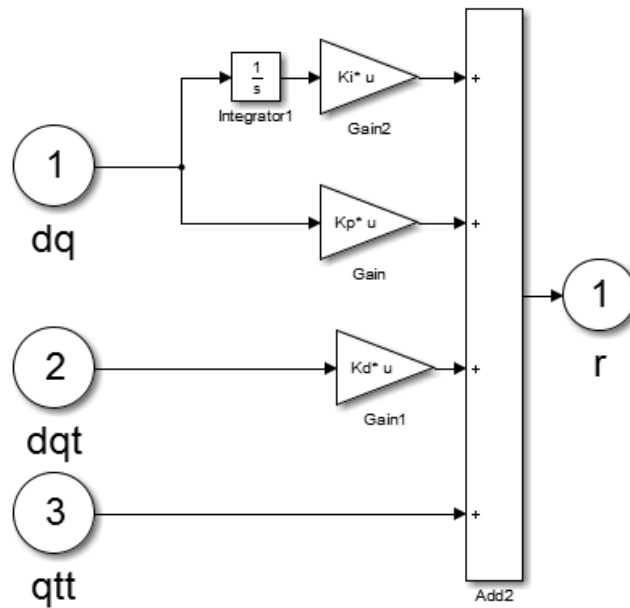
### 4.3 Řízení

Simulaci řízení jsem provedl v Simulinku, což je nadstavba Matlabu. Simulinkový model řízení podle schématu „Computed Torques“ je na obrázku 18.



Obrázek 18 - výpočtové schéma

Sekce pid regulátor obsahuje 4 regulátory. Jejich konstanty jsou v maticích  $\mathbf{K}_P, \mathbf{K}_I, \mathbf{K}_D$ . V sekci kompenzace je simulováno přídavné odměřování.



Obrázek 19 - schéma pid regulátoru

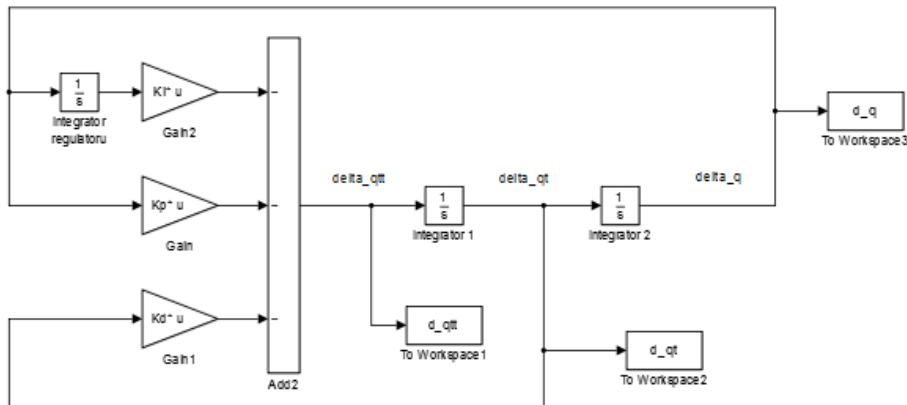
Momenty z inverzní dynamiky jdou přes modul saturace, kde jsou nastaveny jejich limity. Reálně budou nejspíše motory řízeny proudově, takže to bude proudové omezení. Proud je přímo úměrný momentu a spočítáme ho z momentu vynásobením konstantou, která je parametrem motoru. Omezené momenty vstupují do přímé dynamiky poddajného manipulátoru, který simuluje reálnou soustavu. Z dynamiky jdou zrychlení kloubových a deformačních souřadnic. Integrací získáme rychlost a polohu, jejichž odchylky od žádaných hodnot jsou vstupem opět do pid regulátoru. Tento cyklus se opakuje v každém časovém kroku.

#### 4.3.1 Optimalizace pid regulátoru

Pokud jsou konstanty správně nastaveny, regulátor rychle snižuje hodnotu regulačních odchylek. K nastavení slouží empirické vzorce nebo specializované algoritmy. Dobře nastavit pid regulátor jen zkoušením lze spíše jen v jednoduchých aplikacích. Řešení můžeme nalézt také optimalizační metodou. Využil jsem optimalizační funkci *fminsearch*, která hledá minimum zadaného výrazu. Funkce je naprogramovaná v matlabu.

Konstanty jsem optimalizoval v několika krocích. Nejdříve bez připojení regulátoru k soustavě. Schéma samotného regulátoru bez dynamiky manipulátoru.

$$\Delta \ddot{q} + K_D \Delta \dot{q} + K_P \Delta q + K_I \int \Delta q = 0$$



Obrázek 20 - optimalizace regulátoru

Do integrátorů jsem zadal počáteční odchylky rychlosti a polohy. Počáteční odhad konstant jsem zvolil 100 (pro každou) a cílovou funkci jako.

$$CF = \int_0^T \Delta q^2 \quad (4.41)$$

V každé iteraci funkce *fminsearch* byl odsimulován model z obrázku 20 a následně vyčíslen vztah (4.41). Výsledkem optimalizace byly tři konstanty regulátoru.

Druhá optimalizace byla už provedena s dynamikou podle schématu 18 jen s tím rozdílem, že místo dynamického modelu poddajného manipulátoru byla použita dynamika pro tuhý manipulátor, sestavená v kapitole (4.2). Manipulátor byl řízen po experimentální trajektorii definované v kapitole (4.1.2). Cílová funkce byla stejná a počáteční odhad pro všechny regulátory byl dán výsledky první optimalizace. Výsledkem bylo dvanáct pid konstant. Tato optimalizace byla zařazena, protože při řízení poddajného manipulátoru bez správného nastavení pid docházelo k velkému rozkmitání a následně vždy výpočet skončil chybou.

Je nemožné získat přesně hmotnostní parametry reálného zařízení. V naší simulaci reálné zařízení představuje přímá dynamika. Proto byl mezi hmotnostními parametry inverzní a přímé dynamiky záměrně vytvořen náhodný rozdíl o maximální hodnotě cca 20 %.

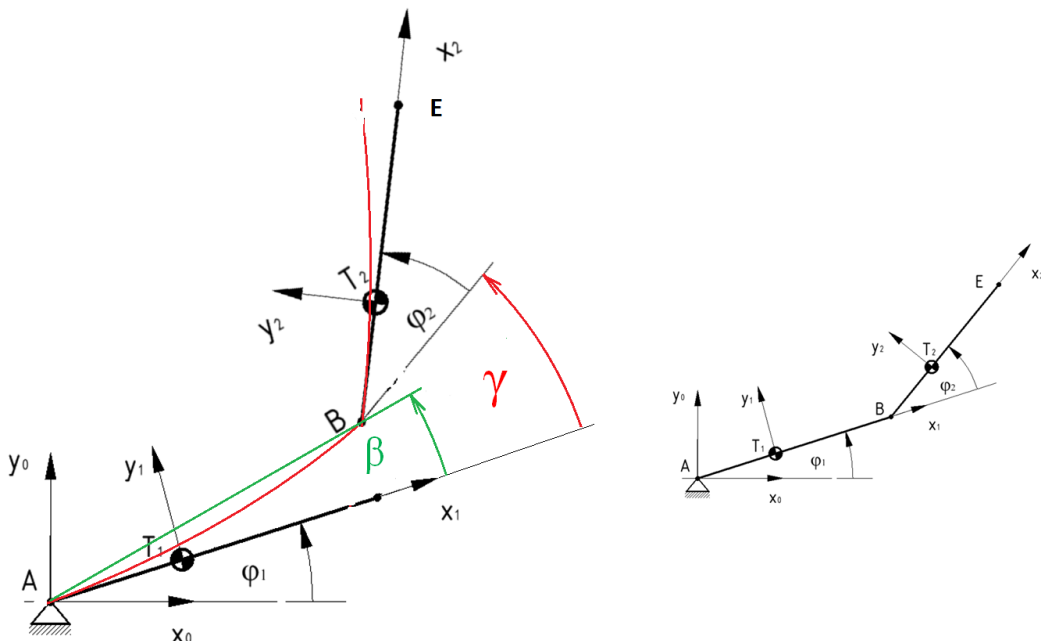
Poslední optimalizace byla provedena stejným způsobem, ale už při řízení poddajného manipulátoru.

Výsledné konstanty regulátorů.

$$\begin{array}{lll}
 k_{P1} = 7.4715e7 & k_{I1} = 262 & k_{D1} = 235 \\
 k_{P2} = 2.8519e7 & k_{I2} = 2.8134e3 & k_{D2} = 205 \\
 k_{P3} = 9.5891e7 & k_{I3} = 1.1366e4 & k_{D3} = 7 \\
 k_{P4} = 8.5363e7 & k_{I4} = 3.4863e3 & k_{D4} = 189
 \end{array} \quad (4.42)$$

### 4.3.2 Přídavné odměřování

Nezávislé souřadnice a deformace těles poddajného modelu jsou na obrázku 1. Na obrázku 11 je spojení dvou poddajných ramen a definice jejich úhlových souřadnic a deformací (tento ilustrační obrázek neodpovídá přesně našemu manipulátoru, ale pozice úhlů na něm je dobře vidět). Zdeformovaný tvar je nakreslen červeně.



Obrázek 21 - deformace ramen

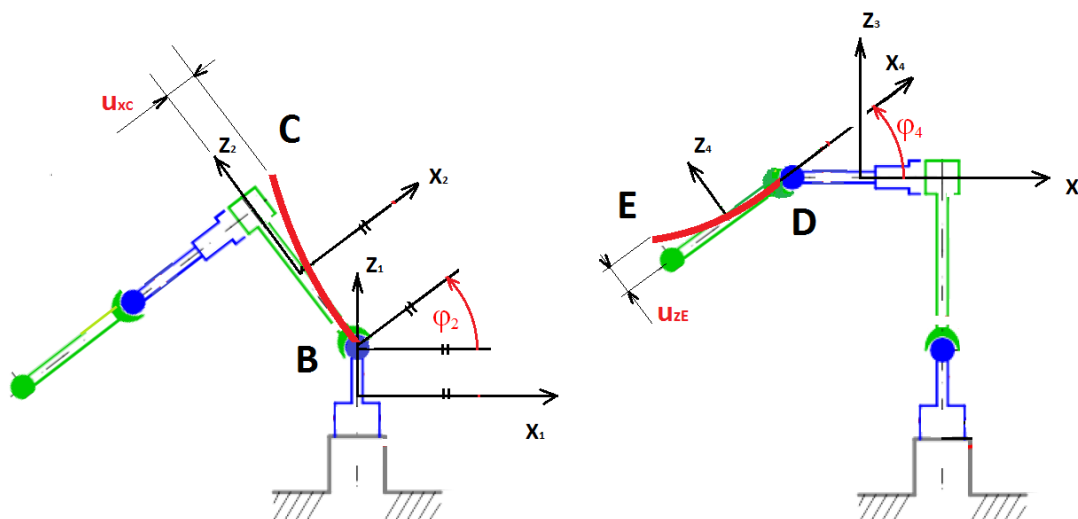
$\varphi_1$  a  $\varphi_2$  jsou nezávislé souřadnice popisující polohu tuhého ramene. Deformaci koncového bodu B prvního ramene vyjadřuje natočení  $\gamma$  a posuv  $u_y$  ve směru osy  $y_1$ .

V případě přídavného odměřování, senzory zachytí nejspíše posuv koncového bodu svého ramene (v simulaci byl tento posuv dopočítán z poddajného modelu). Z této informace se dá dopočítat úhel  $\beta$ , který přibližně odpovídá deformačnímu natočení. Úhel  $\bar{\varphi}_1 = \varphi_1 + \beta_1$  použijeme k řízení. Zbylé dva posuvy zanedbávám.

$$\beta = \arctg\left(\frac{u_y}{l}\right) \quad (4.43)$$

$u_y$  posuv koncového bodu  $B$ ,  $l$  délka ramene,  $u_x$  a  $u_z$  zanebávám.

V předchozích simulacích s manipulátorem byly pro řízení použity pouze nezávislé souřadnice  $\varphi$ , které jsou v reálu měřeny přímo na motorech. O posuvech koncových bodů ramen a jejich natočeních regulátor nevěděl. Dále jsem tedy provedl simulace s použitím přídavného odměřování, vysvětleného v předchozím odstavci. Odměřoval jsem posuv  $u_{xC}$  kloubu  $C$  a dále posuv  $u_{zE}$  koncového efektoru.



Obrázek 22 - odměřované posuvy [6]

Nové úhly pro řízení.

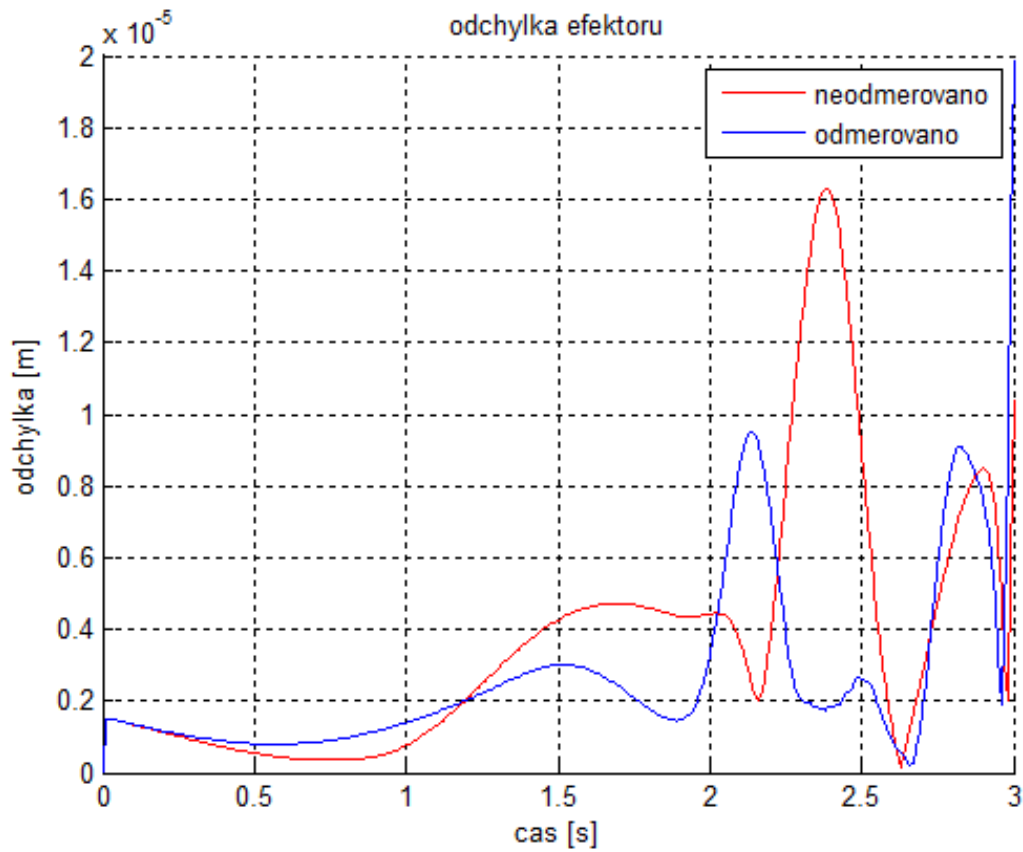
$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_1 &= \varphi_1 & \beta_2 &= \arctg\left(\frac{u_{xC}}{l_2}\right) & (4.44) \\ \bar{\varphi}_2 &= \varphi_2 - \beta_1 \\ \bar{\varphi}_3 &= \varphi_3 \\ \bar{\varphi}_4 &= \varphi_4 - \beta_4 \end{aligned}$$

### 4.3.3 Výsledky simulací

Odchylka efektoru od trajektorie je definována vztahem.

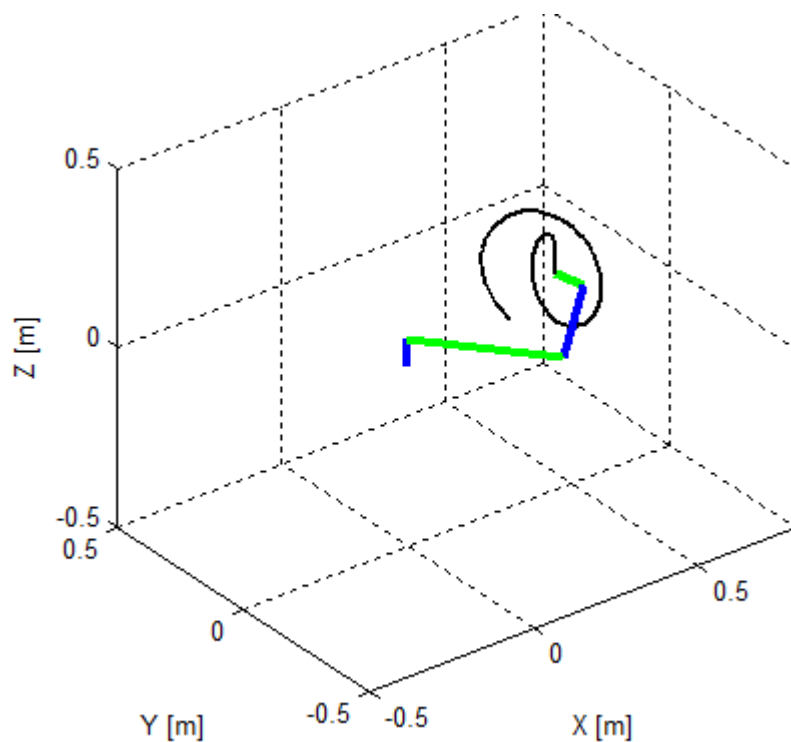
$$e_E = \|\mathbf{r}_{s_0} - \mathbf{r}_{E_0}\| \quad (4.45)$$

$\mathbf{r}_{s_0}$  je bod trajektorie a  $\mathbf{r}_{E_0}$  poloha efektoru. Srovnání odchylek od trajektorie spirály s přídavným odměřováním a bez je a na obrázku 23.



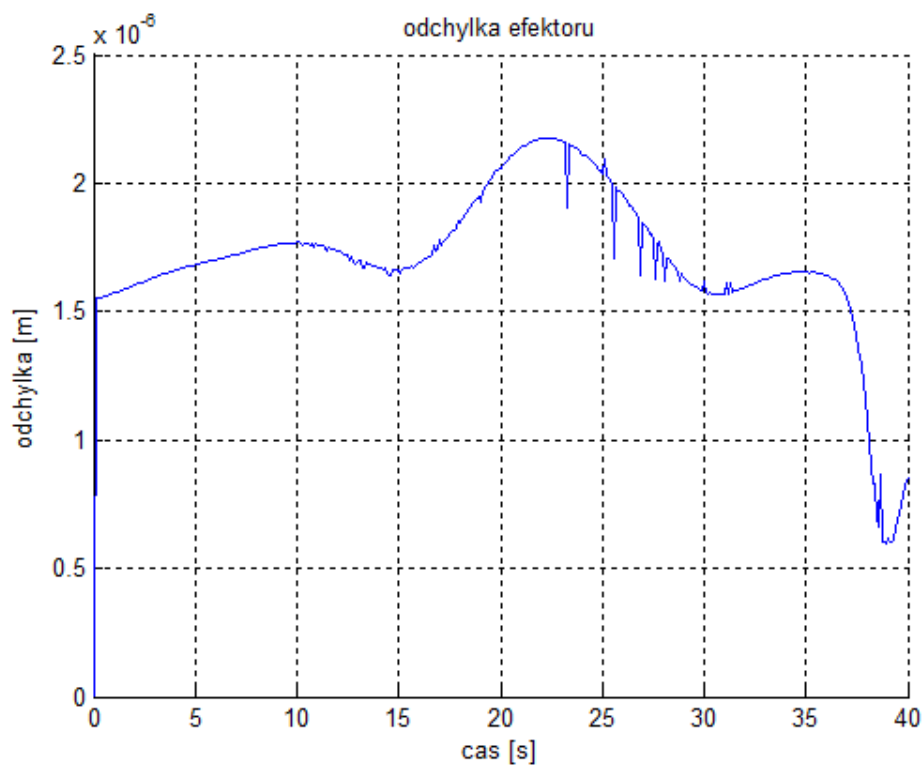
Obrázek 23 - odchylka efektoru





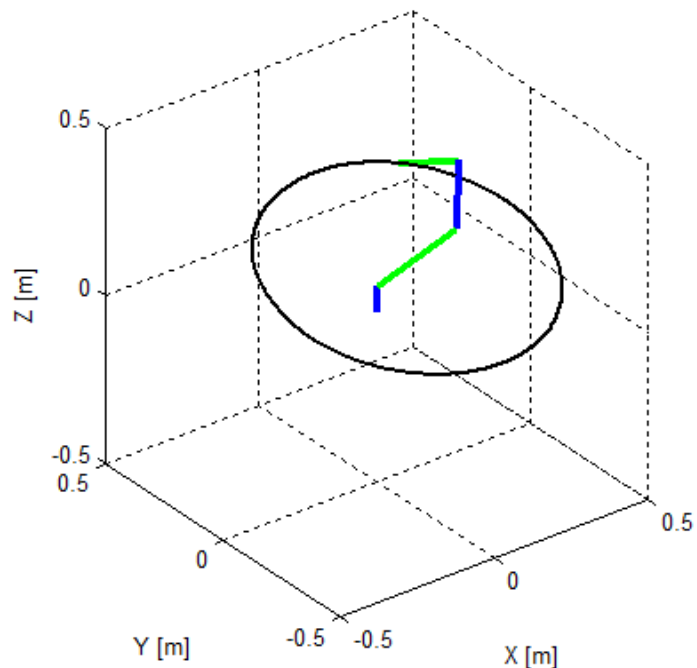
Obrázek 24 - manipulátor na trajektorii

Na obrázku 25 je opět průběh odchyly efektoru, ale úhlové zrychlení na spirále je rovno nule ( $\ddot{\varphi} = 0$ , parametry spirály jsou definovány v kapitole (4.1.2)).

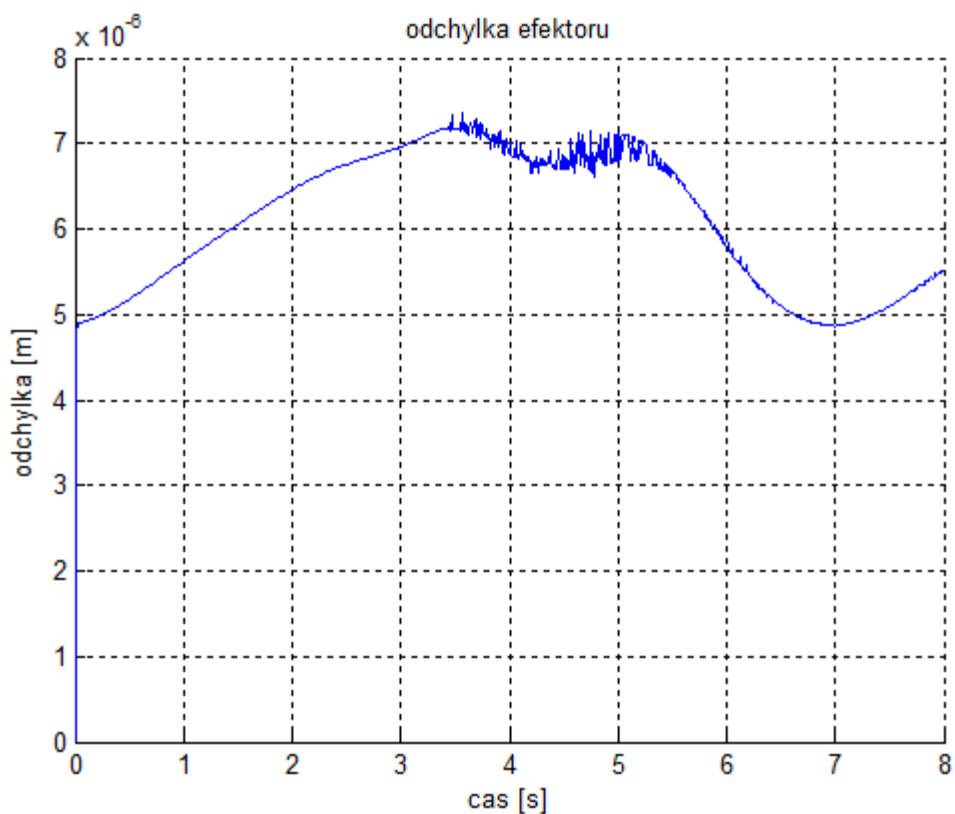


Obrázek 25 - odchylka efektoru na spirále bez zrychlení

Pro ověření, že řízení funguje správně v celém rozsahu pracovního prostoru jsem ještě odsimuloval pohyb po velké kružnici s konstantní úhlovou rychlostí  $\dot{\varphi} = 0.9 \text{ rad/s}$ .



Obrázek 26 - trajektorie kružnice



Obrázek 27 - odchylka efektoru při pohybu po kružnici

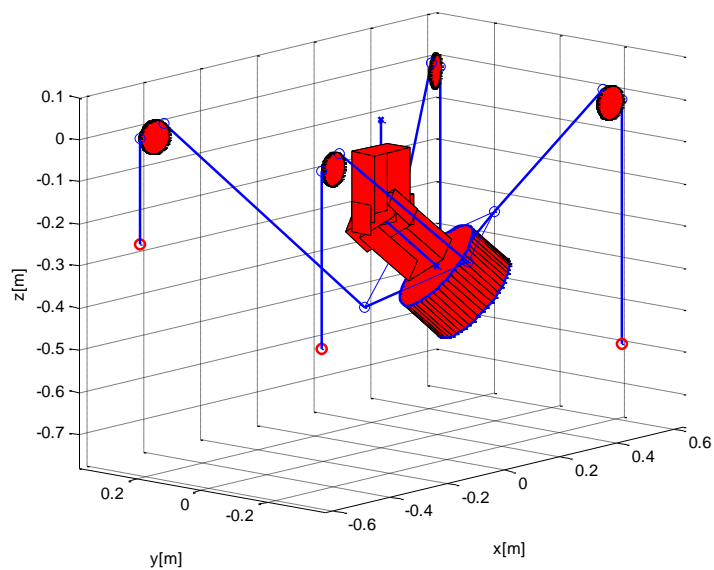
## **5 Modelování a identifikace naklápěcího vláknového mechanismu Quadrosphere**

V rámci projektu GA P101-11-1627, který se zabývá výzkumem vláknově ovládaných redundantních naklápěcích mechanismů, byl zkonstruován mechanismus s názvem Quadrosphere. Hlavním cílem projektu bylo dosáhnout u velmi lehkých vláknově ovládaných mechanismů toho, že budou mít stejnou manipulovatelnost jako tradiční mechanismy a zároveň bude umožněn hladký pohyb mezi jednotlivými polohami a dojde ke zlepšení mechanických vlastností. Předmětem zájmu byl zároveň kompromis mezi požadavkem na vláknové ovládání a rozsahem naklápění. Struktury byly optimalizovány z hlediska pracovního prostoru, kalibrovatelnosti, tuhosti a dynamiky [2].

Cílem této části práce je sestavení a identifikace poddajného dynamického modelu mechanismu Quadrosphere. Sestavení poddajného modelu tohoto mechanismu popisuje Vojtěch Fiala ve své bakalářské práci [2]. Já jsem na jeho práci navázal. Doplnil jsem tělesa mechanismu, která byla zanedbána a provedl zmíněnou identifikaci.

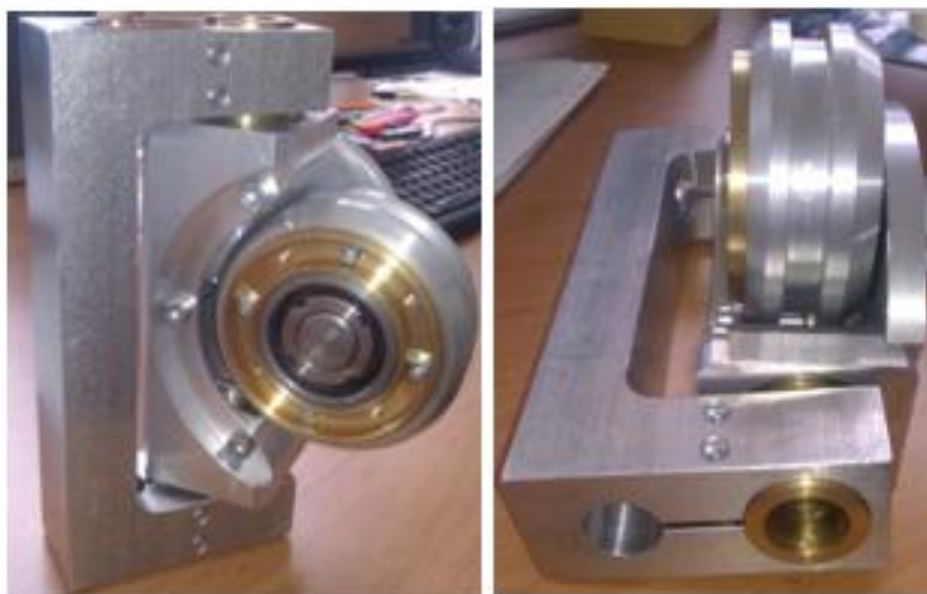
### **5.1 Popis mechanismu Quadrosphere**

Základem mechanismu Quadrosphere je platforma, která koná sférický pohyb. Poloha platformy je řízena čtyřmi vlákny, která jsou k jejím rohům natažena přes kladky, které jsou připojeny k základnímu rámu, z lineárně vedených vozíků poháněných střídavými servomotory. Všechna vlákna jsou zatížena pouze tahem. Mechanismus má tedy tři stupně volnosti a čtyři pohony [2].



**Obrázek 28 – Quadrosphere [8]**

Kladky jsou k základnímu rámu připojeny pomocí naklápěcího systému znázorněném na obrázku 29, vlákno vedoucí k vozíku prochází válcovým otvorem.



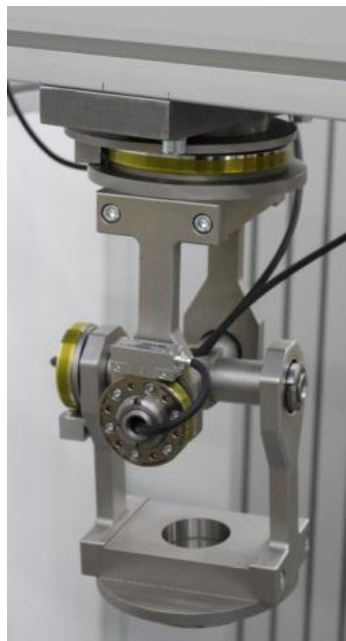
**Obrázek 29 - naklápění kladky [8]**

Lineární pohyb každého jezdce je řízen střídavým servomotorem prostřednictvím kuličkového šroubu. Délka zdvihu lineárního pohybu jezdce na vedení je 1 m (obr. 30).



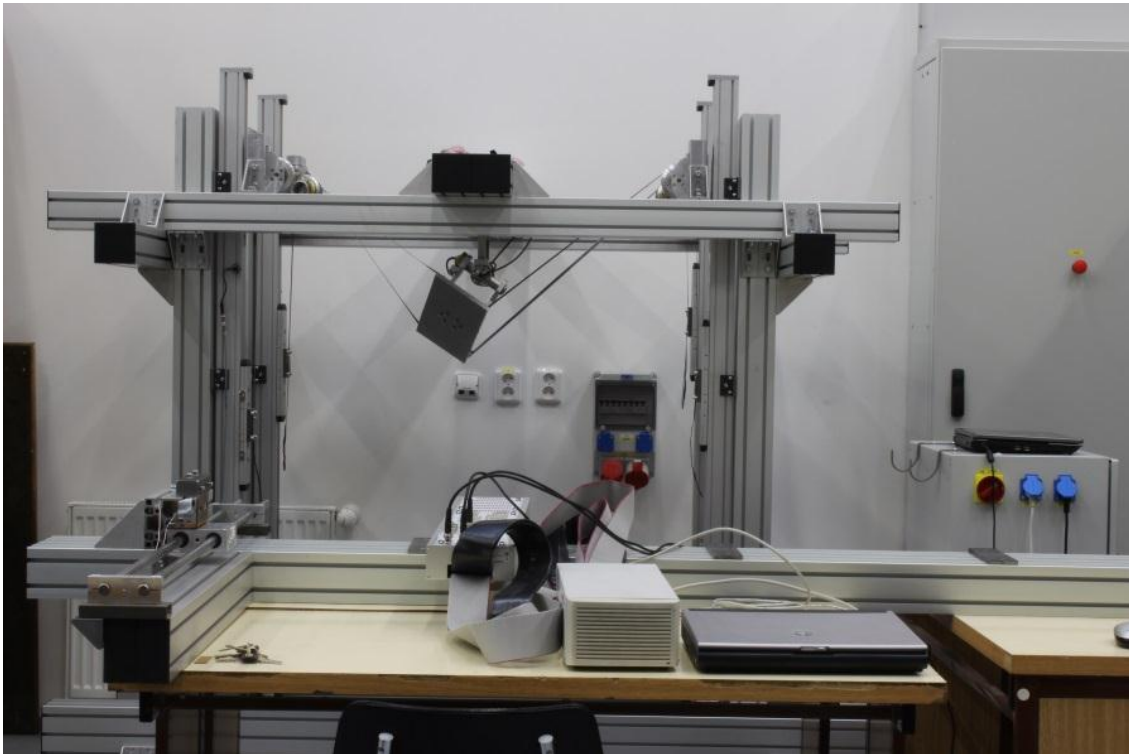
**Obrázek 30 - lineární vedení s vozíkem a servomotorem [8]**

Centrální sférický kloub (obr. 31) je vybaven třemi rotačními senzory pro přesné určení jeho orientace. Tento kloub byl navržen tak, aby bylo možné platformu natočit co možná nejvíce bez možné kolize komponent kloubu. Všechny rotace jsou měřeny pomocí systému úhlového snímače skládajícího se z prstence, čtecí hlavy a interpolátoru [2].



**Obrázek 31 - sférický kloub se snímači polohy [8]**

Model mechanismu Quadrosphere je na obrázku 32.



Obrázek 32 - funkční model mechanismu Quadrosphere [8]

## 5.2 Dynamický model mechanismu Quadrosphere

Poddajná část mechanismu jsou vlákna. Tělesa mechanismu jsou modelována jako tuhá. Kdyby i vlákna byla tuhá měl by Quadrospher 3 stupně volnosti, protože natočení kladek a posuny vozíků by byly kinematically vázány na tři úhly natočení kardanu. Poddajné vlákno se nachází mezi platformou a kladkami (jich se dotýká ideálně a neprokluzuje) a mezi kladkami a vozíky. Vlákno je modelováno jako ideální pružina, proto jeho prodloužení může být z matematického hlediska libovolné. Závisí na působící síle a tuhosti.

$$\Delta l = \frac{F}{k} \quad (5.1)$$

Zavedením poddajných vláken do mechanismu přestávají být polohy kladek a vozíků závislé na poloze kardanu, ale stávají se dalšími stupni volnosti mechanismu a tím pádem nezávislými souřadnicemi. Poddajný Quadrospher má tedy 11 stupňů volnosti.

Hlavní idea výpočtu dynamiky mechanismu spočívá v tom, že z dynamických rovnic (jejich sestavení bude dále popsáno) vypočteme zrychlení a integrací následně polohu mechanismu (11 souřadnic). Známe-li polohu, můžeme vypočítat aktuální délku vlákna a posléze jeho

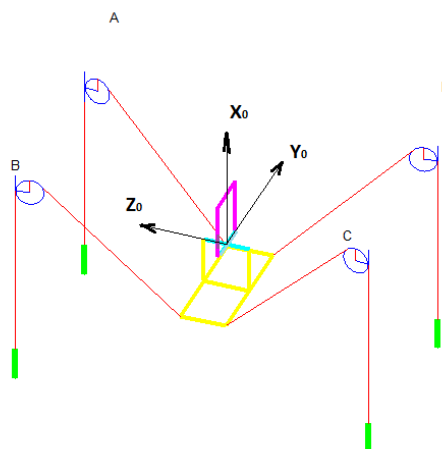
deformaci, protože víme jaká je jeho počáteční délka. Tuhost vlákna volíme jako konstantní parametr. Ze vztahu (5.1) určíme sílu ve vlákne a použijeme ji v dalším časovém kroku výpočtu dynamických rovnic. Síla k sobě váže tělesa, která jsou tímto vláknem spojena, ale kinematicky jsou nezávislá, aby se vlákno mohlo deformovat.

V počáteční poloze jsou lana nezdeformovaná a není v nich žádná síla. Tělesa spojená lanem se ale účinky gravitačních a akčních sil mohou začít pohybovat a tím zdeformovat lano, které na ně pak už bude v dalších časových okamžicích výpočtu silově působit.

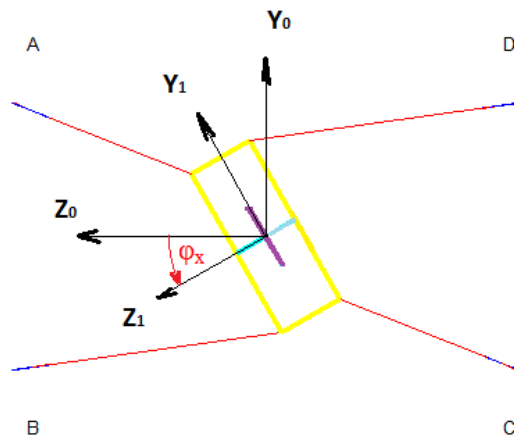
Reálně je lano schopné přenést určitou maximální sílu, po jejímž překročení se přetrhne. To v modelu ovšem zahrnuto není. Při působení velkých sil se pak lana extrémně zdeformují a mechanismus se může začít chovat podivně. Lano by také nemělo být schopné tlačit, ale pružina, kterou je lano modelováno to dokáže. Je proto dobré sledovat síly v poddajných členech mechanismu a jejich deformace a tím se ujistit, že jeho chování odpovídá realitě.

### 5.2.1 Vektory směrů vláken

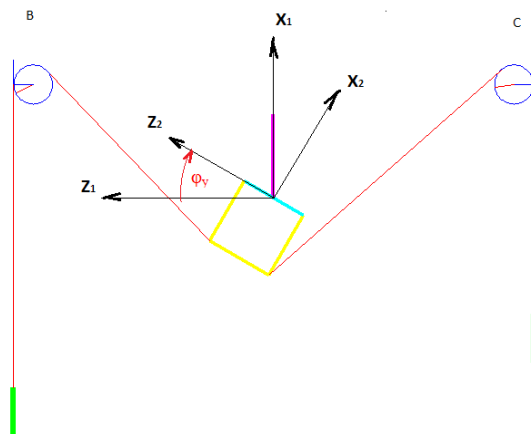
Pro sestavení pohybových rovnic mechanismu Quadrosphere je důležité najít vektory, kterými jsou definovány směry sil z vláken působících na platformu v jejích různých polohách daných třemi stupni volnosti, tedy úhly natočení  $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ . Pro jejich získání je třeba nejprve definovat polohu jednotlivých rohů platformy, ze kterých vychází vlákna, v souřadnicovém systému základního rámu. Všechny čtyři souřadnicové systémy mají počátek v průsečíku os kardanova kloubu [2]. Jejich vzájemné rotace jsou znázorněny na obrázcích. Na obr. 33 všechny systémy splyvají se systémem 0.



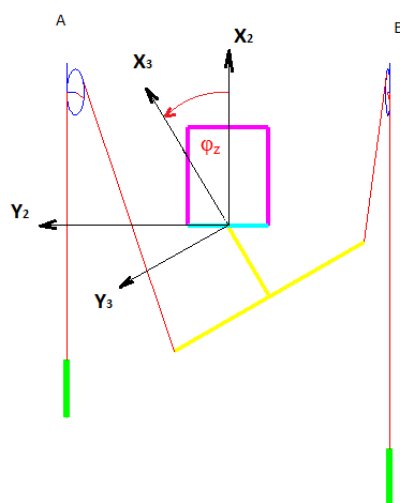
Obrázek 33 - souřadný systém rámu



Obrázek 34 - rotace kolem osy  $x_0$



Obrázek 35 - rotace kolem  $y_1$

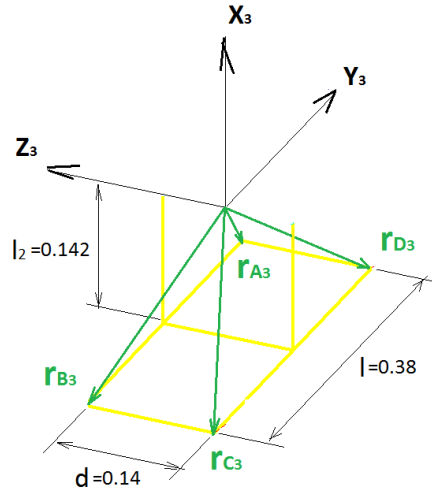


Obrázek 36 - rotace kolem  $z_2$



Souřadnice rohů platformy v souřadnicovém systému 3. V těchto bodech jsou uchycena vlákna.

$$\mathbf{r}_{A3} = \begin{bmatrix} -l_2 \\ l/2 \\ d/2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_{B3} = \begin{bmatrix} -l_2 \\ -l/2 \\ d/2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_{C3} = \begin{bmatrix} -l_2 \\ -l/2 \\ -d/2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_{D3} = \begin{bmatrix} -l_2 \\ l/2 \\ -d/2 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$



Obrázek 37 - vektory rohů platformy

Pro transformaci souřadnic rohů platformy ze souřadnicového systému 3 do systému 0 byly použity rotační matice matice (3.5)

$$\mathbf{S}_{03} = \mathbf{S}_x(\varphi_x) \mathbf{S}_y(\varphi_y) \mathbf{S}_z(\varphi_z) \quad (5.3)$$

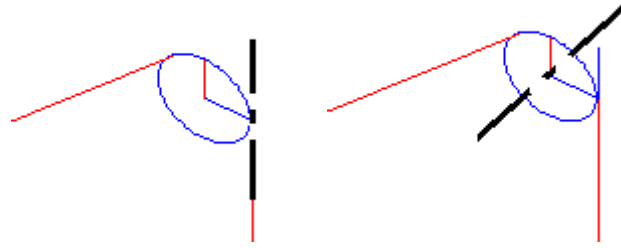
Souřadnice v systému 0 jsou tedy následující 1

$$\mathbf{r}_{C0} = \mathbf{S}_{03} \mathbf{r}_{C3} \quad (5.4)$$

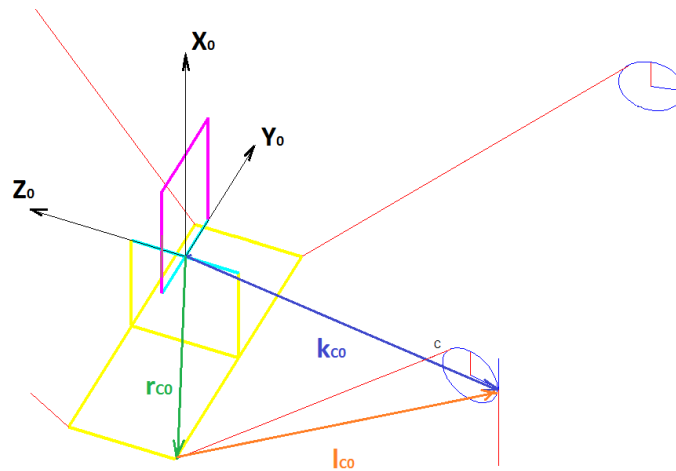
Zavedeme souřadnice svislých os kladek, vektory  $\mathbf{k}$ . Na mechanismu jsou tyto osy duté a prochází skrz ně vlákno, v ose  $x$

$$\mathbf{k}_{A0} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_4 \\ l_5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{k}_{B0} = \begin{bmatrix} l_1 \\ -l_4 \\ l_5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{k}_{C0} = \begin{bmatrix} l_1 \\ -l_4 \\ -l_5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{k}_{D0} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_4 \\ -l_5 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

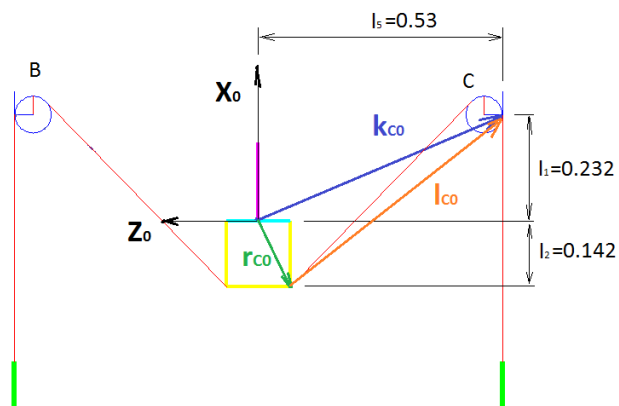
Pro zjednodušení zápisu budeme dále psát rovnice jen pro roh C, pro ostatní (A,B,D) jsou analogické. Výjimkou jsou rovnice (5.2) a (5.5), kde jde o definici bodů.



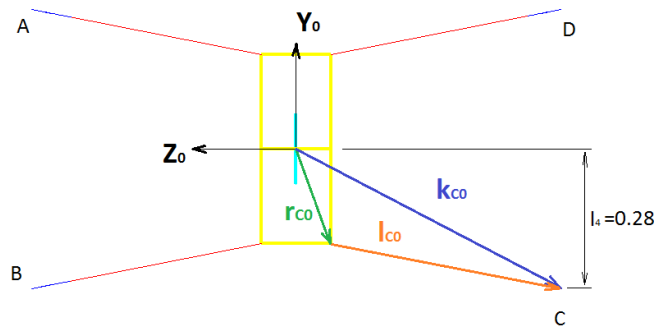
Obrázek 38 - svislá a vodorovná osa rotace kladky



Obrázek 39 – vektory  $k$  a  $l$  ke svislým osám kladek



Obrázek 40 - vektory ke svislým osám kladek



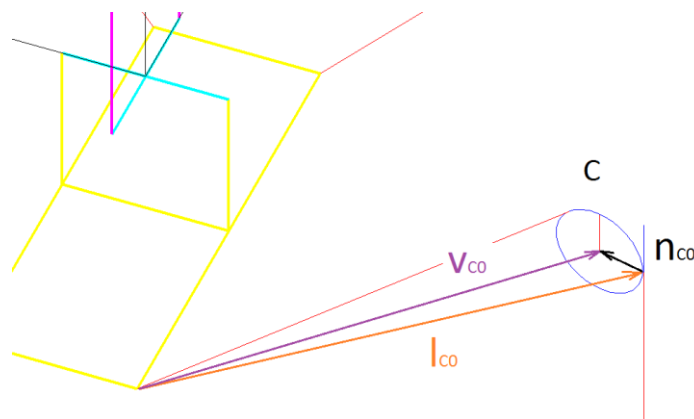
Obrázek 41 - vektory ke svislým osám kladek

Vektory od rohů platformy ke svislým osám kladek jsou potom

$$\mathbf{l}_{C0} = \mathbf{k}_{C0} - \mathbf{r}_{C0} \quad (5.6)$$

Pro získání vektorů  $\mathbf{v}_{C0}$  od rohů na platformě k vodorovným osám kladek zavedeme pomocný vektor  $\mathbf{n}_{C0}$  směřující od koncového bodu vektoru  $\mathbf{l}_{C0}$  k této ose. Směr tohoto vektoru je definován  $y$ -ovou a  $z$ -ovou souřadnicí vektoru  $\mathbf{l}_{C0}$ , jeho velikost je  $l_3$ . Směr je opačný, proto znaménko mínus. Označíme  $\mathbf{n}_1$ .  $l_3$  je de fakto poloměr kladky, ten je jen o 1mm menší.

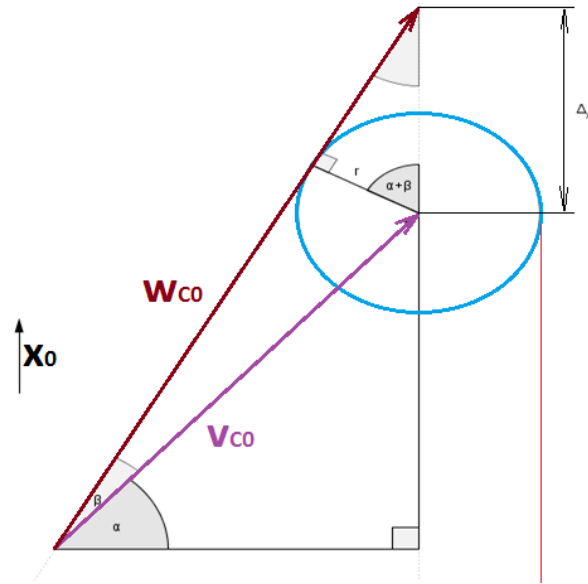
$$\mathbf{n}_{C0} = -l_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ l_{C0}(y) \\ l_{C0}(z) \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\|\mathbf{l}_{C0}\|} \quad (5.7)$$



Obrázek 42 – vektory  $\mathbf{n}_{C0}$  a  $\mathbf{v}_{C0}$

$$\mathbf{v}_{C0} = \mathbf{n}_{C0} + \mathbf{l}_{C0} \quad (5.8)$$

Vektor směru vlákna  $\mathbf{w}_{C0}$  bude mít stejné souřadnice  $y$  a  $z$  jako vektor  $\mathbf{v}_{C0}$ .  $\mathbf{w}_{C0}$  získáme tak, že k  $x$ -ové souřadnici vektoru  $\mathbf{v}_{C0}$  přičteme vzdálenost  $\Delta_{Cx}$ . K získání  $\Delta_{Cx}$  je třeba definovat úhly  $\alpha_C$  a  $\beta_C$  (obr. 43).



Obrázek 43 - vektor směru vlákna  $w_{C0}$  [2]

Vektor  $v_{C0}$  svírá s rovinou  $y_0-z_0$  úhel  $\alpha_C$

$$\alpha_C = \arcsin \frac{v_{C0}(x)}{\|v_{C0}\|} \quad (5.9)$$

Úhel  $\beta_C$  svírají vektory  $v_{C0}$  a  $w_{C0}$ .

$$\beta_C = \arcsin \frac{r}{\|v_{C0}\|} \quad (5.10)$$

$r$  je poloměr kladky. Výpočet vzdáleností  $\Delta_{Cx}$  je následující

$$\Delta_{Cx} = \frac{r}{\cos(\alpha_A + \beta_A)} \quad (5.11)$$

Vektory  $w_{C0}$  spočteme přičtením  $\Delta_{Cx}$  k  $x$ -ové souřadnici vektoru  $v_{C0}$ .

$$w_{C0} = v_{C0} + [\Delta_{Cx}, 0, 0]^T \quad (5.12)$$

V pohybových rovnicích platformy vystupuje tento vektor ve třetím souřadném systému.

$$w_{C3} = S_{03}^T w_{C0} \quad (5.13)$$

### 5.2.2 Tuhosti vláken

Pro výpočet tuhostí částí vláken směřujících od platformy ke kladkám a od kladek k vozíkům je třeba znát délky těchto částí vláken v závislosti na poloze platformy a vozíků. Při určování

délek od platformy ke kladkám  $d_{pk}$  lze opět vycházet z obrázku 43. Index  $pk$  označuje, že jde o délku vlákna od platformy ( $p$ ) ke kladce ( $k$ ).

$$d_{pkc} = \frac{r}{\tan\beta_c} \quad (5.14)$$

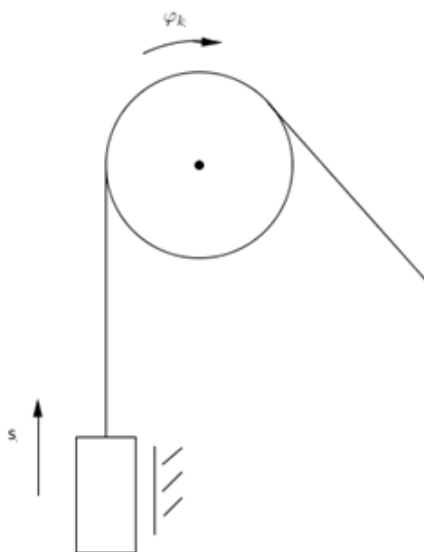
Délky vláken od kladek k vozíkům  $d_{kv}$  lze spočítat jako rozdíl celkové délky vláken  $l_v$  a součtu délky od platformy ke kladce  $d_{pk}$  a délky opásání kladky  $d_k$ . Délka vlákna na kladce je rovna součinu úhlu opásání a poloměru kladky. Úhel opásání je za předpokladu, že vlákna se na straně vozíku odpoutávají kolmo ve směru osy  $x_0$ , zřejmý z obrázku 43 jako  $\alpha + \beta + \frac{\pi}{2}$ .

$$d_{kvC} = l_v - (d_{pkC} + d_{kC}) = l_v - (d_{pkC} + r(\alpha_C + \beta_C + \frac{\pi}{2})) \quad (5.15)$$

Jednotková tuhost vlákna (jednoho metru) byla změřena tahovou zkouškou  $k_j = 1,8 \cdot 10^5 N$ . Tato tuhost je v modelu použita pouze jako referenční, protože při dynamické zkoušce tuhosti vláken byla naměřena jiná. Tuhost jednotlivých částí vláken je tedy vždy rovna podílu jednotkové tuhosti a délky příslušné části vlákna [2].

### 5.2.3 Síly ve vláknech

Zavedeme souřadnice, které definují polohu mechanismu. Pro vozíky jsou to souřadnice  $s_A, s_B, s_C, s_D$ , pro kladky souřadnice  $\varphi_{kA}, \varphi_{kB}, \varphi_{kC}, \varphi_{kD}$ . Všechny tyto souřadnice jsou nulové pro základní polohu mechanismu, tedy pro  $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z = 0$ . Kladné směry souřadnic jsou patrné z obrázků 34, 35, 36 a 44.



Obrázek 44 - kladné směry souřadnic [2]

Je třeba určit deformace vláken v závislosti na poloze mechanismu. Zavedeme celkové deformace vláken  $\Delta$ , jejichž velikost je rovna rozdílu délek zdeformovaných a nezdeformovaných vláken [2].

$$\Delta_C = l_C - l_v \quad (5.16)$$

Celkové deformace  $\Delta$  rozdělíme na dílčí deformace na jednotlivých úsecích vláken,  $\Delta_{kv}$  mezi kladkami a vozíky,  $\Delta_{pk}$  mezi platformou a kladkami. Deformace na kladkách zanedbáme.

$$\Delta_C = \Delta_{pkC} + \Delta_{kvC} \quad (5.17)$$

Velikosti deformací  $\Delta_{kv}$  určíme z vzájemné polohy kladek a vozíků.

$$\Delta_{kvC} = r\varphi_{kC} - s_C \quad (5.18)$$

Velikost deformací  $\Delta_{pk}$  vychází z rovnic (5.16) a (5.17).

$$\Delta_{pkC} = l_C - l_v - \Delta_{kvC} \quad (5.19)$$

Zdeformované délky lan jsou dány polohou mechanismu

$$l_C = d_{pkC} + d_{kC} + d_{kvC0} - s_C \quad (5.20)$$

kde  $d_{kvC0}$  je délka od kladky k vozíku v základní poloze ( $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z = 0$ ).

Dosazením (5.20) do (5.19), následným dosazením z (5.18) a uvážením, že

$$d_{kvC0} = l_v - (d_{pkC0} + d_{kC0}) \quad (5.21)$$

Získáme

$$\begin{aligned} \Delta_{kvC} &= d_{pkC} + d_{kC} + d_{kvC0} - s_C - l_v - \Delta_{pkC} \\ &= d_{pkC} + d_{kC} + l_v - (d_{pkC0} + d_{kC0}) - s_C - l_v - (r\varphi_{kC} - s_C) \\ &= d_{pkC} + d_{kC} - (d_{pkC0} + d_{kC0}) - r\varphi_{kC} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Velikosti sil ve vláknech získáme vynásobením příslušných tuhostí a deformací.

$$F_{pkC} = k_{pkC} \Delta_{pkC} \quad (5.23)$$

$$F_{kvC} = k_{kvC} \Delta_{kvC}$$

$$k_{pkC} = \frac{k_j}{d_{pkC}} \quad (5.24)$$

$$k_{kvC} = \frac{k_j}{d_{kvC}}$$

## 5.2.4 Vlastní pohybové rovnice

Pro každé ze tří těles kardanova kloubu sestavíme 6 dynamických rovnic (3.34), (3.37). Vozíky se pohybují pouze ve směru osy  $x_0$ , proto pro ně bude stačit  $x$ -ová složka rovnice (3.34). Kladky konají zase pouze rotaci v jednom směru, to popíší jednou složkou rovnice (3.37). Dynamiku jejich naklápění zanedbávám. Mechanismus bude popsán 26 dynamickými rovnicemi. Použijeme symbolický matematický formalismus jako v kapitole (4.2). Hmotnostní parametry těles byly určeny z jejich cad modelů.

### 5.2.4.1 Vektor $\mathbf{a}_{Ti}$

Protože tělesa vůči sobě pouze rotují stačí použít rotační matice (3.5). Ovšem nyní nejsou počátky relativních souřadných systémů v těžištích těles 1, 2, 3, ale ve středu kardanova kloubu! Těžiště kříže by v tomto středu teoreticky mělo ležet, ale na kříži jsou namontovány enkodéry, které z něj dělají nesymetrické těleso.

$$\mathbf{r}_{0Ti} = \mathbf{S}_{0i} \mathbf{r}_{iT_i} \quad (5.25)$$

Těžiště vidlice.

$$\mathbf{r}_{1T_1} = [0.09 \quad 0 \quad 0] \quad (5.26)$$

Těžiště kříže.

$$\mathbf{r}_{2T_2} = [0 \quad -0.01 \quad 0.01] \quad (5.27)$$

Těžiště platformy.

$$\mathbf{r}_{2T_2} = [-0.13 \quad 0 \quad 0] \quad (5.28)$$

Souřadnice těžišť jsou odečteny z cad modelů těles stejně jako jejich momenty setrvačnosti a deviační momenty.

Rotační matice pro jednotlivá tělesa, které použijeme v (5.25).

$$\mathbf{S}_{01} = \mathbf{S}_x(\varphi_x) \quad (5.29)$$

$$\mathbf{S}_{02} = \mathbf{S}_x(\varphi_x)\mathbf{S}_y(\varphi_y)$$

$$\mathbf{S}_{03} = \mathbf{S}_x(\varphi_x)\mathbf{S}_y(\varphi_y)\mathbf{S}_z(\varphi_z)$$

Provedeme derivaci vztahu (5.25).

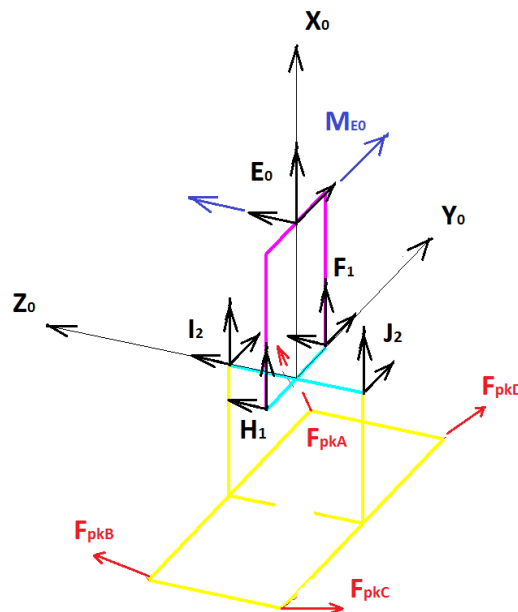
$$\mathbf{a}_{0Ti} = \dot{\mathbf{r}}_{0Ti} \quad (5.30)$$

#### 5.2.4.2 Vektor $\boldsymbol{\omega}_i$ a $\boldsymbol{\alpha}_i$

Sestavíme matice úhlových rychlostí  $\boldsymbol{\Omega}_{i,0i}$  podle (3.12), a z jejich prvků potom vektory  $\boldsymbol{\omega}_i$ , které následně zderivujeme a získáme tím  $\boldsymbol{\alpha}_i$ . Podrobněji popsáno v kapitole (4.2).

#### 5.2.4.3 Vektory $\sum \mathbf{F}_i$ a $\sum \mathbf{n}_i$

Definujeme reakce mezi tělesy a pohonné síly, kterými jsou síly ve vláknech mezi rohy platformy a kladkami. Aby byl model mechanismu staticky určitý, jsou v bodech  $E$ ,  $F$ ,  $I$  axiálně radiální ložiska a v bodech  $H$  a  $J$  pouze radiální.



Obrázek 45 – reakce

Základní složky reakcí viz. kapitola (4.2).



$$\mathbf{E}_0 = [E_x \ E_y \ E_z]^T \quad (5.31)$$

$$\mathbf{F}_1 = [F_x \ F_y \ F_z]^T$$

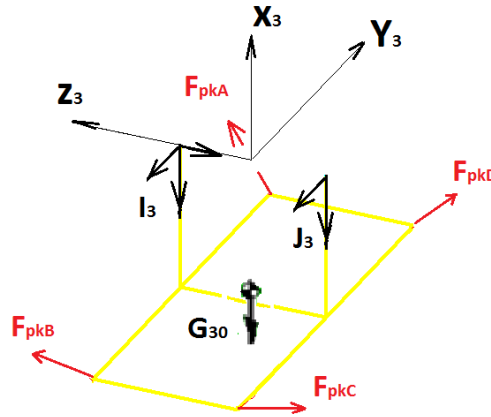
$$\mathbf{H}_1 = [H_x \ H_y \ H_z]^T$$

$$\mathbf{I}_2 = [I_x \ I_y \ I_z]^T$$

$$\mathbf{J}_2 = [J_x \ J_y \ J_z]^T$$

$$\mathbf{M}_{E0} = [0 \ M_{Ey} \ M_{Ez}]^T \quad (5.32)$$

Popíši sestavení  $\sum \mathbf{F}_i$  a  $\sum \mathbf{n}_i$  pro platformu



Obrázek 46 - platforma

Na platformu působí tíha  $\mathbf{G}_{30}$ , reakční síly v ložiscích  $\mathbf{I}_3, \mathbf{J}_3$  a hnací síly z vláken  $\mathbf{F}_{pkA}, \mathbf{F}_{pkB}, \mathbf{F}_{pkC}, \mathbf{F}_{pkD}$ . Reakce  $\mathbf{I}$  a  $\mathbf{J}$  musíme transformovat ze systému 2 do systému 3 a zároveň dodržet zákon akce a reakce. Dále budeme potřebovat vyjádřit  $\mathbf{I}$  a  $\mathbf{J}$  v systému 0 a tíhu  $\mathbf{G}_{30}$  transformovat do systému 3, protože vzhledem ke středu kardanova kloubu vytváří moment a k tomuto středu jsou psány Eulerovy rovnice.

$$\mathbf{I}_3 = \mathbf{S}_{23}^T \cdot (-\mathbf{I}_2) \quad (5.33)$$

$$\mathbf{J}_3 = \mathbf{S}_{23}^T \cdot (-\mathbf{J}_2) \quad (5.34)$$

$$\mathbf{I}_{30} = \mathbf{S}_{03} \cdot \mathbf{I}_3 \quad (5.35)$$

$$\mathbf{J}_{30} = \mathbf{S}_{03} \cdot \mathbf{J}_3 \quad (5.36)$$

$$\mathbf{G}_3 = \mathbf{S}_{03}^T \cdot \mathbf{G}_{30} \quad (5.37)$$

$$\mathbf{G}_{30} = [-m_3 g \quad 0 \quad 0]^T \quad (5.38)$$

V poslední řadě potřebujeme vyjádřit vektory hnacích sil v systému 3 a 0.

$$\mathbf{F}_{pkC3} = F_{pkC} \frac{\mathbf{w}_{C3}}{\|\mathbf{w}_{C3}\|} \quad (5.39)$$

$$\mathbf{F}_{pkC30} = \mathbf{S}_{03} \cdot \mathbf{F}_{pkC3} \quad (5.40)$$

$\mathbf{w}_{C3}$  je vektor směru vlákna  $C$  získaný v kapitole (5.2.1).

Výslednice sil, působících na těžiště platformy, vyjádřená v hlavním systému.

$$\sum \mathbf{F}_{30} = \mathbf{G}_{30} + \mathbf{I}_{30} + \mathbf{J}_{30} + \mathbf{F}_{pKA30} + \mathbf{F}_{pKB30} + \mathbf{F}_{pkC30} + \mathbf{F}_{pKD30} \quad (5.41)$$

Výslednice momentů otáčejících platformu kolem středu kardanova kloubu, vyjádřená v systému 3 (systém platformy).

$$\begin{aligned} \sum n_3 = & \mathbf{r}_{3T3} \times \mathbf{G}_3 + \mathbf{r}_{I3} \times \mathbf{I}_3 + \mathbf{r}_{J3} \times \mathbf{J}_3 + \mathbf{r}_{A3} \times \mathbf{F}_{pKA3} + \mathbf{r}_{B3} \times \mathbf{F}_{pKB3} \\ & + \mathbf{r}_{C3} \times \mathbf{F}_{pkC3} + \mathbf{r}_{D3} \times \mathbf{F}_{pKD3} \end{aligned} \quad (5.42)$$

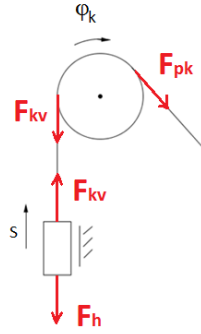
$$\mathbf{r}_{I3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{d}{2} \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

$$\mathbf{r}_{J3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{d}{2} \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

Vektory  $\mathbf{r}_{I3}$  a  $\mathbf{r}_{J3}$  jsou ramena, na kterých působí reakční síly  $\mathbf{I}_3$  a  $\mathbf{J}_3$ .

#### 5.2.4.4 Vozíky a kladky

Na lineárně vedené vozíky působí budící síla z motoru, síla vlákna a tíha. Při sestavování pohybových rovnic uvažujeme lineární pružiny, lze proto zavést počáteční polohu vozíků ve statické rovnovážné poloze, kde jsou v rovnováze síly z vláken a tíhové. V rovnicích tedy budou vystupovat jen budící síly a síly z deformace vláken. Budící síly uvažujeme proti směru souřadnic  $s$  (tah) [2].



Obrázek 47 - síly na kladkách a vozících [2]

$$m_v \ddot{s}_C = -F_{hC} + F_{kvC} \quad (5.45)$$

kde  $m_v$  je hmotnost vozíku (uvažují všechny vozíky stejné). V pohybových rovnicích pro kladky uvažujeme pouze jeden stupeň volnosti – rotaci kolem vodorovné osy, působící síly jsou pouze z vláken.

$$I_k \ddot{\varphi}_{kC} = -r \cdot F_{kvC} + r \cdot F_{pkC} \quad (5.46)$$

kde  $I_k$  je moment setrvačnosti kladky (všechny kladky uvažujeme stejné),  $r$  je poloměr kladky [2].

### 5.2.4.5 Matice hmotnosti a vektor pravé strany

Zapišeme 26 rovnic do vektoru  $\mathbf{R}$  v tomto tvaru.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} m\mathbf{a}_{T1} - \sum \mathbf{F}_{10} \\ I_1 \cdot \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\omega}_1 \times I_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_1 - \sum \mathbf{n}_1 \\ \vdots \\ m\mathbf{a}_{T3} - \sum \mathbf{F}_{30} \\ I_3 \cdot \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\omega}_3 \times I_3 \cdot \boldsymbol{\omega}_3 - \sum \mathbf{n}_3 \\ m_v \ddot{s}_A + F_{hA} - F_{kvA} \\ m_v \ddot{s}_B + F_{hB} - F_{kvB} \\ m_v \ddot{s}_C + F_{hC} - F_{kvC} \\ m_v \ddot{s}_D + F_{hD} - F_{kvD} \\ I_k \ddot{\varphi}_{kA} + r \cdot F_{kvA} - r \cdot F_{pkA} \\ I_k \ddot{\varphi}_{kB} + r \cdot F_{kvB} - r \cdot F_{pkB} \\ I_k \ddot{\varphi}_{kC} + r \cdot F_{kvC} - r \cdot F_{pkC} \\ I_k \ddot{\varphi}_{kD} + r \cdot F_{kvD} - r \cdot F_{pkD} \end{bmatrix} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (5.47)$$

$$M_{ij} = \frac{\partial R_i}{\partial x_j} \quad (5.48)$$

$$Q = M \cdot \ddot{x} - R \quad (5.49)$$

Vztahy (5.48), (5.49) jsou popsány v kapitole (4.2.6). Mezi neznámými je 15 reakčních účinků a 11 zrychlení ( $\ddot{\varphi}_x, \ddot{\varphi}_y, \ddot{\varphi}_z, \ddot{s}_A, \ddot{s}_B, \ddot{s}_C, \ddot{s}_D, \ddot{\varphi}_{kA}, \ddot{\varphi}_{kB}, \ddot{\varphi}_{kC}, \ddot{\varphi}_{kD}$ )

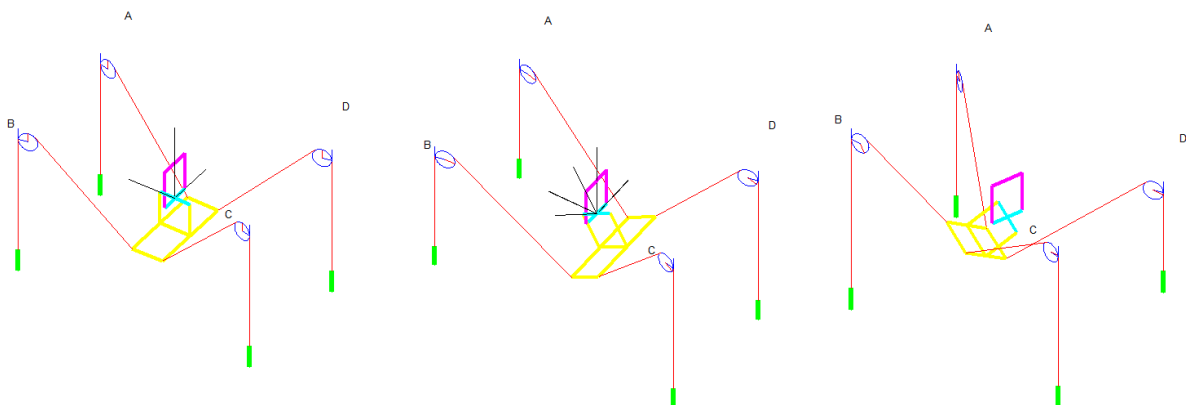
### 5.3 Identifikace

V programu *Matlab/Simulink* byl sestaven model *Kardan*, ve kterém je sestaveno výpočetní schéma pro integraci dynamických rovnic. Vstupem jsou hnací síly z motorů, poloha a rychlost souřadnic  $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z, s_A, s_B, s_C, s_D, \varphi_{kA}, \varphi_{kB}, \varphi_{kC}, \varphi_{kD}$ , výstupem jsou zrychlení těchto souřadnic.

Aby se chování modelu a skutečného Quadrospheru co nejvíce shodovalo, musíme dynamický model identifikovat. Pomocí optimalizační metody, která bude měnit zvolené parametry modelu, se budeme snažit minimalizovat odchylku chování simulačního modelu od chování měřeného na skutečném mechanismu.

Mám k dispozici vlastní frekvence mechanismu, měřené ve třech polohách (obr. 48).

| Poloha | $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ [°] |     |    | Vlastní frekvence $f$ [Hz] |      |      |
|--------|---------------------------------------|-----|----|----------------------------|------|------|
| 1      | 0                                     | 0   | 0  | 45,9                       | 49,3 | 72   |
| 2      | 0                                     | -29 | 0  | 37                         | 43,5 | 50   |
| 3      | -10                                   | 30  | 42 | 31,3                       | 43,5 | 52,6 |



Obrázek 48 - poloha 1, 2, 3

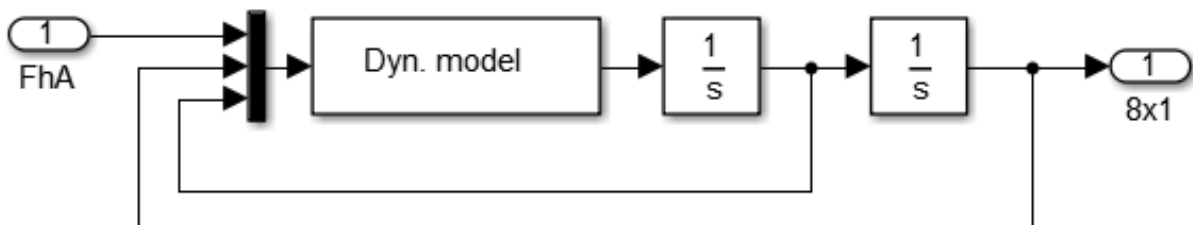
Z modelu výpočtu vlastní frekvence ve stejných polohách a optimalizací hmotnostních parametrů modelu budu minimalizovat odchylku od naměřených.

Naměřeny byly dále vlastní tvary, ale pouze v jedné poloze, takže jsem je do optimalizace nezahrnul.

### 5.3.1 Linearizace

Vlastní frekvence vypočteme z lineárního stavového popisu mechanismu, který získáme linearizací dynamického modelu v konkrétní poloze.

Měření na mechanismu byla vždy pro jeden vozík buzený a ostatní tři vozíky ukotvené, čímž odpadá jejich zahrnutí do modelu mechanismu. Proto je třeba upravit dynamický model. Vynechat tři řádky a sloupce matice hmotnosti, které odpovídají vozíkům. Dále upravit vektor pravé strany. Hodnoty souřadnic polohy vynechaných vozíků však potřebujeme. Jsou konstantní a vypočteme je z kinematiky pro konkrétní polohu, ve které budeme linearizovat. Drobným zmenšením jejich hodnoty potom nastavíme předpětí v lanech. Na obrázku 49 je upravený simulinkový model pro linearizaci. Vstupem je hnací síla pro vozík A a výstupem je osm souřadnic polohy.



Obrázek 49 - model pro linearizaci

Matice  $A, B, C, D$  stavového popisu (4.50) v konkrétní poloze získáme příkazem *linmod*.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (5.50)$$

$$y = Cx + Du$$

$$s = [\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z, s_A, \varphi_{kA}, \varphi_{kB}, \varphi_{kC}, \varphi_{kD}] \quad (5.51)$$

$$x = [s \ \dot{s}]^T$$

$$y = s^T$$

$$u = F_{hA}$$

```
[A, B, C, D]=linmod('Model', [x0;v0], 0);
```

Obrázek 50 – linmod

Příkaz *linmod* vrátí matice stavového popisu. Vstupem do něj je název simulinkového modelu mechanismu, poloha linearizace a silové účinky, které mechanismus v této poloze udrží.  $x_0$  a  $v_0$  (obr. 50) jsou vektory souřadnic polohy a rychlosti. V poloze definované těmito souřadnicemi dojde k linearizaci. Nula na konci je silový účinek vozíku  $F_{hA}$ . Tato hodnota na výsledky linearizace neměla vliv, tak jsem ji nastavil na nulu a nedopočítával z inverzní dynamiky.

Vlastní frekvence odpovídají vlastním číslům matice  $A$ . Ta má rozměr 16x16. Příkazem *eig(A)* získáme jejich 16 vlastních čísel, která mají komplexní tvar (5.52).

$$\lambda = \sigma \pm i\omega \quad (5.52)$$

V mém případě byl člen  $\sigma$  vždy nulový. Kladných hodnot  $\omega$  je osm a to odpovídá počtu stupňů volnosti mechanismu. Naměřená data máme v [Hz].

$$f = \frac{\omega}{2\pi} [Hz] \quad (5.53)$$

Vlastní tvary jsou sloupce matice  $C$ .

Nejnižší vypočtená vlastní frekvence byla cca 15 Hz, při měření se však takhle nízké frekvence nevyskytovaly. Analýzou vlastního tvaru, který patřil k této vlastní frekvenci jsem zjistil, že frekvence odpovídá kmitání volného vozíku na vlákně. Ve skutečnosti je vozík na vedení s kuličkovým šroubem a kmitat nemůže. Asi by bylo vhodnější při linearizaci všechny vozíky zafixovat.

### 5.3.2 Optimalizace

Použil jsem příkaz *fminsearch*, který změnami zvolených parametrů iteračně minimalizuje zadanou cílovou funkci. Metoda *fminsearch* je naprogramována v matlabu. V každé iteraci byl linearizován model (obr. 49) ve třech polohách a v každé bylo vypočítáno osm vlastních frekvencí, které pak byly dosazeny do cílové funkce (5.56). Optimalizované parametry.

$$P = [k_j \quad I_{X1} \quad I_{X2} \quad I_{Y2} \quad I_{X3} \quad I_{Y3} \quad I_{Z3}] \quad (5.54)$$

$k_j [N]$  je tuhost 1 metru vlákna (jednotková tuhost). Tuhost vlákna délky  $l$  je

$$k = \frac{k_j}{l} \left[ \frac{N}{m} \right] \quad (5.55)$$

Protože vidlice se otáčí pouze kolem osy  $x$ , optimalizuji jen její moment setrvačnosti  $I_{X1}$ , podobně jsem zvolil i další momenty setrvačnosti. Cílová funkce.

$$CF = (\bar{f}_1 - f_1)^2 + (\bar{f}_2 - f_2)^2 + (\bar{f}_3 - f_3)^2 \quad (5.56)$$

$\bar{f}_1$  je vektor tří naměřených frekvencí v první poloze,  $f_1$  je vektor tří vypočtených frekvencí v první poloze atd. Z modelu sem dostal osm frekvencí v každé poloze a musel jsem tedy tři vybrat. Proto byla vždy spočtena cílová funkce pro všechny varianty výběru a ta s nejnižší hodnotou byla teprve výsledkem iterace.

Funkce *fminsearch* může při optimalizaci parametry libovolně měnit, takže se může stát, že výsledné hodnoty budou např. záporné nebo velmi odlišné od skutečnosti, a přesto cílovou funkci perfektně splní. Kvůli tomu je důležité správně zvolit počáteční odhad parametrů a nastavit jejich omezení. Také je dobré udělat z dosazovaných parametrů absolutní hodnotu. Za odhady momentů setrvačnosti jsem dosadil jejich hodnoty z cad modelů těles. Tyto hodnoty by měly být už relativně přesné, takže nastavil omezující podmínky tak, aby se mohly změnit jen minimálně. Tuhost vláken byla hlavní optimalizační parametr. Jako odhad jsem vzal hodnotu zjištěnou tahovou zkouškou a omezení jsem nechal volnější.

Nejnižší naměřená vlastní frekvence

### 5.3.3 Výsledky optimalizace

Výsledné hodnoty optimalizovaných parametrů včetně jejich limitů a počátečního odhadu jsou v tabulce.

|                               | odhad     | Výsledek optimalizace | Dlim      | Hlim      |
|-------------------------------|-----------|-----------------------|-----------|-----------|
| $k_j$ [N]                     | 1.8e5     | 1.16e5                | 1e5       | 2e5       |
| $I_{X1}$ [kg·m <sup>2</sup> ] | 6731e-6   | 6000e-6               | 6000e-6   | 7000e-6   |
| $I_{X2}$ [kg·m <sup>2</sup> ] | 1262e-6   | 1000e-6               | 1000e-6   | 2000e-6   |
| $I_{Y2}$ [kg·m <sup>2</sup> ] | 656e-6    | 1000e-6               | 400e-6    | 1000e-6   |
| $I_{X3}$ [kg·m <sup>2</sup> ] | 52460e-6  | 53000e-6              | 52000e-6  | 53000e-6  |
| $I_{Y3}$ [kg·m <sup>2</sup> ] | 106400e-6 | 106000e-6             | 106000e-6 | 107000e-6 |
| $I_{Z3}$ [kg·m <sup>2</sup> ] | 137300e-6 | 138000e-6             | 137000e-6 | 138000e-6 |

Při použití optimalizovaných parametrů je shoda vlastních frekvencí následující.

|   | měření [Hz] |      |      | Optimalizovaný model [Hz] |      |      |
|---|-------------|------|------|---------------------------|------|------|
| 1 | 45.9        | 49.3 | 72   | 37.8                      | 56.2 | 74.2 |
| 2 | 37          | 43.5 | 50   | 34.4                      | 36.8 | 51.6 |
| 3 | 31.3        | 43.5 | 52.6 | 26.2                      | 34.9 | 59.9 |

## 6 Závěr

V kapitole 4 byl charakterizován mechanismus čtyřramenného robotického manipulátoru, který bude stavěn v laboratoři mechaniky. Mechanismus bude využit pro výzkum chování manipulačních struktur. Výzkumný projekt se mimo jiné zabývá dosažitelnou přesností manipulátorů, za pomoci odměřování deformací jejich ramen. Byl sestaven a následně odladěn simulační model řízení manipulátoru pomocí metody „Computed Torques“. Simulace byla provedena v programu *Matlab/Simulink*. Podrobně byla popsána tvorba inverzní kinematiky a dynamiky manipulátoru. Tyto dvě části byly pro výše uvedené řízení nezbytné. Protože manipulátor zatím není postaven, jeho chování simuloval poddajný model. Poddajný model nebyl v této práci vytvářen, ale pouze použit a byl probrán jeho princip funkce. Byly optimalizovány konstanty použitých řídicích pid regulátorů. Nakonec Byly provedeny simulace řízení poddajného modelu manipulátoru a vyhodnocena jeho přesnost. Z obrázku 23 je patrné, že koncept přídavného odměřování deformací ramen, popsany na začátku kapitoly 4, by mohl fungovat, protože při jeho použití byla přesnost řízení větší. Samozřejmě by mělo být provedeno větší množství simulací a také reálných experimentů k potvrzení skutečnosti.



Simulace potvrdila funkčnost řízení ve velké části pracovního prostoru (obr. 26 a 27), což je hlavní výhodou metody „Computed Torques“.

V kapitole 5 byla popsána struktura mechanismu Quadrosphere, který je umístěn v laboratoři ústavu mechaniky. Byla probrána jeho úloha ve výzkumném projektu. Dále byl podrobně popsán postup sestavení poddajného dynamického modelu pomocí Newton-Eulerových rovnic. Rovnice byly sestaveny i upraveny do konečného tvaru symbolickým matematickým formalismem implementovaným v programu *Matlab*. Model byl odladěn a neměl by obsahovat závažné chyby. Na mechanismu Quadrosphere byla provedena měření. Tato experimentální data (vlastní frekvence) byla následně použita pro identifikaci sestaveného dynamického modelu. Model byl identifikován optimalizací tuhosti vláken a dále momentů setrvačnosti těles. Použita byla optimalizační metoda *fminsearch*, která je obsažena v *Matlabu*. Metoda minimalizovala odchylku mezi naměřenými vlastními frekvencemi a frekvencemi vypočtenými z modelu. Model je nyní použitelný k návrhu řízení, případně pro další optimalizační experimenty. Přidáním dynamiky vodorovného naklápění kladek by se věrohodnost modelu dala ještě zvýšit. Kladky jsou totiž relativně těžké, a proto dynamické účinky jejich naklápění nejspíše nebudou zanedbatelné.

## 7 Seznam obrázků

|   |    |
|---|----|
| Obrázek 1 - deformace tělesa [4] .....                          | 18 |
| Obrázek 2 - Computed Torques .....                              | 20 |
| Obrázek 3 - schéma manipulátoru [6] .....                       | 20 |
| Obrázek 4 - koncept odměřování [6] .....                        | 21 |
| Obrázek 5 - přídavné odměřování [6] .....                       | 21 |
| Obrázek 6 - souřadné systémy [6] .....                          | 22 |
| Obrázek 7 – klouby A a B [6] .....                              | 23 |
| Obrázek 8 – klouby C a D [6] .....                              | 23 |
| Obrázek 9 - řez pracovním prostorem .....                       | 24 |
| Obrázek 10 - experimentální trajektorie .....                   | 26 |
| Obrázek 11 – úhel $\alpha$ .....                                | 26 |
| Obrázek 12 – průběhy $\mathbf{q}$ a $\dot{\mathbf{q}}$ .....    | 28 |
| Obrázek 13 - $\ddot{\mathbf{q}}$ .....                          | 28 |
| Obrázek 14 - příkaz jacobian .....                              | 30 |
| Obrázek 15 - hnací momenty a zatížení efektoru [6] .....        | 32 |
| Obrázek 16 - reakce v kloubech [6] .....                        | 32 |
| Obrázek 17 - těleso 2 .....                                     | 34 |
| Obrázek 18 - výpočtové schéma .....                             | 36 |
| Obrázek 19 - schéma pid regulátoru .....                        | 37 |
| Obrázek 20 - optimalizace regulátoru .....                      | 38 |
| Obrázek 21 - deformace ramen .....                              | 39 |
| Obrázek 22 - odměřované posuvy [6] .....                        | 40 |
| Obrázek 23 - odchylka efektoru .....                            | 41 |
| Obrázek 24 - manipulátor na trajektorii .....                   | 42 |
| Obrázek 25 - odchylka efektoru na spirale bez zrychlení .....   | 42 |
| Obrázek 26 - trajektorie kružnice .....                         | 43 |
| Obrázek 27 - odchylka efektoru při pohybu po kružnici .....     | 43 |
| Obrázek 28 – Quadrosphere [8] .....                             | 45 |
| Obrázek 29 - naklápění kladky [8] .....                         | 45 |
| Obrázek 30 - lineární vedení s vozíkem a servomotorem [8] ..... | 46 |
| Obrázek 31 - sférický kloub se snímači polohy [8] .....         | 46 |
| Obrázek 32 - funkční model mechanismu Quadrosphere [8] .....    | 47 |
| Obrázek 33 - souřadný systém rámu .....                         | 48 |
| Obrázek 34 - rotace kolem osy $x_0$ .....                       | 49 |
| Obrázek 35 - rotace kolem $y_1$ .....                           | 49 |
| Obrázek 36 - rotace kolem $z_2$ .....                           | 49 |
| Obrázek 37 - vektory rohů platformy .....                       | 50 |

|   |    |
|---|----|
| Obrázek 38 - svislá a vodorovná osa rotace kladky .....                       | 51 |
| Obrázek 39 – vektory $\mathbf{k}$ a $\mathbf{l}$ ke svislým osám kladek ..... | 51 |
| Obrázek 40 - vektory ke svislým osám kladek.....                              | 51 |
| Obrázek 41 - vektory ke svislým osám kladek.....                              | 52 |
| Obrázek 42 – vektory $\mathbf{n}_{C0}$ a $\mathbf{v}_{C0}$ .....              | 52 |
| Obrázek 43 - vektor směru vlákna $\mathbf{w}_{C0}$ [2] .....                  | 53 |
| Obrázek 44 - kladné směry souřadnic [2] .....                                 | 54 |
| Obrázek 45 – reakce .....   | 57 |
| Obrázek 46 - platforma .....  | 58 |
| Obrázek 47 - síly na kladkách a vozících [2] .....                            | 60 |
| Obrázek 48 - poloha 1, 2, 3.....  | 61 |
| Obrázek 49 - model pro linearizaci .....                                      | 62 |
| Obrázek 50 – lin mod.....   | 63 |

## 8 Citovaná literatura

1. SREJSKAL, V. a M. VALÁŠEK. *Kinematics and Dynamics of Machinery*. New York: Marcel Dekker, 1996. ISBN 0-8247-9731-0.
2. FIALA, V. *Dynamický model vláknově ovládaného mechanismu Quadrosphere*. Praha: 2014. Bakalářská práce. ČVUT v Praze, Fakulta strojní, Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky.
3. VAMPOLA, T. *Efektivní algoritmus sestavení pohybových rovnic soustavy mnoha těles s uvažováním poddajnosti*. Praha: ČVUT, 1996.
4. MRÁZ, L. *Symbolické generování pohybových rovnic pro soustavy poddajných těles*. Praha: 2009. Diplomová práce. ČVUT v Praze, Fakulta strojní, Ústav technické matematiky.
5. DREPL, R. *Kinematika a dynamika mechatronických systémů*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, 2007. ISBN 978-80-214-3530--8.
6. GA13-39057S. *Zvyšování tuhosti robotů pomocí polohové zpětné vazby a redundantního měření*.
7. VALÁŠEK, M. V. BAUMA a Z. ŠIKA. *Mechanika B*. Praha: ČVUT, 2004. ISBN 80-01-02919-0.
8. GAP101/11/1627. *Naklápěcí mechanismy založené na vláknové paralelní kinematické struktuře s bezvůlovým řízením*.
9. HORÁČEK, T. Z. ŠIKA a M. VALÁŠEK. *Software for global dynamics evaluation of mechanisms. Advances in Engineering Software*. 2014. vol. 72, p. 155-165.
10. STEJSKAL, V. J. BROUSIL a S. STEJSKAL. *Mechanika III*. Praha: ČVUT, 2001. ISBN 80-01-02388-5.
11. JULIŠ, K. a R. BREPTA. *Mechanika II. díl - Dynamika*. Praha: SNTL, 1987.

12. SCIAVICCO, L. a B. SICILIANO. *Modelling and Control of Robot Manipulators*. Berlin: Springer, 2001.
13. HUI, C. a Y. YIU-KUEN. *Dynamics and Control of Redundantly Actuated Parallel Manipulators*. IEEE/ASME Transactions On Mechatronics, Vol. 8, No. 4. December 2003.

## 9 Příloha na CD

Na přiloženém CD je v adresáři *DP* uložen text diplomové práce.

V adresáři *Výpočtové modely* jsou umístěny vytvořené simulační modely pro *Matlab*. Jsou zde dynamické modely a také upravené dynamické modely pro optimalizaci obou mechanismů (Quadrosphere a robotický manipulátor). Jejich funkce a ovládání je vždy komentováno v souboru *readme*, který je přiložen v každé složce.