



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

FAKULTA STROJNÍ

12101 ÚSTAV TECHNICKÉ MATEMATIKY

**NUMERICKÉ ŘEŠENÍ JEDNOROZMĚRNÉHO MODELU
PROUDĚNÍ STATOREM RADIÁLNÍ TURBÍNY**

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Vedoucí práce:

Doc. Ing. Jiří Fůrst, Ph.D.

Bc. Ekaterina Simakova

Praha 2015

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta strojní, Ústav technické matematiky

Technická 4, 166 07 Praha 6

Akademický rok 2014–2015

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

pro: Bc. Ekaterinu Simakovou

v oboru: Matematické modelování v technice

Název: **Numerické řešení jednorozměrného modelu proudění statorem radiální turbíny**

Zásady pro vypracování:

1. Popis matematického modelu proudění stlačitelné neviské tekutiny. Formulace úlohy pro jednorozměrné proudění tekutiny v radiálním uspořádání bez a s uvažováním vlivu lopatek modelovaným pomocí zdrojových členů.
2. Popis modelování vlivu lopatky, tj. otočení proudu a zúžení kanálu kvůli nenulové tloušťce lopatky.
3. Popis metody konečných objemů pro daný jednorozměrný problém, naprogramování a odladění vlastního kódu pro simulaci jednorozměrného proudění statorem radiální turbíny.
4. Aplikace vlastního kódu na řešení proudění radiálním statorem pro dvě zadané případy. Porovnání vlastních výsledků s dodanými daty získanými řešením dvourozměrného turbulentního proudění.
5. Rozbor dosažených výsledků.

Rozsah diplomové práce: do 20–50 stran včetně obrázků a grafů

Seznam odborné literatury:

1. K. Kozel, J. Fürst: Numerické řešení problémů proudění I, skripta ČVUT, FS.
2. J. Kadrnožka: Tepelné turbíny a kompresory, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., 2004
3. J. Blazek: Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications, Elsevier 2001

Vedoucí diplomové práce: Doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D.

Datum zadání diplomové práce: 7. 4. 2015

Datum odevzdání diplomové práce: 19. 6. 2015

Prof. Ing. Jaroslav Fořt, CSc.
vedoucí Ú12101



Prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
děkan FS, ČVUT v Praze

V Praze dne 31. 3. 2015

Neodevzdá-li student diplomovou práci včas, je povinen tuto skutečnost předem písemně zdůvodnit, pokud bude omluva (předaná prostřednictvím studijního oddělení děkanovi) děkanem uznána, určí děkan studentovi náhradní termín konání státní závěrečné zkoušky (zůstávají dva termíny SZZ). Pokud tuto skutečnost student rádně neomluví nebo omluva nebude děkanem uznána, určí děkan studentovi termín pro opakování státní závěrečné zkoušky. SZZ je možné opakovat pouze jednou (SZŘ čl. 22, odst. 3, 4).

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

Zadání diplomové práce převzal dne:

student

Anotační list

Jméno autora	Ekaterina Simakova
Název práce	Numerické řešení jednorozměrného modelu proudění statoru radiální turbíny
Anglický název	Numerical solution of One-Dimensional Flow in a Radial Turbine
Akademický rok	2014/2015
Obor studia	Matematické modelování v technice
Ústav, obor	12101 Ústav technické matematiky
Vedoucí	Doc. Ing. Jiří Fůrst, Ph.D.
Bibliografické údaje	Počet stran - 45 Počet obrázků - 41 Počet tabulek - 0 Počet příloh - 0

Anotace

Práce se zabývá numerickým modelováním proudění statoru radiální turbíny, které je realizováno řešením zjednodušeného modelu. Zjednodušený model představuje jednorozměrné, stacionární proudění nevazké stlačitelné tekutiny. V první části této práce jsou odvozeny Navierovy-Stokesovy a Eulerovy rovnice. Ve druhé části je představena formulace úlohy a další část se zabývá popisem numerického řešení. Prostorová diskretizace je provedena pomocí metody konečných objemů a pro časovou diskretizaci je použita Eulerova dopředná diference 1. řádu. Advekční členy jsou počítány pomocí dvou různých schémat: $AUSM^+$ a HLL . Poslední část zahrnuje výsledky numerického řešení jednorozměrného proudění a jejich porovnávání s dodanými výsledky výpočtu dvourozměrného turbulentního proudění.

Abstract

The work deals with numerical modeling of flow in a stator of a radial turbine. The solution is based on a simplified model of a one-dimensional, steady flow of nonviscous compressible fluid. In the first part of this work the Navier-Stokes and Euler equations are derived. In the second part the formulation of problem is presented. Another part describes the numerical solution, using the finite volume method for spatial discretization and the Euler forward difference of 1st order for time discretization. Advection members are calculated using two different schemes: $AUSM^+$ and HLL . The last section includes the results of numerical solution of one-dimensional flow and a comparison with results of two-dimensional turbulent flow calculation.

Klíčová slova

Jednorozměrné proudění, Eulerovy rovnice v polárních souřadnicích, nevazké proudění, AUSM schéma, HLL schéma, metoda konečných objemů, zadávání okrajových podmínek, stator radiální turbíny, lopatková mříž, dýza s proměnným průřezem.

Keywords

One-dimensional flow, Euler equations in polar coordinates, inviscid flow, AUSM scheme, HLL scheme, finite volume method, entering the boundary conditions, stator of the radial turbine, blade row, nozzle with a variable cross-section.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci s názvem: „Numerické řešení jednorozměrného modelu proudění statoru radiální turbíny“ vypracovala samostatně pod vedením Doc. Ing. Jiřího Fürsta, Ph.D. s použitím literatury uvedené na konci diplomové práce v seznamu použité literatury.

V Praze _____

Bc. Ekaterina Simakova

Poděkování

Na tomto místě bych ráda poděkovala vědoucímu diplomové práce, Doc. Ing. Jiřímu Fůrstovi, Ph.D., za jeho odborné vedení a ochotu při konzultacích.

Velice ráda bych též poděkovala svým rodičům za jejich nekonečnou podporu.

Obsah

Přehled užitého značení a zkratk	ix
Úvod	xii
1. Matematické modely proudění stlačitelné tekutiny	1
1.1. Zákony zachování	1
1.2. 2D Navierovy – Stokesovy rovnice	2
1.3. 1D Eulerovy rovnice	4
1.4. 1D systém Eulerových rovnic v kvazilineárním tvaru	5
1.5. Kvazi-1D Eulerovy rovnice v osově symetrickém kanále	5
1.6. Kvazi-1D Eulerovy rovnice v polárních souřadnicích	6
2. Formulace úloh	8
2.1. Dýza s proměnným průřezem	8
2.2. Radiální lopatková mříž	9
3. Numerické řešení	11
3.1. Metoda konečných objemů	12
3.1.1 MKO pro 1D problém	12
3.2. AUSM ⁺	13
3.3. HLL	16
3.4. Časová diskretizace	19
3.5. Realizace okrajových podmínek	22
3.6. Počáteční podmínky	25
3.7. Vliv lopatky	25
3.8. Zpracovávání dat dodaných dvourozměrným výpočtem	29
3.9. Struktura a popis programu	31
4. Numerické výsledky řešení	33
4.1. Dýza s proměnným průřezem	33
4.2. Radiální turbínová mříž v transsonickém režimu	36
4.3. Rozváděcí část turbíny automobilového turbodmychadla	41
4.4. Diskuse	44
Závěr	45
Seznam literatury	46

Seznam obrázků

Nenalezena položka seznamu obrázků.

Obr. 1 – Geometrie mezilopatkového kanálu.....	6
Obr. 2 – Velikost průřezu podél dýzy.....	9
Obr. 3 – Řešená oblast modelu bez lopatek.....	10
Obr. 4 – Mezilopátkový kanál radiální lopatkové mříže.....	10
Obr. 5 – Oblast řešení pro radiální lopatkovou mříž.....	11
Obr. 6 – Kontrolní objemy schémat typu cell-centered (a) a cell-vertex (b) [16, s38].....	12
Obr. 7 – Buňka sítě.....	13
Obr. 8 – Kontrolní oblast $[x_L, x_R] \times [0, T]$ na grafu $x-t$. S_L a S_R jsou největší rychlosti signálů vznikajících při řešení Riemannova problému [10, s318].....	17
Obr. 9 – Grafické znázornění aproximace HLL řešičem (angl. HLL Riemann solver).....	18
Obr. 10 – Struktura přesného řešení Riemannova problému pro 3D Eulerovy rovnice.....	19
Obr. 11 – Aproximace časové derivace pomocí explicitní Eulerovy metody.....	20
Obr. 12 – Lopatka turbíny, odečítání úhlu zakřivení.....	26
Obr. 13 – Grafické znázornění určování úhlů.....	26
Obr. 14 – Vektor rychlosti \mathbf{u} vstupující do statoru.....	27
Obr. 15 – Rozváděcí část statoru radiální turbíny, otočení vektoru rychlosti.....	27
Obr. 16 – Otočení vektoru \mathbf{u} do směru vektoru \mathbf{u}^*	28
Obr. 18 – Rozklad vektoru rychlosti do složek v polárních souřadnicích.....	30
Obr. 18 – Průběh úhlů podél poloměru turbíny.....	30
Obr. 19 – Vývojový diagram programu.....	31
Obr. 20 – Geometrie dýzy a okrajové podmínky.....	33
Obr. 22 – Průběh Machova čísla v dýze při různých poměrových koeficientů.....	34
Obr. 23 – Průběh hustoty podél dýzy pro různé velikosti sítě.....	35
Obr. 24 – Průběh rychlosti podél dýzy pro různé velikosti sítě.....	35
Obr. 25 – Průběh Machova čísla podél dýzy pro různé velikosti sítě.....	36
Obr. 26 – Rozložení tlaku podél dýzy pro různé velikosti sítě.....	36
Obr. 27 – Průběh změny šířky kanálu podél poloměru.....	37
Obr. 28 – Průběh odměřených úhlu, vyjadřujících zakřivení lopatky.....	37
Obr. 29 – Průběh úhlu proudu po použití modifikace na přední části lopatky.....	38
Obr. 30 – Průběh úhlu podél kanálu.....	38
Obr. 31 – Průběh rozložení Machova čísla.....	39
Obr. 32 – Výsledek 2D výpočtu, izočáry Machova čísla.....	39
Obr. 33 – Průběh tlaku podél poloměru.....	40
Obr. 34 – Průběh hustoty podél poloměru.....	40
Obr. 35 – Průběh entropie.....	41
Obr. 36 – Průběh změny šířky kanálu podél poloměru.....	41
Obr. 37 – Průběh odměřených úhlu, vyjadřujících zakřivení lopatky.....	42
Obr. 38 – Rozložení úhlů.....	42
Obr. 39 – Rozložení Machova čísla.....	43
Obr. 40 – Výsledek 2D výpočtu, izočáry Machova čísla.....	43
Obr. 41 – Rozložení hustoty.....	44
Obr. 42 – Rozložení tlaku.....	44

Přehled užitého značení a zkratk

Značení

A	Jacobiho matice
A	průřez dýzy
H	celková entalpie
M	Machovo číslo
r	měrná plynová konstanta
\mathbb{R}	prostor reálných čísel
a	rychlost zvuku
p	tlak
t	čas
Δt	časový krok
Δx	prostorový krok
f	numerický tok
Λ	matice vlastních čísel
R	matice vlastních vektorů
F, G	nevazké fyzikální toky
S, R	vazké fyzikální toky
W	vektor konzervativních proměnných
\bar{W}	střední hodnota W
Q	zdrojový člen
\bar{Q}	střední hodnota Q
P	tlaková část neviskózního toku
$F^{(c)}$	konvektivní část neviskózního toku
B	zdrojový člen, zahrnující zúžení kanálu a odstředivou sílu
\bar{f}	střední hodnota v obvodovém směru
S_L, S_R	rychlosti šíření signálů v HLL schématu
$\mathcal{M}^\pm, \mathcal{P}^\pm$	rozkládací funkce v metodě AUSM
Ω	oblast
$\partial\Omega$	hranice oblasti
ρ	hustota

$\rho(A)$	spektrální poloměr matice A
α	úhel proudu
α_{inlet}	úhel proudu ve 2 síťových bodech před náběžnou hranou lopatky
β	úhel zakřivení lopatky
φ	obvodový úhel
ψ	vektor v konvektivní části ($AUSM^+$)
\mathbf{x}	prostorová souřadnice
\mathbf{u}	vektor rychlosti
\mathbf{b}	vektor vnějších objemových sil
u_x, u_y	složky rychlosti v kartézských souřadnicích
u_r, u_φ	složky rychlosti v polárních souřadnicích
q_x, q_y	složky vektoru tepelného toku
T	teplota
∇	operator nabla
$\boldsymbol{\tau}$	tenzor vazkých napětí
$\boldsymbol{\sigma}$	tenzor napětí
μ	dynamická viskozita
λ	vlastní číslo
γ	adiabatický exponent
e	vnitřní energie
b	úhlová šířka mezilopatkového kanálu
\tilde{b}	relativní šířka mezilopatkového kanálu
r	radiální souřadnice
k	poměr výstupního tlaku ku celkovým vstupnímu tlaku
ξ	frekvence
λ^n	amplituda
V	objem
I	interval

Zkratky

1D	jednorozměrný
2D	dvourozměrný
3D	třírozměrný
N-S	Navier-Stokes

AUSM	Advection Upstream Splitting Method
HLL	Harten, Lax, van Leer
MKO	Metoda konečných objemů
MKD	Metoda konečných diferencí

Dolní indexy

<i>out</i>	výstup
<i>in</i>	vstup
<i>i</i>	index buňky
<i>L</i>	stav nalevo od rozhraní
<i>R</i>	stav napravo od rozhraní
0	počáteční stav
<i>s</i>	izoentropický proces
$i + \frac{1}{2}$	rozhraní buňky
<i>LE</i>	náběžná hrana lopatky
<i>TE</i>	odtoková hrana lopatky
25	místo v 25% délky lopatky

Horní indexy

<i>n</i>	časová vrstva
----------	---------------

Úvod

Počítačová simulace je jednou z neúčinnějších metod pro studium komplexních systémů. Výpočty jsou časově a finančně méně náročné než experimenty a poskytují detailnější obraz proudového pole. Matematické modelování a simulace nejrůznějších procesů má proto v praxi velký význam.

Složité případy je v dnešní době možno řešit použitím komerčních softwarů typu ANSYS Fluent. Tento program nabízí širokou řadu možností: simulace vícefázového proudění, možnost výpočtu na měnící se síti, několik modelů turbulence, výpočty prostupu tepla a další fyzikální modely.

O stupeň níž stojí nástroj Throughflow analysis tool pro analýzu průtoku, založený na metodě konečných objemů. Numerický model využívá 3D Navierovy-Stokesovy rovnice zprůměrované v průřezu mezilopatkového kanálu. Pro proudění u stěny je použit mixing-length model turbulence.[25]

V průmyslu se využívají i jiné zjednodušené numerické modely pro předběžné odhady. Například Olivier Adam a Olivier Leonard představili výpočet kvazi-jednorozměrného modelu pro axiální turbínu, viz [24]. Každá lopatková řada turbíny je diskretizována zvlášť metodou konečných objemů a řešena pomocí Eulerových rovnic v křivočarých souřadnicích. Řešič k časové diskretizaci používá implicitní schéma. [24]

Jiná metoda tzv. zakřivených proudnic (Streamline curvature throughflow method) pro radiální turbíny je popsána v [26]. Metoda umožňuje zvlášť řešit ucpání a ztráty a použít modely pro stlačitelné i nestlačitelné proudění reálných i ideálních plynů a nadzvukové proudění. [26]

Hlavním cílem této diplomové práce je vývoj programu pro výpočet zjednodušeného modelu jednorozměrného proudění statorem v radiální turbíně. Smyslem zjednodušeného výpočtu je poskytnout předběžnou předpověď proudění v relativně krátkém čase. Vliv lopatek je modelován pomocí zdrojových členů v kvazi-1D Eulerových rovnicích. Zdrojové členy představují otočení rychlosti, odstředivou sílu a zúžení kanálu vlivem nenulové tloušťky lopatky. Model bude nejprve otestován na geometrii dýzy s proměnným průřezem. Výpočet na radiální turbíně bude proveden pro dvě geometrie statoru.

Matematický model úlohy je představen v první části této diplomové práce. Pro řešení nevazké stlačitelné tekutiny je zvolena soustava Eulerových rovnic, vyjádřená v polárních souřadnicích.

Další část této práce se zabývá formulací úloh: dýzy s proměnným průřezem, radiální turbíny bez vlivu lopatek a s lopatkami. K uvedeným rovnicím je definována oblast řešení, počáteční a okrajové podmínky.

Numerické řešení úloh je popsáno ve třetí části práce. Je zde ukázána metoda konečných objemů v 1D. Dále je uveden stručný popis schémat typu $AUSM^+$ a HLL , které jsou použity pro diskretizaci numerických toků na hranici buněk sítě. Pro časovou diskretizaci rovnic je zvolena dopředná Eulerova metoda, která umožňuje vyjádřit diskretizované rovnice v explicitním tvaru. Dále následuje popis modelování vlivu lopatky, tj. způsob otočení proudu v případě radiální turbíny. Výpočet bude proveden v programu vytvořeném v programovacím jazyce C++ autorkou práce. Tento přístup na rozdíl od komerčních softwarů umožňuje vytvoření algoritmu optimalizovaného pro řešení konkrétního problému

V poslední části jsou představeny výsledky numerického řešení dýzy s proměnným průřezem a dvou případů radiálních turbín. Jako první případ řešíme radiální turbínu v transsonickém režimu. Druhý případ je rozváděcí část turbíny automobilového turbodmychadla. Vlastní výsledky řešení jednorozměrného proudění dvou různých turbín porovnáme s výsledky dvourozměrného turbulentního proudění jiných autorů.

1. Matematické modely proudění stlačitelné tekutiny

K tomu, abychom se mohli zabývat simulací proudění, potřebujeme stanovit matematický základ, tj. definovat rovnice, které popisují dané proudění. V této kapitole uvedeme bilanční rovnice, tvořící matematické modely proudění tekutiny. Dále ukážeme soustavu Navierových - Stokesových rovnic a její zjednodušení na jednorozměrnou soustavu Eulerových rovnic. Pro jednotlivé aplikace zmíněné v této práci rozepíšeme soustavu Eulerových rovnic v různých tvarech.

1.1. Zákony zachování

Zákony uvedené v této podkapitole lze zapsat jako bilance hmoty, hybnosti a energie v kontrolním objemu V . Bilance říká, že časová změna zachovávané veličiny J v objemu V je rovna rozdílu toku této veličiny plochou ∂V a její produkci uvnitř objemu V . Podrobné odvození bilančních rovnic je možné najít v [1], [12], [13]. Platí, že

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V J dV + \oint_{\partial V} \mathbf{F}(J) \cdot \mathbf{n} dS = \oint_V P(J) dV, \quad (1.1)$$

kde $\mathbf{F}(J)$ je vektor hustoty toku veličiny J plochou ∂V , $P(J)$ je hustota produkce veličiny J , \mathbf{n} je jednotkový vektor kolmý na ∂V . Další tvary bilanční rovnice (např. diferenciální tvar) je možné odvodit pomocí Reynoldsova transportního teorému. [18,s32], [19, s27]

Za předpokladu spojitosti vektoru hustoty toku \mathbf{F} můžeme vztah (1.1) psát v diferenciálním tvaru bilanční rovnice pro veličinu J :

$$\frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial F_k}{\partial x_k} = P(J). \quad (1.2)$$

Následující zákony zachování vzniknou dosazováním odpovídajících veličin do rovnice (1.1).

- **Zákon zachování hmoty**

V daném případě je bilancovanou veličinou hustota, tj. $J = \rho$. Rovnice zachování hmoty v integrálním tvaru:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = 0, \quad (1.3)$$

kde ρ je hustota tekutiny, \mathbf{u} je vektor rychlosti.

Diferenciální tvar rovnice kontinuity:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (1.4)$$

- **Zákon zachování hybnosti**

V tomto případě je zachovávanou veličinou hybnost, tj. $J = \rho \mathbf{u}$. Integrovaný a konzervativní (diferenciální) tvar zákona zachování hybnosti:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \mathbf{u} dV + \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\partial V} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS + \int_V \rho \mathbf{b} dV, \quad (1.5)$$

kde $\boldsymbol{\sigma}$ je tenzor napětí, \mathbf{b} je vektor vnějších objemových sil.

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = \text{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} \quad (1.6)$$

- **Zákon zachování energie**

Zachovávanou veličinou je zde celková energie, tj. za J se dosadí součin ρE , kde E je měrná celková a skládá se z měrné kinetické energie $\frac{1}{2} u^2$ a měrné vnitřní energie e .

Integrovaný tvar rovnice pro zachování energie je následující:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho E dV + \oint_{\partial V} \rho E \mathbf{u} dV = \int_S \mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_V \mathbf{u} \cdot \rho \mathbf{b} dV. \quad (1.7)$$

Převodem povrchového integrálu na objemový můžeme rovnici zapsat v konzervativním tvaru:

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \text{div}(\rho E \mathbf{u}) = \text{div}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \rho \mathbf{b}. \quad (1.8)$$

1.2. 2D Navierovy – Stokesovy rovnice

Navierovy-Stokesovy rovnice popisují proudění Newtonské tekutiny. Dané rovnice byly odvozeny Stokesem v Anglii a Navierem ve Francii v letech 1827 a 1845 nezávisle na sobě. Tyto rovnice jsou rozšířením Eulerových rovnic a zahrnují účinky viskozity. Navierovy-Stokesovy rovnice je soustava spojených diferenciálních rovnic. V praxi je velmi obtížné řešit je analyticky. V poslední době se používají supervýkonné počítače k řešení rovnic numerickými metodami, jako je např. metoda konečných objemů, metoda konečných diferencí, metoda konečných prvků a spektrální metody.[6]

Výchozí soustava rovnic vychází ze základních fyzikálních zákonů - zákona zachování hmoty, zákona zachování hybnosti a zákona zachování energie, viz *Podkapitola 1.1*. Časově závislé 2D Navierovy-Stokesovy rovnice bez uvažování vnější síly se skládají z rovnice kontinuity pro zachování hmoty, dvou rovnic zachování hybnosti a rovnice zachování energie [1]:

- Rovnice kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (1.9)$$

- Pohybové rovnice

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} = \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial y} \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2 + p)}{\partial y} = \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} \quad (1.11)$$

- Energetická rovnice

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial((\rho E + p)u)}{\partial x} + \frac{\partial((\rho E + p)v)}{\partial y} \\ = \frac{\partial(u\tau_{11} + v\tau_{12} + \lambda \frac{\partial T}{\partial x})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{12} + v\tau_{22} + \lambda \frac{\partial T}{\partial y})}{\partial y}, \end{aligned} \quad (1.12)$$

kde u , v jsou složky rychlosti, ρE je celková energie, p statický tlak, T teplota, τ_{ij} tenzor tečných napětí, λ součinitel teplotní vodivosti a x , y jsou kartézské souřadnice.

Tepelné toky jsou vyjádřeny jako:

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (1.13)$$

Počet závislých proměnných je pět: hustota ρ , teplota T (která je obsažená v energetické rovnici), tlak p a dvě složky vektoru rychlosti u složka ve směru x , v složka ve směru y . Všechny závislé proměnné jsou funkcemi všech třech nezávislých proměnných (t, x, y). Počet neznámých je o jednu vyšší než počet rovnic a proto je soustavu nutné doplnit další rovnicí. Zvolena byla stavová rovnice ideálního plynu $p = \rho RT$, kterou lze převést do následujícího tvaru pro tlak:

$$p = (\gamma - 1) \left[\rho E - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \right], \quad (1.14)$$

kde γ je poměr tepelných kapacit při stálém tlaku resp. objemu.

Vektor rychlosti má dvě složky, tenzor tečných napětí má čtyři složky. Pro tenzor tečných napětí newtonské tekutiny platí vztah:

$$\begin{aligned} \tau_{11} = \frac{2\mu}{3} \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad \tau_{22} = \frac{2\mu}{3} \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ \tau_{12} = \tau_{21} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (1.15)$$

kde μ je dynamická viskozita.

Soustavu rovnic (1.9) - (1.12) je možné psát ve vektorovém tvaru pro konzervativní proměnné $\mathbf{W}, \mathbf{F}, \mathbf{G}$ [4,s7] nebo [15,s33-37]:

$$\mathbf{W}_t + \mathbf{F}_x + \mathbf{G}_y = \mathbf{R}_x + \mathbf{S}_y, \quad (1.16)$$

kde

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{bmatrix} \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (\rho E + p)u \end{bmatrix} \mathbf{R} = \mu \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{11} \\ \tau_{12} \\ u\tau_{11} + v\tau_{12} + \frac{k}{\mu} \frac{\partial T}{\partial x} \end{bmatrix} \mathbf{S} = \mu \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{21} \\ \tau_{22} \\ u\tau_{21} + v\tau_{22} + \frac{k}{\mu} \frac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (\rho E + p)v \end{bmatrix}$$

Vektor \mathbf{W} je vektor konzervativních proměnných, \mathbf{F} a \mathbf{G} jsou nevazké fyzikální toky, \mathbf{S} a \mathbf{R} představují vazké fyzikální toky.

Systém Navierových-Stokesových rovnic může být zjednodušen zanedbáním jedné nebo více rovnic nebo některých členů každé rovnice. Zanedbáním členů popisujících vazké efekty a vedení tepla získáme soustavu Eulerových rovnic. Tyto rovnice obsahují pouze konvekční členy N-S rovnic. Jinou možností zjednodušování je zanedbání tlakových gradientů. Tím získáme tzv. Burgersovou rovnici. Ta může být lineární neviskózní, nelineární neviskózní, lineární viskózní a nelineární viskózní.

Je známo, že řídicí rovnice v mechanice tekutin a přenosu tepla jsou smíšených typů: eliptické, parabolické a hyperbolické parciální diferenciální rovnice. Typ rovnice je určen přítomností nebo absencí určitých členů a závisí na příslušném fyzikálním fenoménu. Navierovy-Stokesovy rovnice představují nelineární parabolický systém. Na typu rovnic závisí volba numerických schémat.

Výše uvedený systém N-S rovnic je popsán Eulerovými souřadnicemi, pro které je aktuální proudové pole vztaženo k referenčním souřadnicím. Podrobněji v [14] nebo [15].

1.3. 1D Eulerovy rovnice

Tato práce se zabývá řešením soustavy zjednodušených Navierových-Stokesových rovnic, tj. soustavou Eulerových rovnic. Rovnice jsou pojmenovány na počest Leonarda Eulera, který studoval různorodou problematiku dynamiky tekutin v polovině 18. století. Při vysokých Reynoldsových číslech hrají vazké a turbulentní efekty roli jenom v malé oblasti v blízkosti stěny. Chování takového proudění je dobře popsáno pomocí Eulerových rovnic. [5]

Dále bude představen zjednodušený jednodimenzionální tvar Eulerových rovnic. Nezávislými proměnnými jsou prostorová souřadnice x a čas t a závislými proměnnými: tlak p , hustota ρ a jedna složka rychlosti u ve směru x .

Pro 1D případ lze systém Eulerových rovnic zapsat v konzervativním tvaru [1]:

$$\mathbf{W}_t + \mathbf{F}_x = 0. \quad (1.17)$$

Diferenciální forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (\rho E + p)u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

Kromě diferenciální formy lze použít integrální formu:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{W} dV + \int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (1.19)$$

1.4. 1D systém Eulerových rovnic v kvazilineárním tvaru

Nelineární systém bilančních rovnic můžeme psát v kvazilineárním tvaru:

$$\mathbf{W}_t + \mathbf{A}(\mathbf{W})\mathbf{W}_x = 0, \quad (1.20)$$

kde Jacobiho matice $\mathbf{A}(\mathbf{W}) = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{W}$ o rozměru korespondujícím s počtem proměnných ve vektoru \mathbf{W} . Systém (1.20) je hyperbolický, právě když \mathbf{A} má pouze reálná vlastní čísla a reálné lineárně nezávislé vlastní vektory. Přímým výpočtem lze zjistit, že matice \mathbf{A} má reálná vlastní čísla, která představují rychlosti šíření informace: $\lambda_1 = u - a$, $\lambda_2 = u$, $\lambda_3 = u + a$, kde a je lokální rychlost zvuku. Každé z těchto vlastních čísel má pravostranný vlastní vektor. Tyto vlastní vektory jsou lineárně nezávislé a matici \mathbf{A} lze diagonalizovat $\mathbf{A} = \mathbf{R} \text{diag}(u - a, u + a, u) \mathbf{R}^{-1}$. Matice \mathbf{R} se skládá z vlastních vektorů matice \mathbf{A} . Z toho vyplývá, že nelineární systém Eulerových rovnic v 1D je hyperbolický.

1.5 Kvazi-1D Eulerovy rovnice v osově symetrickém kanále

Jednou z dílčích úloh této práce je proudění v dýze s proměnným průřezem. Proudění s proměnným průřezem je používáno při studiu jevů proudění tekutin v potrubí, kanálech, rázových trubkách a tryskách. Řídící rovnice vznikají zjednodušením vztahů pro trojrozměrné homogenní proudění za předpokladu dostatečné hladké změny průřezu. 3D Eulerovy rovnice integrujeme v průřezu $A(x)$, čímž snížíme počet prostorových souřadnic ze tří na jednu. Proměnný průřez vede ke vzniku zdrojového členu na pravé straně. [1,s85], [10,s27-28], [23,s115]

$$\mathbf{W}_t + \mathbf{F}(\mathbf{W})_x = \mathbf{Q}(\mathbf{W}) \quad (1.21)$$

Rozepsáním do složek dostaneme:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho A \\ \rho u A \\ \rho E A \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho u A \\ (\rho u^2 + p) A \\ (\rho E + p) u A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ p \frac{dA}{dx} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.22)$$

1.6. Kvazi-1D Eulerovy rovnice v polárních souřadnicích

Existují případy, ve kterých je vhodné použít jiný než kartézský souřadnicový systém, například polární souřadnicový systém. Tento souřadnicový systém je vhodné použít pro proudění statorem radiální turbíny, které je předmětem této práce.

Jednotlivé zákony zachování v cylindrických souřadnicích jsou uvedeny v [19,s31,s36]. Soustava Eulerových rovnic pro pohyb tekutiny v potrubí je uvedena v [20,s425] [21, Kap. 4.9].

Výchozí soustavu rovnic pro 1D proudění v radiální turbíně v polárních souřadnicích můžeme odvodit například ze soustavy rovnic pro 2D proudění. Zapišeme konzervativní tvar 2D soustavy Eulerových rovnic:

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r\mathbf{F})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \varphi} = \mathbf{B}, \quad (1.23)$$

kde

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_r \\ \rho u_\varphi \\ \rho E \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u_r \\ \rho u_r^2 + p \\ \rho u_\varphi u_r \\ (\rho E + p)u_r \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho \frac{u_\varphi^2}{r} + \frac{p}{r} \\ -\frac{\rho u_\varphi u_r}{r} \\ \frac{p}{r} \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho u_\varphi \\ \rho u_\varphi u_r \\ \rho u_\varphi^2 + p \\ (\rho E + p)u_\varphi \end{bmatrix},$$

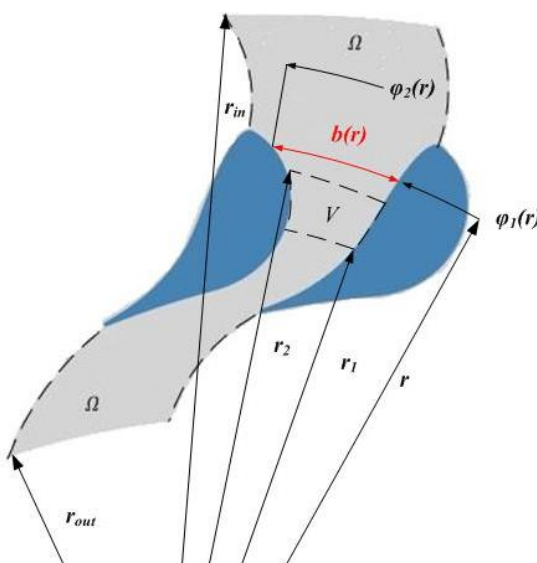
kde r je radiální vzdálenost od počátku, u_r je radiální složka rychlosti, u_φ je obvodová složka rychlosti. Ve zdrojovém členu \mathbf{B} modeluje poměr $\frac{p}{r}$ vlivy vzniklé zúžením kanálu a $\rho \frac{u_\varphi^2}{r}$ je odstředivá síla.

Soustava rovnic musí být doplněna rovnicí pro tlak, např. vztahem pro tlak ideálního plynu:

$$p = (\gamma - 1) \left[\rho E - \frac{1}{2} \rho (u_r^2 + u_\varphi^2) \right]. \quad (1.24)$$

Řešení budeme uvažovat na jednom mezilopatkovém kanálu, který je znázorněn na *obr. 1*. Řešená oblast je Ω :

$$\Omega = \{[r, \varphi]; r_{out} < r < r_{in}; \varphi_1(r) < \varphi < \varphi_2(r)\}.$$



Obr. 1 – Geometrie mezilopatkového kanálu

Rovnici (1.23) vynásobíme r a integrujeme přes element $V \subset \Omega$, kde $r_1 < r < r_2$ a $\varphi_1(r) < \varphi < \varphi_2(r)$

$$\int_{r_1}^{r_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\mathbf{F})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \varphi} \right) r d\varphi dr = \int_{r_1}^{r_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \mathbf{B} r d\varphi dr. \quad (1.25)$$

Rovnici (1.25) nejprve integrujeme vzhledem k φ . Užijeme vzorec pro záměnu pořadí derivování a integrování:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial f(r, \varphi, t)}{\partial t} d\varphi = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r, \varphi, t) d\varphi = \frac{\partial}{\partial t} (\bar{f}(r, t) b(r)), \quad (1.26)$$

kde $\bar{f}(r, t)$ označuje střední hodnotu $f(r, \varphi, t)$ v obvodovém směru, b je úhlová šířka mezilopatkového kanálu v obvodovém směru. Pro ni platí vztah:

$$b(r) = \varphi_2(r) - \varphi_1(r). \quad (1.27)$$

Viz obr. 1.

Pro derivování podle parametru r platí vztah:

$$\int_{\varphi_1(r)}^{\varphi_2(r)} \frac{\partial f(r, \varphi, t)}{\partial r} d\varphi = \frac{\partial}{\partial r} \int_{\varphi_1(r)}^{\varphi_2(r)} f(r, \varphi, t) d\varphi - \left[f(r, \varphi, t) \frac{\partial \varphi(r)}{\partial r} \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2}. \quad (1.28)$$

Integrujeme rovnici (1.25):

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\mathbf{F})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \varphi} \right) d\varphi \\ = \frac{\partial \bar{\mathbf{W}}}{\partial t} + \frac{1}{rb} \left(\frac{\partial(r b \bar{\mathbf{F}})}{\partial r} - \left[r \mathbf{F} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2} \right) + \frac{1}{rb} [\mathbf{G}]_{\varphi_1}^{\varphi_2} - \bar{\mathbf{B}} = 0. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Z rovnice (1.29) vyplývá:

$$\frac{\partial(r b \bar{\mathbf{W}})}{\partial t} + \frac{\partial(r b \bar{\mathbf{F}})}{r \partial r} - \left[r \mathbf{F} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2} + [\mathbf{G}]_{\varphi_1}^{\varphi_2} = r b \bar{\mathbf{B}}. \quad (1.30)$$

Podmínka nepropustnosti při $\varphi = \varphi_1$ a $\varphi = \varphi_2$ dává na hranicích $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$. Předpokládáme, že $p_1 = p_2 = p$. Proto:

$$\left[-r \mathbf{F} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \mathbf{G} \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2} = -r p \frac{\partial b}{\partial r} \mathbf{e}_2, \quad (1.31)$$

kde \mathbf{e}_2 je jednotkový vektor.

Dostáváme KVAZI-1D rovnici:

$$\frac{\partial(br\bar{W})}{\partial t} + \frac{\partial(br\bar{F})}{\partial r} = br\bar{B} + rp \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial b}{\partial r} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1.32)$$

Protože se v řešení mohou vyskytnout nespojitosti, např. rázové vlny, je lepší použít integrální tvar rovnice (1.32):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{r_1}^{r_2} (br\bar{W}) dr + [br\bar{F}]_{r_1}^{r_2} = \int_{r_1}^{r_2} br\bar{Q} dr, \quad (1.33)$$

kde zdrojový člen \bar{Q} je:

$$\bar{Q} = \bar{B} + \frac{p}{b} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial b}{\partial r} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.34)$$

2. Formulace úloh

Tato práce se věnuje řešení dvou úloh, které budou formulovány v této kapitole. Připomeneme, že řešíme jednorozměrné proudění nevazké stlačitelné tekutiny. Předpokládáme, že parametry proudění se nemění s časem, takové proudění je stacionární. Proudění můžeme modelovat jako jednorozměrné, jestliže se jeho parametry nemění ve směru kolmém k vektoru rychlosti. Předpoklad 1D proudění se často používá pro zjednodušení komplexního problému a také pro získání rychlé představy o vlivu změny vstupních parametrů na chování proudění.

2.1. Dýza s proměnným průřezem

První řešenou úlohou je dýza s proměnným průřezem. Tato úloha slouží k testování použité numerické metody.

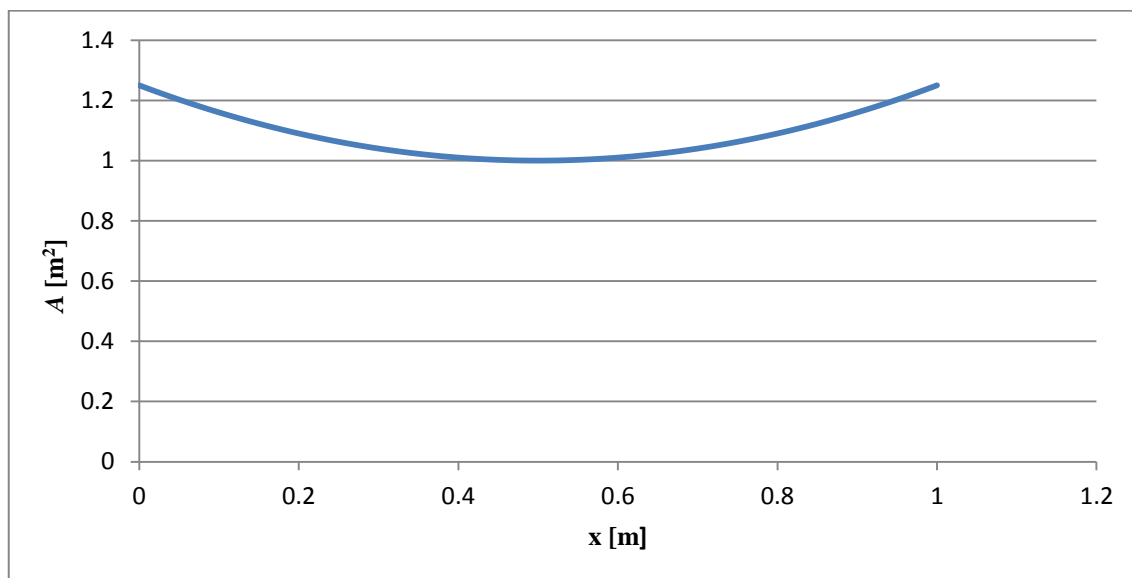
Průřez kanálu je dán funkcí $A = A(x)$, která je znázorněna na *obr. 2*, kde x značí vzdálenost podél kanálu. Hledáme vektor $\mathbf{W}(x, t): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, který na oblasti $\Omega \in [0, X] \times \mathbb{R}^+$ splňuje rovnici

$$\mathbf{W}_t + \mathbf{F}_x = \mathbf{Q} \quad (2.1)$$

a na hranici $\partial\Omega$ splňuje okrajové podmínky a v čase $t = 0$ počáteční podmínku.

Jako počáteční podmínku předepisujeme klidový stav $\mathbf{W}(x, 0) = \mathbf{W}_0$, kde $u = 0, \rho = \rho_0, p = p_0$. Stanovení okrajových podmínek je založeno na určení vlastních čísel linearizované soustavy Eulerových rovnic (viz *Podkapitola 1.4*). Jacobiho matice soustavy (1.21) má 3 různá reálná vlastní čísla $\lambda_1 = u - a, \lambda_2 = u, \lambda_3 = u + a$. Znaménko vlastního čísla odpovídá směru šíření informace. Pro subsonický vstup $u < a$ jsou dvě kladná vlastní čísla λ_2 a λ_3 , tj. informace se šíří směrem do výpočetní oblasti. To znamená, že na vstupu musíme zadat 2 okrajové podmínky. V našem případě zadáváme celkový tlak a hustotu. Pro subsonický výstup je potřeba

zadat pouze jednu okrajovou podmínku, protože do oblasti vstupuje jedna charakteristika, odpovídající zápornému vlastnímu číslu λ_1 , v našem případě zadáváme výstupní tlak.



Obr. 2 – Velikost průřezu podél dýzy

2.2. Radiální lopatková mříž

Hlavním cílem této práce je řešení proudění radiálním statorem. Matematický model pro jeho řešení jsme popsali v *Podkapitole 1.6*. Níže popíšeme formulace úloh radiálního uspořádání nejprve bez uvažování lopatek a následně se zahrnutím jejich vlivu.

Radiální uspořádání bez lopatek

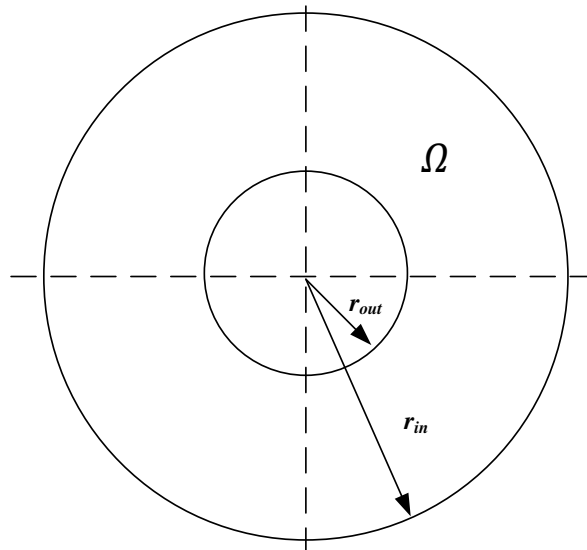
Radiální uspořádání turbíny bez lopatek představuje model prostého mezikruží, jak je znázorněno na *obr. 3*. Proud tekutiny vstupuje na vnějším poloměru r_{in} a při podzvukovém režimu se vlivem zúžení průřezu začne urychlovat směrem k výstupu r_{out} .

Hledáme vektor $\mathbf{W}(r, t): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ na řešené oblasti $\Omega \in [r_{out}, r_{in}] \times \mathbb{R}^+$. Hranice $\partial\Omega$ je tvořena vstupem r_{in} a výstupem r_{out} .

$$(r\overline{\mathbf{W}})_t + (r\overline{\mathbf{F}})_r = r\overline{\mathbf{B}} \quad (2.2)$$

Požadujeme splnění počáteční podmínky a okrajových podmínek na hranici $\partial\Omega$. Volba okrajových podmínek je založena na stejném principu, jako v případě dýzy. Matice linearizované soustavy v polárních souřadnicích, v analogii s kartézským souřadnicovým systémem, má čtyři vlastní čísla $\lambda_1 = u_r$, $\lambda_2 = u_r$, $\lambda_3 = u_r + a$, $\lambda_4 = u_r - a$. Na subsonickém vstupu $-a < u_r < 0$ potřebujeme předepsat tři okrajové podmínky, protože do oblasti vstupují tři charakteristiky odpovídající kladným vlastním číslům. Oproti dýze předepisujeme navíc úhel vektoru rychlosti α . Na subsonickém výstupu do oblasti vstupuje pouze jedna charakteristika odpovídající zápornému vlastnímu číslu a proto předepisujeme jedinou okrajovou podmínku, a to výstupní tlak.

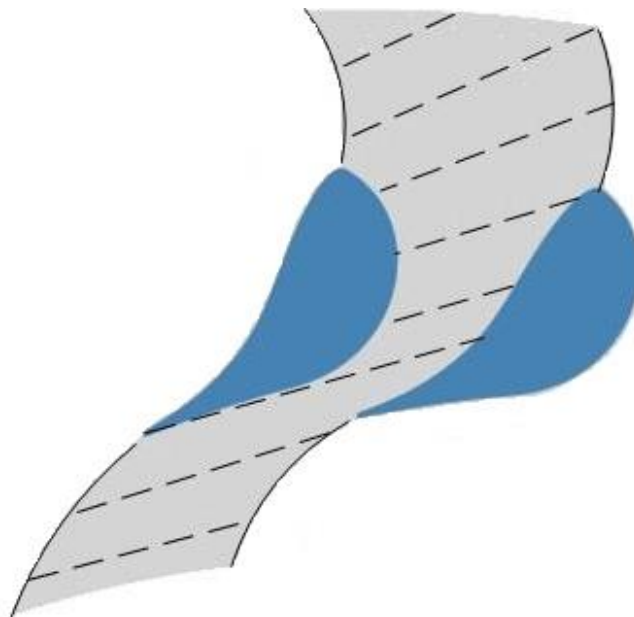
Počáteční podmínky uvažujeme opět klidový stav $\mathbf{W}(r, 0) = \mathbf{W}_0$.



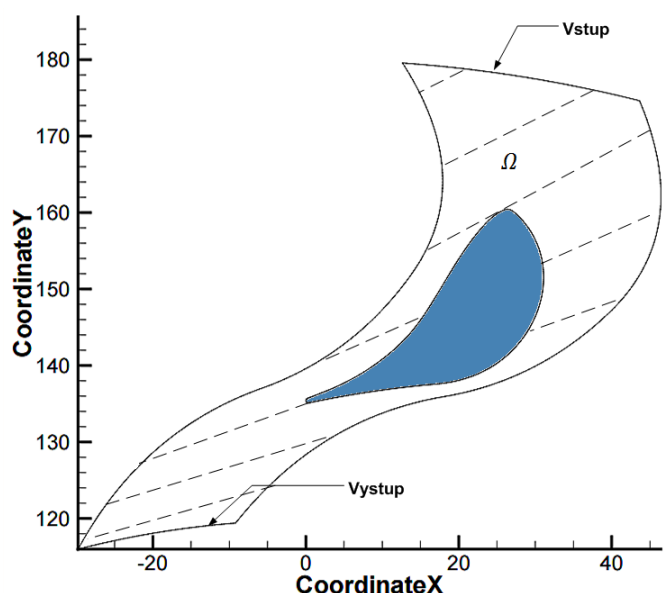
Obr. 3 – Řešená oblast modelu bez lopatek

Radiální uspořádání s lopatami

Radiální lopatková mříž je tvořena periodicky se opakujícími mezilopatkovými kanály. Geometrie mezilopatkového kanálu je vyznačena na obr. 4. Budeme předpokládat periodicitu řešení a provedeme výpočet pouze na jedné posunuté ekvivalentní oblasti, která je zobrazena na obr. 5.



Obr. 4 – Mezilopatkový kanál radiální lopatkové mříže



Obr. 5 – Oblast řešení pro radiální lopatkovou mříž

Řešení dané úlohy vychází ze zjednodušeného modelu prostého mezikruží s přidáním zdrojového členu určujícího vliv lopatky. Pro zohlednění vlivu lopatky musíme vhodně otočit vektory rychlosti a přidat člen vyjadřující šířku mezilopatkového kanálu. Podrobněji viz Podkapitola 3.7.

Hledáme stacionární řešení rovnice:

$$(br\bar{W})_t + (br\bar{F})_r = br\bar{Q}. \quad (2.3)$$

Čas t má význam iteračního času.

Úkolem je najít vektor $\mathbf{W}(r, t): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ na oblasti $\Omega \in [r_{out}, r_{in}] \times \mathbb{R}^+$. Hranice $\partial\Omega$ se skládá ze vstupu o souřadnici r_{in} a výstupu r_{out} . Oblast řešení je označena na obr. 5.

Zadávané okrajové podmínky jsou stejné jako v případě radiálního uspořádání bez lopatek. Počáteční podmínka pro danou soustavu opět představuje klidový stav $\mathbf{W}(r, 0) = \mathbf{W}_0$.

3. Numerické řešení

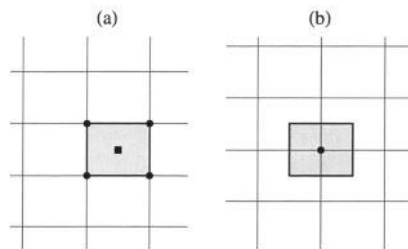
Najít analytické řešení Eulerových rovnic je velmi obtížné, dokonce i pro jednorozměrný případ. Analytické řešení dokážeme najít pouze pro velmi zjednodušené případy, jako např. Burgersova rovnice nebo rovnice advekce-difuze. Chceme-li získat informace o proudovém poli, můžeme provést experiment, který je však obvykle finančně náročný. Proto se stále častěji užívají numerické metody, kterými lze nalézt přibližné řešení daných problémů. Jejich základem je časová a prostorová diskretizace, ukázaná na začátku této kapitoly. Metoda přímek umožňuje provést diskretizaci prostoru a času nezávislé na sobě [17,s205]. Pro prostorovou diskretizaci je užito metody konečných objemů typu “cell-centered”, která je popsána v další části kapitoly. Daná úloha je řešena explicitní metodou ustalování, která hledá ustálené řešení jako limitu nestacionárního řešení pro $t \rightarrow \infty$ při stacionárních okrajových podmínkách. K řešení diskretizované soustavy rovnic použijeme schémata typu $AUSM^+$ a HLL .

Na konci této kapitoly se budeme zabývat způsobem vyjádření vlivu lopatky na proudové pole. Uvedeme parametry, kterými vyjadřujeme geometrii lopatky. Dále popíšeme postup zpracování dodaných dat z 2D výpočtu pro dva statory radiálních turbín, které budeme porovnávat s výsledky 1D výpočtu představeného v této práci.

3.1. Metoda konečných objemů

Metoda konečných objemů je způsob diskretizace parciálních diferenciálních rovnic. MKO vychází z integrálního tvaru zákonů zachování. Oblast řešení rozdělíme na konečný počet kontrolních objemů, které tvoří její úplné disjunktivní pokrytí. Tím získáme konečný počet bodů, ve kterých hledáme hodnoty neznámých. Podle umístění neznámých se rozlišují dva základní přístupy [16,s77-80]:

- Cell-centered schéma (obr. 6a) – neznámé jsou uloženy v těžiště buňky sítě, tj. kontrolní objem je shodný s buňkou sítě.
- Cell-vertex schéma (obr. 6b) – proměnné jsou uloženy v uzlech sítě. Kontrolní objem může být buď totožný s buňkou sítě, nebo soustředěný okolo uzlu sítě (duální kontrolní objem).



Obr. 6 – Kontrolní objemy schémat typu cell-centered (a) a cell-vertex (b) [16, s38]

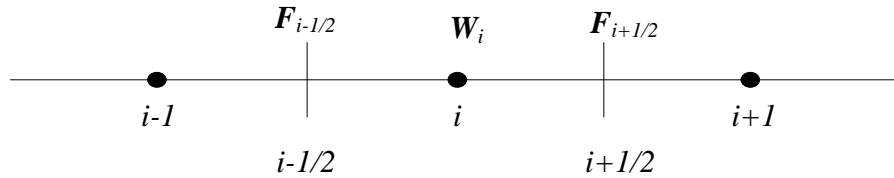
Výhodou MKO je snadná implementace na strukturované i nestruturované sítě. Díky tomu, že MKO vychází z integrálního tvaru zákonů zachování, je možné ji použít i k řešení případů s výskytem nespojitosti, např. rázových vln. Tím získáme *slabé řešení*¹ daných rovnic, které splňuje integrální bilanci, přestože odporuje podmínkám diferenciálního tvaru rovnic. Podrobněji v [12,s36].

3.1.1 MKO pro 1D problém

V této kapitole rozebereme princip MKO na 1D příkladu. Rozdělíme výpočtovou oblast $\Omega = I \subset \mathbb{R}$ na N podintervalů $I_i = [x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i-\frac{1}{2}}]$, jak je znázorněno na obr. 7. Rozdělení musí splňovat tyto podmínky:

- $I_i \cap I_j = 0$ nebo I_i, I_j mají společný právě jeden bod, pro $i \neq j$
- $\cup_i I_i = \Omega$

¹ Definice slabého řešení Eulerových rovnic v 1D: necht' $F \in C^1$, $W_0 \in L^1_{loc}$, $W(x, t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$. Funkce W nazveme slabým řešením rovnice $W_t + F_x = 0$ s počáteční podmínkou $W(x, 0) = W_0(x)$ právě tehdy, když $\forall \varphi \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ s omezeným kompaktním nosičem platí: $\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (W\varphi_t + F\varphi_x) dx dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} W_0(x)\varphi(x, 0) dx$



Obr. 7 – Buňka sítě

Rovnici (1.21) integrujeme přes interval I_i .

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} (\mathbf{W}_t + \mathbf{F}_x) dx = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mathbf{Q} dx \quad (3.1)$$

Za předpokladu, že se kontrolní objem v čase nemění, časovou derivaci vektoru konzervativních proměnných můžeme vytknout před integrál:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mathbf{W} dx + \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mathbf{F}_x dx = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mathbf{Q} dx. \quad (3.2)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mathbf{W} dx + [\mathbf{F}]_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mathbf{Q} dx. \quad (3.3)$$

Pro element i můžeme definovat průměrnou hodnotu $\overline{\mathbf{W}}_i(t)$:

$$\overline{\mathbf{W}}_i = \frac{\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mathbf{W} dx}{x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mathbf{W} dx. \quad (3.4)$$

Po dosazení do rovnice (3.3) dostaneme rovnici v semidiskrétním tvaru s indexem i uprostřed intervalu:

$$\frac{d\overline{\mathbf{W}}_i}{dt} = -\frac{1}{\Delta x_i} (\tilde{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}} - \tilde{\mathbf{F}}_{i-\frac{1}{2}}) + \overline{\mathbf{Q}}_i, \quad (3.5)$$

kde $\overline{\mathbf{Q}}_i$ je integrální průměr zdrojového členu, definovaný obdobně jako $\overline{\mathbf{W}}_i$. K aproximaci toku $\tilde{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}}$ na hraně mezi buňkami i a $i+1$ se používá řada schémat, z nichž v následujících podkapitolách dvě uvedeme.

3.2. AUSM⁺

AUSM schéma bylo vyvinuto s cílem ostřeji zachytit rázové vlny, aniž by se příliš zvýšila výpočetní náročnost oproti klasickým centrálním schématům s umělou disipací. Je založen na koncepci schématu upwind, která zohledňuje směr šíření informace v proudovém poli. V závislosti na znaménku charakteristických rychlostí se pro aproximaci toku na hranici uvažuje buď hodnota z levé, nebo pravé buňky.

Principem AUSM schématu je rozdělení nevazkého toku na konvektivní a tlakovou část. Konvektivní část toku je spojena s rychlostí advekce, zatímco tlaková část s rychlostí akustickou. [8] Původně byla tato metoda navržena pro stlačitelné aerodynamické proudění Liouem a Steffenem. Později byla odvozena výrazně přesnější a robustnější metoda AUSM⁺. [7]

Vlastnosti $AUSM^+$:

- Exaktní řešení kontaktních nespojitostí a rázových vln.
- Pozitivita zachování skalární veličiny, jako je hustota.
- Zdokonalení přesnosti.
- Jednoduchost a snadné zobecnění zákonů zachování.

Numerický tok na hranici buněk $i, i + 1$ je definován jako:

$$\tilde{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}} = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{W}}_i, \bar{\mathbf{W}}_{i+1}). \quad (3.6)$$

V prvním kroku pro $AUSM$ schéma se neviskózní tok rozdělí na konvektivní a tlakovou část:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{(c)} + \mathbf{P}, \quad (3.7)$$

kde

$$\mathbf{F}^{(c)} = Ma \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho H \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Numerický tok $\tilde{\mathbf{F}}_{i+1/2}$ vyjádříme jako součet numerického toku konvektivní části $\tilde{\mathbf{F}}_{i+1/2}^{(c)}$ a numerického toku tlakové části $\tilde{\mathbf{P}}_{i+1/2}$ na rozhraní $i + 1/2$, spojujícím buňky i a $i + 1$. [8]

$$\tilde{\mathbf{F}}_{i+1/2} = \tilde{\mathbf{F}}_{i+1/2}^{(c)} + \tilde{\mathbf{P}}_{i+1/2}, \quad (3.9)$$

kde konvektivní numerický tok je dán vztahem:

$$\tilde{\mathbf{F}}_{i+1/2}^{(c)} = M_{i+1/2} a_{i+1/2} \boldsymbol{\psi}_{i+1/2}, \quad (3.10)$$

kde $\boldsymbol{\psi} = (\rho, \rho u, \rho H)^T$, H je celková entalpie, dána vztahem $H = E + \frac{p}{\rho}$.

Pro stanovení $\boldsymbol{\psi}_{i+1/2}$ je použito:

$$\boldsymbol{\psi}_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \boldsymbol{\psi}_i, & \text{pro } M_{i+\frac{1}{2}} \geq 0 \\ \boldsymbol{\psi}_{i+1}, & \text{jinak} \end{cases}, \quad (3.11)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_{i+1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ p_{i+1/2} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Machovo číslo $M_{i+1/2}$ zapíšeme jako součet dvou individuálních komponent:

$$M_{i+1/2} = \mathcal{M}^+(M_i) + \mathcal{M}^-(M_{i+1}). \quad (3.13)$$

kde Indexy "+" a "-" jsou chápány jako směr šíření. Rychlost a tlak jsou těsně spojeny a charakteristické proměnné se šíří rychlostmi $u \pm a$. Pro $|M| < 1$ se pohybují dvě vlny v opačných směrech a vzájemně mezi sebou interagují. Proto $M_{i+1/2}$ počítáme jako polynom proměnných ($M \pm |M|$):

$$\mathcal{M}_{(1)}^{\pm} = \frac{1}{2}(M \pm |M|), \quad \text{pro } |M| < 1. \quad (3.14)$$

Dolní index označuje stupeň polynomu.

Dosazením (3.14) do (3.13) je získána základní formulace Machova čísla na rozhraní $M_{i+1/2}$:

$$M_{i+1/2} = \frac{1}{2}[(M+1)_i + (M-1)_{i+1}]. \quad (3.15)$$

To ve skutečnosti odpovídá prostému průměru M_i a M_{i+1} .

Pro odstranění nediferencovatelnosti (3.14) při změně znaménka vlastních čísel Van Leer vybral diferencovatelný polynom druhého řádu:

$$\mathcal{M}_{(2)}^{\pm} = \pm \frac{1}{4}(M \pm |M|)^2. \quad (3.16)$$

Předchozí vzorec má za následek nesymetrickou distribuci signálů šířících se charakteristickými rychlostmi $(M \pm 1)$ pro $M \neq 0$.

Rozdělené Machovo číslo $M_{i+1/2}$ a funkce tlaku musí splňovat následující vlastnosti:

- a) $\mathcal{M}^+(M) + \mathcal{M}^-(M) = M$, konzistence.
- b) $\mathcal{M}^+(M) \geq 0$ a $\mathcal{M}^-(M) \leq 0$.
- c) \mathcal{M}^{\pm} jsou monotónní rostoucí funkce
- d) $\mathcal{M}^+(M) = -\mathcal{M}^-(-M)$, symetrie
- e) $\mathcal{M}^+(M) = M$ pro $M \geq 1$; $\mathcal{M}^-(M) = M$ pro $M \leq -1$.
- f) \mathcal{M}^{\pm} jsou spojitě diferencovatelné.

Rozdělené Machovo číslo \mathcal{M}^{\pm} má tvar:

$$\mathcal{M}_{(4)}^{\pm}(M) = \begin{cases} \mathcal{M}_{(1)}^{\pm}(M), & \text{pro } |M| \geq 1 \\ \mathcal{M}_{(2)}^{\pm}(1 \mp 2\mathcal{M}_{(2)}^{\mp}) & \end{cases}, \quad (3.17)$$

což vyhovuje vlastnostem a) – f)

Výsledný výraz pro Machovo číslo na rozhraní:

$$M_{i+1/2} = \mathcal{M}_{(4)}^+(M_i) + \mathcal{M}_{(4)}^-(M_{i+1}). \quad (3.18)$$

Potom:

$$M_{i+1/2}^{\pm} = \frac{1}{2}(M_{i+1/2} \pm |M_{i+1/2}|). \quad (3.19)$$

Tlaková část toku na rozhraní je v obecném případě definována jako:

$$\tilde{\mathbf{P}}_{i+1/2} = \mathbf{P}(M_i, \mathbf{P}_i, M_{i+1}, \mathbf{P}_{i+1}). \quad (3.20)$$

Ve všech AUSM schématech je tlak na rozhraní dán následujícím jednoduchým vztahem:

$$\tilde{\mathbf{P}}_{i+1/2} = \mathcal{P}_{(5)}^+(M_i)\mathbf{P}_i + \mathcal{P}_{(5)}^-(M_{i+1})\mathbf{P}_{i+1}. \quad (3.21)$$

Rozdělené tlaky \mathcal{P}^\pm musí vyhovovat následujícím požadavkům:

- a) $\mathcal{P}^+(M) + \mathcal{P}^-(M) = 1$, konzistence.
- b) $0 \leq \mathcal{P}^\pm(M)$, fyzikální předpoklad
- c) $\frac{\partial \mathcal{P}^+}{\partial M} \geq 0$ a $\frac{\partial \mathcal{P}^-}{\partial M} \leq 0$.
- d) $\mathcal{P}^+(M) = \mathcal{P}^-(-M)$
- e) $\mathcal{P}^+(M) = 1$ pro $M > 1$; $\mathcal{P}^-(M) = 1$ pro $M < -1$.
- f) $\mathcal{P}^\pm(M)$ jsou spojitě diferencovatelné.

Rozdělené tlaky \mathcal{P}^\pm :

$$\mathcal{P}_{(5)}^\pm(M) = \begin{cases} \frac{1}{M} \mathcal{M}_{(1)}^\pm(M), & |M| \geq 1 \\ \mathcal{M}_{(2)}^\pm[(\pm 2 - M) \mp 3M \mathcal{M}_{(2)}^\mp] \end{cases}. \quad (3.22)$$

Tok na rozhraní je složen z příspěvků z obou sousedních buněk. To vede k zavedení společné rychlosti zvuku $a_{i+1/2} = a(\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_{i+1})$, pomocí níž se stanovuje Machovo číslo.

$$a_{i+1/2} = \frac{1}{2}(a_i + a_{i+1}) \quad (3.23)$$

Výsledný vzorec pro výpočet numerického toku:

$$\tilde{\mathbf{F}}_{i+1/2} = a_{i+1/2} \left\{ M_{i+1/2}^+ \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho H \end{pmatrix}_i + M_{i+1/2}^- \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho H \end{pmatrix}_{i+1} \right\} + \begin{pmatrix} 0 \\ p_{i+1/2} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

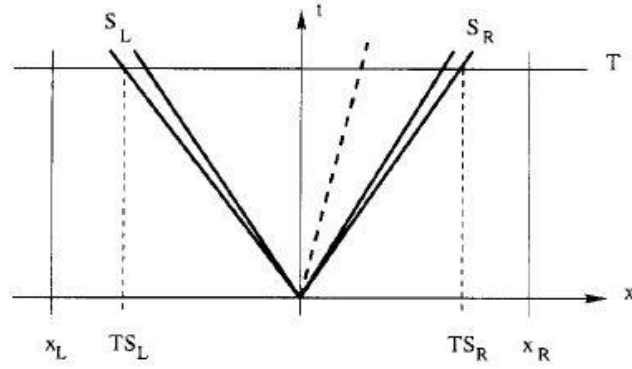
3.3. HLL

HLL schéma 1. Řádu - Harten, Lax a van Leer (1983) [10,s315-321]

Řešič je navržený Hartenem, Laxem a van Leerem má za úkol najít přímou aproximaci funkce toku $\tilde{\mathbf{F}}_{i+1/2}$. Schéma uvažuje dvě vlny s největší rychlosti šíření, které rozdělí oblast na tři podoblasti, ve kterých považujeme veličiny za konstantní (viz obr. 8).

Z hlediska přesnosti je *HLL* schéma vhodné používat pro výpočet hyperbolického systému dvou rovnic, jako například 1D rovnice mělké vody. Pro větší systémy, například Eulerovy rovnice nebo 2D rovnice mělké vody, je dvouvlnový model nepřesný a proto se používají přesnější modifikovaná schémata. Příkladem je Einfeldtova modifikace s názvem *HLLE* (1988), založená na teorii stability pro nespojitosti v tekutinách. Dále v roce 1992 vyvinul Toro *HLLC* schéma, které pro Eulerovy rovnice pracuje s modelem tří vln.

Na obr. 8 je znázorněna vlnová struktura vznikající z přesného řešení Riemannova problému. Uvažujeme kontrolní oblast $[x_L, x_R] \times [0, T]$, kde $x_L \leq S_L T$ a $x_R \geq S_R T$, přičemž S_L a S_R jsou nejvyšší rychlosti signálů, T je daný čas.



Obr. 8 – Kontrolní oblast $[x_L, x_R] \times [0, T]$ na grafu x - t . S_L a S_R jsou největší rychlosti signálů vznikajících při řešení Riemannova problému [10,s318]

Integrální forma zákonů zachování v kontrolním objemu $[x_L, x_R] \times [0, T]$:

$$\int_{x_L}^{x_R} \mathbf{W}(x, T) dx = \int_{x_L}^{x_R} \mathbf{W}(x, 0) dx + \int_0^T \mathbf{F}(\mathbf{W}(x_L, t)) dx - \int_0^T \mathbf{F}(\mathbf{W}(x_R, t)) dx. \quad (3.25)$$

Vyřešení pravé strany tohoto výrazu dává:

$$\int_{x_L}^{x_R} \mathbf{W}(x, T) dx = x_R \mathbf{W}_R - x_L \mathbf{W}_L + T(\mathbf{F}_L - \mathbf{F}_R), \quad (3.26)$$

kde $\mathbf{F}_L = \mathbf{F}(\mathbf{W}_L)$ a $\mathbf{F}_R = \mathbf{F}(\mathbf{W}_R)$. Integrálnímu vztahu (3.26) se říká podmínka konzistence. Integrál na levé straně lze rozdělit do tří integrálů:

$$\int_{x_L}^{x_R} \mathbf{W}(x, T) dx = \int_{x_L}^{TS_L} \mathbf{W}(x, T) dx + \int_{TS_L}^{TS_R} \mathbf{W}(x, T) dx + \int_{TS_R}^{x_R} \mathbf{W}(x, T) dx. \quad (3.27)$$

Po vypočtení prvního a třetího členu na pravé straně dostaneme (3.27) následující tvar:

$$\int_{x_L}^{x_R} \mathbf{W}(x, T) dx = \int_{TS_L}^{TS_R} \mathbf{W}(x, T) dx + (TS_L - x_L) \mathbf{W}_L + (x_R - TS_R) \mathbf{W}_R. \quad (3.28)$$

Porovnáním vztahů (3.26) a (3.28) získáme:

$$\int_{TS_L}^{TS_R} \mathbf{W}(x, T) dx = T(S_R \mathbf{W}_R - S_L \mathbf{W}_L + \mathbf{F}_L - \mathbf{F}_R). \quad (3.29)$$

Dělením délkou $T(S_R - S_L)$, která je šířkou pásma mezi nejpomalejším a nejrychlejším signalem v čase T , získáme:

$$\frac{1}{T(S_R - S_L)} \int_{TS_L}^{TS_R} \mathbf{W}(x, T) dx = \frac{S_R \mathbf{W}_R - S_L \mathbf{W}_L + \mathbf{F}_L - \mathbf{F}_R}{S_R - S_L}. \quad (3.30)$$

Konstanta na pravé straně rovnice (3.30) představuje průměr přesného řešení Riemannova problému mezi známými rychlostmi signálů S_R a S_L v čase T . Tato konstanta se značí :

$$\mathbf{W}^{HLL} = \frac{S_R \mathbf{W}_R - S_L \mathbf{W}_L + \mathbf{F}_L - \mathbf{F}_R}{S_R - S_L}. \quad (3.31)$$

Provedeme integraci konzervativního tvaru na kontrolní oblasti $[x_L, 0] \times [0, T]$ viz obr. 8:

$$0 = \int_{TS_L}^0 \mathbf{W}(x, T) dx = -TS_L \mathbf{W}_L + T(\mathbf{F}_L - \mathbf{F}_{0L}), \quad (3.32)$$

kde \mathbf{F}_{0L} je tok $\mathbf{F}(\mathbf{W})$ podél t -osy. Vyjádříme \mathbf{F}_{0L} :

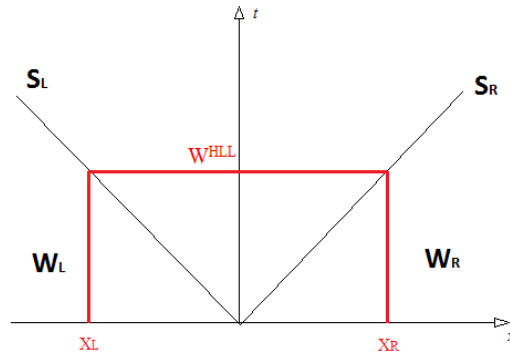
$$\mathbf{F}_{0L} = \mathbf{F}_L - S_L \mathbf{W}_L - \frac{1}{\Delta t} \int_{TS_L}^0 \mathbf{W}(x, T) dx. \quad (3.33)$$

Výpočtem integrální formy zákonů zachování pro kontrolní oblast $[0, x_R] \times [0, T]$ dostáváme další vztah:

$$\mathbf{F}_{0R} = \mathbf{F}_R - S_R \mathbf{W}_R - \frac{1}{T} \int_0^{TS_R} \mathbf{W}(x, T) dx. \quad (3.34)$$

Rovnost $\mathbf{F}_{0R} = \mathbf{F}_{0L}$ vyplývá z podmínky konzistence.

$$\mathbf{W}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{W}_L & \text{jestli } \frac{x}{t} \leq S_L \\ \mathbf{W}^{HLL} & \text{jestli } S_L \leq \frac{x}{t} \leq S_R \\ \mathbf{W}_R & \text{jestli } \frac{x}{t} \geq S_R \end{cases} \quad (3.35)$$



Obr. 9 – Grafické znázornění aproximace HLL řešičem (angl.. HLL Riemann solver)

Předpokládáme, že se struktura přibližného řešení Riemannova problému skládá ze tří konstantních stavů \mathbf{W}_L , \mathbf{W}^{HLL} , \mathbf{W}_R , oddělenými dvěma vlnami (obr. 9).

Pro subsonický případ platí $S_L \leq 0 \leq S_R$ a $\mathbf{W}(x, t) = \mathbf{W}^{HLL}$, což dosadíme do rovnic (3.33) a (3.34). Tím získáme dvě rovnice pro výpočet numerického toku:

$$\begin{cases} \mathbf{F}^{HLL} = \mathbf{F}_L + S_L(\mathbf{W}^{HLL} - \mathbf{W}_L) \\ \mathbf{F}^{HLL} = \mathbf{F}_R + S_R(\mathbf{W}^{HLL} - \mathbf{W}_R) \end{cases} \quad (3.36)$$

Jednu z nich zvolíme a dosadíme do ní (3.31):

$$\mathbf{F}^{HLL} = \frac{S_R \mathbf{F}_L - S_L \mathbf{F}_R}{S_R - S_L} + \frac{S_R S_L}{S_R - S_L} (\mathbf{W}_R - \mathbf{W}_L), \quad (3.37)$$

V závislosti na uspořádání vln dostaneme tři varianty pro výpočet numerického toku:

$$\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^{HLL} = \tilde{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \mathbf{F}_L, & \text{pro } S_L \geq 0 \\ \frac{S_R \mathbf{F}_L - S_L \mathbf{F}_R}{S_R - S_L} + \frac{S_R S_L}{S_R - S_L} (\mathbf{W}_R - \mathbf{W}_L), & \text{pro } S_L \leq 0 \leq S_R \\ \mathbf{F}_R, & \text{pro } S_R \leq 0 \end{cases} \quad (3.38)$$

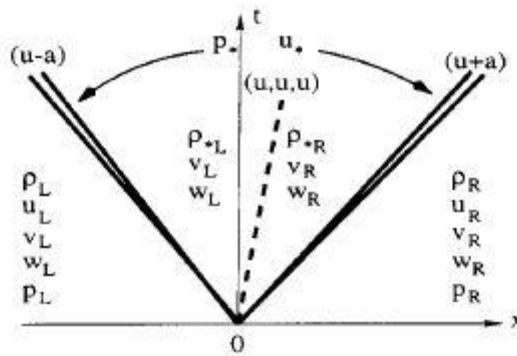
Abychom mohli vzorec použít, musíme nejprve zjistit rychlosti vln S_L a S_R , například pomocí Davisovy metody [3,s28]:

$$S_L = u_L - a_L, S_R = u_R + a_R \quad (3.39)$$

nebo

$$S_L = \min(u_L - a_L, u_R - a_R), S_R = \max(u_L + a_L, u_R + a_R). \quad (3.40)$$

Hlavní nedostatek *HLL* schématu se projeví při výskytu kontaktních nespojitostí, příčných vln a na materiálových rozhraních. *HLL* schéma uvažuje pouze dvě vlny odpovídající nejmenšímu a největšímu vlastnímu číslu rovnic. Další vlny (pro 3D proudění odpovídající vlastním číslům $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = u$) nejsou ve výpočtu toku zohledněny (viz obr. 10). Modifikaci schématu, odstraňující tento nedostatek, navrhli Toro, Spruce a Speares (*HLLC*).



Obr. 10 – Struktura přesného řešení Riemannova problému pro 3D Eulerovy rovnice

3.4. Časová diskretizace

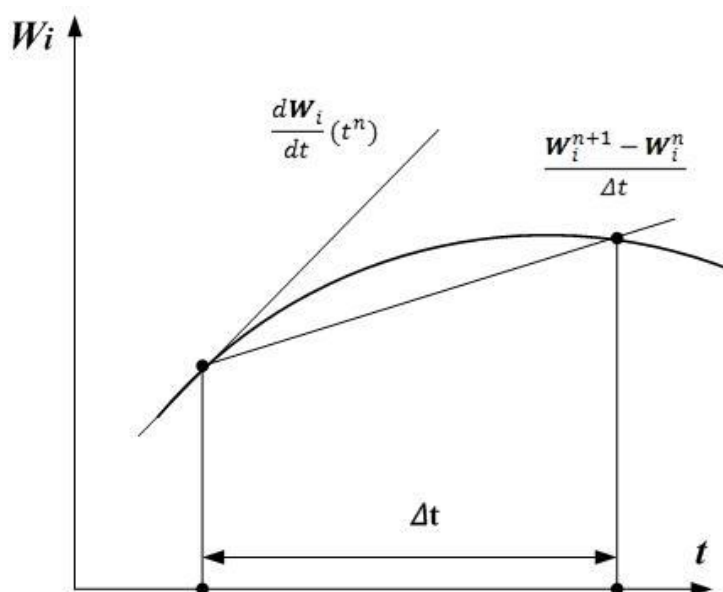
Pro řešení metodou ustalování potřebujeme diskretizovat rovnice nejenom v prostoru, ale i v čase. Časový interval rozdělíme na konečný počet kroků o velikosti Δt . Začínáme ve stavu daném počáteční podmínkou a postupně počítáme řešení v dalších časových vrstvách.

Existuje velké množství metod, které mohou být použity k časové diskretizaci úlohy. Nejčastěji používané jsou explicitní a implicitní Eulerova metoda, metody Runge-Kutta, a Adams-Bashforth metody. Explicitní metody počítají jednotlivě v každé buňce sítě a nový stav na základě předchozí časové vrstvy, u implicitních metod sestavíme soustavu rovnic, jejímž vyřešením dostaneme nový stav ve všech buňkách sítě. To vede k jejich složitější implementaci, na druhou stranu platí pro velikost časového kroku menší omezení kvůli stabilitě než u explicitních metod.

Pro výpočet aproximace časové derivace \mathbf{W}_t byla v této práci zvolena *explicitní Eulerova metoda*, což je dopředná diference 1. řádu přesnosti [22,s149]:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{W}_i = \frac{\mathbf{W}_i^{n+1} - \mathbf{W}_i^n}{\Delta t}. \quad (3.41)$$

To odpovídá aproximaci časové derivace W_i v čase t^n jako směrnice přímky spojující body W_i^n a W_i^{n+1} (viz obr. 11).



Obr. 11 – Aproximace časové derivace pomocí explicitní Eulerovy metody

Nyní se dostáváme k otázce volby časového kroku, která musí zajistit stabilitu použitého schématu. Volba časového kroku je založena na Godunovově metodě pro nelineární systémy:

$$W_t + F(W)_x = 0. \quad (3.42)$$

Soustavu lze napsat v kvazi-lineárním tvaru:

$$W_t + AW_x = 0. \quad (3.43)$$

Godunovova metoda vyžaduje splnění podmínky [10,s217]:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\rho(A)}, \quad (3.44)$$

kde $\rho(A)$ je spektrální poloměr matice A .

$$\rho(A) = \max |\lambda_i(A)| \quad (3.45)$$

V případě 1D Eulerových rovnic dostaneme podmínku:

$$\Delta t \leq k \frac{\Delta x}{|u| + a}, \quad k < 1, \quad (3.46)$$

v polárních souřadnicích:

$$\Delta t \leq k \frac{\Delta x}{|u_r| + a}, \quad k < 1 \quad (3.47)$$

V tomto případě jsme pro jednoduchost neuvažovali zdrojový člen, vyskytující se v rovnicích (1.21) a (1.23). Budeme-li brát v úvahu zdrojové členy na pravé straně rovnice (1.23), změní se podmínka stability. Vliv zdrojového členu na stabilitu ukážeme na příkladu skalární rovnice

$$u_t + au_x = -bu, \quad x \in (-\infty, +\infty), t \in (0, +\infty), \quad (3.48)$$

kde a je rychlost šíření vlny. Předpokládáme, že $a > 0$ a $b > 0$.

Pro diskretizaci použijeme upwind schéma:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = -bu_i^n, \quad (3.49)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} a(u_i^n - u_{i-1}^n) - b\Delta t u_i^n. \quad (3.50)$$

Použijeme spektrální analýzu a do vzorce pro numerickou metodu dosadíme $u_i^n = \lambda^n e^{ii\xi}$, kde $i = \sqrt{-1}$ je komplexní jednotka, $\xi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ je frekvence a λ^n je amplituda odpovídající frekvenci ξ . A vyjádříme $\lambda = \lambda(\xi)$.

$$\lambda = 1 - \frac{a\Delta t}{\Delta x} (1 - e^{-i\xi}) - b\Delta t = (1 - b\Delta t) - \frac{a\Delta t}{\Delta x} (1 - \cos\xi + \sqrt{-1} \sin\xi) \quad (3.51)$$

Nechť parametry C a B jsou:

$$C = a \frac{\Delta t}{\Delta x} > 0, \quad B = b\Delta t > 0. \quad (3.52)$$

Pokud $|\lambda(\xi)| \leq 1$ pro $\forall \xi \in \langle 0, 2\pi \rangle$, pak je metoda stabilní. Úpravou vzorce (3.51) dostaneme následující výraz:

$$\begin{aligned} |\lambda|^2 &= (1 - B - C(1 - \cos\xi))^2 + C^2 \sin^2 \xi = \\ &= (1 - B)^2 - 2(1 - B)C(1 - \cos\xi) + C^2(1 - 2\cos\xi + \cos^2 \xi) + C^2 \sin^2 \xi \\ &= 1 - 2B + B^2 - 2(1 - B)C(1 - \cos\xi) + 2C^2(1 - \cos\xi) \\ &= 1 + B(B - 2) + 2C(1 - \cos\xi)(C - 1 + B) \leq 1. \end{aligned}$$

Potom

$$B(B - 2) + 4C \sin^2(\xi/2) (C - 1 + B) \leq 0. \quad (3.53)$$

Nerovnost (3.53) je splněna za podmínky:

$$B - 2 \leq 0, \quad C + B - 1 \leq 0. \quad (3.54)$$

Vzhledem k předpokladu úlohy $C > 0$ a $B > 0$ může být podmínka (3.54) shrnuta do jedné nerovnosti:

$$C + B - 1 \leq 0. \quad (3.55)$$

Podmínka stanoví omezení časového kroku:

$$C + B = a \frac{\Delta t}{\Delta x} + b\Delta t = \Delta t \left(\frac{a}{\Delta x} + b \right) \leq 1. \quad (3.56)$$

Nutná podmínka pro stabilitu daného upwind schématu:

$$\Delta t \leq \left(\frac{\Delta x}{a + b\Delta x} \right). \quad (3.57)$$

3.5. Realizace okrajových podmínek

Určení počtu okrajových podmínek, které se předepisují pro jednotlivé typy hranice oblasti, bylo popsáno v *Kapitole 2*. Zde bude popsána jejich realizace, ke které budou použity vztahy pro izoentropické proudění.

Izoentropické proudění

Izoentropický proces je děj adiabatický a vratný a je popsán druhou větou termodynamickou přejde do tvaru $s = konst$. Reálné procesy nejsou izoentropické, je však možné je za určitých podmínek jako izoentropické modelovat, například pokud proces probíhá bez výměny tepla, případně je možné výměnu tepla zanedbat, a v procesu se nevyskytují žádné jiné nevratné děje vyvolané třením tekutiny (pro neviskózní proudění nebo pro proudění, ve kterém se dají vazké efekty zanedbat). K izoentropickým termodynamickým zařízením patří: čerpadla, plynové kompresory, turbíny, difuzory a dýzy.

Praktický výpočet izoentropického proudění

V této části podkapitoly budou uvedeny důležité rovnice potřebné pro popis izoentropického proudění.

V dynamice plynů se vliv stlačitelnosti odvozuje od lokální rychlosti zvuku a , tedy rychlosti šíření elementárního tlakového rozruchu ve stlačitelném prostředí. Newtonův vzorec pro rychlost šíření vlny v elastickém prostředí:

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \quad (3.58)$$

Pro aplikace v plynech, kde tlak je $p = f(\rho, T)$. Při předpokladu izoentropického proudění pro rychlost zvuku v ideálním plynu platí Laplaceův vzorec:

$$a = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho_s}}^2 = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma r T}, \quad (3.59)$$

kde γ je izoentropický mocnitel.

Velmi důležitý parametr ve stlačitelném proudění je Machovo podobnostní číslo M

$$M = \frac{u}{a} \quad (3.60)$$

Často je výhodné použít rovnice v bezrozměrném tvaru. Za nezávislé proměnné volíme Machovo číslo M a izoentropický mocnitel γ . Potom závislé proměnné jsou p/p_0 , ρ/ρ_0 , T/T_0 . Následující tvar Machova čísla lze odvodit ze St.Venantovy-Wantzelovy rovnice a vztahů pro izoentropický proces v ideálním plynu. Podrobněji v [11,s24-25,32].

² Indexem "s" se značí izoentropická změna.

$$M = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1} \left(\frac{T}{T_0} - 1 \right)} \quad (3.61)$$

Snadno lze z rovnice (3.61) odvodit vztah pro poměr teplot:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{2}{M^2(\gamma - 1) + 2} \quad (3.62)$$

Obdobně lze odvodit rovnice pro poměr tlaků a hustot:

$$\frac{p}{p_0} = \left[\frac{2}{M^2(\gamma - 1) + 2} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}, \quad (3.63)$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left[\frac{2}{M^2(\gamma - 1) + 2} \right]^{\frac{1}{\kappa - 1}}. \quad (3.64)$$

Odvozené vztahy použijeme pro zadávání vstupních a výstupních okrajových podmínek v úloze dýzy a radiální turbíny.

Vstup

- Dýza

Na subsonickém vstupu zadáváme dva parametry, protože do oblasti vstupují dvě charakteristiky, viz *Kapitola 2*. Pro případ řešený v této práci zadáváme celkovou hustotu ρ_0 a celkový tlak p_0 a z vnitřku oblasti extrapolujeme tlak p .

Výpočet Machova čísla:

$$M^2 = \frac{2 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1}{\gamma - 1}. \quad (3.65)$$

Pomocí Machova čísla a rychlosti zvuku vypočítáme vstupní rychlost:

$$u_{in} = a_0 M. \quad (3.66)$$

Pro výpočet hustoty a energii použijeme izoentropické vztahy. Vektor konzervativních proměnných v případě dýzy s proměnným průřezem na vstupu má tvar:

$$\mathbf{W}_{in} = \begin{bmatrix} \rho_{in} \\ \rho_{in} u_{in} \\ \rho_{in} E_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_0 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \\ \rho_{in} u_{in} \\ \frac{p_{in}}{\gamma - 1} + \frac{\rho_{in} u_{in}^2}{2} \end{bmatrix}. \quad (3.67)$$

- Radiální turbína

Pro subsonický vstup vstupují do výpočetní oblasti tři charakteristiky. Oproti případu s dýzou musíme navíc předepsat úhel náběhu proudu α , který je definován jako

$$\alpha = \arctg\left(\frac{u_\varphi}{u_r}\right). \quad (3.68)$$

Vektor konzervativních proměnných v případě radiálního uspořádání:

$$\mathbf{W}_{in} = \begin{bmatrix} \rho_{in} \\ \rho_{in} u_{in} \cos \alpha \\ \rho_{in} u_{in} \sin \alpha \\ \rho_{in} E_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_0 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2M}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \\ \rho_{in} u_{in} \cos \alpha \\ \rho_{in} u_{in} \sin \alpha \\ \frac{p_{in}}{\gamma - 1} + \frac{\rho_{in} u_{in}^2}{2} \end{bmatrix}. \quad (3.69)$$

Výstup

Na subsonickém výstupu se zadává jeden parametr - statický tlak, protože na této hranici do oblasti vstupuje jenom jedna charakteristika:

$$p_{out} = k p_0, \quad (3.70)$$

kde k je poměr výstupního tlaku k celkovému vstupnímu tlaku. Zbývající veličiny extrapolujeme z vnitřku oblasti a korigujeme energii na výstupu:

$$\rho E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{\rho u^2}{2}. \quad (3.71)$$

- Dýza s proměnným průřezem

Vektor konzervativních proměnných na výstupu má v případě dýzy s proměnným průřezem tvar:

$$\mathbf{W}_{out} = \begin{bmatrix} \rho_{out} \\ \rho_{out} u_{out} \\ \rho_{out} E_{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{ex} \\ \rho_{ex} u_{ex} \\ \frac{p_{out}}{\gamma - 1} + \frac{\rho_{ex} u_{ex}^2}{2} \end{bmatrix}. \quad (3.72)$$

Index ex znamená, že se jedná o extrapolovanou hodnotu. Možností extrapolace je několik, například se předepíše hodnota z krajní buňky nebo se použije lineární extrapolace.

- Radiální turbína

Pro radiální turbínu vypadá vektor \mathbf{W}_{out} následovně:

$$\mathbf{W}_{out} = \begin{bmatrix} \rho_{out} \\ \rho_{out} u_{r,out} \\ \rho_{out} u_{\phi,out} \\ \frac{p_{out}}{\gamma - 1} + \frac{\rho_{out} u_{out}^2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{ex} \\ \rho_{out} u_{r,ex} \\ \rho_{out} u_{\phi,ex} \\ \frac{p_{out}}{\gamma - 1} + \frac{\rho_{out} (u_{r,ex}^2 + u_{\phi,ex}^2)}{2} \end{bmatrix}. \quad (3.73)$$

3.6. Počáteční podmínky

Počáteční podmínky představují hodnoty proměnných, které charakterizují stav výpočetní oblasti v čase označeném jako počáteční čas (typicky $t = 0$). Počáteční podmínky ovlivňují hodnotu dynamických proměnných (stavové veličiny) kdykoliv v budoucnu.

Při nastavení počátečních podmínek vycházíme z předpokladu, že na počátku je celý systém v klidu, což znamená, že rychlost proudění je nula. Z klidové teploty a tlaku spočítáme klidovou hustotu. Celková energie, která je třetí složkou ve vektoru konzervativních proměnných, se bude rovnat klidové energii, kterou spočítáme pomocí izoentropického vztahu. Počáteční podmínky budou vypadat následovně:

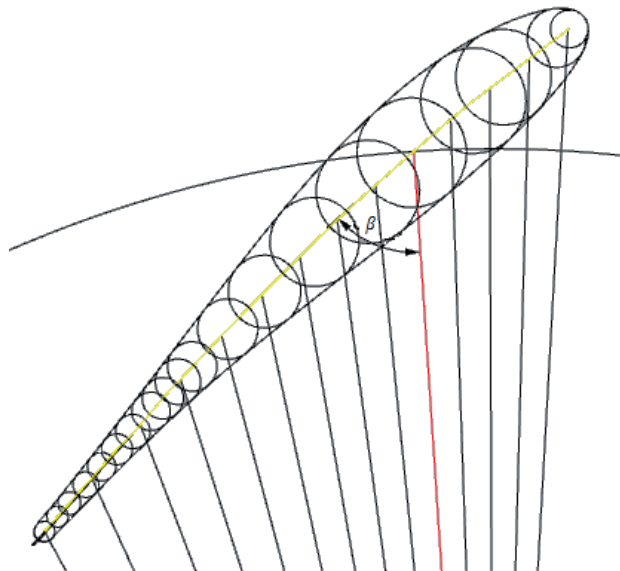
$$\begin{cases} \rho(x) = \rho_0 = \frac{p_0}{rT_0} \\ u(x) = u_0 = 0 \\ e(x) = \rho E = \frac{p_0}{\gamma - 1} \end{cases}. \quad (3.74)$$

3.7. Vliv lopatky

V rovnici (1.33) vystupuje zdrojový člen, jehož význam je otočení proudu do směru daného lopatkou. V následujících odstavcích popíšeme geometrii lopatky a způsob výpočtu zdrojového členu.

- Geometrie lopatky

Geometrie lopatky je popsána dvěma parametry: úhlem zakřivení β a relativní blokací \tilde{b} . Úhel β odečítáme mezi tečnou ke střednici lopatky a radiálou. Radiála je definována jako množina středů kružnic vepsaných v lopatce (*obr. 12*).



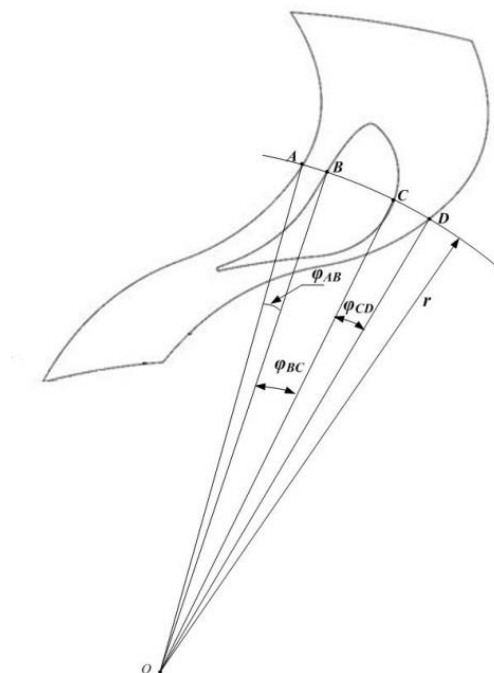
Obr. 12 – Lopatka turbíny, odečítání úhlu zakřivení

Ve zdrojovém členu na pravé straně rovnice (1.33) vystupuje relativní šířka kanálu v obvodovém směru, definovaná jako poměr úhlové šířky kanálu s lopatkou k úhlové šířce kanálu bez lopatky. Někdy se této relativní šířce říká blokace, protože vyjadřuje, kolik tekutiny kanál propustí nebo nepropustí, jinými slovy kolik zablokuje tekutiny.

Hodnotu blokace \tilde{b} na příslušném poloměru r vypočítáme dle vztahu:

$$\tilde{b} = \frac{\varphi_{(AB)} + \varphi_{(CD)}}{\varphi_{(AD)}} \quad (3.75)$$

Úhly jsou znázorněny na obr. 13, O je střed statoru. Hodnota blokace se pohybuje v rozmezí od 0 do 1, přitom $b = 1$ na poloměrech, kde není lopatka a $b = 0$ by značilo úplné zablokování kanálu lopatkou.



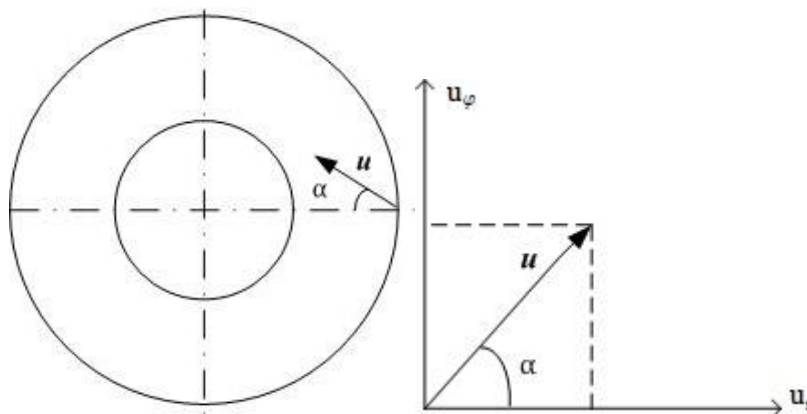
Obr. 13 – Grafické znázornění určování úhlů

Proud vstupuje do statoru pod úhlem náběhu α (viz obr. 14). To odpovídá okrajové podmínce na vstupním poloměru r_{in} .

Obecně na výpočetní oblasti Ω má vektor rychlosti proudu \mathbf{u} složky:

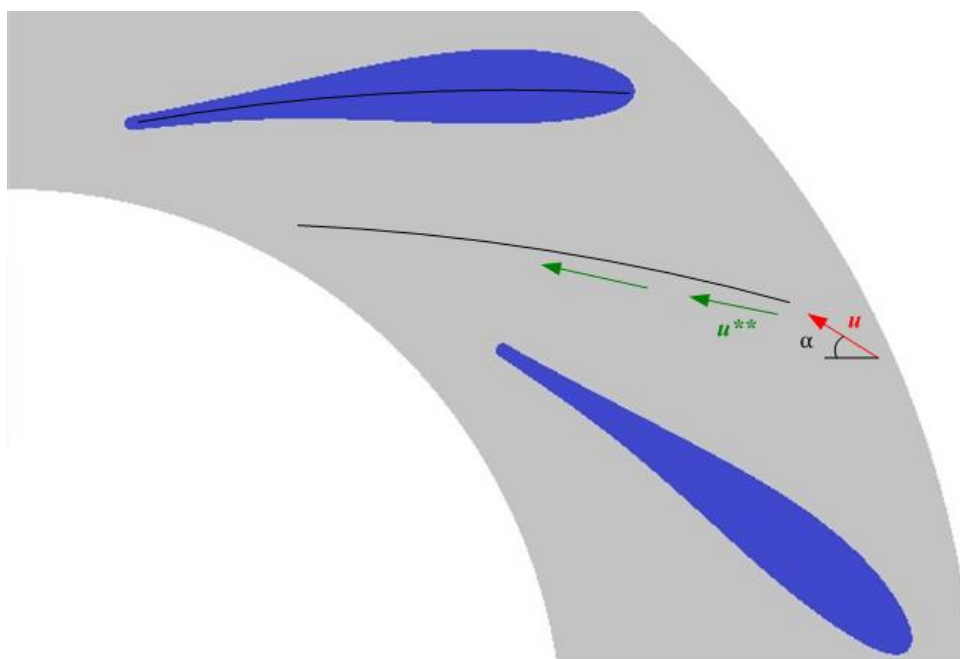
$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_r \\ u_\varphi \end{bmatrix}. \quad (3.76)$$

Pokud předepíšeme úhel vektoru rychlosti pouze na vstupu, nebude se obvodová složka rychlosti u_φ měnit a model bude odpovídat volnému radiálnímu proudu.



Obr. 14 – Vektor rychlosti \mathbf{u} vstupující do statoru

Přítomnost lopatek způsobí změnu směru proudění, kterou je potřeba do výpočetního modelu zahrnout. Vliv lopatek vyjadřujeme tak, že budeme předepisovat tečnost vektoru rychlosti ke střednici lopatky, tj. úhel vektoru rychlosti musí odpovídat úhlu zakřivení lopatky β (obr. 15).



Obr. 15 – Rozváděcí část statoru radiální turbíny, otočení vektoru rychlosti

To nás vede k zásahu do složek vektoru rychlosti \mathbf{u} v modelu prostého mezikruží. Jedna z možností je pomocí úhlu β měnit obvodovou složku rychlosti u_φ vektoru \mathbf{u} . Tím dostaneme vektor \mathbf{u}^* , který je reprezentován následujícími složkami:

$$\mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} u_r \\ u_r \tan \beta \end{bmatrix}. \quad (3.77)$$

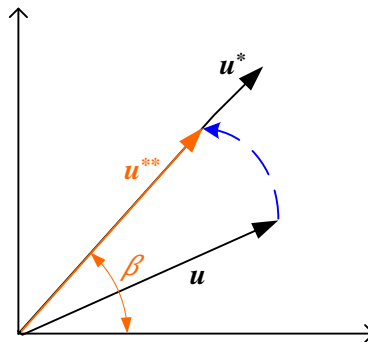
Pro řešení naší úlohy jsme zvolili jinou možnost, kdy zachováme délku vektoru rychlosti \mathbf{u} a otočíme jej do směru daného vektorem \mathbf{u}^* , jak je znázorněno na *obr. 16*. Tím získáme vektor rychlosti \mathbf{u}^{**} :

$$\mathbf{u}^{**} = \|\mathbf{u}\| \frac{\mathbf{u}^*}{\|\mathbf{u}^*\|}. \quad (3.78)$$

Rozepsáním vektoru rychlosti \mathbf{u}^{**} do složek dostaneme následující tvar:

$$\mathbf{u}^{**} = \begin{bmatrix} u_r^{**} \\ u_\varphi^{**} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_r \frac{\sqrt{u_r^2 + u_\varphi^2}}{\sqrt{u_r^2(1 + \tan^2 \beta)}} \\ u_r \tan \beta \frac{\sqrt{u_r^2 + u_\varphi^2}}{\sqrt{u_r^2(1 + \tan^2 \beta)}} \end{bmatrix}. \quad (3.79)$$

Implementace v programu je popsána v *Podkapitole 3.9*.



*Obr. 16 – Otočení vektoru \mathbf{u} do směru vektoru \mathbf{u}^**

Modifikace tvaru střední čáry

Úhel proudění předepisujeme způsobem popsáním v předchozím odstavci pouze podél lopatky. Od vstupu k náběžné hraně lopatky a od odtokové hrany k výstupu úhel proudění neovlivňujeme. V případě, že se úhel náběhu liší od úhlu nastavení lopatky, dojde ke skokové změně (lokálnímu zlomu) v průběhu úhlu proudění. V jednom bodě se náhle mění směr, což znamená nekonečné zrychlení způsobené nekonečně velkou silou. Ve skutečnosti se v proudění žádný takový zlom nevyskytuje. Pro docílení hladkého přechodu proto musíme udělat vhodnou modifikaci střednice v přední části lopatky, aby úhel nastavení odpovídal úhlu náběhu proudu. Pro dva řešené případy statorů radiálních turbín realizujeme modifikaci střednice na přední části, která tvoří 25% celkové délky.

Pro modifikaci úhlu můžeme použít například lineární funkci:

$$\alpha = \tilde{r}_i(\alpha_{25} - \alpha_{inlet}) + \alpha_{inlet}, \quad (3.80)$$

kde \tilde{r}_i^* je:

$$\tilde{r}_i = \frac{r_i - r_{LE}}{r_{25} - r_{LE}}, \quad (3.81)$$

kde α_{inlet} je úhel proudu těsně před náběžnou hranou (pro náš případ 2 až 3 síťové body před náběžnou hranou lopatky), r_{LE} je souřadnice náběžné hrany, r_{25} je souřadnice v 25% lopatky. Je vidět, že souřadnice $\tilde{r}_i \in \langle 0,1 \rangle$ a má hodnotu 0 na náběžné hraně, 1 v 25% lopatky.

Pro lepší vyhlazení průběhu úhlu můžeme použít kvadratickou nebo kubickou funkci. Potom bude vzoreček pro modifikaci úhlu (3.80) vypadat následujícím způsobem:

$$\alpha = \tilde{r}_i^n(\alpha_{25} - \alpha_{inlet}) + \alpha_{inlet}, \quad (3.82)$$

kde n má hodnotu buď 2, nebo 3.

Grafy průběhů úhlů jsou znázorněny v *Kapitole 4*, kde se pro první radiální turbínu použila kubická funkce a pro druhý případ kvadratická funkce.

3.8. Zpracování dat dodaných dvourozměrným výpočtem

Tato podkapitola se zabývá popisem postupu zpracování výsledků získaných výpočtem dvourozměrného turbulentního proudění. Účelem je převést dodaná data z 2D výpočtu do takové podoby, aby bylo možné je srovnat s vlastními výsledky 1D výpočtu. Výsledky a jejich porovnání jsou uvedeny v *Kapitole 4*.

- **Transformace souřadného systému**

V simulačním kódu pro řešení 1D soustavy Eulerových rovnic pracujeme se složkami rychlosti v polárních souřadnicích. Výstupní hodnoty z dvourozměrného výpočtu byly poskytnuty v souřadnicích kartézských. Složky rychlosti potřebujeme převést do polárního souřadnicového systému.

Mějme vektor rychlosti \mathbf{u} v kartézských souřadnicích o složkách:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}. \quad (3.83)$$

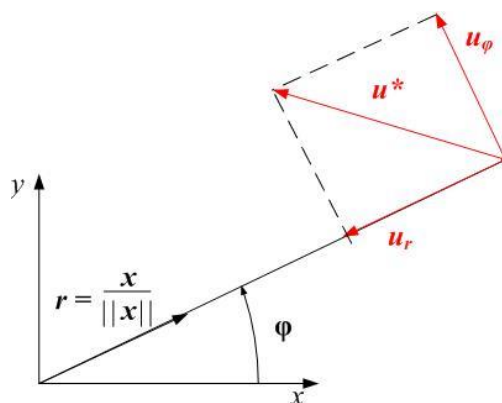
Rozepíšeme vektor \mathbf{u} pomocí složek rychlosti vyjádřených v polárních souřadnicích:

$$\mathbf{u} = u_r \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} + u_\varphi \frac{[-y, x]}{\|\mathbf{x}\|}, \quad (3.84)$$

kde vektor \mathbf{x} má složky $[x, y]$.

Nyní zpětně můžeme vyjádřit složky vektoru rychlosti \mathbf{u} v polárních souřadnicích, viz grafická pomůcka obr. 17:

$$u_r = \mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}, \quad u_\varphi = \mathbf{u} \cdot \frac{[-y, x]}{\|\mathbf{x}\|}, \quad (3.85)$$



Obr. 17 – Rozklad vektoru rychlosti do složek v polárních souřadnicích

- **Výpočet střední hodnoty**

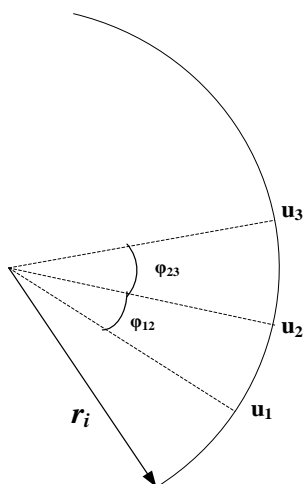
Výpočet 1D proudění provádíme pro obvodově průměrované veličiny. Proto potřebujeme z dat 2D výpočtu získat střední hodnotu veličin pro každý poloměr r_k . Například střední hodnotu rychlosti získáme dle vztahu:

$$\bar{u} = \frac{\frac{u_1 + u_2}{2} \varphi_{12} + \frac{u_2 + u_3}{2} \varphi_{23} + \dots + \frac{u_i + u_{i+1}}{2} \varphi_{ij}}{\varphi_{12} + \varphi_{23} + \dots + \varphi_{ij}} = \frac{\sum_{i=1}^k \frac{u_i + u_{i+1}}{2} \varphi_{ij}}{\sum_{i=1}^k \varphi_{ij}}, \quad (3.86)$$

kde jednotlivé úhly φ_{ij} představují úhlové délky, $j = i + 1$.

Na obr. 18 je zobrazeno odečítání příslušných úhlu φ_{ij} podél poloměru statoru turbíny r_k

Analogickým způsobem byly zjištěny zbývající potřebné průměrné hodnoty $\overline{\rho u_r}$, $\overline{\rho u_\varphi}$, $\bar{\rho}$, \bar{p} , \overline{Ma} .



Obr. 18 – Průběh úhlů podél poloměru turbíny

- **Interpolace**

Jelikož prostorový krok 1D sítě se odlišuje od prostorového kroku 2D sítě, je potřeba hodnoty na poloměrech odpovídajících 1D síti získat interpolací.

Použijeme lineární interpolaci, tj. mezi známé dva body o souřadnicích $[x_0, y_0]$ a $[x_1, y_1]$ proložíme přímkou. Neznámou hodnotu y ležící na intervalu mezi y_0 a y_1 najdeme dle následující rovnice:

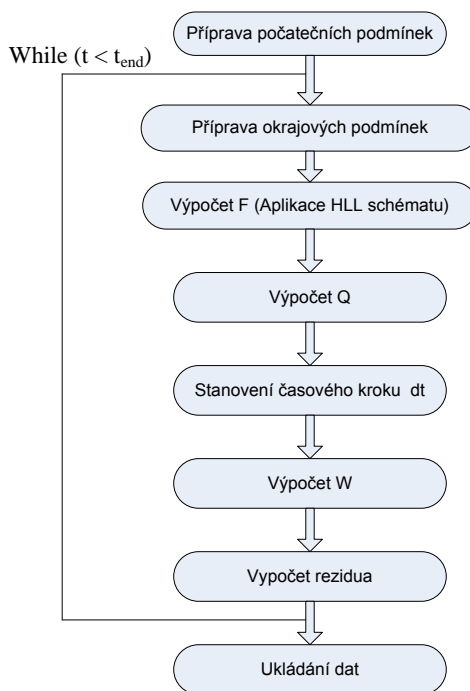
$$y = y_0 + (x - x_0) \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}. \quad (3.87)$$

Interpolací získáme z 2D dat potřebné hodnoty blokace a úhlu zakřivení lopatky.

3.9. Struktura a popis programu

V této kapitole bude stručně popsána struktura programové realizace. Zdrojový kód programu je napsán v programovacím jazyce C++. Pro kompilaci byl použit kompilátor NetBeans IDE 7.4. Program provádí výpočet Eulerových rovnic v kartézských souřadnicích pro případ řešení dýzy a v polárních souřadnicích v případě radiální turbíny. Diskretizace oblasti byla provedena na rovnoměrné síti, podrobněji *Kapitola 4*. Po vypočtení jsou výsledky ukládány do textového souboru.

Program běží dle postupu, který je znázorněn na obrázku na blokovém schématu programu pro výpočet dýzy s proměnným průřezem HLL schématem.



Obr. 19 – Vývojový diagram programu

Vývojový diagram pro program modelu radiální turbíny je obdobný. Eulerovy rovnice byly přepsány do polárních souřadnic. Je nutné zmínit, že výpočet vektoru \mathbf{F} se provádí dvěma různými způsoby, pomocí HLL a $AUSM^+$ schématu. Dále musíme z textových souborů načíst geometrii lopatky (úhly zakřivení β a šířku kanálu). Po načtení textových souborů se provede lineární interpolace těchto parametrů pro výpočet hodnot v buňkách 1D sítě (podrobněji v *Podkapitole 3.8*). Po vypočtení vektoru \mathbf{W} bez zahrnutí vlivu lopatek (krok 1) se provede otočení vektoru rychlosti (krok 2, *Podkapitola 3.7*) a zahrnutí tloušťky lopatky (krok 3).

1. krok

$$\mathbf{W}_i^* = \mathbf{W}_i^n - \frac{\Delta t}{(\Delta r)r_i} \left(\mathbf{F}_{i+1} r_{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}_i r_{i-\frac{1}{2}} \right) + \frac{\Delta t}{r_i} \mathbf{B}. \quad (3.88)$$

V prvním kroku se vypočítá vektor \mathbf{W}_i^* , což je vektor konzervativních proměnných, zahrnující zdrojový člen \mathbf{B} daný rovnicí (1.23).

2. krok

$$\mathbf{W}_i^{**} = \begin{bmatrix} \rho_i^* \\ \rho_i^* u_r^{**} \\ \rho_i^* u_\varphi^{**} \\ \rho_i^* E_i^* \end{bmatrix}. \quad (3.89)$$

Měníme složky vektoru rychlosti v \mathbf{W}_i^* dle rovnice (3.79). Tím dostáváme nový vektor \mathbf{W}_i^{**} . Přepočítání složek vektoru \mathbf{W}_i^* na \mathbf{W}_i^{**} probíhá jenom v místech od náběžné hrany až po odtokovou, tj. podél lopatky.

3. krok

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^{**} + \frac{p\Delta t}{\tilde{b}_i} \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{b}_{i+1} - \tilde{b}_{i-1} \\ 2\Delta r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

Ve třetím kroku připočteme k vektoru \mathbf{W}_i^{**} člen vyjadřující změnu šířky kanálu vlivem lopatky. Tím získáme hodnotu \mathbf{W}_i^{n+1} v nové časové vrstvě.

Reziduum

Pro posouzení chyby řešení se používá reziduum. Je to kritérium konvergence, definované pomocí Euklidovské normy. Dále jsou uvedeny vzorce pro výpočet residua hustoty a radiální rychlosti. Pro zbývající složky vektoru konzervativních proměnných definujeme reziduum obdobně.

$$Rez = \left\| \frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t_i} \right\|_2 = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\Delta \rho_i}{\Delta t_i} \right)^2}, \quad (3.91)$$

$$Rez = \left\| \frac{u_r^{n+1} - u_r^n}{\Delta t_i} \right\|_2 = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\Delta u_{r_i}}{\Delta t_i} \right)^2}, \quad (3.92)$$

kde n značí index časové vrstvy, neboli vnější iterační cyklus, i je prostorový index (vnitřní iterační cyklus).

Reziduum sledujeme v průběhu celého výpočtu. Čas byl zvolen dostatečně velký na to, aby se proudění ustálilo.

4. Numerické výsledky řešení

V této kapitole budou uvedeny výsledky numerického řešení:

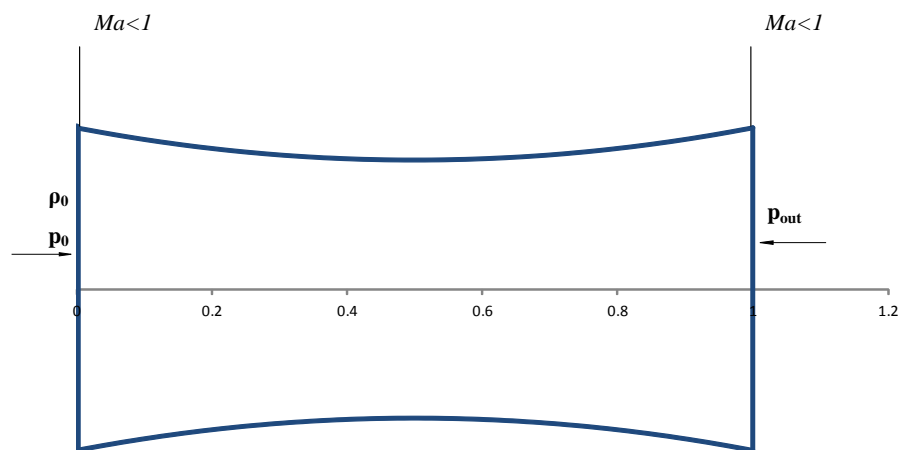
- jednorozměrného proudění v dýze s proměnným průřezem pomocí MKO použitím *HLL* schématu
- jednorozměrného proudění statorem pro dvě různé geometrie radiálních turbín pomocí MKO použitím *HLL* a *AUSM⁺* schémat

Výsledky výpočtu radiálních turbín porovnáme s dodanými výsledky, které byly získány řešením dvourozměrného turbulentního proudění. Na konci této kapitoly provedeme krátkou shrnující diskusi o dosažených výsledcích.

4.1. Dýza s proměnným průřezem

Parametry výpočtu

Na *obr. 20* je zobrazen profil dýzy se zadáním okrajových podmínek. Celková délka dýzy je $L = 1m$, vstupní a výstupní poloměry jsou $r_{out} = r_{in} = 0,625m$, nejmenší průřez hrdla je $A_{min} = 0,5m^2$



Obr. 20 – Geometrie dýzy a okrajové podmínky

Proud vzduchu o parametrech $\gamma = 1,4$ a $r = 287 J/kgK$ vstupuje zleva a vystupuje vpravo.

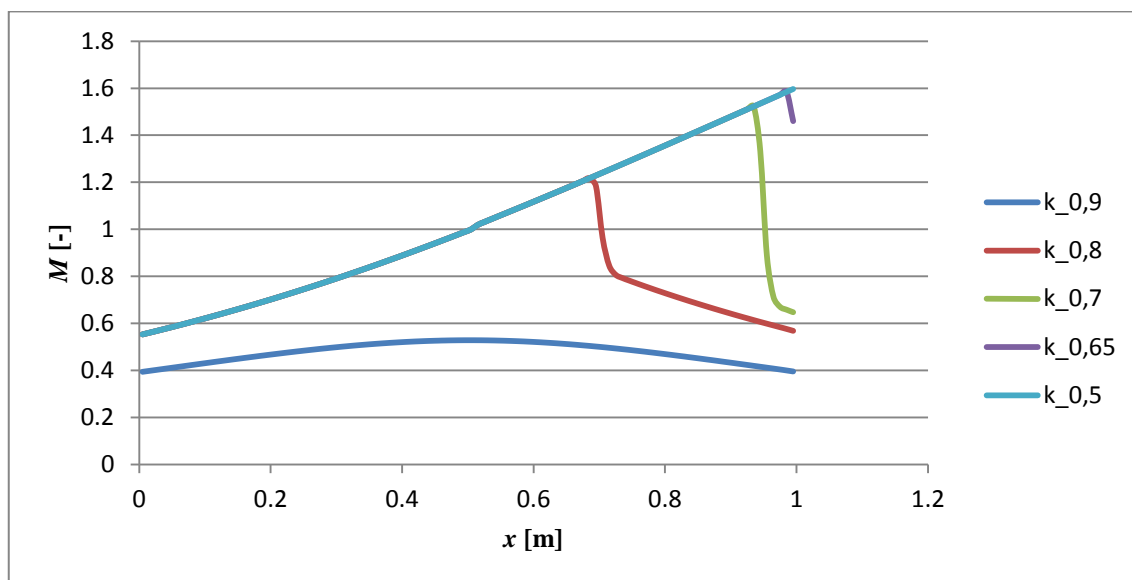
Počáteční podmínku tvoří parametry pro klidový stav: $p_0 = 100000Pa$, $\rho_0 = 1,2kg/m^3$, $u_0 = 0 m/s$.

Okrajové podmínky: na vstupu jsou předepsány p_0 , ρ_0 a na výstupu je předepsán výstupní tlak $p_{out} = 0,3p_0$.

Výpočet byl proveden na rovnoměrné síti s konstantním krokem.

Zobrazení a zhodnocení výsledků

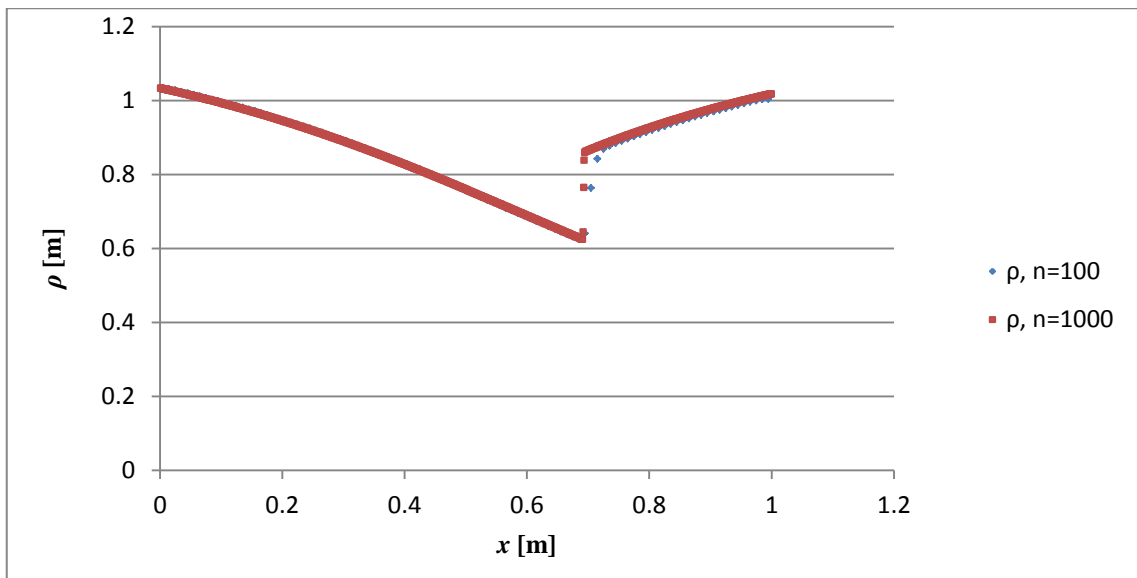
Na obr. 21 je vidět rozložení Machova čísla pro různé hodnoty součinitele tlaku k a počet buněk sítě $n = 100$. Zmenšování koeficientu k vede k posouvání rázové vlny směrem k výstupu. Například pro $k = 0,5$ se rázová vlna posune za výpočetní oblast.



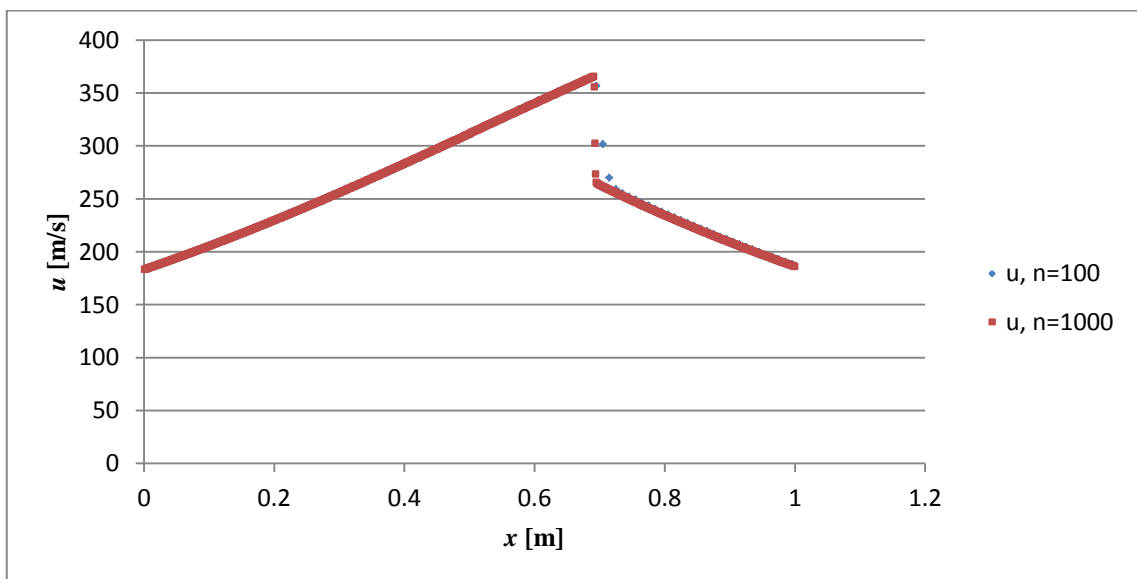
Obr. 21 – Průběh Machova čísla v dýze při různých poměrových koeficientů

Zkoušením různé velikosti sítě pro subsonický režim jsme dospěli k závěru, že velikost sítě neovlivňuje přesnost řešení. Vliv velikosti sítě na výsledky v transsonickém režimu pozorujeme na srovnání řešení na sítích o velikosti $n = 100$ a $n = 1000$ při poměrovém součiniteli nastaveném na hodnotu $k = 0,8$.

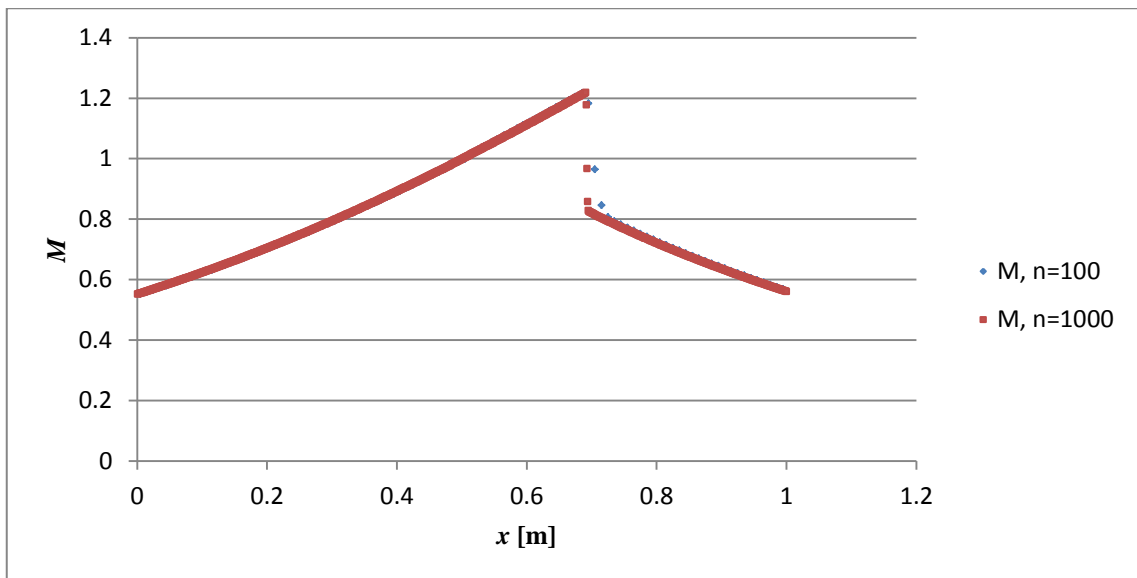
Ve zužující se části trysky rychlost začíná růst, v nejužším místě dosáhne velikosti lokální rychlosti zvuku, tj. $M = 1$. Přitom tlak a hustota klesají. V určité vzdálenosti od hrdla se objeví rázová vlna, při které nadzvukové proudění přejde do podzvukového, protože výstupní tlak je vyšší, než odpovídá návrhovému režimu. Tedy nadzvukový režim se neudrží v celé délce trysky. V rozšiřující se části rychlost za rázovou vlnou postupně klesá, tlak a hustota rostou.



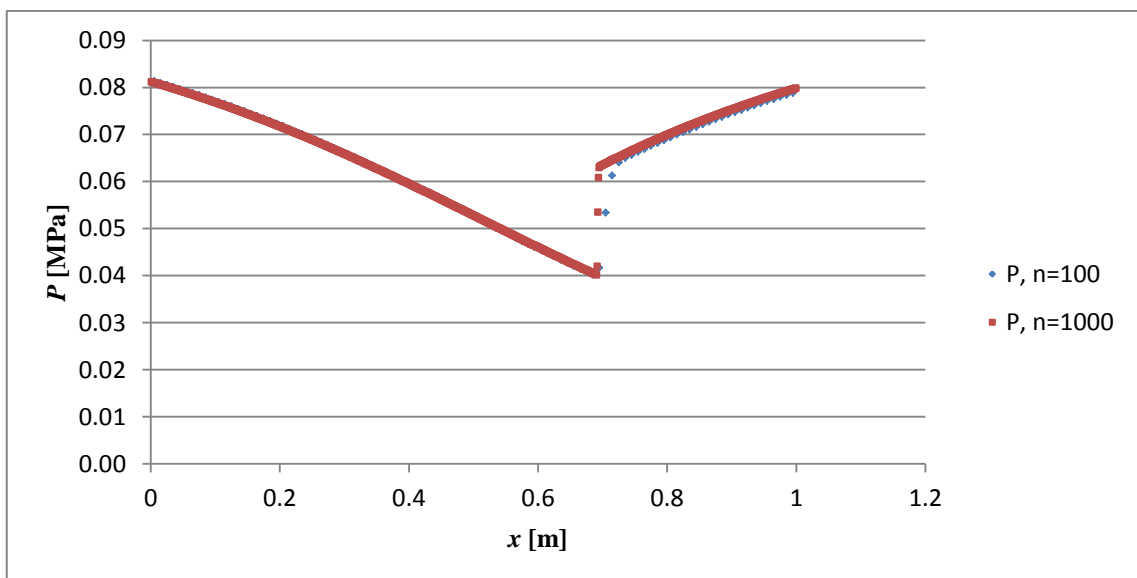
Obr. 22 – Průběh hustoty podél dýzy pro různé velikosti sítě



Obr. 23 – Průběh rychlosti podél dýzy pro různé velikosti sítě



Obr. 24 – Průběh Machova čísla podél dýzy pro různé velikosti sítě



Obr. 25 – Rozložení tlaku podél dýzy pro různé velikosti sítě

4.2. Radiální turbínová mříž v transsonickém režimu

Parametry výpočtu

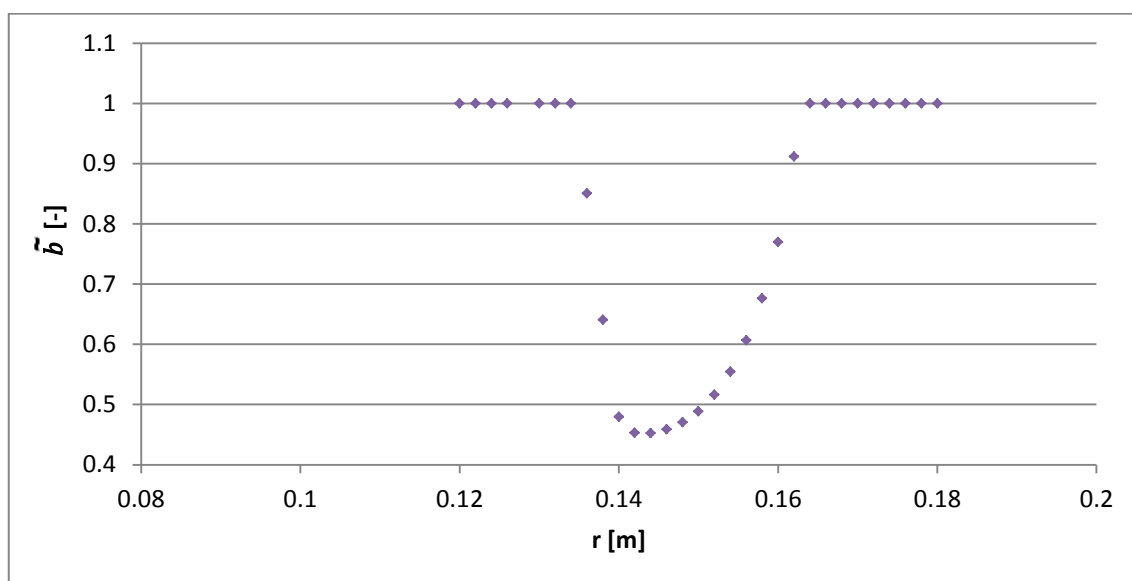
Proud vzduchu o parametrech $\gamma = 1,4$ a $r = 287 \text{ J/kgK}$ vstupuje do statoru na vnějším poloměru lopatkování statoru $r_{in} = 0,180 \text{ m}$ a vystupuje na vnitřním poloměru $r_{out} = 0,120 \text{ m}$. Poloha odtokové hrany lopatky je $r_{TE} = 0,134 \text{ m}$. Poloha náběžné hrany lopatky je $r_{LE} = 0,162 \text{ m}$. Proudění v turbíně je charakterizováno vstupním úhlem vzhledem k radiále $\alpha_{in} = 0$.

Počáteční podmínka pro klidový stav: $p_0 = 100000 \text{ Pa}$, $\rho_0 = 1,2 \text{ kg/m}^3$, $u_{r0} = u_{\varphi 0} = 0 \text{ m/s}$.

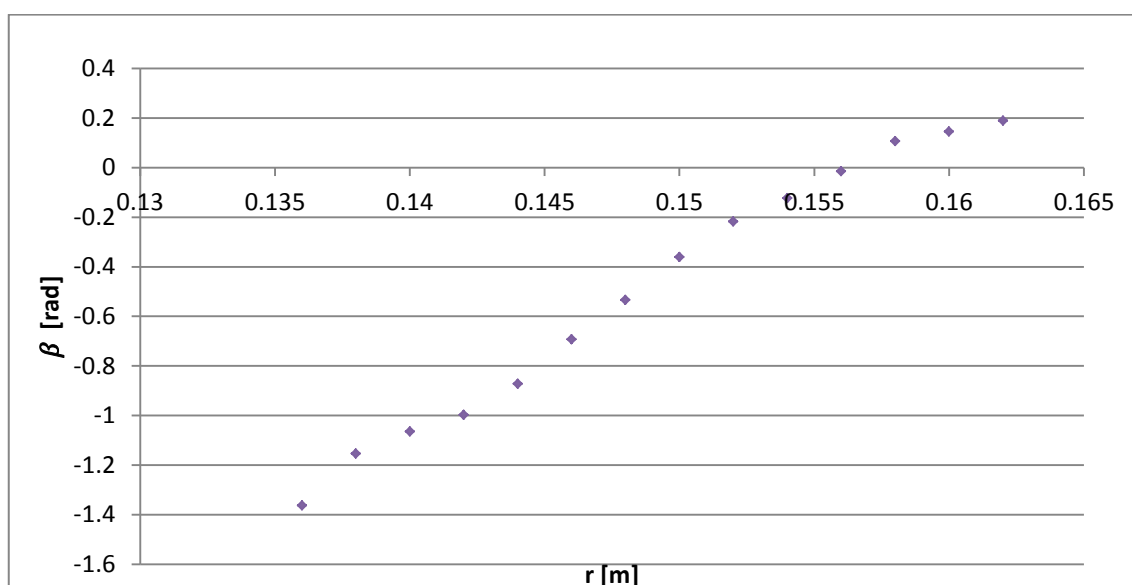
Okrajové podmínky: na vstupu jsou předepsány p_0 , ρ_0 a na výstupu je předepsán výstupní tlak $p_{out} = 0,295 p_0$.

Počet buněk výpočetní sítě byl zvolen $n = 100$.

Geometrie lopatky je znázorněna na *obr. 26* a *obr. 27* prostřednictvím blokace a úhlu zakřivení.



Obr. 26 – Průběh změny šířky kanálu podél poloměru



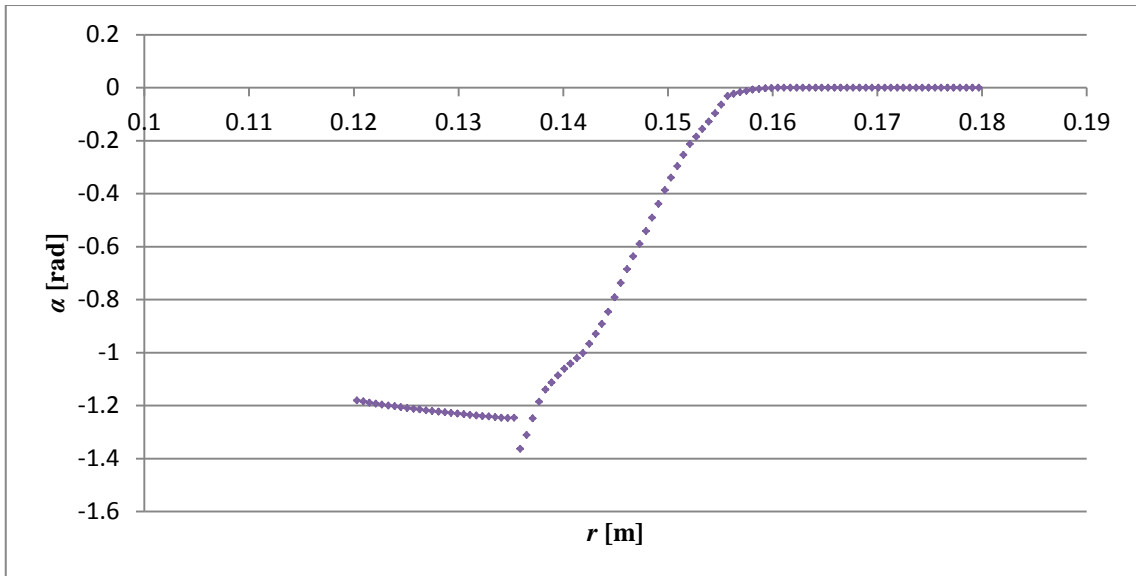
Obr. 27 – Průběh odměřených úhlu, vyjadřujících zakřivení lopatky

Zobrazení a zhodnocení výsledků

Výsledky z vlastního 1D výpočtu budeme srovnávat s výsledky z 2D výpočtu schématem AUSM s dvourovnicovým modelem turbulence $k - \omega$ (výsledky publikovány v [28]).

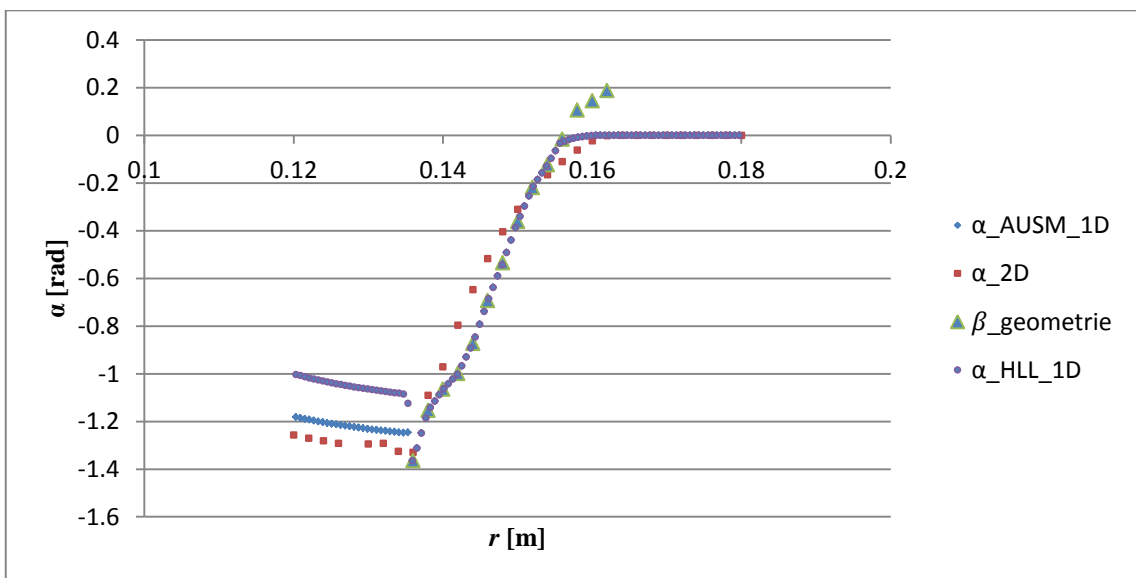
Numerické toky byly v případě 1D výpočtu aproximovány dvěma různými schématy *HLL* a *AUSM⁺*. Obecně je *HLL* schéma méně přesné z důvodu, že nezohledňuje rychlost šíření u , odpovídající vlastnímu číslu λ_2 , viz *Podkapitola 3.3*. *HLL* schéma má větší numerickou vazkost než *AUSM⁺*. Dále je nutné připomenout, že zjednodušený 1D model neuvažuje vliv vazkosti, která způsobuje energetické ztráty.

Protože se vstupní úhel proudu a úhel natočení lopatky lišily, potřebovali jsme úhel zakřivení na přední části lopatky vhodně modifikovat, jak je popsáno v *Podkapitole 3.7*. Modifikace úhlu lineární funkcí se ukázala jako nevhodná a proto byla zvolena kubická funkce (*obr. 28*).



Obr. 28 – Průběh úhlu proudu po použití modifikace na přední části lopatky

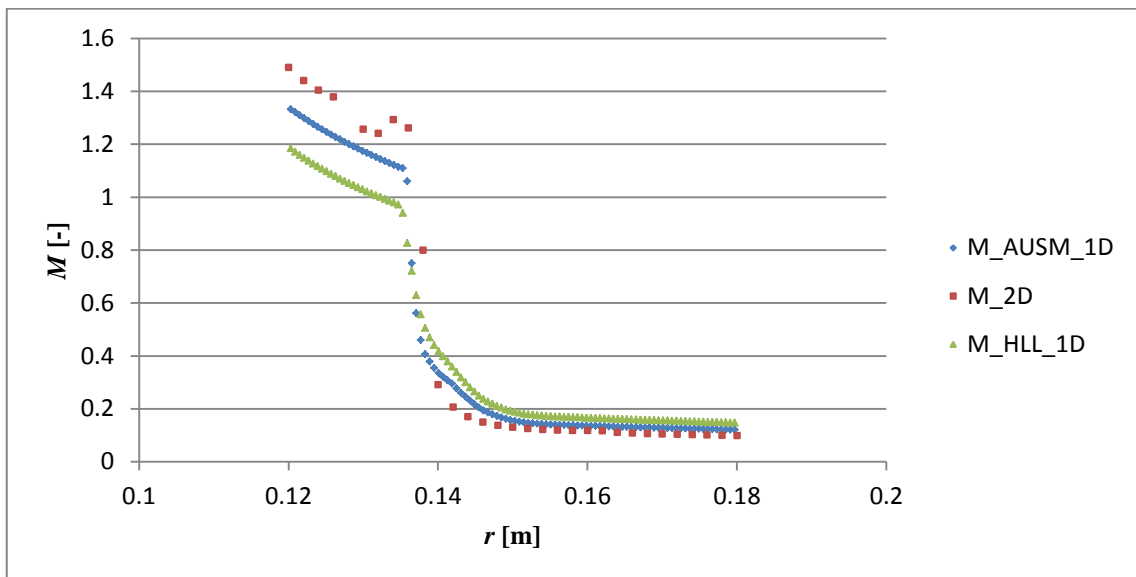
Průběh výstupního úhlu při použití $AUSM^+$ schématu na *obr. 29* demonstruje dobrou podobnost s úhlem z 2D výpočtu. Výsledky z HLL schématu jsou až do odtokové hrany prakticky totožné s $AUSM^+$ schématem, za odtokovou hranou je však odchylka od 2D výpočtu značně vyšší.



Obr. 29 – Průběh úhlu podél kanálu

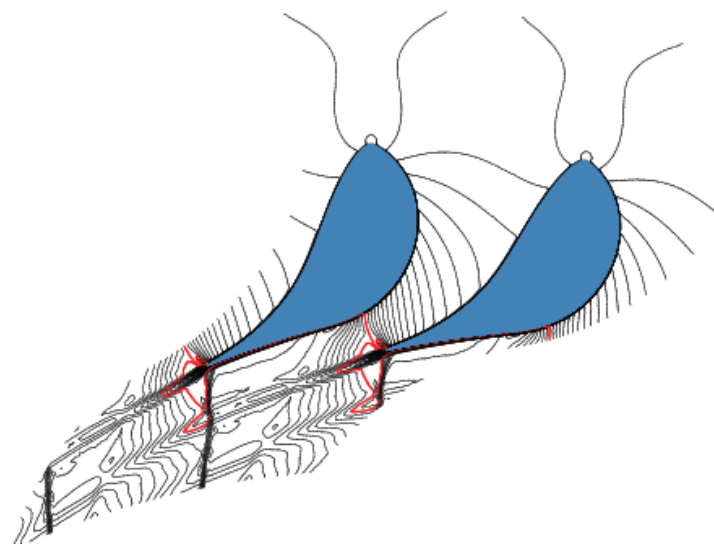
Na *obr. 30* je znázorněno rozložení Machova čísla. Kvůli zúžení mezilopatkového kanálu dochází k postupnému urychlení proudu. V místě těsně před odtokovou hranou se nachází kritický průřez, kde $M = 1$. Dále vznikne rázová vlna, která způsobí mírný pokles rychlosti a tím pokles Machova čísla, jak je vidět v případě 2D výpočtu na *obr. 30*. Porovnáním tohoto obrázku a *obr. 31* můžeme usoudit, že výrazná změna Machova čísla v nadzvukové oblasti je způsobena rázovými vlnami na odtokové hraně lopatky. Dále vidíme, že vstupní Machovo číslo, jak v případě výpočtu HLL schématem, tak i $AUSM^+$, je vyšší než Machovo číslo získané 2D

výpočtem. To může být důsledkem několika faktorů. Zjednodušený model použitý v této práci neuvažuje ztráty, vliv viskozity, ale ve skutečnosti na vstupu dochází k poklesu rychlosti, z čehož vyplývá pokles Machova čísla. V oblasti před odtokovou hranou se průběh Machova čísla s použitím jak $AUSM^+$ schématu, tak i HLL dobře shoduje s 2D výpočtem. Výstupní hodnota Machova čísla je v případě $AUSM^+$ schématu o 0,15 nižší než Machovo číslo z 2D výpočtu, což je důsledkem rozdílných výstupních rychlostí. Tento rozdíl ve výstupních rychlostech je způsoben opět tím, že náš zjednodušený model neobsahuje vazké členy. Ve skutečnosti vznikají za odtokovou hranou šikmé rázové vlny, jak je vidět na *obr. 31*. Je to neizoentropický děj, pro který platí, že tlak za rázovou vlnou je vyšší než před ní a zároveň Machovo číslo za rázovou vlnou je menší než před ní. Podstata 1D výpočtu neumožňuje zachytit strukturu šikmých rázových vln.



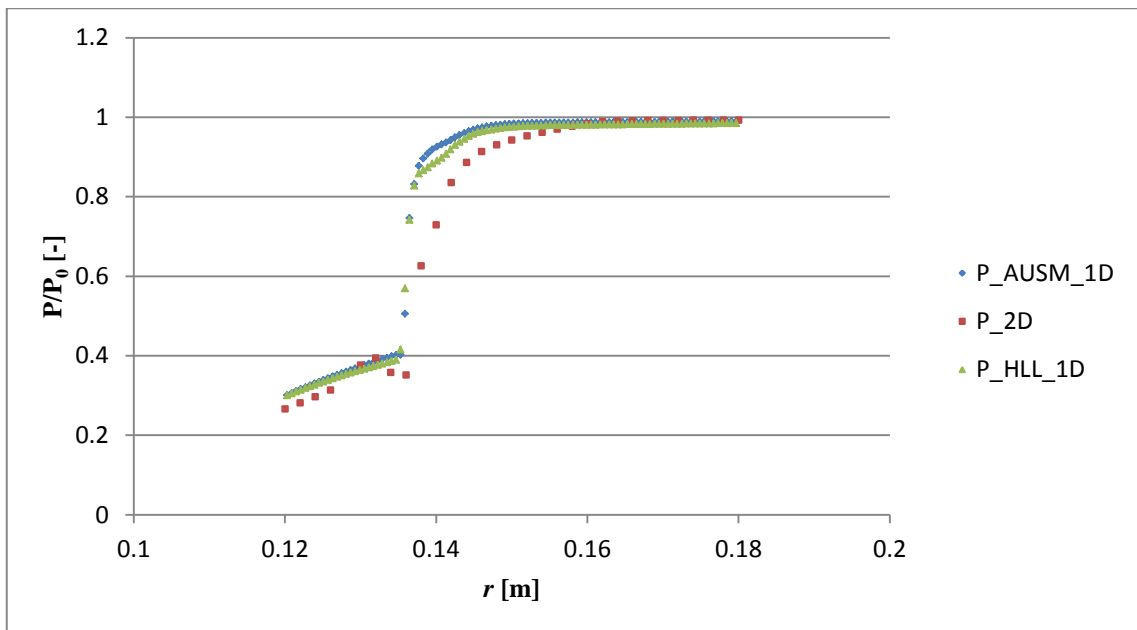
Obr. 30 – Průběh rozložení Machova čísla

Mach number (delta=0.05).

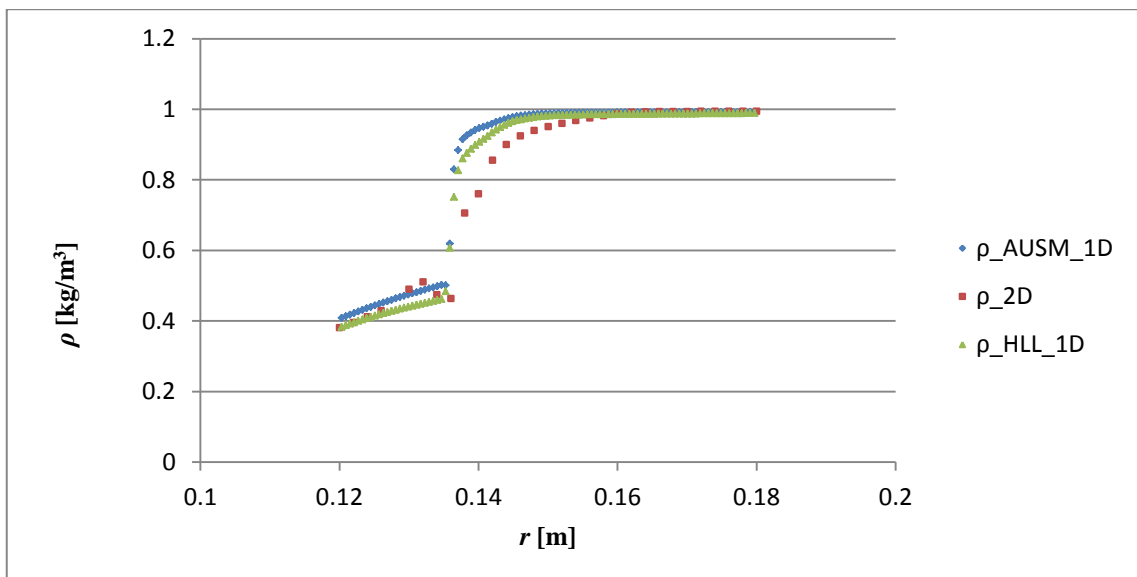


Obr. 31 – Výsledek 2D výpočtu, izočáry Machova čísla

Při růstu rychlosti klesá tlak, jak vidět na *obr. 32*. Rozdíl mezi výsledky 1D a 2D výpočtu je pravděpodobně způsoben tím, že jsme uvažovali proudění bez ztrát. Při turbulentním proudění vznikají v oblasti za lopatkou víry, které způsobují ztráty. Tyto ztráty jsou uvažovány pouze ve výpočtu dvourozměrného turbulentního proudění.

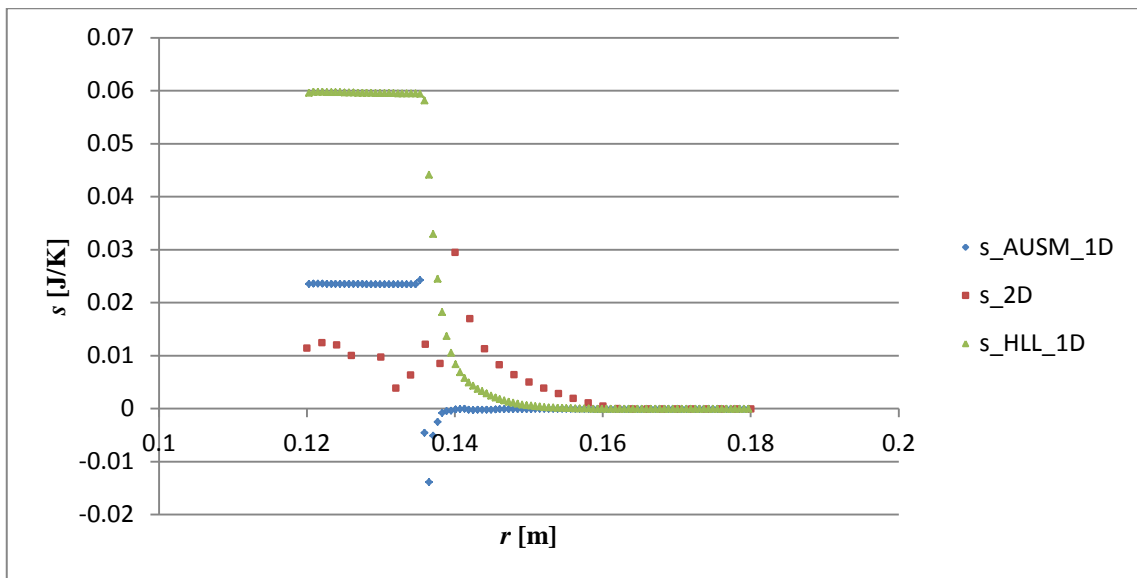


Obr. 32 – Průběh tlaku podél poloměru



Obr. 33 – Průběh hustoty podél poloměru

Na obr. 34 je vidět přírůstek entropie mezi vstupem a výstupem. V případě HLL schématu je tento přírůstek větší. Schéma $AUSM^+$ dává průběh, který se více blíží průběhu z 2D výpočtu. Pro oba 1D výpočty platí, že průběh entropie za odtokovou hranou je hladký, protože nejsou zachyceny rázové vlny.



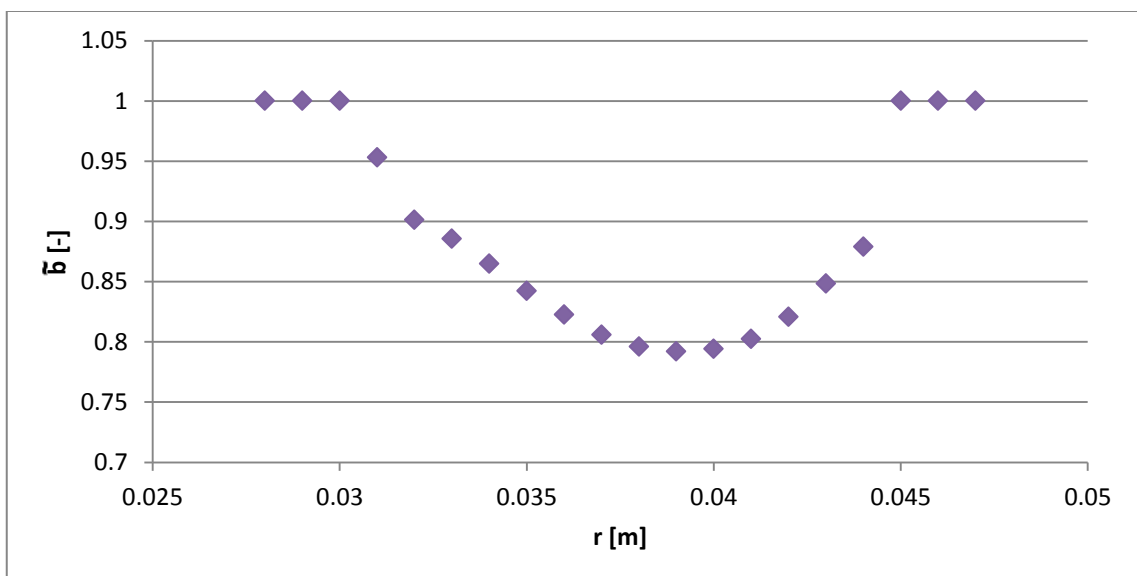
Obr. 34 – Průběh entropie

4.3. Rozváděcí část turbíny automobilového turbodmychadla

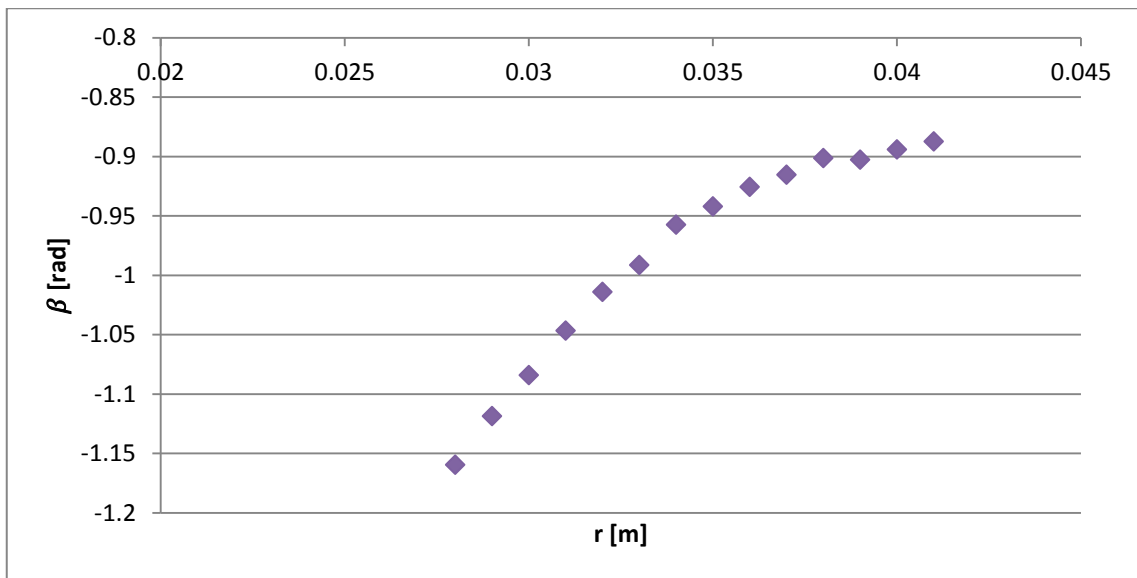
Parametry výpočtu

Plyn o parametrech $\gamma = 1,352$ a $r = 287 \text{ J/kgK}$ vstupuje do statoru na vnějším poloměru lopatkování statoru $r_{in} = 0,0475 \text{ m}$ a vystupuje na vnitřním poloměru lopatkování statoru $r_{out} = 0,0273 \text{ m}$. Poloha odtokové hrany lopatky je $r_{TE} = 0,03 \text{ m}$. Poloha náběžné hrany lopatky je $r_{LE} = 0,0447 \text{ m}$. Proud vstupuje do statoru pod úhlem $\alpha_{in} = -0,987 \text{ rad}$.

Počáteční podmínka pro klidový stav: $p_0 = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, $\rho_0 = 1,0 \text{ kg/m}^3$, $u_{r0} = u_{\varphi 0} = 0 \text{ m/s}$. Okrajové podmínky: na vstupu jsou předepsány p_0 , ρ_0 a na výstupu je předepsán výstupní tlak $p_{out} = 0,85p_0$. Velikost výpočetní sítě je $n = 100$. Na obr. 35 a obr. 36 je znázorněná geometrie turbíny prostřednictvím blokace \tilde{b} a úhlu zakřivení β .



Obr. 35 – Průběh změny šířky kanálu podél poloměru



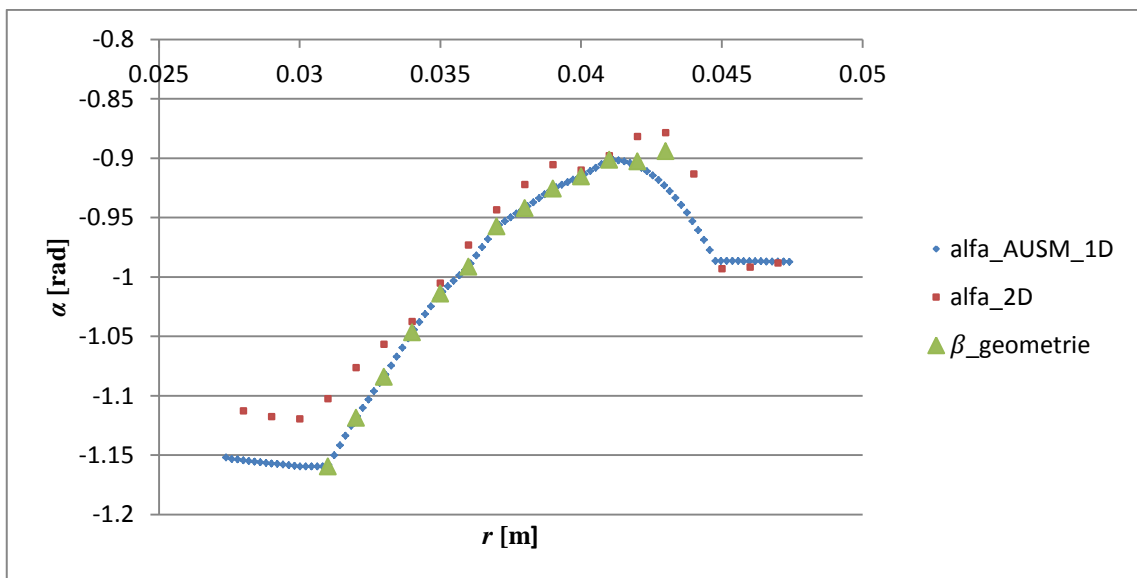
Obr. 36 – Průběh odměřených úhlu, vyjadřujících zakřivení lopatky

Zobrazení a zhodnocení výsledků

Výsledky z vlastního 1D výpočtu budeme srovnávat s výsledky z 2D výpočtu, které byly získány stejnou metodou jako v předchozím případě statoru radiální turbíny.

Numerické řešení 1D proudění bylo provedeno schématem $AUSM^+$. Pro tento zjednodušený model platí stejné zásady, jako pro předchozí případ radiální turbíny. To znamená, že neuvažujeme efekty vazkosti tekutiny (nepoužívá se ztrátový model).

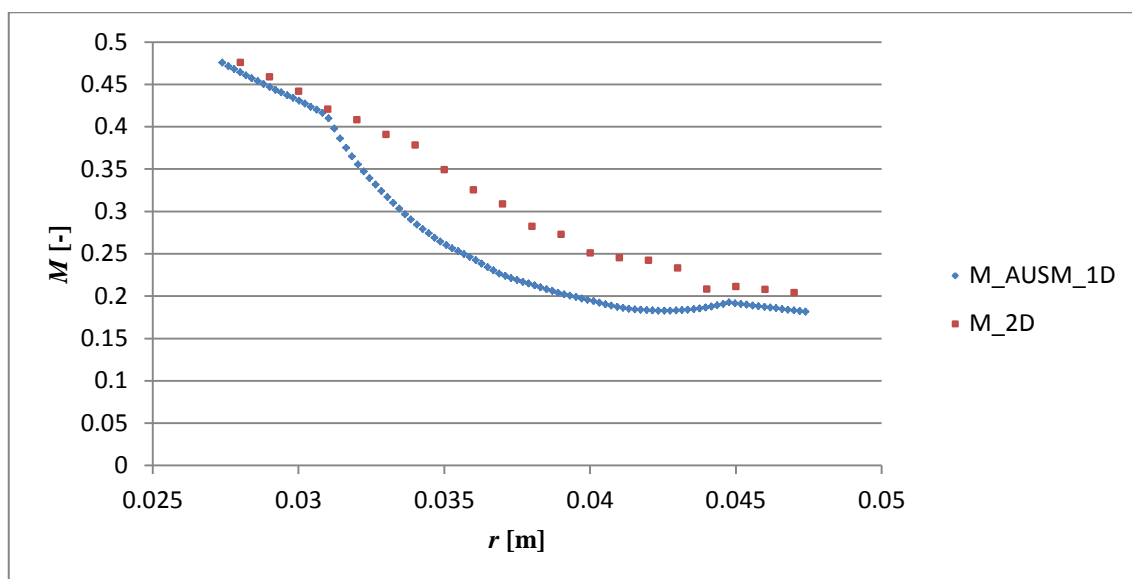
V tomto případě se opět náběžný úhel lišil od úhlu nastavení lopatky. Provedli jsme modifikaci úhlu na přední části lopatky pomocí kvadratické funkce dle *Podkapitoly 3.7*. Obr. 37 demonstruje dobrou shodu průběhu úhlu proudění z 1D a 2D výpočtu. Opět dochází k rozdílu úhlů v místě za odtokovou hranou.



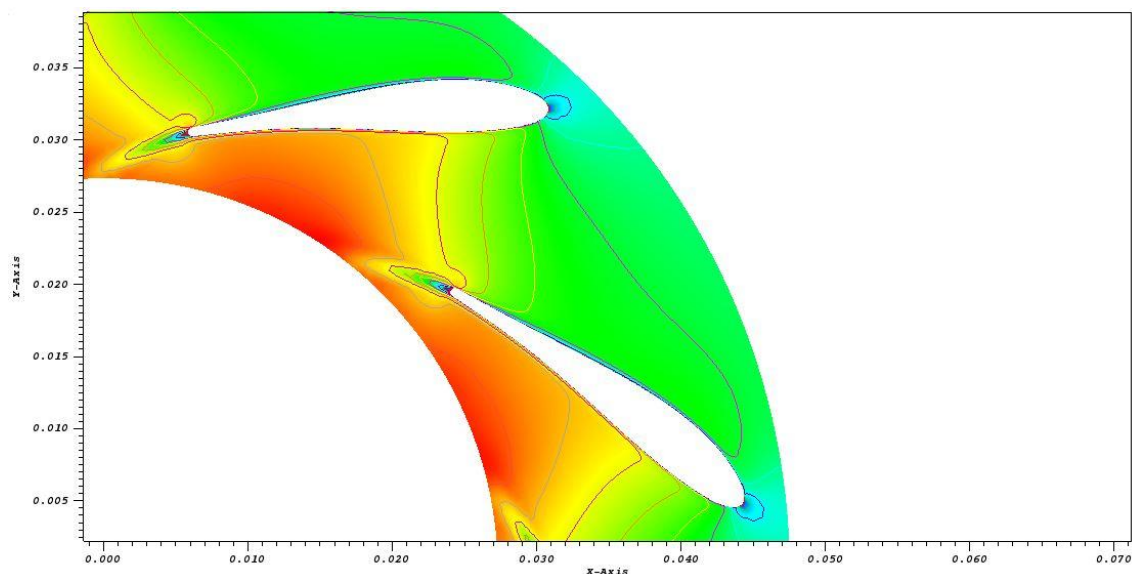
Obr. 37 – Rozložení úhlů

Na obr. 38 je znázorněno rozložení Machova čísla. Z obrázku je vidět, že rozváděcí část turbíny pracuje v podzvukovém režimu a nedochází ke vzniku rázových vln. Shoda průběhů Machova

čísla před a za odtokovou hranou je daná splněním okrajových podmínek. Ve skutečnosti na povrchu lopatky vznikne mezní vrstva, jak je vidět na *obr. 39*. Mezní vrstva zužuje šířku mezilopatkového kanálu, což má za následek zvětšení rychlosti proudu a narůst Machova čísla. To je jeden z důvodů, proč se průběhy Machova čísla na lopatce z 1D a 2D výpočtu značně odlišují.

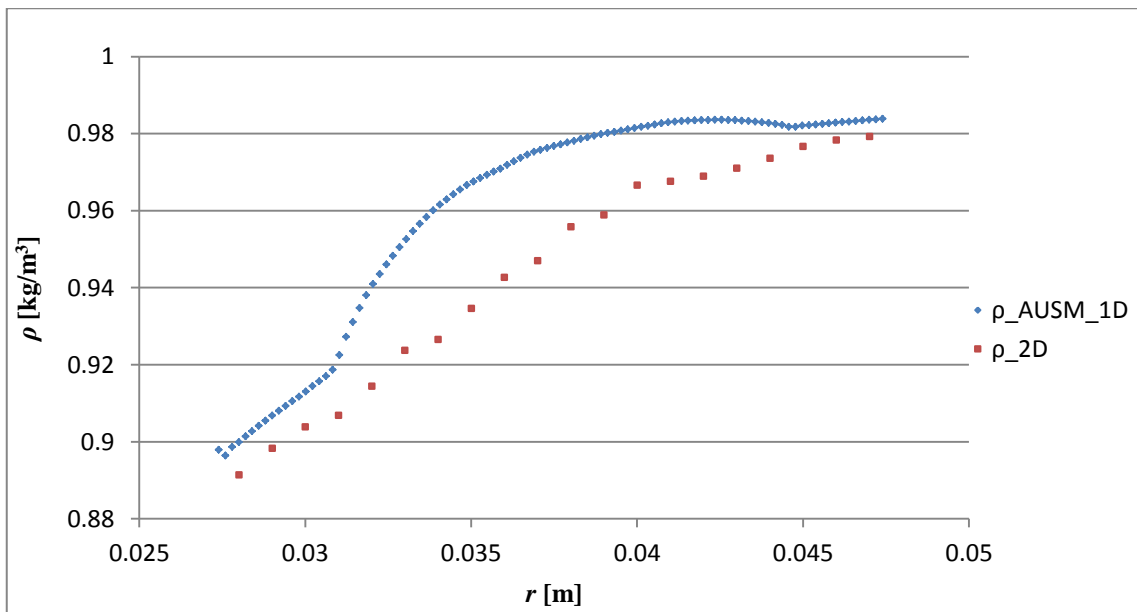


Obr. 38 – Rozložení Machova čísla

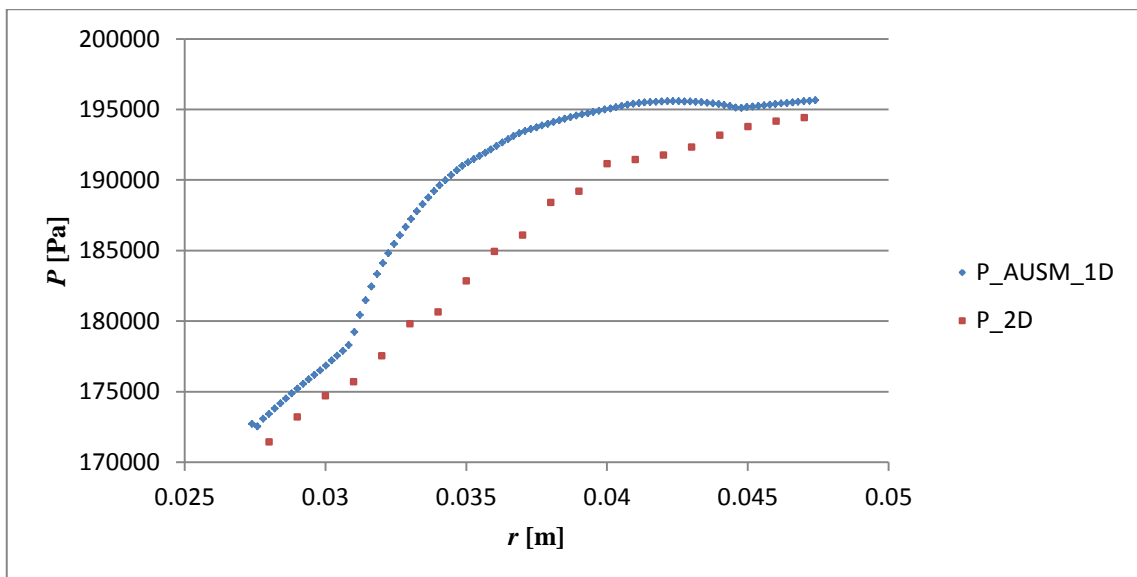


Obr. 39 – Výsledek 2D výpočtu, izočáry Machova čísla

Podobný efekt nastává i v průbězích tlaku a hustoty (*obr. 40* a *obr. 41*). Největší rozdíl mezi 1D a 2D výpočtem nastává opět na lopatce. Důvodem odlišnosti v průbězích před a za lopatkou je to, že v případě 1D výpočtu neuvažujeme vazkost.



Obr. 40 – Rozložení hustoty



Obr. 41 – Rozložení tlaku

4.4. Diskuse

Provedli jsme výpočet pro dva různé statory radiálních turbín stejným matematickým modelem. Při porovnání těchto dvou případů je možné udělat závěr, že výsledky 1D výpočtu se s výsledky 2D výpočtu lépe shodují v případě první radiální turbíny. To je dáno především odlišnou geometrií těchto úloh, tj. různé úhly zakřivení lopatek (první turbína je víc “zakřivená”), délky lopatek a tloušťky lopatek (v prvním případě máme mnohem tlustší lopatku). Z odlišnosti tlouštěk lopatek vyplývá různá šířka mezilopátkových kanálů (v prvním případě je nejužší místo kanálu charakterizováno hodnotou $\tilde{b} = 0,45$, ve druhém případě je to $\tilde{b} = 0,7$ (viz obr. 26 a obr. 35). Dále je nutné uvažovat, že první turbína pracuje v transsonickém režimu, zatímco druhá pracuje v subsonickém.

Závěr

V této práci byl představen jednorozměrný model proudění stlačitelné neviské tekutiny. Soustava Eulerových rovnic, která sloužila pro matematický popis proudění, byla prezentována v kartézských a polárních souřadnicích s uvažováním zdrojových členů na pravé straně.

Výpočet proudění v dýze s proměnným průřezem byl dílčím úkolem této práce. Na tomto modelu jsme vyzkoušeli *HLL* schéma a ověřili správnost fungování výpočetní metody. Výpočty byly provedeny pro podzvukový a nadzvukový režim. Výsledky souhlasí s poznatky z oboru dynamiky plynů.

Hlavním cílem byl vývoj programu pro výpočet jednorozměrného proudění statorem radiální turbíny. V tomto případě byla použita soustava Eulerových rovnic v polárních souřadnicích se zdrojovým členem na pravé straně, který zahrnoval vlivy odstředivé síly, vlivy vzniklé zúžením kanálu a vliv lopatky. Vliv lopatky byl zahrnut uvažováním její tloušťky a otočením proudu do směru daného jejím zakřivením. Pro aproximaci konvektivních členů byla použita schémata různých typů: *AUSM⁺* a *HLL*. Vlastní výsledky získané jednorozměrným výpočtem byly porovnávány s dodanými daty z dvourozměrného výpočtu turbulentního proudění.

Průběhy veličin získané *AUSM⁺* schématem se ve srovnání s *HLL* schématem více přibližují výsledkům z 2D výpočtu. To je dáno určitými vlastnostmi *HLL* schématu: má větší numerickou vazkost a neuvažuje všechny rychlosti šíření informace. V případě turbíny s transsonickým prouděním je dobře zachycen průběh Machova čísla a tlaku od vstupu až po odtokovou hranu lopatky, za kterou se začíná od výsledku 2D výpočtu odchylovat. V druhém řešeném případě turbíny automobilového turbodmychadla dobře odpovídají průběhy veličin před a za lopatkou, na lopatce samotné dochází ke značné odchylce. Důvodem je zjednodušení plynoucí z modelu jednorozměrného a nepřesný odhad zdrojového členu, který otáčí proud do směru tečného k lopatce.

I přes výše uvedené nepřesnosti modelu je možné vyvinutý program používat pro rychlou předpověď parametrů proudění při předběžném návrhu radiální turbíny. Pro získání přesnějších a detailnějších výsledků je nutné použít složitější 2D nebo 3D model, jelikož aplikace je však časově náročnější.

Námětem pro další vývoj modelu jednorozměrného proudění může být zahrnutí vlivu viskozity, použití ztrátového modelu, metod vyššího řádu přesnosti, provedení modifikace úhlu za odtokovou hranou.

Seznam literatury

- [1] Dvořák, R.; Kozel, K. *Matematické metody v aerodynamice*; Ediční středisko ČVUT, 1992, ISBN 80-01-00851-7
- [2] Kozel, K.; Fürst, J. *Numerické metody řešení problémů proudění I*; Vydavatelství ČVUT, 2001, ISBN 80-01-02384-2
- [3] Kong, Ch. Comparison of Approximate Riemann Solvers. Department of Mathematics University of Reading, May 2011.
- [4] Fořt, J.; Kozel, K.; Louda, P.; Fürst, J. *Numerické metody řešení problémů proudění III*; Vydavatelství ČVUT, 2004, ISBN 80-01-02877-1
- [5] Benson, T. Euler equations, 2014. NASA. <http://www.grc.nasa.gov/WWW/k-12/airplane/eulereqs.html> (accessed Jan 27, 2015).
- [6] Benson, T. Navier-Stokes Equations, 2014. NASA. <http://www.grc.nasa.gov/WWW/k-12/airplane/nseqs.html> (accessed Jan 27, 2015).
- [7] Meng-Sing, L. *Ten Years in the Making - AUSM-family*; 2001.
- [8] Liou, M.; Steffen, Ch. A New Flux Splitting Scheme. *J. Comput. Phys.* **1993**, *107*, 23–39.
- [9] Liou, M. A Sequel to AUSM: AUSM+. *J. Comput. Phys.* *1996*, *129*, 364–382.
- [10] Toro, E. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*, 3rd ed.; Springer -Verlag: Berlin Heidelberg, 2009.
- [11] Nožička, J. *Dynamika plynů*; Česká technika: Praha, 2005, ISBN 80-01-03300-7
- [12] Ferziger, J.; Peric, M. *Computational Methods for Fluid Dynamics*, 3rd ed.; Springer-Verlag: Berlin Heidelberg New York, 2002, ISBN 3-540-42074-6
- [13] Donea, J.; Huerta, A. *Finite Element Methods for Flow Problems*, 3rd ed.; John Wiley & Sons, 2003, ISBN 0-471-49666-9
- [14] Plešek, J. *Mechanika kontinua*; 2012.
- [15] Chung, T. *Computational Fluid Dynamics*, 2nd ed.; Cambridge University Press: USA, 2010.
- [16] Blazek, J. *Computational fluid dynamics: principles and applications*, 2nd ed.; Elsevier: Great Britain, 2005.
- [17] Laney, B. *Computational Gasdynamics*; Cambridge university press, 1998.
- [18] Spurk, J.; Aksel, N. *Fluid Mechanics*, 2nd ed.; Springer: TU Darmstadt, 2008.
- [19] Schobeiri, M. T. *Turbomachinery Flow Physics and Dynamic Performance*, 2nd ed.; Springer: Texas A&M University, 2012.
- [20] Chicone, C.; *Ordinary Differential Equations With Applications (Texts in Applied Mathematics)*, 2nd ed.; Springer, 1999.
- [21] Ganesh, R. Aerodynamics 1, 2006. Department of Aerospace Engineering Iowa State University. <http://www.public.iastate.edu/~rajagopa/2006F/AerE243.html> (accessed April 15, 2015)

- [22] Schäfer, M. *Computational Engineering – Introduction to Numerical Methods*; Springer: Germany, 2006.
- [23] Masatsuka, K. *I do like CFD, VOL.1 Governing Equations and Exact Solution*, 2nd ed.; NIA, 2014, ISBN 9781304827937
- [24] *A Quasi-One Dimensional Model for Axial Turbines*, 18th ISABE Conference in China; Adam, O., Léonard, O., Eds.; 2007.
- [25] *A Throughflow Analysis Tool Based on the Navier-Stokes Equations*, 6th European Conference on Turbomachinery Fluid Dynamics and Thermodynamics; Simon, J., Léonard, O., Eds.; 2005.
- [26] *A New Streamline Curvature Throughflow Method For Radial Turbomachinery*, Proceedings of ASME Turbo Expo 2008: Power for Land, Sea and Air GT2008, Berli. June 9-13, 2008; Casey, M., Robinson, Ch., Eds.; 2008.
- [27] Kadrnožka, J. *Tepelné turbíny a turbokompresory*, 1st ed.; AKADEMICKÉ NAKLADATELSTVÍ CERM: Brno, 2004, ISBN 80-7204-346-3
- [28] *Numerical methods for transonic flows, application for design of axial and radial stator turbine cascades*, Proceedings of the 8th International Symposium on Experimental and Computational Aerothermodynamics of Internal Flows; Dobeš, J., Fořt, J., Fürst, J., Louda, P., Kozel, K., Tajč, L., Eds.;