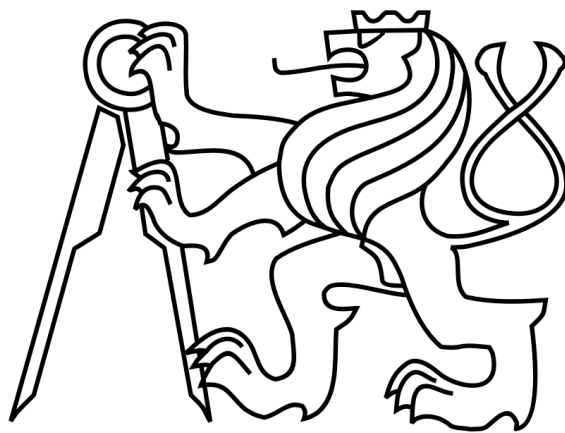


ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

FAKULTA STROJNÍ

Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky



Bakalářská práce

Odhad rychlosti šíření pulsní vlny aortou

2015

Václav Beneš

Doplnit zadání

Anotační list

Jméno autora:	Václav Beneš
Název Bakalářské práce:	Odhad rychlosti šíření pulsní vlny aortou
Anglický název:	Estimation of Pulse Wave velocity in Aorta
Akademický rok:	2014/2015
Obor studia	bez oboru
Ústav/odbor:	Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky Odbor biomechaniky
Vedoucí bakalářské práce:	Ing. Lukáš Horný, Ph.D.
Bibliografické údaje:	Počet stran: 53 Počet obrázků: 16 Počet příloh: 1x CD
Klíčová slova:	pulsní vlna, rychlost, šíření, aorta, odhad, matematický model, MAPLE
Keywords:	pulse wave, velocity, aorta, estimation, mathematical model, MAPLE
Abstrakt:	Práce se zabývá odvozením zjednodušeného vzorce pro rychlost šíření pulsní vlny aortou. Na jeho základě je následně vystavěn matematický model, jehož výstupem jsou grafy obvodového a axiálního streče a grafy rychlosti pulsní vlny v závislosti na tlaku a počátečního axiálního předpětí.
Abstract:	This work deals with deduction of simplified equation of pulse wave velocity in aorta. Based on this deduction there is made a mathematical model. Its output are graphs for perimeter and axial stretch and velocity of pulse wave depending on pressure and the initial axial stretch.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze literaturu uvedenou v příloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č.121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne 12.6.2015

.....

podpis

Poděkování

Úvodem bych chtěl poděkovat vedoucímu mé bakalářské práce, panu Ing. Lukáši Hornému, Ph.D. za vedení této bakalářské práce, jeho podnětné rady a připomínky při jejím vypracování.

Chtěl bych také poděkovat svým rodičům za podporu a trpělivost, se kterou mě podporovali v průběhu celého studia a tvorbě této bakalářské práce.

Obsah

Zadání	1
Anotační list	2
Prohlášení	3
Poděkování	4
1 Seznam použitých symbolů	7
1.1 Konvence značení	8
2 Úvod	9
2.1 Cíle práce	10
3 Seznam přijatých zjednodušení	11
4 Oběhová soustava	11
4.1 Srdce	12
4.2 Tepny	13
4.2.1 Předpětí tepen	14
5 Popis deformace a napětí	15
5.1 Kinematika deformace	15
5.2 Deformační gradient	16
5.3 Nafukování a protahování válcové trubice	18
5.4 Deformace	21
5.5 Napětí	22
5.5.1 Membránový stav skořepiny	24
5.5.2 Napjatost rotačně symetrické skořepiny	24

6	Konstitutivní teorie	26
6.1	Hyperelasticita, Greenova elasticita	26
6.2	Nestlačitelný hyperelastický materiál	28
7	Odvození	29
7.1	Odvození pohybové rovnice	30
7.2	Odvození rovnice bilance hmotnosti	32
7.3	Odvození vlnové rovnice	33
7.3.1	Vyjádření závislosti tlaku P na strečích	33
7.3.2	Odvození vlnové rovnice porovnáním bilance hybnosti a hmotnosti	35
8	Numerická simulace	38
8.1	Odvození rovnic v MAPLE	38
8.2	Kvazistatické nafukování válcové trubice	39
8.3	Výpočet rychlosti šíření pulsní vlny	39
9	Výsledky	40
9.1	Obvodový streč	41
9.2	Axiální streč	42
9.3	Rychlost pulsní vlny se závislostí λ_{zZ} na $\lambda_{\theta\Theta}$	43
9.4	Rychlost pulsní vlny bez závislosti λ_{zZ} na $\lambda_{\theta\Theta}$	46
10	Přijaté předpoklady	48
11	Závěr	49
12	Seznam použitých obrázků	50
13	Seznam použité literatury	51

1 Seznam použitých symbolů

- R ... nezdeformovaný rádius
 H ... nezdeformovaná tloušťka
 Z ... nezdeformovaná délka
 r ... zdeformovaný rádius
 h ... zdeformovaná tloušťka
 z ... zdeformovaná délka
 λ ... streč
 \mathbf{F} ... deformační gradient
 \mathbf{C} ... pravý Cauchyův-Greenův tenzor deformace
 \mathbf{E} ... bázeový vektor
 t ... čas
 $\boldsymbol{\sigma}$... Cauchyho napětí
 \mathbf{n} ... vektor vnější normály
 p ... Langrangerův multiplikátor
 P ... tlak
 A ... plocha průřezu
 \mathbf{F} ... vektor síly
 \mathbf{u} ... posuv prostorově
 W ... hustota deformační energie
 K ... pomocný symbol
 \mathbf{E} ... Green-Lagrangeův tenzor deformace
 \mathbf{c} ... rychlost šíření pulsní vlny
 ρ ... hustota

1.1 Konvence značení

V bakalářské práci je přijatá následující konvence značení:

Skalární veličiny jsou značeny kurzívou např.: tlak $\dots P$

Tenzory jsou značeny tučně např.: deformační gradient $\dots \mathbf{F}$

Vektory jsou značeny tučnou kurzívou např.: síla $\dots \mathbf{F}$

2 Úvod

V této bakalářské práci se budeme zabývat rychlostí šíření pulsni vlny v aortě. Pulsni vlna je způsobena stahem srdce, během kterého je z něj vypuzena krev do aorty. Rychlost šíření pulsni vlny bude záviset na stavových veličinách, kterými jsou napjatost a deformace, dále závisí na materiálu. Vztah mezi napjatostí a deformací materiálu máme popsany konstitutivními rovnicemi. Rychlost závisí také na počátečních a okrajových podmínkách.

Zkoumáme ji z důvodu, že je významným ukazatelem zdravotního stavu. Navíc působením pulsni vlny může postupně docházet k přetěžování srdce. Pulsni vlna se po srdečním stahu šíří aortou směrem od srdce. Když dorazí například do místa větvení na pravou a levou kyčelní tepnu, tak v tomto místě dojde k částečnému odrazu vlny a odražená vlna se šíří aortou směrem zpátky k srdci. Pokud odražená tlaková vlna dorazí k srdci dříve, než se uzavře aortální chlopeč, která odděluje srdeční komoru od aorty, musí srdce při vypuzování krve překonat lokální tlak, který bude zvýšený o působení odražené tlakové vlny. Což vede k jeho přetěžování.

Pro výpočet bude sestaven matematický model v programu MAPLE, ve kterém bude celý výpočet proveden. Vzorec pro rychlosti šíření pulsni vlny bude odvozen na základě pohybové rovnice a bilance hmotnosti. Vzhledem k tomu, že se jedná o dosti komplexní úlohu, budeme muset v průběhu výpočtu přijmout několik zjednodušení, aby bylo vůbec možné výpočet v našich podmínkách realizovat. Avšak každým zjednodušením si do výpočtu vnášíme určitou chybu. Nezáskáme tedy přesné hodnoty pro rychlost šíření pulsni vlny, ale pouze jejich odhadovanou hodnotu. Výsledky proto budou platné pouze v určitém oboru hodnot a při jejich interpretaci bude nutné se zamyslet, zda jsou ještě reálné či nikoliv.

2.1 Cíle práce

Hlavním cílem této bakalářské práce je provést numerický výpočet, kterým získáme odhad rychlosti šíření pulsní vlny v aortě. Aby bylo možné provést simulaci musíme si nejdříve odvodit vzorec pro rychlost šíření vlny ve válcové trubici, během kterého přijmeme několik zjednodušení. Posledním úkolem bude okomentovat vypočítané výsledky a zhodnotit nakolik jsou reálné vzhledem ke zjednodušením, která byla v průběhu výpočtu přijata.

3 Seznam přijatých zjednodušení

Jak už bylo predestřeno v úvodu, tak aby bylo možné výpočet matematického modelu v našich podmínkách realizovat, bylo nutné přijmout několik zjednodušení a předpokladů.

V rámci zjednodušení tak předpokládáme, že:

- Céva bude v průběhu tlakování zažívat pouze malé deformace.
- Pulsní vlna, která se bude aortou šířit bude dlouhá, a tak derivace rádiusu r podle souřadnice z bude malá.
- Protože neznáme hodnoty strečů dynamické deformace, nahradíme je hodnotami, které získáme simulací nafukování válcové trubice.
- Pro velký obsah vody považujeme cévní stěnu za nestlačitelnou.
- Krev, která v cévách proudí považujeme za nevazkou kapalinou ve které nevznikají žádná vnitřní tření.
- Uvažujeme pouze jednoduchou kinematiku deformace a to změnu tloušťky stěny, průměru a délky.
- Cévu považujeme za tenkostěnnou a tak po celé tloušťce stěny budeme mít stejnou hodnotu napětí.

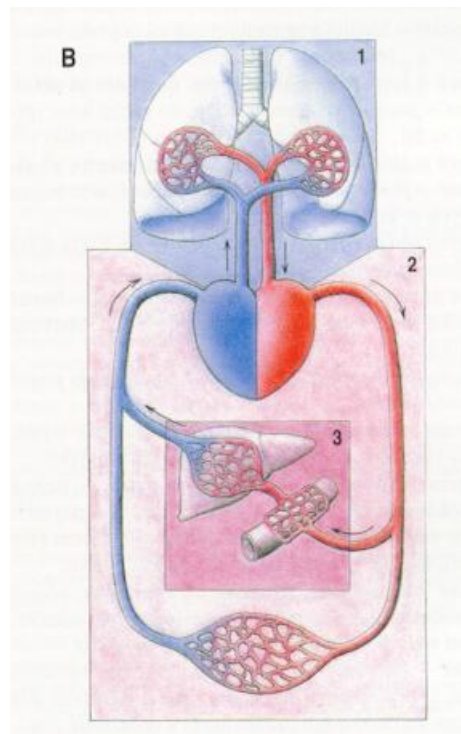
4 Oběhová soustava

Oběhová soustava plní v lidském těle funkci rozvodu živin, dýchacích plynů a hormonů. Skládá se z cév (tepny a žíly) a srdce, které svými stahy pumpuje krev do tepen a tím vytváří i pulsni vlny, které se tepnami dále šíří. Pro následující kapitoly jsme čerpali ze skript : Biomechanika srdečně cévního systému [1]

4.1 Srdce

Srdce (cor) je jedním z nejdůležitějších orgánů v oběhovém systému i v celém lidském organismu. Je to dutý svalový orgán, který svými rytmickými stahy zajišťuje pohyb krve v cévním systému.

Cyklus srdce zahrnuje mechanické, elektrické a biochemické děje, které se opakují s každým srdečním úderem. Srdeční cyklus se dělí na dvě části, systolu což je stah síní a komor s vypuzením krve a diastolu což je uvolnění síní a komor a jejich plnění krví. Během stahu srdečního svalu při kterém jsou chlopně uzavřeny, stoupá v komorách



Obrázek 1: Schéma malého a velkého krevního oběhu - převzato z [9]

tlak, až do chvíle, kdy přesáhne hodnotu tlaku v aortě nebo v plicnici a dochází k postupnému otevírání aortálních, nebo plicních chlopní a vypuzení krve do aorty

a plic. Vypuzování krve pokračuje až do chvíle, kdy proud krve v komoře nezpůsobí převýšení tlaku v aortě vůči tlaku, který je v komoře. Následně dojde k uzavření aortálních chlopní a nastane fáze izometrického uvolnění srdečního svalu. V tento moment jsou všechny chlopně uzavřeny. Během ochabování srdečního svalu, tlak v komorách klesne pod úroveň tlaku, který je v síních, otevírají se cípate chlopně a komory se plní krví. V průběhu srdečního cyklu se přetlak v levé komoře, která vypuzuje krev do aorty, pohybuje v relativním rozsahu 0 až 16 kPa a v pravé komoře, která vypuzuje krev do plic, se tlak pohybuje od 0 do 3 kPa.

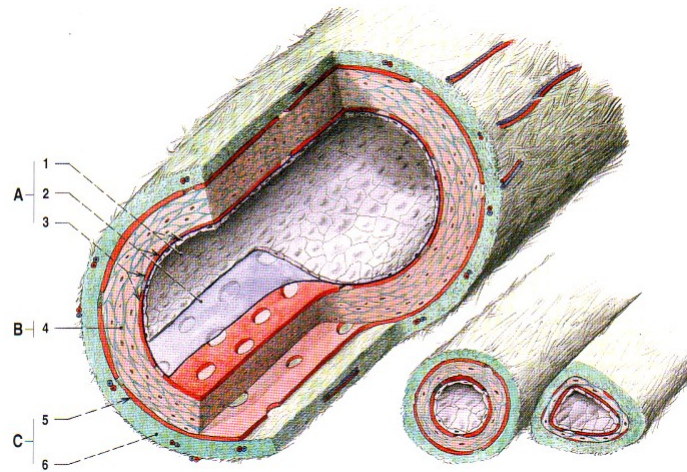
4.2 Tepny

Součástí oběhového systému jsou i tepny, do kterých srdce pumpuje krev. Jejich stěna se dělí na tři vrstvy: vnitřní vrstvu (tunica intima) na obrázku 2 značeno A, střední vrstvu (tunica media) značeno B a vnější vrstva (tunica adventitia) značeno C. Vnitřní vrstva (tunica intima) je tvořena vrstvou z endotelových buněk, kterými jsou vystlány všechny cévy. Pod ní je pak subendotelová vazivová vrstva, která je tenká a pak výrazná elastická membrána, která je vytvořena z elastických a kolagenických vláken.

Střední vrstva (tunica media) je silná převážně svalová vrstva, její kostru tvoří 40 až 60 elastických membrán mezi kterými prochází vlákna hladkých svalů pod úhly 30° až 50° k podélné ose cévy, která jsou navíc obtočena vlákny z kolagenu. Toto pružinové uspořádání je výhodné, protože umožňuje opětovné smrštění cévní stěny, která je namáhána průchody pulsní vlny. Převzato ze skript Biomechanika srdečně cévního systému [1].

Na hranici střední a vnější vrstvy (tunica adventitia) je membrána tvořená silnými

elastickými vlákny, která jsou orientovaná podélně a spirálních svazků kolagenních fibril. Samotná vnější vrstva je tvořena převážně vlákny kolagenu. První části de-



Obrázek 2: Schéma stavby cévní stěny - převzato z [9]

formace stěny se účastní pouze elastin, jehož protažitelnost je až 150% původní délky. Ve fyziologickém stavu se zapojují vlákna elastanu i kolagenu a při velkých deformacích se projevuje vliv pouze kolagenních vláken. Za pasivní vlastnosti cévy jsou odpovědná pouze kolagenní a elastinová vlákna. Komplexní chování cévy je do tvořeno hladkou svalovinou a vnitřním pnutím, které ovšem nemá na pasivní deformace jako je průchod pulsní vlny výrazný vliv. Převzato ze skript Biomechanika srdečně cévního systému [1].

4.2.1 Předpětí tepen

Tepny v lidském těle jsou ve fyziologickém stavu předepnuty. Aorta pracuje kolem počátečního stavu napjatosti, při kterém je deformace stěny okolo 40 - 0%. Kolem toho stavu kolísá deformace v obvodovém směru $\pm 3\%$ a v podélném $\pm 1\%$. Počáteční stav je ovšem velmi obtížné určit. U mladších osob se tepny smršťují více než

u osob starších. Například břišní aorta se v případě mladšího člověka smrští o 30% v případě staršího člověka o 15%. U osob starších 50 let je zkrácení více než desetinásobně menší okolo 1,0% až 1,5%. V případě arterosklerózy ke zkrácení vzorků vůbec nedošlo. Převzato ze skript Biomechanika srdečně cévního systému [1].

5 Popis deformace a napětí

Dále se budeme věnovat teorii, na které je vystavený matematický model výpočtu. Ten je založen na případě nafukování a protahování válcové trubice, protože i cévu si popíšeme jako válcovou trubici, kterou budeme tlakovat. Nejdříve si ale popíšeme kinematiku deformace, které bude céva během tlakování vystavena. Pro následující podkapitoly jsme čerpali ze skript: Patobiomechanika srdečněcévního systému [2] a pro podkapitolu napětí v tenkostěnné trubici ze skript Pružnost a pevnost 1 [3]

5.1 Kinematika deformace

Během deformace dochází v tělese ke tvarovým a objemovým změnám. Stejně jako M.R.Labrosse ve své práci [8], předpokládejme cévní stěnu jako nestlačitelnou z důvodu velkého obsahu vody. Bude nás tedy zajímat pouze tvarová změna. Ke tvarové změně dochází pohybem tělesa, deformací potom nazýváme změny kvantitativních měr, které jsou způsobeny tímto pohybem. Tyto změny vyjádříme vzhledem ke stavu před deformací tzv. materiálovým neboli Lagrangeovským popisem.

Je dobré podotknout, že ne všechny pohyby tělesa musí nutně vést k jeho deformaci. Těleso se může pohybovat v prostoru jako tuhý celek a zajímá-li nás deformace, musíme tuto informaci o pohybu v prostoru odečíst, abychom získali pouze informace o jeho tvarové změně.

Když přejdeme k matematickému vyjádření, budeme mít těleso B , které zaujímá souvislou část $\Omega(0)$ geometrického prostoru (v našem případě se jedná o trojrozměrný eukleidovský prostor) v čase $t=0$. $\Omega(0)$ nazveme počáteční (referenční) konfigurací tělesa B . Těleso B se fyzicky skládá z materiálových částic P, Q, R , které v $\Omega(0)$ zaujímají pozice geometrických bodů $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$. V čase $t=s$ bude těleso B zaujímat pozici $\Omega(s)$, kterou nazveme průběžnou konfigurací, jeho materiálové částice P, Q, R budou zaobírat geometrické polohy $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$.

Pohyb tělesa je definován jako vzájemně jednoznačné a vzájemně spojitě zobrazení $\kappa(t) : \Omega(0) \rightarrow \Omega(s)$, které je dle potřeby možné spojitě diferencovat. Vzájemná jednoznačnost a spojitost nám zaručuje, že je možné těleso dostat zpátky do výchozí situace pomocí κ^{-1} .

5.2 Deformační gradient

Deformační gradient značený \mathbf{F} , je veličina, která vystihuje lokální důsledky a vlastnosti pohybu tělesa, kterou můžeme zapsat rovnicí (1).

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \quad (1)$$

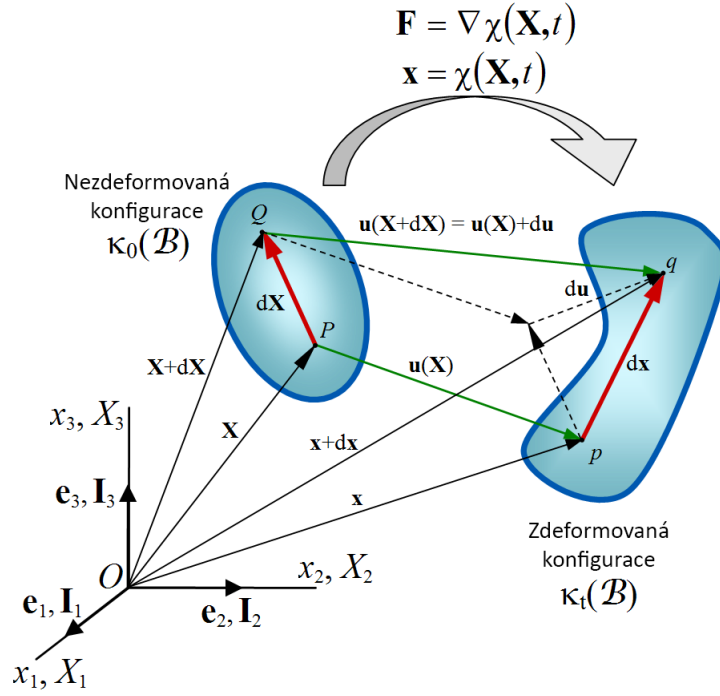
Celou situaci nezdeformované a zdeformované konfigurace nám vykresluje obrázek 3, kde deformační gradient převádí referenční nezdeformovaný vektor na zdeformovaný vektor.

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \cdot d\mathbf{X} \quad (2)$$

Složky deformačního gradientu poté píšeme ve tvaru (3).

$$F_{iI} = \frac{\partial x_i}{\partial X_I} \quad (3)$$

Za indexy se dosazuje následující $i = a, b, c$ a pro $I = A, B, C$ v rovnici následně přijímáme konvenci, že podle opakujících se indexů vždy sčítáme a tak pro



Obrázek 3: Převod nezdeformovaného vektoru na zdeformovaný - převzato z [6]

$dx = (dx_a, dx_b, dx_c)$ platí (4).

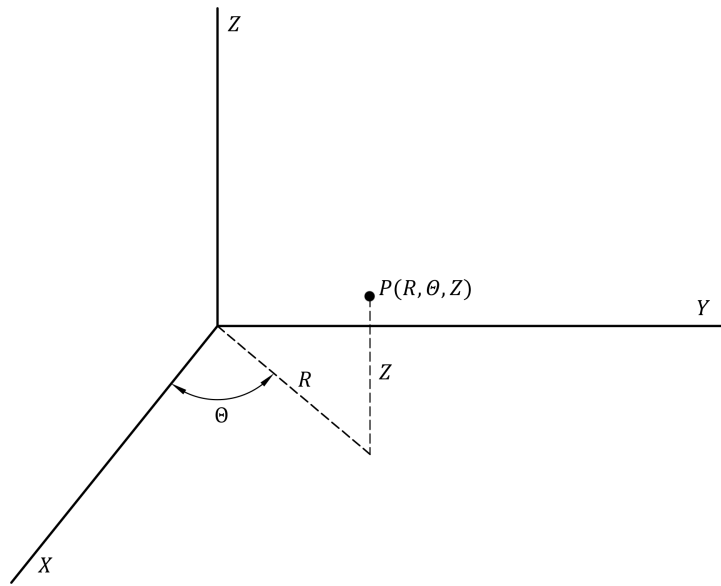
$$\begin{aligned}
 dx_a &= F_{aA}dX_A + F_{aB}dX_B + F_{aC}dX_C \\
 dx_b &= F_{bA}dX_A + F_{bB}dX_B + F_{bC}dX_C \\
 dx_c &= F_{cA}dX_A + F_{cB}dX_B + F_{cC}dX_C
 \end{aligned} \tag{4}$$

Determinant deformační gradientu vyjádřený jako objem rovnoběžnostěnu, který je roven determinantu matice a daný třemi vektory za pomoci vnějšího součinu.

Determinant deformačního gradientu má tedy význam změny objemu elementu kontinua značeného dV před a dv po deformaci. Protože my v našem případě uvažujeme cévní stěnu pro její velký obsah vody jako nestlačitelnou budeme mít $J = \frac{dv}{dV} = 1$.

5.3 Nafukování a protahování válcové trubice

Jak už bylo uvedeno na začátku, nafukování a protahování válcové trubice je v kontextu cév velmi důležitý případ. I náš matematický model bude vystaven na základě nafukování a protahování válcové trubice. Vzhledem k tomu, že aorta se dá popsat jako válcová trubice bude nejjednodušší dále pracovat ve válcových souřadnicích. Vztah mezi válcovými a kartézskými souřadnicemi je popsán rovnicemi (5) a (6).



Obrázek 4: Porovnání válcových a kartézských souřadnic

$$(X_1, X_2, X_3) = (R \cdot \cos(\Theta), R \cdot \sin(\Theta), Z) \quad (5)$$

neboli

$$(R, \Theta, Z) = \left(\sqrt{X_1^2 + X_2^2}, \arctg \frac{X_2}{X_1}, Z \right) \quad (6)$$

Budeme pracovat s vektory $\mathbf{E}_R, \mathbf{E}_\Theta, \mathbf{E}_Z$ v ortonormální bázi a tak pro polohový vektor bude platit (7).

$$\mathbf{X} = R \cdot \cos(\Theta) \mathbf{E}_1 + R \cdot \sin(\Theta) \mathbf{E}_2 + Z \cdot \mathbf{E}_3 = R \cdot \mathbf{E}_R(\Theta) + Z \cdot \mathbf{E}_Z \quad (7)$$

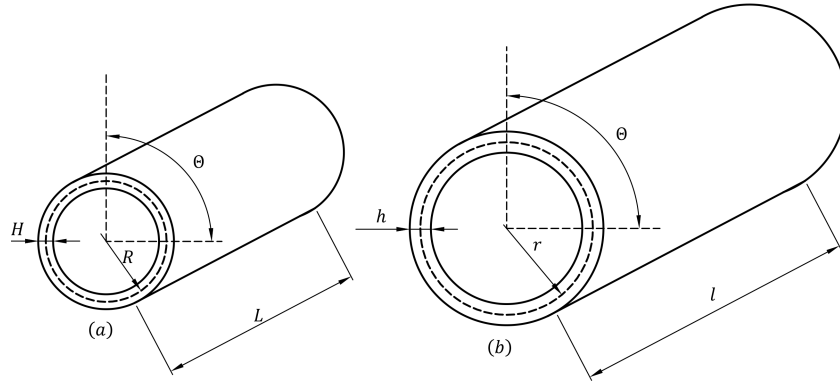
Vztah mezi bázovými vektory je popsán následujícími rovnicemi (8),(9) a (10).

$$\mathbf{E}_R = \cos(\Theta)\mathbf{E}_1 + \sin(\Theta)\mathbf{E}_2 \quad (8)$$

$$\mathbf{E}_\Theta = -\sin(\Theta)\mathbf{E}_1 + \cos(\Theta)\mathbf{E}_2 \quad (9)$$

$$\mathbf{E}_Z = \mathbf{E}_3 \quad (10)$$

V našem případě válcové trubice bude kinematika deformace následující: na obrázku 5 vidíme trubici před deformací (a) a po deformaci (b). Referenční stav před deformací je kótován R, H, Z , kde R značí rádius, H tloušťku stěny a Z délku trubice. Po deformaci bude mít trubice rozměry r, h, z . Nafouknutí trubice bude homogenní a jednotlivé průřezy trubice se od sebe budou jenom vzdalovat nebo přibližovat. Během nafukování nedojde ke zkrucování trubice proto $\Theta = \theta$. Vztah mezi nezde-



Obrázek 5: Válcová trubice před a po deformaci

formovanou a zdeformovanou trubicí popíšeme následujícími vztahy (11),(12) a (13).

Kde λ značí streč v příslušném směru.

$$h = \lambda_{rR} \cdot H \quad (11)$$

$$r = \lambda_{\theta\Theta} \cdot R \quad (12)$$

$$z = \lambda_{zZ} \cdot Z \quad (13)$$

Dodejme, že vzhledem k tomu, že cévu považujeme za nestlačitelnou a neuvažujeme tedy objemové změny bude platit (14).

$$\lambda_{rR} \cdot \lambda_{\theta\Theta} \cdot \lambda_{zZ} = 1 \quad (14)$$

Ve válcových souřadnicích jsou na rozdíl od kartézských souřadnic bázové vektory funkcemi polohy. Mimo jiné v sobě kombinují i veličiny, které přestože jsou matematicky stále reálnými čísly ve fyzikální interpretaci už nabývají úplně jiného rozměru. To se poté projeví až budeme definovat deformační gradient, ve kterém budeme muset tento nesoulad vektorů zohlednit.

Kompletní princip výpočtu vyžaduje pochopení látky a matematických operací nad rámeček bakalářského studia. Spokojíme se tedy s již vypočítaným tenzorem deformačního gradientu \mathbf{F} , který převezmeme ze skript Patobiomechanika srdečněcévního systému: I.Díl [2]. Nyní můžeme sestavit kompletní tenzor deformačního gradientu \mathbf{F} , pro jednotlivé složky dostaneme (15).

$$\begin{aligned} F_{rR} &= \frac{\partial r}{\partial R} & F_{r\Theta} &= \frac{1}{R} \frac{\partial r}{\partial \Theta} & F_{rZ} &= \frac{\partial r}{\partial Z} \\ F_{\theta R} &= \frac{\partial \theta}{\partial R} & F_{\theta\Theta} &= \frac{r}{R} \frac{\partial \theta}{\partial \Theta} & F_{\theta Z} &= r \frac{\partial \theta}{\partial Z} \\ F_{zR} &= \frac{\partial z}{\partial R} & F_{z\Theta} &= \frac{1}{R} \frac{\partial z}{\partial \Theta} & F_{zZ} &= \frac{\partial z}{\partial Z} \end{aligned} \quad (15)$$

Práce se všemi 9 složkami tenzoru deformace je v našem případě zbytečná, protože uvažujeme pouze změnu poloměru trubky, tloušťky její stěny a axiální protažení a tak budeme pracovat pouze s:

$F_{rR} = \frac{\partial r}{\partial R}$: Tento člen nám vyjadřuje změnu tloušťky, popisuje diferenciální změnu zdeformovaného poloměru vůči diferenciální změně referenčního poloměru. Jedná se tedy o gradient tloušťky během zatěžování. V našem případě $F_{rR} = \lambda_{rR}$. A protože jsme přijali zjednodušení, že válcovou trubici budeme považovat za tenkostěnnou dojde k dalšímu zjednodušení tedy, že: $\frac{\partial r}{\partial R} = \frac{h}{H}$.

$F_{\theta\Theta} = \frac{r}{R} \frac{\partial\theta}{\partial\Theta}$: Tento člen poměřuje délky obvodů $\frac{r}{R}$, derivace $\frac{\partial\theta}{\partial\Theta}$ k němu navíc dokáže přičíst nerovnoměrnost obvodového prodloužení podél úhlové souřadnice. V našem případě $F_{\theta\Theta} = \lambda_{\theta\Theta}$, navíc protože uvažujeme uniformní nafukování trubice podél celého obvodu tak $\theta = \Theta$ a tedy $\frac{\partial\theta}{\partial\Theta} = 1$. Můžeme psát $F_{\theta\Theta} = \lambda_{\theta\Theta} = \frac{r}{R}$

$F_{zZ} = \frac{\partial z}{\partial Z}$: Tento člen nám měří axiální strečování trubky. V našem případě $F_{zZ} = \lambda_{zZ}$

5.4 Deformace

Deformační gradient \mathbf{F} v sobě nese celou informaci o geometrických změnách, je tedy prvotní a postačující měrou deformace. Protože deformační gradient není symetrický musíme pracovat se všemi devíti složkami, které v sobě nesou informace nejen o změně délek elementu, ale i o jeho natočení. Jelikož natočení budeme považovat za pohyb celého tělesa a nebudeme mu přisuzovat žádné deformační energie, nebudeme se jím dále zabývat.

Je nutné také zadefinovat další míry přetvoření tělesa, kterým říkáme tenzory deformace. O tělesu tvrdíme, že prošlo deformací pokud existuje alespoň jedna dvojice materiálových bodů PQ pro které platí, že $|d\mathbf{x}| \neq |d\mathbf{X}|$. Vzhledem k tomu, že je lepší pracovat s druhými mocninami než s absolutními hodnotami vektorů, po rozepsání získáme (16).

$$\begin{aligned}
 |d\mathbf{x}| \neq |d\mathbf{X}| &\Leftrightarrow d\mathbf{x}^2 \neq d\mathbf{X}^2 \Leftrightarrow \\
 d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} \neq d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} &\Leftrightarrow (\mathbf{F}d\mathbf{X}) \cdot (\mathbf{F}d\mathbf{X}) \neq d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} \\
 &\Leftrightarrow (\mathbf{F}d\mathbf{X}) \cdot (\mathbf{F}d\mathbf{X}) - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = 0
 \end{aligned} \tag{16}$$

Těleso budeme považovat za zdeformované, pokud tenzor (17) nebude roven nule.

$$\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I} \neq 0 \quad (17)$$

Ve výrazu (17) je pouze člen $\mathbf{F}^T \mathbf{F}$ závislý na pohybu tělesa. Ve smyslu odvození je to nejpřirozenější míra deformace, kterou budeme nazývat Cauchyův-Greenův tenzor deformace (18).

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (18)$$

Vztah mezi Lagrangeovým tenzorem deformace \mathbf{E} a pravým Cauchyovým tenzorem deformace jsme převzali ze skript Patobiomechanika srdečněcévního systému: I.díl [2].

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (19)$$

Kde \mathbf{I} je jednotkový tenzor. Pro jednotlivé směry válcových souřadnic poté získáme (20), (21) a(22).

$$E_{RR} = \frac{1}{2}(\lambda_{rR}^2 - 1) \quad (20)$$

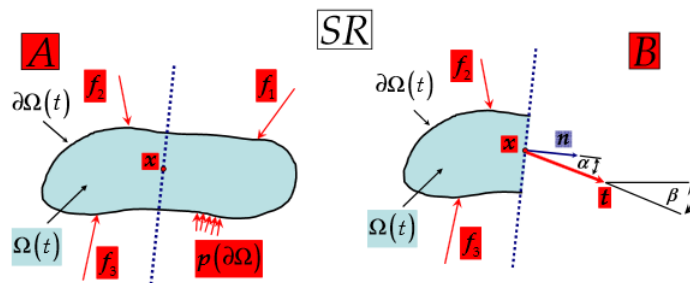
$$E_{\Theta\Theta} = \frac{1}{2}(\lambda_{\theta\Theta}^2 - 1) \quad (21)$$

$$E_{ZZ} = \frac{1}{2}(\lambda_{zZ}^2 - 1) \quad (22)$$

5.5 Napětí

Opět budeme uvažovat těleso B , které bude v čase t v konfiguraci $\Omega(t)$, ve které bude vystaveno vnějšímu silovému působení za splnění podmínek statické rovnováhy.

Pokud tělesem provedeme myšlený řez podle roviny, která nám těleso rozdělí na dvě části, ztratíme část silového působení a tím i statickou rovnováhu tělesa, pokud do plochy nepřipojíme silové působení tak, aby jeho výsledný účinek nahradil silové působení odřízle části.



Obrázek 6: Uvedení tělesa do rovnováhy po myšleném řezu - převzato z [6]

Jak můžeme vidět na obrázku 6, tak když se soustředíme na libovolný konkrétní bod x v rovině řezu, která má vnější normálový vektor \mathbf{n} a do bodu x vložíme infinitesimální silovou výslednici vnitřních sil $d\mathbf{f}$, tak abychom zajistili statickou rovnováhu po myšleném odříznutí tělesa. K silovému vektoru $d\mathbf{f}$ zavedeme ještě vektor plošné intenzity vnitřních sil \mathbf{t} , tak aby v elementární plošce ds myšleného řezu (čili v plošném okolí bodu x) vytvářel staticky ekvivalentní silové působení tzn. $d\mathbf{f} = \mathbf{t}ds$. Vektor intenzity vnitřních sil budeme nazývat Cauchyův neboli skutečný.

Pokud se naše těleso B během pohybu κ deformovalo do konfigurace $\Omega(t)$, musí existovat deformační gradient \mathbf{F} , který je tímto pohybem určen. Inverzní pohyb κ^{-1} potom generuje \mathbf{F}^{-1} , který převede \mathbf{x} na počáteční \mathbf{X} , tak že sleduje konkrétní materiálovou částici, která se v \mathbf{x} v čase t nachází.

Omezme se přitom na vektor \mathbf{t} tak aby platilo $\mathbf{t} = \mathbf{t}(x, t, \mathbf{n})$. Tato rovnice nám říká, že vektory intenzity vnitřních sil závisí pouze na poloze, času a vnější normále řezu.

Když si budeme definovat tenzor napětí nechť platí (23).

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n} \quad (23)$$

Tedy nechť vektor intenzity vnitřních sil t získáme lineární transformací σ normálového vektoru \mathbf{n} . V takovém případě nazýváme lineární transformací *sigma* jako tenzor Cauchyova (skutečného) napětí.

To že se v případě napětí musí jednat o tenzor druhého řádu, ukáže složkový zápis (24). V součinech na pravé straně se bude přes jeden index sčítat a zároveň nám musí jeden index zůstat, aby byl výsledkem vektor levé strany.

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad (24)$$

Tenzor σ je tedy definován ve zdeformované konfiguraci, proto jsou jeho oba indexy malé.

5.5.1 Membránový stav skořepiny

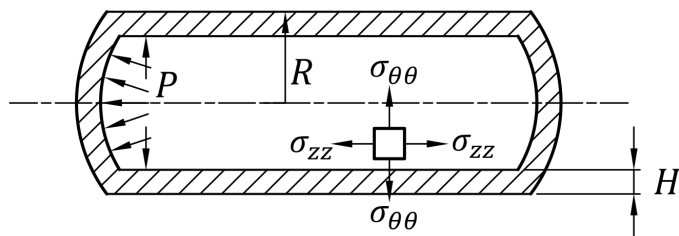
Skořepiny jsou konstrukční elementy plošného charakteru, jejichž tloušťka je podstatně menší než ostatní rozměry.

V membránovém stavu se skořepina nachází ve chvíli kdy se v její stěně nevyskytují žádné vnitřní momenty a to ani ohybové ani kroucí a stěna přenáší pouze vnitřní síly tahové a tlakové nebo i smykové.

5.5.2 Napjatost rotačně symetrické skořepiny

Protože vycházíme z předpokladu trojosé napjatosti, napětí σ_{rr} získáme z tlaku P který je v cévách a tlaku mimo cévy, který budeme považovat za nulový. Napětí σ_{rr} získáme jejich aritmetickým průměrem, tedy (25).

$$\sigma_{rr} = -\frac{P}{2} \quad (25)$$



Obrázek 7: Napětí v uzavřené tenkostěnné trubici

Napětí $\sigma_{\theta\theta}$ získáme použitím Laplaceovy rovnice. Pro hlavní poloměry křivosti válce platí (26) a (27).

$$R_1 = \infty \quad (26)$$

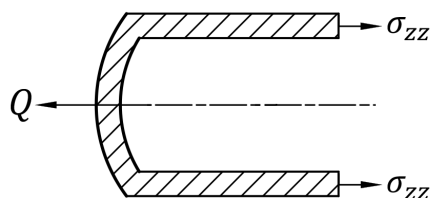
$$R_2 = r \quad (27)$$

Po dosazení do Laplaceovy rovnice získáme:

$$0 + \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} = \frac{P}{h} \quad (28)$$

Odtud tedy (29).

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{P \cdot r}{h} \quad (29)$$



Obrázek 8: Rovnováha sil po odříznutí části válcové trubice

Napětí σ_{zz} působí ve směru osy nádoby a pro jeho určení vyjdeme ze vztahu.

$$Q = \pi \cdot r^2 \cdot P \quad (30)$$

Síla Q je výslednicí tlaku P působícího na dno nádoby. Napětí σ_{zz} je rovnoběžné s osou nádoby získáme tak (31), k napětí musíme ještě připočítat tu část, která vznikne působení předepínací síly $Fred$.

$$\sigma_{zz} = \frac{Q}{2\pi \cdot r \cdot h} + \frac{Fred}{2\pi \cdot r \cdot h} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot P}{2\pi \cdot r \cdot h} + \frac{Fred}{2\pi \cdot r \cdot h} = \frac{P \cdot r}{2h} + \frac{Fred}{2\pi \cdot r \cdot h} \quad (31)$$

6 Konstitutivní teorie

Konstitutivní teorie je formulace vzájemných závislostí mezi veličinami, které popisují stav materiálu nebo prostředí.

V případě pružných (elastických) materiálů jde o tenzory a napětí. Tyto relace pak mají podobu rovnic, které nazýváme konstitutivní rovnice, vystupují v nich parametry, které mohou mít formu funkcí stavových proměnných, jež je nutné určit experimentálně. Veličiny vyjadřující příčiny stavů v nich nevystupují. Pro následující kapitoly jsme čerpali ze skript Patobiomechanika srdečněcévního systému [2].

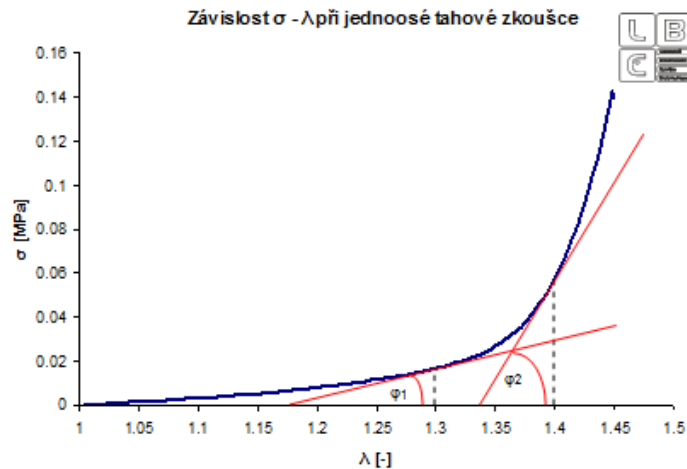
6.1 Hyperelastická, Greenova elasticita

Cauchyho metoda charakterizace materiálu, která je známá z lineární pružnosti infinitesimálních deformací, kde se tímto způsobem zavádí zobecněný Hookův zákon, tedy přímá relace $\sigma = \sigma(\epsilon)$.

Tento postup je pro hledání konstitutivní rovnice nelineárně pružných materiálů značně komplikovaný, protože najít 6 nelineárních rovnic, které mezi sebou pojí 6 nezávislých složek tenzorů deformace a napětí, tak aby vyhověly nelinearitám z experimentálního pozorování není snadné.

Jak můžeme vidět na obrázku 9 cévní stěna vykazuje nelineární chování a tak bu-

deme uvažovat model který popisuje chování nelineárně pružných materiálů.



Obrázek 9: Výsledky jednoosé tahové zkoušky cévní stěny - převzato z [7]

V současnosti je většina nelineárně pružných materiálů při konečných deformacích charakterizována pomocí tzv. Greenova přístupu, který se nazývá hyperelasticitou. Tento přístup je založen na existenci potenciálové funkce, elastický potenciál, se kterou pracujeme jako s volnou energií. Přesněji řečeno jde o přírůstek hustoty vnitřní energie díky deformaci materiálu - tedy o hustotu deformační energie.

Hyperelastický materiál je takový, který je elastický, nesdílí a negeneruje se v něm teplo. zažívá tedy čistě vratné mechanické děje. Přírůstek materiálové hustoty jeho volné energie $\Delta\psi$ (hustota je definována vzhledem k jednotkovému, nezdeformovanému objemu), potom bude během mechanického děje dán pouze přírůstkem vnitřní energie pocházející z práce vnitřních sil.

O materiálu říkáme, že je hyperelastický, jestliže existuje elastický potenciál ze kte-

rého pomocí derivování podle tenzoru deformace získáme tenzor napětí. Elastický potenciál je hustota deformační energie.

Takto vymezený materiál nazýváme hyperelastický. Pro funkci hustoty deformační energie $W(F)$ v referenční konfiguraci klademe $W(F = I) = 0$

6.2 Nestlačitelný hyperelastický materiál

Z experimentů je známo, že elastomery vykazují téměř nestlačitelné chování, to znamená, že mechanické děje v nich probíhají isochoricky, podobné vlastnosti připisujeme i měkkým biologickým tkáním pro jejich velký obsah vody.

Ve chvíli kdy tuto skutečnost zavedeme do našeho výpočtového modelu, získáme významné zjednodušení, neboť se omezí příslušné kinematiky, které může materiál zažít. A sníží se nám tedy počet nezávisle proměnných složek tenzoru deformace.

Tuto volbu si však musíme ospravedlnit na základě pozorování. Jestliže materiál nebude měnit svůj objem a my budeme určovat složky tenzoru napětí z derivací hustoty deformační energie W pak je třeba si uvědomit, že složky napjatostí, které se snaží změnit objem materiálu nelze z W získat derivací, neboť se v těchto složkách nekoná práce a tak ve W nejsou.

Tuto skutečnost obejdeme úpravou výrazu pro hustotu deformační energie o člen vystihující dané omezení, který bude ovšem z počátku neurčitý. Jeho konkrétní hodnota bude určena až v průběhu řešení okrajové úlohy kombinací rovnic rovnováhy a okrajových podmínek. Metoda kterou s ním budeme v konstitutivní rovnici pracovat při určování napjatosti odpovídá metodě neurčitého lagrangerova multiplikátoru.

Pro úplnost uvedme analogie ve formě hlavních strečů a napětí (32).

$$\sigma_i = \lambda_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} - p \quad (32)$$

Kde p je Lagrangerův multiplikátor a po rozepsání do jednotlivých složek získáme (33),(34) a (35).

$$\sigma_{rr} = \lambda_{rR} \cdot \frac{\partial W}{\partial \lambda_{rR}} - p \quad (33)$$

$$\sigma_{\theta\Theta} = \lambda_{\theta\Theta} \cdot \frac{\partial W}{\partial \lambda_{\theta\Theta}} - p \quad (34)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda_{zZ} \cdot \frac{\partial W}{\partial \lambda_{zZ}} - p \quad (35)$$

Podmínka nestlačitelnosti se pak píše ve tvaru (36).

$$\lambda_{rR} \lambda_{\theta\Theta} \lambda_{zZ} = 1 \quad (36)$$

Protože pro matematický model budeme brát hodnoty, z práce kterou publikoval Labrosse [8], budeme používat i stejný vzorec pro hustotu deformační energie W , který si zavedeme v rovnici (37).

$$W = \frac{c_1}{2} \left(e^{c_2 E_{\Theta\Theta}^2 + c_3 (E_{ZZ}^2 + E_{RR}^2)} - 1 \right) \quad (37)$$

Kde c_1 , c_2 a c_3 jsou hodnoty materiálových parametrů. $E_{\Theta\Theta}$, E_{ZZ} a E_{RR} jsou složky Greenova-Lagrangeova tenzoru deformace \mathbf{E} ve směrech Θ, Z a R referenčního válcového souřadnicového systému. Když dosadíme za tenzory deformace získáme rovnici (37) ve tvaru (38).

$$W = \frac{c_1}{2} \left(e^{c_2 (\frac{1}{2}(\lambda_{\theta\Theta}^2 - 1))^2 + c_3 ((\frac{1}{2}(\lambda_{zZ}^2 - 1))^2 + (\frac{1}{2}(\lambda_{rR}^2 - 1))^2)} - 1 \right) \quad (38)$$

7 Odvození

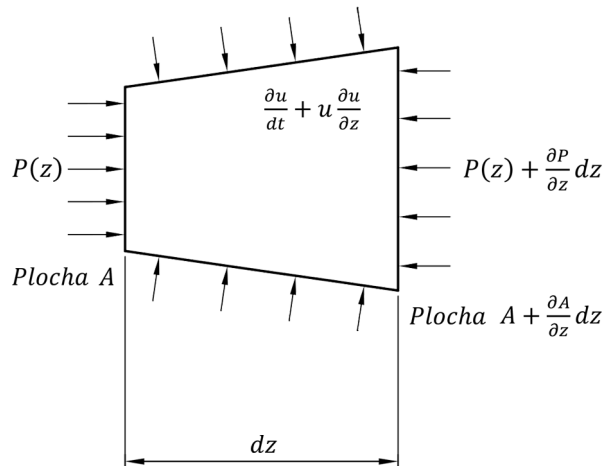
V této části bakalářské práce si odvodíme rovnici pro šíření mechanické vlny v cévě v závislosti na jejím průřezu, jejíž součástí je i rovnice pro rychlost šíření mechanické

vlny. Pro tuto kapitolu jsme čerpali z Fungovy monografie [4], ve které Fung uvedl podobné odvození. V našem případě je doplněn i o jednotlivé mezikroky, které Fung ve svém postupu vynechal.

Stejně jako Fung tedy začneme tím, že si odvodíme základní bilanční rovnice, ze kterých budeme později vycházet. Rovnou na začátek uvedme, že v rámci zjednodušení budeme kapalinu proudící v cévách uvažovat jako neviskózní a tím pádem nám nebudou vznikat žádná smyková napětí od třecích sil.

7.1 Odvození pohybové rovnice

Jako první si odvodíme pohybovou rovnici. Na obrázku 10 vidíme vytknutý element



Obrázek 10: Vytknutý element cévní stěny zatížený silami

cévní stěny, který je zatížený silami. Na levé straně máme tlak P , který působí na plochu průřezu A , výsledná síla nám působí směrem doprava. Na pravé straně máme sílu $(P + \frac{\partial P}{\partial z} dz)(A + \frac{\partial A}{\partial z} dz)$, která působí směrem doleva. Do výsledné rovnice musíme ještě přidat sílu, která po rozkladu sil působících na stěnu působí v axiálním

směru v našem případě směrem doprava $(P + \frac{\partial A}{\partial z} dz)$. Získáme tedy rovnici (39):

$$PA - \left(p + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) \left(A + \frac{\partial A}{\partial z} dz \right) + P \frac{\partial A}{\partial z} dz = 0 \quad (39)$$

Po roznásobení závorky budeme mít rovnici ve tvaru (40).

$$PA - \left(PA + P \frac{\partial A}{\partial z} dz + A \frac{\partial P}{\partial z} dz + \frac{\partial A \partial P}{\partial^2 z} \right) dz^2 = 0 \quad (40)$$

Po odstranění závorky a algebraických úpravách bude mít rovnice tvar (41).

$$- A \frac{\partial P}{\partial z} dz + \frac{\partial A \partial P}{\partial^2 z} dz^2 = 0 \quad (41)$$

Když zanedbáme infinitesimální členy druhého řádu, získáme (42).

$$- A \frac{\partial P}{\partial z} dz = 0 \quad (42)$$

V rovnici (42) znaménko minus značí, že síla působí směrem doleva.

Abychom se dostali k pohybové rovnici, využijeme Newtonova pohybového zákona (43), který uvádí, že

$$F = m \cdot a \quad (43)$$

Do kterého dosadíme následující:

Za sílu F budeme dosazovat sílu působící na vytknutý element $-A \frac{\partial P}{\partial z}$.

Za hmotnost m dosadíme hmotnost vytknutého elementu, kterou získáme vynásobením hustoty ρ a objemu elementu $A \cdot dz$.

Za zrychlení a dosadíme zrychlení, které má kapalina při průtoku vytknutým elementem cévy $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z}$. Výslednou rovnici budeme mít ve tvaru (44).

$$- A \frac{\partial P}{\partial z} dz = \rho \cdot A \cdot dz \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (44)$$

Celou rovnici (44) podělíme členem $A \cdot dx$ a získáme rovnici ve tvaru (45)

$$-\frac{\partial P}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (45)$$

Rovnici vydělíme hustotou ρ a budeme ji mít ve tvaru (46).

$$-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} \quad (46)$$

A následně po převedení všech členů rovnice na jednu stranu, získáme rovnici (47) což je konečný tvar pohybové rovnice ze které budeme následně vycházet.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad (47)$$

7.2 Odvození rovnice bilance hmotnosti

Nyní si odvodíme ještě druhou základní rovnici, kterou budeme potřebovat k odvození rovnice pro šíření mechanické vlny. Je to rovnice bilance hmotnosti.

Vydeme z obrázku 11, na kterém máme vyobrazen vtok a výtok z elementu cévy.

Do vytknutého elementu nám z levé strany vstupuje hmotnostní průtok $\rho \cdot u \cdot A$ a z pravé strany nám vystupuje hmotnostní průtok $\rho \left(uA + \frac{\partial uA}{\partial z} + \frac{\partial A}{\partial t} dz \right)$ Když sestavíme rovnici získáme jí ve tvaru (48).

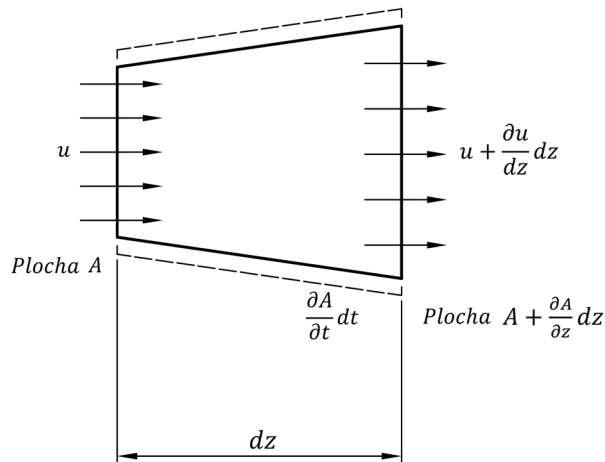
$$\rho \cdot u \cdot A = \rho \left(uA + \frac{\partial uA}{\partial z} + \frac{\partial A}{\partial t} dz \right) \quad (48)$$

Celou rovnici (48) vydělíme hustotou ρ a získáme jí ve tvaru (49).

$$uA = uA + \frac{\partial uA}{\partial z} dz + \frac{\partial A}{\partial t} dz \quad (49)$$

Po algebraických úpravách rovnice (49) a jejím vydělení délkou vytknutého elementu dz , získáváme konečný tvar rovnice kontinuity (50).

$$\frac{\partial uA}{\partial z} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (50)$$



Obrázek 11: Vtok a výtok vytknutým elementem

7.3 Odvození vlnové rovnice

7.3.1 Vyjádření závislosti tlaku P na strečích

Nyní si postupně vyjádříme závislost tlaku P na strečích za pomoci kombinace rovnic statické rovnováhy a konstitutivní teorie.

Vzhledem k tomu, že výpočet i matematický model jsou postavené na základu hustoty deformační energie, znovu si tedy vypíšeme rovnice z kapitol 7.1 Odvození pohybové rovnice a 7.2 Odvození rovnice bilance hmotnosti, kde velká písmena R , H a L značí poloměr, tloušťku stěny a délku před deformací. Malá písmena r , h a l značí ty samé rozměry po deformaci. Lambdy značí streče v jednotlivých směrech. λ_{rR} značí streče na poloměru, $\lambda_{\theta\Theta}$ značí obvodový streč a λ_{zZ} značí streč v axiálním směru.

Dále si z kapitoly o napětí 5.4.2 Napjatost rotačně symetrické skořepiny vypíšeme

rovnice statické rovnováhy.

$$\sigma_{rr} = -\frac{P}{2} \quad (51)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{P \cdot r}{h} \quad (52)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{P \cdot r}{2 \cdot h} + \frac{Fred}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot h} \quad (53)$$

A také rovnice z konstitutivní teorie, které jsou:

$$\sigma_{rr} = \lambda_{rR} \cdot \frac{\partial W}{\partial \lambda_{rR}} - p \quad (54)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda_{\theta\Theta} \cdot \frac{\partial W}{\partial \lambda_{\theta\Theta}} - p \quad (55)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda_{zZ} \cdot \frac{\partial W}{\partial \lambda_{zZ}} - p \quad (56)$$

Z rovnic (51) a (54) si vyjádříme Lagrangerův multiplikátor p .

$$\lambda_{rR} \cdot \frac{\partial W}{\partial \lambda_{rR}} - p = -\frac{P}{2} \quad (57)$$

$$p = \lambda_{rR} \cdot \frac{\partial W}{\partial \lambda_{rR}} + \frac{P}{2} \quad (58)$$

Rovnici (58) dosadíme zbylých dvou rovnic konstitutivní teorie a získáme rovnice (59),(60).

$$\lambda_{\theta\Theta} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{\theta\Theta}} - \lambda_{rR} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{rR}} - \frac{P}{2} = \frac{P \cdot r}{h} \quad (59)$$

$$\lambda_{zZ} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{zZ}} - \lambda_{rR} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{rR}} - \frac{P}{2} = \frac{P \cdot r}{2h} + \frac{Fred}{2\pi \cdot r \cdot h} \quad (60)$$

Do rovnic (59) a (60) dosadíme z rovnic kinematiky deformace (11),(12) a získáme je v následujícím tvaru (61),(62) a jsou tedy vyjádřené vůči nezdeformovaným rozměrům.

$$\lambda_{\theta\Theta} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{\theta\Theta}} - \lambda_{rR} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{rR}} - \frac{P}{2} = \frac{P \cdot R \cdot \lambda_{\theta\Theta}}{\lambda_{rR} \cdot H} \quad (61)$$

$$\lambda_{zZ} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{zZ}} - \lambda_{rR} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{rR}} - \frac{P}{2} = \frac{P \cdot \lambda_{\theta\Theta}}{2 \cdot \lambda_{rR} \cdot H} + \frac{Fred}{2\pi \cdot R \cdot H \cdot \lambda_{\theta\Theta} \cdot \lambda_{rR}} \quad (62)$$

Dále budeme dosazovat z podmínky nestlačitelnosti $\lambda_{rR} = \frac{1}{\lambda_{\theta\Theta} \lambda_{zZ}}$.

$$\lambda_{\theta\Theta} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{\theta\Theta}} - \frac{1}{\lambda_{\theta\Theta} \lambda_{zZ}} \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_{rR}} \Big|_{\lambda_{rR} = \frac{1}{\lambda_{\theta\Theta} \lambda_{zZ}}} \right) - \frac{P}{2} = \frac{P \cdot R \cdot \lambda_{\theta\Theta}^2}{H} \cdot \lambda_{zZ} \quad (63)$$

$$\lambda_{\theta\Theta} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{\theta\Theta}} - \frac{1}{\lambda_{\theta\Theta} \lambda_{zZ}} \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_{rR}} \Big|_{\lambda_{rR} = \frac{1}{\lambda_{\theta\Theta} \lambda_{zZ}}} \right) - \frac{P}{2} = \frac{P \cdot R \cdot \lambda_{\theta\Theta}^2}{2H} \cdot \lambda_{zZ} + \frac{Fred}{2\pi \cdot R \cdot H} \cdot \lambda_{zZ} \quad (64)$$

Tvar závorky v posledních rovnicích značí postup operací, který bude takový, že nejdříve bude provedena derivace podle λ_{rR} a teprve poté bude dosazeno v z podmínky nestlačitelnosti.

Z rovnice (63) si vyjádříme tlak P , který bude ve tvaru (65).

$$P = \frac{\lambda_{\theta\Theta} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{\theta\Theta}} - \frac{1}{\lambda_{\theta\Theta} \lambda_{zZ}} \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_{rR}} \Big|_{\lambda_{rR} = \frac{1}{\lambda_{\theta\Theta} \lambda_{zZ}}} \right)}{\frac{R \cdot \lambda_{\theta\Theta}^2 \cdot \lambda_{zZ}}{H} + \frac{1}{2}} \quad (65)$$

7.3.2 Odvození vlnové rovnice porovnáním bilance hybnosti a hmotnosti

Nyní obrátíme pozornost k rovnicím dynamiky. V bilanci hybnosti (47) zanedbáme (nelineární) konvektivní člen a nadále budeme pokračovat s prostou (parciální) derivací podle času (66). Rovnici (66) budeme derivovat podle prostorové souřadnice a získáme jí ve tvaru(67).

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad (66)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \quad (67)$$

Nyní převedeme (67) na tvar (68).

$$\frac{\partial u^2}{\partial z \partial t} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P^2}{\partial z^2} \quad (68)$$

V rovnici kontinuity (50) si za dosadíme za plochu průřezu A dosadíme, že $A = \pi \cdot r^2$.

$$\frac{\partial u A}{\partial z} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (69)$$

$$\frac{\partial u \pi \cdot r^2}{\partial z} + \frac{\partial \pi r^2}{\partial t} = 0 \quad (70)$$

Za poloměr r si dosadíme z kinematiky deformace a získáme rovnici (70) ve tvaru (71).

$$\frac{\partial u \pi R^2 \lambda_{\theta\Theta}^2}{\partial z} + \frac{\partial \pi R^2 \lambda_{\theta\Theta}}{\partial t} = 0 \quad (71)$$

Když uvážíme, že R a π jsou konstanty dostaneme rovnici (72).

$$\frac{\partial u \lambda_{\theta\Theta}^2}{\partial z} + \frac{\partial \lambda_{\theta\Theta}^2}{\partial t} = 0 \quad (72)$$

Ve členech na levé straně rovnice využijeme pravidla pro derivování součinu složené funkce a získáme rovnici (73).

$$\frac{\partial u}{\partial z} \lambda_{\theta\Theta}^2 + u \frac{\partial \lambda_{\theta\Theta}^2}{\partial z} + 2 \lambda_{\theta\Theta} \frac{\partial \lambda_{\theta\Theta}}{\partial t} = 0 \quad (73)$$

Protože vlnu považujeme za dlouhou a zanedbáme prostorové derivace obvodového streče $\frac{\partial \lambda_{\theta\Theta}}{\partial z} = 0$ a $\frac{\partial \lambda_{\theta\Theta}^2}{\partial z} = 0$. Rovnici navíc ještě podělíme nenulovým členem $\lambda_{\theta\Theta}$ a tak nám přejde na tvar (74).

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{2}{\lambda_{\theta\Theta}} \frac{\partial \lambda_{\theta\Theta}}{\partial t} = 0 \quad (74)$$

V rovnici (74) nyní musíme přejít od $\partial \lambda_{\theta\Theta}$ k ∂P . K tomu využijeme vztah (65) a budeme psát (75).

$$\frac{\partial P}{\partial \lambda_{\theta\Theta}} = \frac{\partial}{\partial \lambda_{\theta\Theta}} \left(\frac{\lambda_{\theta\Theta} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{\theta\Theta}} - \frac{1}{\lambda_{\theta\Theta} \lambda_{zZ}} \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_{rR}} \Big|_{\lambda_{rR} = \frac{1}{\lambda_{\theta\Theta} \lambda_{zZ}}} \right)}{\frac{R \cdot \lambda_{\theta\Theta}^2 \cdot \lambda_{zZ}}{H} + \frac{1}{2}} \right) = P_{\lambda_{\theta\Theta}} \quad (75)$$

Na tomto místě je dobré poznamenat, že k derivaci kterou máme ve vztahu (75) můžeme dospět dvěma způsoby a to:

1. Když uvažujeme, že λ_{zZ} je funkcí $\lambda_{\theta\Theta}$.
2. Když tuto závislost λ_{zZ} na $\lambda_{\theta\Theta}$ neuvažujeme.

Tuto skutečnost jsme dále využili i během výpočtu a získali jsme tak dvoje hodnoty odhadnuté rychlosti šíření pulsní vlny, jedny když jsme závislost uvažovali a druhé bez uvažované závislosti.

Odtud platí (76), které dosadíme do (74) a získáme (77).

$$\partial\lambda_{\theta\Theta} = \frac{\partial P}{P_{\lambda_{\theta\Theta}}} \quad (76)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{2}{\lambda_{\theta\Theta} P_{\lambda_{\theta\Theta}}} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (77)$$

Zaveďme si značení (78).

$$K = \frac{\lambda_{\theta\Theta} P_{\lambda_{\theta\Theta}}}{2} \quad (78)$$

Bilanci hmotnosti potom můžeme psát ve tvaru (79).

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{K} \frac{\partial P}{\partial t} = 0 \quad (79)$$

Nyní ve shodě s tradičním odvozením rychlosti tlakové vlny, provedeme derivaci rovnice (79) podle času. V rovnici (80), kde je zanedbaný člen $\frac{\partial K^{-1}}{\partial t}$.

$$\frac{\partial u^2}{\partial t \partial z} + \frac{1}{K} \frac{\partial P^2}{\partial t^2} = 0 \quad (80)$$

Když přepíšeme rovnici (80) do formy (81), můžeme pravou stranu (80) porovnat s pravou stranou (68).

$$\frac{\partial u^2}{\partial t \partial z} = -\frac{1}{K} \frac{\partial P^2}{\partial t^2} \quad (81)$$

$$\frac{1}{K} \frac{\partial P^2}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P^2}{\partial z^2} \quad (82)$$

Rovnici (82) přepíšeme do tvaru (83).

$$\frac{\partial P^2}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho} \frac{\partial P^2}{\partial z^2} \quad (83)$$

Vlnová rovnice pro podélnou výchylku u jednorozměrného lineárního, izotropního, homogenního kontinua má tvar (84). V této rovnici je c rychlost šíření podélné vlny. Označíme-li E Youngův modul pružnosti prostředí ve kterém se vlna šíří, píšeme (85).

$$\frac{\partial u^2}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial u^2}{\partial x^2} \quad (84)$$

$$\frac{\partial u^2}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial u^2}{\partial x^2} \quad (85)$$

Porovnáním rovnic (83) a (84) se dostáváme k interpretaci členu $\frac{K}{\rho}$. Podle (86) a (87) jde o druhou mocninu rychlosti šíření tlakové vlny během času t ve směru z .

$$\frac{\partial P^2}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial P^2}{\partial z^2} \quad (86)$$

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad (87)$$

8 Numerická simulace

Numerická simulace je vystavěná v programu MAPLE a je rozdělená na tři části.

8.1 Odvození rovnic v MAPLE

V první části je provedené odvození rovnice pro rychlost šíření pulsní vlny. Postup je víceméně stejný jako při odvození, které bylo provedeno zde v BP. V numerické simulaci, ale není odvození zcela kompletní jako v BP, použili jsme pouze ty části, které byly pro správné fungování numerické simulace nezbytně nutné a již jsme se nezabývali postupem, kterým jsme se k nim propracovali.

Do matematického modelu jsme postupně vkládali jednotlivé rovnice, které popisují chování materiálu. Tyto rovnice jsou vkládány pod jednotlivé symboly, které jim

odpovídají. V programu potom nemáme pouze symbolický zápis rovnic, ale rovnice jsou kompletně rozepsané.

8.2 Kvazistatické nafukování válcové trubice

Abychom si mohli stanovit vstupní hodnoty, které budeme potřebovat pro výpočet rychlosti šíření pulsní vlny, musíme znát hodnoty axiálního a obvodového streče v průběhu dynamické deformace. Vzhledem k tomu, že nevíme jak bude dynamická deformace probíhat, nahradíme tyto hodnoty v rámci zjednodušení hodnotami, které získáme z případu nafukování válcové trubice. Budeme numericky simulovat případ nafukování válcové trubice. Získáme tak hodnoty obvodového a axiálního streče v průběhu tlakování, které použijeme ve třetí části numerické simulace. Využijeme k tomu rovnice statické rovnováhy (61) a (62), které budeme mít v programu MAPLE v rozepsané formě. Rovnice upravíme převedením pravé strany na levou tak, aby se pravá strana rovnic rovnala nule. V numerické simulaci je máme pro lepší přehlednost značené jako "obvodová" a "axiální".

Výpočet jsme provedli za pomoci hledání nejmenších čtverců pro rovnice "obvodová" a "axiální" a funkce "NLPsolve" pro řešení nelineárních problémů. Hodnoty jsme počítali pro 7 hodnot počátečního axiálního streče λ_{zZ} od 1,0 až do 1,3 s krokem 0,05. Nafukování trubice jsme simulovali pro tlaky P od 0 do 16 kPa. Výsledky pro jednotlivé počáteční předpětí v průběhu tlakování, máme zobrazené ve formě grafu a budeme se jim věnovat v kapitole "Výsledky".

8.3 Výpočet rychlosti šíření pulsní vlny

Ve třetí části počítáme rychlost pulsní vlny. Do vzorce, který jsme získali v první části numerické simulace vkládáme odpovídající hodnoty z druhé části. Rychlosti

máme spočítané pro 7 jednotlivých hodnot axiálního streče v závislosti na tlaku od 0 do 16 kPa.

Pro celý výpočet rychlosti šíření pulsní vlny včetně výpočtu vstupních hodnot jsme použili údaje 38-mi letého muže jehož poloměr tepny byl $R=5,3$ mm, tloušťka stěny $H=1,22$ mm, a materiálové hodnoty $c_1=14,7$ kPa, $c_2=3,04$ a $c_3=7,38$. Pro hustotu ρ jsme použili hustotu vody $\rho = 1000 \frac{kg}{m^3}$. Tyto údaje jsme převzali z vědecké práce M.R.Labrosse [8].

Následně byl výpočet rychlosti zpřesněn, když jsme uvažovali závislost obvodového streče na streči axiálním.

9 Výsledky

V této části bakalářské práce si okomentujeme výsledky, které jsme získali výpočtem numerické simulace. Pro výsledky přijmeme následující konvenci, ve které si cévy pro výpočet rozdělíme podle počátečního předpětí:

$\lambda_{zZ}=1,00$ bude značená oranžovou barvou

$\lambda_{zZ}=1,05$ bude značená červenou barvou

$\lambda_{zZ}=1,10$ bude značená fialovou barvou

$\lambda_{zZ}=1,15$ bude značená tmavě modrou barvou

$\lambda_{zZ}=1,20$ bude značená světle modrou barvou

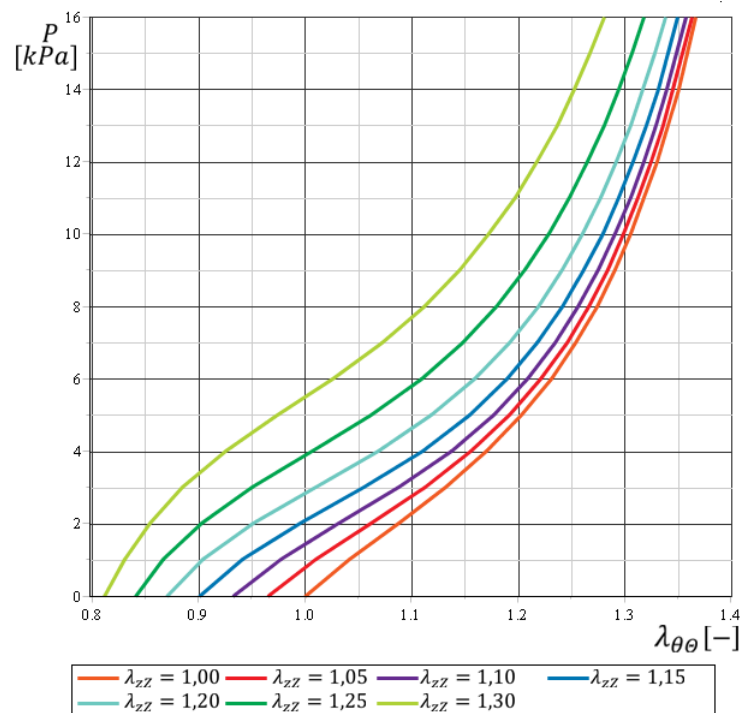
$\lambda_{zZ}=1,25$ bude značená tmavě zelenou barvou

$\lambda_{zZ}=1,30$ bude značená světle zelenou barvou

9.1 Obvodový streč

V grafu na obrázku 12 ve kterém máme vynesenu závislost streče v obvodovém směru na tlaku P pro sedm jednotlivých počátečních předpětí můžeme vidět, že nejnižší obvodový streč nastává v případě, když axiální streč bude největší. Je tedy vidět, že s klesajícím axiálním strečem, obvodový streč narůstá až na počáteční hodnotu $\lambda_{\theta\theta} = 1$.

Je logické, že jak se se vzrůstajícím tlakem bude céva nafukovat bude narůstat i ob-

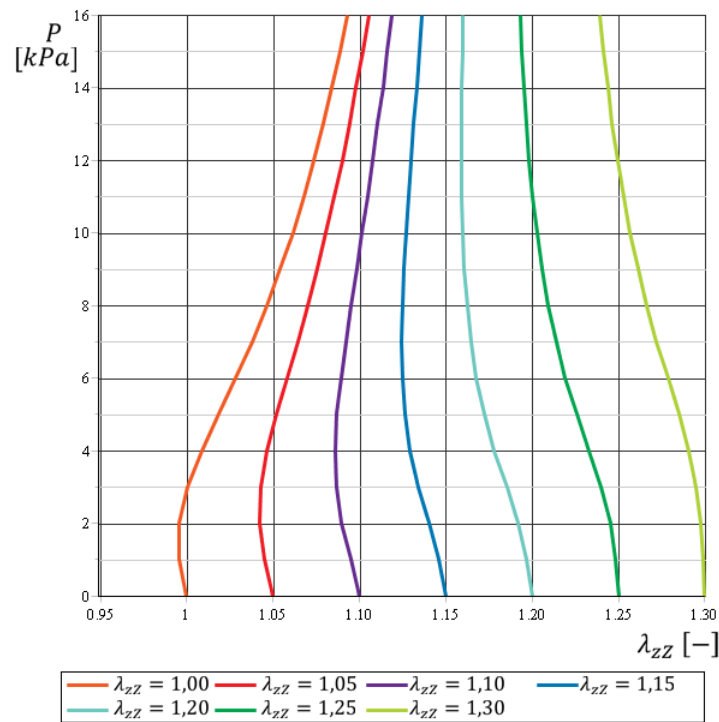


Obrázek 12: Průběh obvodového streče v průběhu tlakování

vodový streč ve stěně cévy. Na obrázku 12 můžeme vidět, že pro cévy které mají vyšší axiální předpětí a tedy nižší počáteční obvodový streč, narůstá obvodový streč z počátku rychleji a okolo hodnoty tlaku $P=6$ kPa již roste pomaleji. Cévy s vyšším

počátečním obvodovým strečem mají celý průběh během tlakování strmější a tedy nárůst obvodového streče není tak velký. Z grafu je nadále vidět, že během tlakování obvodový streč narůstá od 37% do 46%.

9.2 Axiální streč



Obrázek 13: Průběh axiálního streče v průběhu tlakování

Na grafu (obrázek 13) na kterém máme vynesenu závislost axiální streče na tlaku P můžeme vidět, že v cévách, které měly nižší hodnoty axiálního předpětí značené barvami oranžová, červená a fialová, při průběhu tlakování axiální streč nejdříve klesá a teprve poté začíná narůstat. Pro cévu která měla axiální streč $\lambda_{zz} = 1$ (oranžová) se tento pokles odehrává při tlacích mezi $P=0$ kPa až $P=1,75$ kPa od této hodnoty už axiální streč pouze narůstá. Pro cévu s axiálním strečem $\lambda_{zz} = 1,05$

(červená) je to mezi hodnotami $P=0$ kPa až $P=3$ kPa a pro cévu s axiálním strečem $\lambda_{zZ} = 1,1$ (fialová) je tento pokles mezi hodnotami tlaku $P=0$ kPa až $P=5$ kPa.

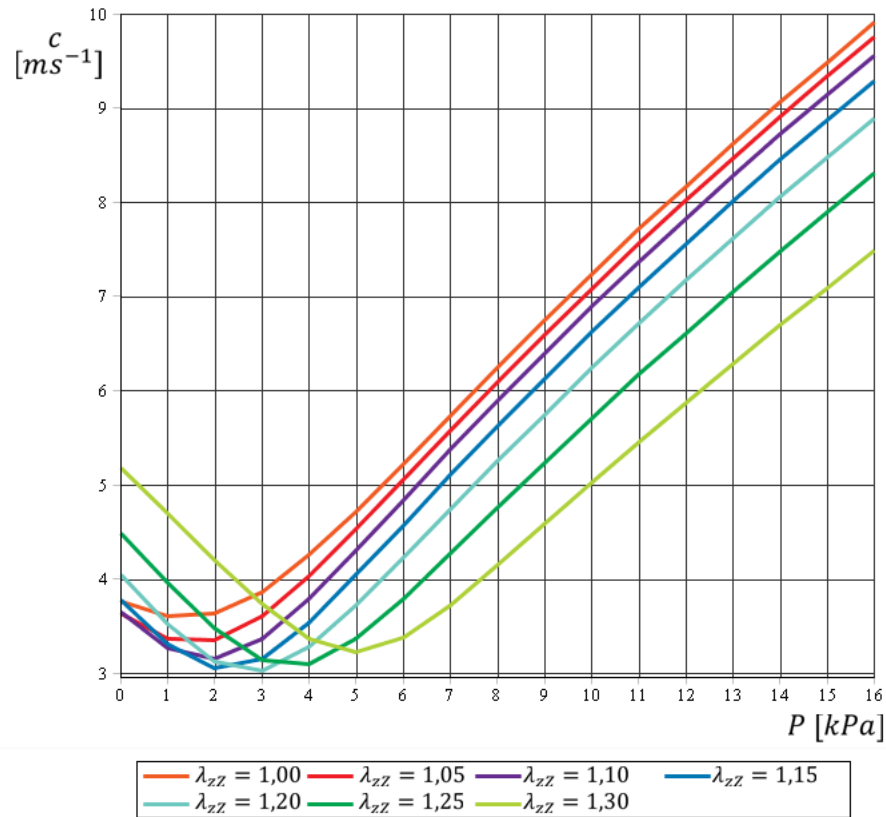
Céva která má počáteční předpětí $\lambda_{zZ} = 1,15$ (tmavě modrá) je na pomezí mezi cévami, které mají menší a větší počáteční předpětí. Můžeme vidět, že nejdříve předpětí klesá až do tlaku $P=7$ kPa od této hodnoty tlaku axiální streč opět stoupá, ale už ne tak výrazně, aby opět přerostl přes počáteční hodnotu $\lambda_{zZ} = 1,15$.

Pro cévy, které měly vyšší hodnoty počátečního axiálního streče od $\lambda_{zZ} = 1,15$ až $\lambda_{zZ} = 1,3$ značené barvami: světle modrá, tmavě zelená a světle zelená v průběhu tlakování axiální streč pouze klesá a to o 4% až 7% .

9.3 Rychlost pulsní vlny se závislostí λ_{zZ} na $\lambda_{\theta\Theta}$

Na obrázku 14 máme v grafu vynesenu rychlost šíření pulsní vlny v aortě v závislosti na tlaku P . Tento je výsledkem druhého výpočtu, ve kterém jsme uvažovali závislost axiálního streče λ_{zZ} na streči obvodovém $\lambda_{\theta\Theta}$ v rámci stanovení vzorce pro rychlost šíření pulsní vlny. Dále zde bude uveden i graf z výpočtu kde jsme tuto závislost neuvažovali a budeme tak mít možnost porovnat o kolik jsme výpočet touto úvahou zpřesnili.

Na grafu (obrázek 14) je vidět, že pro všechny hodnoty počátečního předpětí rychlosti nejprve klesají a teprve poté začínají opět stoupat. Protože rychlost pulsní vlny je závislá na napětí, které je v cévě je tedy logické, že ve chvíli kdy céva není tak strečována je v ní i menší napětí a rychlost tedy bude menší. Lze vidět že cévy, které měly menší počáteční předpětí a jsou značené barvami: oranžová, červená a fialová mají menší pokles rychlosti a to při nižších tlacích. Tento fakt je způsobený tím, že axiální streč pro malé hodnoty předpětí poklesl jen lehce a pak



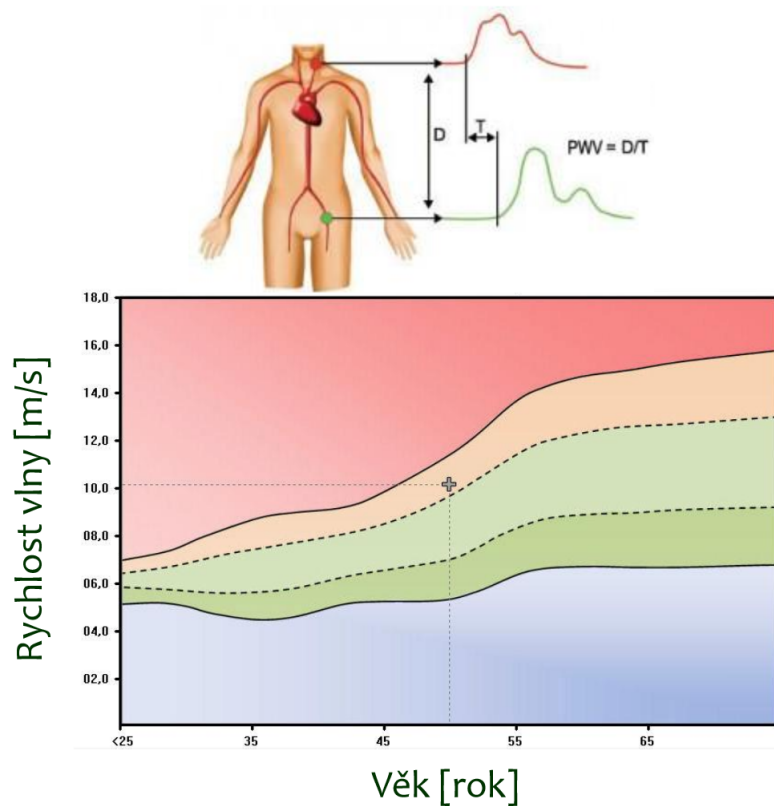
Obrázek 14: Rychlost šíření pulsni když $\frac{\partial \lambda_{zz}}{\partial \lambda_{\theta\theta}} \neq 0$

při vzrůstajícím tlaku už jen narůstal, stejně tak jako streč v obvodovém směru, který narůstá během tlakování pořád. Napětí v cévách tak pokleslo pouze na krátký okamžik a pak už rostlo a s ním i rychlost šíření pulsni vlny.

Pro cévy, které měly vyšší hodnoty počátečního axiálního předpětí (tmavě modrá, světle modrá, tmavě zelená a světle zelená), klesá rychlost výrazněji a opět stoupat začne až při vyšších tlacích než je tomu u cév, které byly předepjaty méně. To je způsobené tím, že hodnoty axiálního streče pro cévy, které byly více předepjaty, v průběhu tlakování klesá a s ním klesá i napětí ve stěně cévy. Rychlost bude

narůstat až v momentě kdy začne napětí opět růst vlivem obvodového streče, který stoupá po celou dobu tlakování.

Abychom věděli nakolik je náš odhad rychlostí realistický, musíme výsledky porovnat s výsledky jiného měření, nebo výpočtu. Pro porovnání použijeme výsledky jednoduchého měření, které uvádí Lukáš Horný ve své prezentaci Fyziologie oběhové soustavy [12]. Jak je zobrazeno na obrázku 15 měření je založeno na měření času, během kterého pulsni vlna dorazí ke krční tepně (krkavice) a ke kyčelní tepně. Uražená vzdálenost je pak vydělena změřeným časem a je tak získána průměrná rychlost šíření pulsni vlny. Když naše odhadnuté rychlosti šíření pulsni vlny srovnáme



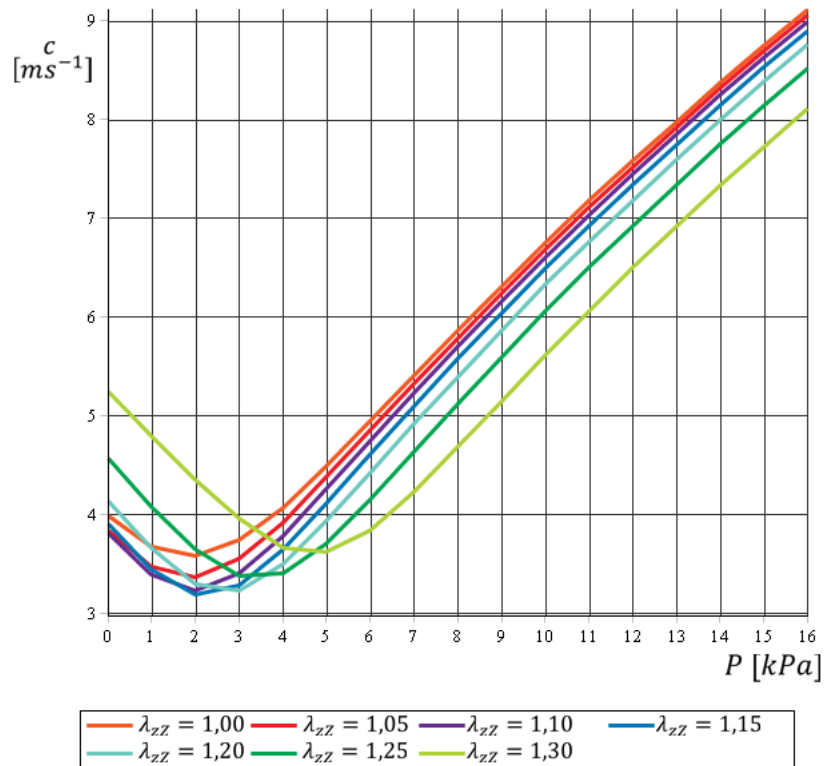
Obrázek 15: Měření rychlosti šíření pulsni vlny - převzato z [12]

s naměřenými hodnotami můžeme vidět, že pro člověka kterému je 38-let vychází naměřená hodnota rychlosti šíření pulsní vlny přibližně na $5 - 9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Naše odhadované hodnoty se pohybují v rozmezí $3 - 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Vzhledem k tomu jaká a kolik zjednodušení bylo v průběhu výpočtu přijato, můžeme naše odhadnuté hodnoty považovat za reálné, protože se liší pouze v řádu jednotek $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ od experimentálně naměřených hodnot.

Výsledky můžeme dále porovnat s měřením, které bylo provedeno a popsáno v práci "Porovnání neinvazivních metod pro měření rychlosti šíření pulsní vlny pomocí FSI simulace a in vivo dat" [10]. V práci je uvedeno, že měření bylo provedeno ve spolupráci se 40 lidmi, z toho 3 byli z měření následně vyřazeni. Věková skupina byla 47 ± 5 let, které byl naměřen následující krevní tlak: při diastole 78.2 ± 11.4 mmHg respektive 136 ± 14.7 mmHg při systole. Tyto tlaky odpovídají $10,43 \pm 1.52$ kPa při diastole respektive 18.13 ± 1.96 kPa při systole. Během simulace dosáhli metodou PU výsledků $8.15 \pm 2.81 \text{ m/s}^{-1}$ a metodou QA výsledků $6.00 \pm 1.93 \text{ m/s}^{-1}$. Dále můžeme porovnávat s disertační prací ing. Vratislava Fabiána [11], ve které jsou naměřené hodnoty od $7 - 9 \text{ m/s}^{-1}$ pro 15 ze 40 měřených případů a hodnoty $9,8 - 12 \text{ m/s}^{-1}$ pro 14 ze 40 měřených případů. Na grafu (obrázek 14) můžeme vidět, že i přes řadu zjednodušení dosahujeme řádově stejných hodnot.

9.4 Rychlost pulsní vlny bez závislosti λ_{zZ} na $\lambda_{\theta\Theta}$

Pro porovnání zde uvádíme i výsledky prvního výpočtu, kde jsme při odvození vzorce pro rychlost šíření pulsní vlny neuvažovali závislost λ_{zZ} na $\lambda_{\theta\Theta}$. Celý vzorec je tak o hodně jednodušší, nicméně když porovnáme oba výstupní grafy výpočtů, které máme na obrázcích 14 a 16 můžeme vidět, že dosahujeme velmi podobných výsledků. V tomto méně přesném výpočtu (obrázek 16), můžeme vidět, že mezi



Obrázek 16: Rychlost šíření pulsů když $\frac{\partial \lambda_{zz}}{\partial \lambda_{\theta\theta}} = 0$

jednotlivými cévami, které měly jiné hodnoty počátečního předpětí jsou pro jednotlivé tlaky menší rozdíly v dosahované rychlosti. A to jak na začátku tak i na konci tlakování, kde v přesnějším výpočtovém modelu už byly mezi jednotlivými cévami výraznější rozdíly. Nicméně vzhledem k tomu, že se jedná o hodnoty, které jsou na kraji oboru hodnot, je jejich přesnost v obou případech diskutabilní.

Dále můžeme vidět, že v rámci tohoto výpočtu dosahuje šíření pulsů vlny celkově nižších rychlostí, než v případě přesnějšího výpočtu. Ale v případě porovnání s výsledky prací [10] a [11] je máme pořád řádově stejné. A tak i v tomto případě jsme na základě simulace získali vzhledem ke zjednodušení poměrně přesné výsledky.

10 Přijaté předpoklady

Na závěr bakalářské práce si ještě jednou zopakujeme zjednodušení a předpoklady, které jsme v průběhu přijali. Předpokládali jsme že:

- Céva zažívá pouze malé deformace.
- Vlna, která se aortou šíří bude dlouhá tedy $\frac{\partial r}{\partial z} \approx 0.1$ a proto jsme uvažovali $\frac{\partial r}{\partial z} = 0$.
- Aortu jsme si aproximovali tenkostěnnou válcovou trubicí, která má to celé tloušťce stěny stejné napětí.
- Z důvodu velkého obsahu vody považujeme cévní stěnu jako nestlačitelnou, tedy $\lambda_{rR} \cdot \lambda_{\theta\Theta} \cdot \lambda_{zZ} = 1$

Kinematika deformace bude jednoduchá a omezíme jí tak pouze na deformaci tloušťky stěny H , poloměru R a délky Z , tedy

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda_{rR} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\theta\Theta} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{zZ} \end{bmatrix}$$

protože neuvažujeme zkroucení trubice jsou na příslušných místech matice 0.

- Protože jsme neznali hodnoty strečů dynamické deformace, nahradili jsme je hodnotami ze simulace nafukování válcové trubice.
- V průběhu odvození jsme zanedbali konvektivní část derivace rychlosti proudění podle času $u \cdot \frac{\partial u}{\partial z}$, protože jsme předpokládali, že rychlost proudění je v porovnání s rychlostí vlny malá.
- Krev proudící v krvi jsme považovali za nevažkou kapalinu, ve které nevznikají třecí síly.

11 Závěr

V této bakalářské práci jsme si na základě rovnice hybnosti, rovnice bilance hmotnosti, rovnic statické rovnováhy a rovnic konstitutivní teorie odvodili vzorec pro rychlost šíření pulsní vlny v tenkostěnné válcové trubici (aortě). Na základě tohoto odvození vznikl numerický model ve výpočtovém programu MAPLE. Protože jsme neznali hodnoty strečů dynamické deformace, nahradili jsme je hodnotami z případu nafukování válcové trubice. A po jejich dosazení do numerického modelu, jsme získali vypočítané hodnoty rychlosti šíření pulsní vlny ve válcové trubici pro různá počáteční předpětí a různé tlaky, které v aortě působí. Aby bylo možné výpočet realizovat, přijali jsme několik zjednodušení, uvedených na začátku a zde na konci BP. Numerický model byl nadále zpřesněn o závislost axiálního streče na streči obvodovém. I přes řadu zjednodušení, které byly v průběhu přijaty, jsme získali reálné hodnoty, které se liší pouze v řádu jednotek od hodnot získaných experimentálním měřením.

Pro zde uvedený obor hodnot představuje matematický model nástroj, který může sloužit pro ověření experimentálně naměřených hodnot a tedy správného nastavení parametrů experimentu, před dalším měřením. Splnili jsme tak všechny úkoly, které nám byly v rámci bakalářské práce zadány.

Matematický model, může být dále využíván pro rychlý výpočet rychlosti šíření pulsní vlny v laboratorních úlohách ve kterých není vyžadována vysoká přesnost vstupních hodnot. Nebo může být nadále zpřesňován postupným odstraňováním jednotlivých zjednodušení, které byly uvažovány pro výpočet v této bakalářské práci.

12 Seznam použitých obrázků

Obrázek 1: Schéma malého a velkého oběhu - převzato z [9]	12
Obrázek 2: Schéma stavby cévní stěny - převzato z [9]	14
Obrázek 3: Převod nezdeformovaného vektoru na zdeformovaný - převzato z [6].	17
Obrázek 4: Porovnání válcových a kartézských souřadnic	18
Obrázek 5: Válcová trubice před a po deformaci	19
Obrázek 6: Uvedení tělesa do stavu rovnováhy po myšleném řezu - převzato z [6]	23
Obrázek 7: Napětí v uzavřené tenkostěnné trubici	25
Obrázek 8: Rovnováha sil po odříznutí části válcové trubice	25
Obrázek 9: Výsledky jednoosé tahové zkoušky stěny aorty - převzato z [7]	27
Obrázek 10: Vytknutý element cévní stěny zatížený silami	30
Obrázek 11: Vtok a výtok vytknutým elementem	33
Obrázek 12: Průběh obvodového streče v průběhu tlakování	41
Obrázek 13: Průběh axiálního streče v průběhu tlakování	42
Obrázek 14: Rychlost šíření pulsní když $\frac{\partial \lambda_{zz}}{\partial \lambda_{\theta\theta}} \neq 0$	44
Obrázek 15: Měření rychlosti šíření pulsní vlny - převzato z [12]	45
Obrázek 16: Rychlost šíření pulsní když $\frac{\partial \lambda_{zz}}{\partial \lambda_{\theta\theta}} = 0$	47

13 Seznam použité literatury

1. **KONVIČKOVÁ, Svatava, Jaroslav VALENTA a Přemysl JANÍČEK.** Biomechanika srdečně cévního systému člověka. Vyd. 2. Praha: Česká technika - nakladatelství ČVUT, 1997, 275 s. ISBN 80-010-3425-9
2. **HORNÝ, Lukáš.** Patobiomechanika srdečněcévního systému I. Díl. Praha: Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky FS ČVUT v Praze, 2013.
3. **MICHALEC, Jiří.** Pružnost a Pevnost 1. Praha: České vysoké učení technické, 2010. ISBN 9788001042243.
4. **FUNG, Yuan-Cheng.** Biomechanics: Motion, Flow, Stress, and Growth. USA: Springer, 1998. ISBN 978-0387971247.
5. **KŘEN, Jiří, Josef ROSENBERG a Přemysl JANÍČEK.** Biomechanika. 2. vyd. Plzeň: Západočeská univerzita, 2001, 380 s. ISBN 80-708-2792-0
6. **HORNÝ, Lukáš.** Prezentace III.pdf: Biomechanika srdečněcévní soustavy a konstitutivní modelování [online]. [cit. 2015-05-23]. Dostupné z: <http://users.fs.cvut.cz/~hornyluk/files/Biomechanikasrdecnecevni-sosutavy-konstitutivnichovani-cev-III.pdf>
7. **HORNÝ, Lukáš.** Biomechanika oběhové soustavy: Biomateriály [online]. 2009 [cit. 2015-05-24]. Dostupné z: [www.biomechanika.cz/materials/Biomechanika obehove soustavy - Biomaterialy 2009.ppt](http://www.biomechanika.cz/materials/Biomechanika%20obehove%20soustavy%20-%20Biomaterialy%202009.ppt)
8. **LABROSSE, Michel R., Eleanor R. GERSON, John P. VEINOT a Carsten J. BELLER.** Mechanical characterization of human aortas from pressurization testing and a paradigm shift for circumferential residual stress. Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical materials. 2013, (17)
9. **ČIHÁK, Radomír.** Anatomie 3. 2., upr. a dopl. vyd. Praha: Grada, 2004, 673 s. ISBN 80-247-1132-X

10.**SWILLENS, Abigail, Liesbeth TAELEMAN, Joris DEGROOTE, Jan VIERENDEELS a Patrick SEGERS.** Comparison of Non-Invasive Methods for Measurement of Local Pulse Wave Velocity Using FSI-Simulations and In Vivo Data. *Annals of Biomedical Engineering*. 2013, 41(13)

11.**FABIÁN, Vratislav.** NEINVAZIVNÍ MĚŘENÍ KREVNÍHO TLAKU ZALOŽENÉ NA OSCILOMETRICKÉM PRINCIPU. Praha, 2012. Dostupné z: http://www.i4control.eu/Ke_stazeni/Disertace_Fabian.pdf. Disertační práce. FEL ČVUT

12.**HORNÝ, Lukáš.** Fyziologie oběhové soustavy [online] [cit. 2015-05-24]. Dostupné z: <http://users.fs.cvut.cz/~hornyluk/files/02-Patobiomechanika-Fyziologie-obehove-soustavy.pdf>