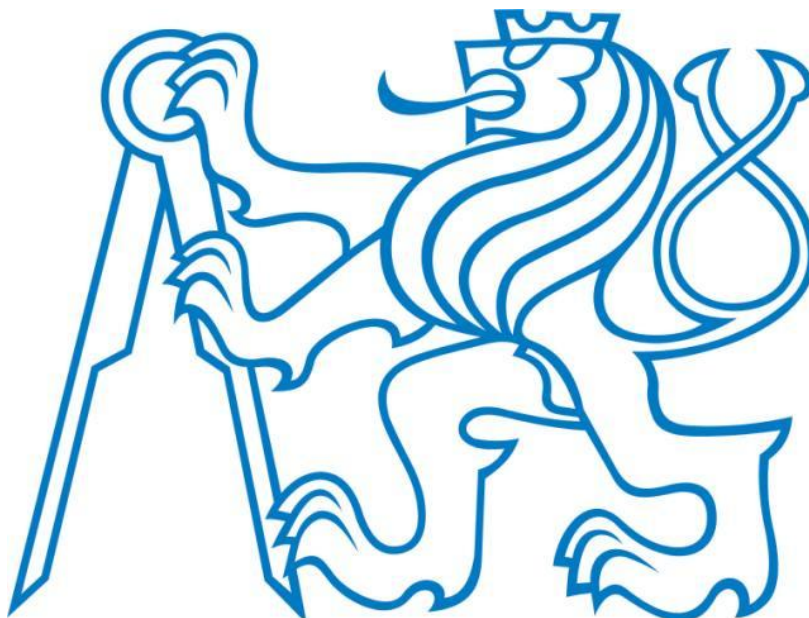


ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta strojní

Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky

Odbor pružnosti a pevnosti



**Vliv teploty na mechanické vlastnosti sendvičových
konstrukcí**

**Influence of temperature on mechanical properties of sandwich
structures**

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vypracovala: **Renáta STRMISKOVÁ**

Vedoucí: **Ing. Ctirad NOVOTNÝ, Ph.D.**

2015

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně. Veškeré použité podklady, ze kterých jsem čerpala informace, jsou uvedeny v seznamu použité literatury a citovány v textu podle normy ČSN ISO 690.

V Praze dne 29. 6. 2015

.....

Jméno a příjmení studentky

Anotační list

Jméno autora: Renáta Strmisková

Název BP: Vliv teploty na mechanické vlastnosti sendvičových konstrukcí

Anglický název BP: Influence of temperature on mechanical properties of sandwich structures

Akademický rok: 2014/2015

Ústav/odbor: Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky / Odbor pružnosti a pevnosti

Vedoucí BP: Ing. Ctirad Novotný, Ph.D.

Bibliografické údaje: počet stran: 55

počet obrázků: 18

počet tabulek: 2

počet příloh: 4 (elektronicky)

Klíčová slova: Teplota, sendvičové nosníky, laminátová teorie, sendvičová teorie

Keywords: Temperature, sandwich beams, laminate theory, sandwich theory

Anotace: Tato práce se zabývá sendvičovými nosníky, zejména vlivem teploty na změnu jejich vlastností při zatěžování. Zahrnuje laminátovou i sendvičovou teorii výpočtu průhybu při zatěžování na tzv. třibodový ohyb. Vedle teorie je tato práce doložena i samotnými experimenty, a to experimenty bez vlivu teploty, s teplotou i tlakovou zkoušku na ověření materiálových parametrů jádra.

Abstract: This project concerns sandwich beams and, in particular, the influence of temperature on their properties while loaded with a burden, including the laminate and sandwich theory of calculating the camber of beams burdened using the so-called three point bending. The project is also supported by several experiments, namely, with and without the influence of temperature and a pressure test to verify material parameters of the core.

Poděkování

Děkuji Ing. Ctiradu Novotnému, Ph. D. za odborné vedení práce, věcné připomínky, dobré rady a vstřícnost při konzultacích a vypracování bakalářské práce.

Seznam použitého značení

Symbol	Jednotka	Název
a	m^{-1}	součinitel úměrnosti
a_1, a_2	m	rozměry nosníku
a_x, a_y, a_z	$m \cdot s^{-2}$	složky zrychlení
A	m^2	plocha
\mathbf{A}	$N \cdot m^{-1}$	matice tahové tuhosti
\mathbf{A}^*	$N^{-1} \cdot m$	inverzní matice tahové tuhosti
\mathbf{A}^T	$N \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$	matice tahové tuhosti s vlivem teploty
b	m	vzdálenost
\mathbf{B}	$N \cdot m^{-1}$	matice vazební tuhosti
\mathbf{B}^*	$N^{-1} \cdot m$	inverzní matice vazební tuhosti
\mathbf{B}^T	$N \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$	matice vazební tuhosti s vlivem teploty
c	$Pa \cdot m^{-1}$	substituční konstanta
\mathbf{C}	Pa	matice tuhosti
\mathbf{D}	N	matice ohybové tuhosti
\mathbf{D}^*	N^{-1}	inverzní matice ohybové tuhosti
D_{yz}	m^4	deviační moment k osám y a z
E	Pa	modul pružnosti
\mathbf{F}	$N \cdot m^{-1}$	matice smykové tuhosti
F_1, F_2, F_3	N	síly
G	Pa	modul pružnosti ve smyku
h	m	tloušťka laminátu
h_k	m	tloušťka k-té vrstvy laminátu
J_z	m^4	kvadratický moment průřezu k neutrální ose
k	m^{-1}	křivost
M	$N \cdot m$	moment vnitřních sil
M_o	$N \cdot m$	ohybový moment
N	N	normálová síla
q	$N \cdot m^{-1}$	spojité zatížení
\mathbf{Q}	Pa	matice mimoosové tuhosti
Q_s	N	vektor vnějších sil
R_A, R_B	N	síly v podporách
S	m	statický moment
\mathbf{S}	Pa^{-1}	matice poddajnosti

t	s	čas
T	N	posouvající síla
ΔT	K	teplotní rozdíl
u, u_o	m	posuv ve směru x
u_1, u_2, u_3	m	posunutí
U	J	vnitřní energie
v, v_o	m	posuv ve směru y
V	m^{-3}	objem
w, w_o	m	průhyb (posuv ve směru z)
W_o	m^3	průřezový modul v ohybu
X, Y, Z	$N \cdot m^{-3}$	složky objemových sil
α	K^{-1}	součinitel teplotní roztažnosti
γ		zkos
ε		poměrné prodloužení (deformace)
ε_m		deformace střední roviny laminátu
ε^M		mechanická deformace
ε^T		deformace od změny teploty
λ	$J \cdot m^{-3}$	hustota deformační energie
ν		Poissonovo číslo
ρ	$kg \cdot m^{-3}$	hustota
σ	Pa	napětí
τ_z	Pa	smykové napětí
ψ_x, ψ_y	rad	sklon střední roviny laminátu

Obsah

1.	Úvod.....	10
2.	Ohyb tenkých nosníků	11
2.1	Základní teorie ohybu tenkých nosníků	11
2.2	Ohybový moment a posouvající síla	11
2.2.1	Metoda řezu	12
2.2.2	Schwedlerova věta a její odvození.....	14
2.3	Napětí při ohybu.....	15
2.3.1	Poloha neutrální osy.....	16
2.4	Deformační energie při prostém ohybu	18
2.5	Vliv posouvající síly na napjatost při ohybu	19
2.5.1	Rozložení smykových napětí v nosníku.....	19
2.6	Průhyb tenkých nosníků	21
3.	Laminátové a sendvičové nosníky.....	22
3.1	Základní pojmy a vztahy u vícevrstevných nosníků.....	23
3.1.1	Hookeův zákon	24
3.2	Laminátová teorie.....	25
3.2.1	Předpoklady laminátové teorie	25
3.2.2	Laminátová teorie bez uvažování smyku	26
3.2.3	Laminátová teorie s uvažováním příčné smykové deformace.....	34
3.3	Sendvičová teorie	35
3.3.1	Předpoklady sendvičové teorie	35
3.3.2	Sendvičová teorie s uvažováním smyku.....	36
3.3.3	Sendvičová teorie bez uvažování smyku.....	39
3.4	Vliv teploty	39
4.	Experimenty	41
4.1	Parametry zadaného sendvičového nosníku pro experimenty.....	41

4.1.1	Experiment č. 1 – zatěžování sendvičového nosníku za normální teploty.	42
4.1.2	Experiment č. 2 - zatěžování sendvičového nosníku s vlivem teploty.....	44
4.1.3	Experiment č. 3 – určení tlakového E modulu jádra s vlivem teploty	47
5.	Analytický výpočet průhybu	51
5.1	Výpočet průhybu dle jednotlivých teorií.....	51
5.2	Výpočet průhybu – srovnání s experimentem č. 1	52
5.3	Výpočet průhybu – srovnání s experimentem č. 2.....	52
6.	Závěr	54
7.	Zdroje.....	55

1. Úvod

Sendvičové konstrukce v dnešní době v mnoha případech nahrazují ty železné. Sendviče a kompozitní materiály obecně jsou hojně využívané zejména kvůli nízké hmotnosti s ohledem na zachování potřebných vlastností. Nejvíce se používají v letectví, v automobilovém i lodním průmyslu, ve stavebnictví nebo pro výrobu rotorů větrných elektráren. Kompozit je materiál skládající se ze dvou nebo více substancí s rozdílnými vlastnostmi, které dohromady dávají výslednému výrobku nové vlastnosti, které nemá sama o sobě žádná z jeho součástí. Právě nízká hmotnost usnadňuje přepravu a rychlou a snadnou montáž i demontáž takovýchto výrobků. Kompozitní materiály se výrazněji nedeformují, jejich mez elasticity odpovídá mezi pevností. Mají také velmi vysokou mez únavy a jsou stabilní a spolehlivé. Další výhodou je i absolutní korozivzdornost, tepelně izolační vlastnosti a při použití speciálních nátěrů i dobrá ohnivzdornost. Kompozity stárnou v závislosti na vlhkosti a teplotě.

V této práci je postupně popsána teorie ohybu tenkých nosníků, včetně vlivu posouvající síly a ohybového momentu. Dále je tu popsáno napětí při ohybu i deformační energie. Teorii tenkých nosníků uzavírá vzorec pro odvození průhybu tenkých nosníků. Hlavní kapitolou této práce jsou laminátové a sendvičové nosníky. Pro výpočty jsou zde odvozeny dvě teorie a to laminátová a sendvičová, bez smyku i s vlivem příčné smykové deformace. Tyto teorie jsou doplněny kapitolou zabývající se vlivem teploty. Po vztazích potřebných k výpočtu průhybu podle jednotlivých teorií jsou zařazeny experimenty. První experiment se zabývá zatěžováním sendvičového nosníku za normální teploty. U druhého experimentu jsou nosníky před samotným zatěžováním ohřáty a jako třetí experiment jsme provedli tlakovou zkoušku pěny kvůli zjištění tlakového modulu jádra za zvýšené teploty. V závěru práce se nacházejí tabulky s výsledky podle jednotlivých teorií i podle experimentů.

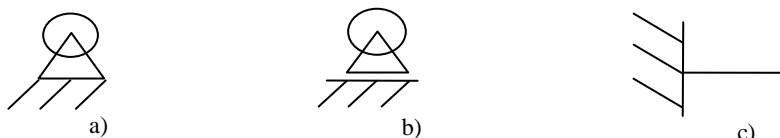
Cílem této práce je porovnat početní výsledky podle jednotlivých teorií s naměřenými experimenty.

2. Ohyb tenkých nosníků

2.1 Základní teorie ohybu tenkých nosníků

Pod pojmem nosník si můžeme představit každý přímý prut, namáhaný převážně na ohyb, např. hřídele. Ohyb je druh namáhání, kdy se právě přímé pruty zakřívují do rovinné nebo prostorové křivky. V této práci budeme předpokládat, že nosník může být zatížen osamělými silami, které jsou kolmé k ose prutu, osamělými silovými dvojicemi nebo spojitým zatížením. V praxi je potom každé zatížení spojitě, protože nelze přesně realizovat sílu působící v jediném bodě. Pokud je však délka, na které působí zatížení malá, lze ji zanedbat a uvažovat osamělou sílu.

Vlastnosti nosníku záleží na tom, jak je nosník uložen. Pro tuto práci budou podstatné tři základní typy uložení, které jsou však zidealizované. *Pevnou kloubovou podporu* (Obr. 2.1a), která není posuvná a je schopná zachytit sílu libovolného směru, ale není schopná zachytit žádný moment. *Posuvnu kloubovou podporu* (Obr. 2.1b), která je schopná zachytit síly kolmé ke směru posuvu a jako další budeme používat *tuhé vetknutí* (Obr. 2.1c), které je schopné zachytit jak libovolnou sílu, tak libovolný moment. Pokud známe celkové uložení nosníku, můžeme rozhodnout o tom, zda se jedná o staticky určitý či staticky neurčitý nosník.



Obr. 2.1 – Typy uložení nosníků

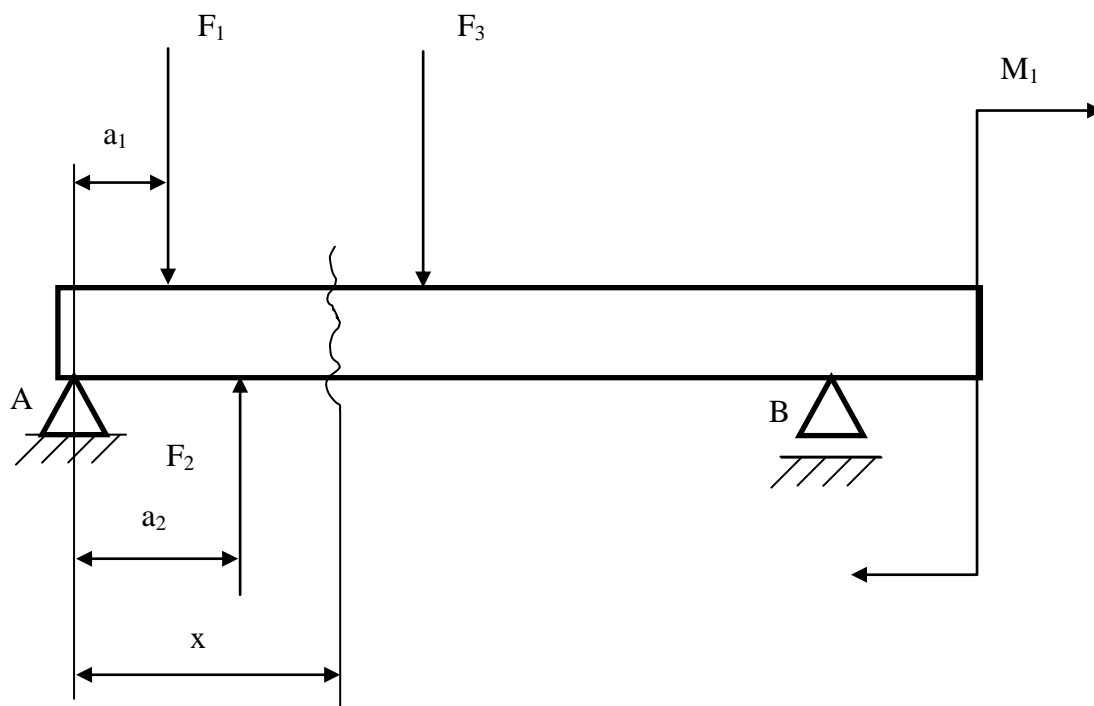
Příčným průřezem nosníku a kolmicí k vektoru v tomto průřezu vznikne *stopa ohybového momentu M_o* . Rovinný ohyb potom vzniká tehdy, je-li stopa ohybového momentu totožná s některou hlavní centrální osou průřezu. Není-li totožná, vznikne při rovinném zatížení nosníku prostorový ohyb.

2.2 Ohybový moment a posouvající síla

Abychom mohli popsat namáhání materiálu nosníku, musíme znát nejen vnější silové účinky, ale hlavně ty vnitřní. Vnitřní silové účinky určujeme metodou řezu.

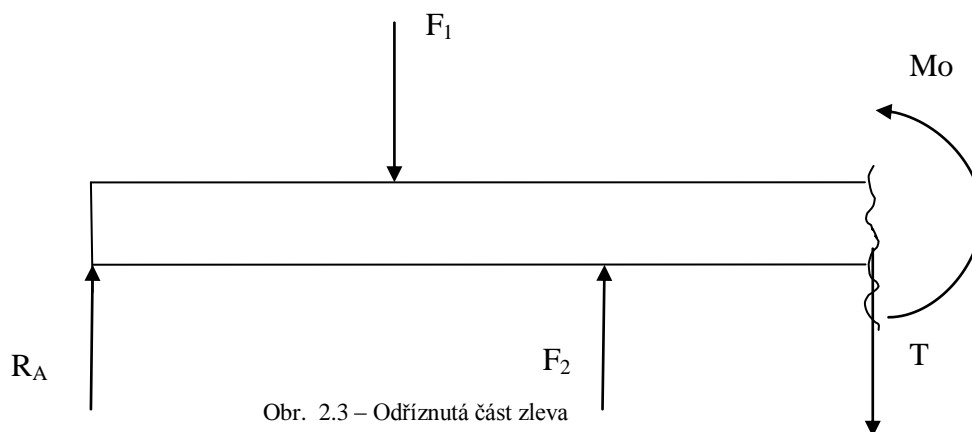
2.2.1 Metoda řezu

Tato metoda má určitá pravidla, která je třeba dodržovat. Na začátku budeme uvažovat staticky určitý nosník, který zatížíme.



Obr. 2.2 – Staticky určitý nosník

V první řadě nahradíme podpory reakcemi R_A , R_B apod. Dále v místě x zleva vedeme myšlený řez a tímto řezem oddělíme levou část nosníku (při postupu zprava zpravidla značíme \bar{x} a zakreslujeme pravou část nosníku). Tyto oddělené části však musí být v rovnováze. V rovnováze drží oddělenou část právě vnitřní silové účinky, proto v místě řezu vzniká vnitřní síla T tzv. *posouvající síla*, která zabraňuje pohybu odříznuté části ve svislém směru, a vnitřní moment M_o tzv. *ohybový moment*. Ten zabraňuje rotaci odříznuté části. Velikost posouvající síly a ohybového momentu určíme z rovnic rovnováhy.



Obr. 2.3 – Odříznutá část zleva

Rovnice rovnováhy pro svislý směr zní

$$R_A - F_1 + F_2 - T = 0. \quad 2.1$$

Posouvající síla bude tedy ve tvaru

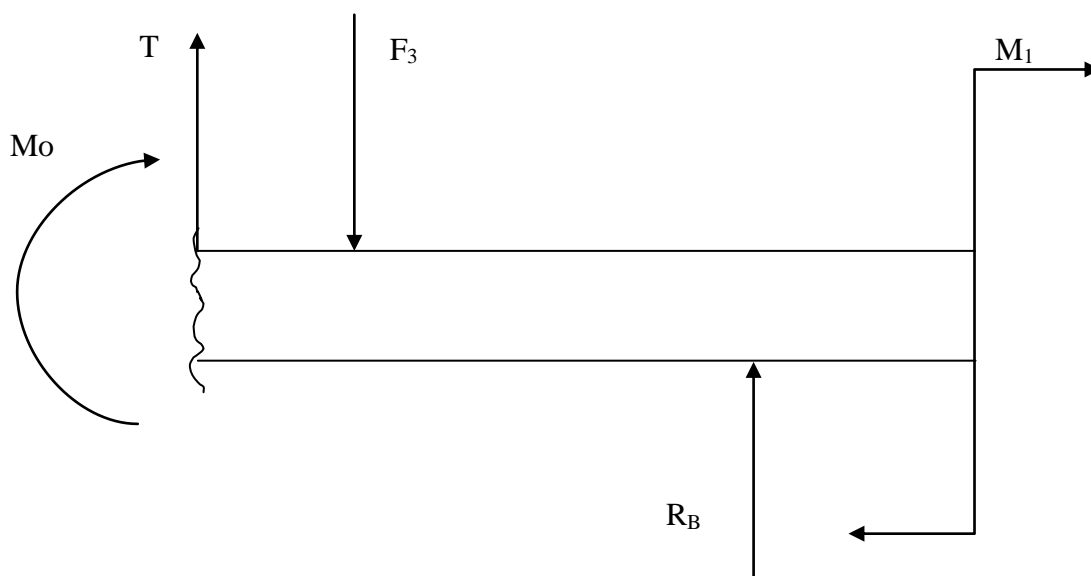
$$T = R_A - F_1 + F_2. \quad 2.2$$

Momentová rovnice rovnováhy je

$$R_A \cdot x - F_1 \cdot (x - a_1) + F_2 \cdot (x - a_2) - M_o = 0. \quad 2.3$$

Pro ohybový moment po úpravě platí

$$M_o = R_A \cdot x - F_1 \cdot (x - a_1) + F_2 \cdot (x - a_2). \quad 2.4$$



Obr. 2.4 – Odříznutá část zprava

Na obrázcích můžeme vidět, že při postupu zleva máme zvolený jiný směr posouvající síly a ohybového momentu než při postupu zprava. Je to proto, abychom dostali stejná znaménka vnitřních silových účinků, bez ohledu na to, z které strany postupujeme.

Tyto pravidla formulujeme takto:

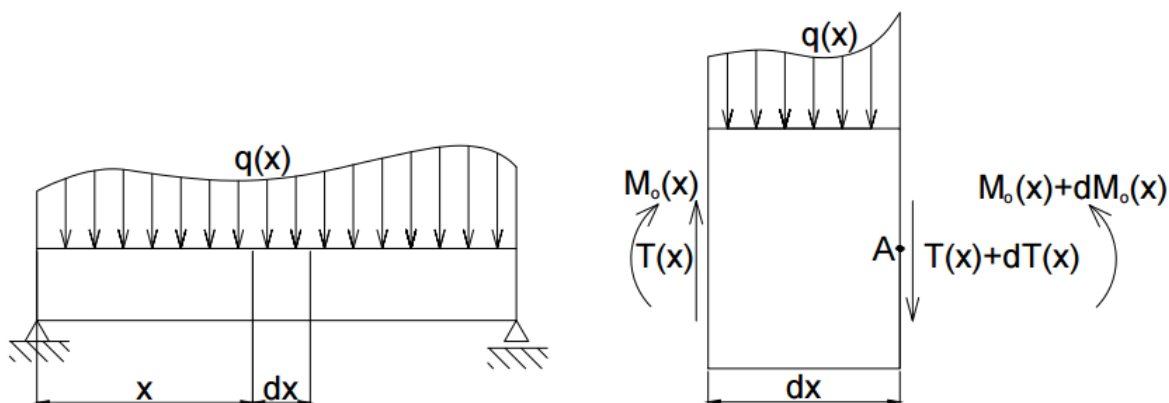
- postupujeme-li zleva (tj. levá část je odstraněna a my se zabýváme posouvající silou na zbylé, tj. pravé části) je posouvající síla kladná, směřuje-li vzhůru a naopak, postupujeme-li zprava, je posouvající síla kladná, směřuje-li dolů
- ohybový moment je kladný vždy ať postupujeme zleva či zprava, natahuje-li spodní vlákna nosníku

Pokud budeme řešit prostorové zatížení, zvolíme dvě k sobě kolmé roviny, které procházejí hlavními osami průřezu. Zatěžující silové účinky rozložíme do složek těchto dvou rovin a vzniknou nám dvě rovinné soustavy. V každé této rovině pak vyřešíme

průběhy posouvající síly a ohybového momentu. Výsledné hodnoty pak dostaneme vektorovým sečtením jednotlivých průběhů v obou rovinách.

2.2.2 Schwedlerova věta a její odvození

Mezi posouvajícími silami a ohybovými momenty platí určitá závislost, kterou odvodíme z následujícího obrázku.



Obr. 2.5 – Nosník se spojitým zatížením

Na nosníku, zatíženém spojitým zatížením $q(x)$, vyjme ve vzdálenosti x element dx . Tento element poté nakreslíme zvětšený a doplněný o vnitřní síly a momenty. Ty jsou v pravé části zvětšeny o diferenciál, neboť souřadnice x vzrostla o dx . Pro tento obrázek potom napíšeme rovnici rovnováhy pro svislý směr, která bude ve tvaru

$$T(x) - q(x) \cdot dx - [T(x) + dT(x)] = 0. \quad 2.5$$

Po úpravě dostáváme

$$\frac{dT(x)}{dx} = -q(x). \quad 2.6$$

Upravený vztah nám říká, že první derivace posouvající síly $T(x)$ podle souřadnice x je záporně vzaté spojitě zatížení (kladné $q(x)$ je pro nás to, které směřuje podle obrázku výše dolů).

Dále nás bude zajímat momentová rovnice k bodu A

$$M_o(x) + T(x) \cdot dx - q(x) \cdot dx \cdot \frac{dx}{2} - [M_o(x) + dM_o(x)] = 0. \quad 2.7$$

Po úpravě, kdy zanedbáme třetí člen, jako nekonečně malou veličinu vyššího řádu dostáváme

$$\frac{dM_o(x)}{dx} = T(x). \quad 2.8$$

Z této úpravy vyplývá, že posouvající síla je rovna derivaci ohybového momentu podle souřadnice x . Další derivací tohoto vztahu (2.8) podle souřadnice x máme rovnici

$$\frac{d^2 M_o(x)}{dx^2} = \frac{dT(x)}{dx}. \quad 2.9$$

Dosadíme ze vztahu (2.6) a dostaneme výslednou rovnici

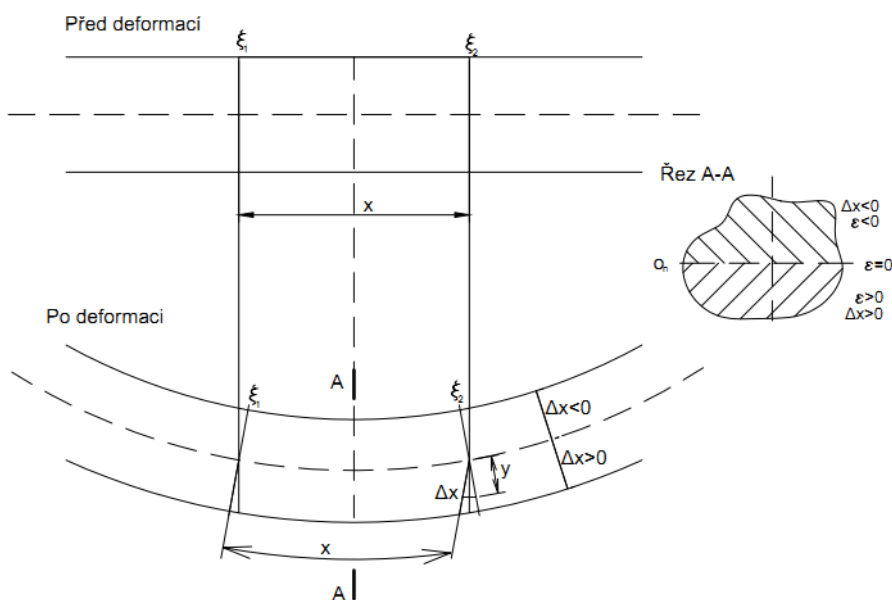
$$\frac{d^2 M_o(x)}{dx^2} = -q(x). \quad 2.10$$

Schwedlerovu větu pak formulují vztahy (2.6), (2.8) a (2.10).

Při postupu zprava a zavedení souřadnice \bar{x} , bychom dostali obdobné vztahy jen změněné o výsledné znaménko v rovnicích (2.6) a (2.8), rovnice (2.10) by zůstala stejná.

2.3 Napětí při ohybu

Působením posouvající síly T a ohybového momentu M_o vzniká v průřezu nosníku napětí. Nyní budeme zanedbávat vliv posouvající síly a budeme uvažovat jen tzv. prostý ohyb. Vlivem posouvající síly se budeme zabývat v kapitole 2.5. Nosník bude zatížen pouze ohybovým momentem. Pro prostý ohyb platí Bernoulliho hypotéza. Podle té platí, že rovinné řezy, které byly před deformací kolmé k ose nosníku, budou rovinnými i po deformaci a budou kolmé k deformované podélné ose nosníku.



Obr. 2.6 – Deformace po zatížení ohybovým momentem

Představíme-li si nosník jako soubor vláken, která budeme ohýbat, vznikne nám tak část vláken, která se prodlouží, část, která se zkrátí a poslední část zůstane neměnné délky. Vlákná, která nezmění svou délku, vyplní tzv. neutrální plochu, která protíná příčný průřez

v neutrální ose o_n . Poměrné prodloužení $\varepsilon = \frac{\Delta x}{x}$ je úměrné vzdálenosti y vlákna od neutrální osy o_n a platí vztah $\varepsilon = -a \cdot y$ znaménko mínus odpovídá volbě souřadnicového systému, a je součinitel úměrnosti a y souřadnice. Pro jednoosou napjatost (tedy i pro prostý ohyb) platí Hookův zákon $\sigma = E \cdot \varepsilon$. Dosadíme za ε a dostaneme

$$\sigma = -E \cdot a \cdot y. \quad 2.11$$

Zavedeme novou konstantu $c = E \cdot a$ a výsledkem tedy je rovnice ve tvaru

$$\sigma = -c \cdot y. \quad 2.12$$

Odtud vyplývá, že při prostém ohybu je velikost napětí σ přímo úměrná vzdálenosti od neutrální osy.

2.3.1 Poloha neutrální osy

Nosník namáhaný na ohyb nepřenáší žádnou osovou sílu N . Síla N je výslednicí normálových napětí σ , které působí v uvažovaném průřezu. Působí-li na elementární plošce dA napětí σ , působí na ni elementární normálová síla dN a platí $dN = \sigma \cdot dA$. Výslednou normálovou sílu dostaneme sečtením všech elementárních sil dN , tj. integrací po celém průřezu.

$$N = \int_{(A)} dN = \int_{(A)} \sigma \cdot dA. \quad 2.13$$

Dosadíme-li za σ a položíme $N = 0$ získáme vztah

$$N = - \int_{(A)} c \cdot y \cdot dA = -c \cdot \int_{(A)} y \cdot dA = 0. \quad 2.14$$

Aby byl tento vztah splněn, musí však platit

$$\int_{(A)} y \cdot dA = 0. \quad 2.15$$

Tento výraz (2.15) je statický moment průřezu k ose z , tedy k neutrální ose a tento moment je nulový pouze k osám procházejícími těžištěm a z toho vyplývá, že neutrální osa při ohybu musí procházet těžištěm průřezu. Při určování sklonu neutrální osy (úhlu, který svírá neutrální osa se stopou ohybového momentu) využíváme skutečnost, že vnitřní síly v příčném průřezu ohýbaného prutu mají nulový výsledný moment ke stopě ohybového momentu.

Předpokládáme, že neutrální osa o_n je totožná s osou z (je kolmá ke stopě Mo). Na plošce dA působí elementární síla $dN = \sigma \cdot dA$ a díky ní získáme elementární moment ke stopě Mo

$dM = z \cdot dN = z \cdot \sigma \cdot dA$. Výsledný moment ke stopě Mo dostaneme sečtením všech elementárních momentů (integrací).

Dosazením za σ získáme vztah

$$M = \int_{(A)} dM = -c \cdot \int_{(A)} y \cdot z \cdot dA = 0. \quad 2.16$$

Moment vnitřních sil ke stopě Mo je nulový pouze tehdy, když je nulový výraz

$$\int_{(A)} y \cdot z \cdot dA = D_{yz}. \quad 2.17$$

D_{yz} je deviační moment k osám y a z a ten může být nulový jen tehdy, jsou-li osy y a z hlavními osami průřezu. Proto je nutné, aby stopa Mo byla totožná s jednou hlavní osou.

Nyní musíme určit velikost konstanty c ze vztahu (2.16). Víme, že ohybový moment přenášený určitým průřezem se musí rovnat výslednému momentu elementárních sil k neutrální ose. Elementární síla dN působící na ploše dA má k neutrální ose moment

$$dMo = -y \cdot dN = -y \cdot \sigma \cdot dA. \quad 2.18$$

Následně dosadíme za σ ze vztahu (2.12) a integrujeme

$$Mo = \int_{(A)} y \cdot c \cdot y \cdot dA = c \cdot \int_{(A)} y^2 \cdot dA = c \cdot J_z. \quad 2.19$$

J_z je kvadratický moment průřezu k neutrální ose, ta je totožná s osou z . Z předchozího vztahu (2.19) vyjádříme konstantu c a dosadíme ji do vztahu (2.12)

$$\sigma = -\frac{Mo}{J_z} \cdot y. \quad 2.20$$

Napětí dosáhne největších hodnot v krajních vláknech (vláknech, která jsou nejvzdálenější od neutrální osy).

Největší tahové napětí je tedy v místě $y = -e_1$

$$\sigma = -\frac{Mo}{J_z} \cdot (-e_1) = \frac{Mo}{\frac{J_z}{e_1}}. \quad 2.21$$

Největší tlakové napětí je naopak v místě $y = +e_2$.

$$\sigma = -\frac{Mo}{J_z} \cdot e_2 = -\frac{Mo}{\frac{J_z}{e_2}}. \quad 2.22$$

Největší napětí v určitém průřezu bude v místě, které je nejvzdálenější od neutrální osy. Bude-li vzdálenost tohoto místa od neutrální osy e , napětí je potom

$$|\sigma_{max}| = \frac{M_o}{\frac{J_z}{|e|}} = \frac{M_o}{W_o} \quad 2.23$$

V tomto vztahu máme novou veličinu $W_o = \frac{J_z}{|e|}$, kterou nazýváme *průřezový modul v ohybu*.

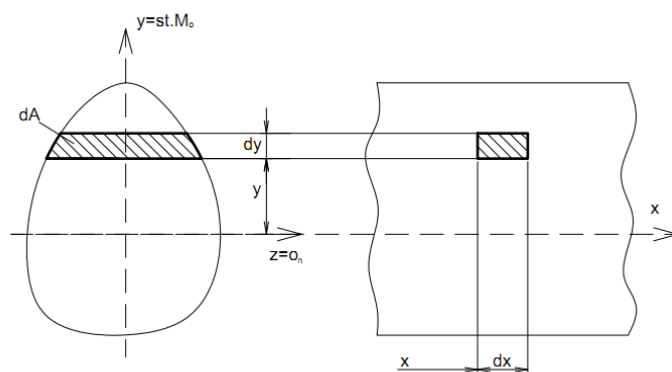
Pro představu a další výpočty si uvedeme velikost W_o pro některé základní tvary nosníků. Velikost průřezového modulu v ohybu pro kruhový profil o průměru d je roven $W_o = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$, pro mezikruhový profil (trubka) o vnějším průměru D a vnitřním průměru d je roven $W_o = \frac{\pi \cdot D^3}{32} \cdot [1 - (\frac{d}{D})^4]$ a konečně pro obdélníkový profil, kde neutrální osa je totožná s osou z a strany obdélníka jsou b (rovnoběžná s osou z) a h (kolmá na osu z), dostaneme vztah $W_o = \frac{1}{6} \cdot b \cdot h^2$

2.4 Deformační energie při prostém ohybu

Prostý ohyb je jednoosá napjatost, a proto budeme vycházet ze vztahu, který definuje hustotu deformační energie ve tvaru

$$\lambda = \frac{\sigma^2}{2 \cdot E} \quad 2.24$$

Velikost napětí σ je však různá v různých místech ohýbaného nosníku a proto využijeme elementu, v němž lze napětí σ brát jako konstantní. Stanovíme velikost deformační energie v tomto elementu a integrací určíme velikost deformační energie v celém nosníku.



Obr. 2.7 – Element s konstantním napětím

Pro tento element platí, že jeho objem je roven vztahu

$$dV = dA \cdot dx. \quad 2.25$$

Energie, která je v tomto elementu akumulována

$$dU = \frac{\sigma^2}{2 \cdot E} \cdot dV = \frac{\sigma^2}{2 \cdot E} \cdot dA \cdot dx. \quad 2.26$$

Pro napětí σ při ohybu platí

$$\sigma(x, y) = -\frac{Mo(x)}{J_z} \cdot y. \quad 2.27$$

Dosadíme do vztahu (2.26) a dostaneme

$$dU = \frac{1}{2 \cdot E} \cdot \left[-\frac{Mo(x)}{J_z} \cdot y \right]^2 \cdot dA \cdot dx. \quad 2.28$$

Následně je nutná integrace podle x a y , abychom dostali celkovou energii akumulovanou v nosníku

$$U = \int_{(V)} dU = \int_{(l)} \int_{(A)} \frac{1}{2 \cdot E} \cdot \left[-\frac{Mo(x)}{J_z} \cdot y \right]^2 \cdot dA \cdot dx. \quad 2.29$$

Po úpravě

$$U = \int_{(l)} \left[\frac{Mo^2(x)}{2 \cdot E \cdot J_z^2} \cdot \int_{(A)} y^2 \cdot dA \right] \cdot dx. \quad 2.30$$

Nyní použijeme vztah pro kvadratický moment průřezu k neutrální ose, který zní

$$\int_{(A)} y^2 \cdot dA = J_z. \quad 2.31$$

Výsledný vztah pro energii při prostém ohybu je potom ve tvaru

$$U = \int_{(l)} \frac{Mo^2(x)}{2 \cdot E \cdot J_z} \cdot dx. \quad 2.32$$

2.5 Vliv posouvající síly na napjatost při ohybu

V předcházející kapitole jsme zanedbávali vliv posouvající síly. S prostým ohybem se však v běžném životě potkáme jen zřídka, častěji narazíme na ohyb s působením posouvající síly. Posouvající síla vyvolává smyková napětí v průřezech, které jsou kolmé k ose nosníku. Je však třeba určit, jak bude toto smykové napětí rozloženo po průřezu.

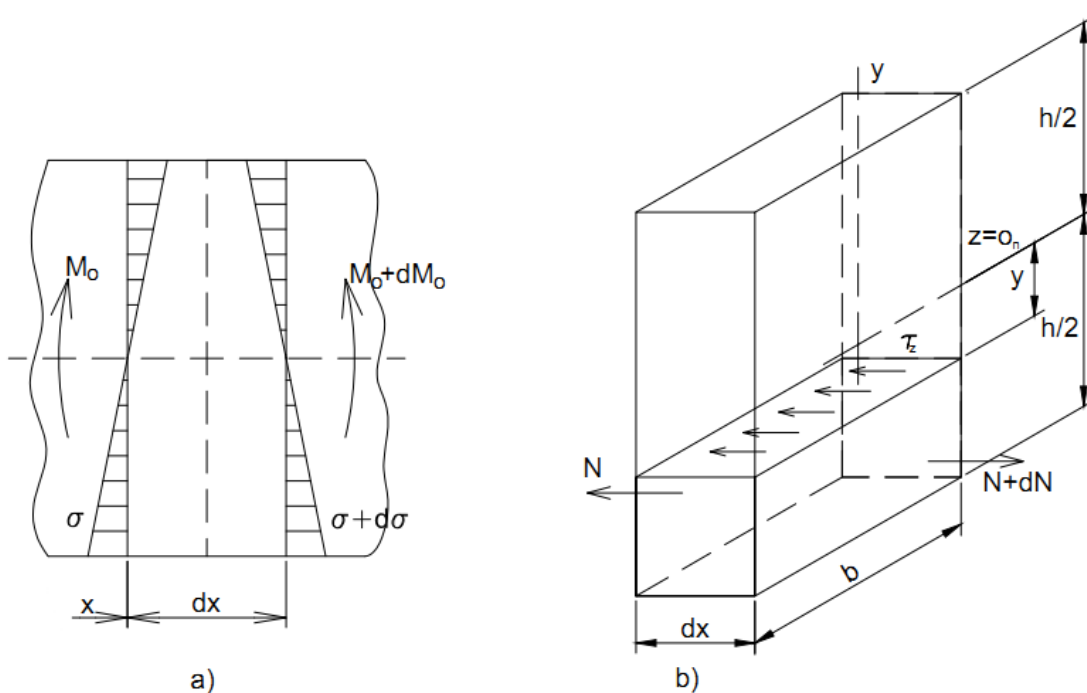
2.5.1 Rozložení smykových napětí v nosníku

V této práci se budeme zabývat nosníkem obdélníkového průřezu. Výška tohoto nosníku je výška h a šířka b , přičemž platí $\frac{h}{b} \geq 2$.

U tohoto vysokého obdélníka předpokládáme, že smyková napětí jsou rovnoběžná se směrem posouvající síly T (se směrem osy y) a tato napětí jsou stejná po celé šířce obdélníku (jsou neměnná se souřadnicí z).

Pro odvození τ_z a toho, jak se mění v závislosti na souřadnici y , využijeme následujícího obrázku (Obr. 2.8a). Z nosníku je vyjmut element ohraničený dvěma řezy, které jsou kolmé na podélnou osu nosníku. Na levé straně tohoto elementu máme ohybový moment M_0 a ním vyvolané napětí σ , na pravé straně potom zvětšený moment $M_0 + dM_0$ a logicky i zvětšené napětí $\sigma + d\sigma$. Z tohoto elementu, jehož tloušťka je dx , vyjmeme nyní část, která je na vedlejším obrázku (Obr. 2.8b). Na levé straně nyní působí výslednice N normálových napětí σ , na pravé straně výslednice $N + dN$ normálových napětí $\sigma + d\sigma$. Tyto výslednice nejsou v rovnováze, tu zajistí teprve smykové napětí, které působí na horní stěně elementu. Rovnici rovnováhy pak můžeme napsat ve tvaru

$$N + dN - N - \tau_z \cdot b \cdot dx = 0. \quad 2.33$$



Obr. 2.8 – Smykové napětí vyvolané ohybovým momentem

Pro velikost výslednice N pro levou stěnu elementu dle obrázku (Obr. 2.8) platí

$$N = \int_{(A)} dN = \int_{(A)} \sigma \cdot dA = \int_{(A)} \left(-\frac{M_o}{J_z} \cdot \eta \right) \cdot dA = \frac{M_o}{J_z} \cdot \int_{(A)} (-\eta) \cdot dA. \quad 2.34$$

V této rovnici představuje integrál $\int_{(A)} (-\eta) \cdot dA$ statický moment plochy A k neutrální ose ($\eta < 0$) a označíme jej, jako S . Síla N potom bude

$$N = \frac{M_o}{J_z} \cdot S. \quad 2.35$$

Obdobně pak v pravé straně elementu budeme mít

$$N + dN = \frac{M_o + dM_o}{J_z} \cdot S. \quad 2.36$$

Když tyto vztahy dosadíme do rovnice rovnováhy (2.33) a upravíme, můžeme napsat rovnici ve tvaru

$$\frac{dM_o}{J_z} \cdot S - \tau_z \cdot b \cdot dx = 0. \quad 2.37$$

Pro τ_z dostáváme rovnici

$$\tau_z = \frac{dM_o}{dx} \cdot \frac{S}{J_z \cdot b}. \quad 2.38$$

Využijeme Schwedlerovu větu (2.8) a výsledná rovnice pro smykové napětí, které je kolmé na osu z , je

$$\tau_z = \frac{T \cdot S}{J_z \cdot b}. \quad 2.39$$

Tuto rovnici (2.39) nazýváme Žuravského vzorec (teorém).

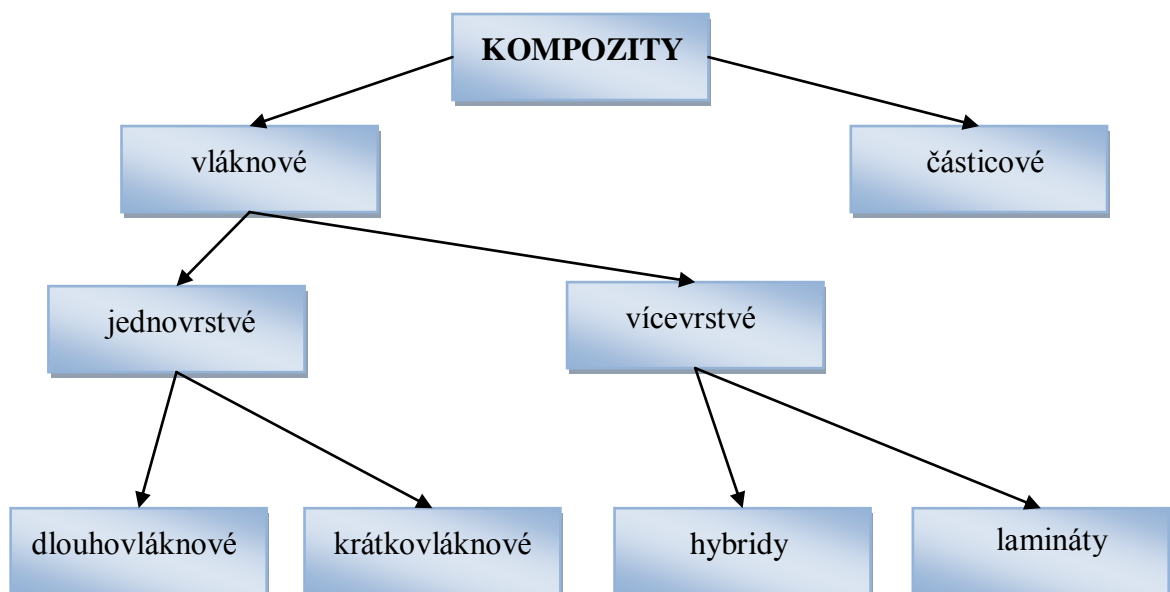
2.6 Průhyb tenkých nosníků

Při určování průhybu w_o u tenkých nosníků využíváme diferenciální rovnici průhybové čáry ve tvaru

$$\frac{d^2 w_o}{dx^2} = -\frac{M_o}{E \cdot J_z}. \quad 2.40$$

3. Laminátové a sendvičové nosníky

Laminátové a sendvičové nosníky hromadně nazýváme *kompozity*. Kompozity se skládají ze dvou či více odlišných částí. Rozdílnost těchto částí nebo složek je nutné chápat z hlediska makrostruktury, protože kdybychom se na většinu materiálů podívali z hlediska mikrostruktury, jednalo by se taktéž o kompozity. V této práci se budeme zabývat kompozity, které budou mít jednotlivé složky chemicky a mechanicky odlišné a tyto složky jsou rozděleny rozhraním. Vláknové kompozity mají nespojitou fázi (vlákna) ponořenou do spojitě fáze (matrice). Nespojitá fáze bývá pevnější a ve výrobku slouží jako výztuha. Vlastnosti kompozitních materiálů jsou poté dány vlastnostmi materiálových složek, jejich objemovým podílem a geometrií vyztužení. Základní rozdělení kompozitů je na vláknové a částicové kompozity, přičemž vláknové jsou vyztuženy vlákny, která mají délkové rozměry podstatně větší než průřezové, částicové kompozity jsou plněny částicemi. Částice je definována jako nevláknový útvar, který nemá dlouhý rozměr. Vlákna se podílejí na přenosu namáhání, zatímco částice jen v mnohem menším měřítku. Částice slouží k úpravě mechanických vlastností materiálu.



Obr. 3.1 – Rozdělení kompozitů podle [2]

3.1 Základní pojmy a vztahy u vícevrstvých nosníků

U vícevrstvých nosníků se rovnice vyjadřují nejčastěji pomocí matic.

Pokud budeme těleso mechanicky zatěžovat, vznikne v něm napjatost. Napjatost popisujeme pomocí tenzoru napětí v systému $O(x_1, x_2, x_3)$.

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad 3.1$$

Matrice je symetrická, protože platí $\sigma_{12} = \sigma_{21}$, $\sigma_{13} = \sigma_{31}$, $\sigma_{23} = \sigma_{32}$.

Znázorníme-li si složky tenzoru napětí jako σ_{ij} ($i, j = x_1, x_2, x_3$) platí, že pokud $i = j$ jedná se o *normálové napětí*, a pro $i \neq j$ jsou složky *napětí smykové*.

V každém bodě tělesa jsou tři na sebe kolmé roviny, ve kterých jsou smyková napětí rovna nule. Jedná se o *hlavní roviny*, ve kterých působí *hlavní napětí*. Matice napětí je ve tvaru

$$\sigma = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma}_3 \end{bmatrix}. \quad 3.2$$

Tenzor napětí (3.1) je symetrický a dá se zapsat ve tvaru vektoru takto

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}. \quad 3.3$$

Když těleso budeme zatěžovat, bude v něm vznikat nejen napjatost, ale bude docházet i k jeho deformaci. Tenzor deformace je potom

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}. \quad 3.4$$

Kde jednotlivé deformace vypočítáme následujícím způsobem

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, & \varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), & \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), & & \\ \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right). & & & & \end{aligned} \quad 3.5$$

V těchto rovnicích jsou u_1, u_2, u_3 složky posunutí ve směrech x_1, x_2, x_3 .

Pokud vyjádříme matici tenzoru deformace pomocí hlavních deformací, získáme následující tenzor

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\varepsilon}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\varepsilon}_3 \end{bmatrix}. \quad 3.6$$

Tenzor deformace (3.4) je symetrický a dá se zapsat ve tvaru vektoru takto

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}. \quad 3.7$$

V kapitolách 3.2 a 3.3 budou místo číselných dvojitéch indexů použity indexy s písmeny x, y, z.

3.1.1 Hookeův zákon

Hookeův zákon popisuje vztah mezi napětím a deformací. V této práci se budeme zabývat izotropními materiály. Izotropní znamená, že vlastnosti tohoto materiálu jsou nezávislé na volbě souřadnicového systému. Izotropní materiál má stejné vlastnosti ve všech směrech. Hookeův zákon pro izotropní materiály je pak pro systém $O(x_1, x_2, x_3)$ vyjádřen takto

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{21} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}. \quad 3.8$$

Hookeův zákon je tedy ve tvaru

$$\sigma = C \cdot \varepsilon. \quad 3.9$$

kde C je *matice tuhosti*. Tuto rovnici lze vyjádřit také v inverzním tvaru

$$\varepsilon = S \cdot \sigma. \quad 3.10$$

kde S je *matice poddajnosti*, která má pro izotropní materiály následující tvar

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{21} & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(S_{11} - S_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(S_{11} - S_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(S_{11} - S_{12}) \end{bmatrix} \quad 3.11$$

Matice tuhosti a matice poddajnosti mají obdobný tvar a obsahují pouze dva nezávislé prvky. Pokud bychom vyjádřili prvky matice tuhosti a matice poddajnosti pomocí konstant dostaneme následující vztahy

$$C_{11} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad C_{12} = C_{21} = \frac{E \cdot \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad 3.12$$

$$S_{11} = \frac{1}{E}, \quad S_{12} = S_{21} = -\frac{\nu}{E}.$$

Z těchto vztahů nám vyplývá, že izotropní materiály můžeme popsat pomocí dvou nezávislých konstant pružnosti a to *modulem pružnosti v tahu E* a *Poissonovým číslem ν* .

3.2 Laminátová teorie

3.2.1 Předpoklady laminátové teorie

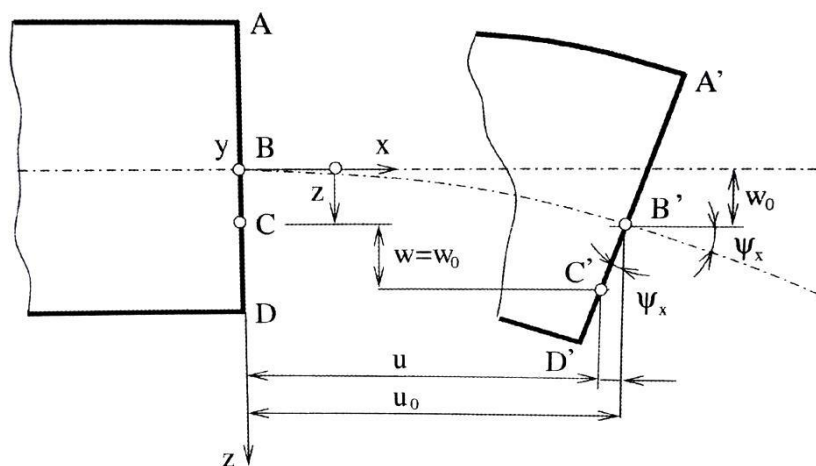
Při výpočtu podle laminátové teorie budeme používat následující předpoklady:

- tloušťka laminy je ve srovnání s jeho délkou a šířkou velmi malá
- posunutí jednotlivých bodů ve všech třech směrech jsou malá
- spoj mezi laminami je dokonalý, nekonečně tenký, a proto jsou veškerá posunutí spojitá
- posunutí se v příčném směru (po tloušťce) mění lineárně
- z předpokladu, že tloušťka laminy je vzhledem k ostatním rozměrům malá, můžeme uvažovat rovinný stav napjatosti ($\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$)
- normálová vzdálenost od středové roviny zůstává konstantní, proto lze zanedbat přetvoření v příčném směru $\epsilon_{zz} \doteq 0$
- závislost mezi deformací a napětím jsou lineární

3.2.2 Laminátová teorie bez uvažování smyku

U laminátové teorie bez vlivu smyku musíme počítat navíc i s předpokladem, že příčná zkosení $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} \doteq 0$, proto po deformaci zůstanou kolmice ke středové ploše kolmé a budou přímkové.

K odvození vztahů pro výpočet průhybu podle laminátové teorie využijeme následujícího obrázku.



Obr. 3.2 – Laminát v rovině xz , z [1]

Na tomto obrázku můžeme vidět část laminátu v rovině xz . Strana laminátu AD zůstane po deformaci přímá a kolmá ke střední ploše stejně jako před deformací. Vlivem deformace však dojde v bodě B k posuvům u_0 , v_0 , w_0 , které odpovídají směrům os x , y , z . Pro posuv bodu C ve směru osy x můžeme napsat rovnici

$$u = u_0 - z \psi_x. \quad 3.13$$

V této rovnici ψ_x představuje sklon střední roviny laminátu a platí pro něj

$$\psi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x}. \quad 3.14$$

Obdobně můžeme napsat rovnici pro posuv ve směru y

$$v = v_0 - z \psi_y, \quad 3.15$$

$$\psi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y}. \quad 3.16$$

Deformaci po tloušťce zanedbáme, a proto platí

$$w = w_0. \quad 3.17$$

Rovnice (3.13) až (3.17) můžeme zapsat jako pole posuvů ve tvaru

$$\begin{aligned} u &= u_o - z \frac{\partial w_o}{\partial x} = u_o - z \psi_x, \\ v &= v_o - z \frac{\partial w_o}{\partial y} = v_o - z \psi_y, \\ w &= w_o. \end{aligned} \quad 3.18$$

Z derivací posuvů plyne pole deformací

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_o}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2}, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_o}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad 3.19$$

Rovnice (3.19) lze zapsat do tvaru

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}, \quad 3.20$$

kde deformace střední plochy jsou

$$\varepsilon_m^0 = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} \quad 3.21$$

a křivosti desky jsou

$$k = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}. \quad 3.22$$

Napětí v libovolné k-té vrstvě lze vyjádřit pomocí vztahu

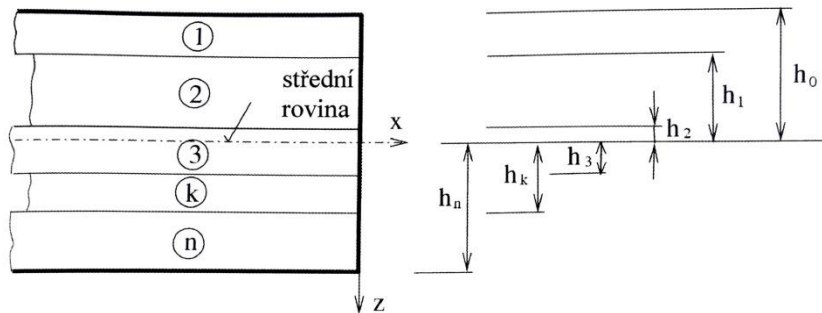
$$\sigma = Q \cdot \varepsilon, \quad 3.23$$

kde Q představuje matici mimoosové tuhosti, protože však uvažujeme izotropní materiál, můžeme ji nahradit maticí tuhosti C .

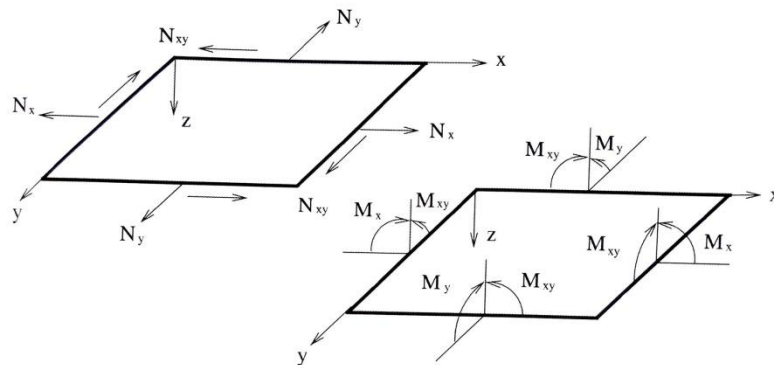
$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{26} \\ C_{61} & C_{62} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{26} \\ C_{61} & C_{62} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \end{bmatrix}. \quad 3.24$$

Při odvozování závislostí mezi vnějším zatížením laminátu a jeho deformací budeme pracovat s ekvivalentním systémem sil a momentů. Zavedeme výsledné síly a momenty připadající na jednotku šířky, které působí na příčný průřez k-té vrstvy tloušťky h_k - h_{k-1} .

Výraz h_k představuje vzdálenost vnějšího povrchu vrstvy od střední roviny namáhání, h_{k-1} vzdálenost vnitřního povrchu vrstvy (Obr. 3.3)



Obr. 3.3 – Kótování vrstev laminátu, z [1]



Obr. 3.4 – Výsledné síly a momenty působící na příčný průřez k-té vrstvy, z [1]

Pro výslednice sil k-té vrstvy platí

$$N_x = \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{xx} dz, \quad N_y = \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{yy} dz, \quad 3.25$$

$$N_{xy} = \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{xy} dz.$$

Pro momenty k-té vrstvy pak platí

$$M_x = \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{xx} z \, dz, \quad M_y = \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{yy} z \, dz, \quad 3.26$$

$$M_{xy} = \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{xy} z \, dz.$$

Vzhledem k tomu, že se napětí po tloušťce laminátu mění nespojitě, je třeba výsledné síly a momenty působící v průřezu laminátu vyšetřit jako součet účinků od všech n vrstev.

Potom pro síly a momenty můžeme napsat rovnice

$$N = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz, \quad 3.27$$

$$M = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} z \, dz.$$

Z matematické teorie pružnosti jsou známy Cauchyho podmínky rovnováhy, které platí rovněž pro desky. Pro úlohu rovinné napjatosti v rovině x, y platí

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + X = \rho a_x,$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + Y = \rho a_y, \quad 3.28$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + Z = \rho a_z,$$

kde X, Y, Z jsou složky objemových sil, a_x, a_y, a_z jsou složky zrychlení a ρ je hustota.

Pro složky zrychlení platí následující rovnice

$$a_x = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad a_y = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad a_z = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad 3.29$$

Vzhledem ke vztahu (3.18) je možné zapsat výraz (3.29) do tvaru

$$a_x = \frac{\partial^2 u_o}{\partial t^2} - z \frac{\partial^3 w_o}{\partial x \partial t^2} = \frac{\partial^2 u_o}{\partial t^2} - z \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2},$$

$$a_y = \frac{\partial^2 v_o}{\partial t^2} - z \frac{\partial^3 w_o}{\partial y \partial t^2} = \frac{\partial^2 v_o}{\partial t^2} - z \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2}, \quad 3.30$$

$$a_z = \frac{\partial^2 w_o}{\partial t^2}.$$

Nyní je nutné integrovat všechny členy rovnic (3.28) po tloušťce laminátu h a to na levé i pravé straně rovnic. Získáme tak rovnice rovnováhy vyjádřené pomocí výsledných sil N .

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho a_x dz. \quad 3.31$$

Po integraci dostaneme

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + \bar{X} = I_o \frac{\partial^2 u_o}{\partial t^2} - B \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}, \quad 3.32$$

kde člen I_o je vyjádřen jako

$$I_o = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho dz. \quad 3.33$$

A člen B je

$$B = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho z dz. \quad 3.34$$

Po integraci bude druhá a třetí rovnice vypadat takto

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + \bar{Y} = I_o \frac{\partial^2 v_o}{\partial t^2} - B \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2}. \quad 3.35$$

$$q + \bar{Z} = I_o \frac{\partial^2 w_o}{\partial t^2}, \quad 3.36$$

kde pro člen q platí

$$q = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz \quad 3.37$$

Rovnici obsahující vektor momentů M získáme tak, že nejprve vynásobíme první dvě rovnice (3.28) hodnotou z a provedeme jejich integraci po tloušťce h . Výsledné vztahy po integraci prvních dvou rovnic poté budou ve tvaru

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + P_x = I_o \frac{\partial^2 u_o}{\partial t^2} - I_{xy} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}, \quad 3.38$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + P_y = B \frac{\partial^2 v_o}{\partial t^2} - I_{xy} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2}, \quad 3.39$$

kde P_x a P_y představují

$$P_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X z dz, \quad P_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Y z dz \quad 3.40$$

a člen I_{xy} představuje

$$I_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho z^2 dz. \quad 3.41$$

Nyní provedeme parciální derivaci vztahu (3.38) podle x a vztahu (3.39) podle y a dostaneme

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = B \frac{\partial^3 u_o}{\partial t^2 \partial x} - I_{xy} \frac{\partial^3 \psi_x}{\partial t^2 \partial x}, \quad 3.42$$

$$\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = B \frac{\partial^3 v_o}{\partial t^2 \partial y} - I_{xy} \frac{\partial^3 \psi_y}{\partial t^2 \partial y}. \quad 3.43$$

Třetí rovnici pro laminátovou desku získáme součtem rovnic (3.36),(3.42) a (3.43). Pak platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q + \bar{Z} = \\ = I_o \frac{\partial^2 w_o}{\partial t^2} + B \left(\frac{\partial^3 u_o}{\partial t^2 \partial x} + \frac{\partial^3 v_o}{\partial t^2 \partial y} \right) - I_{xy} \left(\frac{\partial^3 \psi_x}{\partial t^2 \partial x} + \frac{\partial^3 \psi_y}{\partial t^2 \partial y} \right). \end{aligned} \quad 3.44$$

Rovnice (3.32), (3.35) a (3.44) představují vyjádření Cauchyho rovnice (3.28) pomocí výslednic sil a momentů působících na laminát. Tedy

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + \bar{X} = I_o \frac{\partial^2 u_o}{\partial t^2} - B \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + \bar{Y} = I_o \frac{\partial^2 v_o}{\partial t^2} - B \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q + \bar{Z} = \\ = I_o \frac{\partial^2 w_o}{\partial t^2} + B \left(\frac{\partial^3 u_o}{\partial t^2 \partial x} + \frac{\partial^3 v_o}{\partial t^2 \partial y} \right) - I_{xy} \left(\frac{\partial^3 \psi_x}{\partial t^2 \partial x} + \frac{\partial^3 \psi_y}{\partial t^2 \partial y} \right). \end{aligned} \quad 3.45$$

V těchto rovnicích zanedbáváme setrvačné účinky od rotací, účinky objemových sil a dále platí, že posuvy u_o , v_o , w_o jsou časově nezávislé. Proto rovnice (3.45) můžeme zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0, \\
\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0, \\
\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q &= 0.
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Na základě předešlých výrazů můžeme odvodit konstitutivní vztah vyjadřující závislost sil a momentů na deformacích a křivostech. Pro sestavení tohoto vztahu využijeme rovnic (3.27) a dosadíme do nich rovnici (3.24) za použití vztahu pro deformace střední plochy (3.21) a křivosti desky (3.22). Dostaneme výrazy

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} &= \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{26} \\ C_{61} & C_{62} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} dz + \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{26} \\ C_{61} & C_{62} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} z dz \right\}, \\
\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M \end{bmatrix} &= \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{26} \\ C_{61} & C_{62} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} z dz + \right. \\
&\quad \left. + \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{26} \\ C_{61} & C_{62} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} z^2 dz \right\}.
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Vzhledem k tomu, že matice tuhosti C jsou pro každou vrstvu konstantní, můžeme výraz (3.47) přepsat jako

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} &= \left[\sum_{k=1}^n C_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz \right] \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \left[\sum_{k=1}^n C_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right] \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} &= \left[\sum_{k=1}^n C_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right] \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \left[\sum_{k=1}^n C_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 dz \right] \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Ze vztahu (3.48) je zřejmé, že násobením integrálů s prvky matice C_k jednotlivých vrstev a po provedení jejich součtu po celé tloušťce laminátu dostaneme výrazy

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}, \tag{3.49}$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}. \quad 3.50$$

Prvky jednotlivých matic určíme podle následujících výrazů

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (C_{ij})_k (h_k - h_{k-1}), \quad 3.51$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (C_{ij})_k (h_k^2 - h_{k-1}^2), \quad 3.52$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (C_{ij})_k (h_k^3 - h_{k-1}^3). \quad 3.53$$

Vztahy (3.47) a (3.48) může přepsat jako jednu rovnici ve tvaru

$$\begin{bmatrix} \vec{N} \\ \vec{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{\varepsilon}_m^0 \\ \vec{k} \end{bmatrix}, \quad 3.54$$

kde A je matice tahové tuhosti,
 B je matice vazební tuhosti,
 D je matice ohybové tuhosti.

Vztah (3.54) slouží k výpočtu sil a momentů v závislosti na deformacích a křivostech. Ve většině případů však budeme vyšetřovat napětí a deformaci v každé lamině tvořící laminát v závislosti na vnějším zatížení. Vektor deformace ε_m^0 a křivosti k lze získat inverzí vztahu (3.54). Napětí se potom získá použitím vztahu (3.24). Za určitých podmínek zatěžování je zcela postačující tzv. *částečná inverze*. To znamená, že vyjádříme vektor deformace ve střední rovině ε_m^0 a vektor momentu M v závislosti na výsledných silách N a křivostech k . Částečná inverze má vztah

$$\begin{bmatrix} \vec{\varepsilon}_m^0 \\ \vec{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^* & B^* \\ C^* & D^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{N} \\ \vec{k} \end{bmatrix}, \quad 3.55$$

kde $A^* = A^{-1}$,
 $B^* = A^{-1} \cdot B$,
 $C^* = B \cdot A^{-1} = -B^{*T}$,
 $D^* = D - B \cdot A^{-1} \cdot B$.

Plně invertovaný vztah pak dostaneme další inverzí výrazu (3.55).

$$\begin{bmatrix} \vec{\varepsilon}_m^0 \\ \vec{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{B} & \bar{D} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{N} \\ \vec{M} \end{bmatrix}, \quad 3.56$$

$$\text{kde} \quad \bar{A} = A^* + B^* \cdot D^{-1} \cdot B^{*T},$$

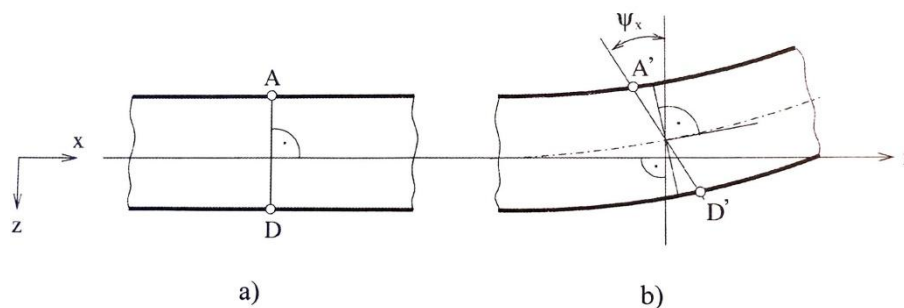
$$\bar{B} = B^* \cdot D^{*-1},$$

$$\bar{D} = D^{*-1}.$$

Matice \bar{A} , \bar{B} a \bar{D} nazýváme *matice tahové poddajnosti*, *vazební poddajnosti* a *ohybové poddajnosti*.

3.2.3 Laminátová teorie s uvažováním příčné smykové deformace

Využitím klasické laminátové teorie lze získat poměrně přesné hodnoty pole deformací ε a pole napětí σ pro velmi tenké desky. V případě tlusté desky, tj. když poměr šířky desky k její tloušťce je menší než 10, neodpovídají vypočtené hodnoty průhybů, deformací a napětí skutečným hodnotám. Budeme-li uvažovat příčnou smykovou deformaci laminátu, více se přiblížíme k přesnému řešení. Při uvažování příčné smykové deformace je v nezátíženém stavu (Obr. 3.5a) kolmice AD totožná s kolmicí na střední rovinu. V zatíženém stavu (Obr. 3.5b) tomu tak již není.



Obr. 3.5 – Ohyb laminátového nosníku s uvažováním smykové deformace, z [1]

Při uvažování smykových deformací nám vyjde obdobný, ale o prvky smyku rozšířený, vztah jako je výraz (3.54). Rozšířený vztah má následující tvar

$$\begin{bmatrix} \vec{N} \\ \vec{M} \\ \vec{Q}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & D & 0 \\ 0 & 0 & F \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{\varepsilon}_m^0 \\ \vec{k} \\ \vec{\gamma}_s \end{bmatrix}, \quad 3.57$$

kde ε_m^0 vypočítáme podle vztahu (3.21). Výraz Q_s je vektor vnějších sil a F je matice smykové tuhosti. Její prvky se spočítají podle vztahu

$$F_{ij} = \sum_{k=1}^n (C_{ij})_k (h_k - h_{k-1}), \quad i, j = 4, 5. \quad 3.58$$

Matice A , B , D vypočítáme podle vztahů (3.51), (3.52) a (3.53).

Modifikované křivosti vypočítáme pomocí výrazů

$$k_x = \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, \quad k_y = \frac{\partial \psi_y}{\partial y}, \quad k_{xy} = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y}.$$

Další výraz v rovnici je vektor zkosů vzniklých vlivem smyku $\gamma_s = \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}$. Rovnice jednotlivých složek jsou

$$\gamma_{yz}^0 = \frac{\partial w_o}{\partial y} - \psi_y, \quad \gamma_{zx}^0 = \frac{\partial w_o}{\partial x} - \psi_x, \quad 3.59$$

kde ψ_y a ψ_x jsou sklony střední roviny laminátu.

Ze vztahu (3.57) můžeme určit deformace, křivosti a zkosity a z nich následně průhyb w_o .

3.3 Sendvičová teorie

Sendvičový materiál se obecně skládá z lehkého jádra, který má dobré vlastnosti vůči tlakovému namáhání, a z horního a dolního potahu. Potahy mají naopak velmi dobré vlastnosti v tahu. Většinou bývá tloušťka jádra mnohem větší než tloušťka potahů. Tím je dosaženo velké ohybové tuhosti při malé hmotnosti materiálu. Sendvičová teorie zjednodušuje teorii laminátovou a to tak, že uvažuje jádro a dva potahy, přičemž u jádra se předpokládá, že přenáší pouze příčná smyková napětí, a naopak u potahů se příčná smyková napětí zanedbávají.

3.3.1 Předpoklady sendvičové teorie

U sendvičové teorie budeme vycházet z následujících předpokladů:

- u sendvičů předpokládáme malé deformace a platnost Hookeova zákona
- tloušťka jádra je v porovnání s tloušťkou potahů mnohem větší ($h \gg h_1, h_2$)
- posunutí jádra u_c ve směru x a v_c ve směru y se po tloušťce změní lineárně
- posunutí potahů u a v jsou konstantní po celé její tloušťce
- příčné posunutí w je nezávislé na souřadnici z a proto uvažujeme, že $\varepsilon_{zz} = 0$
- jádro přenáší pouze příčná smyková napětí σ_{yz}^c a σ_{zx}^c a tedy

$$\sigma_{xx}^c = \sigma_{yy}^c = \sigma_{xy}^c = \sigma_{zz}^c = 0$$
- protože je tloušťka potahů malá, můžeme na nich zanedbat příčná smyková napětí a normálová napětí ve směru z $\sigma_{yz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zz} = 0$

3.3.2 Sendvičová teorie s uvažováním smyku

Pole posuvů jádra je možno vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned} u_c &= u_o - z \psi_x, \\ v_c &= v_o - z \psi_y, \end{aligned} \quad 3.60$$

kde u_o, v_o jsou posunutí ve směru x a y střední roviny ($z = 0$).

Posunutí dolního potahu

$$\begin{aligned} u_1 &= u_o - \frac{h}{2} \psi_x, \\ v_1 &= v_o - \frac{h}{2} \psi_y. \end{aligned} \quad 3.61$$

Posunutí horního potahu

$$\begin{aligned} u_2 &= u_o + \frac{h}{2} \psi_x, \\ v_2 &= v_o + \frac{h}{2} \psi_y. \end{aligned} \quad 3.62$$

Pro celý sendvič platí, že

$$w = w_o. \quad 3.63$$

Z rovnic (3.60) až (3.63) vyplývá, že sendvičová teorie je založena na určení pěti funkcí, a to u_o, v_o, w_o, ψ_x a ψ_y . Jakmile jsou tyto funkce známy, je možné určit pole deformací a následně pole napětí.

Pole deformací musíme definovat pro každou část sendviče zvlášť. Pro dolní potah jsou vztahy popisující pole deformací v tomto tvaru

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^1 &= \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_o}{\partial x} - \frac{h}{2} \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, \\ \varepsilon_{yy}^1 &= \frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_o}{\partial y} - \frac{h}{2} \frac{\partial \psi_y}{\partial y}, \\ \varepsilon_{zz}^1 &= 0 \\ \gamma_{xy}^1 &= \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} - \frac{h}{2} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right), \\ \gamma_{yz}^1 &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial z} = \frac{\partial w_o}{\partial y}, \\ \gamma_{zx}^1 &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} = \frac{\partial w_o}{\partial x}. \end{aligned} \quad 3.64$$

Vzhledem k tomu, že tloušťka potahů je malá a předpokládáme rovinnou napjatost, můžeme příčné smykové deformace γ_{yz}^1 a γ_{zx}^1 zanedbat. Pole deformací dolního potahu potom bude ve tvaru

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_o}{\partial x} \\ \frac{\partial v_o}{\partial y} \\ \frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} \end{bmatrix} - \frac{h}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad 3.65$$

Což můžeme přepsat do tvaru

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} - \frac{h}{2} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}. \quad 3.66$$

První vektor na pravé straně rovnice (3.66) představuje pole deformací střední roviny ($z = 0$) a druhý vektor modifikované křivosti.

Obdobně můžeme napsat vztah pro pole deformací horního potahu

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^2 \\ \varepsilon_{yy}^2 \\ \gamma_{xy}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \frac{h}{2} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}. \quad 3.67$$

Pro odvození pole deformací jádra využijeme rovnice (3.79). Pole deformací jádra můžeme rozdělit na dvě deformační pole a to na:

- deformační pole střední roviny ($z = 0$) a ohybové deformační pole

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^c \\ \varepsilon_{yy}^c \\ \gamma_{xy}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} - z \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad 3.68$$

- pole příčných smykových deformací

$$\gamma^c = \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^c \\ \gamma_{zx}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_o}{\partial y} - \psi_y \\ \frac{\partial w_o}{\partial x} - \psi_x \end{bmatrix} \quad 3.69$$

V případě, že známe pole deformací sendviče, můžeme vyšetřit pole napětí. Opět musíme uvažovat pole napětí jádra a potahů odděleně. Musíme však dbát na dodržení předpokladů sendvičové teorie, tj. na jádru působí pouze smyková napětí σ_{yz}^c a σ_{zx}^c (ostatní napětí $\sigma_{xx}^c = \sigma_{yy}^c = \sigma_{xy}^c = \sigma_{zz}^c = 0$) a pro oba potahy platí, že v k -té vrstvě jsou složky $\sigma_{yz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zz} = 0$.

Výsledný vztah pro sendvičovou teorii s uvažováním smyku je

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ C_{11} & C_{12} & C_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{44} & F_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{45} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \\ \gamma_{yz}^c \\ \gamma_{zx}^c \end{bmatrix}, \quad 3.70$$

kde

$$\begin{aligned} A_{ij} &= A_{ij}^1 + A_{ij}^2, \\ B_{ij} &= \frac{h}{2}(A_{ij}^2 - A_{ij}^1), \\ C_{ij} &= C_{ij}^1 + C_{ij}^2, \\ D_{ij} &= \frac{h}{2}(C_{ij}^2 - C_{ij}^1). \end{aligned} \quad 3.71$$

Index 1 je pro horní potah a index 2 pro dolní. Dále platí

$$\begin{aligned} A_{ij}^1 &= \int_{-(\frac{h}{2}+h_1)}^{-\frac{h}{2}} (C_{ij})_k dz = \sum_{k=1}^{n_1} \int_{h_{k-1}}^{h_k} (C_{ij})_k dz = \sum_{k=1}^{n_1} (C_{ij})_k (h_k - h_{k-1}), \\ A_{ij}^2 &= \int_{\frac{h}{2}}^{-(\frac{h}{2}+h_1)} (C_{ij})_k dz = \sum_{k=1}^{n_2} \int_{h_{k-1}}^{h_k} (C_{ij})_k dz = \sum_{k=1}^{n_2} (C_{ij})_k (h_k - h_{k-1}), \\ C_{ij}^1 &= \int_{-(\frac{h}{2}+h_1)}^{-\frac{h}{2}} z (C_{ij})_k dz = \sum_{k=1}^{n_1} \int_{h_{k-1}}^{h_k} z (C_{ij})_k dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_1} (C_{ij})_k (h_k^2 - h_{k-1}^2), \\ C_{ij}^2 &= \int_{\frac{h}{2}}^{-(\frac{h}{2}+h_1)} z (C_{ij})_k dz = \sum_{k=1}^{n_2} \int_{h_{k-1}}^{h_k} z (C_{ij})_k dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_2} (C_{ij})_k (h_k^2 - h_{k-1}^2), \\ F_{ij} &= hC_{ij}^c, \end{aligned} \quad 3.72$$

kde n_1 a n_2 jsou počty vrstev v horním a dolním potahu, F_{ij} jsou prvky smykové tuhosti a C_{ij}^c smykové konstanty jádra.

Vztah (3.70) lze přepsat do tvaru

$$\begin{bmatrix} \vec{N} \\ \vec{M} \\ \vec{Q}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ C & D & 0 \\ 0 & 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\varepsilon}_m^0 \\ \vec{k} \\ \vec{\gamma}^c \end{bmatrix}. \quad 3.73$$

3.3.3 Sendvičová teorie bez uvažování smyku

Nebudeme-li uvažovat u sendvičové teorie vliv smyku, bude nosník obsahovat jádro s nulovou smykovou tuhostí (jako by mezi potahy nebyl materiál). Z toho vyplývá, že matice $F = 0$. Potahy budou opět přenášet pouze ohyb.

Vztah pro sendvičovou teorii (3.73) bude bez uvažování smyku ve tvaru

$$\begin{bmatrix} \vec{N} \\ \vec{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\varepsilon}_m^0 \\ \vec{k} \end{bmatrix}. \quad 3.74$$

3.4 Vliv teploty

Vlivem změny teploty dochází v tělesech ke změně rozměrů a k tzv. teplotnímu přetvoření. Je známo, že při změně teploty o ΔT dochází k teplotnímu přetvoření (deformaci)

$$\varepsilon^T = \alpha \Delta T, \quad 3.75$$

kde α je součinitel teplotní roztažnosti.

Pokud deformace, která vyvolává napětí, označíme jako $\vec{\varepsilon}_m$ (mechanická deformace), můžeme pro ni napsat vztah

$$\vec{\varepsilon}^M = \vec{\varepsilon} - \vec{\varepsilon}^T, \quad 3.76$$

kde $\vec{\varepsilon}$ je celková deformace.

Výraz pro mechanické deformace k -té vrstvy můžeme přepsat do tvaru

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^M \\ \varepsilon_{yy}^M \\ \gamma_{xy}^M \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 + z k_x - \alpha \Delta T \\ \varepsilon_{yy}^0 + z k_y - \alpha \Delta T \\ \gamma_{xy}^0 + z k_{xy} \end{bmatrix}_k. \quad 3.77$$

Napětí od teploty bude ve tvaru

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx}^T \\ \sigma_{yy}^T \\ \sigma_{xy}^T \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{26} \\ C_{61} & C_{62} & C_{66} \end{bmatrix}_k \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 + z k_x - \alpha \Delta T \\ \varepsilon_{yy}^0 + z k_y - \alpha \Delta T \\ \gamma_{xy}^0 + z k_{xy} \end{bmatrix}_k. \quad 3.78$$

V tomto vztahu (3.78) jsou neznámé deformace střední roviny ε_m^0 a křivosti k .

Vztahy pro vnější síly a momenty s vlivem teploty jsou poté ve tvaru

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{12}^T & A_{16}^T \\ A_{21}^T & A_{22}^T & A_{26}^T \\ A_{61}^T & A_{62}^T & A_{66}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta T \\ \Delta T \\ \Delta T \end{bmatrix}, \quad 3.79$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_{11}^T & B_{12}^T & B_{16}^T \\ B_{21}^T & B_{22}^T & B_{26}^T \\ B_{61}^T & B_{62}^T & B_{66}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta T \\ \Delta T \\ \Delta T \end{bmatrix}, \quad 3.80$$

kde pro matice A^T i B^T platí, že pokud $ij = 16, 26, 66$ pak $A_{16}^T = A_{26}^T = A_{66}^T = 0$,
 $B_{16}^T = B_{26}^T = B_{66}^T = 0$.

Ostatní prvky matic A^T a B^T spočítáme podle následujících vztahů

$$A_{ij}^T = \sum_{k=1}^n \alpha_k (C_{ij})_k (h_k - h_{k-1}), \quad 3.81$$

$$B_{ij}^T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \alpha_k (C_{ij})_k (h_k^2 - h_{k-1}^2).$$

V případě, že vnější síly a momenty jsou nulové, pak vztahy (3.79) a (3.80) můžeme přepsat do tvaru

$$\begin{bmatrix} \vec{N}^T \\ \vec{M}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\varepsilon}_m^0 \\ \vec{k} \end{bmatrix}, \quad 3.82$$

kde

$$N^T = \begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{12}^T & A_{16}^T \\ A_{21}^T & A_{22}^T & A_{26}^T \\ A_{61}^T & A_{62}^T & A_{66}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta T \\ \Delta T \\ \Delta T \end{bmatrix}, \quad 3.83$$

$$M^T = \begin{bmatrix} M_x^T \\ M_y^T \\ M_{xy}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11}^T & B_{12}^T & B_{16}^T \\ B_{21}^T & B_{22}^T & B_{26}^T \\ B_{61}^T & B_{62}^T & B_{66}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta T \\ \Delta T \\ \Delta T \end{bmatrix}.$$

Deformace střední roviny ε_m^0 a křivosti k od teploty lze získat inverzí vztahu (3.82)

$$\begin{bmatrix} \vec{\varepsilon}_m^0 \\ \vec{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{B} & \bar{D} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{N}^T \\ \vec{M}^T \end{bmatrix}. \quad 3.84$$

V případě spolupůsobení vnějšího zatížení \vec{N} a \vec{M} platí

$$\begin{bmatrix} \vec{\varepsilon}_m^0 \\ \vec{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{B} & \bar{D} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{N} + \vec{N}^T \\ \vec{M} + \vec{M}^T \end{bmatrix}. \quad 3.85$$

4. Experimenty

4.1 Parametry zadaného sendvičového nosníku pro experimenty

Pro samotný experiment máme k dispozici sendvičové nosníky s následujícími parametry:

Základní rozměry: délka 450mm

šířka 91,5 mm

výška horního potahu 0,7 mm

výška jádra 39,5 mm

výška dolního potahu 0,7 mm

Sendvič budeme zatěžovat na tzv. tříbodový ohyb, kde vzdálenost podpor $l = 300$ mm.

Sendvič je složen z následujících materiálů: horní potah – *nerez ocel*

jádro – *pěna Airex C70.55 (žlutá)*

dolní potah – *dural*

Materiálové parametry za normální teploty udávané výrobcem jsou následující:

horní potah [7]: tahový E modul: $200\,000\text{ N}\cdot\text{mm}^{-2}$

smykový G modul: $77\,000\text{ N}\cdot\text{mm}^{-2}$

součinitel teplotní roztažnosti $\alpha = 17,3 \cdot 10^{-6}\text{ K}^{-1}$

jádro [5]: tahový E modul udávaný výrobcem: $45\text{ N}\cdot\text{mm}^{-2}$ (střední)

tlakový E modul udávaný výrobcem: $69\text{ N}\cdot\text{mm}^{-2}$ (střední)

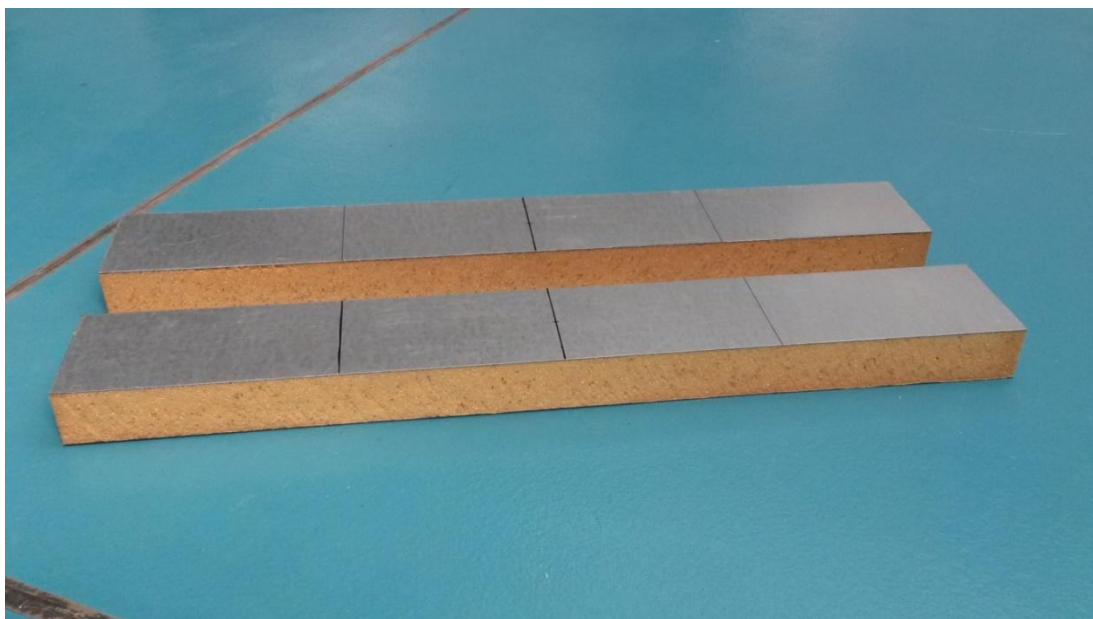
smykový G modul: $22\text{ N}\cdot\text{mm}^{-2}$ (střední)

součinitel teplotní roztažnosti $\alpha = 4,5 \cdot 10^{-5}\text{ K}^{-1}$

dolní potah [6]: tahový E modul: $73\,100\text{ N}\cdot\text{mm}^{-2}$

smykový G modul: $28\,000\text{ N}\cdot\text{mm}^{-2}$

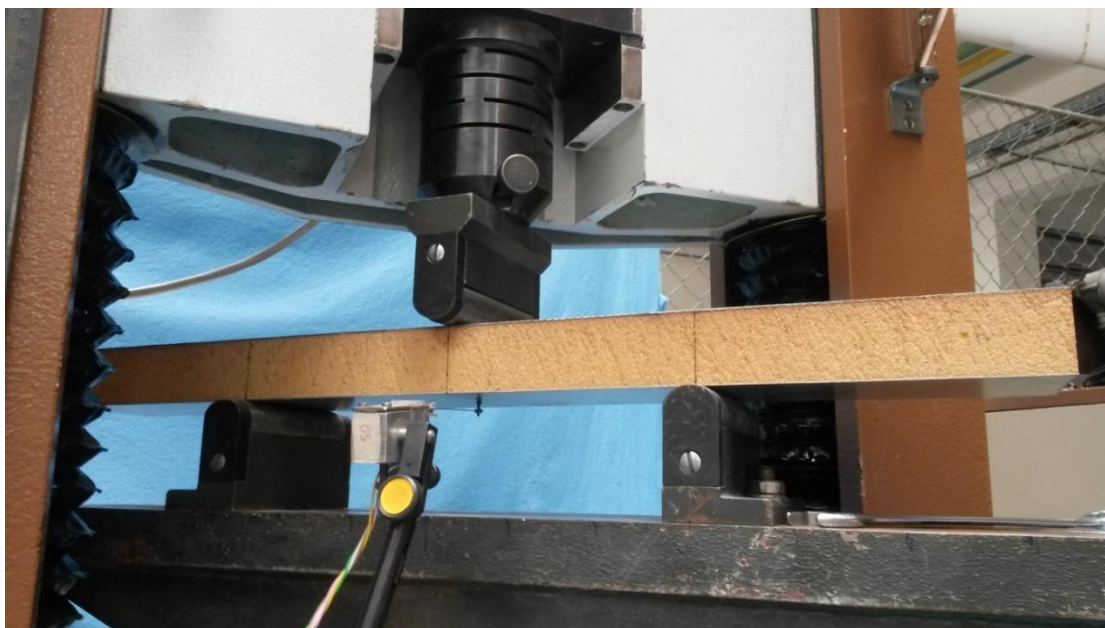
součinitel teplotní roztažnosti $\alpha = 23,2 \cdot 10^{-6}\text{ K}^{-1}$



Obr. 4.1 – Měřené vzorky sendvičových nosníků

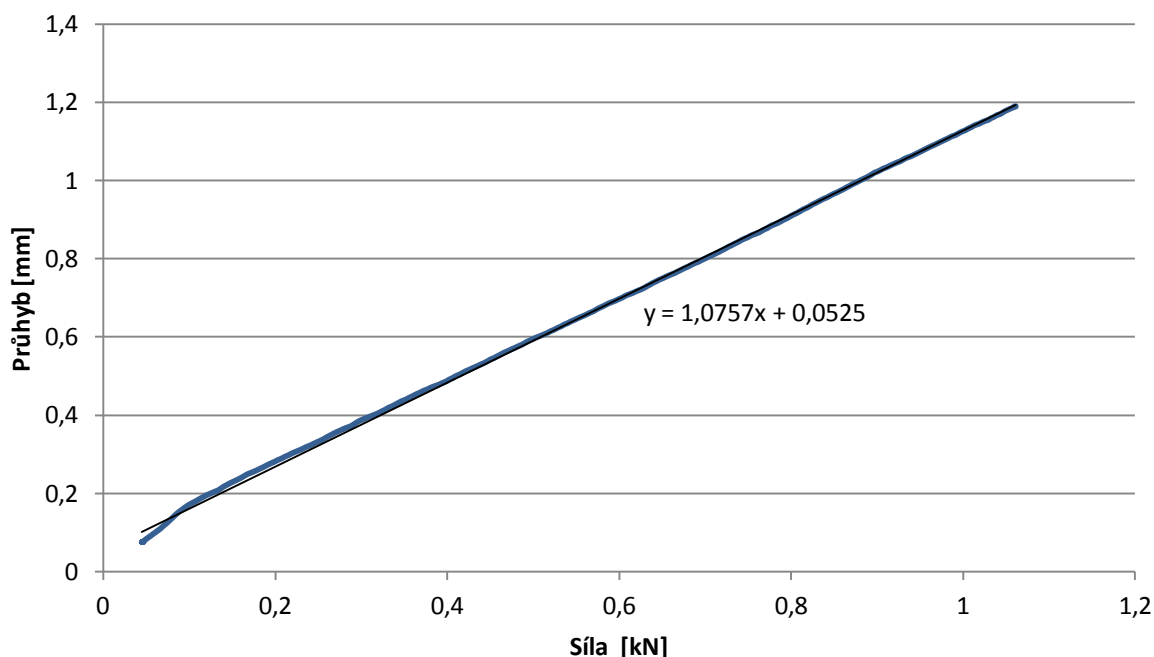
4.1.1 Experiment č. 1 – zatěžování sendvičového nosníku za normální teploty

Jako první experiment jsme zvolili zatěžování nosníku na tříbodový ohyb. Zatěžovali jsme sendvičový nosník daných rozměrů za teploty okolí 23°C. Daný vzorek jsme upevnili do zatěžovacího stroje a začali zatěžovat silou do 1kN. K dispozici jsme měli dva vzorky. Při zatěžování nám počítač snímal čas, velikost síly, posuv a průhyb. Naměřená data byla vynesena do grafu průhyb – síla. Pro určení analytické funkce vyjadřující závislost průhybu na síle byla provedena lineární regrese.



Obr. 4.2 – Uspořádání experimentu č. 1

Zatěžování vzorku č. 1 za normální teploty

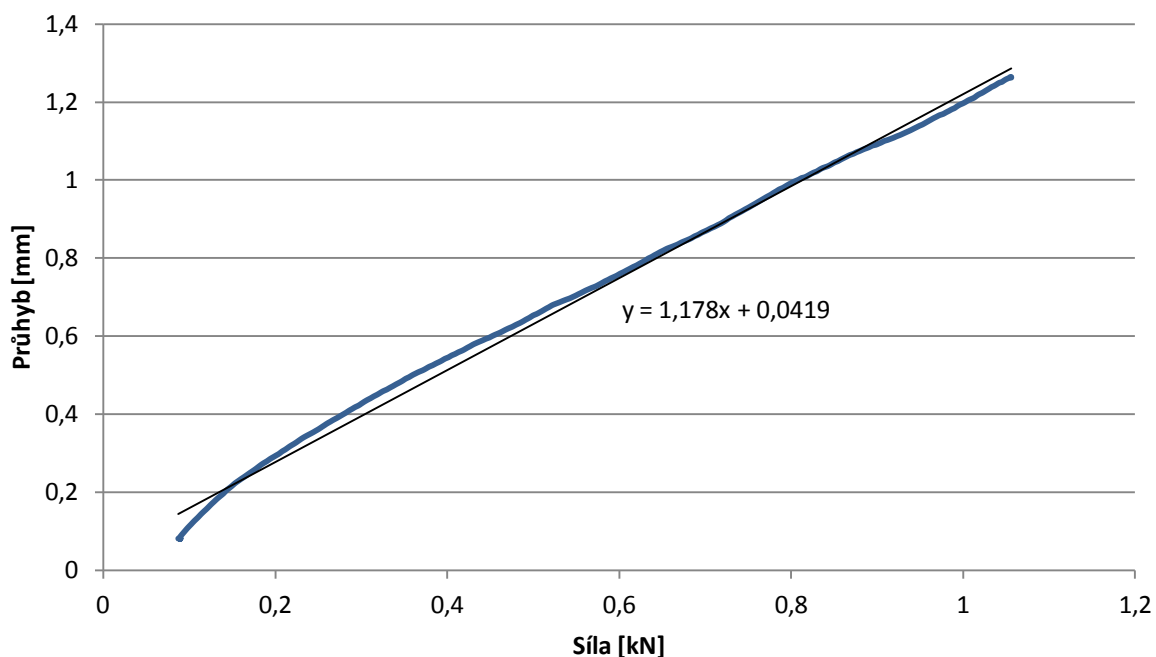


Průhybová čára je posunuta od počátku souřadnicového systému, protože na začátku měření je velký vliv vedlejších jevů, jako dosednutí nosníku na podpory apod. K tomuto posunutí dochází u všech měření. Proto jsme mohli u všech grafů provést numerické vynulování směrnice (např. z rovnice $y = 1,0757x + 0,0525$ vznikne po numerickém vynulování rovnice $y = 1,0757x$).

Přímka proložení má rovnici (4.1), pokud do této rovnice dosadíme velikost síly 1 kN, zjistíme daný průhyb pro tuto sílu. Velikost průhybu při zatížení silou 1 kN pro první vzorek vychází 1,0757 mm.

$$\begin{aligned}y &= 1,0757 x \\y &= 1,0757 \cdot 1 && 4.1 \\y &= 1,0757 \text{ mm}\end{aligned}$$

Zatěžování vzorku č. 2 za normální teploty

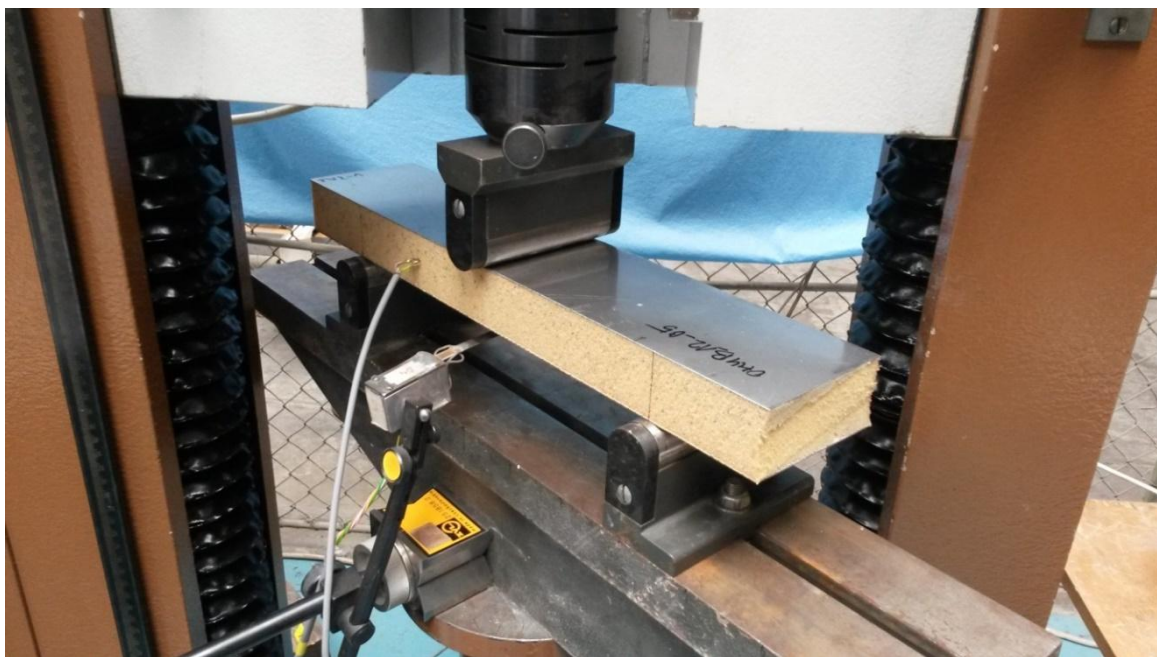


Přímka proložení má rovnici (4.2), do této rovnice jsme dosadili velikost síly 1 kN a zjistili daný průhyb pro tuto sílu. Velikost průhybu pro druhý vzorek vychází 1,178 mm.

$$\begin{aligned}y &= 1,178 x \\y &= 1,178 \cdot 1 && 4.2 \\y &= 1,178 \text{ mm}\end{aligned}$$

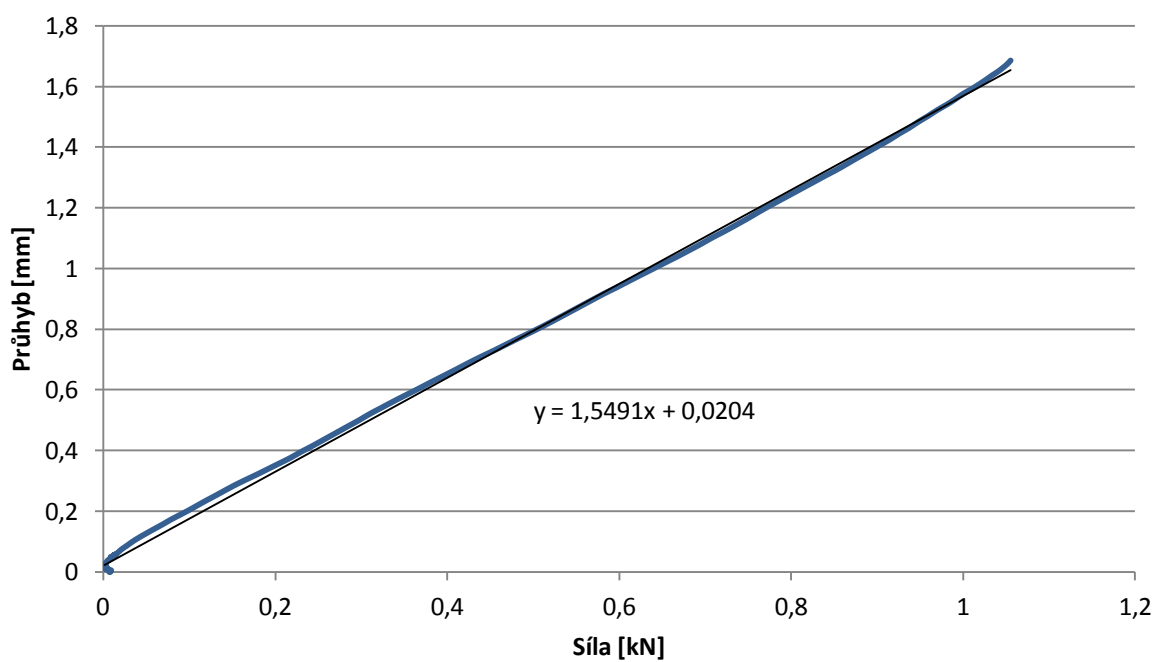
4.1.2 Experiment č. 2 - zatěžování sendvičového nosníku s vlivem teploty

Jako druhý experiment jsme zvolili zatěžování nosníku stejných rozměrů a vlastností jako u experimentu č. 1, ale nyní jsme oba vzorky ohřáli v peci na teplotu 80°C. Poté jsme vzorky vyjmuli z pece a umístili do zatěžovacího stroje. Uvnitř vzorku v jádru sendviče jsme měli zabudovaný snímač teploty Pt 1000. Ten snímal teplotu v průběhu celého zatěžování.



Obr. 4.3 – Uspořádání experimentu č. 2

Zatěžování vzorku č. 1 s vlivem teploty



$$y = 1,5491 x$$

$$y = 1,5491 \cdot 1$$

$$y = 1,5491 \text{ mm}$$

4.3

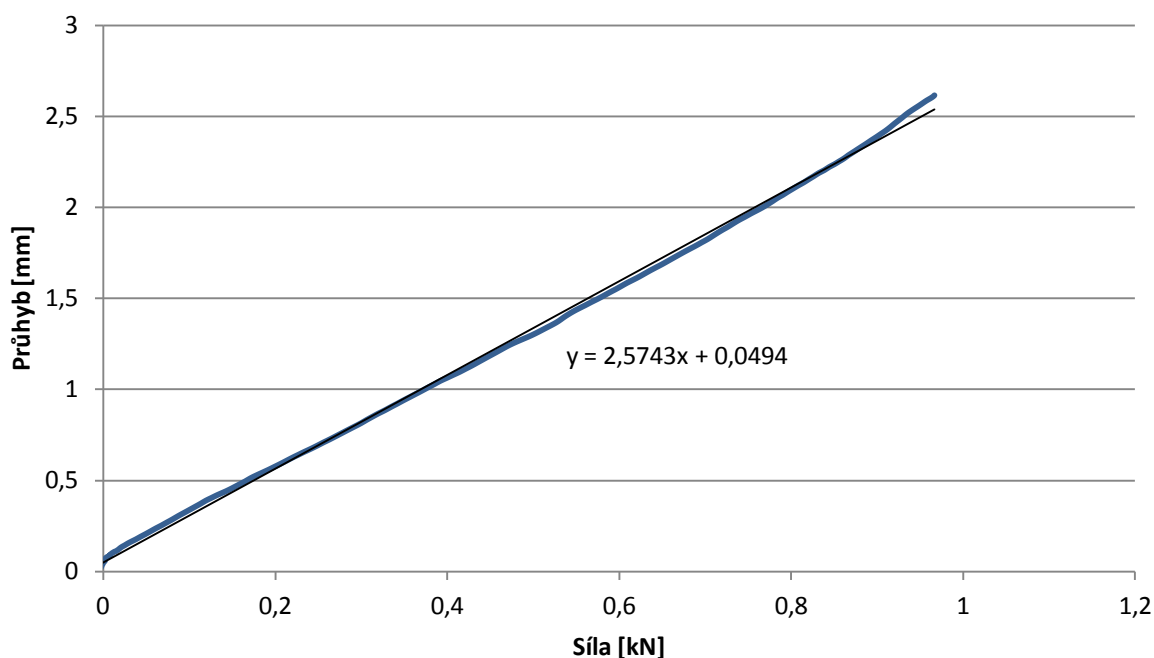
Teplota vzorku se v průběhu zatěžování změnila z maximální teploty 45,57°C na minimální teplotu 42,17°C. Průměrná teplota, se kterou budeme počítat ve výpočtech, tedy je

$$T = 43,7188 \text{ } ^\circ\text{C}. \quad 4.4$$

Průhyb tohoto nosníku při zatížení silou 1 kN a při průměrné teplotě 43,7188 °C je 1,5491 mm.

Zatěžování vzorku č. 2 jsme provedli dvakrát po sobě (zatížení – odlehčení), proto máme dva grafy (2a, 2b) pro různé teploty.

Zatěžování vzorku č. 2a s vlivem teploty



$$y = 2,5743 x$$

$$y = 2,5743 \cdot 1 \quad 4.5$$

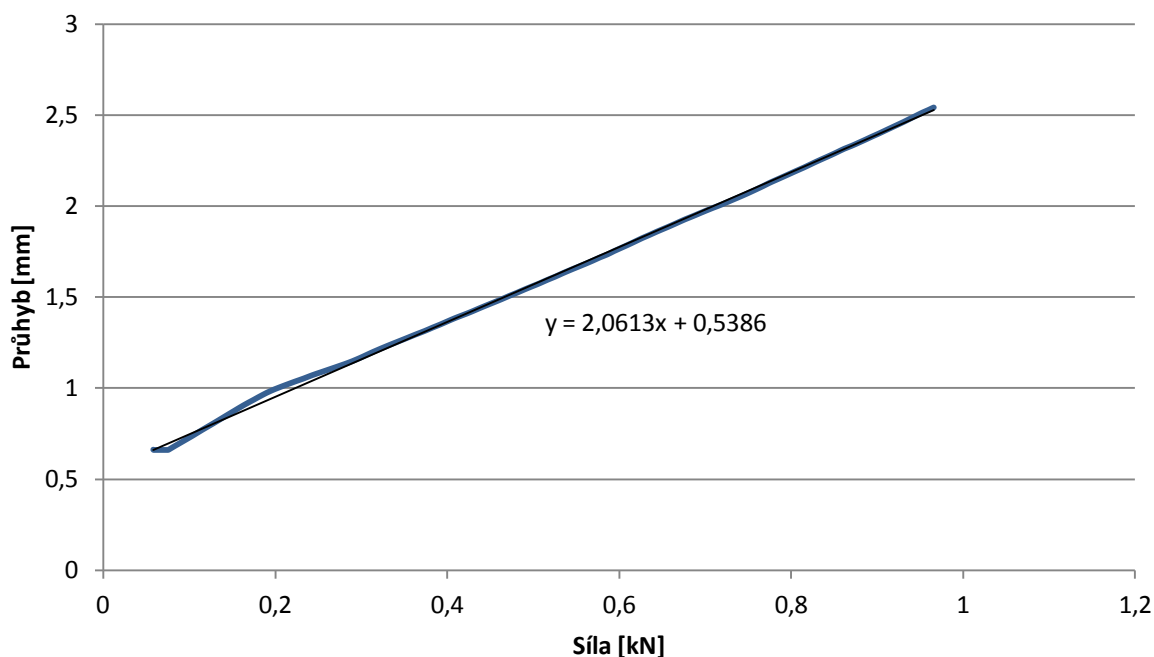
$$y = 2,5743 \text{ mm}$$

Během zatěžování teplota klesala z 61,59°C na 52,06°C. Průměrná teplota, se kterou budeme provádět výpočty, tedy je

$$T = 56,4007 \text{ } ^\circ\text{C}. \quad 4.6$$

Průhyb tohoto nosníku při zatížení silou 1 kN a při průměrné teplotě 56,4007 °C je 2,5743 mm.

Zatěžování vzorku č. 2b s vlivem teploty



$$y = 2,0613 x$$

$$y = 2,0613 \cdot 1 \quad 4.7$$

$$y = 2,0613 \text{ mm}$$

Teplota vzorku se v průběhu zatěžování zmenšovala z maximální hodnoty 48,77°C na minimální hodnotu 46,53°C. Průměrná teplota a teplota, se kterou budeme počítat ve výpočtech tedy je

$$T = 47,5990 \text{ °C.} \quad 4.8$$

Průhyb tohoto nosníku při zatížení silou 1 kN a při průměrné teplotě 47,5990 °C je 2,0613 mm.

4.1.3 Experiment č. 3 - určení tlakového E modulu jádra s vlivem teploty

U třetího experimentu jsme zatěžovali vzorek pěny z našich nosníků o velikosti 75x75 mm a tloušťce $h = 43$ mm. Do pěny jsme opět zabudovali snímač teploty Pt 1000 a zahřáli v peci na teplotu 80°C. Poté jsme provedli tlakovou zkoušku pěny. Počítač nám snímal hodnoty času t , sílu F , posuv s a teplotu vzorku T . Z těchto údajů musíme následně vypočítat napětí σ a deformaci ϵ , abychom mohli sestavit graf $\sigma=f(\epsilon)$.



Obr. 4.4 – Uspořádání experimentu č.3

Napětí vypočítáme podle následujícího vztahu

$$\sigma = \frac{F}{A}, \quad 4.9$$

kde F je zatěžující síla a A je plocha vzorku.

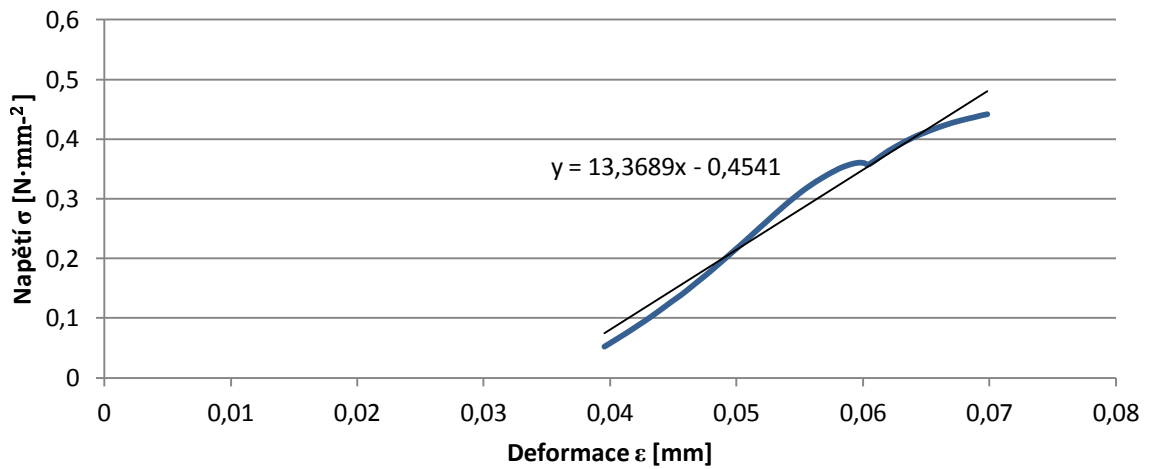
Deformaci vypočítáme podle této rovnice

$$\varepsilon = \frac{s}{h}. \quad 4.10$$

Pro následný výpočet využijeme Hookova zákona

$$\sigma = E \cdot \varepsilon. \quad 4.11$$

Určení modulu pružnosti jádra v tlaku na vzorku č. 1



Proložení naměřených dat přímkou a posunutím do počátku dostaneme rovnici

$$y = 13,3689 \cdot x$$

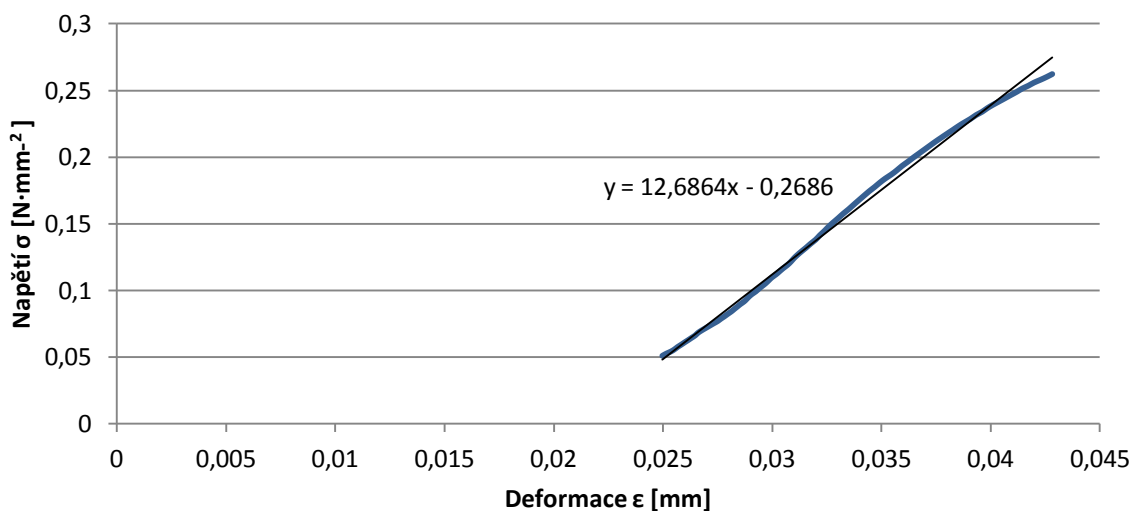
$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad 4.12$$

$$E = 13,3689 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$$

Vzorek postupně chladl z teploty $49,89^\circ\text{C}$ na teplotu $48,23^\circ\text{C}$. Průměrná teplota, se kterou budeme počítat ve výpočtech, tedy je

$$T = 49,0093 \text{ }^\circ\text{C}. \quad 4.13$$

Určení modulu pružnosti jádra v tlaku na vzorku č.2



Stejným způsobem jako u měření vzorku č. 1 dostaneme rovnici a tlakový E modul jádra

$$y = 12,6864 \cdot x$$

$$\sigma = E \cdot \epsilon \quad 4.14$$

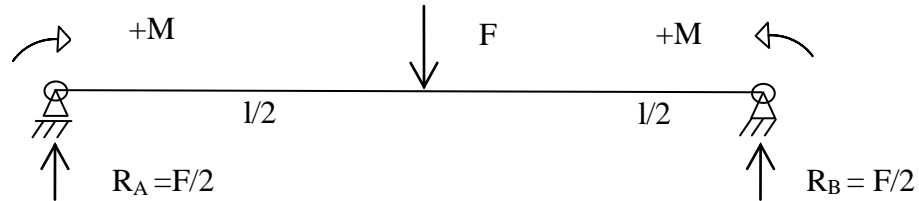
$$E = 12,6864 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$$

Teplota vzorku v průběhu zatěžování klesla z $49,93^\circ\text{C}$ na $47,65^\circ\text{C}$. Průměrná teplota, se kterou budeme počítat ve výpočtech, tedy je

$$T = 48,7246 \text{ }^\circ\text{C}. \quad 4.15$$

5. Analytický výpočet průhybu

Jednotlivé teorie uvedené v předchozích kapitolách byly využity pro výpočet průhybu nosníku na obr. 5.1 a srovnány s experimentem. Jedná se o nosník namáhaný tzv. třibodým ohybem.



Obr. 5.1 – Schéma experimentu

5.1 Výpočet průhybu dle jednotlivých teorií

Pro výpočet průhyb jsou využity vztahy uvedené v předchozích kapitolách. Při aplikaci na nosník $N_x = N_y = N_{xy} = 0$, $M_x = \frac{M_o}{b}$ (funkce ohybového momentu), $M_y = M_{xy} = 0$. V případě uvažování smykových sil $Q_x = \frac{T}{b}$ (funkce posouvající síly), $Q_y = 0$. Symbol b značí šířku nosníku.

Protože uvažujeme pouze namáhání ve směru x a dále, že průhyb w je funkcí pouze souřadnice x (závislost na y je zanedbána), vyjde pro laminátovou teorii za normální teploty bez vlivu smyku

$$k_x = -\frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} = \overline{D_{11}} \cdot M_x, \quad 5.1$$

kde D_{11}^* je první člen inverzní matice ohybové tuhosti.

Vzhledem k tomu, že nosník je symetricky zatížený, plyne pro funkci M_x na polovině nosníku

$$M_x = \frac{1}{b} \cdot \frac{F}{2} \cdot x, \quad 5.2$$

kde x je souřadnice ve směru podélné osy nosníku zavedená z jedné podpory.

Po vyřešení rovnice (5.1) a dosazením za $x = l/2$ obdržíme průhyb uprostřed nosníku

$$w_f = \frac{Fl^3}{48b} \cdot \overline{D_{11}}. \quad 5.3$$

Pro laminátovou teorii s uvažováním smykových sil za normální teploty a stejných předpokladů jako výše, vyjde průhyb

$$w_f = \frac{Fl^3}{48b} \cdot \overline{D_{11}} \cdot \left(1 + 12 \frac{F_{55}^*}{\overline{D_{11}}} \cdot \frac{1}{l^2}\right), \quad 5.4$$

kde F_{55}^* je první člen inverzní matice smykové tuhosti.

Pro sendvičovou teorii s uvažováním smykových sil dostaneme rovnici stejnou jako pro laminátovou teorii (5.4) pouze s tím rozdílem, že matice ohybové tuhosti závisí pouze na vlastnostech potahů a matice smykové tuhosti pouze na vlastnostech jádra. Bez uvažování smykových sil bude matice smykové tuhosti jádra nulová a rovnice (5.4) se změní na (5.3).

Při výpočtu s vlivem teploty vyjdeme z rovnice (3.85) a protože opět uvažujeme, že průhyb w závisí pouze na směru osy x , dostaneme obdobné vztahy jako (5.3) a (5.4), doplněné o člen, který přísluší průhybu jenom od ohřevu

$$w_f = \frac{Fl^3}{48b} \cdot \overline{D_{11}} + w_f^T, \quad 5.5$$

kde w_f^T je průhyb odpovídající pouze zatížení silami N^T a momenty M^T , definovanými v rovnicích (3.83).

Analogicky při uvažování smyku získáme

$$w_f = \frac{Fl^3}{48b} \cdot \overline{D_{11}} \cdot \left(1 + 12 \frac{F_{55}^*}{D_{11}} \cdot \frac{1}{l^2} \right) + w_f^T. \quad 5.6$$

Obdobně lze doplnit vztahy pro výpočet průhybů sendvičové teorie.

Zdrojový kód pro výpočet průhybů podle jednotlivých teorií v programu Matlab [8] je uveden v příloze na CD.

5.2 Výpočet průhybu – srovnání s experimentem č. 1

Experiment č. 1 spočíval v zatěžování dvou vzorků za normální teploty. V následující tabulce se nachází výsledky výpočtů průhybu.

Průhyb zadaného nosníku w_0 [mm]			
		s vlivem smykových sil	bez vlivu smykových sil
Laminátová teorie	tahový E modul jádra	0,1026	0,0915
	tlakový E modul jádra	0,1033	0,0922
	průměrný E modul jádra	0,1024	0,0914
Sendvičová teorie		1,0370	0,0938
Experiment	vzorek č.1	1,0757	
	vzorek č.2	1,1780	

Tabulka 5.1 – Výsledné průhyby za normální teploty

5.3 Výpočet průhybu – srovnání s experimentem č. 2

Experiment č. 2 je experiment s vlivem teploty. Výpočet jsme provedli s využitím vzorců (3.75) až (3.85) pro teplotu $T = 47,5990^\circ\text{C}$, protože za podobné teploty jsme změřili tlakový modul E pružnosti jádra, viz (4.14). Změna materiálových vlastností potahů je

velmi malá, například u nerez oceli při 20°C je $E=200\,000\text{ N}\cdot\text{mm}^{-2}$ a při teplotě 100°C se změní na $E=195\,000\text{ N}\cdot\text{mm}^{-2}$. S ohledem na rozdíl teplot v experimentu můžeme tuto změnu zanedbat.

Průhyb zadaného nosníku w_0 [mm]		
	s vlivem smykových sil	bez vlivu smykových sil
Laminátová teorie	0,1494	0,1382
Sendvičová teorie	5,2355	0,1053
Experiment	2,0613	

Tabulka 5.2 – Výsledné průhyby pro $T=47,5990\text{ °C}$

6. Závěr

V této práci jsme provedli výpočet i vlastní měření průhybu za pokojové teploty. Experiment jsme provedli na dvou vzorcích a oba výsledky se lišily zhruba o desetinu milimetru. Výpočty podle laminátových teorií a podle sendvičové teorie bez vlivu smykových sil se od experimentu značně liší. Experimentu se nejvíce blíží sendvičová teorie s vlivem smykových sil. To je, když uvažujeme dva potahy, které přenáší ohybový moment a mezi nimi jádro, které přenáší smykové síly. U laminátové teorie nemá velký vliv to, jestli bereme do výpočtů tahový nebo tlakový E modul jádra.

U experimentu s vlivem teploty nám průhyb vyšel asi dvojnásobný oproti experimentu za pokojové teploty. U tohoto měření se výsledky od experimentu značně liší. Výpočet průhybu po ohřátí jsme provedli se sníženým tlakovým E modulem jádra, který jsme změřili v experimentu č. 3, což má na výsledný průhyb vliv. Protože jsme měli vnější zatížení ohybovým momentem pouze ve směru osy x , po vypočtení vnitřních sil a momentů vzniklých změnou teploty jsme s ohledem na jejich velikost vzhledem k vnějšímu zatížení a k rozměrům nosníku neuvažovali vliv přetvoření ve směru osy y na průhyb w ve směru osy x . Tím jsme se však, jak ukázal experiment, dopustili přílišného zjednodušení a nelze takovýto výpočet považovat za směrodatný. Zadání bakalářské práce bylo splněno.

V další práci je možné vlivy nepřesností uvažovat a zkoumat například jaké chyby se dopustíme při různých způsobech zjednodušení výpočtů pro jejich využití ve strojírenské praxi.

7. Zdroje

- [1] LAŠ, Vladislav. *Mechanika kompozitních materiálů*. Vydání 2. přepracované. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2008. 200 s. ISBN 978-80-7043-689-9.
- [2] GAY, Daniel. *Composite materials*. Third edition. CRC Press, Boca Raton, 2015. 315 s. ISBN 1-58716-084-6.
- [3] MICHALEC, Jiří a kol. *Pružnost a pevnost I*. Vydání 2. Praha: České vysoké učení technické v Praze, 2006. 320 s. ISBN 80-01-02359-1.
- [4] *Elevated temperature physical properties of stainless steels* [online]. British stainless steel association. Dostupné z:
<http://www.bssa.org.uk/topics.php?article=139>
- [5] *Data Sheet Airex C70* [online]. 3AComposites. Dostupné z:
<http://www.3acorematerials.com/products/airex/airexreg-c70.html>
- [6] *ASM Aerospace specification metals – Aluminium 2024 – T3* [online]. MatWeb, LLC. Dostupné z:
<http://asm.matweb.com/search/SpecificMaterial.asp?bassnum=MA2024T3#>
- [7] *ASM Aerospace specification metals – AISI Type 347 Stainless Steel* [online]. MatWeb, LLC Dostupné z:
<http://asm.matweb.com/search/SpecificMaterial.asp?bassnum=MQ347AQ>
- [8] *MATLAB Documentation* [online]. The Mathworks, Inc. Dostupné z:
<http://www.mathworks.com/help/index.html>