

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ
FAKULTA STROJNÍ



BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Lukáš Kazda

Souhrn

Číslo bakalářské práce:

Název tématu práce:

Měření momentu setrvačnosti

Diplomant:

Lukáš Kazda

Vedoucí práce

Doc. Dr. Ing. Gabriela Achtenová

Cílem teoretické části této práce je seznámení se s metodami měření momentu setrvačnosti a s měřicím stanovištěm v laboratořích Ústavu automobilů. Praktická část má více cílů, jedním z nich je zapojit měřicí stanoviště efektivněji než doposud. Je úkolem vytvořit k tomuto zapojení manuál. Dalším cílem je navrhnout možnosti přesného měření úhlu zavěšené součásti. K měření momentu setrvačnosti byl v rámci této práce vytvořen poster a manuál.

Klíčová slova

Moment setrvačnosti, deviační moment, měření momentu setrvačnosti, měření torzní tuhosti, metoda torzních kmitů, světelná závora, LabVIEW, měření úhlu, manuál zapojení.

Summary

Title: Measuring the Moment of Inertia

The goal of the theoretical part of this bachelor thesis is to get acquainted with methods of measuring moment of inertia and with measuring stance in laboratory of the Department of automotive. Practical part has more goals. One of them is to connect the measuring stance more effectively. There is a manual created for this. Another goal is to propose the possibilities to measure an accurate angle of hung object. There is also a poster and manual created for an explanation the measuring.

Key words

Moment of inertia, measuring moment of inertia, measuring torsional stiffness, torsional pendulum method, light barrier, LabVIEW, angle measurement, connection manual

Prohlášení o autorství

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci na téma „Měření momentu setrvačnosti“ vypracoval samostatně za použití uvedených zdrojů a konzultací s vedoucí práce.

Lukáš Kazda

V Praze dne

.....

podpis

Obsah

1	Moment setrvačnosti.....	8
1.1	Motivace.....	8
1.2	Odvození momentu setrvačnosti.....	8
1.3	Maticе setrvačnosti.....	9
1.4	Steinerova věta.....	11
1.5	Deviační moment.....	12
2	Metody stanovení momentu setrvačnosti.....	13
2.1	Výpočtem z tabulek.....	13
2.2	Výpočtem integrací.....	13
2.3	Pomocí CAD software.....	13
2.4	Experimentálně, metodou torzních kmitů.....	15
2.5	Experimentálně, pomocí rotačního disku.....	18
3	Stanoviště měření momentu setrvačnosti v laboratořích ČVUT.....	19
3.1	Celkový pohled na stanoviště.....	19
3.2	Závěs.....	20
3.3	Zapojení elektrických prvků.....	21
3.3.1	Zapojení s prvkem CompactDAQ.....	21
3.3.2	Zapojení s prvkem DAQCard a konektorovým blokem NI CB-68LP.....	22
3.4	Zdroj napětí.....	23
3.5	Světelná závora.....	23
3.6	Přístroje pro úpravu signálu.....	24

3.6.1	CompactDAQ a modul NI 9402.....	24
3.6.2	DAQCard s konektorovým blokem CB-68LP.....	25
3.7	Software vyhodnocující měření.....	25
4	Stanovení úhlu zavěšení měřeného předmětu.....	26
4.1	Stanovení úhlu úhломěrem.....	26
4.2	Stanovení úhlu goniometricky.....	26
4.3	Stanovení úhlu bezkontaktními senzory.....	27
5	Kontrolní měření.....	28
5.1	Stanovení torzní tuhosti drátu.....	29
5.2	Měření hlavních momentů setrvačnosti při staré variantě zapojení.....	29
5.3	Měření hlavních momentů setrvačnosti při nové variantě zapojení.....	30
5.4	Měření momentu setrvačnosti setrvačnicku.....	30
6	Závěr.....	30
7	Poděkování.....	31
8	Použitá literatura.....	32
9	Seznam příloh.....	33

Seznam použitých veličin

Veličina	symbol	jednotka
Moment setrvačnosti	I	kg.m^2
Poloměr	r	m
Kinetická energie	E_k	J
Hmotnost	m	kg
Rychlost	v	m.s^{-1}
Úhlová rychlost	ω	rad.s^{-1}
Deviační moment	D	kg.m^2
Kolmá vzdálenost osy rozace od těžiště	e	m
Hustota	ρ	kg.m^{-3}
Průměr	d	m
Úhel pootočení	φ	$\text{rad},^\circ$
Doba kmitu	T	s
Doba kyvu	τ	s
Modul pružnosti ve smyku	G	N.m^{-2}
Moment síly	M	N.m
Tečná síla	T	N
Tíhové zrychlení	g	m.s^{-2}
Úhel	α	$^\circ$
Úhel	β	$^\circ$

1 Moment setrvačnosti

Moment setrvačnosti byl poprvé představen Christiaanem Huygensem v roce 1673. Samotný název „moment setrvačnosti“ mu přiřkl až v roce 1765 Leonhard Euler^[1]. Je to jedna z nejdůležitějších veličin při řešení problematiky dynamiky tuhých těles. Udává vlastnost tělesa rotujícího kolem pevné osy. Podobně jako je hmotnost charakteristickou veličinou pro určení energie tělesa vykonávajícího posuvný pohyb, analogicky k tomu je moment setrvačnosti charakteristickou veličinou pro pohyb rotační. Při rotačním pohybu totiž nezáleží jen na hmotnosti tělesa, ale také na jejím rozložení vzhledem k ose rotace (viz odvození 1.2)

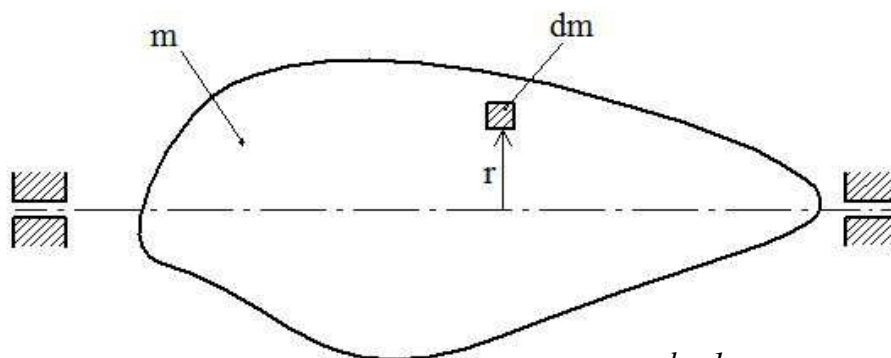
1.1 Motivace

Jak už je výše napsáno, jedná se o jednu z nejdůležitějších veličin v dynamice tuhých těles. Moment setrvačnosti je nutné znát pro sestavení pohybové rovnice tělesa nebo soustavy těles, které vykonávají torzní kmity. Jako příklad je možné uvést torzní kmity klikového hřídele automobilu, které se snažíme utlumit. Dále je důležitý pro řešení dynamiky soustav těles, kde potřebujeme znát silová působení, abychom správně nadimenzovali všechny součástky. Například při dimenzování součástí klikového mechanismu musíme znát moment setrvačnosti kliky i ojnice. Důležitý je i pro určení již zmíněné kinetické energie, jejíž znalost můžeme využít pro řešení dynamiky (pomocí Lagrangeových rovnic), pro stanovení spotřeby energie a potřebného výkonu nebo například pro stanovení brzdné síly. S momentem setrvačnosti také souvisí tzv. deviační moment (viz níže 1.3 matice setrvačnosti), se kterým počítáme při vyvažování rotujících těles, například klikového hřídele.

1.2 Odvození momentu setrvačnosti ^[2]

Moment setrvačnosti tělesa k ose je definován integrálem

$$I = \int_{(m)} r^2 dm \quad (1.1)$$



Tento vztah je možné odvodit pomocí kinetické energie. Začneme s kinetickou energií hmotného bodu, vykonávajícího posuvný pohyb, která je dána vztahem:

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 \quad (1.2)$$

Při uvažování pouze hmotného bodu platí tento vztah i pro pohyb rotační. Kde v je rychlost

obvodová, kterou můžeme rozepsat:

$$E_k = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (\omega r)^2 = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (1.3)$$

pro moment setrvačnosti hmotného bodu tedy platí:

$$I = m \cdot r^2 \quad (1.4)$$

Uvažujeme-li soustavu diskrétních hmotných bodů, musíme už rozlišovat mezi energií rotačního a posuvného pohybu. Obvodová rychlost je přímo úměrná vzdálenosti od osy rotace a energie při rotačním pohybu roste s druhou mocninou této vzdálenosti. Z toho vyplývá, že každý hmotný bod soustavy nemá stejnou kinetickou energii. Výsledná kinetická energie soustavy je pak součtem kinetických energií jednotlivých hmotných bodů.

$$E_k = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (1.5)$$

Moment setrvačnosti soustavy hmotných bodů je tedy součtem momentů setrvačnosti jednotlivých hmotných bodů.

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \quad (1.6)$$

Pro reálnou aplikaci je ovšem nejdůležitější moment setrvačnosti tělesa se spojitým rozložením hmoty. Diskrétní sčítání zde nahradíme spojitým, tedy integrací.

$$E_k = \int_{(m)} \frac{1}{2} \omega^2 r^2 dm = \frac{1}{2} \omega^2 \int_{(m)} r^2 dm = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (1.7)$$

Tímto dostáváme integrál (1.1)

$$I = \int_{(m)} r^2 dm \quad (1.1)$$

1.3 Matice setrvačnosti ^[2]

Výše popsané odvození nemá obecnou platnost. Jedná se o moment setrvačnosti vztažený pouze k jedné ose rotace. Jelikož žijeme v třídimenzionálním prostoru, setkáváme se v praxi často s rotací kolem více než jedné osy. Jako účinný nástroj je dobré si zadefinovat tzv. matici setrvačnosti, někdy také tenzor setrvačnosti. Při odvození vycházíme opět z kinetické energie, tentokrát zapsané ve vektorové formě:

$$E_k = \int_{(m)} \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 dm \quad (1.8)$$

kde \mathbf{v} je tříslóžkový vektor obvodové rychlosti, který můžeme rozepsat do následujících relací:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\rho} = \hat{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{\rho} = -\hat{\boldsymbol{\rho}} \boldsymbol{\omega} = -\boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{\omega} \quad (1.9)$$

kde $\boldsymbol{\omega}$ je vektor úhlové rychlosti, $\boldsymbol{\rho}$ radiusvektor, $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ potažmo $\boldsymbol{\Omega}$ jsou antisymetrické matice, přiřazené k vektoru $\boldsymbol{\omega}$ a nakonec $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ je antisymetrická matice, přiřazená k radiusvektoru $\boldsymbol{\rho}$:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (1.10 ; 1.11)$$

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

dále platí relace:

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}^T = \boldsymbol{\Omega}^T = -\hat{\boldsymbol{\omega}} = -\boldsymbol{\Omega} \quad \text{a} \quad \hat{\boldsymbol{\rho}}^T = -\hat{\boldsymbol{\rho}} \quad (1.14 ; 1.15)$$

před dosazením do vztahu (1.8) zbývá vyjádřit rychlost \mathbf{v}^2 :

$$\mathbf{v}^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \mathbf{v} \quad (1.16)$$

po dosazení do vztahu (1.8) tedy:

$$\begin{aligned} E_k &= \int_{(m)} \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{v} \, dm = \int_{(m)} \frac{1}{2} (\hat{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{\rho})^T (\hat{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{\rho}) \, dm = \int_{(m)} \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\rho})^T (\boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\rho}) \, dm = \\ &= \int_{(m)} \frac{1}{2} (-\hat{\boldsymbol{\rho}} \boldsymbol{\omega})^T (-\hat{\boldsymbol{\rho}} \boldsymbol{\omega}) \, dm = \int_{(m)} \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \hat{\boldsymbol{\rho}}^T \hat{\boldsymbol{\rho}} \boldsymbol{\omega} \, dm = \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \left(\int_{(m)} \hat{\boldsymbol{\rho}}^T \hat{\boldsymbol{\rho}} \, dm \right) \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \left(\int_{(m)} -\hat{\boldsymbol{\rho}} \hat{\boldsymbol{\rho}} \, dm \right) \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \left(\int_{(m)} -\hat{\boldsymbol{\rho}}^2 \, dm \right) \boldsymbol{\omega} = \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I}_s \boldsymbol{\omega} \end{aligned} \quad (1.17)$$

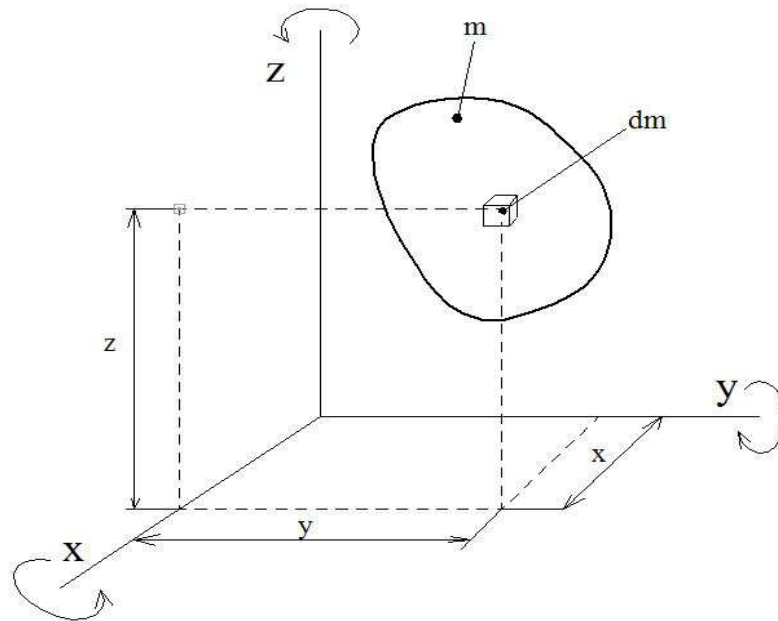
Kde \mathbf{I}_s je matice setrvačnosti, jejíž přesnou podobu je možné získat dalším roznásobením:

$$\mathbf{I}_s = - \int_{(m)} \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}^2 dm = - \int_{(m)} \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} dm =$$

$$= \int_{(m)} \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2 + y^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2 + y^2 \end{bmatrix} dm \quad (1.18)$$

$$\mathbf{I}_S = \begin{bmatrix} I_x & -D_{xy} & -D_{xz} \\ -D_{yx} & I_y & -D_{yz} \\ -D_{zx} & -D_{zy} & I_z \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

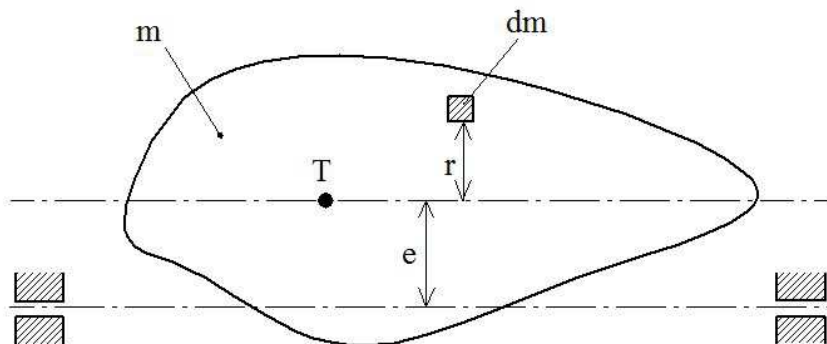
Matrice setrvačnosti je tedy symetrická, s momenty setrvačnosti k jednotlivým osám na hlavní diagonále. Prvky mimo diagonálu představují deviační momenty. Tuto matici můžeme použít při určení kinetické energie nebo k vyšetření silových účinků působících na těleso nebo soustavu těles, které konají prostorový rotační pohyb.



obr. 2

1.4 Steinerova věta

Steinerova věta popisuje důležitou vlastnost pro určení momentu setrvačnosti pomocí výpočtu. Často má těleso, jehož moment setrvačnosti počítáme, tvar, pro který už je v tabulkách vzorec pro výpočet. Ten je ovšem vztažen k ose, procházející těžištěm. Ne vždy se ale těleso otáčí právě kolem této osy (viz obr. 3).



obr.3 : steinerova věta

Vyjděme tedy ze vztahu (1.1), kde ke vzdálenost r přičteme posunutí osy rotace e :

$$I = \int_{(m)} (r+e)^2 dm = \int_{(m)} (r^2 + 2re + e^2) dm = \int_{(m)} r^2 dm + \int_{(m)} 2re dm + \int_{(m)} e^2 dm \quad (1.20)$$

první člen je výraz (1.1), čili moment setrvačnosti k ose, procházející těžištěm (označíme I_0), druhý člen se rovná nule a ve třetím členu je e konstanta a integrál můžeme nahradit součinem

$$I = I_0 + e^2 m \quad (1.30)$$

Toto je Steinerova věta, z níž mimo jiné vyplývá, že moment I_0 je menší než moment vztažený ke kterékoli jiné ose.

V maticovém tvaru, tentokrát bez odvození, má Steinerova věta následující podobu^[2]:

$$I = I_0 + m \begin{bmatrix} e_y^2 + e_z^2 & -e_x e_y & -e_x e_z \\ -e_y e_x & e_x^2 + e_z^2 & -e_y e_z \\ -e_z e_x & -e_z e_y & e_x^2 + e_y^2 \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

kde I_0 je matice setrvačnosti k ose těžiště a e_x, e_y, e_z jsou jednotlivá posunutí od os procházejících těžištěm x, y, z .

1.5 Deviační moment^[2]

Už v odstavci 1.3 je zmíněn deviační moment jako prvek matice setrvačnosti, respektive deviační momenty k jednotlivým osám. Jsou to další veličiny, které popisují rozložení hmoty v tělese. Z matice setrvačnosti tedy vyplývá, že

$$D_{xy} = \int_{(m)} x y dm \quad (1.32)$$

$$D_{xz} = \int_{(m)} x z dm \quad (1.33)$$

$$D_{yz} = \int_{(m)} y z dm \quad (1.34)$$

Protože se souřadnice v integrálech objevují v prvních mocninách, je jasné, že deviační momenty mohou nabývat i záporných hodnot. Narozdíl od momentů setrvačnosti. Velmi zjednodušeně je možné říct, že z deviačních momentů poznáme, kde je v tělese více hmoty vzhledem k souřadnicovému systému. Moment setrvačnosti naopak popisuje pouze rozložení hmoty vzhledem k poloměru od dané osy. Má-li těleso dvě nebo tři roviny souměrnosti, jejich průsečíky nazýváme hlavními osami setrvačnosti a deviační moment je vzhledem k těmto osám nulový. Momenty setrvačnosti k těmto osám nazýváme hlavními momenty setrvačnosti. Při zjišťování hlavních os setrvačnosti nám pomáhá právě vlastnost toho, že deviační momenty jsou vzhledem k nim nulové. Z výše uvedeného také vyplývá, že hlavní osy setrvačnosti prochází těžištěm tělesa. Toho využíváme při vyvažování rotujících těles, kdy se snažíme hlavní osu setrvačnosti posunout tak, aby byla shodná s osou rotace. Tím pádem těžiště tělesa prochází osou rotace a nevznikají žádné odstředivé síly.

2 Metody stanovení momentu setrvačnosti

2.1 Výpočtem z tabulek

Pro základní geometrické tvary těles, jako jsou krychle, válec, dutý válec, koule a další jsou v tabulkách vzorce, pomocí kterých lze příslušné momenty setrvačnosti snadno a rychle vypočítat. Nevýhodou je, že předpokládáme homogenní materiál a přesný geometrický tvar tělesa. Vypočítaná hodnota může mít větší či menší odchylku od reálné hodnoty. Počítáme-li ale s jednoduchými tvary, většinou se výraznější chyby nedopustíme a tato metoda je dobře použitelná.

2.2 Výpočtem integrací

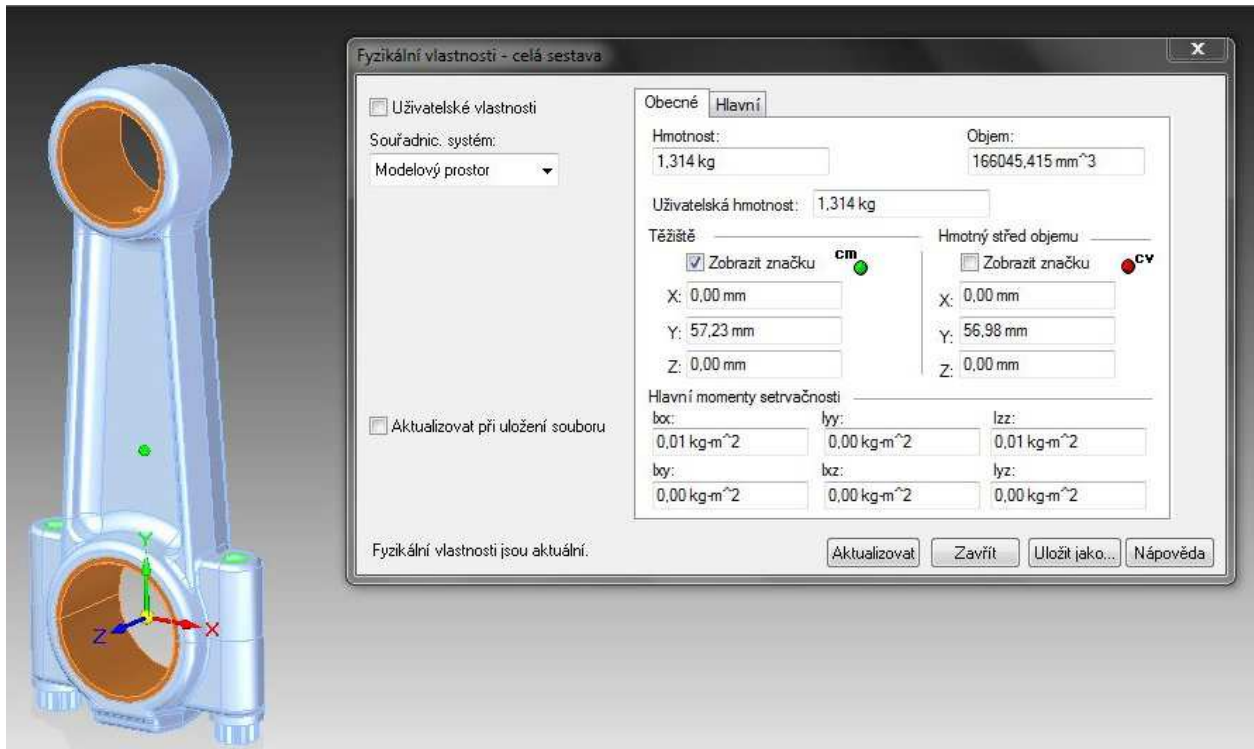
Tutu metodu je možné použít pro tělesa složitějších tvarů nebo proměnné hustoty, které můžeme popsat matematickou funkcí. Potom stačí tuto funkci dosadit do integrálu (1.1) a ten porom spočítat. Integrací výrazu (1.1) vznikly také tabulkové vzorce z odstavce 2.1. Příklad pro výpočet momentu setrvačnosti válce o poloměru r , délce l a hmotnosti m :

$$\begin{aligned} \int_{(m)} r^2 dm &= \int_{(V)} r^2 \rho dV = \iiint r^2 \rho r d\phi dr dl = \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^l \rho r^3 dr d\phi dl = \rho l \int_0^r \int_0^{2\pi} r^3 dr d\phi = \\ &= 2\pi \rho l \int_0^r r^3 dr = 2\pi \rho l \frac{r^4}{4} = \frac{1}{2} \pi r^2 l \rho r^2 = \frac{1}{2} m r^2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Pro obě početní metody se využívá aditivnosti momentů setrvačnosti. To znamená, že můžeme sčítat jednotlivé momenty setrvačnosti, jsou-li vztaženy ke stejné ose. Je tedy možné si relativně složitě těleso rozdělit na více částí, u kterých lze momenty setrvačností spočítat podle tabulkových vzorců nebo integrací. Někdy je třeba použít i Steinerovu větu. Typickým příkladem může být klikový hřídel. Celkový moment setrvačností je součtem momentů klikových čepů, ojnicích čepů a ramen. Osy procházející těžištěm ramen nebo těžištěm ojnicích čepů nejsou shodné jako osy klikového čepu.

2.3 Pomocí CAD software

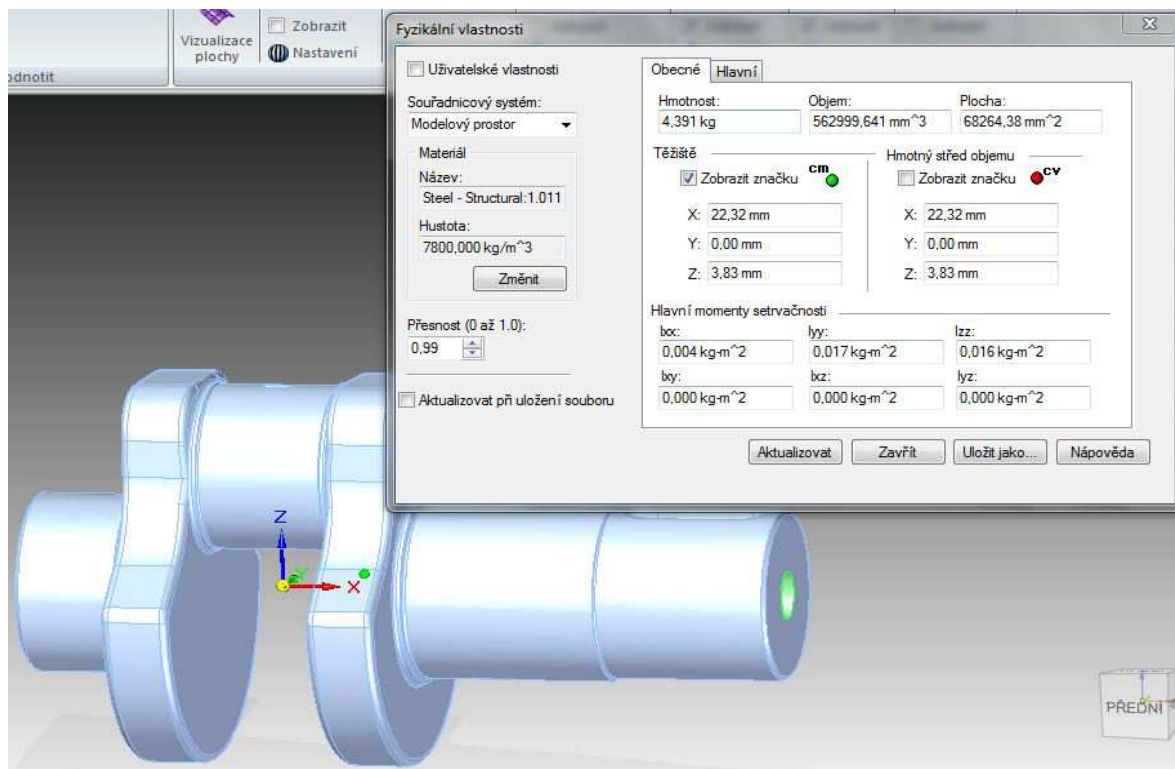
Relativně přesně a hlavně méně pracně lze získat hodnotu momentu setrvačnosti pomocí 3D CAD software. Metoda spočívá ve vytvoření 3D modelu tělesa. K tomu je třeba zadefinovat odpovídající materiál z databáze. Při hledání momentu setrvačnosti je klíčovým parametrem hustota. Program potom spočítá moment setrvačnosti k osám souřadného systému a deviační momenty. Užitečné je to zejména u tvarově složitých těles nebo takových, které nelze matematicky přesně definovat. Výhoda také spočívá v tom, že i když má těleso složitější tvar, není nutné ho předem vyrobít a měřit jeho moment setrvačnosti experimentálně, stačí ho pouze přesně namodelovat. Při návrhu tělesa lze jeho rozměry podle potřeby měnit a okamžitě známe jeho nové fyzikální vlastnosti. Vývojový proces je tedy časově méně náročný. Nevýhody jsou prakticky stejné, jako u početních metod: hustota je považována za homogenní nebo tvar vyrobeného tělesa, který může mít odchylky od modelu navrženého konstruktérem. Příklady 3D CAD software: Solid Edge, SolidWorks, Inventor, Catia nebo Pro/ENGINEER. Na obrázcích 4, 5 a 6 jsou příklady použití této metody.



obr. 4



obr. 5

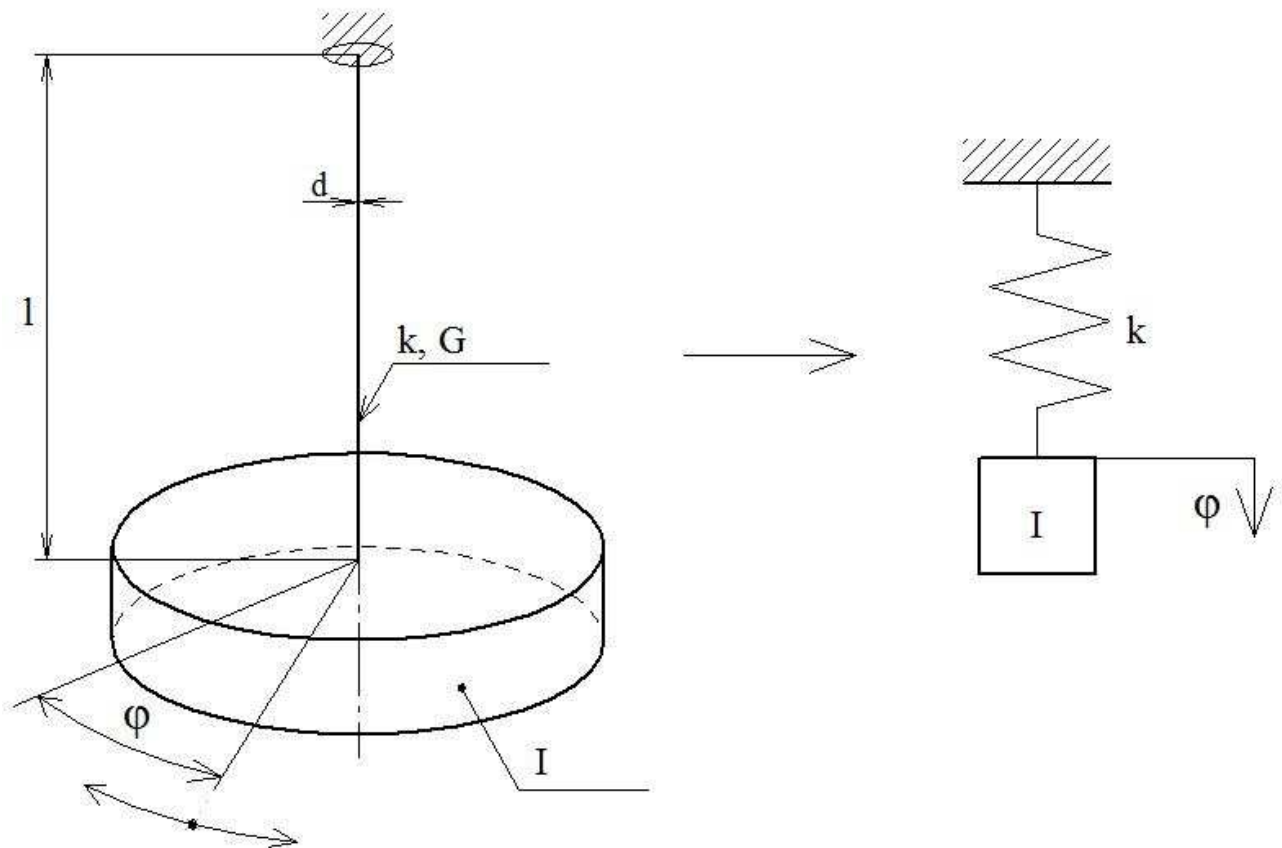


obr. 6

2.4 Experimentálně, metodou torzních kmitů^[3]

Nemůžeme-li moment setrvačnosti spočítat, a z nějakých důvodů ani vymodelovat těleso v CAD software, zbývá možnost změřit moment setrvačnosti ze skutečného tělesa. Provádí se to například v případě, že není k dispozici výkresová dokumentace nebo by její vytvoření bylo náročnější než měření již vyrobeného tělesa. Výhodou je, že nepočítáme teoretické těleso, ale měříme reálný předmět. Neznamena to však nutně přesnější hodnoty, i měření je zatíženo jistou chybou.

Při této metodě je těleso zavěšeno na tenkém drátu, který splývá s osou rotace. Když měřené těleso vychýlíme (pootočíme) z rovnovážné polohy, začne konat kmity, v tomto případě torzní kmity. Tyto kmity považujeme za netlumené. Ke zjištění momentu setrvačnosti využijeme jeho vzájemného vztahu s dobou kmitu, který vyplývá z pohybové rovnice. Jedná se tedy o nepřímou měřicí metodu. Na obrázku 7 je schéma měřicí metody, které můžeme převést na mechanický model:



Obr. 7 : schéma měřící metody

Veličina k je tuhost drátu, G je modul pružnosti ve smyku, φ úhel natočení a I je hledaný moment setrvačnosti. Těleso bude tedy konat kmitavé pohyby podle pohybové rovnice:

$$I \ddot{\varphi} = -k \varphi \quad (2.2)$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{k}{I} \varphi = 0 \quad (2.3)$$

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0 \quad (2.4)$$

kde ω je vlastní úhlová frekvence, pro kterou platí následující vztahy:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{I}} \quad \text{a zároveň} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad (2.5 ; 2.6)$$

T je perioda, čili doba kmitu. Z toho vyplývá vztah mezi dobou kyvu τ a momentem setrvačnosti:

$$\tau = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} = \pi \sqrt{\frac{I}{k}} \quad (2.7)$$

Hledaný moment setrvačnosti vypočítáme tedy ze vztahu:

$$I = k \cdot \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^2 \quad (2.8)$$

Tento vztah lze ovšem použít jenom tehdy, známe-li tuhost drátu k . Tu lze vypočítat vztahem (2.9) a to pouze za podmínky, že známe co nejpřesněji modul pružnosti ve smyku G , jinak nebude výsledek přesný, jelikož výpočet už je i tak zatížen chybou poloměru drátu, který se ve vztahu objevuje ve čtvrté mocnině.

$$k = \frac{\pi G r^4}{2l} \quad (2.9)$$

Abychom se vyhnuli počítání tuhosti drátu podle vzorce (2.9), používáme k tomu tělesa většinou válcového tvaru, jejichž moment setrvačnosti známe. Těch můžeme použít samostatně nebo přidáním k měřenému tělesu. Použijeme-li ke zjištění tuhosti metodu se samostatným tělesem, zavěšíme ho na drát a změříme dobu kyvu. Ve vztahu (2.8) zbyde neznámá právě tuhost:

$$k = \frac{I_0 \pi^2}{\tau^2} \quad (2.10)$$

Zjišťování tuhosti drátu se můžeme vyhnout úplně přidáním tělesa se známým momentem setrvačnosti k měřenému tělesu. Nejprve změříme dobu kyvu samotného měřeného tělesa s momentem setrvačnosti I , poté k němu přidáme známé těleso s momentem setrvačnosti I_0 a změříme novou dobu kyvu τ' . Následujícím postupem získáme hledaný moment setrvačnosti:

$$I = \frac{k \tau^2}{\pi^2} \quad (2.11)$$

$$I + I_0 = \frac{k \tau'^2}{\pi^2} \quad (2.12)$$

v obou rovnicích je stejná tuhost, takže je můžeme vyjádřit jako:

$$k = \frac{\tau^2}{I \pi^2} = \frac{\tau'^2}{(I + I_0) \pi^2} \quad (2.13)$$

$$\left(\frac{\tau'}{\tau}\right)^2 = \frac{I + I_0}{I} \quad (2.14)$$

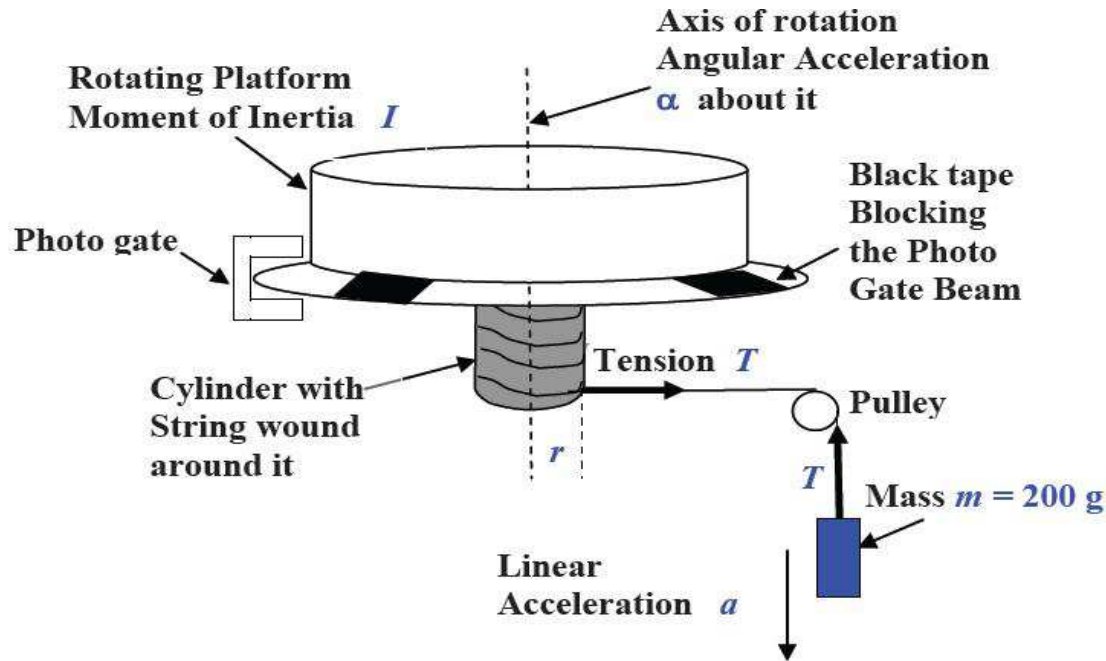
$$\left(\frac{\tau'}{\tau}\right)^2 - 1 = \frac{I_0}{I} \quad (2.15)$$

$$I = \frac{I_0}{\left(\frac{\tau'}{\tau}\right)^2 - 1} \quad (2.16)$$

Ze vztahu (2.16) tedy vyplývá, že při použití této metody nepotřebujeme znát tuhost drátu. Při častém měření ale většinou tuhost známe, jelikož dvojí měření by bylo časově neefektivní. Tuhost drátu se totiž s časem téměř nemění, pokud nepřekročíme mez kluzu. Nesmíme tedy drát přetížít příliš těžkým měřeným tělesem. Dále musíme dbát na to, aby byl moment setrvačnosti měřeného tělesa mnohem větší než drátu, abychom mohli drát bez větší chyby zanedbat.

2.5 Experimentálně, pomocí rotačního disku^[4]

Tato metoda využívá vztahu mezi úhlovým zrychlením a momentem setrvačnosti. Měříme tedy úhlové zrychlení. Měřicí zařízení se skládá z rotačního disku, který má na průhledném obvodu clony s přesným úhlovým krokem, ze senzoru, který detekuje clonu, dále z válečku, na kterém je namotáno vlákno připevněné k závaží. Schéma na obrázku 8:



obr. 8^[4]

k získání potřebného vztahu vyjdeme z Newtonových rovnic pro soustavu na obr. 8

$$I \ddot{\phi} = M_e - M_t \quad (2.17)$$

$$m \ddot{y} = -T + m g \quad (2.18)$$

kde M_e představuje externí moment vyvolaný závažím a M_t třecí moment způsobený třením. Souřadnice y je závislá na ϕ :

$$I \ddot{\phi} = T r - M_t \quad (2.19)$$

$$m r \ddot{\phi} = -T + m g \quad (2.20)$$

po vyjádření T z rovnice (2.20), dosazení do (2.19) a úpravě dosatneme vztah:

$$I = \frac{m r (g - r \ddot{\phi}) - M_t}{\ddot{\phi}} \quad (2.21)$$

nevýhodou je, že přesnost výsledku závisí mimo jiné na tom, jak přesně je určen moment, který způsobuje tření, což není jednoduché. Tuto metodu lze realizovat i v sofistikovanějším provedení než je na schématu, především co se týče vyvození točivého momentu. Bylo by možné nahradit

padací závaží elektromotorem se známým točivým momentem. Odpadly by tak ty nejnvýraznější ztráty třením a zbývaly by jen ztráty v ložiskách. Po jejich zanedbání bychom mohli vypočítat moment setrvačnosti podle vztahu:

$$I = \frac{M_e}{\ddot{\phi}} \quad (2.22)$$

Měříme tedy úhlové zrychlení. K tomu slouží světelná závora, která detekuje clonu na obvodu disku. Podle časových intervalů detekce vyhodnotí přístroj úhlové zrychlení.

3 Stanoviště měření momentu setrvačnosti v laboratořích ČVUT

Měřicí stanoviště se nachází v Těžkých laboratořích fakulty strojní, Pod Juliskou 4. Metoda, použita ke stanovení momentu setrvačnosti je výše zmíněná metoda torzních kmitů. Toto stanoviště je používáno jednak pracovníky ČVUT v laboratoři, kteří na něm měří moment setrvačnosti pro potřeby výzkumu. Je také používáno k výukovým účelům. Studenti se seznamují s měřením momentu setrvačnosti a poloos elipsoidu setrvačnosti měřeného předmětu a také s měřením torzní tuhosti drátu.

Těžké laboratoře prošly rekonstrukcí a bylo nutné stanoviště demontovat. Při následném sestavení bude několik částí stanoviště nahrazeno jinými (bude popsáno níže). Vzhledem k absenci jakéhokoliv manuálu je opakované sestavení a zapojení stanoviště velmi komplikované a zdouhavé. Zároveň neexistuje žádný manuál, který by bod po bodu popsal celý proces měření a výrazně ho tak urychlil. Cílem této práce tedy je podrobně popsat sestavení a zapojení měřícího stanoviště, vytvořit manuál a výkladový poster k samotnému měření.

3.1 Celkový pohled na stanoviště

Měřicí stanoviště je složeno z drátu se závěsem pro měřený předmět, z čidla (v tomto případě ze světelné závory), ze stojanu pro čidlo, ze zdroje napětí, z přijímače signálů (compactDAQ nebo DAQCard) a z počítače. Jednotlivé součásti budou podrobně popsány v následujících odstavcích. Na obrázku 9 a 10 je fotografie stanoviště. Na fotografii je zobrazen závěs, měřený předmět a čidlo se stojanem. Zapojení ostatních prvků bude také popsáno v následujících odstavcích.



Obr. 9: měřicí stanoviště

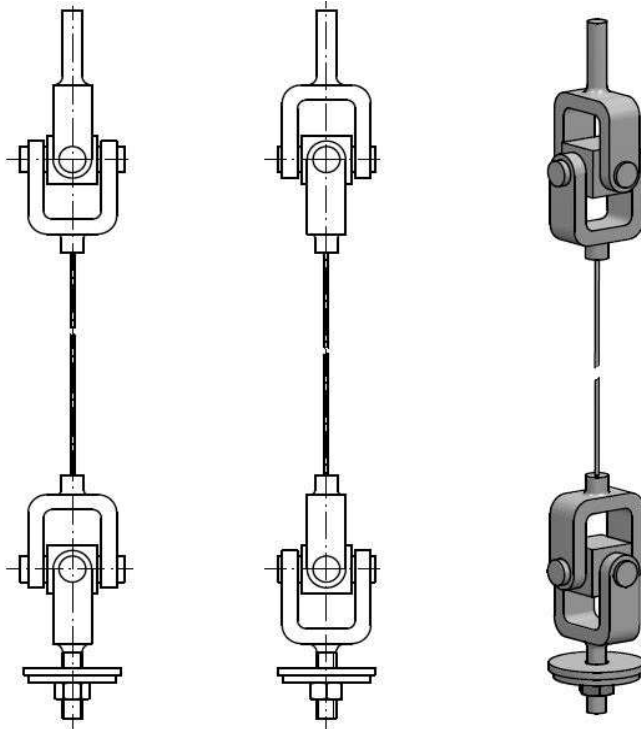


Obr. 10: Detail měřicího stanoviště

- 1- závěs
- 2- měřený předmět
- 3- senzor
- 4- stojan
- 5- clona

3.2 Závěs

Závěs je tvořen drátem, který má na každém konci Kardanův kloub. Ten zachovává stupeň volnosti pro naklonění měřeného předmětu ve dvou osách. Naopak odebírá stupeň volnosti pro rotaci kolem osy drátu. Jeden kloub je přišroubován k tyči upevněné ve stropu místnosti, a ke druhému kloubu je přišroubovaný měřený předmět. Jelikož je odebrán stupeň volnosti pro rotaci kolem osy drátu, chová se drát jako torzní pružina, tedy přesně tak, jak je potřeba pro tuto měřicí metodu. Torzní tuhost drátu je většinou známa z předchozích měření. V rámci výuky mohou studenti změřit tuhost pomocí předmětu známého momentu setrvačnosti a doby kyvu ze vzorce (2.10). S nakloněním měřeného předmětu souvisí problematika měření úhlu naklonění. Ten je potřeba znát při měření hlavních momentů setrvačnosti. Při něm je dvakrát měřena doba kyvu tělesa pokaždé při jiném úhlu naklonění. Návrh metody měření úhlu naklonění je jedním z cílů této práce a bude mu věnována samostatná kapitola. Na obrázku 11 je schéma zavěšení včetně kardanova kloubu.



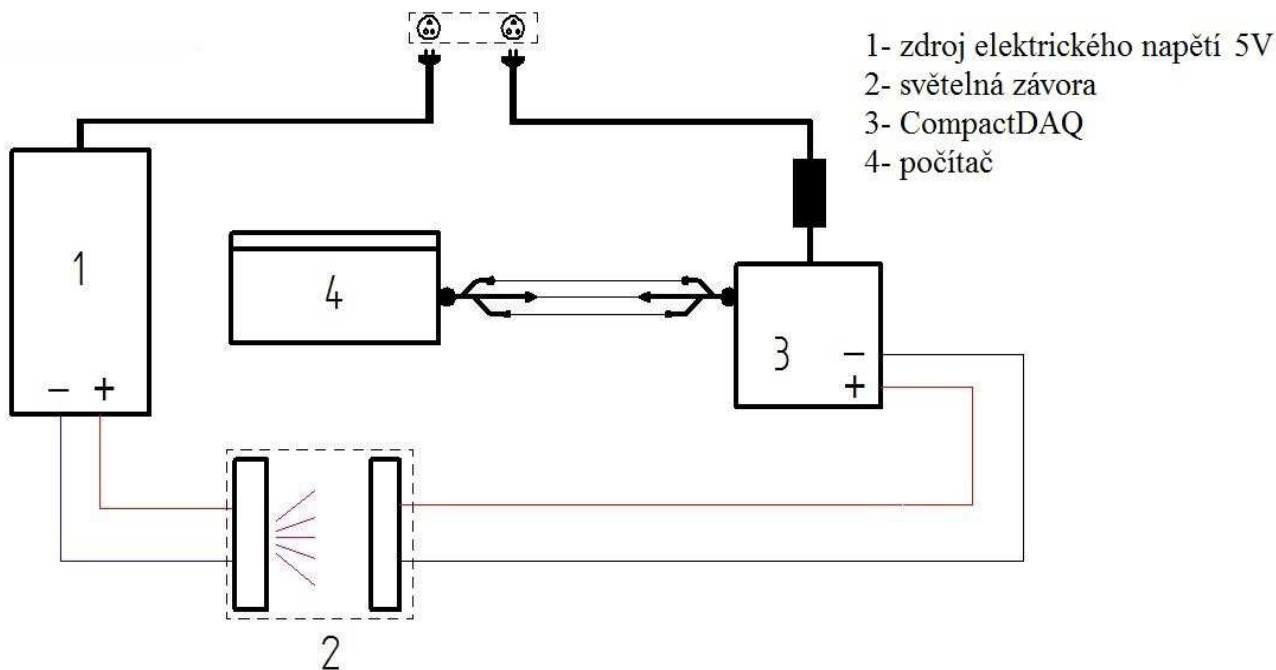
Obr. 11: závěs

3.3 Zapojení elektrických prvků

Ke změření doby kyvu měřené součásti používáme světelnou závoru. Pomocí ní však zjišťujeme pouze velikost napětí. Toto napětí musí být něčím generováno a také zpracováno. Existuje mnoho variant čím to provést, a jak tyto prvky zapojit. V následujících odstavcích je popsáno zapojení používané před rekonstrukcí laboratoří a nové, používané po rekonstrukci. Podrobný manuál k zapojení obou variant je k dispozici v příloze 1 a v příloze 2.

3.3.1 Zapojení s prvkem CompactDAQ

Při této variantě zapojení je použit externí zdroj elektrického napětí, který napájí světelnou závoru napětím 5V. Ta je připojena na CompactDAQ (DAQ = data acquisition). CompactDAQ je zařízení, které pomocí přídatných modulů (v tomto případě NI 9402) zpracovává napětí ze senzoru na digitální signál, tedy logickou jedničku nebo logickou nulu. Tyto logické hodnoty jsou pomocí USB přivedeny do počítače. Počítač obsahuje software, který tyto logické hodnoty proměnné v čase zpracuje, vyhodnotí dobu kyvu a z ní i moment setrvačnosti. Na obrázku 12 je schéma tohoto zapojení.

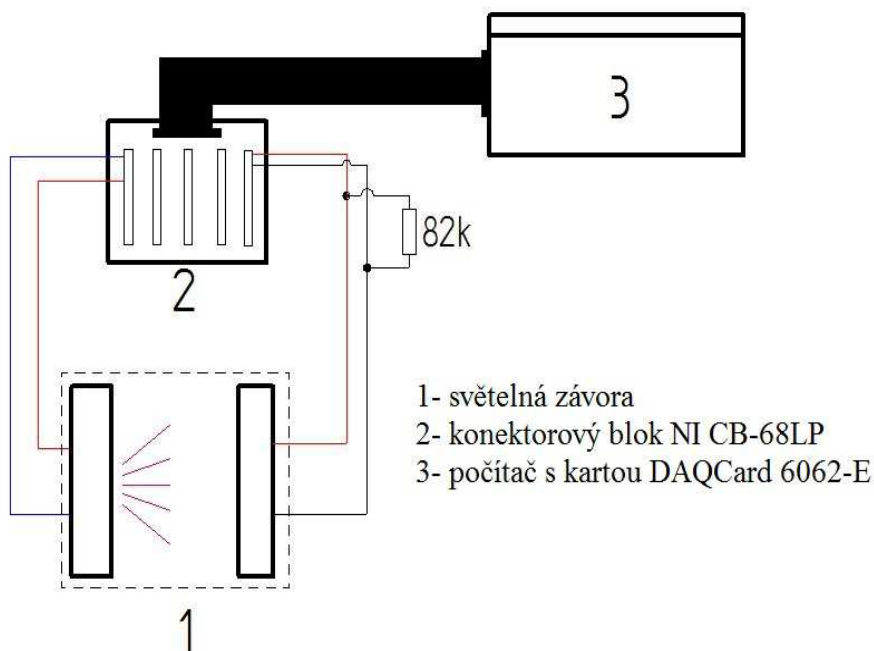


Obr. 12: Schéma zapojení CompactDAQ

Z obrázku 12 je patrné, že při tomto zapojení potřebujeme čtyři prvky, přičemž zdroj i CompactDAQ s modulem NI 9402 jdou poměrně těžké předměty. Navíc musí být připojeny do zásuvky. Prakticky to platí i pro používaný počítač. Je tedy potřeba mít v blízkosti tři zásuvky nebo použít prodlužovací kabel. Především tyto nevýhody se snaží odstranit novější zapojení.

3.3.2 Zapojení s prvky DAQCard a konektorovým blokem NI CB-68LP

Principiálně se tato varianta neliší od té předchozí. Opět je tu zdroj napětí, senzor, prvek zpracovávající napětí ze senzoru a počítač. Rozdíly v provedení jsou ovšem patrné na první pohled z obrázku 13.



Obr. 13: Schéma zapojení DAQCard 6062-E

Jako zdroj napětí v tomto případě slouží samotný počítač, který je schopen napájet senzor požadovaným napětím 5V. Zdroj je k počítači připojen přes konektorový blok NI CB-68LP (pozice 2). Výstupní napětí ze senzoru je opět přivedeno na konektorový blok a z něho do karty DAQCard 6062-E a do počítače. V tomto případě není signál převáděn na digitální, ale zůstává analogový. Konstrukce konektorového bloku způsobuje, že při zakrytí světelné závory by napětí nekleslo dostatečně, aby mohlo být považováno za logickou nulu. Aby napětí při zakrytí světelné závory kleslo alespoň o polovinu a ne o pouhých 0,5 V, jako je tomu u přímého připojení na analogové vstupy, je na výstupní svorky paralelně připojen odpor 82 k Ω . V měřicím programu, kterým se měření vyhodnocuje je vytvořeno rozhodovací kritérium, které dává napětím menším než 3V hodnotu logické nuly a napětím vyšším než 3V hodnotu logické jedničky.

Je tedy patrné, že tato varianta zapojení je daleko výhodnější než předchozí. Předchozí varianta obsahovala pět prvků a tato jenom tři. Prostorová náročnost je tedy daleko menší. Není potřeba používat zdroj a CompactDAQ, které dohromady váží až šest až sedm kilogramů. Jejich účel plní několikaset gramový konektorový blok a karta, což umožňuje lepší manipulovatelnost. Zdroj a CompactDAQ bylo potřeba zapojit do zásuvky. Při tomto zapojení vyžaduje zásuvku pouze počítač, čili jde opět o užitečné zjednodušení.

3.4 Zdroj napětí

Jak už je uvedeno výše, u nového zapojení plní funkci zdroje přímo počítač. U starší varianty se používá laboratorní zdroj napětí. Starší zapojení slouží pouze jako záložní varianta, takže pouze stručně. Laboratorní zdroj je typu MPS 3003S s nastavitelnou hodnotou stejnosměrného napětí 0-30V a nastavitelnou hodnotou proudu 0-5A. Má hmotnost 5,6kg a rozměry 130x165x315. Požadované napájecí napětí senzoru je 5V a nesmí být překročeno, aby nedošlo k poškození diod v senzoru. Je to další nevýhoda použití externího zdroje, kdy při neopatrné manipulaci můžeme zničit senzor. K tomu může dojít například, když někdo po předchozí manipulaci se zdrojem při vyšších napětí zdroj pouze vypnul vypínačem, nesnížil samotné napětí a nikdo další si toho před měřením se senzorem nevšiml.

3.5 Světelná závora^[5]

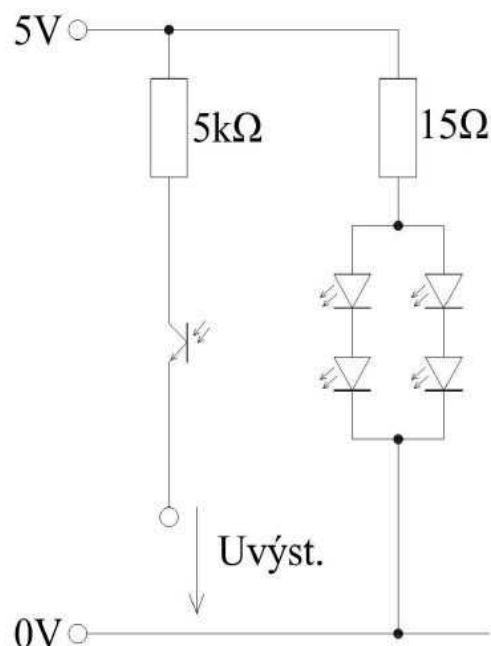
Světelná závora je senzor, který se používá k detekci předmětu. Skládá se z LED diody a fototranzistoru. Princip její funkce je poměrně jednoduchý. LED dioda vyzařuje světlo, které dopadá na fototranzistor. Ten je při dopadu světla otevřený a prochází jím proud. Je-li mezi LED diodou a fototranzistorem překážka a světlo na fototranzistor nedopadá, je fototranzistor zavřený a proud jím neprochází. Tohoto principu je v tomto případě využito ke stanovení doby kyvu, kdy část měřeného předmětu v pravidelné periodě zabrání dopadu světla na fototranzistor. Tím se mění napětí, které vyhodnocujeme v čase.

Senzor používaný v laboratořích na Julisce není kupovaný produkt, ale byl vyrobený v rámci dřívější bakalářské práce. Je zkonstruován ze čtyř LED diod, emitujících viditelné světlo, z jednoho fototranzistoru a plastového držáku, ve kterém jsou tyto prvky uloženy. Na obrázku 14 je elektronické schéma zapojení čidla.

Použité LED diody jsou superjasné, čiré, červené (5 mm, 20 mA, $U_f = 2,1$ V). Vyzařují světlo o vlnové délce 625 nm pod úhlem 12° .

Fototranzistor má parametry (32 V / 50 mA, 560-950 nm, 70°). Reaguje tedy na světlo o vlnové délce 625 nm, které vyzařuje LED dioda. Fototranzistor by měl být citlivý i na denní světlo a měl by být odstíněn, ale já tento problém při používání nezaznamenal. Nejspíš to platí pro více osvětlené prostory.

Držák čidla se skládá ze dvou plastových krabiček a ohnutého plechu s přivařenou tyčí. Má za úkol chránit elektrické prvky a nasměrovat je proti sobě ve správné vzdálenosti. Ta nesmí být příliš velká, aby světlo stále směřovalo na fototranzistor, ale zároveň nesmí být příliš malá, aby jí prošla část měřeného předmětu. V krabičkách jsou umístěny elektrické prvky. V krabičce, kde je umístěn fototranzistor je vytvořena drážka pro případné zasunutí filtru sloužícího k odstínění okolního světla.



Obr. 14^[5]: Schéma světelné závory

3.6 Přístroje pro úpravu signálu

Napětí ze senzoru musí být zpracováno a následný signál přiveden do počítače tak, aby podle něho mohl program v počítači vyhodnotit dobu kyvu. Ke zpracování napětí používáme produkty společnosti National Instruments. V prvním případě se jedná o CompactDAQ s modulem NI 9402 a ve druhém případě o kartu DAQCard 6062-E s konektorem CB-68LP. Společnost National Instruments, je zároveň vydavatelem software LabVIEW. Tento software používáme k vyhodnocení měření.

3.6.1 CompactDAQ a modul NI9402^[6]

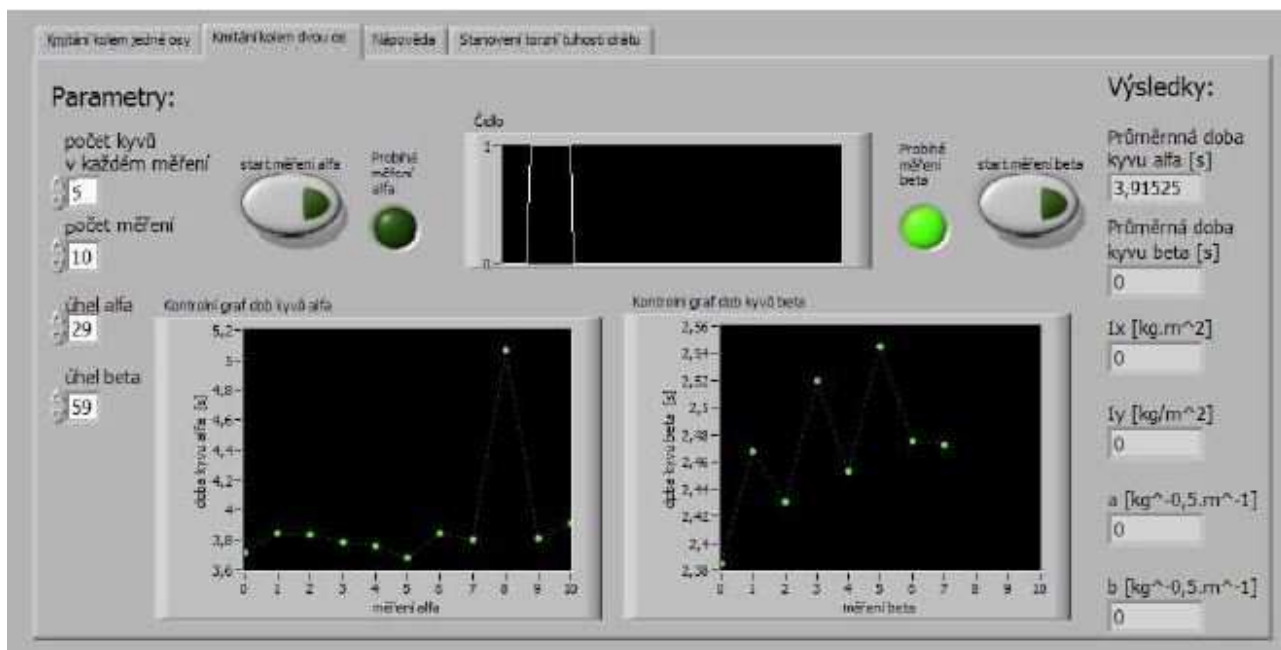
Jsou to elektrické prvky, sloužící k pořizování dat (**Data Acquisition**). Mají za úkol synchronizovat a přenést data mezi senzorem a počítačem. Signál je přiveden vodiči na modul NI 9402, který je zasunutý do jednoho ze slotů v CompactDAQu. Modul NI 9402 upravuje signál na úroveň TTL. CompactDAQ přivádí naměřená data do počítače se softwarem LabVIEW. CompactDAQ v sobě obsahuje výkonný procesor, je schopný snímat data ve vysokých rychlostech a při složitých podmínkách (teplotních či kinematických). Tato velká výkonnost a odolnost s sebou nese i nevýhody. Je to především relativně velká hmotnost a také nutnost jej připojit k elektrické síti. Pro účely měření momentu setrvačnosti je to zařízení značně předimenzované. Neměříme v žádných extrémních podmínkách a rychlost měření také není velká.

3.6.2 DAQCard s konektorovým blokem CB-68LP

Tyto prvky plní stejnou funkci jen v daleko příznivějším provedení než CompactDAQ. Signál je veden přes konektorový blok propojovacím kabelem do měřicí karty, která je zasunuta v

počítači. Měřicí karta přivádí do počítače data přes PCMCIA sběrnici. Konektorový blok obsahuje 68 pinů a má rozměry cca 14x10 cm. Měřicí karta je ve srovnání s prvkem CompactDAQ méně výkonná, ale pro účely měření momentu setrvačnosti je plně dostačující. Je ovšem třeba dávat pozor, že zatímco CompactDAQ může fungovat na kterémkoliv operačním systému, tato měřicí karta funguje pouze na 32-bitovém operačním systému. Podrobnější informace a zejména postup zapojení jsou popsány v příloze 1.

3.7 Software vyhodnocující měření



Obr. 15^[5]: Uživatelské rozhraní programu, který vyhodnocuje měření

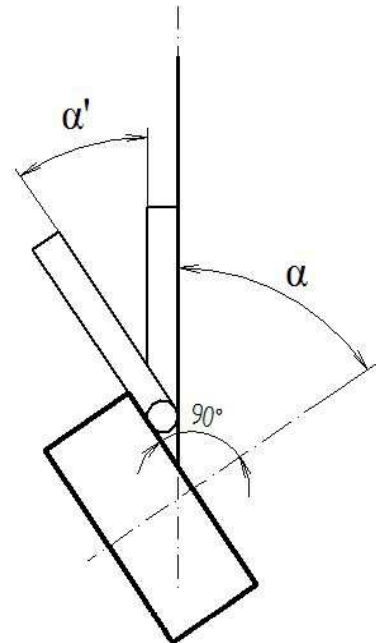
K vyhodnocení měření se používá software LabVIEW. Jedná se o grafický programovací jazyk vyvíjený společností National Instruments. Funguje na principu drag and drop, kde vkládáme jednotlivé objekty (funkce) na pracovní plochu a spojujeme je. Tvorba programu je tedy uživatelsky přívětivá. V počítači lze spustit dvě verze programu pro měření. Každá verze pro jinou variantu zapojení. Obě verze se liší pouze vnitřkem programu, kde se načítá v jednom případě měřicí karta a ve druhém případě CompactDAQ. Uživatelské rozhraní je pro obě varianty stejné. Na obrázku 15 je zmiňované uživatelské rozhraní měřicího programu. Jak je patrné z obrázku 15, uživatelské rozhraní je velmi intuitivní. Po spuštění programu si může uživatel zvolit jednu ze záložek v horní části a to podle toho, chce-li měřit kmitání kolem jedné osy nebo kolem dvou os. Při kmitání kolem jedné osy je měřen moment setrvačnosti k této ose. Při kmitání kolem dvou os jsou výsledkem hlavní momenty setrvačnosti a poloosy elipsoidu setrvačnosti. Při tomto měření je nutné znát úhel, který svírá osa drátu s osou symetrie tělesa. Tyto úhly jsou zadávány v levé části uživatelského rozhraní. Dále obsahuje uživatelské rozhraní kontrolní grafy a ikony. Mezi ně patří průběh stavu čidla v čase, doba kyvu v jednotlivých měření a kontrolky stavu měření. Ucelené informace o postupu měření obsahuje záložka nápověda.

4 Stanovení úhlu zavěšení měřeného předmětu

Ne vždy můžeme nebo potřebujeme měřit moment setrvačnosti tak, že je osa drátu shodná s osou rotace měřeného předmětu (měřený předmět ani nemusí mít osu rotace). Proto potřebujeme změřit úhel mezi osami nebo mezi osou a normálou k rovině předmětu. Změřený úhel je potřebný i ke stanovení hlavních momentů setrvačnosti, jak bude ukázáno v kapitole věnující se měření. Navržené varianty stanovení úhlu lze rozdělit do dvou kategorií. V první kategorii jsou použita jednoduchá délková měřidla a úhlooměry a pracuje se v ní s goniometrickými vztahy a jednoduchou geometrií. Ve druhé kategorii se pracuje s bezkontaktními čidly, které měří úhel elektromagneticky.

4.1 Stanovení úhlu úhloměrem

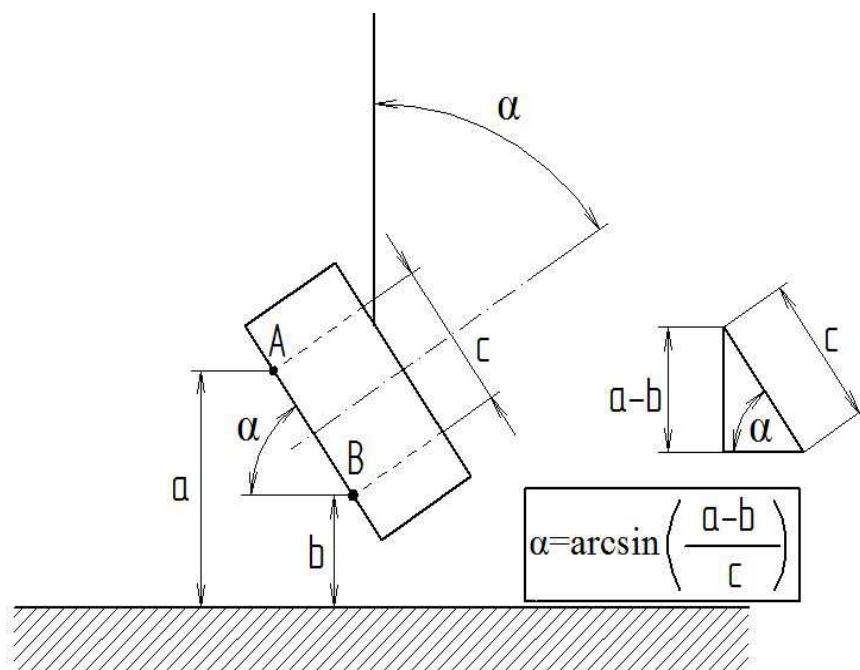
Tato metoda je nejméně přesná a je použitelná prakticky jen v případě, že plocha, za kterou je předmět upnut je rovinná, bez větší tvarové členitosti. K takovéto ploše lze přiložit dílenský úhloměr a jeho druhé rameno přiložit k drátu. Doplněk změřeného úhlu α' do 90° je hledaný úhel α , jenž svírá osa drátu s normálou plochy. I přes již zmíněnou možnou nepřesnost a omezenou použitelnost stojí tato metoda za zmínku. Je jednoduchá a jsme tak schopni ve velmi krátkém čase a bez komplikací změřit požadovaný úhel. Na obrázku 16 je schéma této metody.



Obr. 16: Schéma měření úhloměrem

4.2 Stanovení úhlu goniometricky

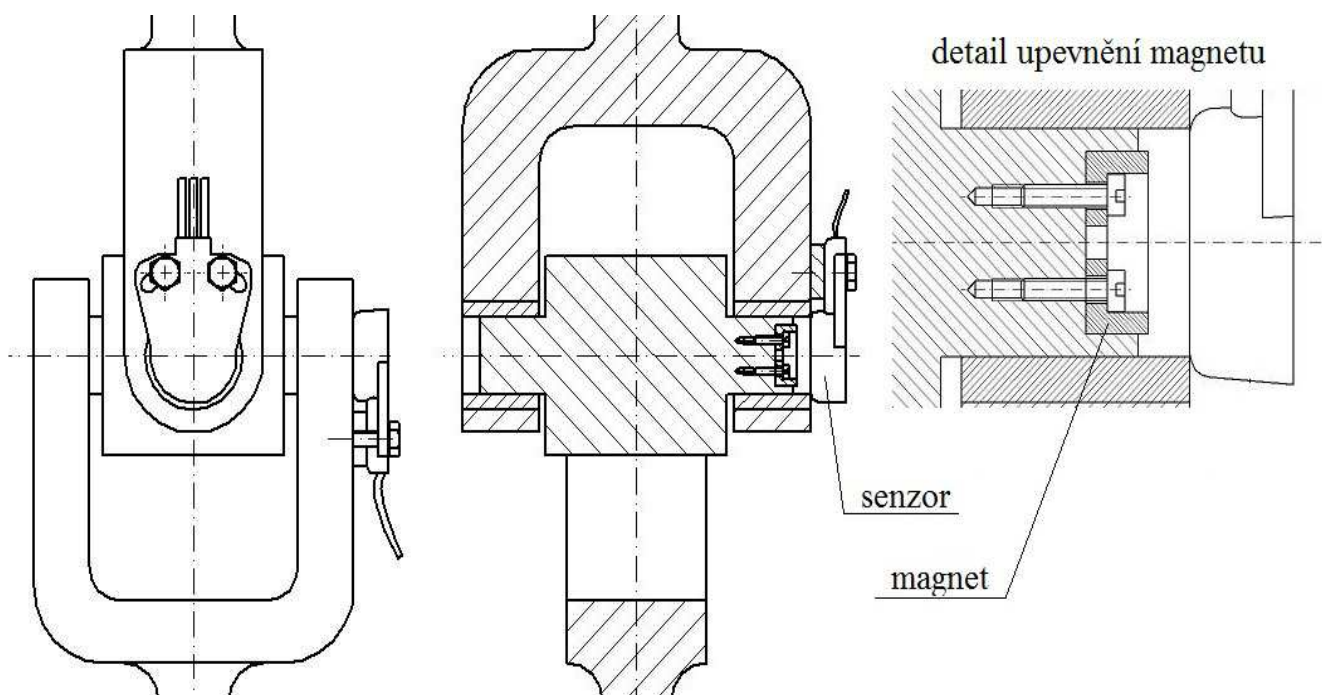
Při této metodě si zvolíme dva body na ploše kolmé k ose rotace. Poté změříme vzdálenost obou bodů od země. Dále změříme vzdálenost těchto dvou bodů v ploše. Z funkce sinus, respektive arkus sinus, jsme schopni vypočítat požadovaný úhel. Tato metoda je použitelnější a přesnější než předchozí. Nepotřebujeme už rovinnou plochu, také vzdálenost pevně daných bodů se měří snáz než úhel přiložením úhlooměru k drátu. Když dokážeme změřit vzdálenost s přesností cca $\pm 2\text{mm}$, nedopustíme se u středně velkých předmětů (např. kolo s pneumatikou) chyby větší než 1° . Chyba do 1° je pro potřeby měření momentu setrvačnosti přijatelná. Je tedy zachována jednoduchost, ale měření je relativně přesné a více použitelné. Metoda je popsána na obrázku 17.



Obr. 17: Schéma měření goniometricky

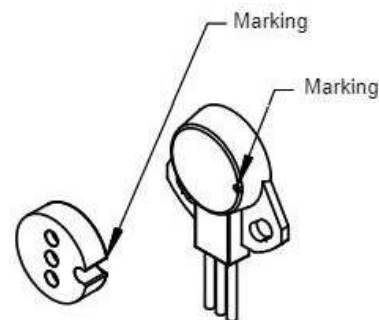
4.3 Stanovení úhlu bezkontaktními senzory

Tato metoda je do jisté míry univerzální, neboť je při ní měřen úhel natočení přímo v kloubu. Postup měření tudíž nezávisí na tvaru nebo velikosti plochy, za kterou je předmět upnut. Jelikož se jedná o elektromagnetické měření, měříme s velkou přesností. To je ovšem vyváženo složitostí a cenou. K instalaci měřícího senzoru je totiž nutná úprava stávajícího kloubu tak, jak je znázorněno na obrázku 18.



Obr. 18: závěs se senzory typu PRAS21.

V externím magnetu jsou od výrobce vyvrtány tři díry. Magnet je přišroubován nejméně dvěma šrouby k čepu kloubu (viz detail obr. 18). Díry pro šrouby v čepu kloubu musí být vyvrtány tak, aby spojnice jejich středů byla rovnoběžná s osou drátu (svislá). To zajistí požadovanou pozici pólů magnetu vůči kloubu. Sensor musí být vůči magnetu vhodně nastaven. Zejména je důležitá jeho souosost a rovnoběžnost ploch s magnetem. Čím větší je nesouosost a nerovnoběžnost, tím více roste nelinearita a měření má menší přesnost. Je tedy třeba vyvrtat díry ve vidlici kardanu ve správné výšce. Správná instalace natočení senzoru a magnetu je na obrázku 19.

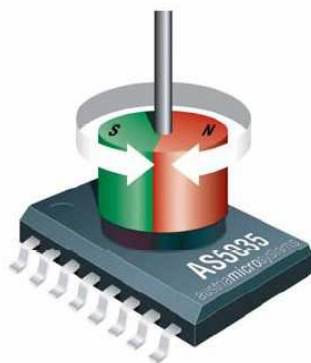


Obr. 19^[7]: Vzájemná poloha magnetu a senzoru

Elektromagnetický sensor funguje na principu Hallova jevu^[8]. Je možné použít magnetický sensor PRAS26 nebo PRAS21 od společnosti ASM (na obrázku 20) s externím magnetem (např. PRMAG21). Nebo sensor AS5163 od společnosti Austriamicrosystems (na obrázku 21). V obou případech se jedná o senzory absolutní. Permanentní magnet je připevněn na čep kloubu a sensor je připevněn na vidlici. Kloub musí obsahovat dva senzory, protože každý snímá jednu osu, kolem které se může kloub natočit. Při samotném měření otáčíme s kloubem tak, až bude jedna hodnota úhlu nulová. Hodnota, kterou změří druhý sensor je právě hledaný úhel.



Obr. 20^[9]: Senzor PRAS26



Obr. 21^[10]: Senzor AS5163

Jak je vidět na obrázku 22, ne vždy je takto změřený úhel ten, který hledáme. K tomu, abychom stanovili v tomto případě úhel mezi osou drátu a osou kola, musíme znát tvar tohoto kola. Při této znalosti už potom není problém hledaný úhel dopočítat.

Cena pořízení senzorů typu PRAS není známá, tu určuje distributor až při objednávce mimo jiné v závislosti na počtu objednaných kusů. Cena senzoru AS5163 14 dolarů^[8] (cca 350 Kč), ovšem bez poštovného.

Tato metoda je tedy podstatně dražší a náročnější na instalaci než předchozí dvě. Samotné měření je ale jednodušší a přesnější. Dle mého soudu je tato metoda pro běžné účely laboratoří Ústavu automobilů příliš nákladná a tyto náklady nevyvážejí případné výhody. Naopak při nutnosti změřit úhel velmi přesně se tato metoda jeví jako nejužitečnější.



Obr. 22: Zavěšení ráfku

5 Kontrolní měření

K ověření správného sestavení a zapojení měřícího stanoviště je nutné provést několik kontrolních měření. V první řadě je nutné stanovit torzní tuhost drátu. Dále budou změřeny hlavní momenty setrvačnosti kola s pneumatikou. Rozhodl jsem se měřit tuhost i momenty setrvačnosti dvakrát, jednou při staré variantě zapojení, a podruhé při nové. Je to z toho důvodu, že systém získání dat ze snímače je v obou případech jiný. Taktéž byla potřeba udělat úpravu ve vyhodnocovacím programu. Při správné funkci by měly být naměřené hodnoty stejné. Posledním měřením bude stanoven moment setrvačnosti k ose rotace setrvačnicku.

5.1 Stanovení torzní tuhosti drátu

Torzní tuhost drátu je známá z měření, které na tomto stanovišti probíhaly v minulosti. Kvůli demonstraci principu tohoto měření, a také kvůli kontrole funkčnosti měřícího stanoviště je ale měření torzní tuhosti do této práce zahrnuto. Torzní tuhost je zjišťována metodou torzních kmitů podle vzorce (2.9). Při této metodě je nutné znát moment setrvačnosti zavěšeného předmětu, který koná torzní kmity. A stejně jako při měření momentu setrvačnosti i zde měříme dobu kyvu.

Jako těleso o známém momentu setrvačnosti je použit disk o průměru 0,425 m a hmotnosti 7,5 kg. Použitím vzorce (2.1) pro disk je moment setrvačnosti:

$$I_0 = \frac{1}{2} m \cdot r^2 = \frac{1}{2} \cdot 7,5 \cdot 0,2125^2 = 0,1693 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (5.1)$$

Průměrná doba kyvu disku byla změřena 2,087s při starém zapojení a 2,085s při novém zapojení.

Torzní tuhost drátu tedy spočítáme následovně:

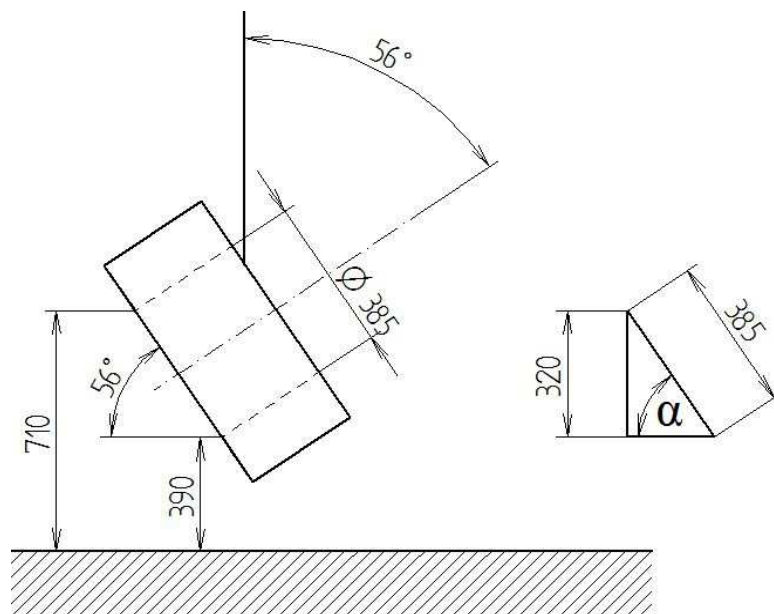
$$k = \frac{I_0 \pi^2}{\tau^2} = \frac{0,1693 \cdot \pi^2}{2,085^2} \rightarrow \boxed{k = 0,384 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}} \quad (5.2)$$

Torzní tuhost drátu stanovená při předchozích měřeních je 0,386 N.m.rad⁻¹. Rozdíl dvě tisíciny je marginální a měření můžeme považovat za dostatečně přesné. Taktéž doby kyvu při různých zapojeních se liší v jednotkách milisekund.

5.2 Měření hlavních momentů setrvačnosti při staré variantě zapojení

Měření doby kyvu probíhalo dvakrát, pokaždé kolo kmitalo podle jiné osy různoběžné s osou měřeného kola. Při prvním zavěšení byl úhel mezi osami změřen $\alpha = 56^\circ$. Při druhém měření $\beta = 29^\circ$. Úhly byly měřeny z výšek dvou bodů od země a jejich vzdáleností od sebe (schéma prvního zavěšení na obrázku 23).

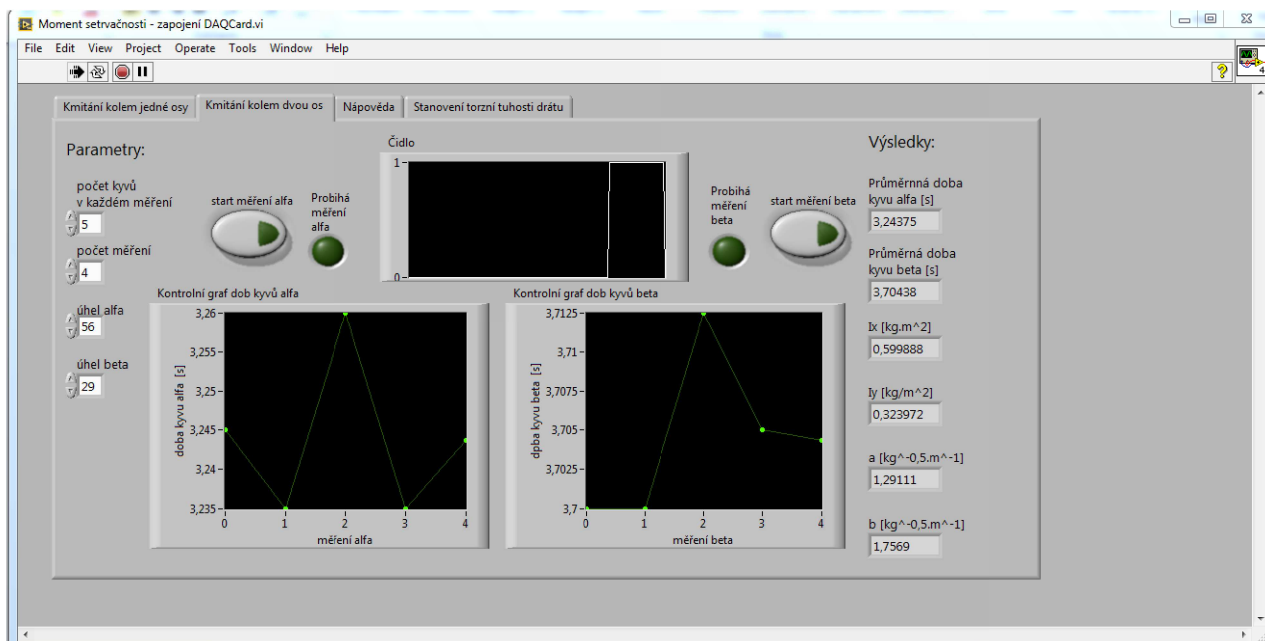
Doba kyvu byla v prvním případě $\tau_1 = 3,2425 \text{ s}$, ve druhém případě $\tau_2 = 3,6994 \text{ s}$. Program následně vyhodnotil hlavní momenty setrvačnosti $I_x = 0,5918 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ a $I_y = 0,327 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.



Obr. 23: Stanovení úhlu osy kyvu a osy rotace kola

5.3 Měření hlavních momentů setrvačnosti při nové variantě zapojení

Měření probíhalo stejně jako při předchozí variantě zapojení. Úhly, které svírají osy byly stejné, tedy $\alpha=56^\circ$ a $\beta=29^\circ$. Naměřené doby kyvu: $\tau_1=3,2438$ s , $\tau_2=3,7044$ s . Hlavní momenty setrvačnosti tedy jsou $I_x=0,5999$ kg.m² a $I_y=0,324$ kg.m². Na obrázku 24 je uživatelské rozhraní při tomto měření



Obr. 24: Uživatelské rozhraní při měření hlavních momentů setrvačnosti

Rozdíly jsou i zde nepatrné. U dob kyvu se jedná o 0,04% a 0,13%. V případě momentů setrvačnosti je rozdíl 1,4% a 0,9%. Jedná se skutečně o yh nepatrné rozdíly, neboť musíme vzít v potaz například to, že se mohl měřený předmět nepatrně rozkývat nejen kolem osy rotace.

Měřený předmět byl také opakovaně zavěšován, a upnutí nemusí být vždy stejné. Je tedy možné tvrdit, že způsob získání a vodnocení dat ze senzoru nemá v tomto případě na přesnost měření vliv.

5.4 Měření momentu setrvačnosti setrvačnicku

Jako poslední předmět byl změřen setrvačnick. Konkrétně pouze moment setrvačnosti k ose rotace. Osa symetrie setrvačnicku a osa drátu nesvíraly mezi sebou žádný úhel. Měření probíhalo v první záložce uživatelského rozhraní „kmitání kolem jedné osy“. Průměrná doba kyvu byla změřena $\tau=1,451$ s. Moment setrvačnosti setrvačnicku k ose rotace tedy je $I_0=0,0823 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.

6 Závěr

V rámci této práce bylo nově sestaveno měřicí stanoviště pro měření momentu setrvačnosti v laboratořích Ústavu automobilů.

Bylo také navrženo několik způsobů stanovení úhlu naklonění měřeného předmětu.

Kontrolními měřeními byla ověřena funkčnost měřicího stanoviště. Byly také změřeny momenty setrvačnosti dvou předmětů.

Výstupem z této práce je manuál zapojení měřicího stanoviště, manuál pro přípravu měření a vyhodnocení naměřených hodnot a výkladový poster pro studenty.

7 Poděkování

Děkuji Doc. Dr. Ing. Gabriele Achtenové za vedení bakalářské práce.

Děkuji Ing. Michalu Strapkovi za pomoc při zapojení měřicího stanoviště.

8 Použitá literatura

- [1] MACH, Ernst. *The Science of Mechanics*. Chicago: The Open Court Publishing co., 1919. ISBN 1-113-88902-0. Dostupné z: <https://archive.org/stream/scienceofmechani005860mbp#page/n5/mode/2up>
- [2] VALÁŠEK, Michael, Zbyněk ŠIKA a Václav BAUMA. *Mechanika B*. Vyd. 1. V Praze: Vydavatelství ČVUT, 2004, 121 s. ISBN 80-01-02919-0.
- [3] KOHOUT, Zdeněk. *Laboratorní cvičení z fyziky*. Vyd. 1. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2002, 207 s. ISBN 80-01-02472-5.
- [4] Phy_133_lab_7_-_angular_momentum. *Stony Brook Physics Laboratory Manuals* [online]. 2014, 21.10.2014 [cit. 2015-04-30]. Dostupné z: <http://skipper.physics.sunysb.edu/~physlab/doku.php?id=phy133:lab7>
- [5] NOVOTNÝ, Lukáš. *Inovace měřicího stanoviště momentu setrvačnosti*. Praha, 2010. Bakalářská práce.
- [6] What Is NI CompactDAQ? - National Instruments. *National Instruments Česká Republika a Slovensko* [online]. 2015 [cit. 2015-06-05]. Dostupné z: <http://www.ni.com/compactdaq/whatis/>
- [7] Pdf-manual POSIROT. *Magnetic Absolute Singleturn* [online]. 2015 [cit. 2015-06-13]. Dostupné z: chrome-extension://encfpfilknmenlmjemepncnlbbjlabkc/http://www.asmsensor.com/asm/pdf/pro/pras_man_en.pdf
- [8] AS5163 - 12 - bit Automotive Qualified Rotary Position Sensor - ams. *Ams - design and manufacturer of sensors, sensor interfaces, power management and wireless ICs* [online]. 2015 [cit. 2015-06-09]. Dostupné z: <http://ams.com/eng/Products/Position-Sensors/Magnetic-Rotary-Position-Sensors/AS5163>
- [9] Magnetic angle sensor - 6 mm, 0 - 360° | PRAS20. *DirectIndustry - The Virtual Industrial Exhibition: sensor - automation - motor - pump - handling - packaging* [online]. 2015 [cit. 2015-06-09]. Dostupné z: http://www.directindustry.com/prod/asm-sensor/product-7141-336073.html#product-item_467954
- [10] Optical encoders from pacer. *Optoelectronics, Photonics, Detectors, Sensors & displays* [online]. 2015 [cit. 2015-06-09]. Dostupné z: <http://www.pacer.co.uk/products/sensors/encoders/>

9 Seznam příloh

- Příloha 1 Manuál sestavení měřicího stanoviště při použití měřicí karty DAQCard 6062
- Příloha 2 Manuál sestavení měřicího stanoviště při použití CompactDAQ
- Příloha 3 Manuál pro přípravu měření a vyhodnocení naměřených hodnot
- Příloha 4 Poster

Příloha 1: Manuál sestavení měřicího stanoviště při použití měřicí karty DAQCard 6062

Tento manuál byl vypracován proto, aby bylo možné kdykoliv, v krátkém čase a s menší pracností zapojit měřicí stanoviště. V minulosti jakýkoliv manuál chyběl, takže při opakovaném zapojení musel mít uživatel detailní znalosti všech prvků.



Fotografie zapojení

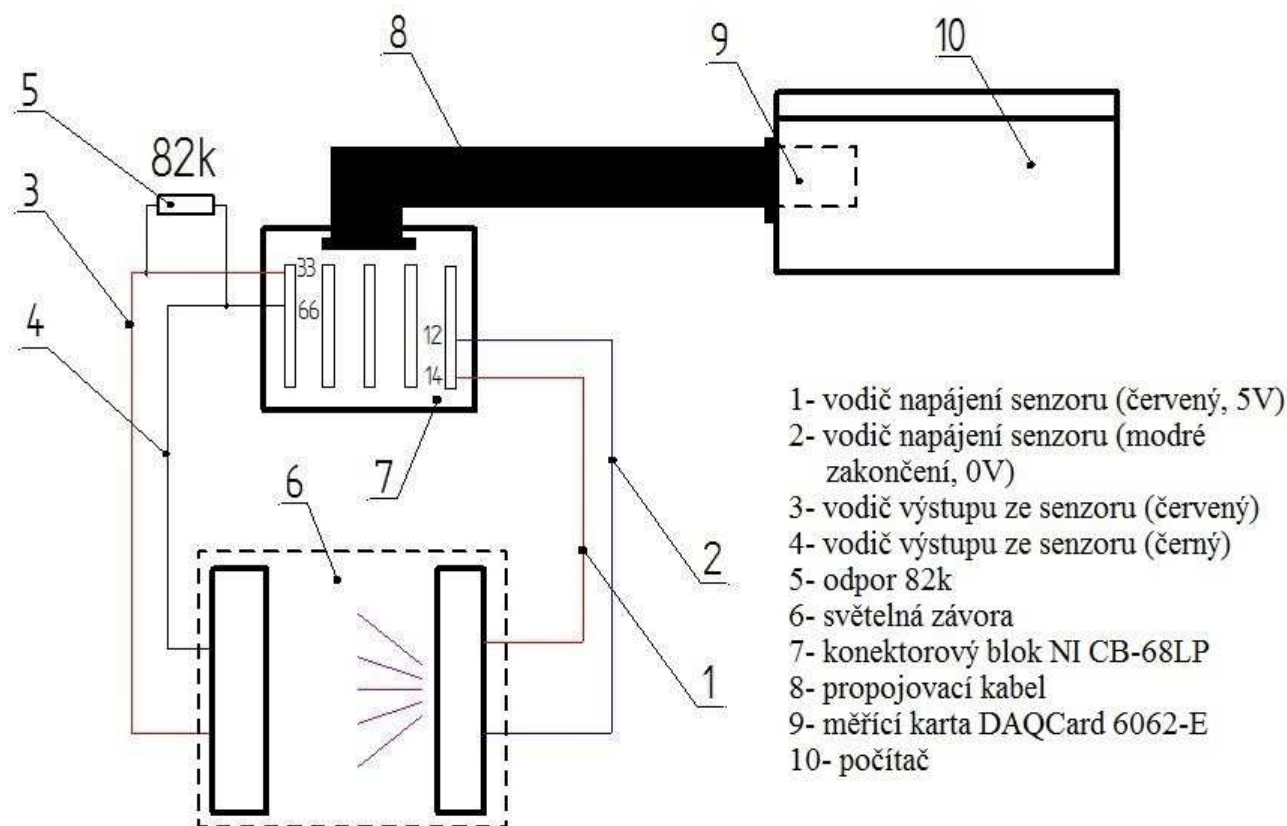
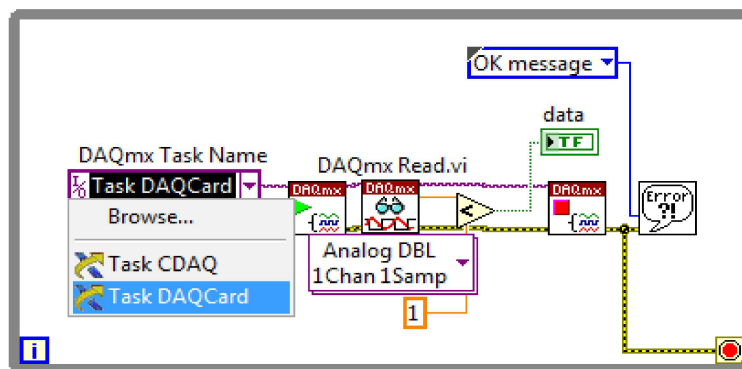


Schéma zapojení

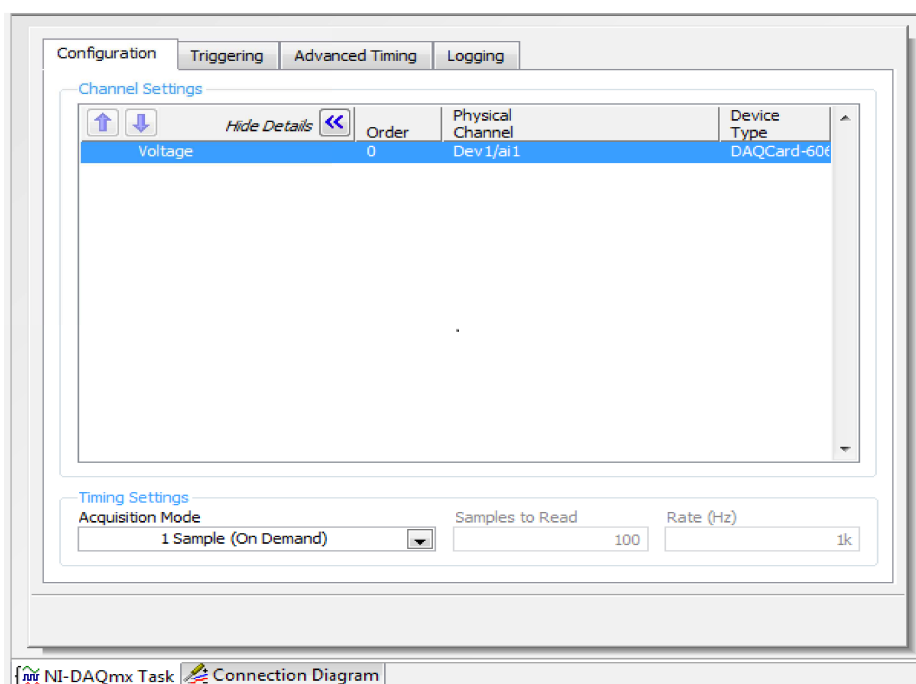
Postup zapojení:

- 1) Připojit vodiče (červený a modrý, zakončené vidlicemi) napájející senzor na konektorový blok. **Vodič 1 do pinu 14 a vodič 2 do pinu 12.** Vodič 2 je možné připojit i na jiné piny (9, 13, 18...).
- 2) Spojit výstupní vodiče ze senzoru (červený a černý) odporem 82k.
- 3) Připojit výstupní vodiče na konektorový blok. **Vodič 3 do pinu 33 a vodič 4 do pinu 66.**
- 4) vložit kartu DAQCard 6062-E do počítače a zkontrolovat, zda je načtená.
- 5) Spojit propojovacím kabelem konektorový blok s měřicí kartou.

Pro měření je nutné spouštět soubor „Moment setrvačnosti - DAQCard 6062“. Ten obsahuje program, který načítá data z měřicí karty DAQCard 6062-E. V blokovém schématu části programu na obrázku níže je smyčka inicializace čidla. K té musí být přiřazen **analogový** task vytvořený v NI Measurement & Automation Explorer V tomto případě má název „Task DAQCard“.



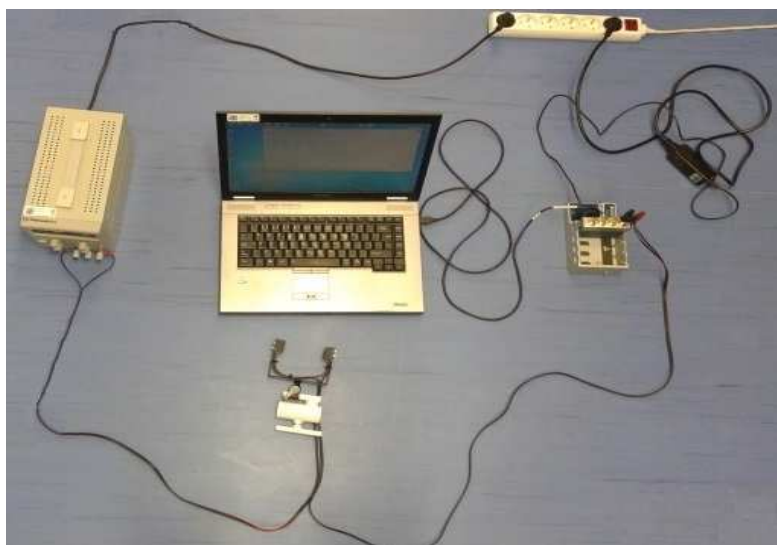
*Smyčka inicializace čidla s rozhodovacím kritériem $U > 3V - 1$
 $U < 3V - 0$*



Nastavení analogového tasku v NI MAX

Příloha 2: Manuál sestavení měřicího stanoviště při použití CompactDAQ

Toto zapojení slouží především jako náhradní řešení za zapojení s použitím měřicí karty. Je sice složitější a méně skladné, ale v případě poruchy je schopno jej plně nahradit.



Fotografie zapojení



Nástavec na modul
NI 9402

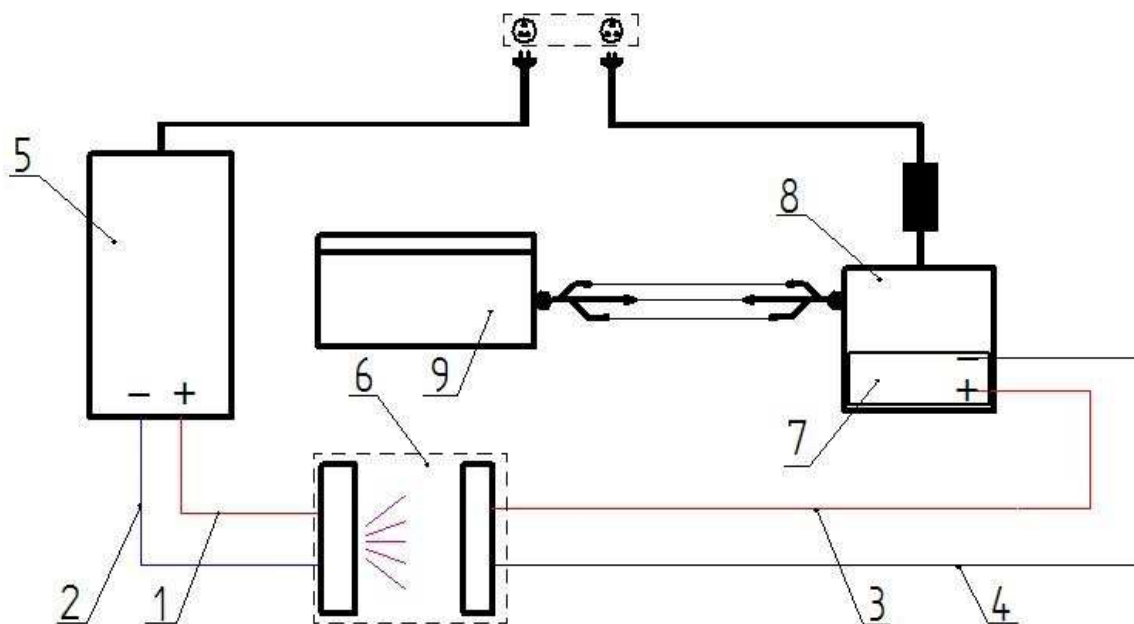


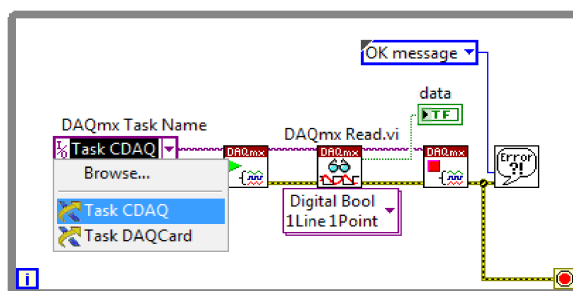
Schéma zapojení

- 1- vodič napájení senzoru (červěný, 5V)
- 2- vodič napájení senzoru (modré zakončení, 0V)
- 3- vodič výstupu ze senzoru (červěný)
- 4- vodič výstupu ze senzoru (černý)
- 5- zdroj napětí
- 6- světelná závora
- 7- modul NI 9402
- 8- CompactDAQ
- 9- počítač

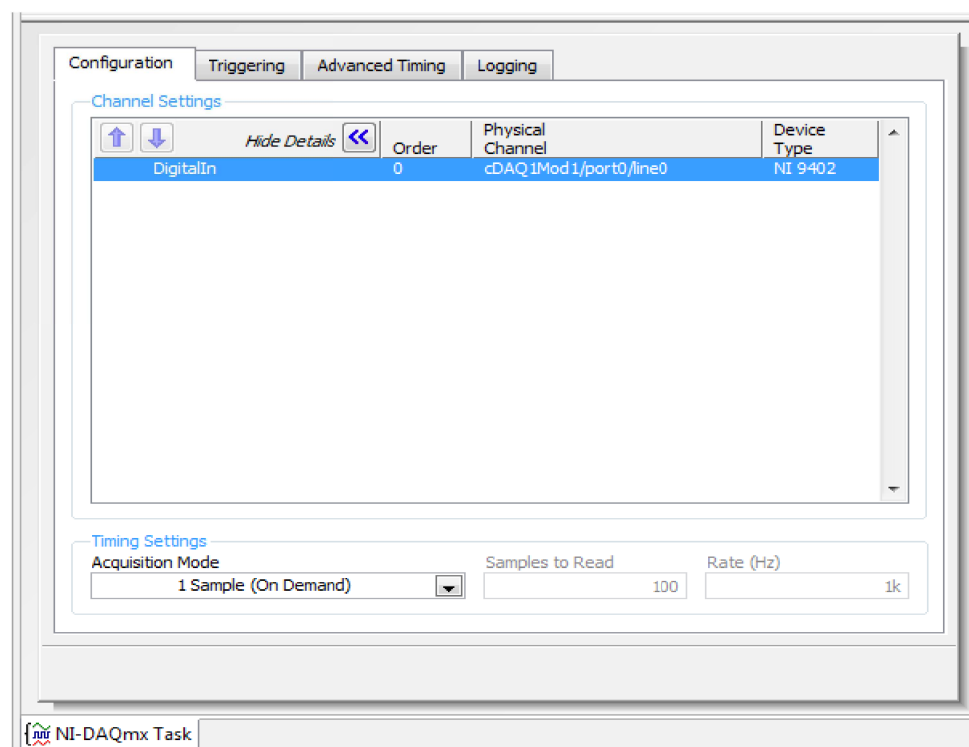
Postup zapojení:

- 1) Připojit vodiče (červený a modrý, zakončené vidlicemi) napájející senzor na zdroj napětí. Červený vodič 1 na červenou svorku a modrý vodič 2 na černou svorku.
- 2) Zasunout modul NI 9402 do CompactDAQ (do slotu 1).
- 3) Na vstup 0 modulu NI 9402 nasadit nástavec.
- 4) Na svorky nástavce připojit výstupní vodiče ze senzoru. Červený vodič 3 na červenou svorku, černý vodič 4 na černou svorku.
- 5) Propojit CompactDAQ USB kabelem s počítačem a zkontrolovat, zda se CompactDAQ načte.
- 6) Zdroj i CompactDAQ zapojit do elektrické sítě.
- 7) Před zapnutím zdroje napětí je z důvodu bezpečnosti nutné otočit regulátory proudu a napětí na nulovou hodnotu. Po zapnutí zdroje pozvolna zvyšovat napětí až na hodnotu přibližně 5V.

Pro měření je nutné spouštět soubor „Moment setrvačnosti - CDAQ“. Ten obsahuje program, který načítá data přes CompactDAQ. V blokovém schématu části programu na obrázku vpravo je smyčka inicializace čidla. K té musí být přiřazen digitální task vytvořený v NI Measurement & Automation Explorer. V tomto případě má název „Task CDAQ“. Jeho nastavení je na obrázku níže.



Smyčka inicializace čidla

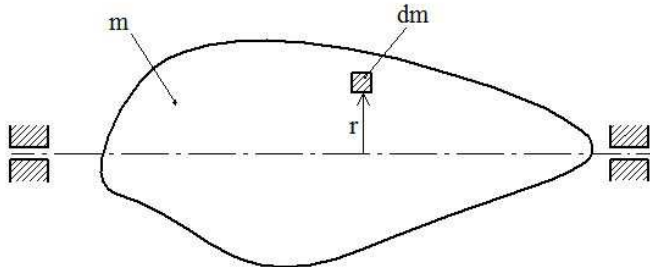


Nastavení tasku v NI MAX

Příloha 3: **Manuál pro přípravu měření a vyhodnocení naměřených hodnot**

Základní pojmy:

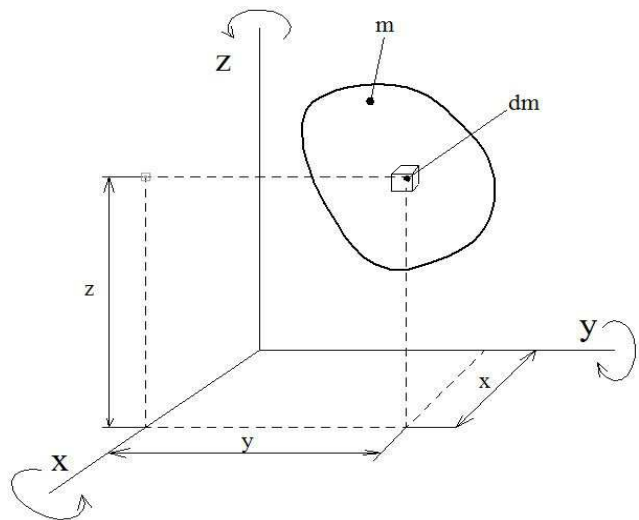
Moment setrvačnosti tělesa k ose je definován integrálem $I = \int_{(m)} r^2 dm$.



Maticе setrvačnosti se používá při rotaci tělesa kolem více os. Je definována jako

$$I_S = \begin{bmatrix} I_x & -D_{xy} & -D_{xz} \\ -D_{yx} & I_y & -D_{yz} \\ -D_{zx} & -D_{zy} & I_z \end{bmatrix}$$

kde I_x, I_y, I_z jsou hlavní momenty setrvačnosti k jednotlivým osám a D_{xy}, D_{xz}, D_{yz} jsou deviační momenty.



Deviační momenty jsou definovány vztahy:

$$D_{xy} = \int_{(m)} x y dm \quad ; \quad D_{xz} = \int_{(m)} x z dm \quad ; \quad D_{yz} = \int_{(m)} y z dm$$

Deviačních momentů využíváme ke stanovení hlavních os setrvačnosti a momentů setrvačnosti k těmto osám. Ke hlavním osám setrvačnosti jsou totiž deviační momenty nulové. Důležité například pro vyvažování těles.

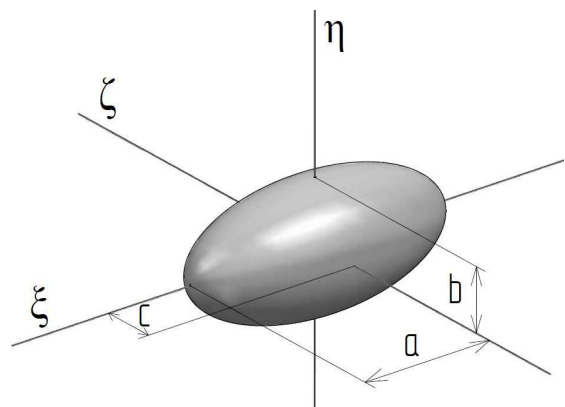
Elipsoid setrvačnosti je popsán rovnicí $I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2D_{xy} xy - 2D_{yz} yz - 2D_{xz} xz = 1$

nebo rovnicí $I_\xi \xi^2 + I_\eta \eta^2 + I_\zeta \zeta^2 = 1$

kde ξ, η, ζ jsou hlavní centrální osy a parametry (vznikly posunutím souřadného systému). a, b, c jsou poloosy elipsoidu setrvačnosti. Moment setrvačnosti k ose procházející těžištěm se stanoví ze vztahu

$$I_0 = I_\xi \cos \alpha + I_\eta \cos \beta + I_\zeta \cos \gamma$$

Úhly α, β, γ jsou úhly, které svírá osa rotace s osami x, y, z .



Měření momentu setrvačnosti metodou torzních kmitů

Je to experimentální metoda, při které měřené těleso koná torzní kmity. Z periody těchto kmitů jsme schopni určit moment setrvačnosti k ose rotace.

Kmity považujeme za netlumené a pohybová rovnice tak má tvar:

$$I \ddot{\phi} = -k \phi$$

$$\ddot{\phi} + \frac{k}{I} \phi = 0$$

$$\ddot{\phi} + \omega^2 \phi = 0$$

kde ω je vlastní úhlová frekvence, pro kterou platí následující vztahy:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{I}} \quad \text{a zároveň} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

T je perioda, čili doba kmitu. Z toho vyplývá vztah mezi dobou kyvu τ a momentem setrvačnosti:

$$\tau = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} = \pi \sqrt{\frac{I}{k}}$$

Hledaný moment setrvačnosti vypočítáme ze vztahu

$$I = k \cdot \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^2$$

Tuhost k můžeme vypočítat při znalosti modulu pružnosti ve smyku ze vztahu

$$k = \frac{\pi G r^4}{2l}$$

Častěji ale stanovujeme tuhost pomocí předmětu o známém momentu setrvačnosti, který necháme rozkmitat a změříme dobu kyvu. Tuhost drátu poté spočítáme jako

$$k = \frac{I_0 \pi^2}{\tau^2}$$

Tělesem se známým momentem setrvačnosti je nejčastěji hladký válec o hmotnosti m a poloměru r . Jeho moment setrvačnosti spočítáme pomocí tabulkového vztahu

$$I = \frac{1}{2} m r^2$$

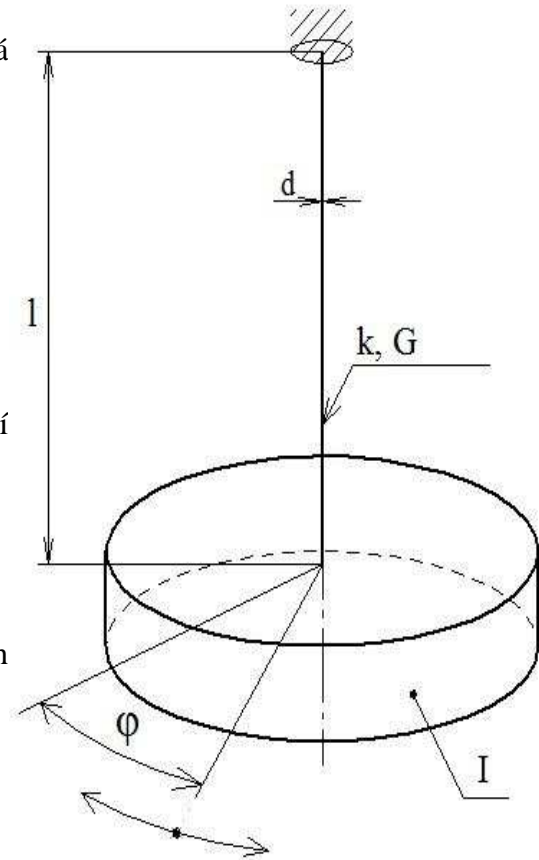


schéma měření

k - torzní tuhost drátu

d - průměr drátu

l - délka drátu

G - modul pružnosti ve smyku

I - moment setrvačnosti měřeného tělesa

ϕ - úhel pootočení tělesa

Postup měření

Měření tuhosti drátu:

1) Zjistíme poloměr a hmotnost pomocného disku a spočítáme jeho moment setrvačnosti.

$$I = \frac{1}{2} m r^2$$

I =	kg.m ²
-----	-------------------

2) Přilepíme na pomocný disk například papír, který bude přerušovat světlo dopadající na senzor.

3) Zavěšíme disk na závěs a vhodně k němu umístíme stojan se senzorem.

4) Podle zapojení otevřeme soubor „Moment setrvačnosti – DAQCard“ nebo „Moment setrvačnosti – CDAQ“, který vyhodnocuje měření.

5) Vybereme záložku „kmitání kolem jedné osy“ a bílou šipkou spustíme program.

6) Nastavíme, kolik měření bude program vyhodnocovat a kolik kyvů má být v jednom měření

7) Pootočíme diskem o 10°-90° a uvolníme jej. Je důležité, aby těleso konalo pokud možno pouze torzní kmity. Disk tedy pouze pootočíme a neposouváme jej do strany. Kmitání kolem jiných os může ovlivnit přesnost měření.

8) Stiskneme tlačítko „start měření“ a necháme změřit dobu kyvu. Měření opakujeme dokud nedosáhneme nastaveného počtu měření

9) Ze změřené průměrné doby kyvu vypočítáme torzní tuhost drátu.

Naměřené hodnoty:

Průměrná doba kyvu:

$\tau =$	s
----------	---

Tuhost drátu:

$$k = \frac{I_0 \pi^2}{\tau^2}$$

k =	N.m.rad ⁻¹
-----	-----------------------

Měření momentu setrvačnosti kmitáním kolem jedné osy

Měří se takto moment setrvačnosti rotačně symetrických součástí k ose symetrie. Postup měření je velmi podobný jako při měření tuhosti drátu.

- 1) Přilepíme na těleso například papír, který bude přerušovat světlo dopadající na senzor.
- 2) Zavěsíme disk na závěs a vhodně k němu umístíme stojan se senzorem.
- 3) Podle zapojení otevřeme soubor „Moment setrvačnosti – DAQCard“ nebo „Moment setrvačnosti – CDAQ“, který vyhodnocuje měření.
- 4) Vybereme záložku „kmitání kolem jedné osy“ a bílou šipkou spustíme program.
- 5) Nastavíme, kolik měření bude program vyhodnocovat a kolik kyvů má být v jednom měření
- 6) Pootočíme tělesem o 10° - 90° a uvolníme jej. Je důležité, aby těleso konalo pokud možno pouze torzní kmity. Těleso tedy pouze pootočíme a neposouváme jej do strany. Kmitání kolem jiných os může ovlivnit přesnost měření.
- 7) Stiskneme tlačítko „start měření“ a necháme změřit dobu kyvu. Měření opakujeme dokud nedosáhneme nastaveného počtu měření
- 8) Po dokončení měření zvolíme adresář a zadáme název nového souboru, do kterého se zapíše výsledky měření, které program vyhodnotil. Moment setrvačnosti byl vypočítán podle vzorce

$$I = k \cdot \left(\frac{\tau}{\pi} \right)^2$$

Naměřené hodnoty:

Průměrná doba kyvu:

$$\tau = \quad s$$

Moment setrvačnosti:

$$I = \quad \text{kg.m}^2$$

Měření hlavních momentů setrvačnosti

Měříme hlavní momenty setrvačnosti rotačně symetrického tělesa.

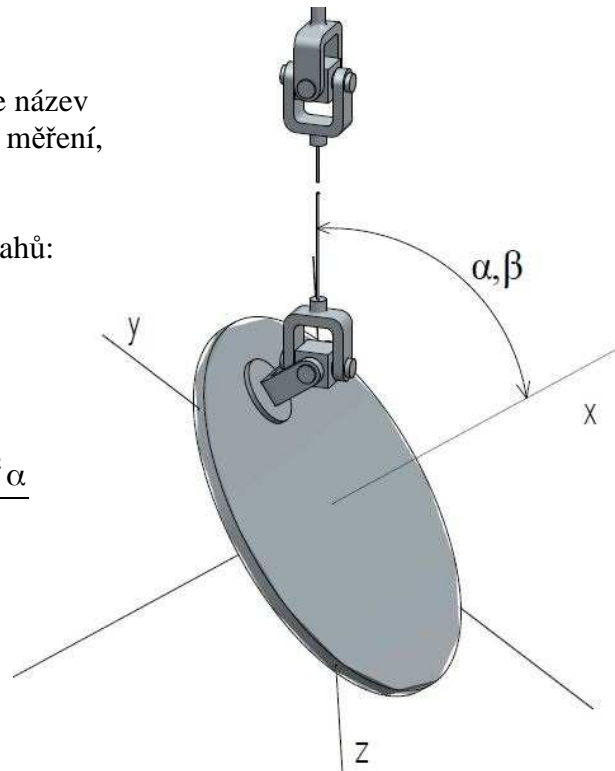
- 1) Zavěsíme těleso na závěs pod úhlem α , který následně změříme.
- 2) Přilepíme na těleso například papír, který bude přerušovat světlo dopadající na senzor.
- 3) Podle zapojení otevřeme soubor „Moment setrvačnosti – DAQCard“ nebo „Moment setrvačnosti – CDAQ“, který vyhodnocuje měření.
- 4) Vybereme záložku „kmitání kolem dvou os“ a bílou šipkou spustíme program.
- 5) Nastavíme, kolik měření bude program vyhodnocovat, kolik kyvů má být v jednom měření a jaký úhel α či β svírá osa rotace s osou symetrie předmětu.
- 6) Pootočíme tělesem o 10° - 90° a uvolníme jej. Je důležité, aby těleso kralo pokud možno pouze torzní kmity. Disk tedy pouze pootočíme a neposouváme jej do strany. Kmitání kolem jiných os může ovlivnit přesnost měření.
- 7) Stiskneme tlačítko „start měření“ a necháme změřit dobu kyvu. Měření opakujeme dokud nedosáhneme nastaveného počtu měření
- 8) Těleso zavěsíme znovu, tentokrát pod jiným úhlem β , který následně změříme.
- 9) Znovu opakujeme měření podle bodů 6 a 7.
- 10) Po dokončení měření zvolíme adresář a zadáme název nového souboru, do kterého se zapíše výsledky měření, které program vyhodnotil.

Program vyhodnocuje naměřené hodnoty podle vztahů:

$$I_1 = k \cdot \left(\frac{\tau_1}{\pi}\right)^2 \quad ; \quad I_2 = k \cdot \left(\frac{\tau_2}{\pi}\right)^2$$

$$I_y = I_z = \frac{I_2 \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta} - I_1}{\frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta} \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha} \quad ; \quad I_x = \frac{I_1 - I_y \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{I_x}} \quad ; \quad b = c = \frac{1}{\sqrt{I_y}}$$



Výsledek:

τ_1 [s]	τ_2 [s]	I_x [kg.m ²]	I_y, I_z [kg.m ²]	a [kg ^{-0.5} m ⁻¹]	b, c [kg ^{-0.5} m ⁻¹]