

České Vysoké Učení Technické v Praze

Fakulta Strojní

Ústav mechaniky tekutin a termodynamiky



Bakalářská práce

**Identifikace vírových struktur v Karmánově vírové  
stezce z dat z numerické simulace**

Vypracoval: Tomáš Hurský

Vedoucí práce: Ing. Tomáš Hyhlík Ph.D.

2015

## **Čestné prohlášení**

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně. Veškeré použité podklady, ze kterých jsem čerpal informace, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu §60 zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne.....

.....

Podpis

## **Poděkování**

Tímto bych rád poděkoval vedoucímu bakalářské práce panu Ing. Tomáši Hyhlíkovi, Ph.D. za konstruktivní připomínky a rady při řešení problematiky identifikace vírových struktur v proudovém poli. Dále bych rád poděkoval svým rodičům za podporu na vysoké škole.

## **Abstrakt**

Bakalářská práce popisuje metodu rozkladu tenzoru gradientu rychlosti při řešení vírových struktur. Tato metoda je použita na řešení analytického případu Lambova Ossenova víru, kde je vykreslena jeho vířivost, reziduální vířivost, smyková část vířivosti a smyková deformace. Dále tato práce obsahuje CFD analýzu jednoduchého modelu proudění kolem válce, kde za válcem vznikne úplav a vírová Karmánová řada. Na data z numerického řešení bude použita metoda rozkladu tenzoru gradientu rychlosti a následně bude vykreslena vířivost, reziduální vířivost, smyková část vířivosti a smyková deformace pro vzniklou vírovou strukturu. V závěru bude uvedeno hodnocení vzniklé vírové struktury Lambova-Ossenova víru a bude mezi sebou porovnána reziduální vířivost a smyková část vířivosti. Dále bude uvedeno hodnocení CFD analýzy vzniku Karmánovy vírové řady.

## **Klíčová slova**

Rozklad tenzoru rychlosti, vířivost, smyková deformace, Lamb-Ossenův vír

## **Abstract**

This bachelor thesis describes the method of triple decomposition of vorticity in solving vortex structures. That method is used to solve an analytical case of the Lamb-Ossen vortex, where its vorticity, residual vorticity, shearing part of vorticity and strain are. Further, this work includes the CFD analysis of a simple model of the flow around the cylinder where a wake behind the cylinder and Karman series vortex are created. Then the triple decomposition of vorticity method will be applied on the numerical solution data obtained to describe the vorticity, residual vorticity, shearing part of vorticity and strain of the resulting vortex structure. In conclusion will be stated a review of the Lamb-Ossen vortex and its vortex structure then residual vorticity will be compared with shearing part of vorticity. Further, there will be stated CFD analysis review of Karmán vortex street.

## **Keywords**

Triple vorticity decomposition, vorticity, strain, Lamb-Ossen vortex

# Obsah

1.	Seznam použitých symbolů.....	10
1.1	Základní symboly .....	10
1.2	Dolní indexy .....	11
2.	Úvod.....	12
2.1	Motivace .....	13
2.2	Cíl práce.....	14
3.	Proudění .....	15
3.1	Základní režimy proudění.....	15
3.1.1	Laminární režim proudění .....	15
3.1.2	Turbulentní režim proudění.....	15
3.2	Proudové pole .....	16
4.	Metoda rozklad tenzoru gradientu rychlosti.....	18
4.1	Popis .....	18
4.2	Rozklad pro dvourozměrné proudění .....	18
4.3	Případy působení vířivosti a smykové deformace .....	20
4.3.1	Čistý smyk.....	20
4.3.2	Převládající deformace .....	21
4.3.3	Převládající rotace .....	22
4.4	Řešení analytického případu vírové struktury .....	23
4.4.1	Popis analytického případu a postupu řešení .....	23
4.4.2	Výsledky při použití metody rozkladu tenzoru rychlosti pro Lamb-Ossenův vír .....	24
5	Obtékání kruhového válce.....	28
5.1	Popis problematiky .....	28
5.2	Dvourozměrné proudění .....	29
5.2.1	Laminární režim ustáleného proudění (Laminar steady regime) .....	29
5.2.2	Laminární vírové proudění (Laminar vortex shedding).....	29
5.3	Trojrozměrné proudění .....	30
5.4	CFD analýza .....	31
5.4.1	Popis geometrie .....	31
5.4.2	Tvorba sítě geometrie.....	32

5.4.3	Určení okrajových podmínek .....	32
5.5	Vyhodnocení dat z Ansys fluent.....	34
6.	Závěr.....	39
7.	Seznam odborné literatury .....	40
8.	Přílohy .....	41

# 1. Seznam použitých symbolů

## 1.1 Základní symboly

Symbol	Jednotky	Význam
$v_i, u, v, w$	$(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	složky vektoru rychlosti
$x_j, x, y, z$	(m)	souřadnice vektorového pole
t	(s)	čas
Re	(1)	Reynoldsovo číslo
St	(1)	Strouhalovo číslo
$S_{i,j}$	$(\text{s}^{-1})$	tenzor rychlosti deformace
$\Omega_{i,j}$	$(\text{s}^{-1})$	tenzor rotace
$\omega$	$(\text{s}^{-1})$	vektor vířivosti
$s_{1,2}$	$(\text{s}^{-1})$	smyková deformace
$\alpha$	(°)	úhel natočení souřadnice systému
$\theta$	(°)	polární souřadnice systému
r	(m)	poloměr od středu víru
$\nu$	$(\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1})$	kinematická viskozita
D	(m)	charakteristický rozměr obtékaného profilu
$C_{PB}$	(1)	tlakový koeficient
f	(Hz)	frekvence vzniku vírů
$\mu$	(Pa.s)	dynamická viskozita
$\rho$	$(\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$	hustota
T	(s)	perioda



## 1.2 Dolní indexy

Symbol	Význam
$i, j, \theta$	u veličiny (např. tenzor nebo vektor) složka ve stejně označeném směru
1,2	označení pořadí členu (např. smyková deformace)
RES	u vektorové veličiny (např. vířivost a smyková deformace) reziduální
SH	u vektorové veličiny (např. vířivost a smyková deformace) smykové
0	u veličiny (např. poloměr vzdálenosti) od jádra
$\theta P$	u vektorové veličiny (např. rychlosti) tangenciální na vrcholu

## 2. Úvod

Tato práce pojednává o řešení vírových struktur metodou rozkladu tenzoru gradientu rychlosti a řešení vírových struktur vznikající při proudění tekutiny kolem válce pomocí CFD (Computational Fluid Dynamics) analýzy při dvourozměrném nestacionárním proudění.

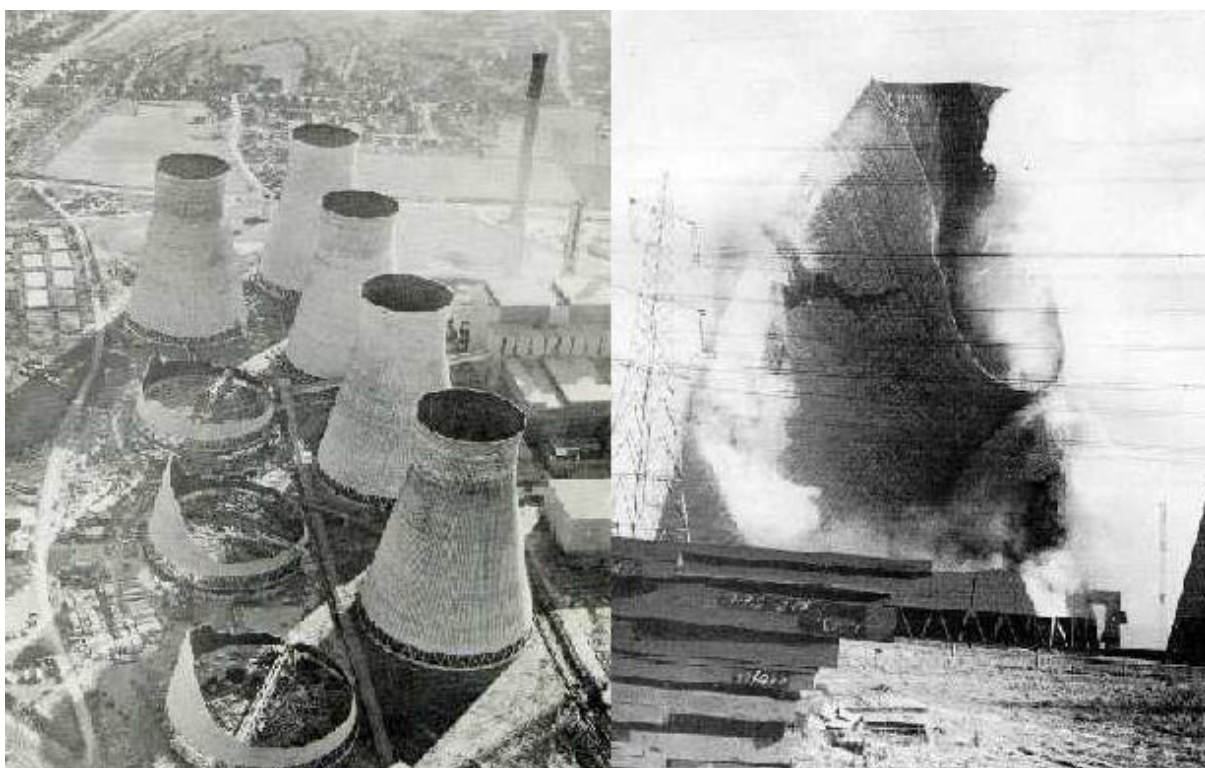
Metoda rozkladu tenzoru gradientu rychlosti je zde použita pro řešení vířivosti a vzniku vírů. Použití metody je výhodné vzhledem k omezení práce pouze na dvourozměrné řešení vírů a jejich vzniku, jehož důsledkem je zjednodušení metody. Metoda popisuje rozklad tenzoru gradientu rychlosti na symetrickou část tenzoru, která odpovídá tenzoru rychlosti deformace a na nesymetrickou část tenzoru rychlosti, která odpovídá tenzoru rotace. Při získání tenzoru rychlosti deformace lze získat vlastní čísla tenzoru, kde první dva členy vlastních čísel lze dále ještě rozdělit na konstantní část, které odpovídá rychlost změny objemu a na část smykové deformace. Třetí člen vlastních čísel je nulový. Tenzor rotace se už dále nerozkládá a jeden z jeho členů je označen jako vířivost. Po obdržení vířivosti a smykové deformace lze tyto dva členy mezi sebou porovnat a posoudit, zda se jedná o případ čistého smyku, případ převládající smykové deformace nad rotací, případ převládající rotace nad smykovou deformací nebo případ čisté rotace.

Při nestacionárním režimu proudění za válcem, v místě úplavu, periodicky vznikají víry, které se postupně vzdalují se směrem proudění od místa svého vzniku. Tento jev se nazývá vírová Karmánova řada a její periodičnost je definována bezrozměrným Strouhalovým číslem, které popisuje vztah mezi frekvencí, charakteristickým rozměrem obtékaného profilu a rychlostí tekutiny.

## 2.1 Motivace

Vířivost a vznik vírů je v dnešní době velmi důležitá problematika, kterou nelze zanedbat, protože už při samotném návrhu budov či turbín a jiných zařízení se musí dbát na správnou konstrukci. Při zanedbání správné konstrukce může dojít až k destruktivním účinkům. Jeden z takových případů se stal v roce 1965 ve Ferrybridge v Anglii při vysoké rychlosti větru, kdy osm chladicích věží bylo postaveno v těsné blízkosti vedle sebe. Stavitelé nepočítali s příliš vysokými rychlostmi větru, které nejsou charakteristické pro Anglické prostředí a naivně si mysleli, že chladicí věže jsou správně postaveny a rozmístěny vedle sebe. Jakmile však začal vítr proudit kolem věží, začala vznikat vírová struktura v podobě vírových Karmánových řad, které způsobily vibrace. Ty se pro tři věže z osmi staly osudné, protože chladicí věže na takovýto druh namáhání nebyly navrženy (viz Obr.č.1.).

Další oblastí, kde je třeba řešit vířivost a vznik vírů jsou turbíny a jejich lopatky. Při nevhodnosti umístění lopatek správně za sebou a nevhodné konstrukci, která nebude počítat s vírovou strukturou, dojde k podstatnému zhoršení efektivity turbíny. Jak je vidět, tak vírové struktury nemají vliv jen na stabilitu budov a jejich konstrukci, ale i na efektivitu strojů.



*Obr.č.1. Pohled na bortící se chladicí věže ve Ferrybridge r. 1965 [8]*

## 2.2 Cíl práce

Jak už bylo zmíněno v úvodu, práce se omezí na dvourozměrné proudění tekutiny a řešení dvourozměrné problematiky vířivosti. Práce má uvést metodu rozkladu tenzoru gradientu rychlosti a aplikovat tuto metodu na analytickém případě Lamb-Ossenova víru. Dále má obsahovat CFD analýzu obtékání válce v režimu dvourozměrného nestacionárního proudění, kde za válcem vznikne vírová Karmánova řada. Celá CFD analýza bude probíhat v programu Ansys Fluent, z kterého se následně získají data, která budou použita v metodě rozkladu tenzoru rychlosti. Bude posouzeno, zda se jedná o případ čistého smyku, případ převládající smykové deformace nad rotací, případ převládající rotace nad smykovou deformací nebo případ čisté rotace.

## 3. Proudění

Proudění může být s časem neměnné (stacionární). Tento případ nastává v momentě, kdy je rychlost proudící kapaliny s časem konstantní. Opačným případem je rychlost měnící se s časovým průběhem - pak jde o proudění nestacionární. Proudění může být vyšetřováno v 1D prostoru, kdy je rychlost závislá pouze jen na jedné prostorové veličině (toto se pak uplatňuje u potrubních systémů), následně může být proudění vyšetřováno v 2D prostoru, kdy je rychlost závislá na poloze rychlosti v rovině. Závisí na dvou rozměrových veličinách polohy (např. osově symetrické úlohy) a dále proudění můžeme řešit v 3D prostoru, kde rychlost závisí na třech rozměrových veličinách polohy.

### 3.1 Základní režimy proudění

#### 3.1.1 Laminární režim proudění.

Laminární režim proudění je takový režim, který má tendenci se po jakémkoliv vnesení nepravidelnosti nebo neuspořádanosti do systému vrátit zpět do původního stavu – lze konstatovat, že daný systém tlumí poruchy. Pro rozeznání, zda jde o laminární režim proudění, se používá porovnávací bezrozměrná veličina Reynoldsovo číslo, které popisuje vztah mezi vazkými účinky a setrvačnými účinky. Například v trubici kruhového průřezu dosahuje kritické Reynoldsovo číslo až 2300 pro laminární proudění. Profil průběhu rychlosti v kruhové trubici pole proudění je parabola.

#### 3.1.2 Turbulentní režim proudění

Turbulentní režim proudění je takový režim, který nemá přesnou definici. Existuje několik charakteristických znaků pro turbulentní proudění. Prvním základním charakteristickým znakem je, že turbulentní režim proudění vzniká především při vysokých Reynoldsových číslech. Další ze základních vlastností pro turbulentní režim proudění je chaotické proudění. Nemusí však platit, že každé chaotické proudění je turbulentní. Nahodilost změn je dominantní, i když bylo prokázáno, že u rozvinutého turbulentního proudění existují uspořádané skupiny. Vzniklé turbulentní proudění se udržuje samo a vytváří nové víry z již vzniklých vírů (samobuzení). Turbulentní režim proudění je především problematikou trojrozměrného proudění, protože tekutina se pohybuje ve všech směrech. Dalšími znaky jsou fluktuace rychlosti, tlaku a dalších veličin [3]. Pro proudění v trubici kruhového průřezu se jedná o turbulentní proudění v případě, že je Reynoldsovo číslo vyšší než 2300. Profil průběhu rychlosti už není parabolický.

### 3.2 Proudové pole

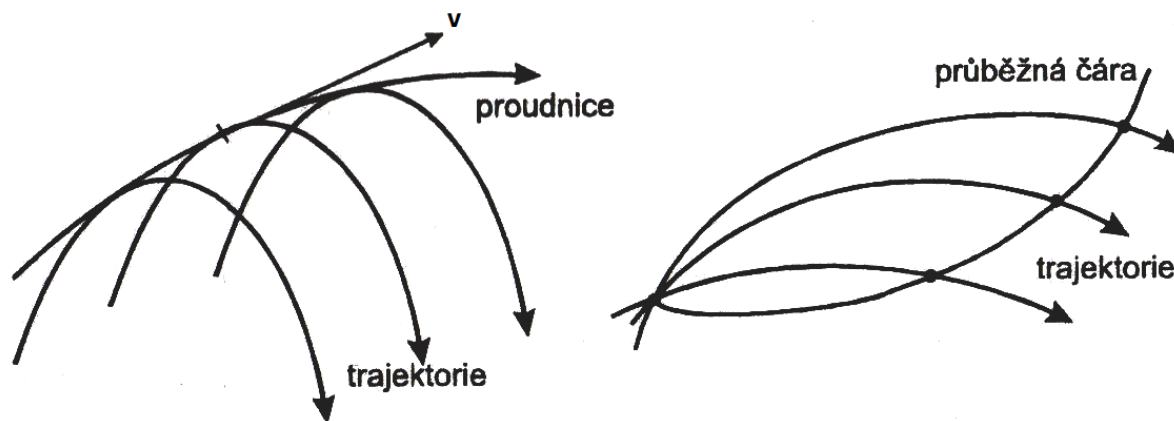
Poznatky teorie pole používáme především pro kinematické a dynamické vyšetřování rovinného nebo prostorového proudění. Skalárním, popř. vektorovým polem nazýváme prostor, v němž každému bodu  $x_j$  přísluší v určitém čase  $t$  skalární veličina a  $(x_j, t)$ -např. teplota, hustota, popř. vektorová veličina  $b_i(x_j, t)$ -např. rychlost, objemová síla. Tomuto popisu odpovídá Eulerovský popis proudění, který popisuje daný kontrolní objem a v něm pohybující se tekutinu v daném místě  $x_j$  v daném čase  $t$  [1].

Vyšetřuje-li se pohyb tekutiny (proudění), je třeba zjistit rychlost každé částice kontinua  $v_i(x_j, t)$ . Poloha každé částice kontinua však závisí na okolním prostředí a tedy nelze vyšetřovat každou částici kontinua zvlášť, ale je třeba řešit pohyb spojitě rozložené hmoty tekutiny. Rychlosti jednotlivých částic vytvářejí rychlostní pole. Vektorové čáry rychlostního pole jsou tzv. proudnicemi, které jsou proudovými čarami (viz. Obr.č.2.). Proudnice jsou tečnami na trajektorii částice a zároveň jsou tečnými ke směru působení vektoru rychlosti. Pro stacionární proudění je kinematický stav tekutiny v libovolném bodě stálý, proto proudnice a trajektorie pohybu jsou totožné. Pro nehomogenní proudové pole platí, že při pohybu částice kontinua se tvar částice kontinua mění vlivem působení okolí a vnějších sil. Proto celý průběh vývoje struktury proudového pole ovlivňuje právě deformace částice kontinua [1].

Při pohybu částice kontinua nehomogenním proudovým polem se mění tvar částice působením okolí na částici. Částice kontinua se deformuje, a proto vznikají v částici napětí, na nichž pak závisí vývoj a struktura proudového pole. Rychlost  $v_i$  při změně polohy z bodu  $x_j$  do bodu  $(x_j+dx_j)$  proudového pole lze při malých změnách (deformacích) vyjádřit lineární závislostí [1]

$$v_i(x_j + dx_j, t) = v_i(x_j, t) + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j. \quad (3.2.1)$$

Relativní změna rychlosti ve dvou sousedních bodech  $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$  způsobena nehomogenitou proudového pole, je tenzorem druhého řádu a je tzv. tenzorem gradientu rychlosti deformace [1].



Obr.č.2. Proudnice, trajektorie pohybu a průběžná čára [1].

## 4. Metoda rozklad tenzoru gradientu rychlosti

### 4.1 Popis

Celá tato kapitola je založena na práci [4]. Jak už bylo naznačeno v předchozí kapitole, pro rychlost  $v_j$ , která změní svou polohu z bodu  $x_i$  do bodu  $x_i + dx_i$ , tak platí rovnice (4.2.1), kde druhý člen této rovnice vyjadřuje gradient tenzoru rychlosti, který lze napsat v maticovém tvaru

$$\nabla v = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (4.1.1)$$

Tento tenzor gradientu rychlosti lze dále rozdělit na symetrickou část tenzoru neboli tenzor rychlosti deformace

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.1.2)$$

a na antisymetrickou část tenzoru rychlosti neboli tenzor rotace

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (4.1.3)$$

### 4.2 Rozklad pro dvourozměrné proudění

V tomto případě lze prostorovou veličinu  $z$  zanedbat, a proto se tenzor gradientu rychlosti zjednoduší takto

$$\nabla v = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2.1)$$

Za použití rovnice kontinuity pro dvourozměrné pole proudění (5.2.2) se gradient tenzoru rychlosti může upravit do tvaru (5.2.3)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.2.2)$$



$$\nabla v = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} & -\frac{\partial u}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2.3)$$

Tento upravený tenzor gradientu rychlosti dále rozložíme na symetrickou a antisymetrickou část tenzoru

$$\nabla v = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) & 0 \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}) & -\frac{\partial u}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}) & 0 \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2.4)$$

První člen rovnice odpovídá symetrické části tenzoru  $S_{ij}$ . Druhý člen rovnice odpovídá antisymetrické části tenzoru  $\Omega_{ij}$ . U symetrické části tenzoru lze získat vlastní čísla

$$\lambda_{1,2} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} + y \pm \sqrt{D}}{2}, \quad (4.2.5)$$

kde

$$D = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 - 4\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}. \quad (4.2.6)$$

První dva členy vlastních čísel rozdělíme na část konstantní, což odpovídá rychlosti změny objemu

$$e_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) \quad (4.2.7)$$

a dále na část odpovídající smykové deformaci

$$s_{1,2} = \pm \sqrt{4\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2}. \quad (4.2.8)$$

Zde  $s_{1,2}$  vyjadřuje smykovou deformaci. U antisymetrické části je možné definovat vířivost, která je rovna prvnímu členu druhého řádku antisymetrického tenzoru

$$\omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right). \quad (4.2.9)$$

Ve směru hlavních os symetrické části tenzoru gradientu rychlosti lze zapsat tenzor gradientu rychlosti

$$\nabla v = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2.10)$$

Libovolné natočení souřadného systému v rovině  $xy$  nemá vliv na první složku tenzoru s parametrem  $e$  a na poslední složku tenzoru s parametrem  $\omega$ . Po odečtení hodnoty  $e$  lze tenzor gradientu rychlosti transformovat do referenčního souřadného systému. Transformace se provede pootočením souřadného systému o úhel  $\alpha = \frac{3}{4}\pi$

$$\nabla v = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s & -\omega & 0 \\ \omega & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2.11)$$

Po této transformaci do referenčního souřadného systému se získají na hlavní diagonále nuly. Potom lze lépe posuzovat kinematiku proudící tekutiny

$$\nabla v = \begin{pmatrix} 0 & s - \omega & 0 \\ \omega - s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2.12)$$

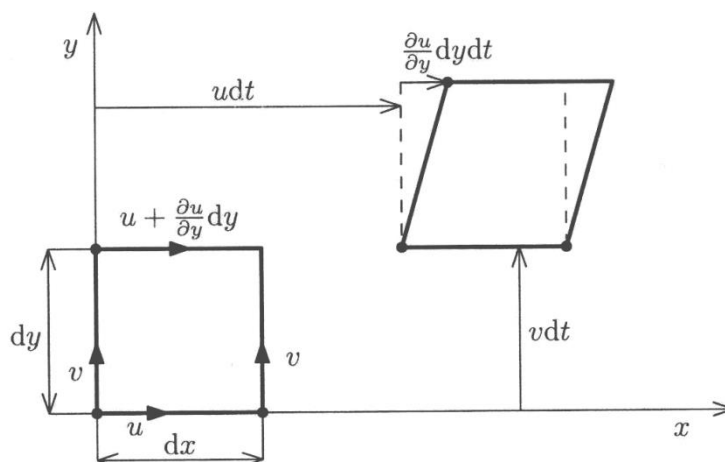
### 4.3 Případy působení vířivosti a smykové deformace

#### 4.3.1 Čistý smyk

Musí platit

$$|s| = |\omega|. \quad (4.3.1)$$

V případě bez uvažování objemové rychlosti deformace musí být jedna ze složek tenzoru gradientu rychlosti nenulová a druhá musí být rovna nule. Při splnění této podmínky platí, že vířivost je nenulová, ale v proudovém poli se žádný vír nenachází. Zde byla zvolena složka gradientu  $\frac{\partial u}{\partial y} > 0$  a složka  $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ . Pro tento případ můžeme částici zobrazit na Obr.č.3. Z úvahy z práce [4] vyplývá, že smyková část vířivosti  $\omega_{SH} = \omega$  a smyková část smykové deformace je  $s_{SH} = s$ . Reziduální složky jsou nulové.



Obr.č.3. Čistý smyk; případ, kdy je nenulová derivace  $\frac{\partial u}{\partial y} > 0$  a derivace  $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$  [6].

### 4.3.2 Převládající deformace

Musí platit

$$|s| \geq |\omega|. \quad (4.3.2)$$

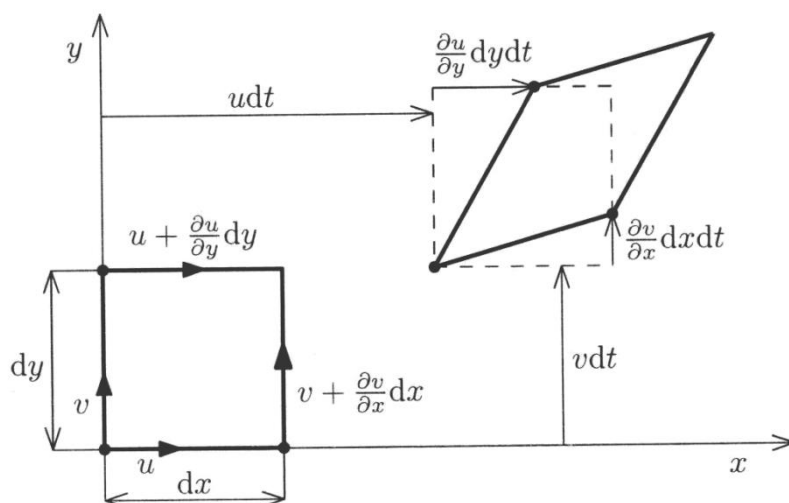
V případě bez uvažování objemové rychlosti deformace není ani jedna složka tenzoru gradientu rychlosti nulová. Ve speciálním případě, kdy se sobě složky tenzoru gradientu rychlosti rovnají  $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$ , se jedná o čistou deformaci a pak se vířivost  $\omega=0$ . Pro všechny ostatní případy existuje smyková část vířivosti  $\omega_{SH}=\omega$ . Pak smykovou složku parametru smykové deformace  $s$  zavedeme jako

$$s_{SH} = \text{sgn}(s)|\omega|. \quad (4.3.3)$$

Pro zjištění převládající vířivosti nebo smykové deformace slouží reziduální složka parametru smykové deformace  $s_{RES}$

$$s_{RES} = \text{sgn}(s)[|s| - |\omega|]. \quad (4.3.4)$$

Pro případ převládající rotace je naznačena částice na Obr.č.4.



Obr.č.4. Převládající deformace; případ, kdy jsou derivace kladné  $\frac{\partial u}{\partial y} > 0$  a derivace  $\frac{\partial v}{\partial x} > 0$  [6].

### 4.3.3 Převládající rotace

Musí platit

$$|\omega| \geq |s|. \quad (4.3.5)$$

V případě bez uvažování objemové rychlosti deformace není ani jedna složka tenzoru gradientu rychlosti nulová. Pro tento případ platí, že  $s_{RES}=0$ , pak smyková složka je

$$s_{SH} = s. \quad (4.3.6)$$

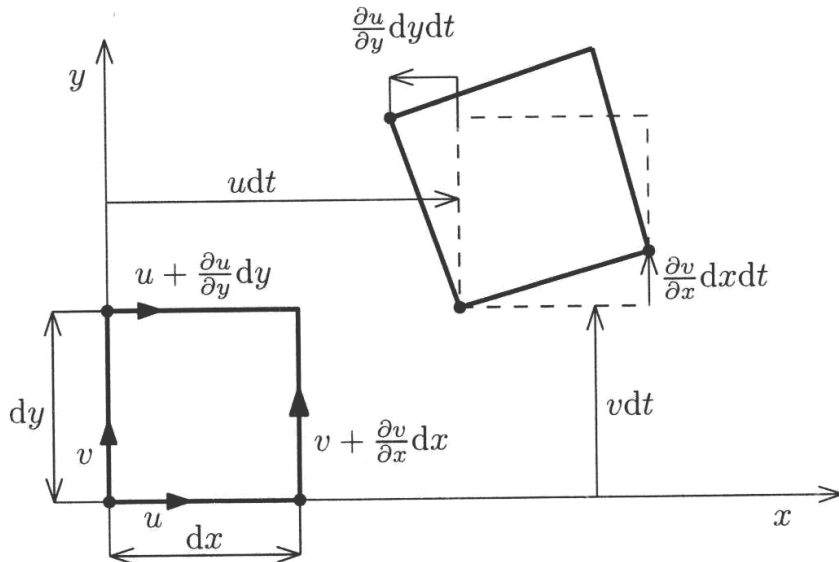
Pro určení převládající vířivosti nad smykovou deformací je definována reziduální vířivost

$$\omega_{RES} = \text{sgn}(\omega)[|\omega| - |s|] \quad (4.3.7)$$

a smyková složka vířivosti je

$$\omega_{SH} = \text{sgn}(\omega)|s|. \quad (4.3.8)$$

Pro případ převládající rotace je naznačena částice na Obr.č.5.



Obr.č.5. Převládající rotace; případ, kdy je derivace  $\frac{\partial u}{\partial y} < 0$  a derivace  $\frac{\partial v}{\partial x} > 0$  [6].

## 4.4 Řešení analytického případu vírové struktury

### 4.4.1 Popis analytického případu a postupu řešení

Pro tuto práci byl zvolen analytický případ Lambova-Ossenova víru, kde z práce [7] máme uvedený vztah pro tangenciální rychlost Lambova-Ossenova víru (5.4.1), která je uvedena v polárních souřadnicích a není závislá na úhlu  $\theta$ . Aby se jednalo o analytický případ, je nutno se omezit na dvourozměrné řešení vírové struktury a proto se nebude uvádět výpočet do souřadnice  $z$

$$v_{\theta} = v_{\theta P} \left( 1 + \frac{1}{2\alpha} \right) \frac{r_0}{r} \left[ 1 - e^{-\alpha \frac{r^2}{r_0^2}} \right]. \quad (4.4.1)$$

Jednotlivé členy znamenají:  $v_{\theta P}$  představuje tangenciální rychlost na vrcholku,  $\alpha=1,25643$  je konstanta,  $r$  je poloměr od středu víru,  $r_0$  je poloměr jádra víru a je definován jako

$$r_0(t) = \sqrt{4vt}, \quad (4.4.2)$$

kde  $v$  je kinematická viskozita a  $t$  je čas. Pro ulehčení bylo zvoleno dle doporučení z práce [7]  $r_0=0,005\text{m}$  a  $v_{\theta P}=0,25 \text{ms}^{-1}$ . Tangenciální rychlost není uvedena v kartézském souřadnicovém systému, proto musí být tato rychlost transformována na rychlost  $u$  (rychlost do směru  $x$ ) a na  $v$  (rychlost do směru  $y$ )

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix} v_{\theta}, \quad (4.4.3)$$

kde první člen této rovnice je Jacobiho transformační matice. Po úpravě se získá rychlost do směru  $x$

$$u = -v_{\theta} \sin\theta \quad (4.4.4)$$

a rychlost  $v$  do směru  $y$  se získá ze vztahu

$$v = v_{\theta} \cos\theta, \quad (4.4.5)$$

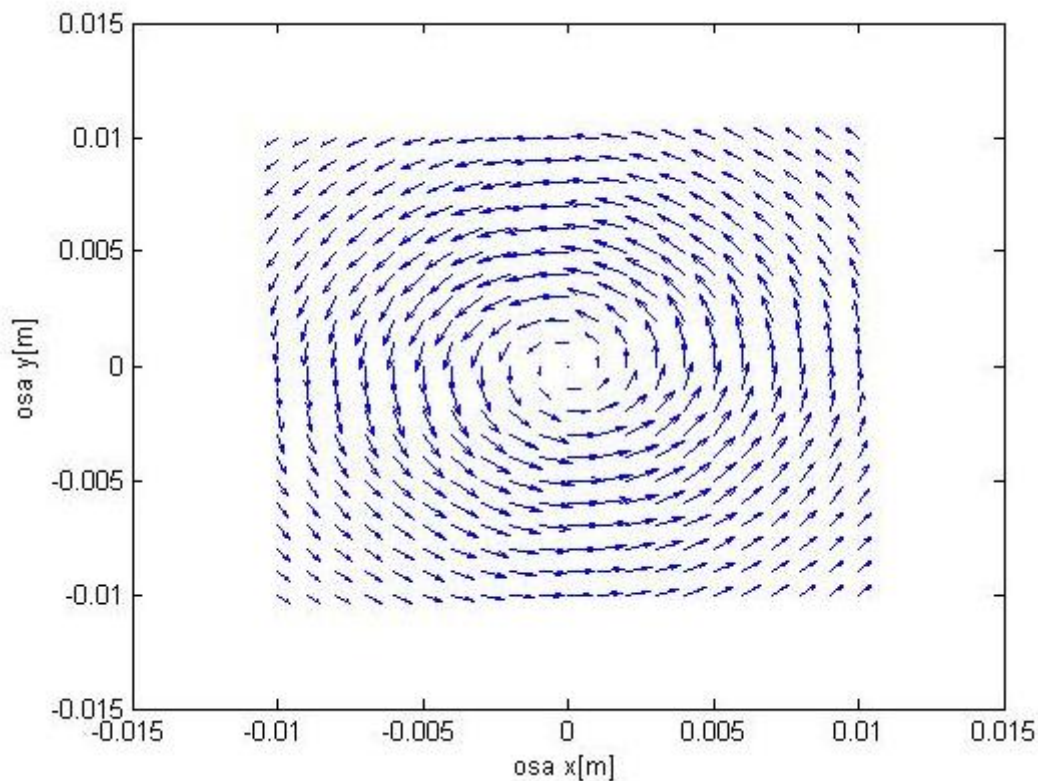
aby bylo možné užití těchto dvou rovnic, je třeba vyjádřit  $r$  a  $\theta$  v závislosti na souřadnicích  $x$  a  $y$

$$\theta = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{y}\right) \quad (4.4.6)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (4.4.7)$$

#### 4.4.2 Výsledky při použití metody rozkladu tenzoru rychlosti pro Lamb-Ossenův vír

Po použití uvedených rovnic lze získat vektorové pole pro případ Lambova-Ossenova víru (viz Obr.č.6.).



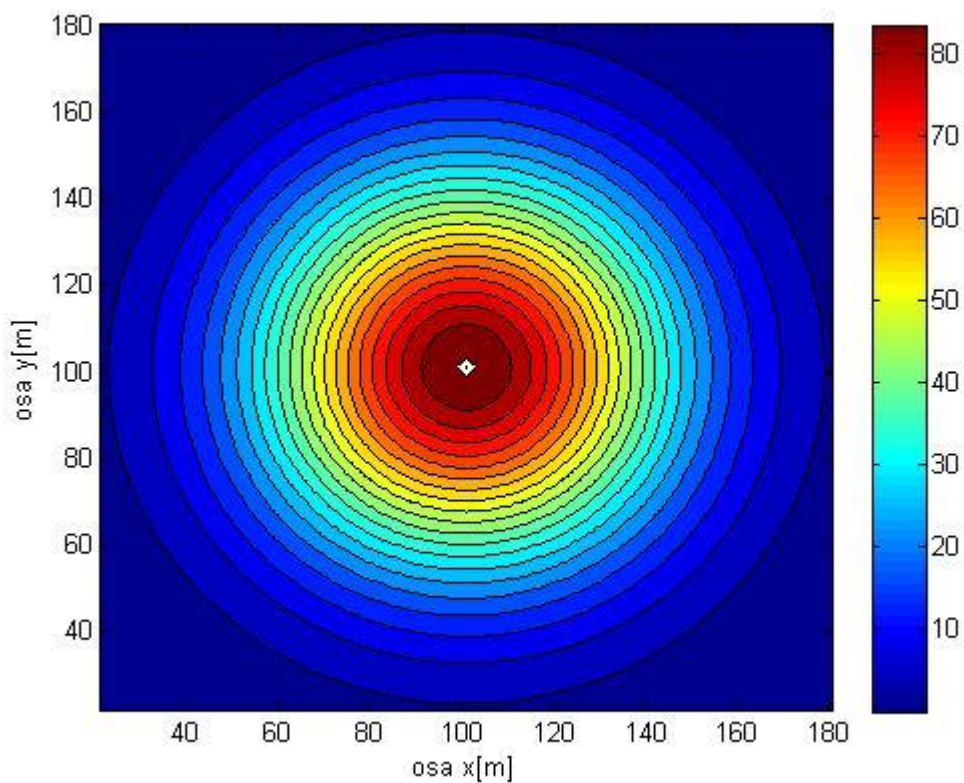
Obr.č.6. Vektorové pole analytického případu Lambova-Ossenova víru.

Pro použití metody rozkladu tenzoru gradientu rychlosti je třeba vyjádřit rychlost  $u$  a  $v$  v závislosti na souřadnicích  $x$  a  $y$ , aby bylo možno tyto rychlosti dosadit do vztahu smykové deformace  $s$  (5.2.8) a do vztahu pro vířivost  $\omega$  (5.2.9).

Po provedení derivací v rovnicích (5.2.8) a (5.2.9), lze získat vyjádření pro smykovou deformaci  $s$  a vířivost  $\omega$ . Smyková deformace a vířivost byly mezi sebou porovnány a bylo zjištěno, že se jedná o případ převládající rotace a platí

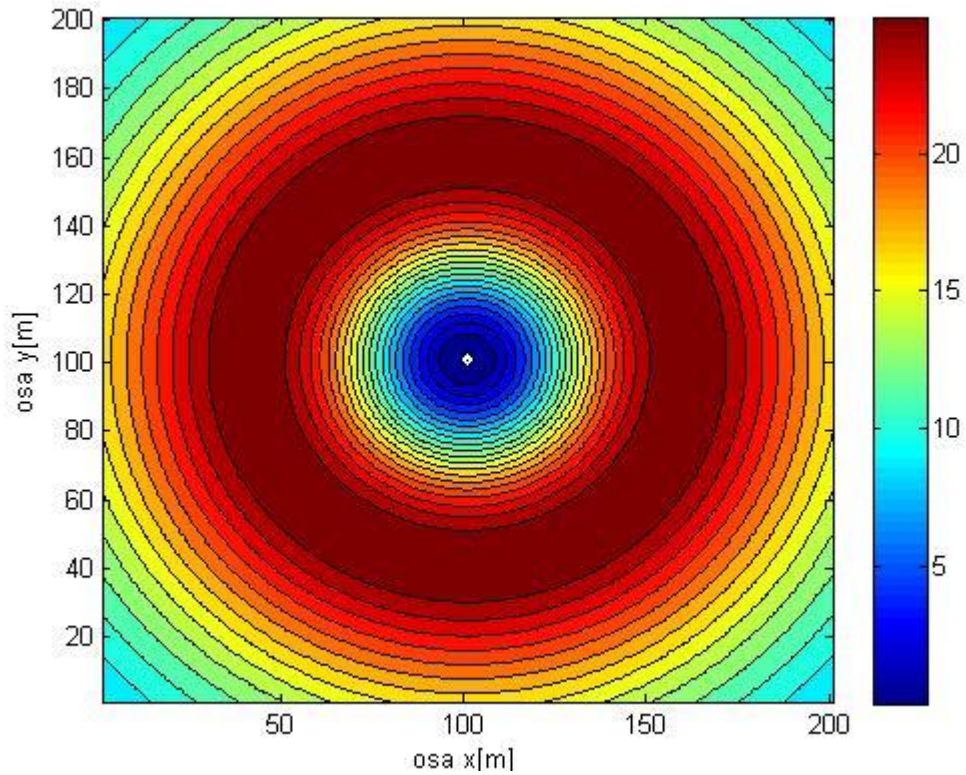
$$|\Omega| > |S|. \quad (4.4.8)$$

Podle uvedeného vztahu (5.3.8) lze získat vykreslení pole vířivosti pro analytický případ Lamb-Ossenova víru (Obr.č.7.).



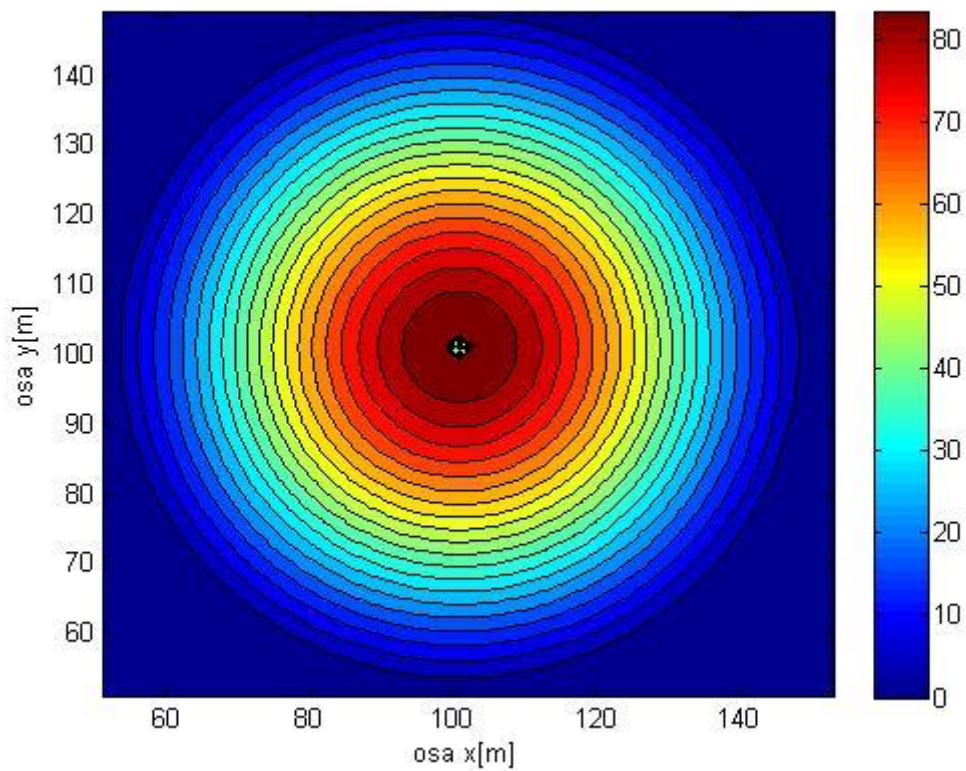
*Obr.č.7. Pole vířivosti pro analytický případ Lambova-Ossenova víru.*

Dále podle uvedeného vztahu (5.3.6) lze získat pole smykové deformace pro analytický případ Lamb-Ossenova víru (Obr.č.8.).



*Obr.č.8. Pole smykové deformace pro analytický případ Lambova-Ossenova víru*

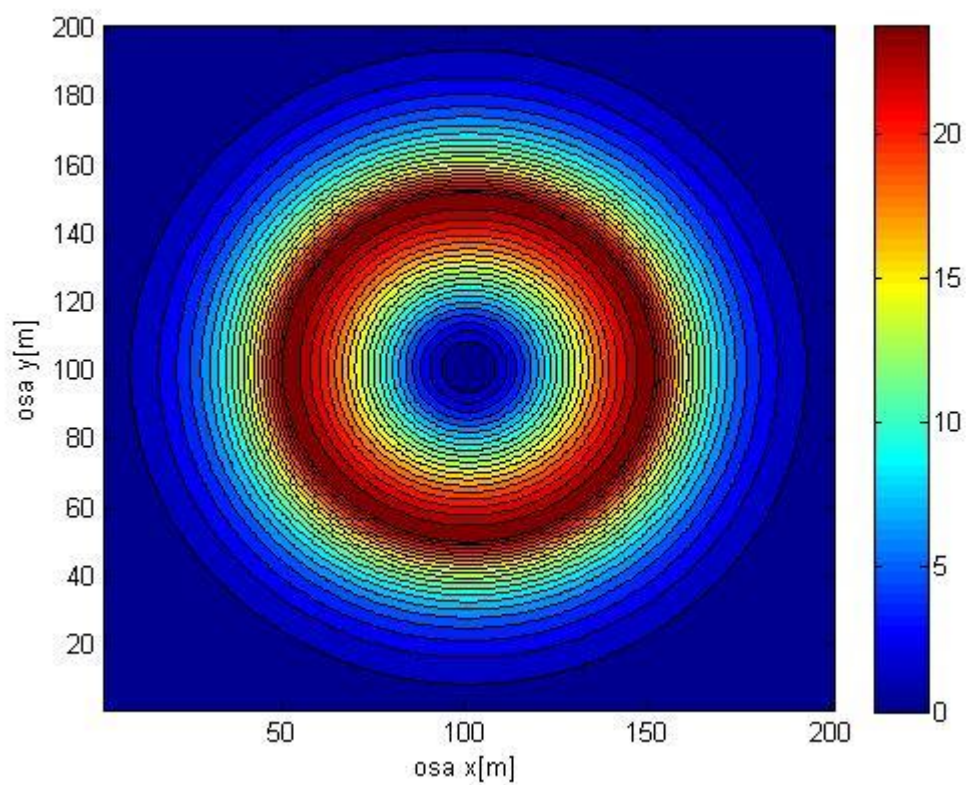
Platí vztahy dle kapitoly (4.2.3). Pro tyto vztahy byla zjištěna reziduální vířivost  $\omega_{RES}$  (dle Obr.č.9.).



*Obr.č.9. Pole reziduální vířivosti pro analytický případ Lambova-Ossenova víru*



Dle rovnice (5.3.7) pro smykovou část vířivosti  $\omega_{SH}$  lze získat pole pro tento případ Lambova-Ossenova víru (Obr.č.10.).



*Obr.č.10. Pole smykové části vířivosti pro analytický případ Lambova-Ossenova víru*

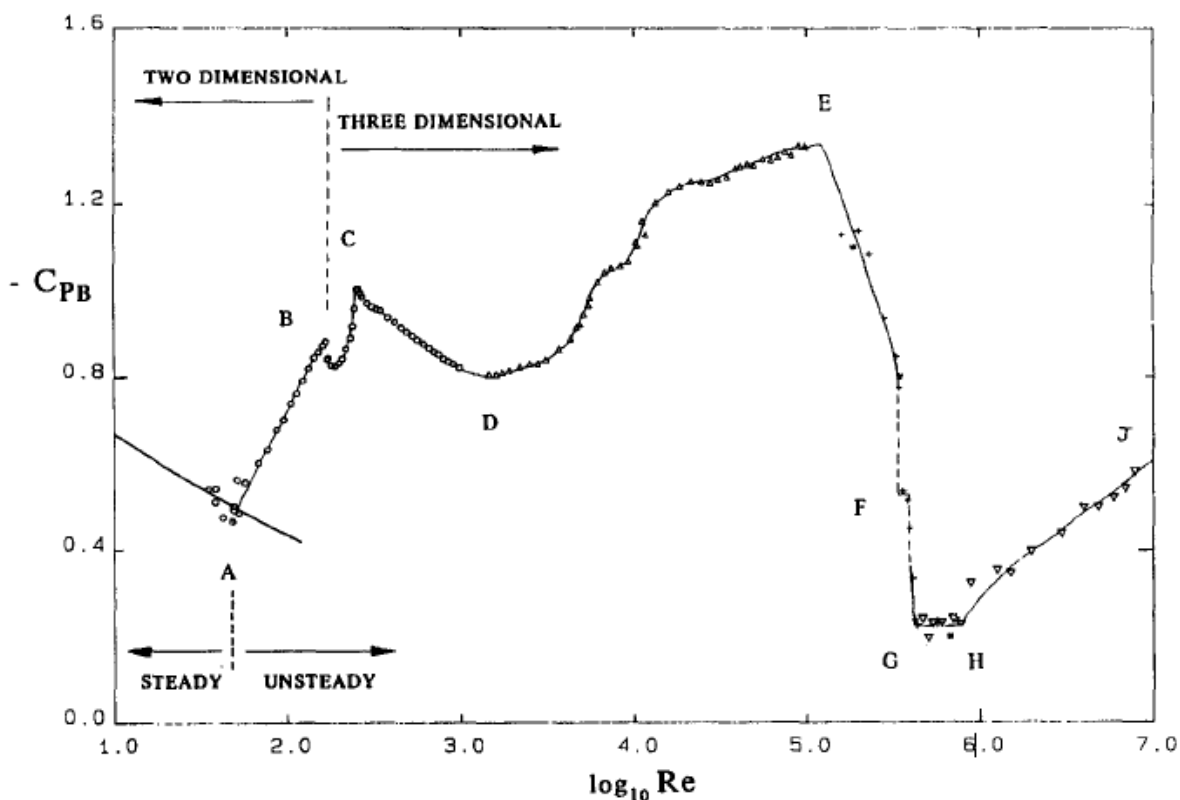
## 5 Obtékání kruhového válce

### 5.1 Popis problematiky

Jedná se o úlohu nestacionárního, dvourozměrného obtékání kruhového válce paralelním proudem tekutiny. Vývoj proudění lze charakterizovat bezrozměrnou veličinou zvanou Reynoldsovo číslo

$$Re = \frac{u D}{\nu}, \quad (5.1.1)$$

kde  $u$  je vstupující rychlost do kontrolního objemu,  $D$  je charakteristický rozměr (v tomto případě průměr obtékaného válce) a  $\nu$  je kinematická viskozita. Jak již bylo řečeno v kapitole o proudění, tak Reynoldsovo číslo říká o daném proudění, zda se jedná o laminární proudění nebo turbulentní proudění. Zde Reynoldsovo číslo udává také to, jestli vír vzniká nebo, v jakém místě se vír bude odtrhávat od mezní vrstvy nebo s jakou frekvencí budou vznikat víry za sebou (vírová Karmánova řada). Pro hlavní rozdělení jednotlivých režimů bude použit graf závislosti tlakového koeficientu  $-C_{PB}$  na Reynoldsovém čísle  $Re$  (Obr.č.11.).

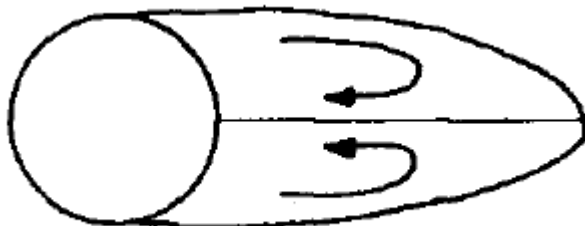


Obr.č.11. Závislost základních sacích koeficientů na velkém rozsahu Reynoldsových čísel [5].

## 5.2 Dvourozměrné proudění

### 5.2.1 Laminární režim ustáleného proudění (Laminar steady regime)

Laminární režim ustáleného proudění nastává pro Reynoldsovo číslo  $Re < 49$ , kdy za válcem vznikají dvě symetrické oblasti (Obr.č.12.), které mohou být oblastmi vytvoření zárodku víru. Při překročení hranice Reynoldsova čísla 49, kde délka této oblasti roste spolu s rostoucím Reynoldsovým číslem [5].



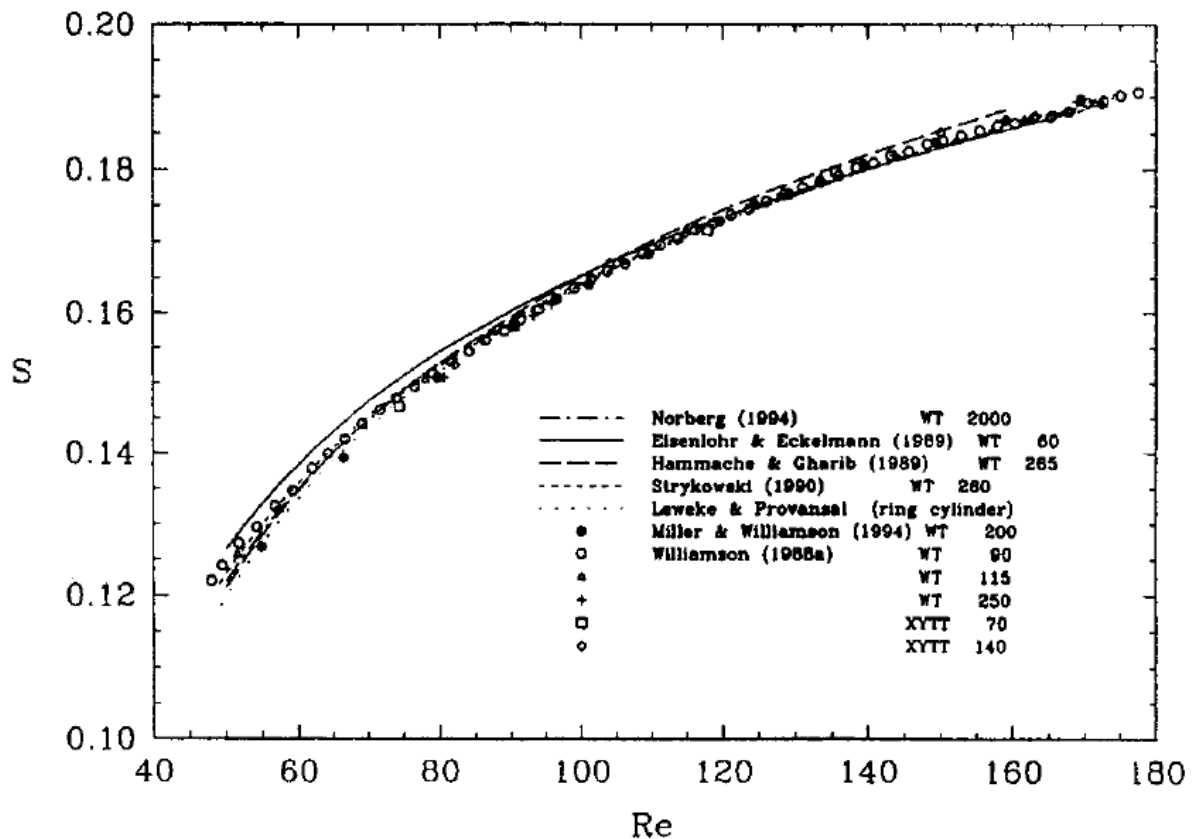
Obr.č.12. Vyobrazení vzniku vírů za válcovým profilem [5].

### 5.2.2 Laminární vírové proudění (Laminar vortex shedding)

Tento režim proudění se nachází mezi Reynoldsovým číslem  $Re=49$  až 194 a pro tuto oblast je charakteristický vznik pravidelné oscilace v úplavu za válcem. Tato oscilace je spojena se střídavým vznikem vírů a jejich postupným odplouváním spolu se směrem proudění dál od vzniku víru. Jak už bylo naznačeno, jedná se o pravidelnou oscilaci, tudíž bude třeba zavést další bezrozměrnou jednotku Strouhalovo číslo  $St$

$$St = \frac{f D}{u} \quad (5.2.1)$$

Jednotlivé členy rovnice znamenají:  $f$  je frekvence vzniku vírů,  $D$  je charakteristický rozměr obtékaného profilu (v tomto případě průměr obtékaného válce) a  $u$  je vstupující rychlost do systému. Z měření a experimentů se získala závislost mezi Reynoldsovým a Strouhalovým číslem (Obr.č.13.). Při volbě Reynoldsova čísla lze získat Strouhalovo číslo a následně dopočítat frekvenci vzniku vírů [5].



Obr.č.13. Závislost Strouhalova čísla na Reynoldsově čísle [5].

### 5.3 Trojrozměrné proudění

Problematika trojrozměrného proudění nastává, pokud se Reynoldsovo číslo bude zvyšovat nad hranici  $Re=194$  (viz Obr.č.11). Už při laminárním režimu proudění dochází v oblasti  $Re=180-194$  k prvním nespojitostem ve vzniku vírů. Při překročení hranice  $Re=194$  nastává režim tzv. přechodného vzniku vírů (wake-transition regime) (Obr.č.11. mezi body B-C). K další nespojitosti dochází v oblasti  $Re=230-250$ , kde dochází ke zmenšování velikosti vírů [5].

V oblasti Reynoldsova čísla  $Re=260-1000$  (Obr.č.11. mezi body C-D) vzniká další neuspořádanost při vzniku malých vírů. Tento režim se chová podobně jako režim laminárního vírového proudění, kde vznikala vírová Karmánova řada, avšak tento režim se liší právě ve zvýšené neuspořádanosti vzniku malých vírů. Důvodem vzniku resonancí v tomto režimu jsou možné iterace mezi smykovými vrstvami. Čím více se navyšuje Reynoldsovo číslo, tím se vznik malých vírů stává neuspořádanější. V tento moment se zdá, jako by se proudění redukovalo do dvourozměrné problematiky, protože tlakový koeficient  $-C_{PB}$  se snižuje a délka vzniklých vírů se opět prodlužuje [2].

V případě překročení hranice Reynoldsova čísla  $Re=1000$ , nastane režim proudění (Obr.č.11. mezi body D-E), který je charakterizován nestabilitou oddělující se smykové vrstvy od obtékaného válce. Při rostoucím Reynoldsovém čísle se postupně Strouhalovo číslo zmenšuje a tvořící délka víru se zmenšuje [5].

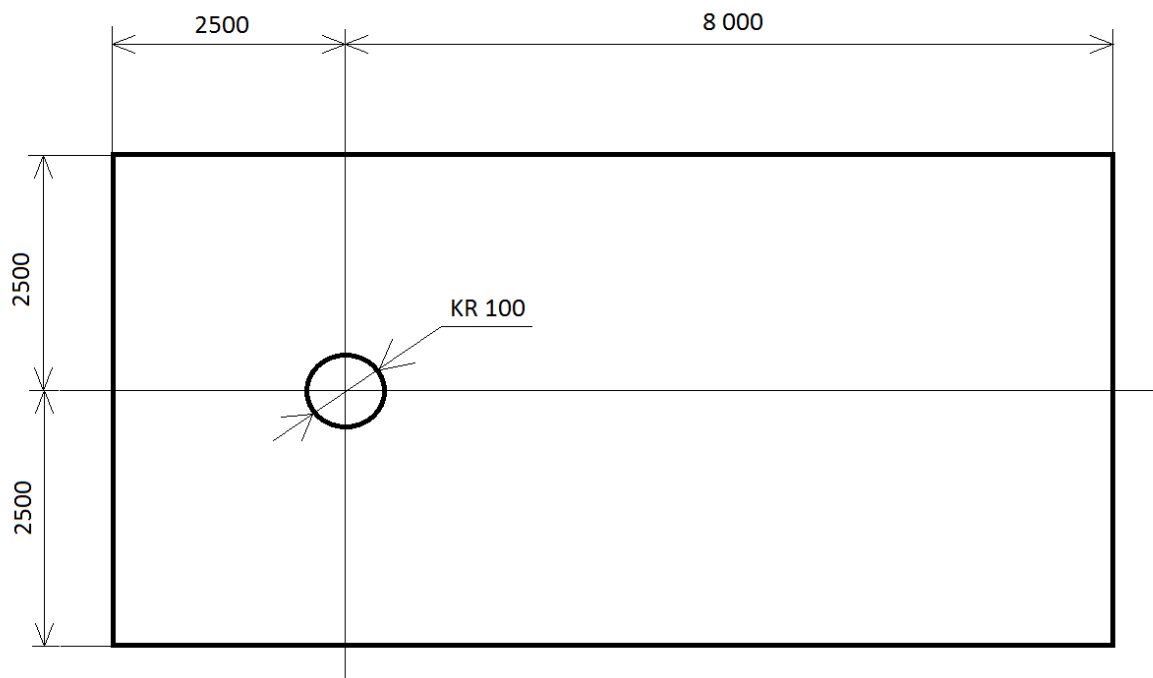
Pokud by Reynoldsovo číslo dosáhlo úrovně  $Re=200\ 000$ , tak by se nejprve dosáhlo režimu kritického přechodu (critical transition) (Obr.č.11. mezi body E-G), neboli nesymetrického přeuspořádání (asymmetric reattachment) a při dalším zvýšení by se tento režim změnil z nesymetrického režimu na symetrický, který se nazývá superkritický režim (supercritical régime) (Obr.č.11. mezi body G-H). Při dalším zvyšování Reynoldsova čísla by se proudění plně změnilo na turbulentní (Obr.č.11. H-J) [5].

## **5.4 CFD analýza**

Pro tuto práci bylo učeno ověření oblasti laminárního vírového režimu proudění (laminar vortex shedding) pro případ dvourozměrného proudění kolem válce a vznik Karmánovy vírové řady. Pro tento případ byl vytvořen model válce, který byl vsazen do prostředí, kde bude protékat tekutina.

### **5.4.1 Popis geometrie**

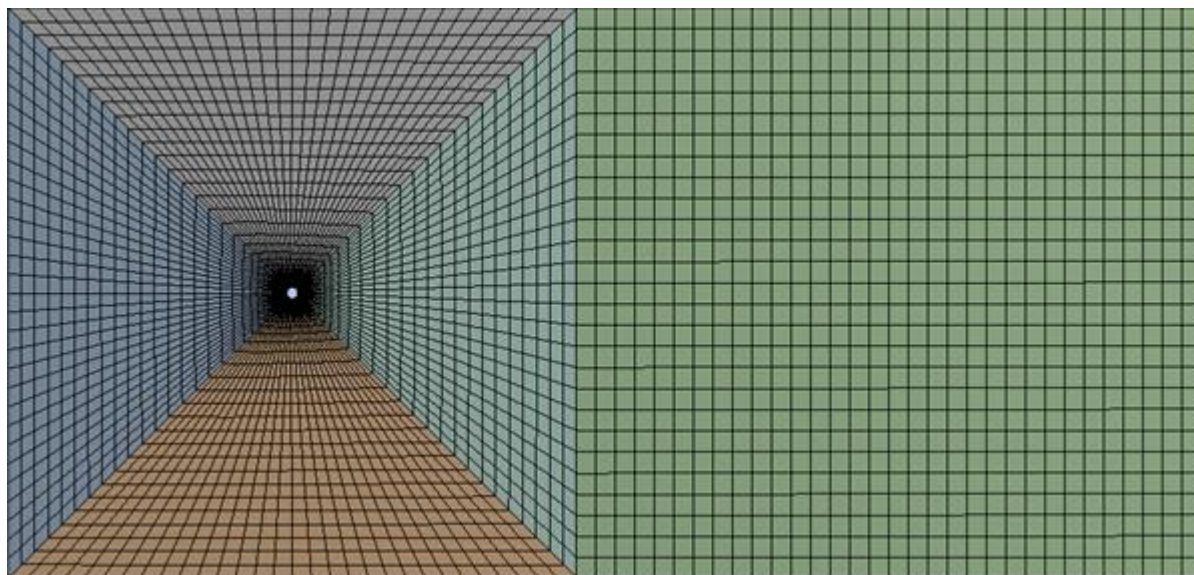
Práce obsahuje vytvořenou jednoduchou geometrii (Obr.č.14.), která neobsahuje žádné složité tvary, aby se tím nezkomplikovalo řešení celého případu. Geometrie válce byla vytvořena v rovině  $xy$ , kde současně bylo vytvořeno prostředí, které je značně větší než vložený válcový profil o průměru 100mm. Proudící kapalina a vzniklá vírová řada nesmí zasahovat do krajních stěn vytvořeného prostředí. To je důvodem velkého nepoměru rozměru válce a prostředí.



Obr.č.14. Okótovaný model prostředí pro dvourozměrné proudění (jednotky jsou v mm)

#### 5.4.2 Tvorba sítě geometrie

Síť pro danou geometrii byla vytvořena tak, aby pro daný model splňovala co nejkolmější úhly mezi stranami jednotlivých elementů, z kterých je síť tvořena (Obr.č.15.). Zájmem je proudění hlavně v oblasti kolem válce, proto síť byla rovnoměrně zjemněna kolem kontury válcového profilu.



Obr.č.15. Schematicky vytvořená síť pro daný model prostředí (ve skutečnosti daný model má síť mnohem jemnější)

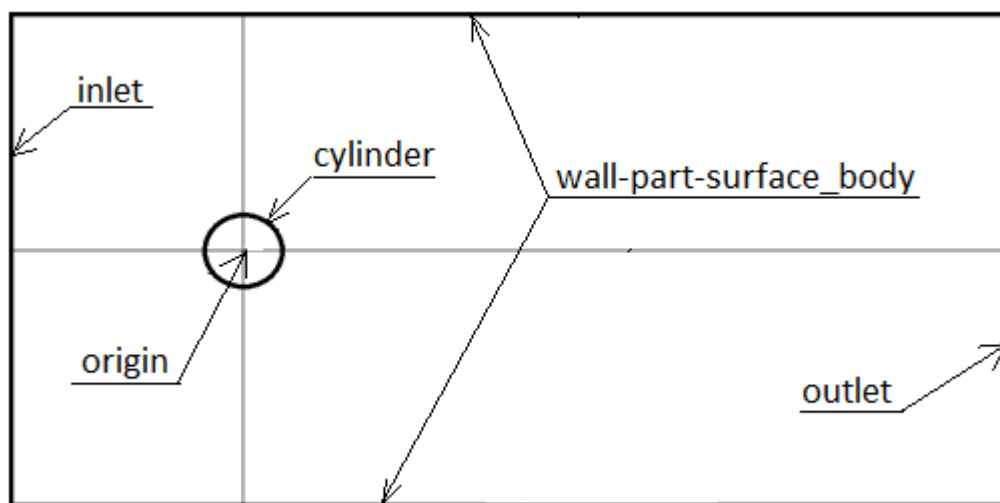
#### 5.4.3 Určení okrajových podmínek

K možnosti určení okrajových podmínek bude třeba znát fyzikální vlastnosti tekutiny. Pro zkoumanou tekutinu byla zvolena hustota  $\rho=1,1887 \text{ kg/m}^3$  a dynamická

viskozita  $\mu=1,8187 \cdot 10^{-5}$  Pas. Ze zadání plyne, že daná úloha se pohybuje v oblasti dvourozměrného proudění a má vzniknout Karmánova vírová řada, tudíž bude tomuto případu odpovídat Reynoldsovo číslo v rozmezí  $Re=49-194$ . Pro výpočtový model bylo zvoleno Reynoldsovo číslo  $Re=90$  a tomuto Reynoldsovu číslu odpovídá Strouhalovo číslo  $St=0,155$  (viz Obr.č.13.). Dále můžeme určit okrajovou podmínku na vstupu, tedy jakou rychlostí bude daná tekutina vtékat

$$u = \frac{Re \mu}{\rho D} = \frac{90 \cdot 1,8187 \cdot 10^{-5}}{1,1887 \cdot 0,1} = 0,01377 \text{ ms}^{-1}. \quad (5.4.1)$$

Další z okrajových podmínek jsou boční stěny vymodelovaného prostředí, kde tekutina neprotéká. V normálním případě by na stěnách vždy docházelo k tření a tedy i ke ztrátám. Toto ale není smyslem této úlohy. Tření lze proto zanedbat a na boční stěny se definuje idealizovaný případ, kde stěny nebudou ovlivňovat proudění kolem válce. Pro okrajovou podmínku na výstupu z prostředí, kterým proudí tekutina, se zvolil konstantní tlak, který po celou dobu nebude výrazně ovlivňovat velikost rychlosti v zkoumaném prostředí. Všechny okrajové podmínky a jejich hranice jsou označeny na Obr.č.16. a dle názvosloví Ansys fluent jsou přiřazeny okrajové podmínky (viz tab.č.1.).



Obr.č.16. Označení okrajových hranic v Ansys fluent

Inlet	Velocity-inlet
Outlet	Pressure-outlet
Cylinder	wall
Wall-part-surface_body	symmetry

Tab.č.1. Označení okrajových podmínek dle Ansys Fluent

## 5.5 Vyhodnocení dat z Ansys fluent

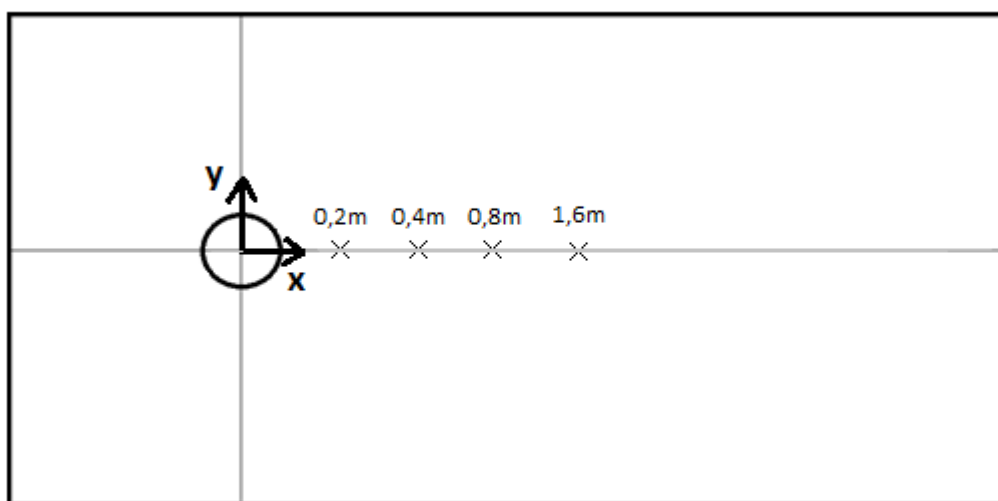
Pro možnost vyhodnocení dat z programu Ansys fluent musela být zjištěna hodnota periody vzniku vírů, která se zjistila ze vztahu pro bezrozměrné Strouhalové číslo

$$T = \frac{D}{St u} = \frac{0,1}{0,155 * 0,01377} = 46,85 \text{ s.} \quad (5.5.1)$$

Po určení periody vzniku vírů je třeba zjistit velikost časového kroku, který byl doporučen vedoucím bakalářské práce

$$\frac{T}{100} = \frac{46,85}{100} = 0,4685. \quad (5.5.2)$$

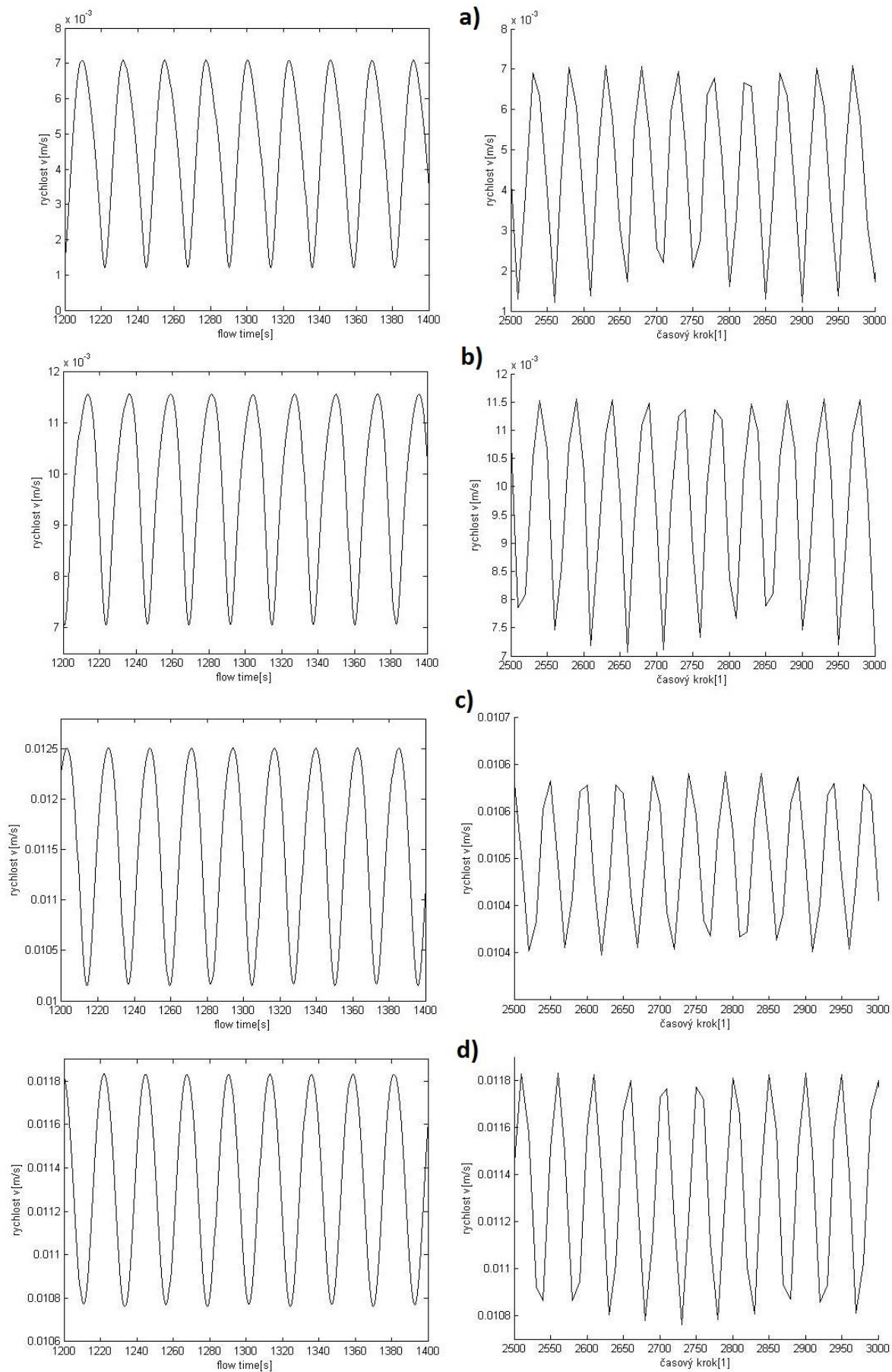
Z dat byly získány velikosti rychlostí ve čtyřech bodech vzdálených od počátku po 0,2m (Obr.č.17.).



Obr.č.17. Umístění bodů ve zkoumaném prostředí

Bylo definováno 5000 časových kroků. Jeden časový krok odpovídá, jak již bylo vypočítáno, velikosti časového kroku 0,4685s dle rovnice (6.4.3). Průběhy rychlostí pro jednotlivé body jsou znázorněny pro interval průtokového času (1200-1400s) a interval časového kroku (2500-3000) oba případy jsou znázorněny v ustáleném stavu (Obr.č.18.).



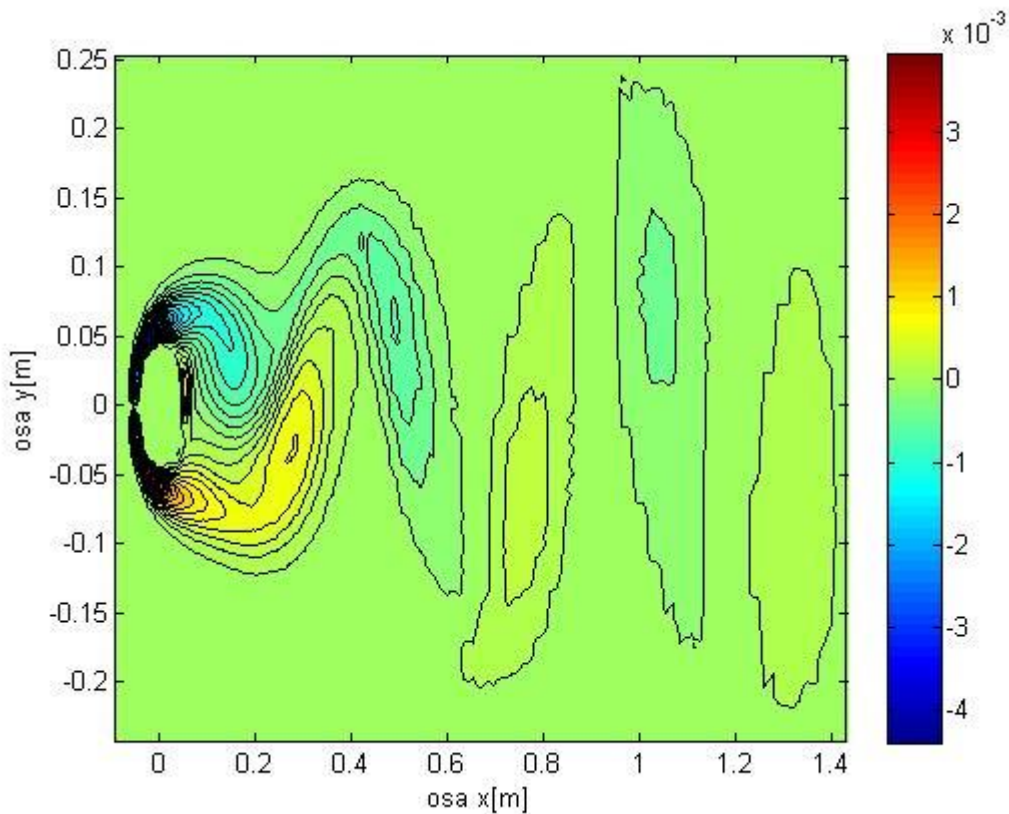


**Obr.č.18.** Na levé straně je závislost rychlosti na proudícím čase a na pravé straně je závislost rychlosti na časovém kroku a)pro vzdálenost bodu 0,2m; b)pro vzdálenost bodu 0,4m; c)pro vzdálenost bodu 0,8m;d)pro vzdálenost bodu 1,6m

Z jednotlivých časových průběhů rychlostí lze získat hodnotu frekvence, která se dá vyhodnotit např. pomocí FFT analýzy v programu Ansys Fluent. Teoretická frekvence může být zjištěna ze vztahu Strouhalova čísla (6.5.3)

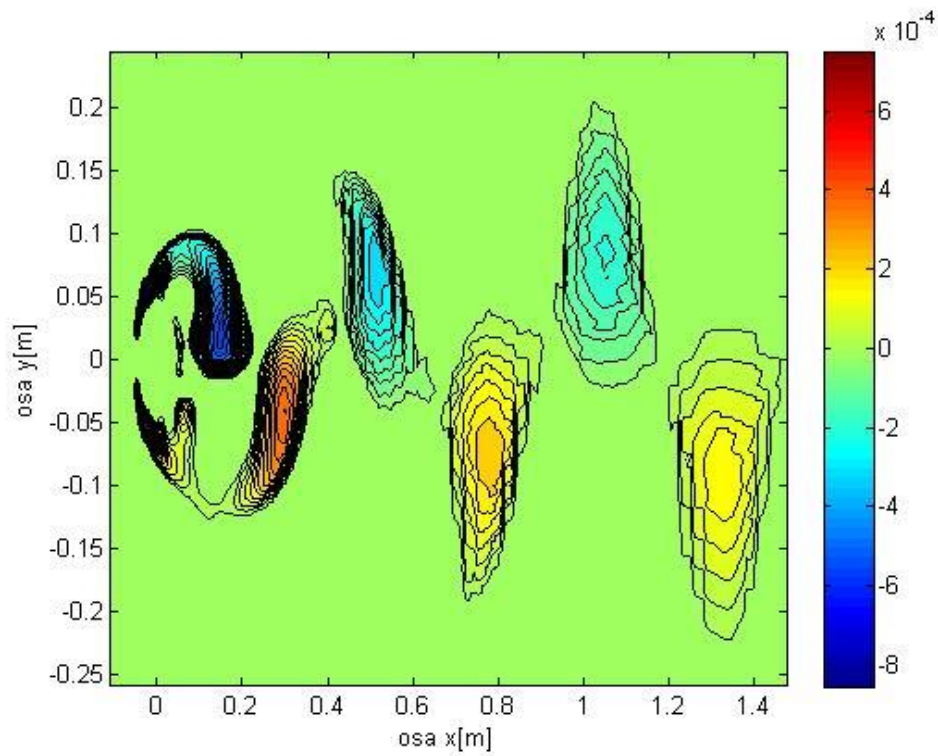
$$f = \frac{St \cdot u}{D}. \quad (5.5.3)$$

Jestliže platí podmínka podle rovnice (5.3.5), tak v soustavě převládá rotace a nachází se zde i vír. Vzniklá vířivost pro obtékání válce je zobrazena na obrázku (Obr.č.19.), kde daný obrázek je deformovaný kvůli přiblížení na danou vírovou strukturu. Vzniklá vírová struktura je zobrazena jen pro malý úsek za válcem



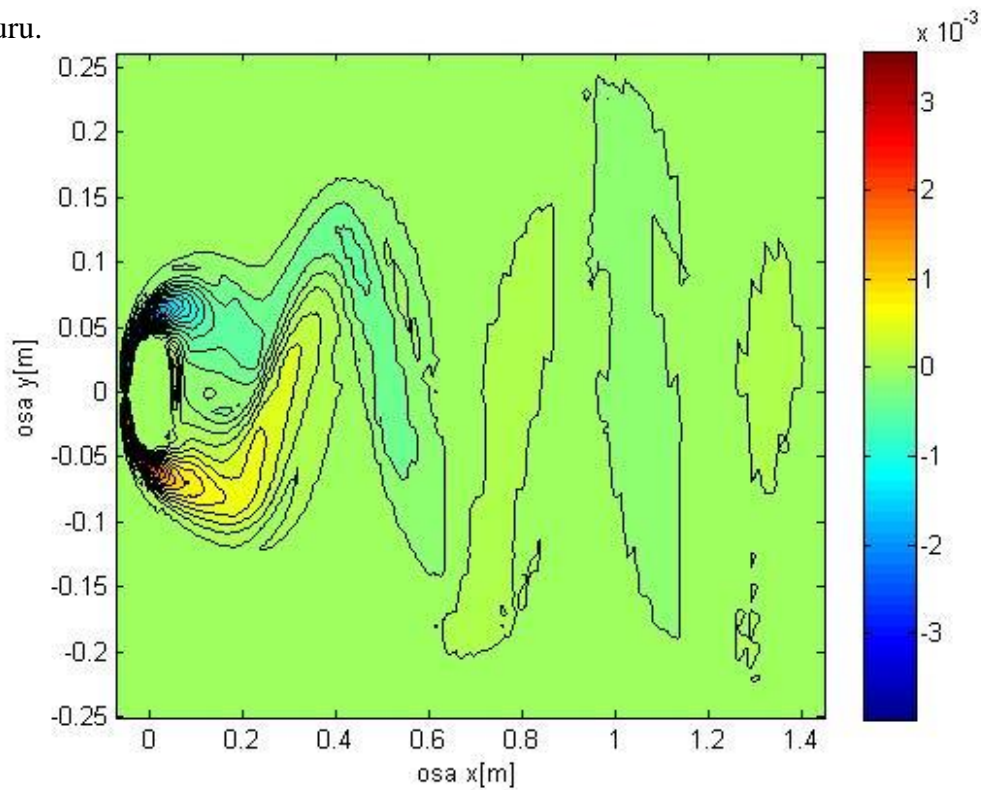
*Obr.č.19. Zobrazení vířivosti ve vírové struktuře pro obtékaný válec*

Dále jde pro danou vírovou strukturu zobrazit reziduální část vířivosti (viz Obr.č.20.). Obrázek je zde také deformovaný kvůli přiblížení na vírovou strukturu.



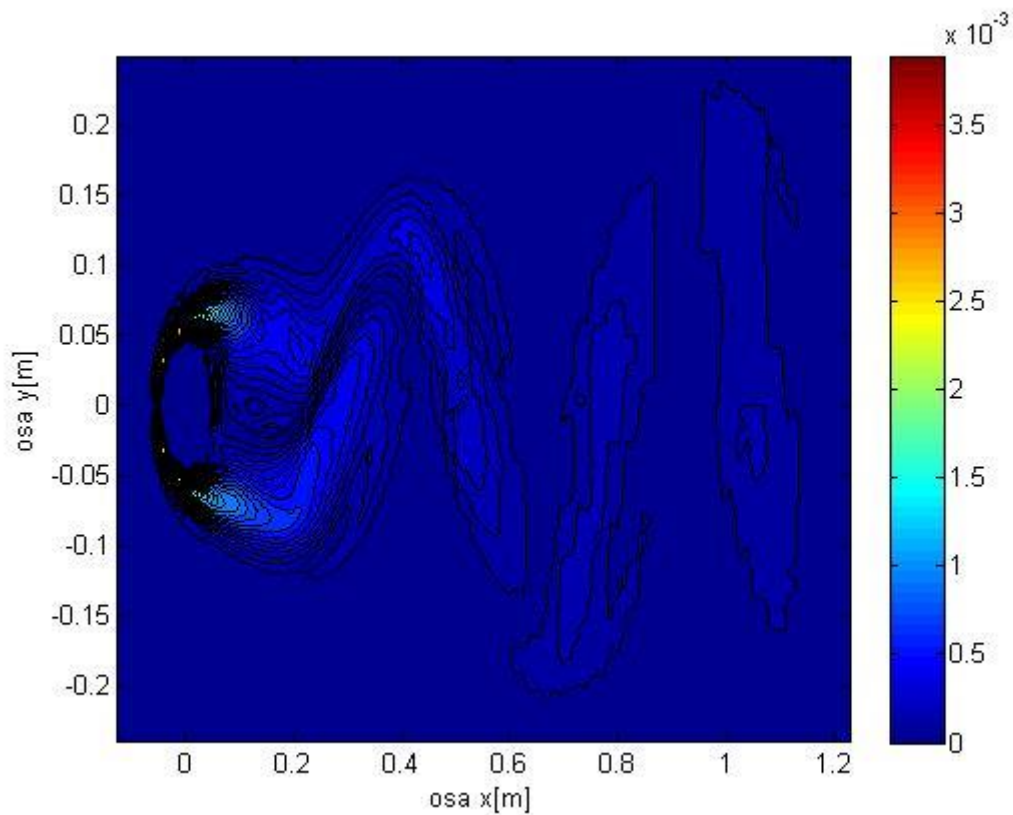
*Obr.č.20. Zobrazení reziduální vířivosti ve vírové struktuře pro obtékaný válec*

Smyková část vířivosti se pak zobrazí v daném vírovém poli pro obtékaný válec (dle Obr.č.21.), kde je daný obrázek opět deformovaný kvůli přiblížení na danou vírovou strukturu.



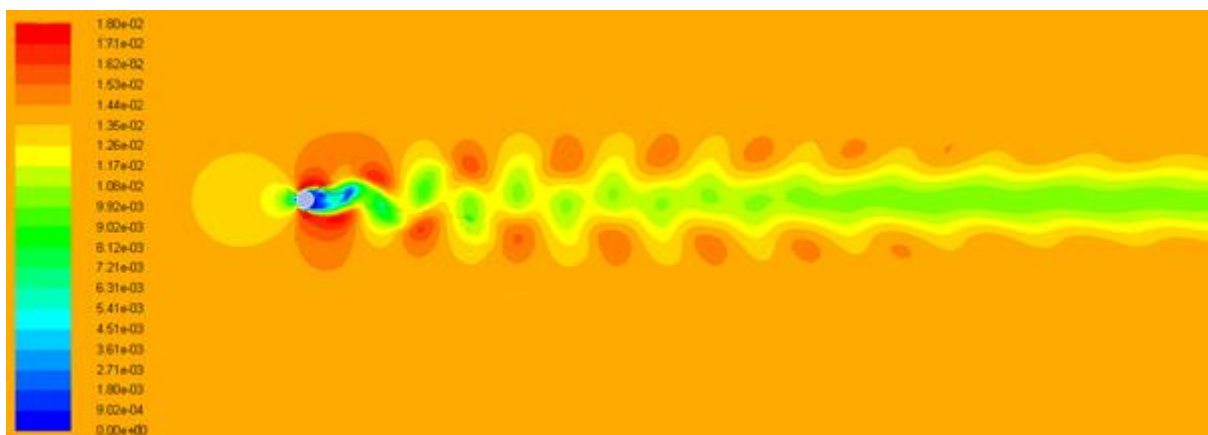
*Obr.č.21 Zobrazení smykové části vířivosti ve vírové struktuře pro obtékaný válec*

Smyková deformace je zobrazena ve vírovém poli pro daný válec (na Obr. č.22.).  
Zobrazení obrázku je deformováno díky přiblížení na malou oblast za válcem.



*Obr.č.22 Zobrazení smykové deformace ve vírové struktuře pro obtékaný válec*

Na závěr je uveden obrázek (Obr.č.23.), který ukazuje vzniklou vírovou Karmánovu stezku, z které jsou všechna data z numerické analýzy získána.



*Obr.č.23. Vzniklá vítová řada zobrazena v rychlostním poliv programu Ansys Fluent*

## 6. Závěr

Na základě práce [4] a [6], byla popsána metoda rozkladu tenzoru gradientu rychlosti pro dvourozměrné proudové pole. Jak už bylo naznačeno, tak vír může vzniknout pouze v případě převládající rotace, což je patrné z grafického ztvárnění tohoto případu v Obr.č.5.

Tato metoda byla aplikována na analytický případ Lamb-Ossenova víru. Pro tento případ byl zobrazen vznik vířivosti, kde došlo k rozkladu vířivosti na reziduální část vířivosti a smykovou část vířivosti. Velikost polí u reziduální vířivosti je značně větší než u smykové části vířivosti a tudíž intenzita vírového pole je silná.

Kromě aplikace metody rozkladu tenzoru gradientu rychlosti na analytický případ Lamb-Ossenova víru byla provedena CFD analýza pro proudění tekutiny kolem válce pro dvourozměrné proudové pole. Úkolem této analýzy měl být vznik vírové Karmánovy řady za válcem. K jejímu vzniku bylo nutné zvolit poměrně velký časový krok.

Ze získaných dat CFD analýzy byly následně vytvořeny průběhy rychlostí v závislosti na časovém kroku a průtokovém čase. Dále byla provedena vizualizace vířivosti pro vzniklou Karmánovu vírovou řadu a následně byla i rozložena na reziduální část vířivosti a smykovou část vířivosti. Po vizualizaci těchto dvou částí vířivosti došlo k zjištění, že oblasti smykové části vířivosti jsou podstatně větší než oblasti reziduální vířivosti. Je zřejmé, že zde intenzita vírového pole je slabší.

Problematika vzniku vírů je v dnešní době neodmyslitelnou částí tvorby technických konstrukcí. Jak již bylo naznačeno v motivaci, tak může mít velký vliv na efektivitu stroje (např. turbíny) a nebo samotné použití této problematiky pro konstrukce budov je velmi důležité z hlediska stability budov. Metoda rozkladu tenzoru rychlosti pro dvourozměrné proudové pole zde přivádí poměrně jednoduché řešení vírových struktur, avšak toto zjednodušení nese i nevýhodu.

Tato práce se omezovala pouze na řešení vírové struktury pro dvourozměrné proudění, a proto by bylo zajímavé se pokusit o řešení vírové struktury v prostoru, které dále popisuje práce [4]. Dále by bylo zajímavé se pokusit o řez vzniklé vírové struktury, který by byl kolmý na vektor vířivosti.

## 7. Seznam odborné literatury

[1] DVOŘÁK, Rudolf a Karel KOZEL. *Matematické modelování v aerodynamice*. Praha: ČVUT, 1996. ISBN 80-01-01541-6.

[2] DVOŘÁK, Rudolf a Karel KOZEL. *Matematické metody v aerodynamice*. Praha: ČVUT, 1992. ISBN 80-01-00851-7.

[3] JANALÍK, Jaroslav a Pavel ŠTÁVÁ. *Mechanika tekutin*. [online] Ostrava: VŠB-TU, [cit. 2015-10-05]. Dostupné z <http://www.338.vsb.cz/PDF/Janalik,Stava-MechanikaTekutin.pdf>

[4] KOLÁŘ, V. *Vortex identification: New requirements and limitations*, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 28, (2007), pp. 638-652

[5] WILLIAMSON, C.H.K. *Vortex dynamics in the cylinder wake*, 28, (1996), pp.477-539. ISSN 0066-4189.

[6] HYHLÍK, Tomáš a Jakub ADAMEC. *FTLE analysis of coherent structures given by set of Lamb-Ossen vortices*, *Coloquim FLUID DYNAMICS 2014*, Institute of Thermomechanics AS CR, v.v.i., Prague, October 22-24, 2014

[7] HYHLÍK, Tomáš. *Analysis of synthetic jet flow by means of proper orthogonal decomposition and dynamic mode decomposition based on CFD data*. *Proceedings of the 12th International Symposium on experimental computational aerothermodynamics of internal flows, 13-16 July 2015, Lerici, Italy*

[8] Internetová stránka [matzagusto.wordpress](https://matzagusto.wordpress.com/2011/12/14/vibration-damages-towers-case-ferrybridge-cooling-towers-collapse/); [cit. 2015-10-05]. Dostupné z <https://matzagusto.wordpress.com/2011/12/14/vibration-damages-towers-case-ferrybridge-cooling-towers-collapse/>

## **8. Přílohy**

[A] CD s bakalářskou prací ve formátu „pdf“