



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta strojní
Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky

Napětově-deformační analýza sendvičových nosníků

Stress-strain analysis of sandwich beams

Bakalářská práce

Studijní program: Teoretický základ strojního inženýrství
Studijní obor: bez oboru
Vedoucí práce: Ing. Ctirad Novotný, Ph.D.

Jan Mravinac
Hostivice 3. 7. 2015



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta strojní, Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky

Technická 4, 166 07 Praha 6

Akademický rok: 2014/2015

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

pro: Jana Mravinace

program: **Teoretický základ strojího inženýrství**

obor: bez oboru

Název tématu: **Napětově-deformační analýza sendvičových nosníků**

Title: **Stress-strain analysis of sandwich beams**

Zásady pro vypracování:

1. Nastudovat teorie ohybu nosníků (analýza napětí, deformací, posuvů), teorii vrstvených a sendvičových nosníků
2. Porovnat jednotlivé přístupy
3. Analyzovat zadaný sendvičový nosník - výpočtově a experimentálně z hlediska průhybu
4. Srovnat obdržené výsledky a komentovat je

Rozsah grafických prací: 15 stran

Rozsah průvodní zprávy: 35 stran

Seznam odborné literatury:

1. Laš, V. (2008) Mechanika kompozitních materiálů. ZČU, Plzeň.
2. Gay, D. (2015) Composite materials. CRC Press, Boca Raton.

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Ctirad Novotný, Ph.D.

Datum zadání bakalářské práce: 30. 4. 2015

Datum odevzdání bakalářské práce: 19. 6. 2015

Neodevzdá-li student bakalářskou nebo diplomovou práci v určeném termínu, tuto skutečnost předem písemně zdůvodnil a omluva byla děkanem uznána, stanoví děkan studentovi náhradní termín odevzdání bakalářské nebo diplomové práce. Pokud se však student řádně neomluvil nebo omluva nebyla děkanem uznána, může si student zapsat bakalářskou nebo diplomovou práci podruhé

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

Zadání diplomové práce převzal dne:


.....
diplomant


.....
prof. Ing. Milan Růžička, CSc.
vedoucí Ú 12 105




.....
prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
děkan FS ČVUT v Praze

V Praze dne 30. 4. 2015

Anotační list

Jméno autora: Jan Mravinac

Název práce: Napětově-deformační analýza sendvičových nosníků

Anglický název: Stress-strain analysis of sandwich beams

Rok: 2015

Obor studia: bez oboru

Ústav/odbor: Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky/odbor pružnosti a pevnosti

Vedoucí práce: Ing. Ctirad Novotný, Ph.D.

Bibliografické údaje: počet stran: 75
počet obrázků: 43
počet tabulek: 10
počet příloh: 0

Klíčová slova: sendvičová teorie, laminátová teorie, vrstvený nosník, průhyb sendvičového nosníku, vliv smykové deformace

Keywords: sandwich theory, laminate theory, composite beam, deflection of sandwich beam, influence of shear deformation

Anotace:

Práce se zabývá rozborem teorie sendvičových a laminátových desek a hlavně použitím těchto teorií pro řešení úlohy tříbodého ohybu sendvičových nosníků. Na základě řešení konkrétní úlohy ověřeného experimentem pak porovnává možné přístupy k výpočtu.

Abstract:

The thesis deals with the analysis of the theory of sandwich and laminate panels with particular emphasis on application of those theories on solving the problem of three-point bending of sandwich beams. Based on the solution of specific problem verified by an experiment the thesis further compares different possible approaches to the calculation.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma Napěťově deformační analýza sendvičových nosníků vypracoval samostatně s použitím odborné literatury a pramenů uvedených v seznamu na konci práce.

V Hostivici dne 3. 7. 2015

.....

Jan Mravinac

Poděkování

Rád bych poděkoval svému vedoucímu Ing. Ctiradu Novotnému, Ph.D. za cenné připomínky a rady, které mi poskytl při psaní této bakalářské práce. Dále potom opět jemu a Ing. Karlu Doubravovi, Ph.D. za jejich asistenci při provedení experimentů a za čas, který tím strávili v laboratořích. Nakonec bych rád poděkoval svým rodičům za veškerou podporu při studiu

.

OBSAH

Seznam použitého značení	9
1 ÚVOD	10
2 ANALYTICKÁ ČÁST.....	11
2.1 Analýza laminátových a sendvičových desek.....	11
2.1.1 Základní rovnice laminátové desky	11
2.1.2 Rovnice laminátové desky s uvažováním vlivu příčných smykových sil.....	17
2.1.3 Základní rovnice sendvičové desky	21
2.2 Ohyb sendvičových nosníků	28
2.2.1 Předpoklady řešení	28
2.2.2 Zadání konkrétního nosníku k analýze.....	31
2.2.3 Výpočet průhybu nosníku na dvou podporách zatíženého silou uprostřed pomocí laminátové teorie bez uvažování vlivu příčné smykové deformace	32
2.2.3.1 Odvození vztahu pro výpočet průhybu	32
2.2.3.2 Výpočet konstant tuhosti a poddajnosti	35
2.2.3.3 Deformační analýza zadaného nosníku	38
2.2.4 Výpočet průhybu nosníku na dvou podporách zatíženého silou uprostřed pomocí laminátové teorie s uvažováním vlivu příčné smykové deformace	40
2.2.4.1 Odvození vztahu pro výpočet průhybu	40
2.2.4.2 Výpočet konstant tuhosti a poddajnosti	43
2.2.4.3 Deformační analýza zadaného nosníku	45
2.2.5 Výpočet průhybu nosníku na dvou podporách zatíženého silou uprostřed pomocí sendvičové teorie s uvažováním vlivu příčné smykové deformace	47
2.2.5.1 Výpočet konstant tuhosti a poddajnosti	48
2.2.5.2 Deformační analýza zadaného nosníku	50
2.2.6 Výpočet průhybu nosníku na dvou podporách zatíženého silou uprostřed pomocí sendvičové teorie bez uvažování vlivu příčné smykové deformace	52
2.2.6.1 Deformační analýza zadaného nosníku	52
3 EXPERIMENTÁLNÍ ČÁST	55
3.1 Zkouška tříbodým ohybem sendvičového nosníku	55
3.1.1 Popis zkoušky	55
3.1.2 Popis vzorků	56
3.1.3 Zpracování naměřených hodnot	57
3.1.4 Vyhodnocení měření.....	59
3.2 Zkouška tahem horního a dolního potahu sendviče	60
3.2.1 Popis zkoušky	60
3.2.2 Popis vzorků	62
3.2.3 Zpracování naměřených hodnot	63
3.2.4 Vyhodnocení měření.....	65

4	VYHODNOCENÍ	67
4.1	Shrnutí a doplnění výpočtových vztahů.....	67
4.2	Tabulka výsledků.....	69
4.3	Vyhodnocení výsledků	70
4.4	Zdroje chyb	71
5	ZÁVĚR.....	73
	Seznam obrázků	74
	Seznam tabulek	75
	Použitá literatura	75

Seznam použitého značení

Symbol	Základní jednotka	Název
Materiálové vlastnosti		
A	$N \cdot m^{-1}$	<i>matice tahové tuhosti</i>
B	$N \cdot m^{-1}$	<i>matice vazební tuhosti</i>
C	$N \cdot m^{-2}$	<i>matice tuhosti (materiálu)</i>
D	$N \cdot m$	<i>matice ohybové tuhosti</i>
D^*	$N^{-1} \cdot m^{-1}$	<i>matice ohybové poddajnosti</i>
E	$N \cdot m^{-2}$	<i>modul pružnosti v tahu/tlaku</i>
F	$N \cdot m^{-1}$	<i>matice smykové tuhosti</i>
F^*	$N^{-1} \cdot m$	<i>matice smykové poddajnosti</i>
G	$N \cdot m^{-2}$	<i>modul pružnosti ve smyku</i>
ν	1	<i>Poissonovo číslo</i>
Q	$N \cdot m^{-2}$	<i>matice mimoosové tuhosti</i>
Silové účinky		
$N_x; N_y; N_{xy}$	$N \cdot m^{-1}$	<i>výslednice sil na jednotku délky</i>
$M_x; M_y; M_{xy}$	N	<i>výslednice momentů na jednotku délky</i>
$Q_x; Q_y$	$N \cdot m^{-1}$	<i>výslednice smykových sil na jednotku délky</i>
F	N	<i>vnější síla působící na nosník</i>
M	$N \cdot m$	<i>vnější moment působící na nosník</i>
$R_A; R_B$	N	<i>reakce v podporách nosníku</i>
$\sigma_{xx}; \sigma_{yy}; \sigma_{zz}$	$N \cdot m^{-2}$	<i>normálové složky napětí</i>
$\sigma_{yz}; \sigma_{xz}; \sigma_{xy}$	$N \cdot m^{-2}$	<i>smykové složky napětí</i>
Přetvoření		
$\varepsilon_{xx}; \varepsilon_{yy}; \varepsilon_{zz}$	1	<i>poměrná prodloužení (deformace)</i>
$\gamma_{yz}; \gamma_{xz}; \gamma_{xy}$	1	<i>zkosy</i>
$u; v; w$	m	<i>posuvy ve směrech x, y, z</i>
$\psi_x; \psi_y$	°	<i>sklon střední roviny desky</i>
$k_x; k_y; k_{xy}$	-	<i>křivosti</i>
w_0	m	<i>průhyb nosníku</i>
w_{0max}	m	<i>průhyb nosníku uprostřed podpor</i>

1 Úvod

Jak napovídá název práce, budeme se zabývat chováním nosníků složených z vrstev různých materiálů při zatížení, a to zejména z hlediska výpočtu jejich průhybu.

Protože složený nosník dnes díky rychlému vývoji technologií může z hlediska skladby vrstev z různých materiálů vypadat opravdu téměř jakkoliv, není možné obecně definovat jeho schéma a nelze ani určit obecně platnou teorii pro jeho výpočet. V praxi se tedy používá rozdělení na dva možné typy struktur. Prvním typem je laminátová struktura, která je charakterizována tenkými vrstvami materiálů srovnatelných mechanických vlastností, a druhým typem je sendvičová struktura, jejímž charakteristickým znakem je tlustá střední vrstva řádově jiných mechanických vlastností než mnohem tenčí vrstvy, které ji obalují. Pro každý typ struktury pak existuje teorie pro výpočet napětí, deformací a posuvů v závislosti na vnějších silách. Jedním z hlavních úkolů při řešení ohybu vrstveného nosníku je potom rozhodnutí, které struktuře nosník lépe odpovídá, a tím také která teorie by měla být pro výpočet použita.

V následující práci se tedy nejprve budeme věnovat rozboru těchto výchozích teorií. Posléze přejdeme k samotnému řešení ohybu nosníků podle různých výpočtových variant plynoucích z rozboru teorie. Pomocí všech těchto metod provedeme výpočet konkrétního nosníku sendvičové struktury, pro jednoduchoť zatíženého pouze uprostřed osamělou silou. Na základě vypočítaných výsledků se potom pokusíme jednotlivé metody co nejlépe porovnat z hlediska vlivu různých parametrů nosníku na výsledek. Získané výsledky také ověříme experimentálně, aby bylo možné rozhodnout, která z teorií byla pro daný typ nosníku nejlepší.

2 Analytická část

2.1 Analýza laminátových a sendvičových desek

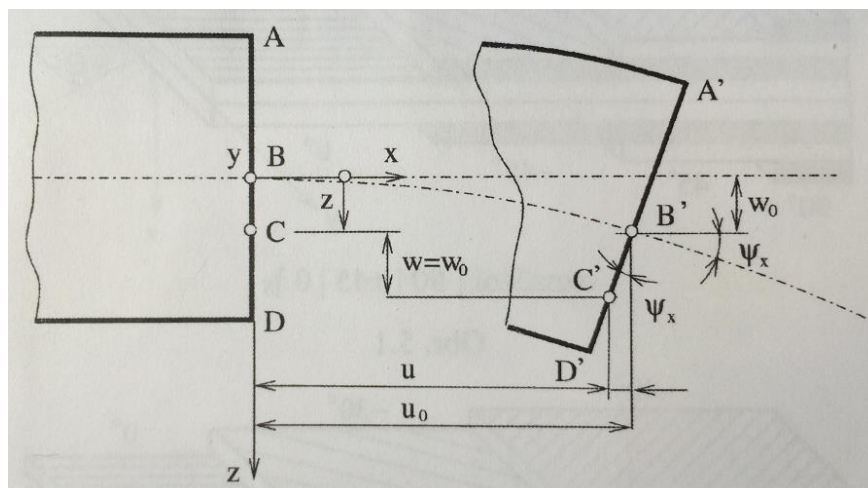
Abychom se mohli zabývat rozбором deformací sendvičových nosníků, musíme si nejprve uvést základní vztahy, ze kterých budeme vycházet. V zásadě jde o dvě teorie – laminátové desky a sendvičové desky – a dva možné přístupy, tedy se zanedbáním vlivu příčných smykových deformací a s jeho uvažováním. Uvedme tedy jako první analýzu těchto teorií.

2.1.1 Základní rovnice laminátové desky

– tedy rovnice obecně namáhané tenké vrstvené desky, pro kterou, jak uvádí Laš (2008, str. 114) platí následující předpoklady:

- každá lamina (vrstva) je ortotropní a kvazihomogenní
- tloušťka laminy je ve srovnání s délkou a šířkou velmi malá
- posunutí jednotlivých bodů ve všech třech směrech jsou malá
- spoj mezi laminami je dokonalý, nekonečně tenký, a proto jsou posunutí spojitá
- posunutí se v příčném směru (po tloušťce) mění lineárně
- vzhledem k tomu, že tloušťka laminátu je vzhledem k ostatním rozměrům malá, je možno uvažovat rovinný stav napjatosti, a tudíž platí $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$
- příčná zkosení $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} \approx 0$, a proto zůstanou kolmice ke středové ploše kolmé i po deformaci a budou přímkové
- normálová vzdálenost od středové roviny zůstává konstantní, a proto lze zanedbat přetvoření v příčném směru ($\epsilon_{zz} \approx 0$)
- závislost mezi deformací a napětím bude lineární

K odvození závislosti mezi vnějšími silovými účinky a napětími, které tyto účinky vyvolají v jednotlivých vrstvách desky, případně deformacemi použijeme následující schéma:



Obr. 1: Schéma deformace laminátové desky

Na obrázku 1 je znázorněna část desky v rovině xz . V souladu s předpoklady je úsečka AD před deformací i po ní přímá a kolmá ke střední rovině desky. Vlivem deformace se bod B , který leží ve střední rovině desky, posune do bodu B' . Vzniklé posuvy u_0 , v_0 a w_0 odpovídají směrům os x , y , z . Pro posuv libovolného bodu ležícího na úsečce AD , na (Obr. 1: Schéma deformace laminátové desky) označeného C , platí:

$$u = u_0 - z\psi_x,$$

Rovnice 2.1.1—1

kde ψ_x je úhel sklonu (natočení) střední roviny desky.

Platí:

$$\psi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x}.$$

Rovnice 2.1.1—2

Při zobrazení desky v rovině yz bychom obdobně získali pro posuv ve směru y :

$$v = v_0 - z\psi_y,$$

Rovnice 2.1.1—3

kde

$$\psi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y}.$$

Rovnice 2.1.1—4

Deformaci po tloušťce zanedbáváme, platí tedy:

$$w = w_0.$$

Rovnice 2.1.1—5

Použitím známých rovnic přetvoření získáme vztahy pro výpočet deformací:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2},$$

Rovnice 2.1.1—6

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2},$$

Rovnice 2.1.1—7

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}.$$

Rovnice 2.1.1—8

Tyto vztahy je pak možné přepsat do tvaru

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{\circ} \\ \varepsilon_{yy}^{\circ} \\ \gamma_{xy}^{\circ} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix},$$

Rovnice 2.1.1—9

kde deformace střední plochy jsou:

$$\varepsilon_m^{\circ} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{\circ} \\ \varepsilon_{yy}^{\circ} \\ \gamma_{xy}^{\circ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Rovnice 2.1.1—10

a křivosti desky jsou:

$$k = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}.$$

Rovnice 2.1.1—11

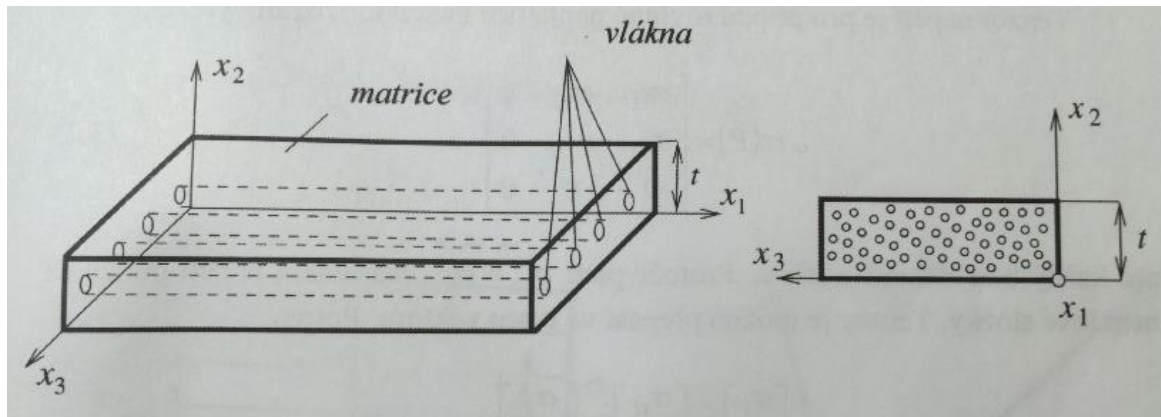
Nyní, když máme vyjádřeny deformace, je snadné získat vztahy pro výpočet napětí. Protože se pohybujeme v oblasti lineární pružnosti, jsou napětí a deformace vázány Hookeovým zákonem. Vzhledem k tomu, že odvozujeme vztah pro obecnou laminátovou desku (za platnosti uvedených předpokladů), použijeme ho ve tvaru, v jakém ho uvádí Laš (2008, str. 116), tedy:

$$\sigma' = Q\varepsilon'.$$

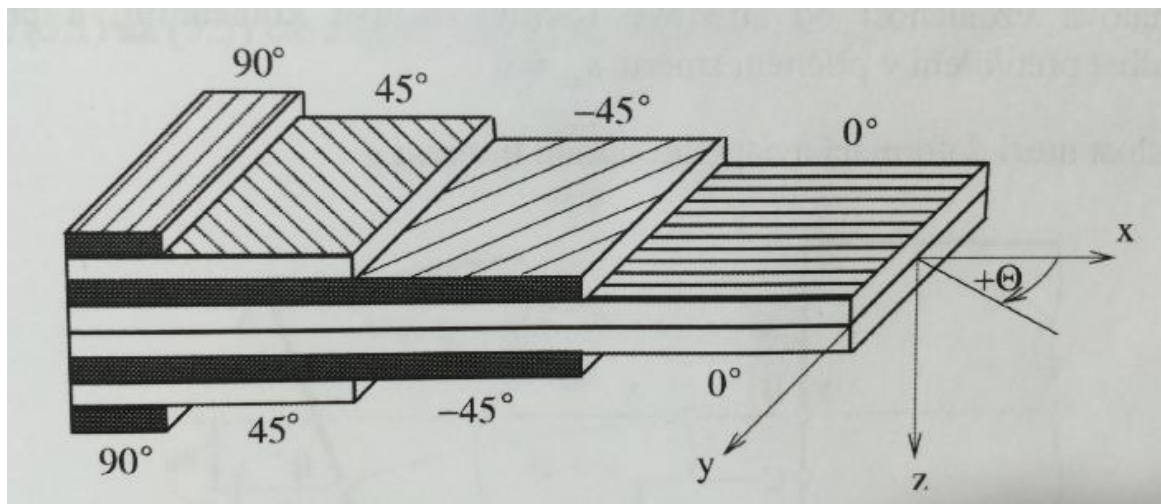
Rovnice 2.1.1—12

Rozdíl oproti obecnému tvaru není v ničem jiném než v souřadném systému. Laminátová deska, pro kterou má vztah platit, je totiž tvořena z vrstev jednosměrových kompozitů (Obr. 2: Jednosměrový kompozit), které jsou ortotropním materiálem (viz Laš 2008, str. 23). Jednou z hlavních výhod použití takové desky je možnost vyladování jejich mechanických vlastností (nejen) pomocí orientace vláken v jednotlivých vrstvách – viz (Obr. 3: Skládání vrstev laminátu). A jelikož většinou známe materiálové konstanty kompozitů v souřadných systémech pevně spojených se směrem jejich vláken, musíme jejich matice tuhosti transformovat do souřadného systému zvoleného pro desku. Uvedený tvar Hookeova zákona tedy vyjadřuje napětí v závislosti na deformaci v souřadném systému $O(x, y, z)$ desky, který je vůči souřadnému systému $O'(x', y', z') =$ např. $O(x_1, x_2, x_3)$ kompozitu na (Obr. 2: Jednosměrový kompozit), pro který jsou známy

materiálové konstanty, pootočen o daný úhel θ . Q je matice mimoosové tuhosti kompozitu, která vznikne transformací původní matice tuhosti C .



Obr. 2: Jednosměrový kompozit



Obr. 3: Skládání vrstev laminátu

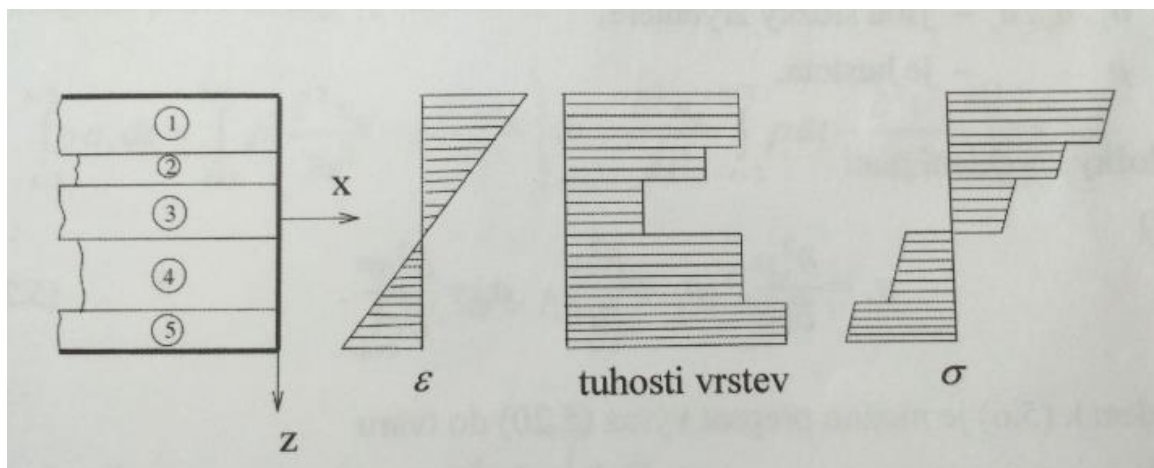
Vzhledem k tomu, že v rámci zjednodušení budeme později pracovat s materiály, které bude možné pokládat za izotropní, je zde použito pouze krátkého orientačního popisu a nebudeme se nadále touto problematikou zabývat.

Nyní máme tedy vše potřebné pro vyjádření napětí v k -té vrstvě desky, tedy:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}.$$

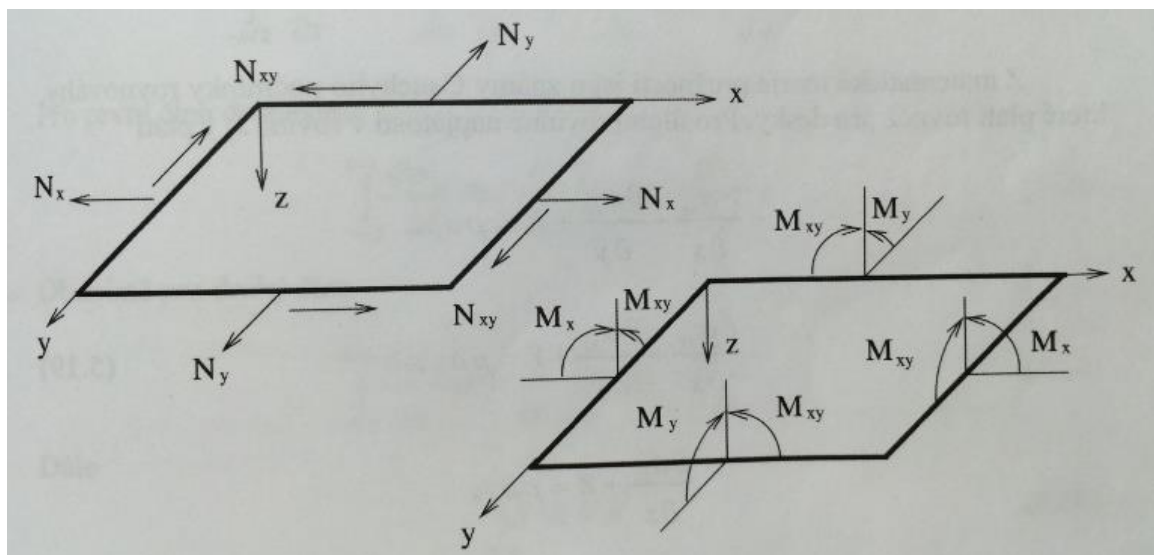
Rovnice 2.1.1—13

Zbývá určit závislost mezi vnějšími silovými účinky a napětím. Vzhledem k odlišným konstantám matice Q pro různé vrstvy se napětí po tloušťce desky mění nespojitě – viz (Obr. 4).



Obr. 4: Průběh napětí po tloušťce laminátu

Z tohoto důvodu je vhodné vyjádřit výsledné síly a momenty působící na desku stejně jako napětí – pro každou vrstvu zvlášť. Na (Obr. 5) jsou nakresleny výslednice silových účinků působících na příčný průřez k-té vrstvy tloušťky $h_k - h_{k-1}$.



Obr. 5: Výslednice silových účinků v k-té vrstvě

Pro výslednice sil, vztažené na jednotku příslušné délky, platí:

$$N_x = \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{xx} dz, \quad N_y = \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{yy} dz, \quad N_{xy} = \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{xy} dz .$$

Rovnice 2.1.1–14

Obdobně pro momenty, rovněž vztažené na jednotku příslušné délky, platí:

$$M_x = \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{xx} z dz, \quad M_y = \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{yy} z dz, \quad M_{xy} = \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{xy} z dz$$

Rovnice 2.1.1–15

Výsledné síly a momenty působící v průřezu desky lze potom určit jako součet silových účinků od všech n vrstev, což lze zapsat jako

$$N = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k dz$$

Rovnice 2.1.1–16

a

$$M = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k z dz .$$

Rovnice 2.1.1–17

Poslední tři rovnice potřebné k úplnému určení dané laminátové desky vychází z Cauchyho podmínek rovnováhy. Jejich odvození je poměrně dlouhé a pro tuto práci málo významné, tudíž uvedeme pouze výsledné vztahy. Detailní provedení lze nalézt u Laše (2008, str. 118–122). Pro úlohy statiky platí:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 ,$$

Rovnice 2.1.1–18

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 ,$$

Rovnice 2.1.1–19

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q = 0 , \text{ kde } q = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz ; h \text{ je tloušťka desky.}$$

Rovnice 2.1.1–20

Spojíme-li nyní odvozené rovnice, získáme konstitutivní vztah vyjadřující závislost silových účinků působících na desku na jejich deformacích a křivostech (viz Laš 2008, str. 123–124). Pro laminát skládající se z n vrstev tedy platí:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^\circ \\ \varepsilon_{yy}^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} .$$

Rovnice 2.1.1–21

Matici vyjadřující vazbu mezi silovými účinky, deformacemi a křivostmi nazývá Laš (2008, str. 125) globální, tedy celkovou maticí tuhosti. Její prvky odpovídají konstantám, které vzniknou při sestavování konstitutivního výrazu a lze je vypočítat pomocí následujících vztahů:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k (h_k - h_{k-1}),$$

Rovnice 2.1.1–22

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k (h_k^2 - h_{k-1}^2),$$

Rovnice 2.1.1–23

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k (h_k^3 - h_{k-1}^3).$$

Rovnice 2.1.1–24

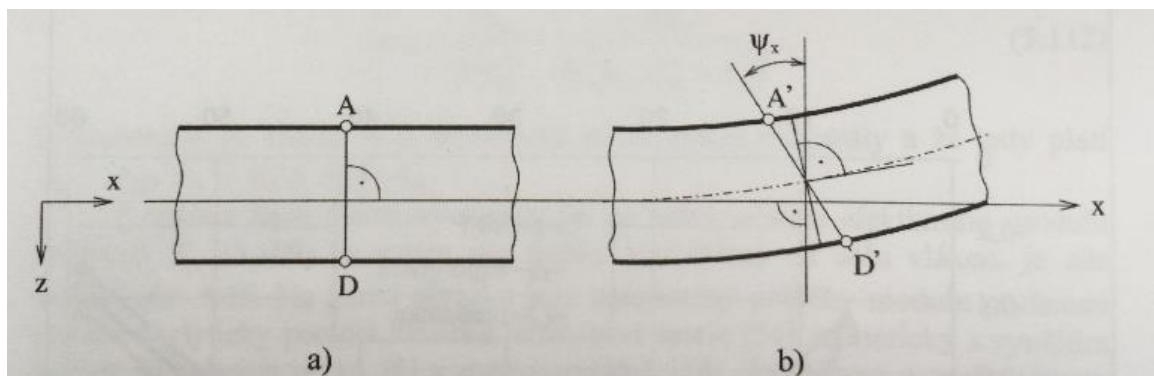
Máme tedy výchozí vztah pro výpočet silových účinků v závislosti na deformacích a křivostech. Nejčastěji však potřebujeme závislost právě opačnou, tedy kdy při zatěžování desky známými silami chceme určit její deformace, natočení a průběhy napětí v jednotlivých vrstvách. Tento vztah získáme pomocí inverze globální matice tuhosti. Rovnice pro výpočet jejích členů uvádí Laš (2008, str. 125, 126), my je však nebudeme potřebovat. Jak uvidíme později, vystačíme si s prostou inverzí matice D .

2.1.2 Rovnice laminátové desky s uvažováním vlivu příčných smykových sil

– tedy rovnice obecně namáhané tlusté vrstvené desky. Tlustou deskou se rozumí taková, u které je poměr šířky (případně délky) ku tloušťce menší než 10 (Laš 2008, str. 143). Při odvození budeme vycházet ze stejných předpokladů jako u desky tenké, s tím rozdílem, že:

- tloušťka laminy už není ve srovnání s její šířkou či délkou velmi malá
- zavádíme vliv příčné smykové deformace, tedy smyková napětí σ_{yz} a σ_{zx} už nebudeme považovat za nulová (netýká se normálového napětí σ_{zz} !)
- rovněž tak příčná zkosení γ_{yz} a γ_{zx} už nebudou nulová, a tudíž ani kolmice ke středové ploše nezůstanou po deformaci kolmicemi

Základní schéma tedy vypadá následovně:



Obr. 6: Schéma deformace laminátové desky při uvažování vlivu smykových sil

Odvození není třeba uvádět detailně, protože je z větší části analogické s odvozením pro tenkou desku. Zásadní rozdíl tkví v jiné definici úhlu ψ_x . Jak je patrné z (Obr. 6) jedná se o natočení kolmice ke střední rovině vlivem deformace, které **nyní už nebude totožné s natočením střední roviny laminátu**, a tedy:

$$\psi_x \neq \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad a \quad \psi_y \neq \frac{\partial w_0}{\partial y}.$$

Rovnice 2.1.2—1

Využijeme tedy rovnice (Rovnice 2.1.1—6), (Rovnice 2.1.1—7), (Rovnice 2.1.1—8), **nyní však platné pro schéma na (Obr. 6)**. Zkosity γ_{yz} a γ_{zx} vyjádříme opět s použitím známých rovnic přetvoření jako

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial y} - \psi_y$$

Rovnice 2.1.2—2

a

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial x} - \psi_x.$$

Rovnice 2.1.2—3

Jak můžeme vidět, tyto zkosity tedy nejsou závislé na souřadnici z.

Pro deformace tedy můžeme psát:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{\circ} - zk_x \\ \varepsilon_{yy}^{\circ} - zk_y \\ \gamma_{xy}^{\circ} - zk_{xy} \\ \gamma_{yz}^{\circ} \\ \gamma_{zx}^{\circ} \end{bmatrix},$$

Rovnice 2.1.2—4

kde jak píše Laš (2008, str. 145), jsou symboly k_x , k_y a k_{xy} v zájmu odlišení od tenké desky nazývány **modifikované křivosti** a platí pro ně:

$$\begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Rovnice 2.1.2—5

Pro napětí v rovině xy tedy stejně jako pro tenkou desku platí (s rozdílnou definicí křivosti):

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^\circ \\ \varepsilon_{yy}^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}.$$

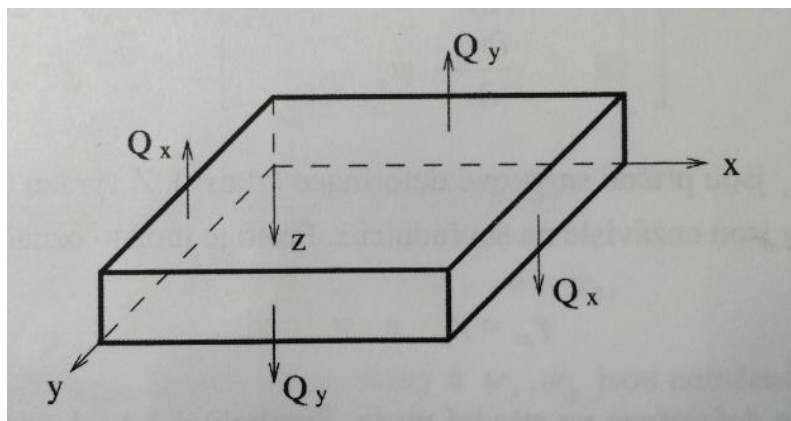
Rovnice 2.1.2—6

Zbývá určit vztah pro příčná smyková napětí σ_{yz} a σ_{zx} , což učiníme opět s pomocí Hookeova zákona. Abychom však byli korektní (stále se zabýváme obecnou deskou z ortotropních materiálů), uvedeme ho tak, jak ho uvádí Laš (2008, str. 146), tedy s použitím transformované matice tuhosti. Jak už bylo zmíněno, tyto transformace nebudeme později používat, tudíž se jimi ani nebudeme zabývat – vše lze případně nalézt u Laše (2008, str. 38). Hledaný vztah tedy vypadá takto (Laš 2008, str. 146):

$$\begin{bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} C'_{44} & C'_{45} \\ C'_{54} & C'_{55} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^\circ \\ \gamma_{zx}^\circ \end{bmatrix}.$$

Rovnice 2.1.2—7

Zavedeme-li nyní výslednice vnějších sil způsobujících smykové deformace k -té vrstvy desky, budeme schopni určit kompletní konstitutivní vztah k výpočtu tlustého laminátu. Vydeme ze schématu na (Obr. 7).



Obr. 7: Výslednice vnějších sil způsobujících smykové deformace k -té vrstvy

Obdobně jako u ostatních silových účinků, které jsme řešili při odvozování vztahu pro tenkou desku (a které budou vypadat úplně stejně – s ohledem na rozdílnou definici křivosti – i pro desku tlustou), bude i v případě smykových sil nutné výslednice působící v řezu laminátové desky určit jako součet účinků od všech n vrstev. Platí tedy:

$$\begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix}_k dz.$$

Rovnice 2.1.2—8

Vyjádříme-li ještě napětí jako funkci deformace (Rovnice 2.1.2—7), můžeme výsledné síly vyjádřit ve tvaru

$$\begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{44} & F_{45} \\ F_{54} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^\circ \\ \gamma_{zx}^\circ \end{bmatrix}.$$

Rovnice 2.1.2—9

Složky matice F , která vznikne z konstant, jež zbydou při vyjadřování tohoto výrazu, lze určit jako

$$F_{ij} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) (C'_{ij})_k.$$

Rovnice 2.1.2—10

Konstitutivní vztah pro řešení obecně namáhané tlusté laminátové desky, který vznikne spojením dříve odvozených rovnic, tedy vypadá následovně (Laš 2008, str. 148):

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{44} & F_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{54} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^\circ \\ \varepsilon_{yy}^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \\ \gamma_{yz}^\circ \\ \gamma_{zx}^\circ \end{bmatrix}.$$

Rovnice 2.1.2—11

K úplnému určení desky je zapotřebí dalších pěti rovnic, opět odvozených z Cauchyho podmínek rovnováhy. Uvedeme je zde rovněž už ve výsledném tvaru, tak jak je odvodil Laš (2008, str. 147). Pro úlohy statiky tedy platí:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0,$$

Rovnice 2.1.2—12

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0,$$

Rovnice 2.1.2–13

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0,$$

Rovnice 2.1.2–14

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0,$$

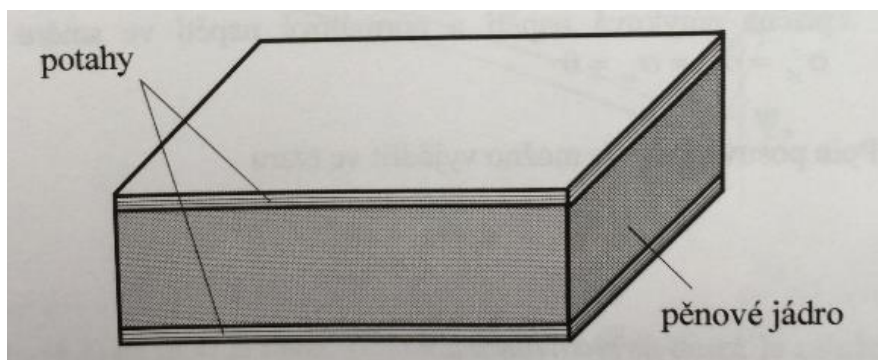
Rovnice 2.1.2–15

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0.$$

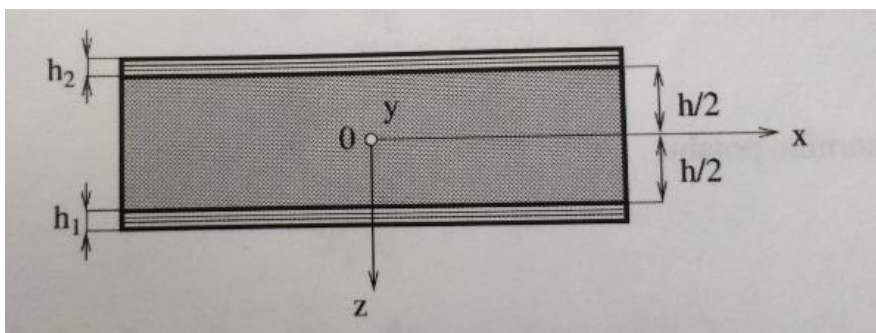
Rovnice 2.1.2–16

2.1.3 Základní rovnice sendvičové desky

– tedy rovnice speciální vrstvené desky, jejíž prostřední vrstva je výrazně tlustší než ostatní a kterou nazýváme jádrem. Ostatní vrstvy, které jádro „obalují“, nazýváme potahy. Jádro je obecně tvořeno z lehkého materiálu dobře odolného vůči tlakovému namáhání – obvykle z vytvrzené pěny – a jeho funkcí je přenášet mechanické zatížení z jednoho potahu na druhý pomocí příčného smyku. Potahy jsou potom tvořeny materiály s dobrými vlastnostmi v tahu – obvykle vláknovými kompozity. Jejich funkcí je přenášet napětí osová, způsobená většinou ohybem, a držet jádro pohromadě. Schematické zobrazení sendvičové desky je na obrázku 8.



Obr. 8: Schematické zobrazení sendvičové desky

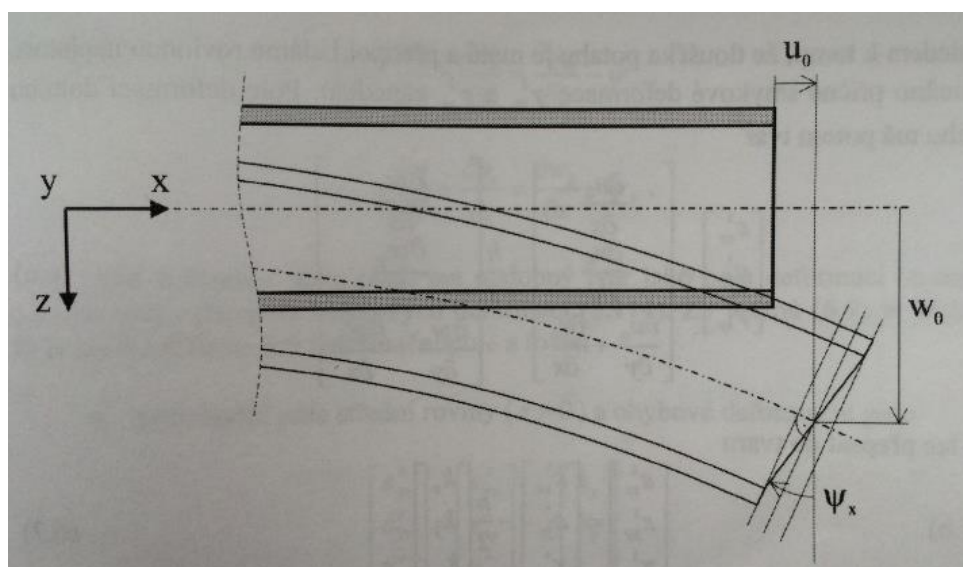


Obr. 9: Řez sendvičovou deskou v rovině xz

Na obrázku 9 je zobrazena sendvičová deska, která má tloušťky potahů h_1 a h_2 a tloušťku jádra h , v rovině xz. Konstitutivní vztah budeme odvozovat pro takovýto sendvič za předpokladů, které uvádí Laš (2008, str. 163–164) takto:

- deformace jsou malé a platí Hookeův zákon
- tloušťka jádra musí být mnohem větší než tloušťky potahů, tj. $h \gg h_1, h_2$
- posunutí jádra u_c ve směru x a v_c ve směru y se po tloušťce z mění lineárně
- posunutí potahů u a v jsou konstantní po celé jejich tloušťce
- příčné posunutí w je nezávislé na souřadnici z , a proto můžeme uvažovat $\varepsilon_{zz} = 0$
- jádro přenáší pouze příčná smyková napětí σ_{yz}^c a σ_{zx}^c , a tudíž $\sigma_{xx}^c = \sigma_{yy}^c = \sigma_{xy}^c = \sigma_{zz}^c = 0$
- vzhledem k tomu, že je tloušťka potahů malá, je možno na nich zanedbat příčná smyková napětí a normálové napětí ve směru z ; platí: $\sigma_{yz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zz} = 0$

K odvození závislosti mezi vnějšími silovými účinky a napětími, které tyto účinky vyvolají v jednotlivých vrstvách desky – tedy v potazích a v jádře, případně deformacemi použijeme následující schéma:



Obr. 10: Schéma deformace sendvičové desky

Posuvy jádra vyjádříme dle schématu jako:

$$u_c = u_0 - z\psi_x,$$

Rovnice 2.1.3—1

$$v_c = v_0 - z\psi_y,$$

Rovnice 2.1.3—2

kde jsou u_0 a v_0 posunutí střední roviny ($z = 0$) ve směru x a y .

Pro posunutí dolního potahu platí:

$$u_1 = u_0 - \frac{h}{2}\psi_x,$$

Rovnice 2.1.3—3

$$v_1 = v_0 - \frac{h}{2}\psi_y.$$

Rovnice 2.1.3—4

Pro posunutí horního potahu platí:

$$u_2 = u_0 + \frac{h}{2}\psi_x,$$

Rovnice 2.1.3—5

$$v_2 = v_0 + \frac{h}{2}\psi_y.$$

Rovnice 2.1.3—6

V souladu s předpoklady pak pro celý sendvič platí:

$$w = w_0.$$

Rovnice 2.1.3—7

Jak můžeme vidět už z definic posuvů, bude teorie sendvičové desky ještě o něco komplikovanější než u klasických vrstvených desek, kde jsme definovali pole deformací a napětí zvlášť pro každou vrstvu a výslednice vnějších sil působících na celek potom jako součet jednotlivých účinků ve vrstvách. V případě sendviče budeme muset tyto kroky podniknout zvlášť pro jádro a pro každý z potahů, které jsou vlastně samy o sobě tenkými vrstvenými deskami.

Zavedeme tedy deformace dolního potahu jako

$$\varepsilon_{xx}^1 = \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{h}{2} \frac{\partial \psi_x}{\partial x},$$

Rovnice 2.1.3—8

$$\varepsilon_{yy}^1 = \frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - \frac{h}{2} \frac{\partial \psi_y}{\partial y},$$

Rovnice 2.1.3—9

$$\varepsilon_{zz}^1 = 0 \text{ (dle předpokladů) ,}$$

Rovnice 2.1.3—10

$$\gamma_{xy}^1 = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{h}{2} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right).$$

Rovnice 2.1.3—11

Protože předpokládáme malou tloušťku potahů, můžeme zanedbat jejich příčné smykové deformace, tedy:

$$\gamma_{yz}^1 \approx 0 \text{ a } \gamma_{zx}^1 \approx 0.$$

Rovnice 2.1.3—12

Tyto vztahy stejně jako v předchozích kapitolách přepíšeme do tvaru

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^\circ \\ \varepsilon_{yy}^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{bmatrix} + \frac{h}{2} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix},$$

Rovnice 2.1.3—13

kde první vektor na pravé straně rovnice představuje deformace střední roviny desky ($z = 0$) a druhý vektor

$$\begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Rovnice 2.1.3—14

představuje modifikované křivosti.

Stejným způsobem sestavíme pro horní potah:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^2 \\ \varepsilon_{yy}^2 \\ \gamma_{xy}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^\circ \\ \varepsilon_{yy}^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{bmatrix} - \frac{h}{2} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}.$$

Rovnice 2.1.3—15

Deformace jádra vyjádříme také stejným způsobem, jen už nemůžeme zanedbávat příčné smykové deformace, pro které platí:

$$\gamma_{yz}^c = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v_c}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial y} - \psi_y,$$

Rovnice 2.1.3—16

$$\gamma_{zx}^c = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u_c}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial x} - \psi_x.$$

Rovnice 2.1.3—17

Zapišeme tedy:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^c \\ \varepsilon_{yy}^c \\ \gamma_{xy}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^o \\ \varepsilon_{yy}^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}$$

Rovnice 2.1.3—18

a

$$\begin{bmatrix} \gamma_{yz}^c \\ \gamma_{zx}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} - \psi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} - \psi_x \end{bmatrix}.$$

Rovnice 2.1.3—19

Jak plyne z předpokladů, jádro přenáší pouze příčná smyková napětí a pro napjatost v jádře tedy obecně platí:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{yz}^c \\ \sigma_{zx}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{44}^c & C_{45}^c \\ C_{54}^c & C_{55}^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^c \\ \gamma_{zx}^c \end{bmatrix},$$

Rovnice 2.1.3—20

kde prvky matice C' představují opět transformovanou tuhost, kterou nebudeme pro izotropní jádro potřebovat.

V potazích potom dle předpokladů neuvažujeme příčná smyková napětí a normálové napětí ve směru z , platí pro ně obecně tedy:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx}^B \\ \sigma_{yy}^B \\ \sigma_{xy}^B \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11}^B & Q_{12}^B & Q_{16}^B \\ Q_{21}^B & Q_{22}^B & Q_{26}^B \\ Q_{61}^B & Q_{62}^B & Q_{66}^B \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^B \\ \varepsilon_{yy}^B \\ \gamma_{xy}^B \end{bmatrix},$$

Rovnice 2.1.3—21

kde index $B = 1$ pro dolní potah a $B = 2$ pro horní potah. Prvky matice Q reprezentují transformovanou tuhost, kterou při pozdější aplikaci nahradíme běžnou tuhostí.

Nyní je potřeba vyjádřit výsledné silové účinky, které působí na příčný řez sendvičové desky, což se opět provede integrací napětí v dílčích vrstvách a jejich následným sečtením. Protože se jádro neúčastní přenosu jiných než příčných smykových napětí,

budeme pro výsledné síly a momenty integrovat pouze po tloušťce potahů. Výpočet tedy vypadá takto:

$$N = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n^2} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^2 \\ \sigma_{yy}^2 \\ \sigma_{xy}^2 \end{bmatrix}_k dz + \sum_{k=1}^{n^1} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^1 \\ \sigma_{yy}^1 \\ \sigma_{xy}^1 \end{bmatrix}_k dz$$

Rovnice 2.1.3—22

$$M = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n^2} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^2 \\ \sigma_{yy}^2 \\ \sigma_{xy}^2 \end{bmatrix}_k z dz + \sum_{k=1}^{n^1} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^1 \\ \sigma_{yy}^1 \\ \sigma_{xy}^1 \end{bmatrix}_k z dz .$$

Rovnice 2.1.3—23

Indexování platí tak, jak jsme ho zavedli už dříve, tzn. index 2 je pro horní potah a index 1 pro dolní. V obou vztazích tedy první člen na pravé straně rovnice odpovídá hornímu potahu a druhý dolnímu potahu.

Výslednice sil způsobujících příčný smyk v jádře potom snadno definujeme integrací daných napětí po tloušťce jádra, tedy:

$$Q_c = \begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_{yz}^c \\ \sigma_{zx}^c \end{bmatrix} dz .$$

Rovnice 2.1.3—24

Konstitutivní vztah k výpočtu sendvičové desky vznikne stejným způsobem jako v předchozích kapitolách – tedy postupným dosazováním dílčích odvozených vztahů a vytýkáním konstant. Výsledek vypadá následovně (Laš 2008, str. 169):

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} & 0 & 0 \\ C_{11} & C_{12} & C_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ C_{61} & C_{62} & C_{66} & C_{61} & D_{62} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{44} & F_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{54} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^c \\ \varepsilon_{yy}^c \\ \gamma_{xy}^c \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \\ \gamma_{yz}^c \\ \gamma_{zx}^c \end{bmatrix} .$$

Rovnice 2.1.3—25

Prvky globální matice tuhosti určíme pomocí následujících výrazů (indexování zůstává, jak bylo dříve zavedeno, tedy 1 = dolní potah, 2 = horní potah):

$$A_{ij} = A_{ij}^1 + A_{ij}^2$$

Rovnice 2.1.3—26

$$A_{ij}^1 = \sum_{k=1}^{n^1} \int_{h_{k-1}}^{h_k} (Q_{ij}^1)_k dz = \sum_{k=1}^{n^1} (Q_{ij}^1)_k (h_k - h_{k-1})$$

Rovnice 2.1.3–27

$$A_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{n^2} \int_{h_{k-1}}^{h_k} (Q_{ij}^2)_k dz = \sum_{k=1}^{n^2} (Q_{ij}^2)_k (h_k - h_{k-1})$$

Rovnice 2.1.3–28

$$B_{ij} = B_{ij}^1 + B_{ij}^2,$$

Rovnice 2.1.3–29

$$B_{ij}^1 = \sum_{k=1}^{n^1} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \frac{h}{2} (Q_{ij}^1)_k dz = \sum_{k=1}^{n^1} \frac{h}{2} (Q_{ij}^1)_k (h_k - h_{k-1})$$

Rovnice 2.1.3–30

$$B_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{n^2} \int_{h_{k-1}}^{h_k} -\frac{h}{2} (Q_{ij}^2)_k dz = \sum_{k=1}^{n^2} -\frac{h}{2} (Q_{ij}^2)_k (h_k - h_{k-1})$$

Rovnice 2.1.3–31

$$C_{ij} = C_{ij}^1 + C_{ij}^2$$

Rovnice 2.1.3–32

$$C_{ij}^1 = \sum_{k=1}^{n^1} \int_{h_{k-1}}^{h_k} (Q_{ij}^1)_k z dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n^1} (Q_{ij}^1)_k (h_k^2 - h_{k-1}^2)$$

Rovnice 2.1.3–33

$$C_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{n^2} \int_{h_{k-1}}^{h_k} (Q_{ij}^2)_k z dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n^2} (Q_{ij}^2)_k (h_k^2 - h_{k-1}^2)$$

Rovnice 2.1.3–34

$$D_{ij} = D_{ij}^1 + D_{ij}^2$$

Rovnice 2.1.3–35

$$D_{ij}^1 = \sum_{k=1}^{n^1} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \frac{h}{2} (Q_{ij}^1)_k dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n^1} \frac{h}{2} (Q_{ij}^1)_k (h_k^2 - h_{k-1}^2)$$

Rovnice 2.1.3–36

$$D_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{n^2} \int_{h_{k-1}}^{h_k} -\frac{h}{2} (Q_{ij}^2)_k dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n^2} -\frac{h}{2} (Q_{ij}^2)_k (h_k^2 - h_{k-1}^2)$$

Rovnice 2.1.3—37

$$F_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (C_{ij}^c) dz = h C_{ij}^c$$

Rovnice 2.1.3—38

Srovnáním prvních šesti rovnic lze výpočet členů matice B zjednodušit jako

$$B_{jj} = \frac{h}{2} (A_{ij}^1 - A_{ij}^2)$$

Rovnice 2.1.3—39

a srovnáním předposledních šesti rovnic lze výpočet členů matice D zjednodušit jako

$$D_{ij} = \frac{h}{2} (C_{ij}^1 - C_{ij}^2).$$

Rovnice 2.1.3—40

Poslední přístup k řešení, tedy použití výše uvedené sendvičové teorie se zanedbáním smyku v jádře není třeba rozebírat – z konstitutivního vztahu pouze ubudou poslední dva řádky a bude se opět jednat o prostý ohyb.

2.2 Ohyb sendvičových nosníků

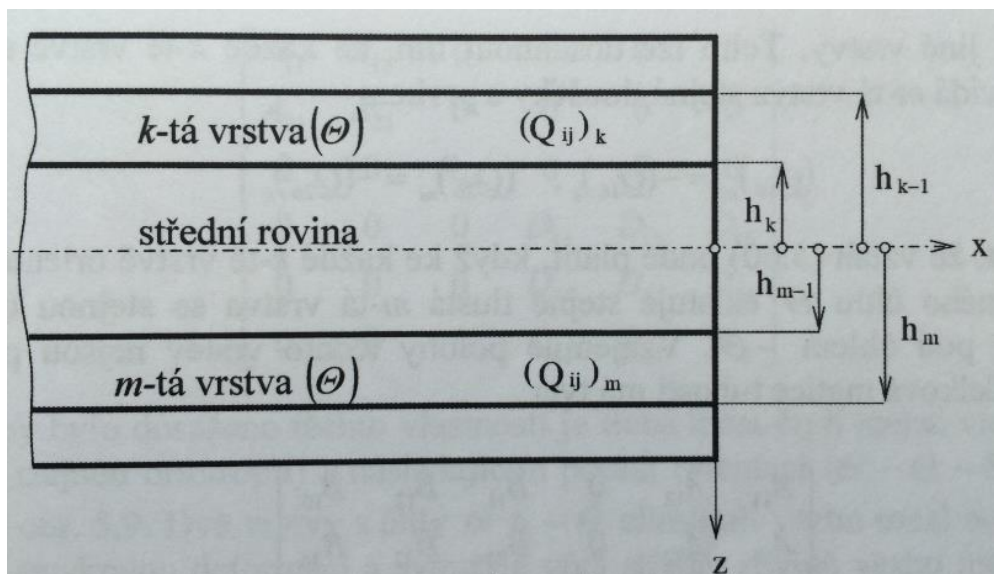
V předcházející kapitole jsme si uvedli vztahy popisující obecně namáhané kompozitové desky, které nyní využijeme k řešení napjatosti a deformace přímých prutů sendvičové struktury namáhaných ohybem – tedy sendvičových nosníků.

2.2.1 Předpoklady řešení

Přestože už jsou samotné výchozí teorie zatíženy celou řadou podmínek, které musí platit, aby je bylo možné použít, budeme muset pro nosníky zavést další omezení. Kdybychom tak neučinili, sestavení výpočetních vztahů by se ukázalo být značně složité, ne-li bez využití výpočetní techniky nemožné. Veškeré následující výpočty tedy budeme provádět za následujících předpokladů:

- I. Sendvičová struktura nosníku je vrstvená symetricky

Symetrickým vrstvením se rozumí takové, kdy jsou jednotlivé vrstvy jak geometricky, tak z hlediska materiálových konstant symetrické podle střední roviny – viz následující obrázek.



Obr. 11: Symetricky vrstvený nosník

Na (Obr. 11) je znázorněna část symetricky vrstveného sendviče. Platí pro něj:

$$(Q_{ij})_k = (Q_{ij})_m, \quad |-h_{k-1}| = h_m, \quad |-h_k| = h_{m-1}.$$

Důsledkem symetrického vrstvení je odstranění vazby mezi tahem a ohybem a tahem a krutem při namáhání nosníku (případně desky) (Laš 2008, str. 126). Prvky matice B a C v konstitutivních vztazích z předchozí kapitoly – rovnice Rovnice 2.1.1–21), Rovnice 2.1.2–11) a Rovnice 2.1.3–25) – tedy budou nulové, což se dá ověřit dosazením konkrétních hodnot do rovnic pro jejich výpočet.

II. Materiál jádra i potahů je izotropní

Izotropní materiál je takový, který má ve všech směrech stejné mechanické vlastnosti, a tudíž z jejich hlediska nezáleží na volbě souřadného systému. Je plně charakterizován pouze dvěma nezávislými konstantami – Poissonovým číslem ν a modulem pružnosti v tahu E . Pro prvky jeho matice tuhosti platí (Laš 2008, str. 28–29):

$$C_{11} = C_{22} = C_{33}, \quad C_{12} = C_{13} = C_{23}, \quad C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{1}{2} (C_{11} - C_{12}).$$

Rovnice 2.2.1–1

Matice tuhosti má tedy tvar

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{21} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} (C_{11} - C_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} (C_{11} - C_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} (C_{11} - C_{12}) \end{bmatrix}.$$

Rovnice 2.2.1–2

Prvky C_{11} a C_{12} lze vyjádřit pomocí materiálových konstant následovně:

$$C_{11} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

Rovnice 2.2.1–3

$$C_{12} = C_{21} = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}.$$

Rovnice 2.2.1–4

Tuto podmínku zavádíme čistě kvůli zjednodušení následujících výpočtů. Vyhne se tak nutnosti transformace souřadných systémů jednotlivých vrstev nosníku, která sice není obtížná, ale nepříjemně časově náročná. V praxi bychom předpoklad izotropního materiálu pravděpodobně velice často použít nemohli. Existují sice sendviče například s plechovými potahy, nicméně jak již bylo zmíněno, obvykle se používají potahy z vláknových i jiných kompozitů, které umožňují účinné nastavení mechanických vlastností. Použitím izotropního materiálu se této výhody zbavujeme.

Na stanovení této podmínky jsme odkazovali už v předchozí kapitole při zavádění konstitutivních rovnic, které byly odvozeny pro ortotropní materiály, aby vztahy, ze kterých nyní vycházíme, byly co nejobecněji platné. Veškeré uvedené matice transformovaných tuhostí budou pro následující výpočty nahrazeny maticemi sestavenými ze členů výše uvedené matice tuhosti izotropního materiálu.

III. Řešený nosník je štíhlý a je namáhán rovinným ohybem podél osy x

Štíhlým nosníkem rozumíme takový, jehož poměr délky l ku šířce b je dostatečně velký, abychom mohli zanedbat zkřivení nosníku vlivem ohybu podél osy y (Laš 2008, str. 173). Přestože se totiž omezíme na rovinný ohyb, kdy pro složky momentu platí: $M_y = M_{xy} = 0$, zjistili bychom, že průhyb w_0 a natočení ψ_x jsou nejen funkcí souřadnice x , ale také souřadnice y , což by výpočet značně zkomplikovalo. Zavedením

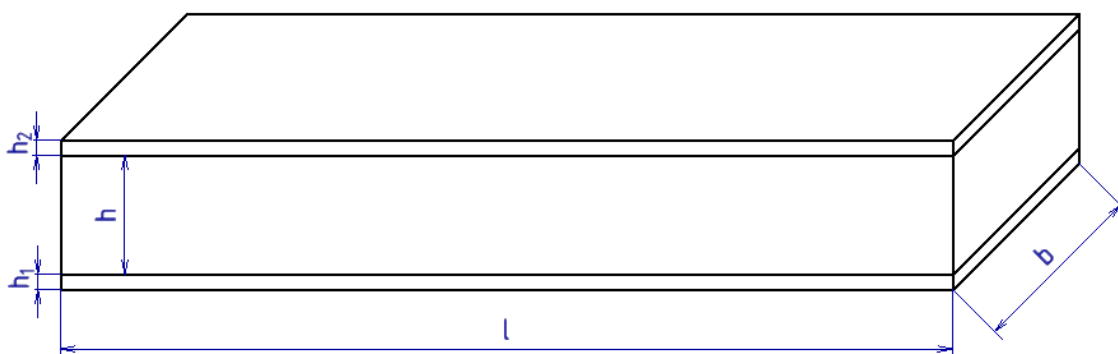
této podmínky můžeme předpokládat, že průhyb a natočení jsou funkcí pouze souřadnice x , tedy:

$$w_0 = w_0(x), \quad \psi_x = \psi_x(x).$$

Jak uvidíme níže, nosník, který budeme analyzovat, nebude stanoveným podmínkám plně vyhovovat. Přesto je však budeme považovat za platné, protože odlišnosti nebudou velké a chyba, které se dopustíme, nebude pro účely této práce podstatná.

2.2.2 Zadání konkrétního nosníku k analýze

Nyní ještě předem uvedeme konkrétní nosník, který budeme dále analyzovat, abychom se později mohli odkazovat na jeho geometrii a mechanické parametry. Pro každou teorii totiž budeme pro stejný nosník zavádět trochu odlišné souřadnice a čtenář by mohl nabýt dojmu, že řešíme různé vzorky. Nosič, který budeme později číselně řešit, je schematicky zobrazen níže:



Obr. 12: Schéma analyzovaného nosníku

Tabulka známých¹ parametrů:

Geometrie sendviče				
l [mm]	b [mm]	h [mm]	h ₁ [mm]	h ₂ [mm]
795	90	42,3	3,4	4,2
Materiál jádra a jeho mechanické vlastnosti				
materiál	E (v tahu) [MPa]	E (v tlaku) [MPa]	G [MPa]	
pěna Airex C70.55	45	69	22	
Materiál dolního potahu a jeho mechanické vlastnosti				
materiál	E (v tahu) [MPa]	ν [1]		

¹ Mechanické vlastnosti jádra byly odečteny z katalogu výrobce – viz elektronický katalog Airex C70 [8] Nutné podotknout, že se jedná o střední hodnoty! Ostatní parametry byly dodány vedoucím této práce ing. Ctiradem Novotným, který je znal z předchozích experimentů.

skelná rohož	22 139	0,18
Materiál horního potahu a jeho mechanické vlastnosti		
materiál	E (v tahu) [MPa]	ν [1]
skelná rohož	19 938	0,19

Tabulka I: Geometrické a mechanické parametry analyzovaného nosníku

2.2.3 Výpočet průhybu nosníku na dvou podporách zatíženého silou uprostřed pomocí laminátové teorie bez uvažování vlivu příčné smykové deformace

2.2.3.1 Odvození vztahu pro výpočet průhybu

Vzhledem k tomu, že nosník je namáhán pouze na ohyb a předpokládáme symetrický sendvič, přejde konstitutivní vztah Rovnice 2.1.1–21) do tvaru

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}.$$

Rovnice 2.2.3–1

Protože cílem je určit průhyb v závislosti na vnějším zatížení, tedy na momentu, budeme potřebovat inverzní vztah. Potřebujeme tedy z matice ohybové tuhosti sendviče D udělat matici ohybové poddajnosti, což provedeme inverzí podle známého vztahu z matematiky:

$$D_{ij}^* = D_{ij}^{-1} = \frac{(-1)^{i+j} |D_{ji}|}{|D|},$$

Rovnice 2.2.3–2

kde D_{ij}^* je člen matice inverzní k matici D , který leží na i -tém řádku v j -tém sloupci. $|D_{ji}|$ je subdeterminant, tedy determinant matice, která vznikne odstraněním j -tého řádku a i -tého sloupce původní matice D . $|D|$ je determinant matice D .

Získáme tedy vztah

$$\begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}^* & D_{12}^* & D_{16}^* \\ D_{21}^* & D_{22}^* & D_{26}^* \\ D_{61}^* & D_{62}^* & D_{66}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix},$$

Rovnice 2.2.3–3

který zjednodušíme pomocí podmínky III do tvaru

$$k_x = D_{11}^* M_x$$

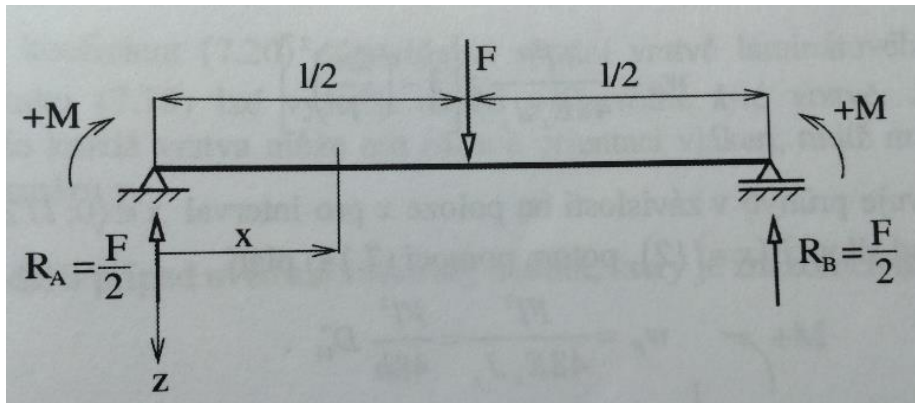
Rovnice 2.2.3–4

a pomocí výrazu Rovnice 2.1.1–11) pro křivost přepíšeme na:

$$\frac{d^2 w_0}{dx^2} = -D_{11}^* M_x,$$

Rovnice 2.2.3–5

což je pro nás výchozí rovnice pro výpočet průhybu nosníku podle laminátové teorie bez uvažování vlivu smykové deformace. Nyní je třeba vyšetřit průběh ohybového momentu po délce nosníku. Uvažujeme nosník dle následujícího schématu:



Obr. 13: Nosník na dvou podporách zatížený uprostřed osamělou silou

Při vyšetřování průběhu ohybového momentu zleva obdržíme:

$$M = R_A \cdot x = \frac{F}{2} x \quad \text{pro } x \in \langle 0; \frac{l}{2} \rangle.$$

Rovnice 2.2.3–6

Při postupu zprava bychom obdrželi to samé, což plyne i ze symetrie nosníku. Stačí tedy vyřešit průhyb pouze pro jeden interval.

Protože M_x je moment vztažený na jednotku šířky nosníku Rovnice 2.1.1–15), platí vztah

$$M_x = \frac{M}{b}.$$

Rovnice 2.2.3–7

Dosazením vztahů Rovnice 2.2.3–6) a Rovnice 2.2.3–7) do rovnice Rovnice 2.2.3–5) získáme:

$$\frac{d^2 w_0}{dx^2} = -\frac{D_{11}^* F}{2b} x.$$

Rovnice 2.2.3–8

K určení průhybu je třeba výraz Rovnice 2.2.3–8) dvakrát integrovat, tedy po první integraci

$$\int \frac{d^2 w_0}{dx^2} dx = \int -\frac{D_{11}^* F}{2b} x dx$$

Rovnice 2.2.3—9

získáme:

$$\frac{dw_0}{dx} = -\frac{D_{11}^* F}{2b} \frac{x^2}{2} + K_1$$

Rovnice 2.2.3—10

a po druhé integraci

$$\int \frac{dw_0}{dx} dx = \int \left(-\frac{D_{11}^* F}{2b} \frac{x^2}{2} + K_1 \right) dx$$

Rovnice 2.2.3—11

obdržíme:

$$w_0 = -\frac{D_{11}^* F}{2b} \frac{x^3}{6} + K_1 x + K_2 .$$

Rovnice 2.2.3—12

K určení konstant potřebujeme dvě okrajové podmínky. Víme, že v místě podpory bude nulový průhyb a že v místě extrému průhybové čáry bude nulové natočení. Extrém se pro tento jednoduchý případ nachází uprostřed nosníku. Dosadíme-li tedy

$$x = 0 ; w_0 = 0 ,$$

Rovnice 2.2.3—13

zjistíme, že $K_2 = 0$, a po dosazení

$$x = \frac{l}{2} ; \psi_x = \frac{dw_0}{dx} = 0$$

Rovnice 2.2.3—14

dostaneme, že

$$K_1 = D_{11}^* \frac{Fl^2}{16b} .$$

Rovnice 2.2.3—15

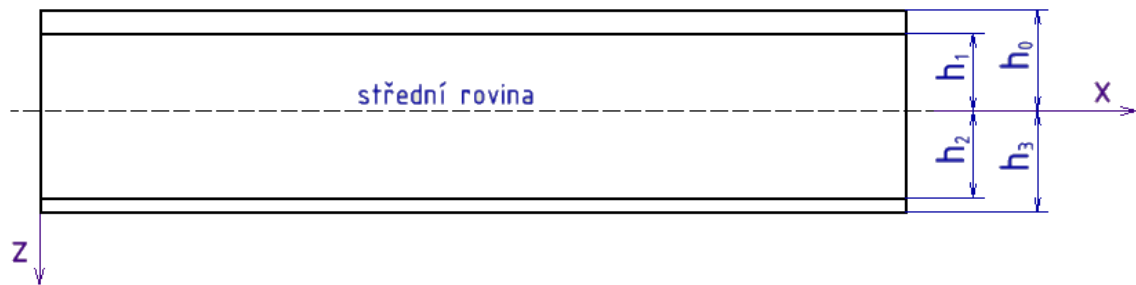
Výsledná funkce průhybu nosníku pro interval souřadnice $x \in \langle 0; \frac{l}{2} \rangle$ tedy po dosazení a úpravě vypadá takto:

$$w_0 = D_{11}^* \frac{F}{4b} x \left(\frac{l^2}{4} - \frac{x^2}{3} \right) .$$

Rovnice 2.2.3—16

2.2.3.2 Výpočet konstant tuhosti a poddajnosti

Nyní můžeme přistoupit k řešení zadaného nosníku. Protože k výpočtu užíváme laminátové teorie, je třeba na jádro a potahy sendviče nahlížet jako na vrstvy laminátové desky. V tomto případě se tedy jádro bude podílet na přenosu ohybového namáhání, což je třeba zahrnout do výpočtu. Dále je třeba se vypořádat s různými moduly pružnosti pro tah a pro tlak. Z teorie nosníků (Bernoulliho hypotéza) víme, že při prostém ohybu je část průřezu nosníku namáhána tahem a část tlakem. Tyto části od sebe odděluje mezní čára, tzv. neutrální osa, na které je napětí rovno nule. Pokud budeme předpokládat, že tato osa leží ve střední rovině řešeného nosníku, můžeme jádro fiktivně rozdělit na dvě vrstvy a jejich matice tuhosti řešit separátně, každou pro příslušný modul pružnosti. Pro náš případ bude část jádra nad střední rovinou namáhána tlakem a část pod střední rovinou tahem. Schéma nosníku v rovině xz pro výpočet konstant tuhosti tedy vypadá následovně:



Obr. 14: Schéma pro výpočet konstant tuhosti pro laminátovou teorii

Matice tuhosti jednotlivých vrstev určíme s využitím vztahů Rovnice 2.2.1–2), Rovnice 2.2.1–3), Rovnice 2.2.1–4) a s pomocí parametrů zadaného nosníku z Tabulka I. Matice tuhosti první vrstvy (horního potahu) se tedy vypočítá takto:

$$C^1 = \begin{bmatrix} C_{11}^1 & C_{12}^1 & C_{16}^1 \\ C_{21}^1 & C_{22}^1 & C_{26}^1 \\ C_{61}^1 & C_{62}^1 & C_{66}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^1 & C_{12}^1 & 0 \\ C_{21}^1 & C_{11}^1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} (C_{11}^1 - C_{12}^1) \end{bmatrix}$$

Rovnice 2.2.3–17

$$C_{11}^1 = \frac{E^1(1 - \nu^1)}{(1 + \nu^1)(1 - 2\nu^1)} = \frac{19\,938(1 - 0,2)}{(1 + 0,2)(1 - 2 \cdot 0,2)} = 21\,648,782 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$$

Rovnice 2.2.3–18

$$C_{12}^1 = C_{21}^1 = \frac{E^1\nu^1}{(1 + \nu^1)(1 - 2\nu^1)} = \frac{19\,938 \cdot 0,2}{(1 + 0,2)(1 - 2 \cdot 0,2)} = 4\,752,172 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$$

Rovnice 2.2.3–19

$$\frac{1}{2} (C_{11}^1 - C_{12}^1) = \frac{1}{2} (21\,648,782 - 4\,752,172) = 8\,448,305 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$$

Rovnice 2.2.3—20

$$C^1 = \begin{bmatrix} 21\,648,782 & 4\,752,172 & 0 \\ 4\,752,172 & 21\,648,782 & 0 \\ 0 & 0 & 8\,448,305 \end{bmatrix} \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}.$$

Rovnice 2.2.3—21

Výpočet matic ostatních vrstev se provede obdobně. Narazíme ovšem na jeden problém – neznáme totiž Poissonovo číslo materiálu jádra. Protože ale předpokládáme, že se jedná o izotropní materiál, můžeme ho přibližně vypočítat podle vztahu známého z teorie pružnosti do kterého dosadíme průměrnou hodnotu z modulu pružnosti jádra v tlaku a v tahu:

$$\frac{E}{G} = 2(1 + \nu) \rightarrow \nu = \frac{E_{tlak} + E_{tah}}{4 \cdot G} - 1.$$

Rovnice 2.2.3—22

Budeme tedy předpokládat, že hodnota Poissonova čísla jádra je

$$\nu^c = \frac{69 + 45}{4 \cdot 22} - 1 = 0,295.$$

Rovnice 2.2.3—23

Potom matice tuhosti druhé vrstvy sendviče (tlačené části jádra) vypadá takto:

$$C^2 = \begin{bmatrix} 91,619 & 38,337 & 0 \\ 38,337 & 91,619 & 0 \\ 0 & 0 & 26,641 \end{bmatrix} \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2},$$

Rovnice 2.2.3—24

matice tuhosti třetí vrstvy (tažené části jádra):

$$C^3 = \begin{bmatrix} 59,751 & 25,002 & 0 \\ 25,002 & 59,751 & 0 \\ 0 & 0 & 17,375 \end{bmatrix} \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}.$$

Rovnice 2.2.3—25

Je nutné poznamenat, že členy C_{44} , C_{55} a C_{66} ve vztahu Rovnice 2.2.1—2) jsou rovny modulu pružnosti ve smyku G . Nabízí se tedy otázka, zda by nebylo vhodnější za členy C_{66}^2 a C_{66}^3 ve vztazích Rovnice 2.2.3—24) a Rovnice 2.2.3—25) dosadit modul G udávaný výrobcem, namísto jejich výpočtu dle vztahu Rovnice 2.2.1—1). Vzhledem k tomu, že je ale vliv jádra na celkovou tuhost sendviče malý, bude způsobená chyba zanedbatelná.

Matice tuhosti čtvrté vrstvy (dolního potahu):

$$C^4 = \begin{bmatrix} 24\,038,639 & 5\,276,774 & 0 \\ 5\,276,774 & 24\,038,639 & 0 \\ 0 & 0 & 9\,380,932 \end{bmatrix} N \cdot mm^{-2}.$$

Rovnice 2.2.3–26

Známe-li tuhosti dílčích vrstev, můžeme vyšetřit matici ohybové tuhosti sendviče. Vztah Rovnice 2.1.1–24) přejde pro náš případ do tvaru

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^4 (C_{ij})_k (h_k^3 - h_{k-1}^3).$$

Rovnice 2.2.3–27

Souřadnice h_i dopočítáme z geometrických parametrů sendviče v Tabulka I:

$$h_0 = -\left(\frac{42,3 + 3,4 + 4,2}{2}\right) = -24,95 \text{ mm}$$

Rovnice 2.2.3–28

$$h_1 = -\left(\frac{42,3 + 3,4 + 4,2}{2}\right) + 4,2 = -20,75 \text{ mm}$$

Rovnice 2.2.3–29

$$h_2 = \left(\frac{42,3 + 3,4 + 4,2}{2}\right) - 3,4 = 21,55 \text{ mm}$$

Rovnice 2.2.3–30

$$h_3 = \left(\frac{42,3 + 3,4 + 4,2}{2}\right) = 24,95 \text{ mm}$$

Rovnice 2.2.3–31

První člen matice D tedy vypočítáme takto:

$$D_{11} = \frac{1}{3} [21\,648,782 \cdot (-20,75^3 + 24,95^3) + 91,619 \cdot (0 + 20,75^3) + 59,751 \cdot (21,55^3 - 0) + 24\,038,639 \cdot (24,95^3 - 21,55^3)] = 92\,339\,410 \text{ N} \cdot mm$$

Rovnice 2.2.3–32

Její ostatní členy dopočítáme obdobně. Výsledná matice ohybové tuhosti sendviče vypadá následovně:

$$D = \begin{bmatrix} 92\,339\,410 & 20\,363\,555 & 0 \\ 20\,363\,555 & 92\,339\,410 & 0 \\ 0 & 0 & 35\,987\,928 \end{bmatrix} N \cdot mm.$$

Rovnice 2.2.3–33

Nyní je zapotřebí provést ještě její inverzi, abychom získali potřebnou matici ohybové poddajnosti. S využitím vztahu Rovnice 2.2.3—2) vypočítáme její první člen takto:

$$D_{11}^* = \frac{(92\,339\,410 \cdot 35\,987\,928 - 0)}{2,9193019 \cdot 10^{23}} = 1,138 \cdot 10^{-8} \text{ N}^{-1} \cdot \text{mm}^{-1}.$$

Rovnice 2.2.3—34

Zbývající členy vyřešíme obdobně a získáme:

$$D^* = \begin{bmatrix} 1,138 \cdot 10^{-8} & -2,510 \cdot 10^{-9} & 0 \\ -2,510 \cdot 10^{-9} & 1,138 \cdot 10^{-8} & 0 \\ 0 & 0 & 2,779 \cdot 10^{-8} \end{bmatrix} \text{ N}^{-1} \cdot \text{mm}^{-1}.$$

Rovnice 2.2.3—35

Matice tuhostí jednotlivých vrstev C^k , matice ohybové tuhosti D a její inverzní matice D^* jsou jedinými materiálovými parametry, které je potřeba pro nosník ohýbaný za stanovených podmínek určit pro vyšetření napětí, deformací a posuvů. Zbytek závisí na zatížení a na konfiguraci úlohy.

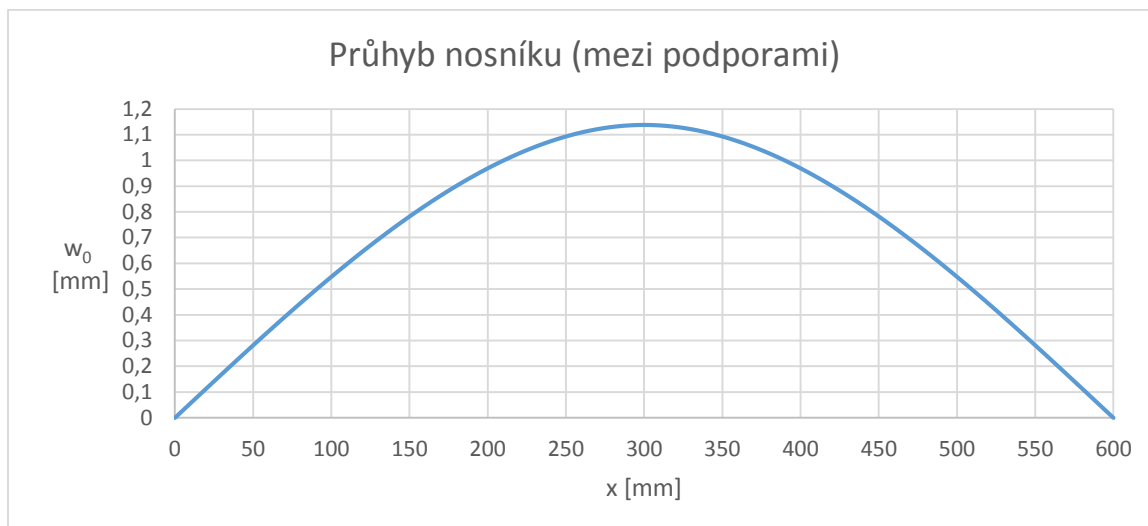
2.2.3.3 Deformační analýza zadaného nosníku

Vyšetřeme tedy nyní průhyb zadaného nosníku pod silou F . Protože v této práci nebudeme řešit mezní stavy pevnosti, schválně zvolíme velikost zatěžovací síly tak, aby deformace nosníku byla vratná. Stanovíme tedy:

$$F = 2000 \text{ N}, \quad l = 600 \text{ mm},$$

kde l je vzdálenost podpor.

S využitím vztahu Rovnice 2.2.3—16) můžeme určit průhyb w_0 v libovolném místě mezi podporami nosníku. Pro stanovené hodnoty l a F je průhybová čára zobrazena na následujícím grafu:



Obr. 15: Průhyb nosníku podle laminátové teorie bez vlivu smyku

Nejčastěji budeme pravděpodobně potřebovat znát maximální průhyb, který je v tomto případě uprostřed nosníku, tedy pro $x = \frac{l}{2}$. Dosazením do rovnice Rovnice 2.2.3–16) dostaneme výraz pro jeho výpočet:

$$w_{0max} = \frac{Fl^3}{48b} D_{11}^* .$$

Rovnice 2.2.3–36

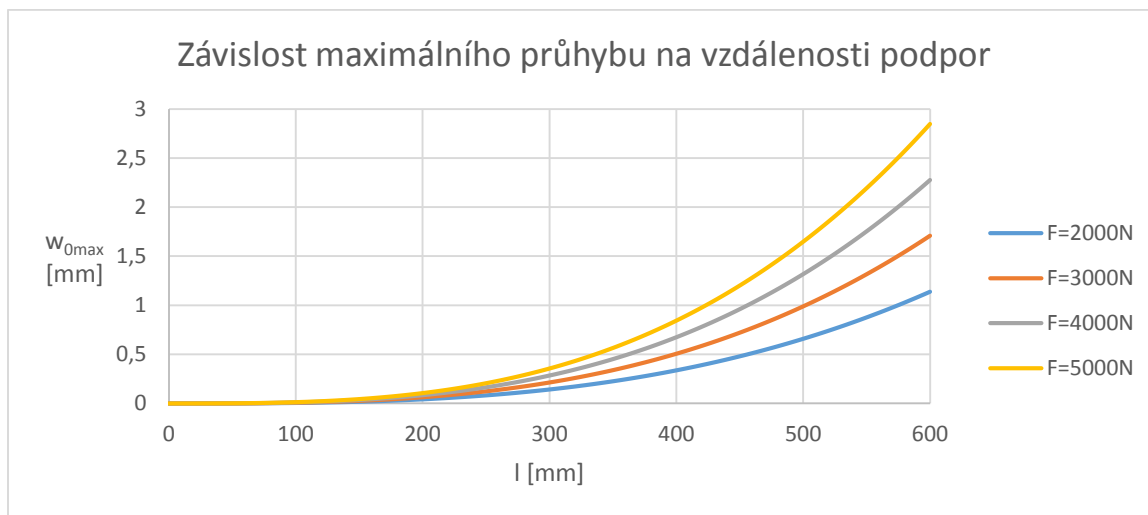
Dosazením stanovených hodnot l a F a ostatních parametrů získáme:

$$w_{0max} = \frac{2000 \cdot 600^3}{48 \cdot 90} \cdot 1,138 \cdot 10^{-8} = 1,138 \text{ mm} ,$$

Rovnice 2.2.3–37

což je maximální průhyb zadaného sendvičového nosníku pro danou sílu a konfiguraci úlohy spočítaný podle laminátové teorie bez uvažování vlivu příčné smykové deformace.

Dále může být zajímavé zjistit, jak se bude maximální průhyb měnit při změně vzdálenosti podpor. Vyjdeme tedy z rovnice Rovnice 2.2.3–36), kam budeme dosazovat hodnoty z intervalu $l \in (0; 600)$. Pro zajímavost závislost vyneseme pro čtyři různé hodnoty síly F .



Obr. 16: Závislost maximálního průhybu na vzdálenosti podpor nosníku

Z grafu je patrné, že průhyb v daném rozsahu vzdáleností podpor začne významně rychle narůstat pro $l = 300 \text{ mm}$. Při konkrétních omezujících podmínkách pro průhyb vyplývajících z aplikace nosníku v praxi by takovýto graf mohl být podkladem pro výběr z různých variant sendvičů. Je nutné poznamenat, že pro malou vzdálenost podpor bude výsledek pravděpodobně znehodnocen zanedbáním smykových účinků. Vlivem smyku se budeme zabývat v následující části.

2.2.4 Výpočet průhybu nosníku na dvou podporách zatíženého silou uprostřed pomocí laminátové teorie s uvažováním vlivu příčné smykové deformace

2.2.4.1 Odvození vztahu pro výpočet průhybu

Nyní vyjdeme z konstitutivního vztahu (Rovnice 2.1.2–11), který obdobným způsobem jako v předchozí kapitole upravíme na:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}$$

Rovnice 2.2.4–1

a

$$\begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{44} & F_{45} \\ F_{54} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^\circ \\ \gamma_{zx}^\circ \end{bmatrix}$$

Rovnice 2.2.4–2

Opět budeme potřebovat inverzní vztahy, tedy:

$$\begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}^* & D_{12}^* & D_{16}^* \\ D_{21}^* & D_{22}^* & D_{26}^* \\ D_{61}^* & D_{62}^* & D_{66}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix}$$

Rovnice 2.2.4—3

a

$$\begin{bmatrix} \gamma_{yz}^\circ \\ \gamma_{zx}^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{44}^* & F_{45}^* \\ F_{54}^* & F_{55}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix}.$$

Rovnice 2.2.4—4

Výpočet prvků inverzních matic se opět provede pomocí vztahu Rovnice 2.2.3—2).

V předcházející kapitole bylo odvození jednodušší, protože se jednalo o prostý ohyb a křivost byla přímo druhou derivací průhybu. Nyní si budeme muset pomoci ještě rovnicemi Rovnice 2.1.2—15) a Rovnice 2.1.2—16), které pomocí III. podmínky zjednodušíme na:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0,$$

Rovnice 2.2.4—5

$$Q_y = 0.$$

Rovnice 2.2.4—6

Pomocí III. podmínky, rovnice (Rovnice 2.2.4—6) a rovnice Rovnice 2.1.2—2) dále zjednodušíme vztahy Rovnice 2.2.4—3) a (Rovnice 2.2.4—4) do tvaru

$$k_x = D_{11}^* M_x$$

Rovnice 2.2.4—7

a

$$\gamma_{zx}^\circ = F_{55}^* Q_x.$$

Rovnice 2.2.4—8

Protože jsou funkce ψ_x a w_0 závislé pouze na souřadnici x , parciální derivace v rovnici Rovnice 2.2.4—5) a ve vztazích Rovnice 2.1.2—5) a Rovnice 2.1.2—3) definujících k_x a γ_{zx}° nahradí obyčejná derivace. Vztahy Rovnice 2.2.4—7) a Rovnice 2.2.4—8) a tedy přepíšeme do tvaru

$$-\frac{d\psi_x}{dx} = D_{11}^* M_x$$

Rovnice 2.2.4—9

a

$$\frac{dw_0}{dx} - \psi_x = F_{55}^* Q_x .$$

Rovnice 2.2.4—10

Máme tedy tři rovnice pro tři neznámé – vztahy Rovnice 2.2.4—5), Rovnice 2.2.4—9) a Rovnice 2.2.4—10).

Za předpokladu znalosti momentu pak můžeme pomocí vztahu Rovnice 2.2.4—9) vyšetřit funkci natočení.

Dosadíme-li rovnici Rovnice 2.2.4—10) do Rovnice 2.2.4—5), získáme:

$$\frac{dM_x}{dx} = \frac{1}{F_{55}^*} \left(\frac{dw_0}{dx} - \psi_x \right),$$

Rovnice 2.2.4—11

což je rovnice, pomocí které určíme funkci průhybu.

Uvažujme nyní opět jako v předchozí kapitole nosník na dvou podporách zatížený silou F uprostřed. Víme, že

$$M = R_A \cdot x = \frac{F}{2} x \quad \text{pro } x \in \langle 0; \frac{l}{2} \rangle$$

Rovnice 2.2.4—12

a

$$M_x = \frac{M}{b} .$$

Rovnice 2.2.4—13

Dosazením do rovnice Rovnice 2.2.4—9) a po integraci dostaneme:

$$\psi_x = -D_{11}^* \frac{F}{4b} x^2 + K_1 .$$

Rovnice 2.2.4—14

Z okrajové podmínky

$$x = \frac{l}{2} ; \psi_x = 0$$

Rovnice 2.2.4—15

určíme:

$$K_1 = D_{11}^* \frac{Fl^2}{16b} .$$

Rovnice 2.2.4—16

Po dosazení Rovnice 2.2.4—16) do Rovnice 2.2.4—14) a po úpravě získáme funkci natočení:

$$\psi_x = D_{11}^* \frac{F}{4b} \left(\frac{l^2}{4} - x^2 \right).$$

Rovnice 2.2.4—17

Zbývá stanovit funkci průhybu. Dosazením vztahů Rovnice 2.2.4—13) a Rovnice 2.2.4—17) do Rovnice 2.2.4—11) a po úpravě dostaneme:

$$\frac{dw_0}{dx} = F_{55}^* \frac{F}{2b} + D_{11}^* \frac{F}{4b} \left(\frac{l^2}{4} - x^2 \right).$$

Rovnice 2.2.4—18

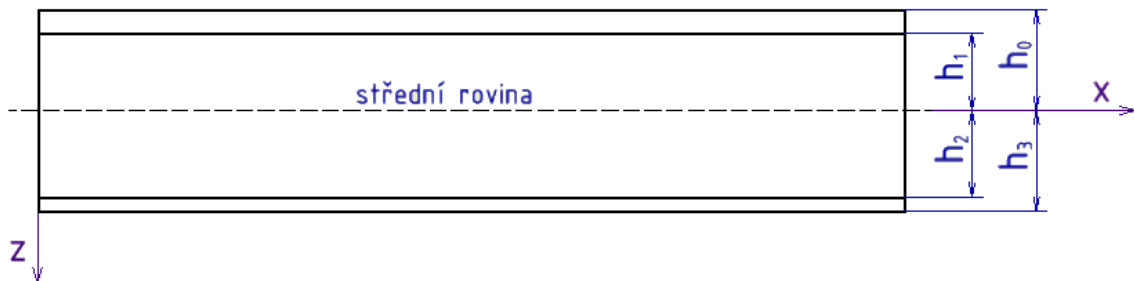
Po integraci a eliminaci vzniklé konstanty podmínkou nulového průhybu v místě podpory získáme funkci průhybu ve tvaru

$$w_0 = F_{55}^* \frac{F}{2b} x + D_{11}^* \frac{F}{4b} x \left(\frac{l^2}{4} - \frac{x^2}{3} \right) \text{ pro } x \in \langle 0; \frac{l}{2} \rangle.$$

Rovnice 2.2.4—19

2.2.4.2 Výpočet konstant tuhosti a poddajnosti

Nyní můžeme přistoupit k řešení zadaného nosníku. Schéma pro výpočet konstant tuhosti bude stejné, jako při použití laminátové teorie bez vlivu smyku. Pro přehlednost si ho uvedeme ještě jednou:



Obr. 17: Schéma pro výpočet konstant tuhosti pro laminátovou teorii

$$h_0 = -24,95 \text{ mm} ; h_1 = -20,75 \text{ mm} ; h_2 = 21,55 \text{ mm} ; h_3 = 24,95 \text{ mm}$$

Matici ohybové poddajnosti D^* už jsme vyřešili v předcházející kapitole a můžeme ji použít i nyní:

$$D^* = \begin{bmatrix} 1,138 \cdot 10^{-8} & -2,510 \cdot 10^{-9} & 0 \\ -2,510 \cdot 10^{-9} & 1,138 \cdot 10^{-8} & 0 \\ 0 & 0 & 2,779 \cdot 10^{-8} \end{bmatrix} N^{-1} \cdot mm^{-1}.$$

Rovnice 2.2.4—20

Zbývá vyšetřit smykové konstanty. Pro matici smykové tuhosti první vrstvy (horního potahu) při použití vztahu Rovnice 2.2.1—2) platí:

$$C^1 = \begin{bmatrix} C_{44}^1 & C_{45}^1 \\ C_{54}^1 & C_{54}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (C_{11}^1 - C_{12}^1) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} (C_{11}^1 - C_{12}^1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G^1 & 0 \\ 0 & G^1 \end{bmatrix}.$$

Rovnice 2.2.4—21

Modul pružnosti ve smyku horního potahu už máme vyřešený (člen C_{66}^1 v rovnici Rovnice 2.2.3—21)). Po jeho dosazení tedy získáme:

$$C^1 = \begin{bmatrix} 8\,448,305 & 0 \\ 0 & 8\,448,305 \end{bmatrix} N \cdot mm^{-2}.$$

Rovnice 2.2.4—22

Matice ostatních vrstev určíme obdobně. Smykový modul G jádra nyní dosadíme z Tabulka I. Obdržíme:

$$C^2 = C^3 = \begin{bmatrix} 22 & 0 \\ 0 & 22 \end{bmatrix} N \cdot mm^{-2}.$$

Rovnice 2.2.4—23

Matice smykové tuhosti čtvrté vrstvy (dolního potahu) sestavíme rovněž s využitím již dříve vypočítaného modulu (člen C_{66}^4 v rovnici Rovnice 2.2.3—26)):

$$C^4 = \begin{bmatrix} 9\,380,932 & 0 \\ 0 & 9\,380,932 \end{bmatrix} N \cdot mm^{-2}.$$

Rovnice 2.2.4—24

Rovnice Rovnice 2.1.2—10) přejde pro náš případ do tvaru

$$F_{ij} = \sum_{k=1}^4 (h_k - h_{k-1}) (C_{ij})_k.$$

Rovnice 2.2.4—25

První člen matice smykové tuhosti sendviče F tedy vypočítáme takto:

$$F_{11} = (-20,75 + 24,95) \cdot 8\,448,305 + (0 + 20,75) \cdot 22 + (21,55 - 0) \cdot 22 + (24,95 - 21,55) \cdot 9\,380,932 = 68\,308,651 N \cdot mm^{-1}.$$

Rovnice 2.2.4—26

Další členy určíme obdobně. Výsledná matice smykové tuhosti řešeného sendviče tedy vypadá takto:

$$F = \begin{bmatrix} 68\,308,651 & 0 \\ 0 & 68\,308,651 \end{bmatrix} N \cdot mm^{-1}.$$

Rovnice 2.2.4—27

Matice smykové poddajnosti určíme opět s pomocí rovnice Rovnice 2.2.3—2). Dostaneme:

$$F^* = \begin{bmatrix} 1,464 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 1,464 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} N^{-1} \cdot mm.$$

Rovnice 2.2.4–28

Je zřejmé, že při výpočtu matice F pro izotropní materiál stačí znát pro každou vrstvu jenom jednu konstantu tuhosti, tedy modul pružnosti ve smyku. Předcházející výpočet matic byl uveden jako demonstrace obecného postupu řešení. Vztah Rovnice 2.2.4–25) lze v tomto případě přepsat na:

$$F_{44} = F_{55} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) G_k; F_{45} = F_{54} = 0$$

Rovnice 2.2.4–29

Rovněž pak výpočet členů inverzní matice F^* stačí provést jednoduše dle vztahu

$$F_{44}^* = F_{55}^* = F_{44}^{-1} = F_{55}^{-1}; F_{45}^* = F_{54}^* = 0.$$

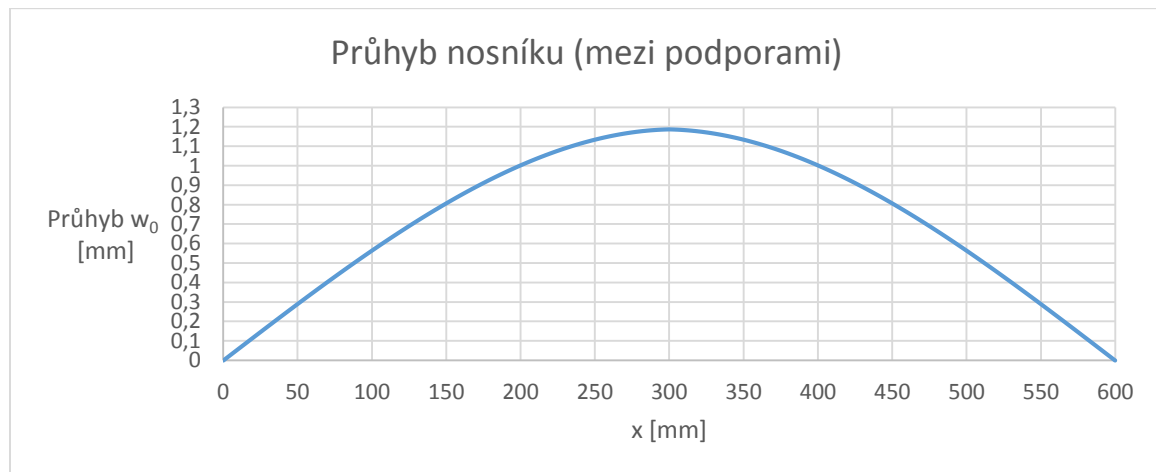
Rovnice 2.2.4–30

2.2.4.3 Deformační analýza zadaného nosníku

Nyní tedy máme vše, co potřebujeme vědět k určení průhybu nosníku. Stanovme opět zatěžovací sílu a vzdálenost podpor na:

$$F = 2\,000\, N, \quad l = 600\, mm.$$

Průhyb v libovolném místě mezi podporami můžeme určit pomocí rovnice Rovnice 2.2.4–19). Průhybová čára se oproti grafu z předcházející kapitoly příliš nezmění:



Obr. 18: Průhyb nosníku podle laminátové teorie s vlivem smyku

Budeme se opět zajímat o maximální hodnotu, dosadíme tedy $x = \frac{l}{2}$. Obdržíme:

$$w_{0max} = F_{55}^* \frac{Fl}{4b} + D_{11}^* \frac{Fl^3}{48b}.$$

Rovnice 2.2.4–31

Dosažením stanovených hodnot F a l a ostatních parametrů získáme:

$$w_{0max} = 1,464 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{2\,000 \cdot 600}{4 \cdot 90} + 1,138 \cdot 10^{-8} \frac{2\,000 \cdot 600^3}{48 \cdot 90} = 1,187 \text{ mm} ,$$

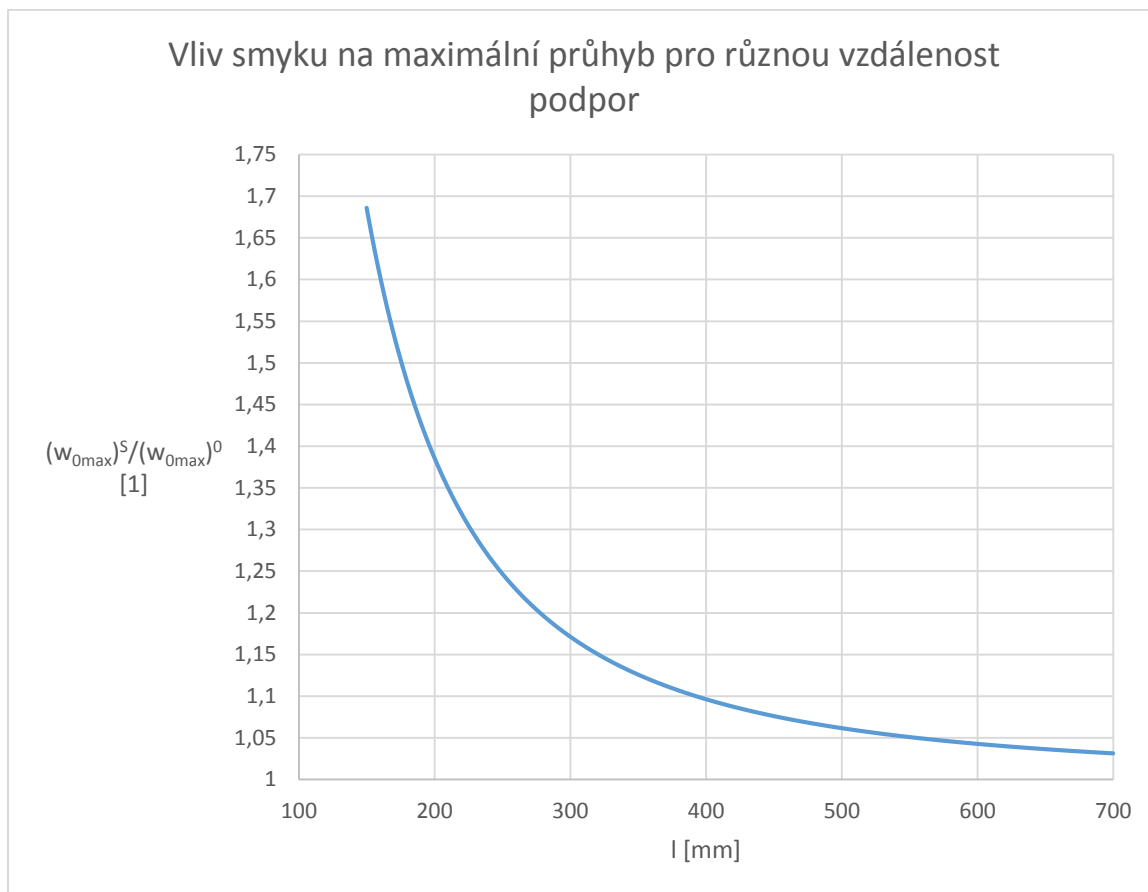
Rovnice 2.2.4—32

což je maximální průhyb zadaného sendvičového nosníku pro danou sílu a konfiguraci úlohy spočítaný podle laminátové teorie s uvažováním vlivu příčné smykové deformace.

Vykreslením závislosti maximálního průhybu na vzdálenosti podpor nosníku bychom v zásadě nezjistili nic nového, křivky by vypadaly téměř stejně jako v grafech z předcházející kapitoly. Daleko zajímavější bude graficky ukázat vliv smyku na maximální průhyb pro různé hodnoty vzdálenosti podpor.

Ze srovnání vztahů Rovnice 2.2.3—36) a Rovnice 2.2.4—31) vyplývá, že první člen součtu na pravé straně rovnice Rovnice 2.2.4—31) představuje část průhybu vyvolanou příčným smykem, která poroste s první mocninou délky l , tedy citelně pomaleji než druhá část, která roste se třetí mocninou této délky. Vliv smyku tedy bude podstatný pro krátké nosníky.

Označme tedy nyní maximální průhyb zadaného nosníku řešeného podle laminátové teorie bez uvažování vlivu příčného smyku (Rovnice 2.2.3—36) jako $(w_{0max})^0$ a maximální průhyb řešený s vlivem smyku (Rovnice 2.2.4—31) jako $(w_{0max})^S$ a vynesme jejich poměr v závislosti na vzdálenosti podpor do grafu.



Obr. 19: Vliv smyku na maximální průhyb u laminátové teorie v závislosti na vzdálenosti podpor

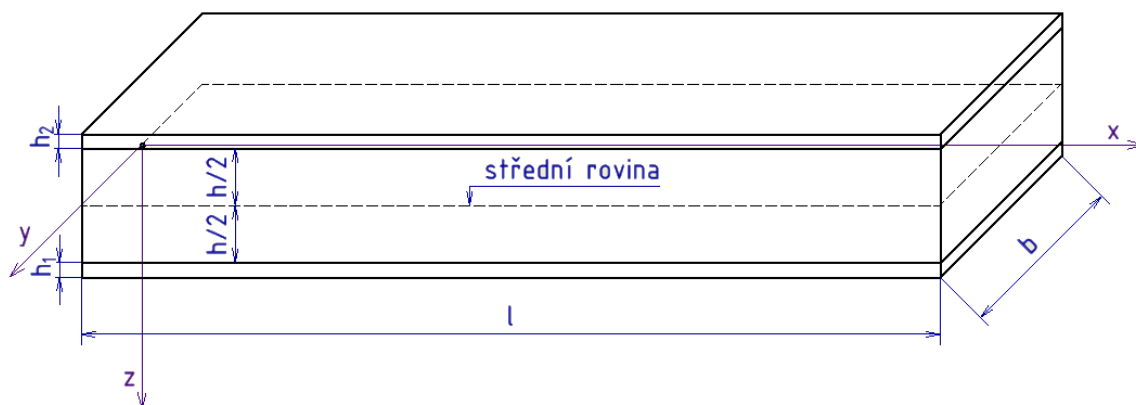
Z grafu lze vyčíst, o kolik procent se bude pro jakou vzdálenost podpor lišit výsledný maximální průhyb, zanedbáme-li vliv smyku. Stanovíme-li si tedy například maximální přípustnou relativní chybu na 5 %, zjistíme, že pro výpočet tohoto nosníku podle laminátové teorie se zanedbáním vlivu příčného smyku musí být podpory od sebe vzdáleny minimálně 600 milimetrů. Pro všechny menší vzdálenosti je třeba užít teorie, která vliv příčné smykové deformace započítává.

2.2.5 Výpočet průhybu nosníku na dvou podporách zatíženého silou uprostřed pomocí sendvičové teorie s uvažováním vlivu příčné smykové deformace

Srovnáním konstitutivního vztahu pro výpočet desky podle sendvičové teorie s uvažováním vlivu příčného smyku Rovnice 2.1.3–25) a konstitutivního vztahu pro laminátovou teorii s uvažováním vlivu příčného smyku Rovnice 2.1.2–11) zjistíme, že jsou si velice podobné. Hlavní rozdíl je ve výpočtu členů celkové matice tuhosti. K výpočtu průhybu zadaného nosníku tedy bude stačit přepočítat jeho matici ohybové poddajnosti D^* , která bude nyní závislá pouze na parametrech potahů, a matici smykové poddajnosti F^* , jejíž členy budou závislé pouze na parametrech jádra. Ostatní potřebné vztahy můžeme převzít z předcházející kapitoly.

2.2.5.1 Výpočet konstant tuhosti a poddajnosti

Schéma pro výpočet konstant tuhosti bude nyní vypadat jinak. Vzhledem k použité teorii bude vhodnější umístit střední rovinu do středu jádra:



Obr. 20: Schéma pro výpočet konstant tuhosti pro sendvičovou teorii

Hodnoty potřebných parametrů vyčteme z Tabulka I, tedy:

$$h = 42,3 \text{ mm} ; h_1 = 3,4 \text{ mm} ; h_2 = 4,2 \text{ mm} .$$

Matici tuhosti horního potahu už máme vypočítanou Rovnice 2.2.3—21), označíme ji ale indexem 2 s ohledem na indexování použité v teorii sendvičové desky:

$$C^2 = \begin{bmatrix} 21\,648,782 & 4\,752,172 & 0 \\ 4\,752,172 & 21\,648,782 & 0 \\ 0 & 0 & 8\,448,305 \end{bmatrix} N \cdot mm^{-2} .$$

Rovnice 2.2.5—1

Rovněž použijeme už vypočítanou matici tuhosti dolního potahu Rovnice 2.2.3—26) a označíme ji indexem 1:

$$C^1 = \begin{bmatrix} 24\,038,639 & 5\,276,774 & 0 \\ 5\,276,774 & 24\,038,639 & 0 \\ 0 & 0 & 9\,380,932 \end{bmatrix} N \cdot mm^{-2} .$$

Rovnice 2.2.5—2

Vztahy Rovnice 2.1.3—36) a Rovnice 2.1.3—37) přejdou pro náš případ do tvaru

$$D_{ij}^2 = -\frac{h}{4} C_{ij}^2 \left(\left(-\frac{h}{2} \right)^2 - \left(-\frac{h}{2} - h_2 \right)^2 \right) .$$

Rovnice 2.2.5—3

$$D_{ij}^1 = \frac{h}{4} C_{ij}^1 \left(\left(\frac{h}{2} + h_1 \right)^2 - \left(\frac{h}{2} \right)^2 \right),$$

Rovnice 2.2.5—4

Matice ohybové tuhosti horního a dolního potahu tedy vypadají následovně:

$$D^2 = \begin{bmatrix} 44\,711\,175 & 9\,814\,648 & 0 \\ 9\,814\,648 & 44\,711\,175 & 0 \\ 0 & 0 & 17\,448\,263 \end{bmatrix} N \cdot mm,$$

Rovnice 2.2.5—5

$$D^1 = \begin{bmatrix} 39\,498\,933 & 8\,670\,497 & 0 \\ 8\,670\,497 & 39\,498\,933 & 0 \\ 0 & 0 & 15\,414\,218 \end{bmatrix} N \cdot mm.$$

Rovnice 2.2.5—6

Matice ohybové tuhosti sendviče určíme podle vztahu Rovnice 2.1.3—35) jako

$$D = \begin{bmatrix} 84\,210\,108 & 18\,485\,145 & 0 \\ 18\,485\,145 & 84\,210\,108 & 0 \\ 0 & 0 & 32\,862\,481 \end{bmatrix} N \cdot mm.$$

Rovnice 2.2.5—7

Matici ohybové poddajnosti sendviče vypočítáme podle vztahu Rovnice 2.2.3—2). Získáme:

$$D^* = \begin{bmatrix} 1,248 \cdot 10^{-8} & -2,739 \cdot 10^{-9} & 0 \\ -2,739 \cdot 10^{-9} & 1,248 \cdot 10^{-8} & 0 \\ 0 & 0 & 3,043 \cdot 10^{-8} \end{bmatrix} N^{-1} \cdot mm^{-1}.$$

Rovnice 2.2.5—8

Zbývá vyšetřit smykovou tuhost a poddajnost. K určení matice smykových konstant jádra využijeme moduly pružnosti ve smyku z Tabulka I. Dostaneme:

$$C^c = \begin{bmatrix} 22 & 0 \\ 0 & 22 \end{bmatrix} MPa.$$

Rovnice 2.2.5—9

Vztah Rovnice 2.1.3—38) přejde pro náš případ do tvaru

$$F_{ij} = h C_{ij}^c.$$

Rovnice 2.2.5—10

S jeho využitím vypočítáme matici smykové tuhosti sendviče jako

$$F = \begin{bmatrix} 930,6 & 0 \\ 0 & 930,6 \end{bmatrix} N \cdot mm^{-1}.$$

Rovnice 2.2.5—11

Členy matice smykové poddajnosti se v tomto případě určí jednoduše převrácením hodnot členů matice tuhosti. Získáme tedy:

$$F^* = \begin{bmatrix} 107,458 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 107,458 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} N^{-1} \cdot mm.$$

Rovnice 2.2.5—12

2.2.5.2 Deformační analýza zadaného nosníku

Jak bylo řečeno, pro výpočet průhybu můžeme použít rovnici (Rovnice 2.2.4—19), pro přehlednost ji zde znovu uvedeme:

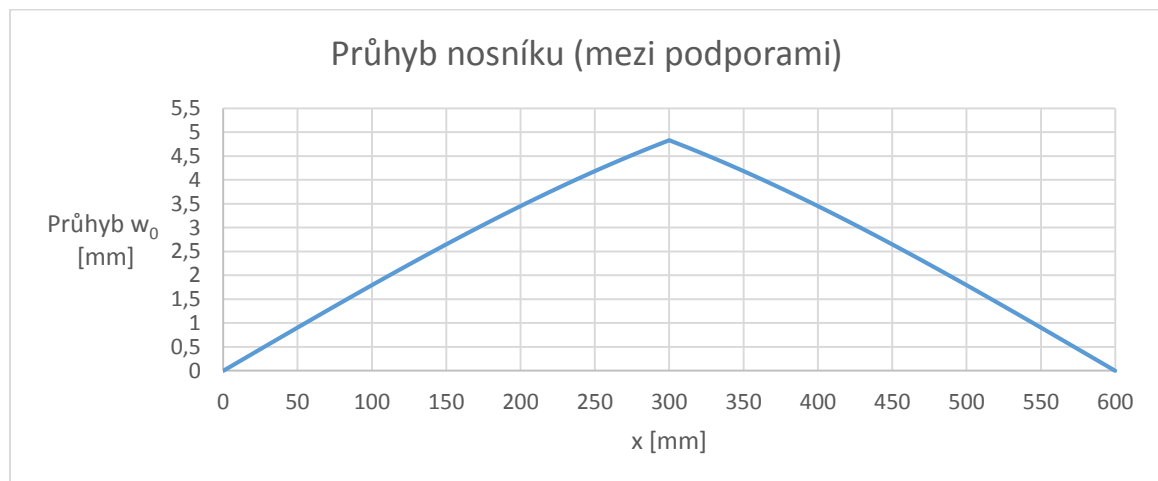
$$w_0 = F_{55}^* \frac{F}{2b} x + D_{11}^* \frac{F}{4b} x \left(\frac{l^2}{4} - \frac{x^2}{3} \right) \text{ pro } x \in \left\langle 0; \frac{l}{2} \right\rangle.$$

Rovnice 2.2.5—13

Stanovíme-li tedy stejnou zatěžovací sílu a vzdálenost podpor nosníku jako dříve, tedy

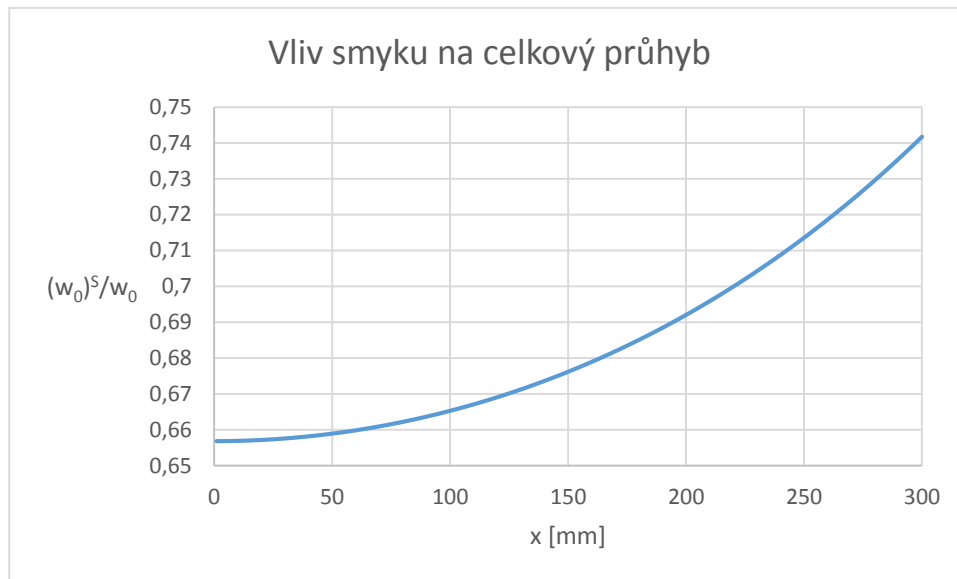
$$F = 2\,000\,N, \quad l = 600\,mm,$$

bude průhybová křivka zadaného nosníku vypadat následovně:



Obr. 21: Průhyb nosníku podle sendvičové teorie s vlivem smyku

Z grafu jsou patrné dvě věci. Za prvé je vidět, že hodnoty průhybu zadaného nosníku jsou při použití sendvičové teorie s vlivem příčného smyku v jádře citelně větší než při použití laminátové teorie s vlivem smyku i bez něj. Zatím z toho můžeme vyvodit pouze závěr, že volba teorie bude pro správný výpočet velmi důležitá. S dalším hodnocením počkáme, co ukáže experiment. Za druhé je potom jasně vidět zešpičatění průhybové křivky nosníku oproti křivkám získaným laminátovou teorií, což bude způsobeno daleko větším vlivem složky průhybu vyvolané smykem na celkový průhyb při dané vzdálenosti podpor. Ověřme toto tvrzení graficky:



Obr. 22: Vliv smyku na celkový průhyb

Označení w_0 je celkový průhyb, $(w_0)^S$ představuje složku průhybu vyvolanou příčným smykem jádra (první člen na pravé straně rovnice Rovnice 2.2.5–13)) pro zadaný nosník. Z grafu je patrné, že uprostřed nosníku představuje tato složka více než 70 % celkové hodnoty průhybu! Podle sendvičové teorie má tedy pro výpočet průhybu klíčový význam, na rozdíl od laminátové teorie, kde její vliv činí méně než 5 %, jak můžeme pro vzdálenost podpor 600 milimetrů vyčíst z grafu (Obr. 19).

Nyní ještě vypočítáme maximální průhyb. Využijeme k tomu vztah Rovnice 2.2.4–31):

$$w_{0max} = F_{55}^* \frac{Fl}{4b} + D_{11}^* \frac{Fl^3}{48b}.$$

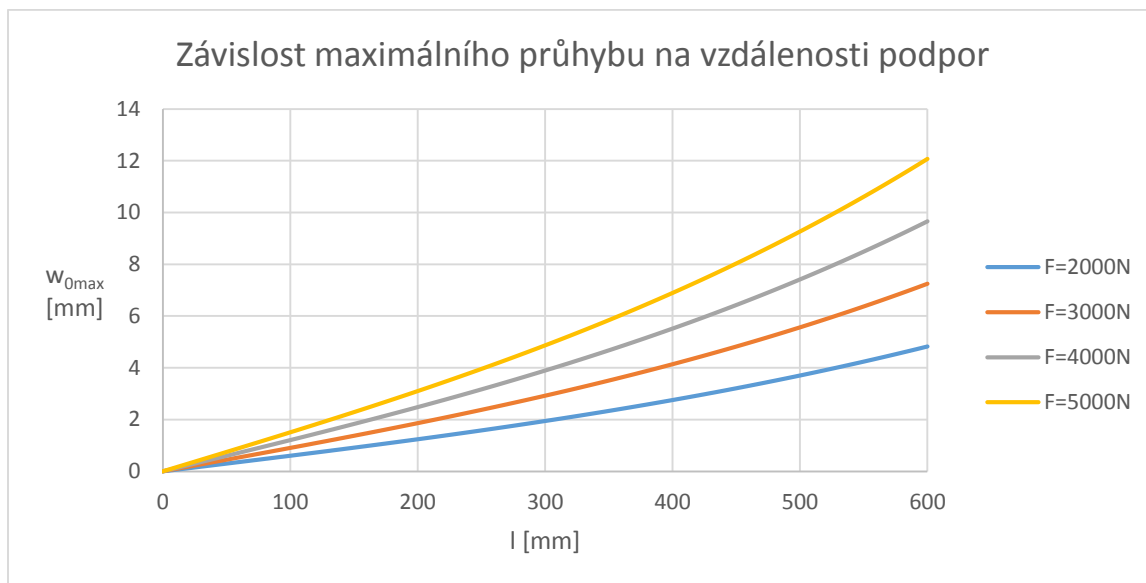
Rovnice 2.2.5–14

Maximální průhyb zadaného nosníku podle sendvičové teorie s uvažováním příčné smykové deformace pro dané zatížení a konfiguraci úlohy tedy spočítáme jako

$$w_{0max} = 107,458 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{2\,000 \cdot 600}{4 \cdot 90} + 1,248 \cdot 10^{-8} \frac{2\,000 \cdot 600^3}{48 \cdot 90} = 4,830 \text{ mm}.$$

Rovnice 2.2.5–15

Ukažme si ještě, jak se bude měnit maximální průhyb nosníku pro různé vzdálenosti podpor a pro různé síly:



Obr. 23: Závislost maximálního průhybu na vzdálenosti podpor

Vzhledem k tomu, že podle sendvičové teorie převládá nad složkou průhybu vyvolanou ohybovým namáháním složka průhybu vyvolaná smykovým namáháním a ta narůstá s první mocninou délky l podpor, je vidět, že závislost v grafu je na daném rozsahu téměř lineární. Na rozdíl od výpočtu podle laminátové teorie tedy nezaznamenáme na daném rozsahu žádnou přelomovou vzdálenost, od které by se hodnoty průhybů měnily rychleji.

2.2.6 Výpočet průhybu nosníku na dvou podporách zatíženého silou uprostřed pomocí sendvičové teorie bez uvažování vlivu příčné smykové deformace

Jak již bylo řečeno, dle sendvičové teorie se jádro účastní přenosu zatížení pouze smykem. Zanedbáme-li tedy vliv smyku, předpokládáme vlastně, že mezi potahy není žádný materiál (čistě teoreticky). Matice smykové tuhosti F sendviče a tedy i její inverze F^* pak budou nulové, matici ohybové poddajnosti D^* můžeme použít z předcházející kapitoly. Stejným postupem jako u sendvičové desky bychom zjistili, že ostatní potřebné vztahy můžeme převzít z ohybu nosníku podle laminátové teorie bez uvažování vlivu příčné smykové deformace.

2.2.6.1 Deformační analýza zadaného nosníku

Pro výpočet průhybu zadaného nosníku tedy použijeme rovnici Rovnice 2.2.3—16):

$$w_0 = D_{11}^* \frac{F}{4b} x \left(\frac{l^2}{4} - \frac{x^2}{3} \right).$$

Rovnice 2.2.6—1

Konstantu D_{11}^* převezmeme ze vztahu Rovnice 2.2.5—8):

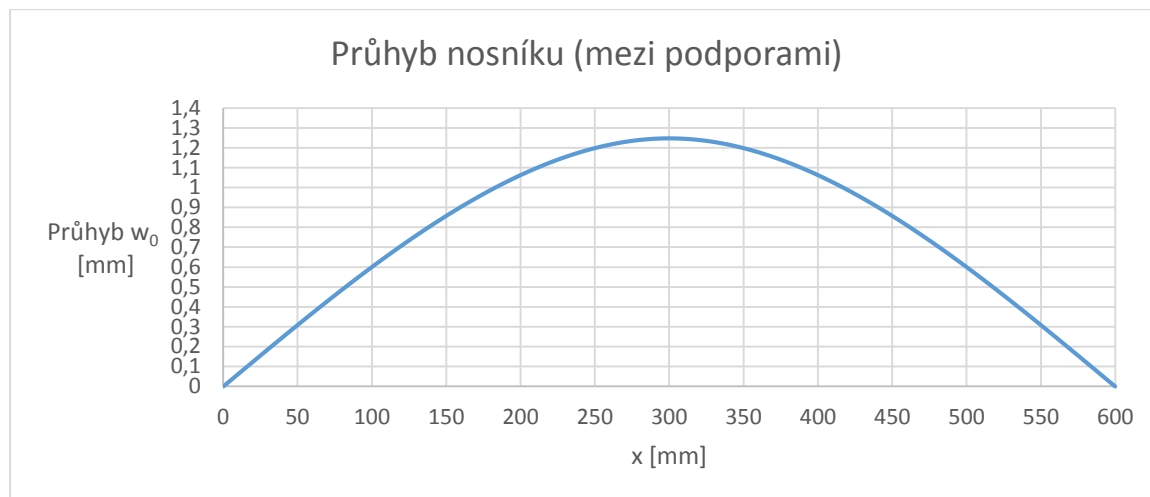
$$D_{11}^* = 1,248 \cdot 10^{-8} \text{ N}^{-1} \cdot \text{mm}^{-1} .$$

Rovnice 2.2.6—2

Zatěžovací sílu a vzdálenost podpor opět stanovíme na

$$F = 2\,000 \text{ N} , \quad l = 600 \text{ mm} .$$

Průhybová čára zadaného nosníku pak vypadá následovně:



Obr. 24: Průhyb nosníku podle sendvičové teorie bez vlivu smyku

Srovnáním s průhybem, který jsme získali pomocí obou laminátových teorií, zjistíme, že se výsledek příliš neliší. Je to dáno zásadně odlišnými materiálovými parametry potahů a jádra. Protože jsou moduly pružnosti v tahu (tlaku) a ve smyku jádra o tři řády nižší než moduly potahů, nemá jádro na matici ohybové tuhosti D ani na matici smykové tuhosti F při jejich výpočtu podle laminátové teorie přílišný vliv. Když tedy v sendvičové teorii vliv jádra úplně zanedbáme, čímž tvrdíme, že veškeré zatížení přenášejí potahy, přiblížíme se tak vlastně řešení podle laminátové teorie.

Maximální průhyb vypočítáme podle vztahu Rovnice 2.2.3—36):

$$w_{0max} = \frac{Fl^3}{48b} D_{11}^* .$$

Rovnice 2.2.6—3

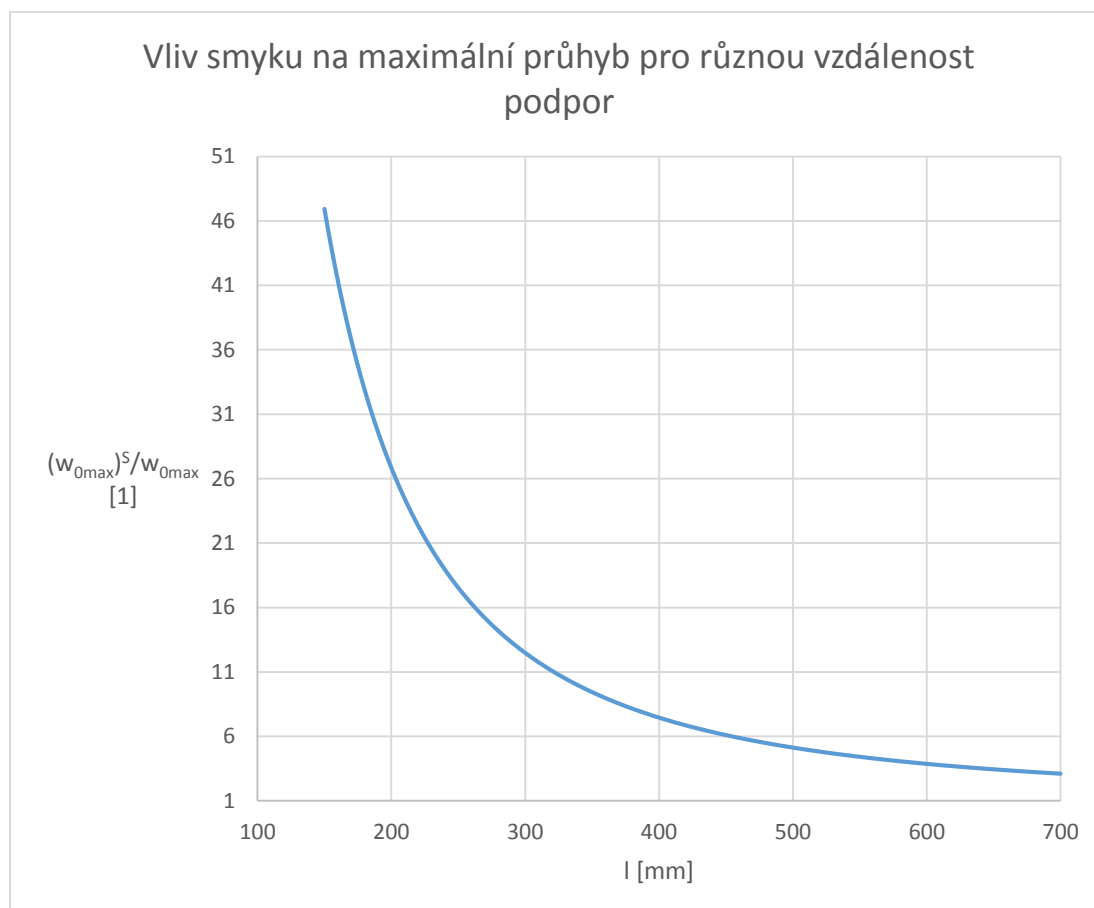
Dosazením stanovených parametrů získáme pro zadaný nosník:

$$w_{0max} = \frac{2000 \cdot 600^3}{48 \cdot 90} \cdot 1,248 \cdot 10^{-8} = 1,248 \text{ mm} .$$

Rovnice 2.2.6—4

V předcházející kapitole jsme ukázali vliv složky průhybu vyvolané příčným smykem na celkový průhyb zadaného nosníku pro vzdálenost podpor 600 milimetrů. Nyní se ještě podíváme, jak bude vypadat vliv smyku na maximální průhyb zadaného nosníku pro stanovenou zatěžovací sílu při různých vzdálenostech podpor.

Stejně jako u laminátových teorií tedy označíme maximální průhyb zadaného nosníku řešeného podle sendvičové teorie bez uvažování vlivu příčného smyku Rovnice 2.2.6—3) jako $(w_{0max})^0$ a maximální průhyb řešený podle sendvičové teorie s vlivem příčného smyku Rovnice 2.2.5—14) jako $(w_{0max})^S$ a vyneseme jejich poměr v závislosti na vzdálenosti podpor do grafu:



Obr. 25: Vliv smyku na maximální průhyb u sendvičové teorie v závislosti na vzdálenosti podpor

Stejně jako pro laminátové teorie i nyní bude mít závislost hyperbolický průběh, což je zřejmé, protože výpočet průhybů provádíme podle stejných vztahů. V číslech je ovšem rozdíl astronomický. Zatímco u laminátových teorií se chyba způsobená zanedbáním smyku počítala na procenta případně desítky procent, pro sendvičové teorie jsou to rovnou celočíselné násobky.

3 Experimentální část

V předcházející části práce jsme se zabývali čtyřmi různými metodami pro analytické řešení vrstvených nosníků. Tyto metody jsme aplikovali na zadaný nosník sendvičové struktury, pro konkrétní úlohu se dobrali ke čtyřem různým výsledkům a pokusili se předem zhodnotit, co by mohlo mít vliv na odlišnost těchto výsledků. K dalšímu hodnocení je třeba vzorky řešeného nosníku podrobit experimentální zkoušce ohybem, abychom mohli získané výsledky porovnat s jeho skutečným chováním při zatížení. Dále pak také pomocí zkoušky tahem ověříme použité hodnoty modulů pružnosti v tahu horního a dolního potahu.

Následující kapitoly tedy ve formě stručné zprávy pojednávají o průběhu experimentů a zpracování dat z nich získaných.

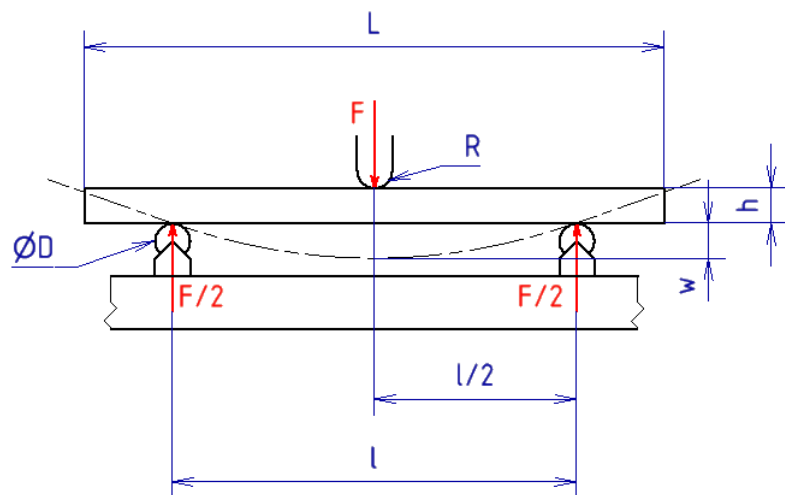
3.1 Zkouška tříbodým ohybem sendvičového nosníku

3.1.1 Popis zkoušky

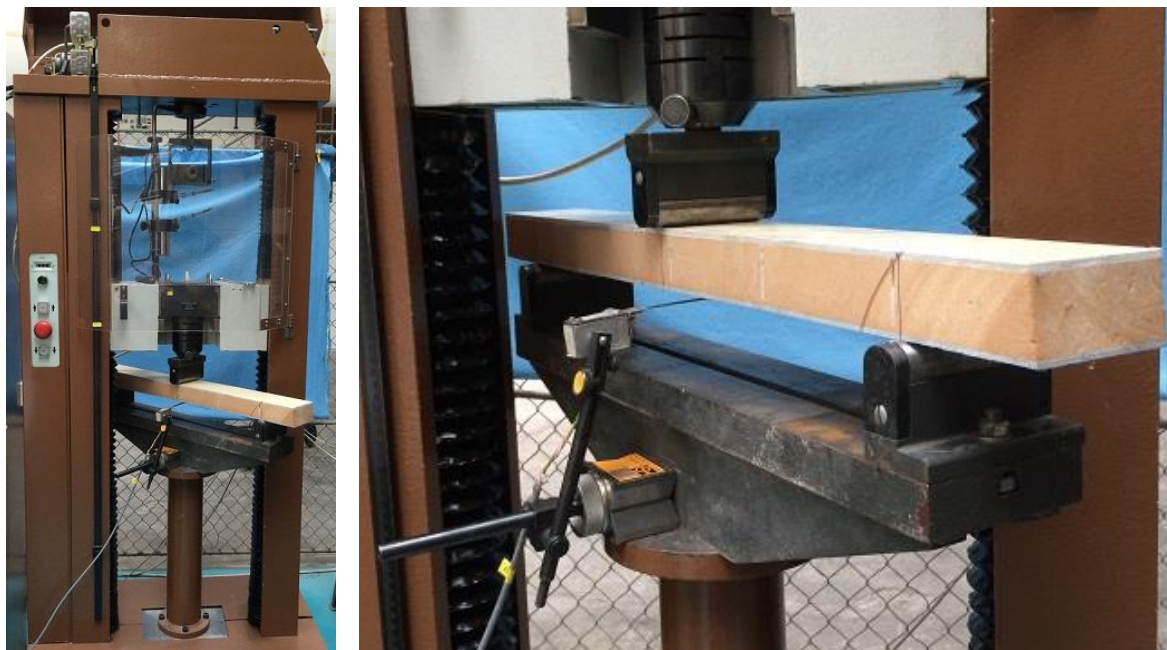
Zkouška ohybem je statická mechanická zkouška, při níž je vzorek umístěn na dvou podporách a postupně zatěžován osamělou silou F působící uprostřed podpor. Schéma zkoušky je na (Obr. 26).

Experiment byl proveden v laboratořích pružnosti a pevnosti na FS ČVUT.

K provedení byl využit univerzální zatěžovací stroj FPZ100/1 od německého výrobce WMK Fritz Heckert. Fotografie stroje s uspořádáním experimentu je na obrázku 27.



Obr. 26: Schéma zkoušky tříbodým ohybem



Obr. 27: Uspořádání zkoušky v laboratoři

Pro měření byla na stroji použita vyměnitelná tenzometrická hlava pro síly až 10 kN a elektronický snímač posuvu. Dále pak planžetový průhyboměr, který snímá deformaci nosníku pomocí elektrických odporových tenzometrů. Samotný stroj včetně použitého měřicího příslušenství byl připojen k počítači, který pomocí vyhodnocovacího programu rovnou přepočítával získaná data na průhyb.

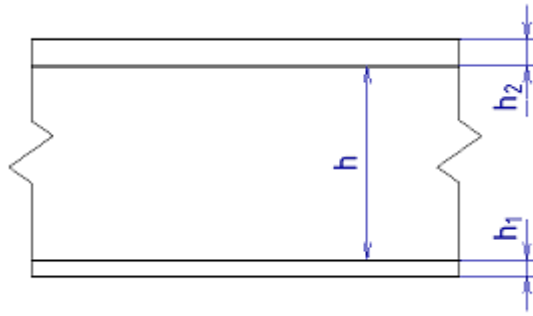


Obr. 28: Vzorky pro ohybovou zkoušku

3.1.2 Popis vzorků

Měření bylo provedeno na čtyřech vzorcích odpovídajících rozměrům nosníku v Tabulka I, z toho na dvou pro vzdálenost podpor $l = 300\text{ mm}$ a na zbylých dvou pro vzdálenost podpor $l = 600\text{ mm}$. Pro zpřesnění výsledku bylo nejdříve provedeno měření „nanečisto“. Každý vzorek byl nejprve zatížen až na sílu 2000 N a potom odlehčen do počátečního stavu pro měření načisto, kdy byla ponechána hodnota zatížení v řádech desetin newtonu.

Zkoušené vzorky jsou na (Obr. 28). Schematické zobrazení jejich průřezu je potom na (Obr. 29), tabulka rozměrů průřezu je pod nimi.



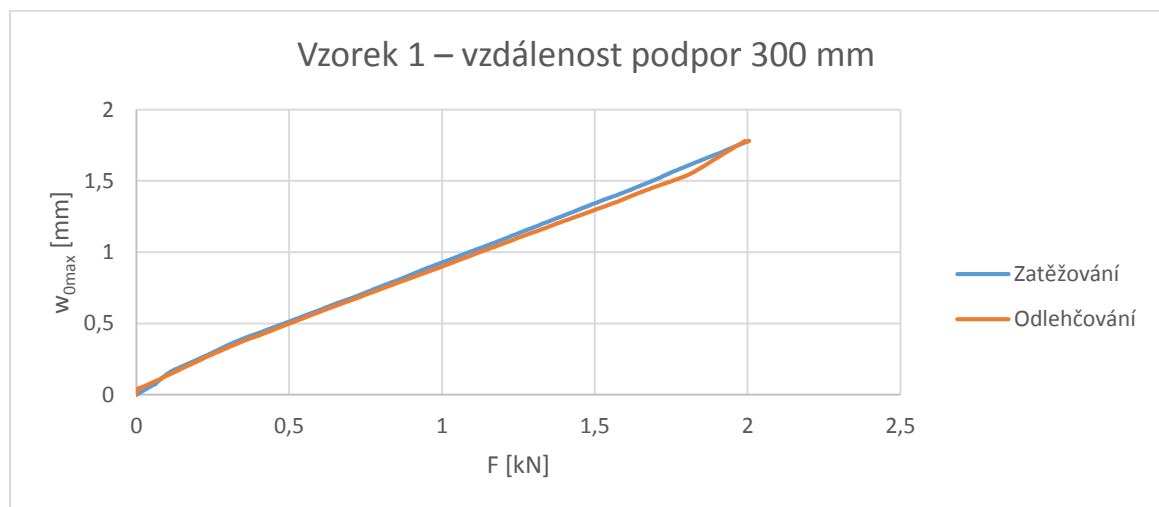
Obr. 29: Průřez vzorku

h [mm]	h_1 [mm]	h_2 [mm]
42,3	3,4	4,2

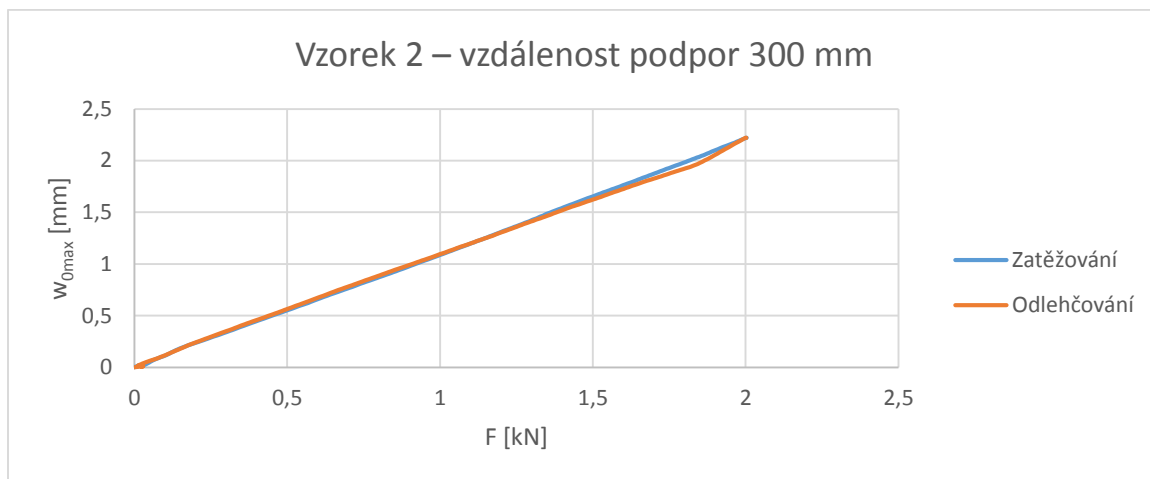
Tabulka II: Rozměry průřezu vzorku

3.1.3 Zpracování naměřených hodnot

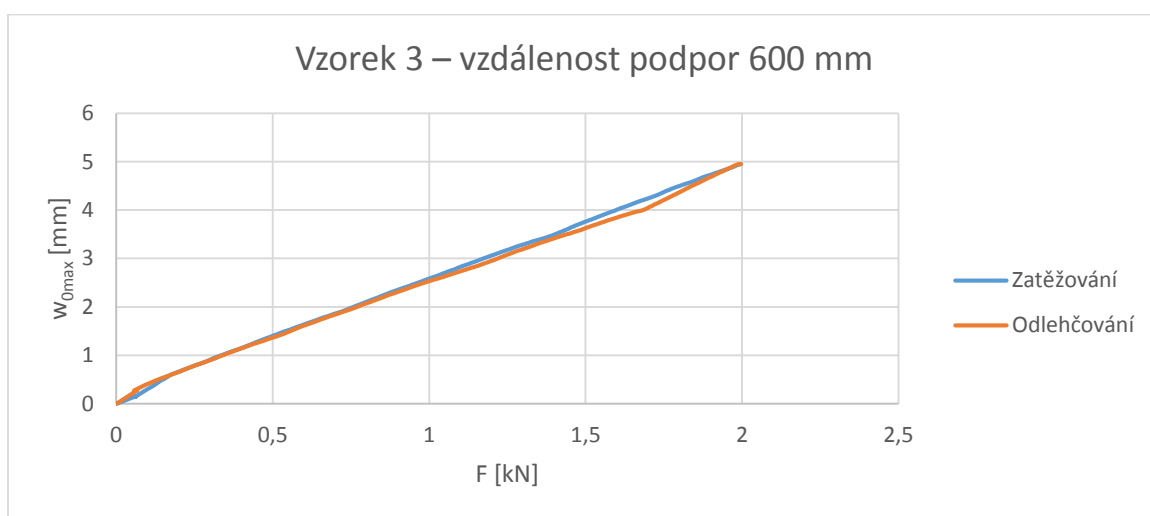
Naměřené hodnoty průhybů uprostřed podpor označené v souladu s analytickou částí jako w_{0max} byly vyneseny do grafů v závislosti na zatěžovací síle F :



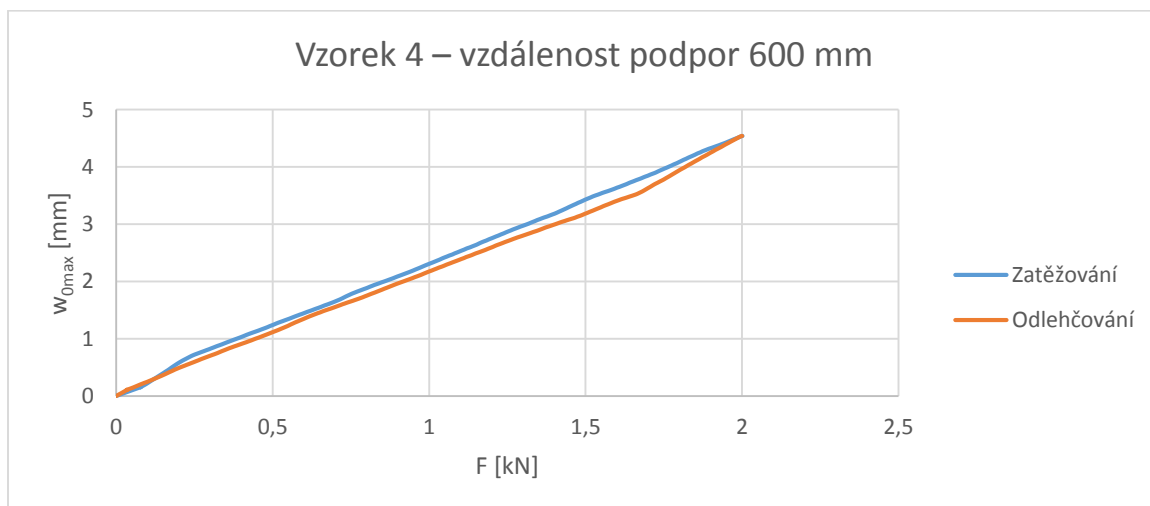
Obr. 30: Zatěžovací a odlehčovací charakteristika při ohybu vzorku 1



Obr. 31: Zatěžovací a odlehčovací charakteristika při ohybu vzorku 2



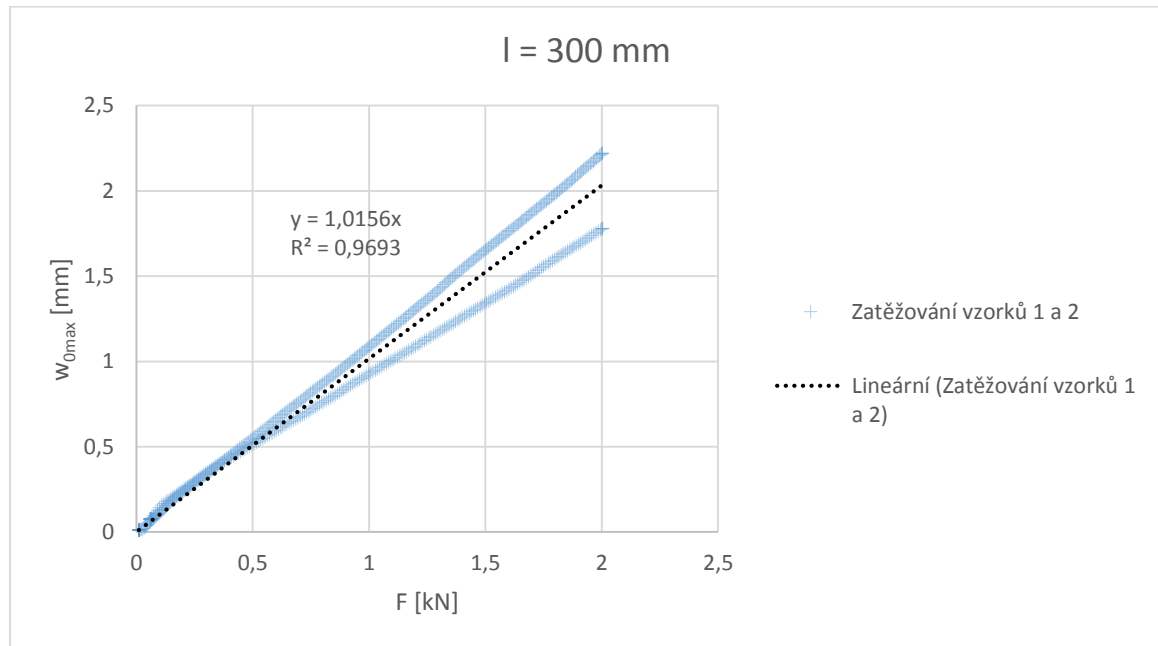
Obr. 32: Zatěžovací a odlehčovací charakteristika při ohybu vzorku 3



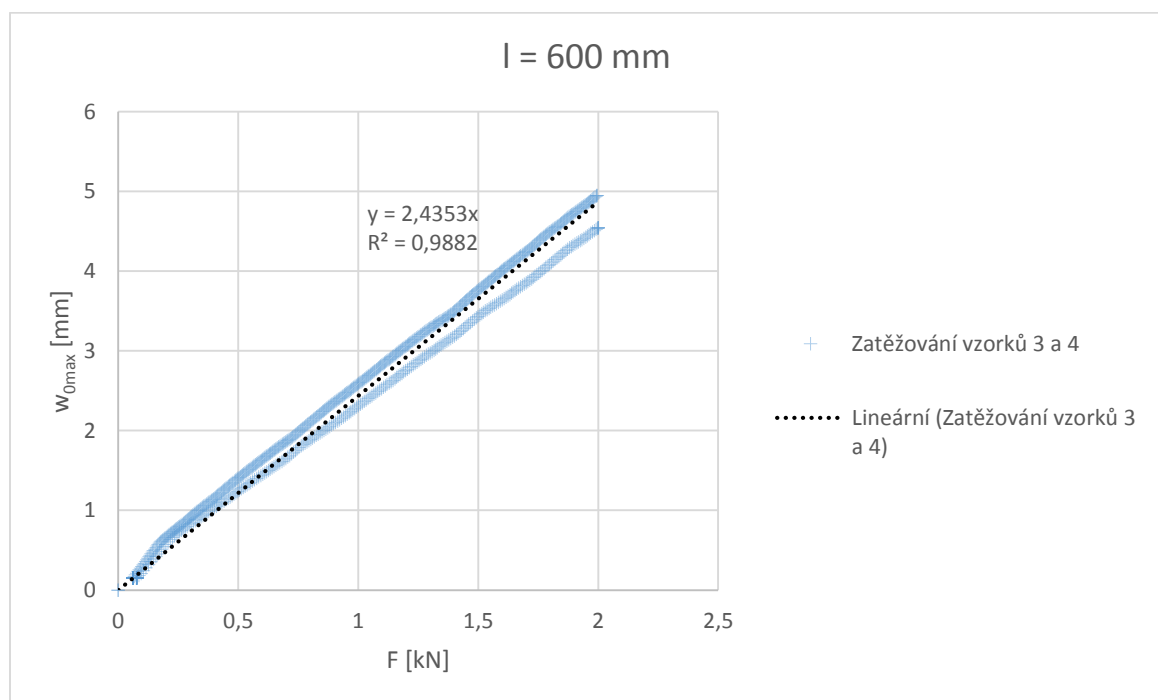
Obr. 33: Zatěžovací a odlehčovací charakteristika při ohybu vzorku 4

3.1.4 Vyhodnocení měření

K následujícímu vyhodnocení byly použity pouze zatěžovací charakteristiky z výše uvedených grafů. Je totiž patrné, že na počátku odlehčování vykazují všechny vzorky jistou odchylku od linearity, u které se předpokládá, že je způsobena nespecifikovanou chybou při měření. Pomocí metody nejmenších čtverců byly tedy hodnoty naměřené při zatěžování vzorků proloženy regresními přímkami se známou směrnici (s využitím programu MS Excel).



Obr. 34: Lineární regrese



Obr. 35: Lineární regrese

Koeficienty spolehlivosti R se v obou případech blíží jedné, což vypovídá o slušné přesnosti (pro $R = 1$ by všechny naměřené body ležely na regresní přímce). S využitím získaných směrnic byly stanoveny funkce průhybu zkoušeného sendvičového nosníku jako

$$w_{0max}[mm] = 1,0156 \cdot 10^{-3} \cdot F [N]$$

Rovnice 3.1.4–1

pro vzdálenost podpor $l = 300$ mm a

$$w_{0max}[mm] = 2,4353 \cdot 10^{-3} \cdot F [N]$$

Rovnice 3.1.4–2

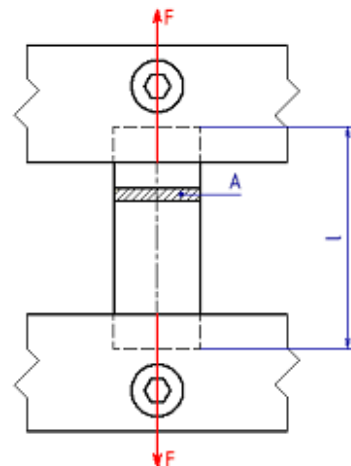
pro vzdálenost podpor $l = 600$ mm.

3.2 Zkouška tahem horního a dolního potahu sendviče

3.2.1 Popis zkoušky

Zkouška tahem je statická mechanická zkouška, při níž je vzorek upnut mezi čelisti trhacího stroje a postupně zatěžován silou F působící v ose vzorku až do jeho přetržení. Je normalizována příslušnou ČSN, včetně tvaru zkoušených vzorků, a jejím výstupem je obecně pracovní diagram síla – prodloužení případně smluvní pracovní diagram napětí – deformace. Ze smluvního diagramu je potom možné odečíst mnoho významných materiálových charakteristik. Více o normalizované tahové zkoušce viz např. Macek, Zuna (1999).

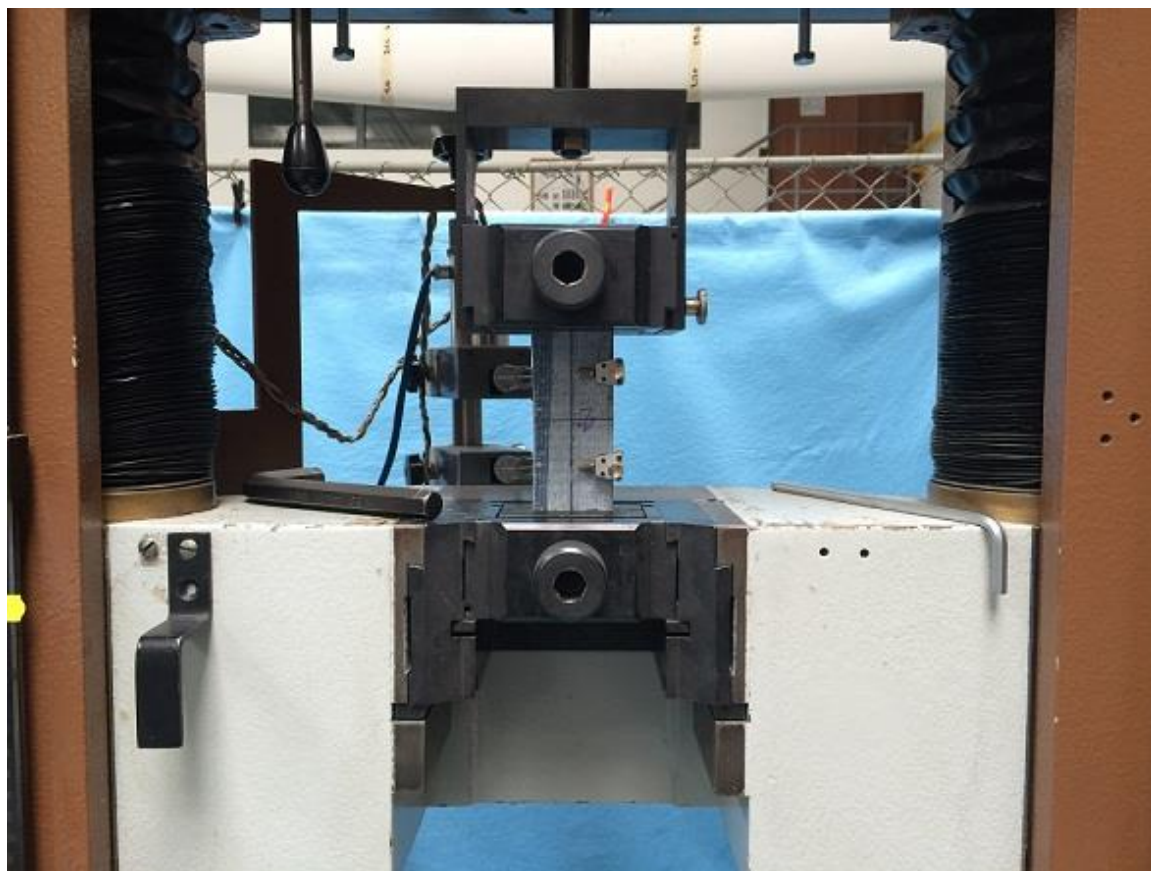
Vzhledem k tomu, že cílem experimentu bylo pouze zjištění modulu pružnosti v tahu E potahů s předpokladem, že zkoušený materiál lze dost dobře považovat za izotropní, byla zkouška provedena zjednodušeně. Vzorek byl na stroji zatěžován a následně odlehčován v rozsahu sil, které nezpůsobí mezní stavy materiálu – vzniklé deformace byly tedy vratné. Jinými slovy se experiment po celou dobu trvání pohyboval v pružné oblasti smluvního diagramu, pro kterou platí Hookeův zákon. Z tohoto důvodu bylo také možné pro tahovou zkoušku použít dostupné vzorky konstantního obdélníkového průřezu. Schéma provedené zkoušky je na (Obr. 36).



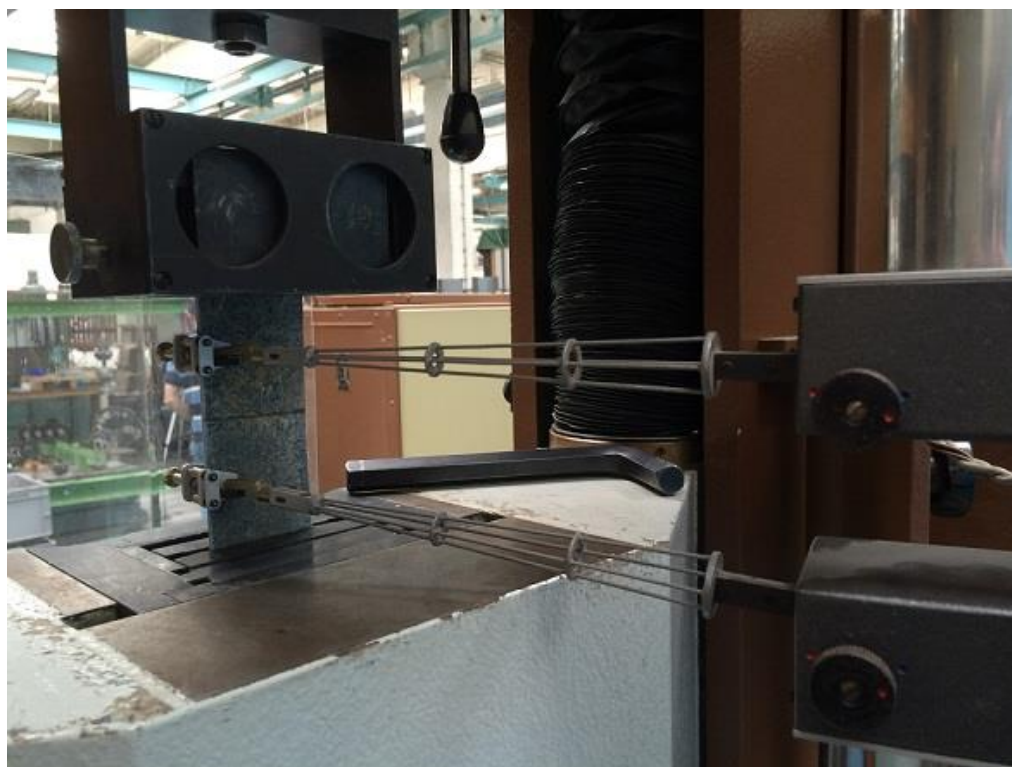
Obr. 36: Schéma provedené zkoušky tahem

Experiment byl proveden ve stejné laboratoři a na stejném stroji jako zkouška ohybem. U stroje bylo vyměněno potřebné příslušenství. Síla byla měřena siloměrem s rozsahem 10 kN, pro měření prodloužení byl použit indukční extenzometr od výrobce WMK Fritz

Heckert. Výstupy stroje byly připojeny k počítači s vyhodnocovacím programem. Fotografie z uspořádání experimentu v laboratoři jsou na (Obr. 37) a (Obr. 38):



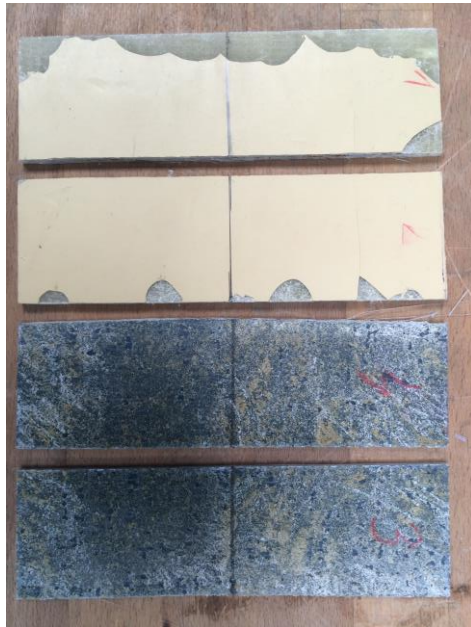
Obr. 37: Uspořádání zkoušky tahem v laboratoři



Obr. 38: Extenzometr

3.2.2 Popis vzorků

Měření bylo provedeno na čtyřech vzorcích, z toho na dvou z materiálu horního potahu analyzovaného sendviče a na dvou z materiálu jeho dolního potahu. Vzorky byly vyrobeny odříznutím přímo ze sendviče a jsou zobrazeny na (Obr. 39).



Obr. 39 Vzorky pro zkoušku tahem

Rozměry vzorků byly přeměřeny pomocí digitálního posuvného měřítka od výrobce Preisser. Protože byly řezány ručně, a tím pádem nepřiliš přesně, stanovily se jejich geometrické parametry pro pozdější výpočet (s výjimkou délky) jako průměr z pěti hodnot naměřených rovnoměrně po délce vzorku.

Také je třeba říci, že vzorky reprezentující horní potah sendviče mají povrchovou úpravu. Jsou povlakovány tenkou vrstvou materiálu – tzv. Gelcoat. Tato vrstva má hlavně estetickou funkci a předpokládá se, že se nepodílí na přenosu napětí. Výpočet plochy průřezu pro určení napětí při zkoušce tahem se tedy provede z tloušťky vzorku naměřené po stržení této povrchové vrstvy.

Naměřené rozměry jsou v Tabulka III.

Vzorky horního potahu						Vzorky dolního potahu					
Vzorek 1						Vzorek 3					
h_1 [mm]	h_2 [mm]	h_3 [mm]	h_4 [mm]	h_5 [mm]	\bar{h} [mm]	h_1 [mm]	h_2 [mm]	h_3 [mm]	h_4 [mm]	h_5 [mm]	\bar{h} [mm]
4,05	4,05	4,01	4,12	4,15	4,08	3,08	3,11	2,94	3,19	3,20	3,10
b_1 [mm]	b_2 [mm]	b_3 [mm]	b_4 [mm]	b_5 [mm]	\bar{b} [mm]	b_1 [mm]	b_2 [mm]	b_3 [mm]	b_4 [mm]	b_5 [mm]	\bar{b} [mm]
30,68	30,52	30,42	30,52	30,34	30,48	43,79	43,73	43,77	44,10	44,08	43,89
l [mm]						l [mm]					
146,59						152,11					
Vzorek 2						Vzorek 4					
h_1 [mm]	h_2 [mm]	h_3 [mm]	h_4 [mm]	h_5 [mm]	\bar{h} [mm]	h_1 [mm]	h_2 [mm]	h_3 [mm]	h_4 [mm]	h_5 [mm]	\bar{h} [mm]
3,81	3,60	3,63	3,80	3,63	3,69	3,43	3,43	3,60	3,65	3,41	3,50

b ₁ [mm]	b ₂ [mm]	b ₃ [mm]	b ₄ [mm]	b ₅ [mm]	\bar{b} [mm]	b ₁ [mm]	b ₂ [mm]	b ₃ [mm]	b ₄ [mm]	b ₅ [mm]	\bar{b} [mm]
45,01	44,84	44,88	45,01	44,47	44,73	45,00	45,29	45,65	45,74	45,68	45,47
l [mm]						l [mm]					
151,12						152,26					

Tabulka III: Rozměry vzorků pro zkoušku tahem

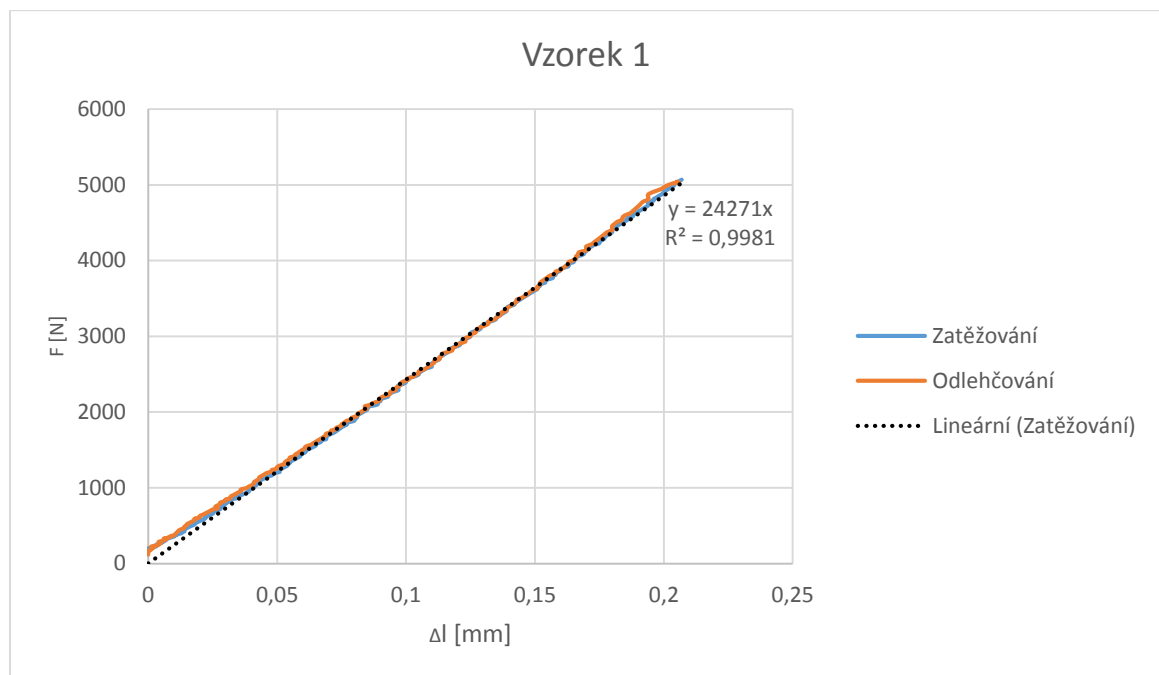
Vypočítané plochy průřezu potřebné k určení napětí jsou v Tabulka IV.

Vzorek 1	Vzorek 2	Vzorek 3	Vzorek 4
$A = \bar{h} \cdot \bar{b}$ [mm ²]	$A = \bar{h} \cdot \bar{b}$ [mm ²]	$A = \bar{h} \cdot \bar{b}$ [mm ²]	$A = \bar{h} \cdot \bar{b}$ [mm ²]
124,36	165,05	136,06	159,15

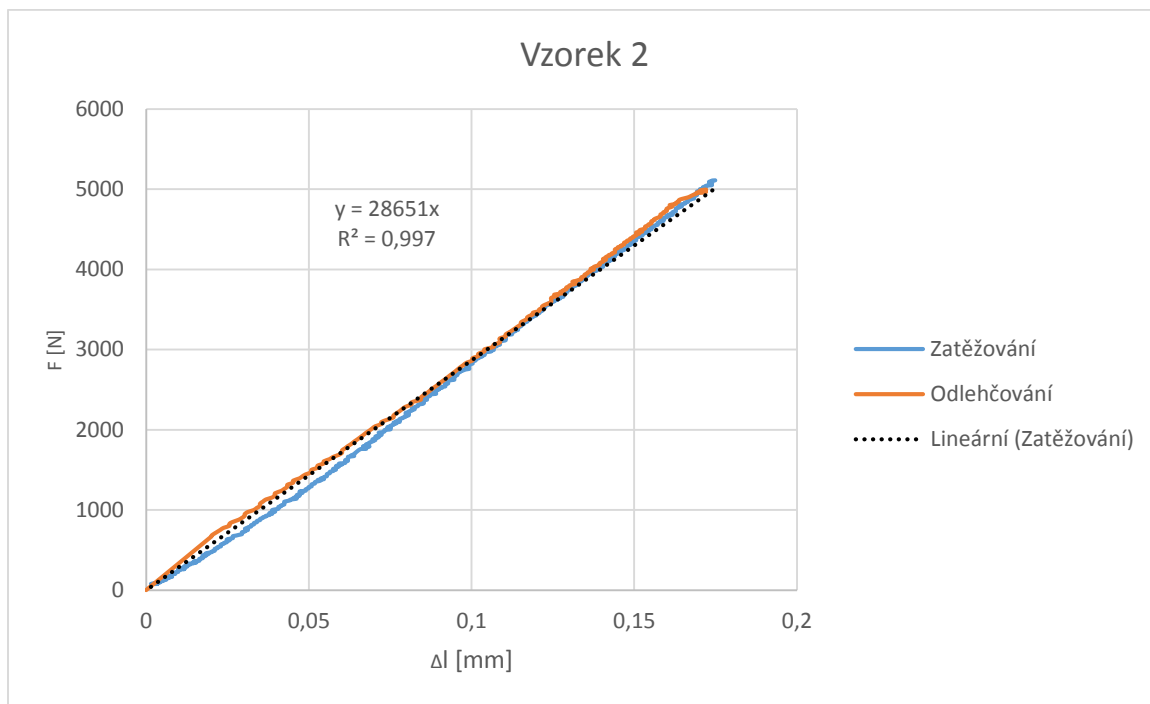
Tabulka IV: Vypočítané plochy průřezu vzorků pro zkoušku tahem

3.2.3 Zpracování naměřených hodnot

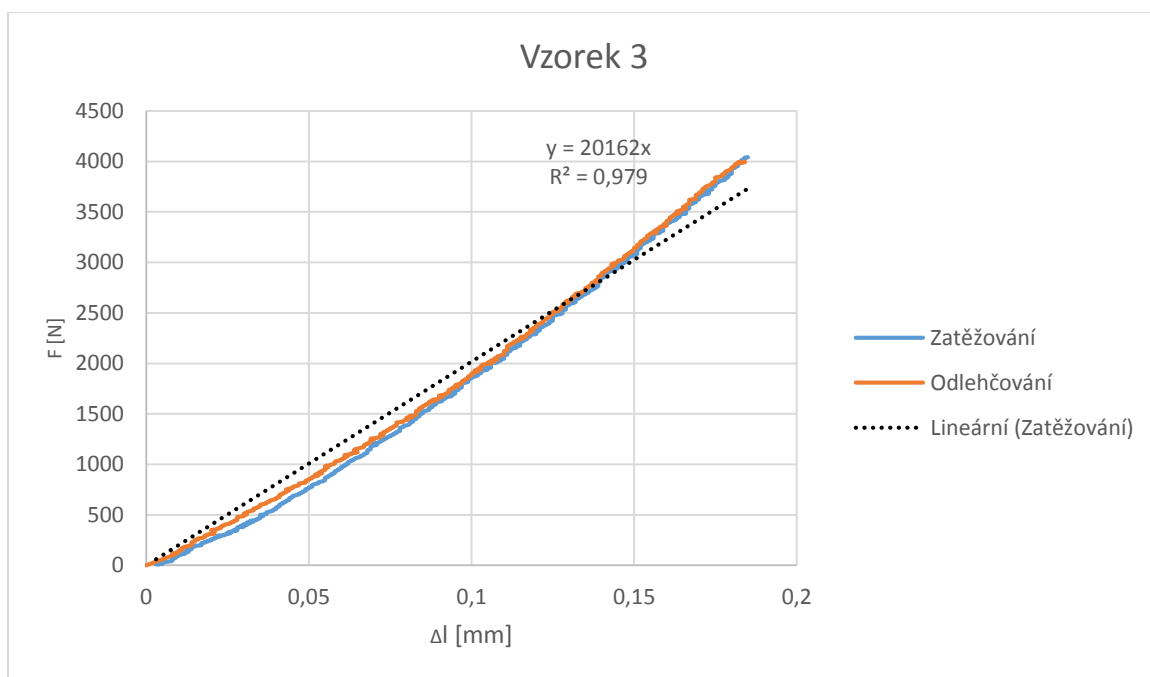
Hodnoty získané při zkoušce tahem jednotlivých vzorků byly vyneseny do grafů (v programu MS Excel) a pomocí metody nejmenších čtverců proloženy regresními přímkami:



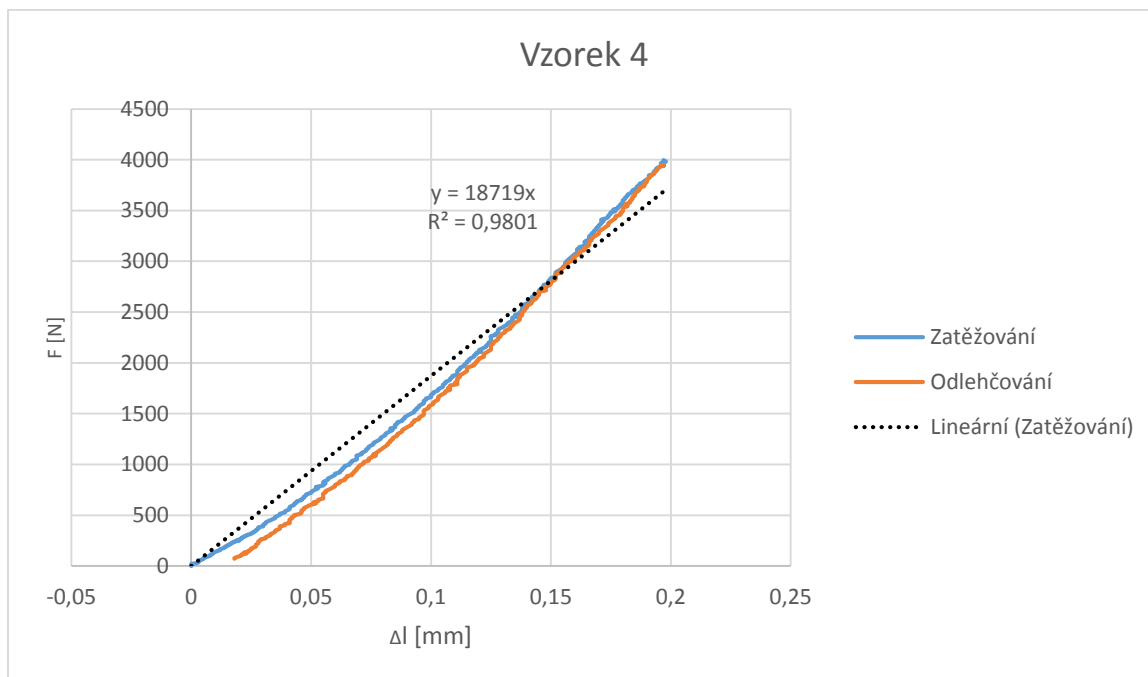
Obr. 40: Zatěžovací a odlehčovací charakteristika vzorku 1 při zkoušce tahem



Obr. 41: Zatěžovací a odlehčovací charakteristika vzorku 2 při zkoušce tahem



Obr. 42: Zatěžovací a odlehčovací charakteristika vzorku 3 při zkoušce tahem



Obr. 43: Zatěžovací a odlehčovací charakteristika vzorku 4 při zkoušce tahem

3.2.4 Vyhodnocení měření

Z grafů je vidět, že hodnoty u vzorků horního potahu vykazují lepší linearitu než hodnoty u vzorků dolního potahu. Tomu také odpovídá horší hodnota koeficientu spolehlivosti R u vzorků 3 a 4. Také je patrné, že se odlehčovací křivka u všech grafů téměř shoduje se zatěžovací křivkou. U drobných odlišností se předpokládá, že jsou způsobeny nespecifikovanou chybou měření a deformace tedy skutečně byly vratné. Lineární regrese byla provedena pouze pro hodnoty získané zatěžováním.

K určení modulu pružnosti v tahu byla použita smluvní závislost napětí na deformaci, ve které je napětí vztahováno k počátečnímu průřezu vzorku. Vzhledem k tomu, že se průřezy vzorků (Tabulka IV: Vypočítané plochy průřezu vzorků pro zkoušku tahem) dost liší, byl určen modul pružnosti zvlášť pro každý zkoušený vzorek. Výsledný modul pružnosti v tahu materiálu horního a dolního potahu byl potom vyhodnocen jako průměr modulů příslušných vzorků.

Vzorek 1

Ze směrnice regresní křivky plyne, že

$$F = 24271 \cdot \Delta l.$$

Rovnice 3.2.4—1

Ze smluvní závislosti potom:

$$\frac{F}{A_0} = E \frac{\Delta l}{l_0}.$$

Rovnice 3.2.4—2

A tedy:

$$E = 24271 \cdot \frac{l_0}{A_0}.$$

Rovnice 3.2.4—3

Po dosazení hodnot z Tabulka III a Tabulka IV:

$$E^1 = 24\,271 \cdot \frac{146,59}{124,36} = 28\,610 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$$

Rovnice 3.2.4—4

Vzorek 2

Stejným způsobem:

$$E^2 = 28\,651 \cdot \frac{151,12}{165,05} = 26\,233 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$$

Rovnice 3.2.4—5

Vzorek 3

$$E^3 = 20\,162 \cdot \frac{152,11}{136,06} = 22\,540 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$$

Rovnice 3.2.4—6

Vzorek 4

$$E^4 = 18\,719 \cdot \frac{152,26}{159,15} = 17\,909 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$$

Rovnice 3.2.4—7

Vyhodnocený modul pružnosti v tahu horního potahu tedy je:

$$E_{horní} = \frac{E^1 + E^2}{2} = \frac{28\,610 + 26\,233}{2} = 27\,422 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}.$$

Rovnice 3.2.4—8

Vyhodnocený modul pružnosti v tahu dolního potahu tedy je:

$$E_{dolní} = \frac{E^3 + E^4}{2} = \frac{22\,540 + 17\,909}{2} = 20\,225 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}.$$

Rovnice 3.2.4—9

4 Vyhodnocení

Po provedení experimentu, ve kterém jsme podrobili nosník řešený v analytické části zkoušky tříbodým ohybem, máme nyní potřebný podklad k porovnání výsledků získaných výpočtem. Budeme předpokládat, že experimentálně získané vztahy pro výpočet průhybu analyzovaného nosníku Rovnice 3.1.4—1) a Rovnice 3.1.4—2) nejlépe vystihují realitu a veškeré hodnocení tedy budeme vztahovat právě k nim. Nutno podotknout, že tento předpoklad má jistá úskalí, která budou dále komentována níže při rozboru chyb.

4.1 Shrnutí a doplnění výpočtových vztahů

Vzhledem k tomu, že jsme však v analytické části provedli číselný výpočet průhybu nosníku pouze pro jednu variantu úlohy tříbodého ohybu, tedy pro sílu $F = 2000 \text{ N}$ a vzdálenost podpor $l = 600 \text{ mm}$, na základě které jsme potom udělali předběžné srovnání jednotlivých metod výpočtu, měli bychom nyní pro porovnání s experimentem vlastně jenom čtyři hodnoty. Navíc jsme při experimentálním ověření tahových modulů pružnosti potahů z Tabulka I získali poměrně hodně odlišné výsledky, což vede k závěru, že se materiálové parametry u jednotlivých vzorků řešeného sendvičového nosníku mohou významně lišit. Bylo by tedy dobré pokusit se výpočtové metody porovnat také z hlediska jejich citlivosti na změnu mechanických vlastností nosníku. Z těchto důvodů tedy nyní uděláme nejprve několik kroků, pomocí kterých snadno získáme širokou tabulku výsledků k porovnání.

Krok 1:

Vztahy Rovnice 2.2.3—36) a Rovnice 2.2.4—31), které jsou, jak bylo ukázáno, platné pro výpočet maximálního průhybu nosníku podle laminátové i sendvičové teorie, převedeme do tvaru

$$w_{0max} = X \cdot F,$$

Rovnice 3.2.4—1

kde X je obecně proměnná. Získáme tedy

$$w_{0max} = \left(D_{11}^* \frac{l^3}{48b} \right) F$$

Rovnice 3.2.4—2

pro výpočet se zanedbáním smyku a

$$w_{0max} = \left(F_{55}^* \frac{l}{4b} + D_{11}^* \frac{l^3}{48b} \right) F$$

Rovnice 3.2.4–3

pro výpočet s uvažováním smyku.

Krok 2:

Stejným postupem jako v analytické části přepočítáme pro daný nosník hodnoty konstant F_{55}^* a D_{11}^* s užitím modulů pružnosti získaných experimentálně – vztahy Rovnice 3.2.4–8) a Rovnice 3.2.4–9). Výsledné hodnoty jsou v Tabulka V:

Laminátová teorie		Sendvičová teorie	
$D_{11}^* [N^{-1} \cdot mm^{-1}]$	$F_{55}^* [N^{-1} \cdot mm]$	$D_{11}^* [N^{-1} \cdot mm^{-1}]$	$F_{55}^* [N^{-1} \cdot mm]$
$9,880 \cdot 10^{-9}$	$1,268 \cdot 10^{-5}$	$1,077 \cdot 10^{-8}$	$107,458 \cdot 10^{-5}$

Tabulka V: Hodnoty konstant tuhosti a poddajnosti nosníku přepočítané pro moduly pružnosti v tahu získané experimentálně

Krok 3

Porovnání jednotlivých výpočtových metod bude provedeno na základě maximálních průhybů nosníku pro dvě varianty konfigurace úlohy nosníku na dvou podporách zatíženého silou F uprostřed, a to – ve shodě s experimentem – pro vzdálenost podpor $l = 300 \text{ mm}$ a $l = 600 \text{ mm}$. Pro konstantní vzdálenost podpor se proměnná X ve vztazích Rovnice 3.2.4–2) a Rovnice 3.2.4–3) z kroku 2 pro daný nosník stane konstantou. Tuto konstantu vypočítáme jednak pro hodnoty poddajností D_{11}^* a F_{55}^* , které jsme vyřešili v analytické části s využitím mechanických vlastností z Tabulka I, a jednak pro hodnoty z Tabulka V přepočítané pro naměřené moduly pružnosti v tahu potahů. Získáme tak následující rovnice.

Vzdálenost podpor $l = 300 \text{ mm}$	
Mechanické vlastnosti nosníku dle Tabulka I	
Laminátová teorie bez vlivu smyku	$w_{0max} = 0,0711 \cdot 10^{-3} \cdot F$
Laminátová teorie s vlivem smyku	$w_{0max} = 0,0833 \cdot 10^{-3} \cdot F$
Sendvičová teorie bez vlivu smyku	$w_{0max} = 0,0780 \cdot 10^{-3} \cdot F$
Sendvičová teorie s vlivem smyku	$w_{0max} = 0,9735 \cdot 10^{-3} \cdot F$
Moduly E potahů z experimentu, ostatní mechanické vlastnosti nosníku dle Tabulka V	
Laminátová teorie bez vlivu smyku	$w_{0max} = 0,0617 \cdot 10^{-3} \cdot F$
Laminátová teorie s vlivem smyku	$w_{0max} = 0,0723 \cdot 10^{-3} \cdot F$
Sendvičová teorie bez vlivu smyku	$w_{0max} = 0,0673 \cdot 10^{-3} \cdot F$
Sendvičová teorie s vlivem smyku	$w_{0max} = 0,9628 \cdot 10^{-3} \cdot F$
Experimentální měření průhybu	
viz rovnice Rovnice 3.1.4–1)	$w_{0max} = 1,0156 \cdot 10^{-3} \cdot F$

Tabulka VI: Shrnutí výsledných rovnic k výpočtu průhybu analyzovaného nosníku v závislosti na síle pro vzdálenost podpor $l = 300 \text{ mm}$

Vzdálenost podpor $l = 600 \text{ mm}$	
Mechanické vlastnosti nosníku dle Tabulka I: Geometrické a mechanické parametry analyzovaného nosníku	
Laminátová teorie bez vlivu smyku	$w_{0max} = 0,5692 \cdot 10^{-3} \cdot F$
Laminátová teorie s vlivem smyku	$w_{0max} = 0,5936 \cdot 10^{-3} \cdot F$
Sendvičová teorie bez vlivu smyku	$w_{0max} = 0,6238 \cdot 10^{-3} \cdot F$
Sendvičová teorie s vlivem smyku	$w_{0max} = 2,4148 \cdot 10^{-3} \cdot F$
Moduly E potahů z experimentu, ostatní mechanické vlastnosti nosníku dle Tabulka V: Hodnoty konstant tuhosti a poddajnosti nosníku přepočítané pro moduly pružnosti v tahu získané experimentálně	
Laminátová teorie bez vlivu smyku	$w_{0max} = 0,4940 \cdot 10^{-3} \cdot F$
Laminátová teorie s vlivem smyku	$w_{0max} = 0,5151 \cdot 10^{-3} \cdot F$
Sendvičová teorie bez vlivu smyku	$w_{0max} = 0,5384 \cdot 10^{-3} \cdot F$
Sendvičová teorie s vlivem smyku	$w_{0max} = 2,3293 \cdot 10^{-3} \cdot F$
Experimentální měření průhybu	
viz rovnice Rovnice 3.1.4–2)	$w_{0max} = 2,4353 \cdot 10^{-3} \cdot F$

Tabulka VII: Shrnutí výsledných rovnic k výpočtu průhybu analyzovaného nosníku v závislosti na síle pro vzdálenost podpor $l = 600 \text{ mm}$

Hodnoty průhybů v tabulkách mají rozměr [mm], síly mají rozměr [N].

4.2 Tabulka výsledků

Protože je zřejmé, že hodnota síly F nebude mít vliv na poměr průhybů vypočítaných podle jednotlivých teorií, dosadíme $F = 2000 \text{ N}$, tabulku přepočítáme a výsledky zaokrouhlíme na tři desetinná místa, abychom porovnávali rozumné cifry.

Vzdálenost podpor $l = 300 \text{ mm}$	
Mechanické vlastnosti nosníku dle Tabulka I: Geometrické a mechanické parametry analyzovaného nosníku	
Laminátová teorie bez vlivu smyku	$w_{0max} = 0,142 \text{ mm}$
Laminátová teorie s vlivem smyku	$w_{0max} = 0,167 \text{ mm}$
Sendvičová teorie bez vlivu smyku	$w_{0max} = 0,156 \text{ mm}$
Sendvičová teorie s vlivem smyku	$w_{0max} = 1,947 \text{ mm}$
Moduly E potahů z experimentu, ostatní mechanické vlastnosti nosníku dle Tabulka V: Hodnoty konstant tuhosti a poddajnosti nosníku přepočítané pro moduly pružnosti v tahu získané experimentálně	
Laminátová teorie bez vlivu smyku	$w_{0max} = 0,123 \text{ mm}$
Laminátová teorie s vlivem smyku	$w_{0max} = 0,145 \text{ mm}$
Sendvičová teorie bez vlivu smyku	$w_{0max} = 0,135 \text{ mm}$
Sendvičová teorie s vlivem smyku	$w_{0max} = 1,926 \text{ mm}$
Experimentální měření průhybu	
viz rovnice Rovnice 3.1.4–1)	$w_{0max} = 2,031 \text{ mm}$

Tabulka VIII: První část tabulky výsledků pro srovnání

Vzdálenost podpor $l = 600 \text{ mm}$
--

Mechanické vlastnosti nosníku dle Tabulka I: Geometrické a mechanické parametry analyzovaného nosníku	
Laminátová teorie bez vlivu smyku	$w_{0max} = 1,138 \text{ mm}$
Laminátová teorie s vlivem smyku	$w_{0max} = 1,187 \text{ mm}$
Sendvičová teorie bez vlivu smyku	$w_{0max} = 1,248 \text{ mm}$
Sendvičová teorie s vlivem smyku	$w_{0max} = 4,830 \text{ mm}$
Moduly E potahů z experimentu, ostatní mechanické vlastnosti nosníku dle Tabulka V: Hodnoty konstant tuhosti a poddajnosti nosníku přepočítané pro moduly pružnosti v tahu získané experimentálně	
Laminátová teorie bez vlivu smyku	$w_{0max} = 0,988 \text{ mm}$
Laminátová teorie s vlivem smyku	$w_{0max} = 1,030 \text{ mm}$
Sendvičová teorie bez vlivu smyku	$w_{0max} = 1,077 \text{ mm}$
Sendvičová teorie s vlivem smyku	$w_{0max} = 4,659 \text{ mm}$
Experimentální měření průhybu	
viz rovnice Rovnice 3.1.4–2)	$w_{0max} = 4,871 \text{ mm}$

Tabulka IX: Druhá část tabulky výsledků pro srovnání

4.3 Vyhodnocení výsledků

Porovnáním získaných průhybů dle očekávání zjistíme, že jednoznačně nejlepší výsledky přináší sendvičová teorie s vlivem příčné smykové deformace. Analyzovaný nosník totiž z hlediska struktury, geometrie i mechanických vlastností přesně odpovídá typu, pro jaký byla teorie navržena, tedy pro nosník tvořený vysokým jádrem s nízkými hodnotami modulu pružnosti v tahu a ve smyku obaleným naopak nízkými potahy s vysokými hodnotami modulů pružnosti. Výsledky podle všech ostatních teorií jsou při porovnání s hodnotou zjištěnou experimentem víceméně stejné a o celé jednotky nižší. Laminátová teorie je totiž primárně navržena pro vrstvené nosníky, jejichž jednotlivé vrstvy jsou ať už z hlediska tloušťky, či mechanických parametrů srovnatelné. Pokud tomu tak není – jako v případě našeho nosníku – vliv vrstev, které mají řádově nižší mechanické parametry, zaniká při výpočtu konstant tuhosti a poddajnosti. Teorie pak předpokládá, že se na deformaci nosníku podílejí pouze vrstvy s vysokými hodnotami modulů pružnosti, což neodpovídá realitě, a výsledné hodnoty průhybů jsou podhodnocené. Stejně tak u sendvičové teorie při zanedbání příčné smykové deformace, jak už bylo řečeno v analytické části. Přesto však nelze říci, že by sendvičová teorie byla vhodná pouze pro výpočet sendvičů a laminátová zase pro výpočet laminátů. Struktura nosníku může být opravdu rozmanitá a ve většině případů bude rozhodnutí o tom, která teorie přinese lepší výsledek, pravděpodobně přinejmenším sporné.

Kromě již řečeného však tabulka výsledků nepřináší oproti srovnání teorií v analytické části žádné nové poznatky. Poslední, co lze orientačně zhodnotit, je již dříve zmíněná citlivost na změnu mechanických parametrů, kterou vyhodnotíme pomocí procentuálního přírůstku, respektive úbytku hodnoty průhybu u jednotlivých teorií pro stejnou změnu modulů pružnosti v tahu. Přírůstky uvádí následující tabulka:

l = 300 mm				
	Laminátová teorie		Sendvičová teorie	
	s vlivem smyku	bez vlivu smyku	s vlivem smyku	bez vlivu smyku
Δw_{0max}	13,2 %	13,4 %	1,1 %	13,5 %
l = 600 mm				
	Laminátová teorie		Sendvičová teorie	
	s vlivem smyku	bez vlivu smyku	s vlivem smyku	bez vlivu smyku
Δw_{0max}	13,2 %	13,2 %	3,5 %	13,7 %

Tabulka X: Procentuální změna hodnot průhybů při změně modulů pružnosti potahů

Z tabulky je vidět, že všechny teorie kromě sendvičové s uvažováním vlivu příčné smykové deformace vykazují víceméně stejný pokles průhybu. Jejich citlivost na změnu tahového modulu je tedy v podstatě stejná. Je to dáno opět tím, že u nich dominuje složka průhybu vyvolaná ohybovým namáháním, která je spojena s ohybovou tuhostí nosníku a tím také hlavně s tahovým modulem potahů. U sendvičové teorie s vlivem smyku naopak, přinejmenším pro daný rozsah délek, dominuje složka průhybu způsobená příčným smykem jádra, která je spojena se smykovou tuhostí nosníku a tím hlavně s modulem pružnosti ve smyku jádra. Ten jsme experimentálně nezjišťovali, a proto také jeho změnu nezapočítávali. Nicméně se dá předpokládat, že kdybychom tak učinili, procentuální změna průhybu by právě u této teorie výrazně stoupla. Vyšší úbytek pro větší vzdálenost podpor nosníku souvisí s rostoucím vlivem složky průhybu způsobené ohybovým namáháním.

4.4 Zdroje chyb

Závěrem ještě uvedeme, jakými chybami je výpočet zatížen a které z nich by mohly mít značný vliv na přesnost výsledků v tabulkách Tabulka VIII: První část tabulky výsledků pro srovnání Tabulka IX: Druhá část tabulky výsledků pro srovnání. Následuje jejich výčet.

- Chyby, kterých se dopouštíme už při odvození teorií desek. Plynou z předpokladů, které jsou základem každé z uvedených teorií a které ve skutečnosti nebudou nikdy úplně přesně platit.
- Chyby, které způsobíme zavedením dalších podmínek při odvození rovnic pro výpočet ohybu nosníků, hlavně pak předpoklad symetrie nosníku (řešený nosník úplně symetrický není) a izotropie materiálu.
- Chyby experimentu. Sem patří chyby měřících přístrojů a vyhodnocovacího softwaru, nepřesně změřené rozměry vzorků, chyby vzniklé nepřesným umístěním vzorků do zatěžovacího stroje a jiné. Zejména však nedostatečný počet naměřených hodnot. Protože jsme každé měření provedli pouze na dvou vzorcích stejného druhu, nelze od experimentu očekávat vysokou výpovědní hodnotu.
- Ostatní. Například chyby vzniklé zaokrouhlováním a podobně.

Uvedené chyby se podílejí na nepřesnosti výsledků různou měrou. Je zřejmé, že chyby při měření se nebudou týkat analyticky získaných výsledků a naopak (s výjimkou výpočtu provedeného s použitím naměřených modulů pružnosti). Předpokládáme, že z chyb, které se týkají analyticky získaných výsledků, bude mít největší vliv zanedbání geometrické a materiálové nesymetrie, zejména pak na výpočet průhybu s použitím naměřených hodnot modulů pružnosti v tahu potahů.

5 Závěr

V průběhu práce se nám podařilo splnit všechny body, které jsme si vytyčili v úvodu. Na začátku jsme provedli rozbor výchozích teorií, pokračovali jsme analytickým výpočtem průhybů konkrétního nosníku podle různých metod a na základě získaných výsledků provedli porovnání přístupů k řešení. Nosník jsme pak podrobili experimentálním zkouškám, které nám poskytly další podklady k porovnání. V poslední části jsme vyhodnotili získané výsledky a uvedli zdroje chyb, kterými byly zatíženy.

Seznam obrázků²

Obr. 1: Schéma deformace laminátové desky	11
Obr. 2: Jednosměrový kompozit	14
Obr. 3: Skládání vrstev laminátu	14
Obr. 4: Průběh napětí po tloušťce laminátu	15
Obr. 5: Výslednice silových účinků v k-té vrstvě	15
Obr. 6: Schéma deformace laminátové desky při uvažování vlivu smykových sil	18
Obr. 7: Výslednice vnějších sil způsobujících smykové deformace k-té vrstvy	19
Obr. 8: Schematické zobrazení sendvičové desky.....	21
Obr. 9: Řez sendvičovou deskou v rovině xz	22
Obr. 10: Schéma deformace sendvičové desky	22
Obr. 11: Symetricky vrstvený nosník.....	29
Obr. 12: Schéma analyzovaného nosníku	31
Obr. 13: Nosník na dvou podporách zatížený uprostřed osamělou silou	33
Obr. 14: Schéma pro výpočet konstant tuhosti pro laminátovou teorii	35
Obr. 15: Průhyb nosníku podle laminátové teorie bez vlivu smyku	39
Obr. 16: Závislost maximálního průhybu na vzdálenosti podpor nosníku.....	40
Obr. 17: Schéma pro výpočet konstant tuhosti pro laminátovou teorii	43
Obr. 18: Průhyb nosníku podle laminátové teorie s vlivem smyku	45
Obr. 19: Vliv smyku na maximální průhyb u laminátové teorie v závislosti na vzdálenosti podpor	47
Obr. 20: Schéma pro výpočet konstant tuhosti pro sendvičovou teorii	48
Obr. 21: Průhyb nosníku podle sendvičové teorie s vlivem smyku.....	50
Obr. 22: Vliv smyku na celkový průhyb	51
Obr. 23: Závislost maximálního průhybu na vzdálenosti podpor	52
Obr. 24: Průhyb nosníku podle sendvičové teorie bez vlivu smyku.....	53
Obr. 25: Vliv smyku na maximální průhyb u sendvičové teorie v závislosti na vzdálenosti podpor	54
Obr. 26: Schéma zkoušky třibodým ohybem	55
Obr. 27: Uspořádání zkoušky v laboratoři.....	56
Obr. 28: Vzorky pro ohybovou zkoušku	56
Obr. 29: Průřez vzorku	57
Obr. 30: Zatěžovací a odlehčovací charakteristika při ohybu vzorku 1.....	57
Obr. 31: Zatěžovací a odlehčovací charakteristika při ohybu vzorku 2.....	58
Obr. 32: Zatěžovací a odlehčovací charakteristika při ohybu vzorku 3.....	58
Obr. 33: Zatěžovací a odlehčovací charakteristika při ohybu vzorku 4.....	58
Obr. 34: Lineární regrese.....	59
Obr. 35: Lineární regrese.....	59
Obr. 36: Schéma provedené zkoušky tahem	60
Obr. 37: Uspořádání zkoušky tahem v laboratoři	61
Obr. 38: Extenzometr	61
Obr. 39 Vzorky pro zkoušku tahem	62
Obr. 40: Zatěžovací a odlehčovací charakteristika vzorku 1 při zkoušce tahem.....	63
Obr. 41: Zatěžovací a odlehčovací charakteristika vzorku 2 při zkoušce tahem.....	64

² Obrázky 1–11, 13 jsou převzaty z literatury (Laš 2008).

Obr. 42: Zatěžovací a odlehčovací charakteristika vzorku 3 při zkoušce tahem.....	64
Obr. 43: Zatěžovací a odlehčovací charakteristika vzorku 4 při zkoušce tahem.....	65

Seznam tabulek

Tabulka I: Geometrické a mechanické parametry analyzovaného nosníku	32
Tabulka II: Rozměry průřezu vzorku.....	57
Tabulka III: Rozměry vzorků pro zkoušku tahem	63
Tabulka IV: Vypočítané plochy průřezu vzorků pro zkoušku tahem	63
Tabulka V: Hodnoty konstant tuhosti a poddajnosti nosníku přepočítané pro moduly pružnosti v tahu získané experimentálně	68
Tabulka VI: Shrnutí výsledných rovnic k výpočtu průhybu analyzovaného nosníku v závislosti na síle pro vzdálenost podpor $l = 300$ mm.....	68
Tabulka VII: Shrnutí výsledných rovnic k výpočtu průhybu analyzovaného nosníku v závislosti na síle pro vzdálenost podpor $l = 600$ mm.....	69
Tabulka VIII: První část tabulky výsledků pro srovnání.....	69
Tabulka IX: Druhá část tabulky výsledků pro srovnání.....	70
Tabulka X: Procentuální změna hodnot průhybů při změně modulů pružnosti potahů.....	71

Použitá literatura

- [1] Gay, D. – Hoa, S. V. – Tsai, S. W.: Composite Materials. Design and Applications. Boca Raton, CRC Press LLC 2003.
- [2] Chawla, K. K.: Composite Materials. Science and Engineering. New York Springer-Verlag 1998.
- [3] Laš, V.: Mechanika kompozitních materiálů. Plzeň, Západočeská univerzita v Plzni 2008.
- [4] Lenert, J.: Mechanika kompozitních materiálů. Ostrava, Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava 2002.
- [5] Macek, K. – Zuna, P. a kol.: Nauka o materiálu. Praha, Vydavatelství ČVUT 1999.
- [6] Michalec, J. – Kuliš, Z. – Valenta, F. – Sochor, M. – Řezníček, J. – Šubrt, L.: Pružnost a pevnost I. Praha, Česká technika – nakladatelství ČVUT 2010.
- [7] Michalec, J. a kol.: Pružnost a pevnost II. Praha, Nakladatelství ČVUT 2006.
- [8] Elektronický katalog Airex C70:
<http://www.3accorematerials.com/products/airex/airexreg-c70.html>