ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ
V PRAZE
Fakulta strojní

Diplomová práce

Studie trakčního podvozku pro nízkopodlažní tramvaj

Autor práce: Bc. Martin Komínek

Vedoucí práce: doc. Ing. Josef Kolář, CSc.

Vysoká škola: **České vysoké učení technické v Praze**
Fakulta : **strojní**
Ústav: **12120 Ústav automobilů, spalovacích motorů a kolejových vozidel**
Akademický rok: **2014/2015**

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

student(ka): **Bc. Martin Komínek**

studijní program: **N 2301 Strojní inženýrství**
studijní obor: **2301T047 Dopravní, letadlová a transportní technika**

Název tématu: **Studie trakčního podvozku pro nízkopodlažní tramvaj**

Název tématu anglicky: Design Study of Traction Bogie for Low-Floor Tram

Označení diplomové práce: **DP 2015 – KV 02**

Pokyny pro vypracování:

Proveďte konstrukční studii dvounápravového trakčního podvozku s torzně poddajným rámem a individuálním pohonem volně otočných kol. Konstrukční návrh rámu podvozku řešte tak, aby na stejné platformě bylo možné vytvořit i běžný podvozek.

Vypracujte:

1. Rešerši na téma: Řešení trakčních podvozků a pohonů u 100 % nízkopodlažních tramvají.
2. Typový výkres nízkopodlažní tramvaje v měřítku 1:50.
3. Hmotnostní bilanci vozidla, stanovte velikost nápravových a kolových sil a silových účinků v kloubovém spojení jednotlivých článků vozové skříně.
3. Pevnostní výpočet prvků sekundárního vypružení tramvaje, stanovte vlastní frekvence houpání, kývání vozidla a vlastní kmitové tvary.
4. Výpočet změn kolových sil podvozku s tuhým rámem a podvozku s torzně poddajným rámem. Vyhodnoťte přínos torzně poddajného rámu.
5. Sestavný výkres trakčního podvozku individuálním pohonem volně otočných kol s detailním řešením sekundárního vypružení.
6. Průvodní technickou zprávu, obsahující popis a hodnocení navrženého řešení.

Rozsah průvodní zprávy: min. 55 stran textu (včetně obrázků, grafů a tabulek v textu)

Rozsah grafických prací:

Doporučené podklady: Odborné časopisy, firemní literatura, patentová literatura, normy.
Skripta ČVUT:
KOLÁŘ, J.: Teoretické základy konstrukce kolejových vozidel
ŠÍBA, J.: Kolejová vozidla II, Kolejová vozidla II - pojezd
MARUNA, Z., HOFFMANN, V., KOULA, J. KROUPOVÁ, Z.: Metodika konstruování kolejových vozidel - osobní a nákladní podvozky

Vedoucí diplomové práce: doc. Ing. Josef Kolář, CSc.

Odborný konzultant:

Datum zadání diplomové práce: 10.4.2015

Datum odevzdání diplomové práce: 19.6.2015

Studijní a zkušební řád ČVUT v Praze, čl. 21, odst. 4: „Pokud student neodevzdal bakalářskou nebo diplomovou práci v určeném termínu, tuto skutečnost předem písemně zdůvodnil a omluva byla děkanem uznána, stanoví děkan studentovi náhradní termín odevzdání bakalářské nebo diplomové práce. Pokud se však student řádně neomluvil nebo omluva nebyla děkanem uznána, může si student zapsat bakalářskou nebo diplomovou práci podruhé."

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

20.4.2015
Zadání diplomové práce převzal dne:

.....
podpis diplomanta

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE Fakulta strojní

Doc. Ing. Oldřich **VÍTEK**, Ph.D.
vedoucí ústavu 12120

Prof. Ing. Michael **VALÁŠEK**, DrSc.
děkan fakulty strojní

Anotace

Práce se zabývá podvozkem s poddajným rámem nízkopodlažní tramvaje. Popisuje provozní i konstrukční aspekty podvozku a jejich vazbu na vozidlo. Součástí práce je hmotnostní bilance vozidla, návrh vypružení, svislá dynamika vozidla a vyhodnocení přínosu poddajného rámu.

Klíčová slova

Kolejová vozidla, nízkopodlažní tramvaj, trakční podvozek, poddajný rám, hmotnostní bilance, svislá dynamika, změna kolových sil

Annotation

Thesis is concerned in traction bogie with flexible frame for lowfloor tram. Describes operation and construction aspects of bogie and its connection to the vehicle. Part of thesis is weight evaluation of vehicle, design of suspension, dynamics and evaluation of flexible frame benefits.

Key words

Rail vehicle, lowfloor tram, traction bogie, flexible frame, weight evaluation, dynamics, change of wheel forces

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně, s použitím literatury a pramenů uvedených v závěru této práce.

V Praze dne 19. 6. 2015 Martin Komínek

Poděkování

Děkuji vedoucímu práce doc. Ing. Josefu Kolářovi CSc. a odbornému konzultantovi Ing. Michalu Štillerovi ze Škody Transportation za cenné rady a připomínky při tvorbě této práce.

Dále bych rád poděkoval mé rodině za podporu po celou dobu studia.

1 Obsah

2 Předmluva ... 10

3 Rešerše ... 11

3.1 Nízkopodlažní podvozky s pevným rámem ... 11

3.1.1 ADtranz ... 11

3.1.2 Alstom ... 12

3.1.3 Bombardier ... 13

3.1.4 Siemens ... 15

3.1.5 Škoda Transportation ... 17

3.2 Podvozky s poddajným rámem ... 20

3.2.1 Koncept PCC ... 20

3.2.2 Alstom Arpege ... 21

3.2.3 TransTec Vetschau ... 22

4 Popis vozidla ... 23

5 Hmotnostní bilance ... 24

5.1 Vlastní hmotnost ... 25

5.2 Užitečné zatížení ... 26

5.2.1 Sedící cestující ... 27

5.2.2 Stojící cestující ... 28

5.3 Shrnutí bilance ... 30

6 Podvozek ... 31

6.1 Dvojkolí – portálová náprava ... 32

6.2 Primární stupeň vypružení ... 33

6.3 Rám ... 33

6.4 Sekundární stupeň vypružení ... 35

6.5 Podélné a příčné dorazy ... 37

6.6 Pohon ... 37

6.7 Brzda ... 38

6.8 Zástavba do skříně vozidla ... 39

7 Vypružení 41
7.1 Šroubovité vinuté pružiny 41
7.2 Pryžový sloupek 49
7.3 Pryžová podložka pružin 50
7.4 Pružný doraz 50
7.5 Charakteristika svislého vypružení 51
7.6 Charakteristika příčného vypružení 53
8 Svislá dynamika 55
8.1 Dynamický model 55
8.2 Hmotnosti 55
8.3 Rozměry 56
8.4 Pohybové rovnice 57
8.5 Vazební rovnice 58
8.6 Dosazení do rovnic energií 59
8.7 Derivace 61
8.8 Matice 62
8.8.1 Matice hmotnosti 62
8.8.2 Matice tlumení 63
8.8.3 Matice tuhosti 64
8.9 Vyhodnocení systému 65
8.9.1 Vlastní frekvence 65
8.9.2 Vlastní tvary kmitu 67
8.9.3 Odezva na nenulové počáteční podmínky 68
9 Změna kolových sil na zborcené koleji 69
9.1 Tuhost pryžového kloubu 69
9.2 Geometrie zborcení 71
9.3 Změna sil na rámu 72
9.4 Změna kolových sil 75
9.5 Vyhodnocení změny kolových sil 76

10 Průjezd obloukem 77
10.1 Příčné síly 77
10.2 Řídící síly 78
10.3 Vodící síly 80
11 Závěr 82
12 Použitá literatura 83
13 Seznam příloh 83
14 Seznam obrázků 83
15 Seznam tabulek 85

2 Předmluva

Vozidla povrchové městské hromadné dopravy často jezdí po tratích budovaných během různých etap historického a technického vývoje. Často se tak můžeme setkat v jednom dopravním systému s mnoha typy traťových těles se stářím až desítek let. Tyto mají navíc zpravidla charakter oblouků velmi malých poloměrů a v některých městech i velkých sklonů stoupání. V kombinaci s nedostatečnou údržbou tratí se pak na nich vyskytují výrazné nerovnosti ve svislém i příčném směru.

Diplomová práce se zabývá studií podvozku s poddajným rámem, jehož cílem je snížení silových účinků při jízdě po takto nerovných tratích.

Práce začíná rešerší stávajících řešení trakčních podvozků tramvají a jejich zástavbou do vozidla. Následuje představení vozidla, jeho hmotnostní bilance a stanovení zátěžných stavů.

Poté je předložen návrh podvozku, který by měl přinést minimalizaci změn sil v kontaktu kolo-kolejnice při jízdě po nerovných tratích. V dalších kapitolách jsem provedl výpočty zaměřené především na vypružení vozidla. A to jak pevnostní výpočet sekundárního vypružení, tak analýzu svislé dynamiky celého vozidla.

Na závěr je uveden rozbor silového působení podvozku na zborcené koleji a hodnocení přínosu podvozku s poddajným rámem oproti podvozku s rámem pevným.

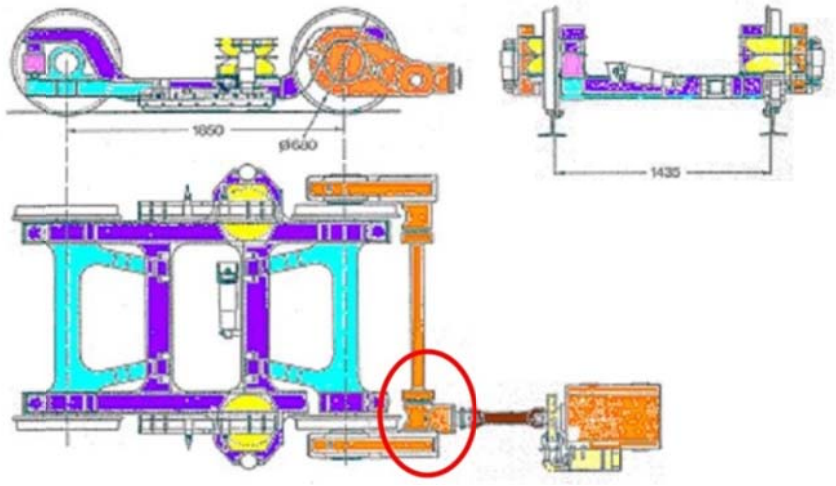
3 Rešerše

Téma tramvají je velmi obsáhlé, proto se v úvodní rešerši soustředím jen na podvozky 100% nízkopodlažních tramvají a jejich zástavbou do vozidla. V rešerši uvádím výběr podvozků od největších světových výrobců, a právě podle jejich názvu jsem rešerši seřadil. Jednotlivé firmy se rozcházejí v přístupu k poskytování informací a tak někde uvádím méně údajů než u jiných firem.

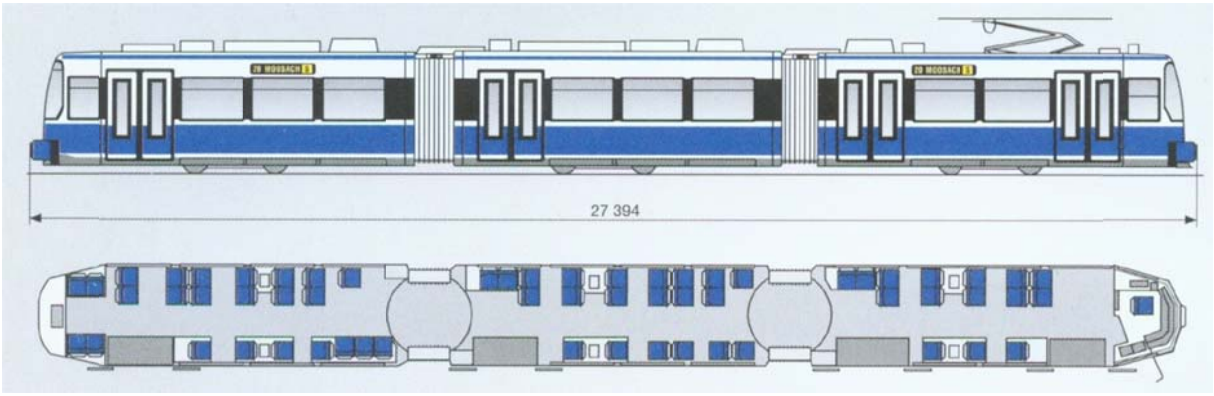
3.1 Nízkopodlažní podvozky s pevným rámem

3.1.1 ADtranz

Společnost ADtranz jako první výrobce na světě představila na začátku 90.let 100% nízkopodlažní tramvaj GT6N. Volně otočná kola nápravy byla poháněna dvojicí čelních převodovek připojených torzním hřídelem k rozvodovce. Elektromotor s kotoučovou brzdou byl umístěn na skříni vozidla a hnací moment byl na rozvodovku přiváděn přes kloubovou hřídel. V podvozku byla poháněna vždy jen jedna náprava. Kvůli asymetrickému umístění sekundárního vypružení byla trakční náprava zatížena více než náprava běžná a tramvaj tak mohla dosáhnout 60% adhezní tíhy. Vedení dvojkolí je kyvným ramenem, které je součástí nápravy.



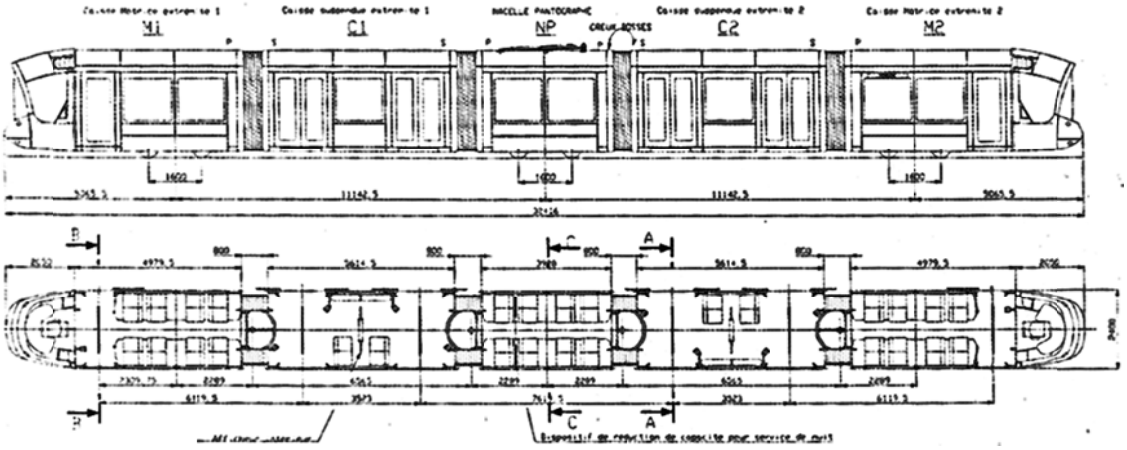
Obrázek 3.1 Podvozek GT6N



Obrázek 3.2 Tramvaj GT6N

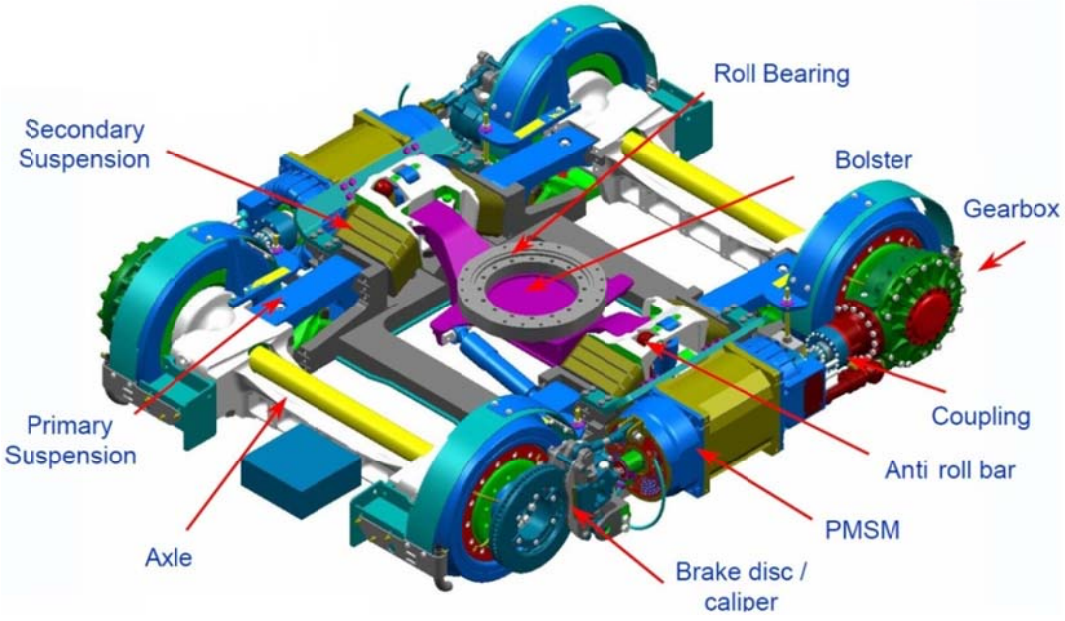
3.1.2 Alstom

Firma na začátku tisíciletí přišela s tramvají Citadis v konceptu krátších článků podvozkových a delších článků zavěšených. Tramvaj pak mohla být sestavena po třech, pěti nebo sedmi článcích. Použité podvozky Arpege jsou torzně poddajné a jejich konstrukci popisuji dále v kapitole 3.2.2



Obrázek 3.3 Tramvaj Citadis [1]

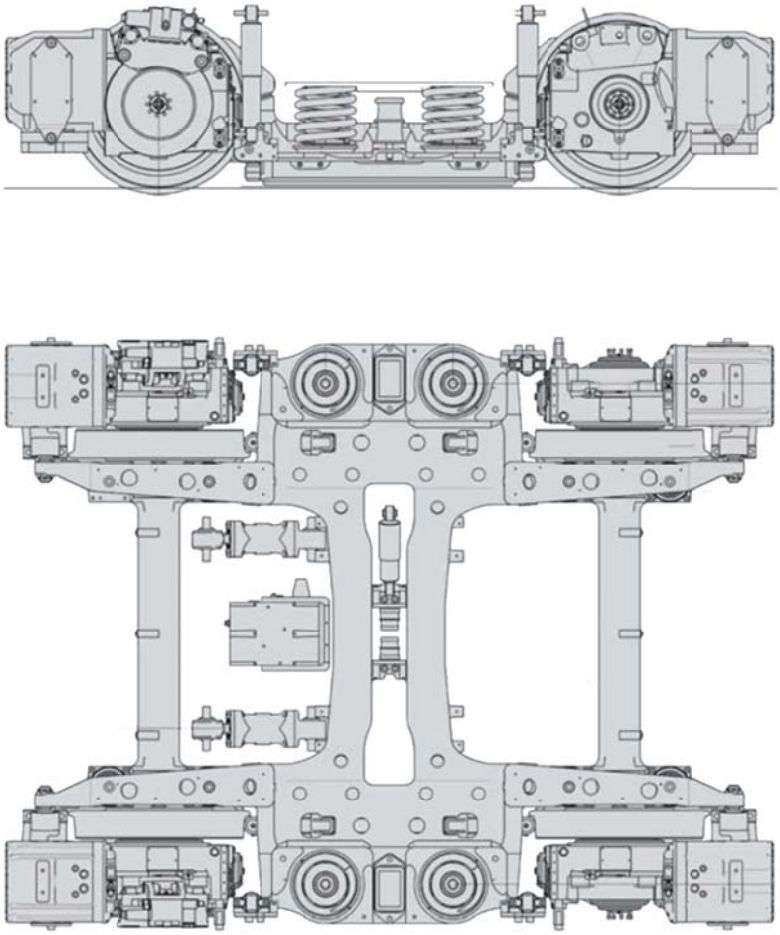
Alstom pak nadále řadu Citadis vyvíjel a s ní i podvozky. Nejnovější je podvozek Ixege, který se objevil na Citadis X04. Kola jsou spojena dutou nápravou pro přenos zatížení skříně, a která slouží i jako ložiskový domek a další klasickou nápravou pro přenos točivého momentu. Je vybaven pryžovými bloky v primárním i sekundárním stupni vypružení. Pohon odpruženým synchronním motorem s permanentními magnety a nápravovou převodovkou. Podvozek má kolébku s ložiskem pro uložení skříně a je otočný. Základní verze je max. rychlost *70km/h*, upravená až *100 km/h* (systém tram-train).



Obrázek 3.4 Podvozek Ixege

3.1.3 Bombardier

Incentro má H-rám svařený z odlitků a portálové nápravy s volně otočnými koly. Každé kolo má svůj vlastní částečně odpružený pohon vodou chlazeným asynchronním motorem *45kW* s hypoidní převodovkou. Odpružené obruče kol, primární vypružení pomocí osmi kuželových pryžových elementů. Sekundární vypružení jsou ocelové šroubovité pružiny na široké příčné bázi se zprogresivněním pomocí elastomerových bloků. Přenos podélné síly je pomocí dvou táhel na příčníku. Nosnost je *10 t/ náp*, hmotnost podvozku *4,8 tun*. Výška podlahy v centrální části *350mm* nad TK, *400mm* nad sekundárním vypružením.

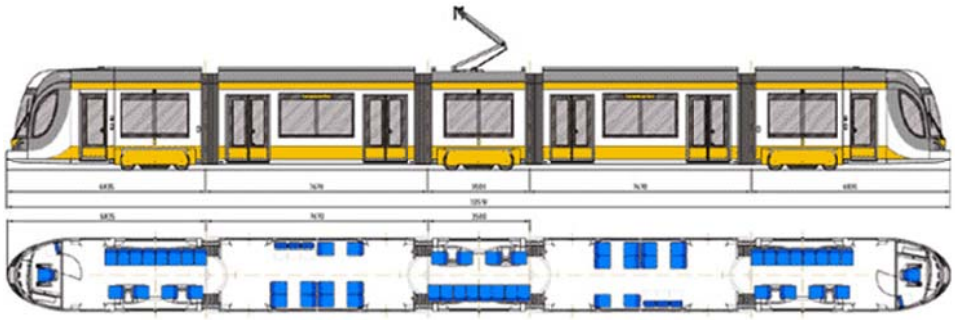


Obrázek 3.5 Podvozek Incentro

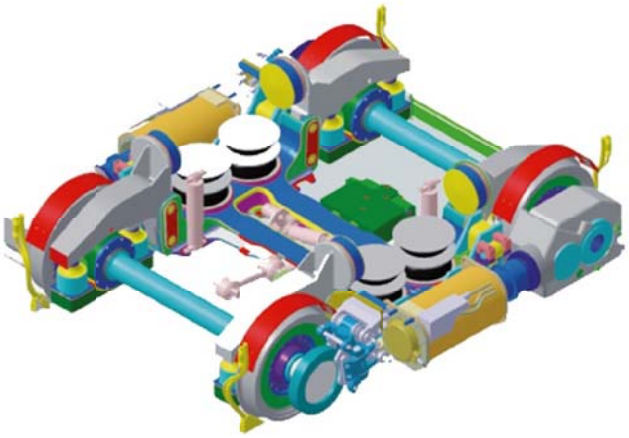
Tramvaj Incentro původně vznikla ve firmě ADtranz, kterou Bombardier koupil a tramvaj začal i vyrábět. Bylo jich ale vyrobeno jen několik desítek kusů a poté Bombardier prodával svou vlastní tramvaj Flexity která z Incentra přímo vychází. Na následujících obrázcích jsou uvedeny podvozky použité na vozidlech Flexity první a druhé generace.

Obrázek 3.6 Flexx Urban 1000 [2]

Podvozek Flexx Urban 1000 je podobný tomu na tramvaji Siemens Combino (viz následující kapitola). Používá ale klasické nápravy a kuželo-čelní odpruženou převodovku. Výkon *2x100kW*, nosnost *10 t/náp*. Sedadla byla nad podvozky umístěna asymetricky. Na jedné straně 8 sedadel podél stěny, na druhé 4 sedadla čelem/zády ke směru jízdy.

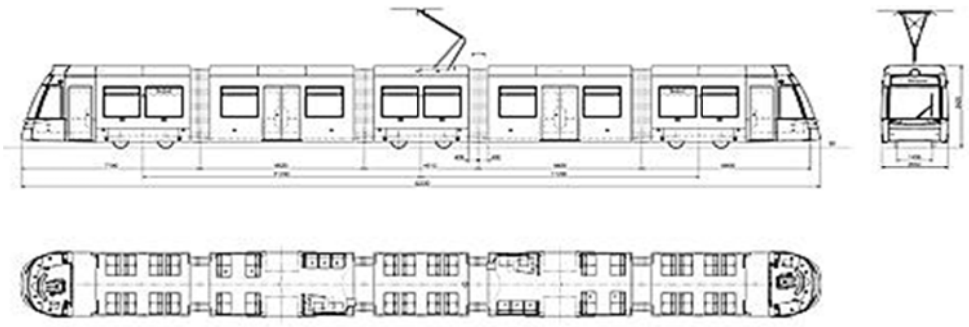


Obrázek 3.7 Tramvaj Flexity [2]



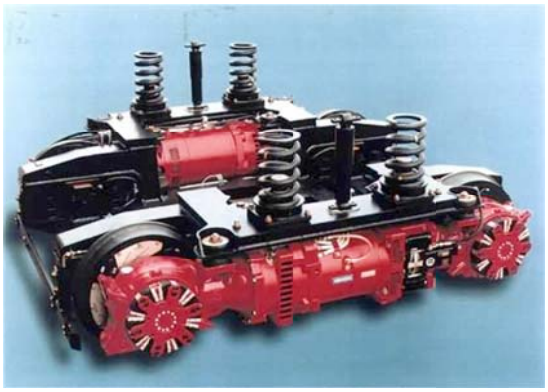
Obrázek 3.8 Flexx Urban 3000 [2]

Nejnovější podvozek od této firmy je Flexx Urban 3000. Proti předchozímu podvozku zde došlo k přesunu sekundárního vypružení na podélník, změně převodovky na částečně odpruženou, zvýšení výkonu na *2x125kW* a nosnosti na *12 t/náp*. Existují varianty pro rozchody *1000* a *1435mm*. Setkat se s nimi můžeme na tramvajích Flexity 2. Sedadla jsou uložena symetricky v uspořádání 2+2 na šířku vozidla, celkem tedy 16 sedadel.



Obrázek 3.9 Tramvaj Flexity 2 [2]

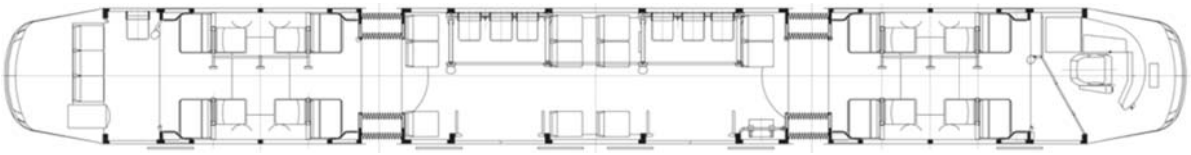
3.1.4 Siemens



Obrázek 3.10 Podvozek SF30 [3]

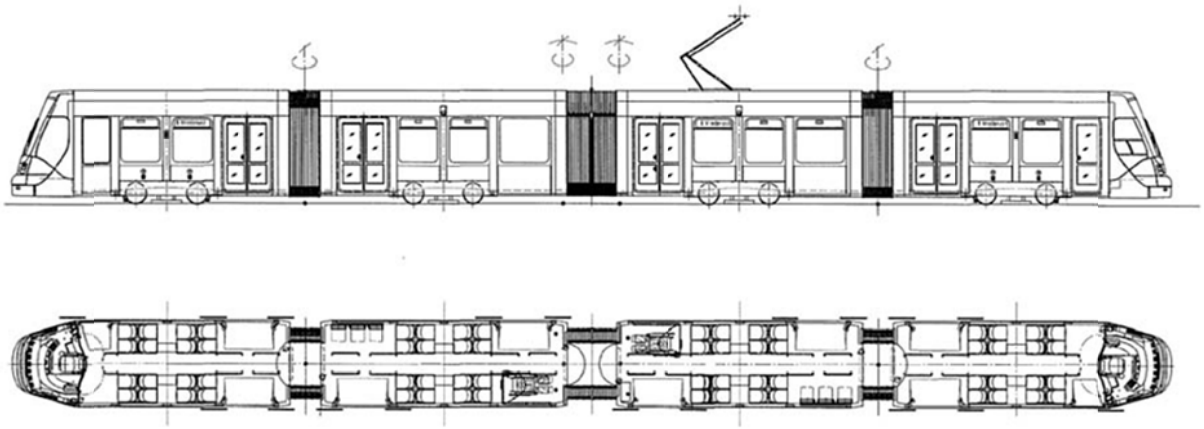
Siemens představil na konci 90.let tramvaj Combino. Hlavní novinkou na této tramvaji byla hrubá stavba složená z hliníkových profilů a šroubových spojů. Podvozky hnané i tažené byly částečně otočné. Měly stejný H-rám a lišily se pouze osazením motorem nebo kotoučovými brzdami. Díky lomené nápravnici je podlaha nad celým podvozkem ve výšce 350mm nad TK. Individuální pohon kol je řešen jako celoodpružený. Asynchronní elektromotor o výkonu 100kW je umístěn podélně vně rámu a má výstup z obou stran na hypoidní převodovky s dutou hřídelí. Přes pryžové klouby je moment převeden na kolo. Na jedné straně vzduchem chlazeného motoru je kotoučová brzda. Podvozek je vybaven i kolejnicovou brzdou. Primární stupeň vypružení je řešený pomocí osmi pryžových kuželových elementů. Sekundární vypružení nejprve čtyřmi ocelovými vinutými pružinami, v pozdějších verzích pryžovými elementy.

Kvůli prostoru sekundárního vypružení nad podvozkem bylo umístěno pouze 8 sedadel. Čtyři normální šířky a čtyři široké. V některých městech jsou vnitřní sedadla otočena do kruhu po třech na každé straně uličky. A díky tomu bylo nad podvozkem umístěno 10 sedadel. Tramvaje Combino měly krajní články podvozkové, prostřední článek byl zavěšen. Takto se stavěly do souprav po 3,5,7 článcích.



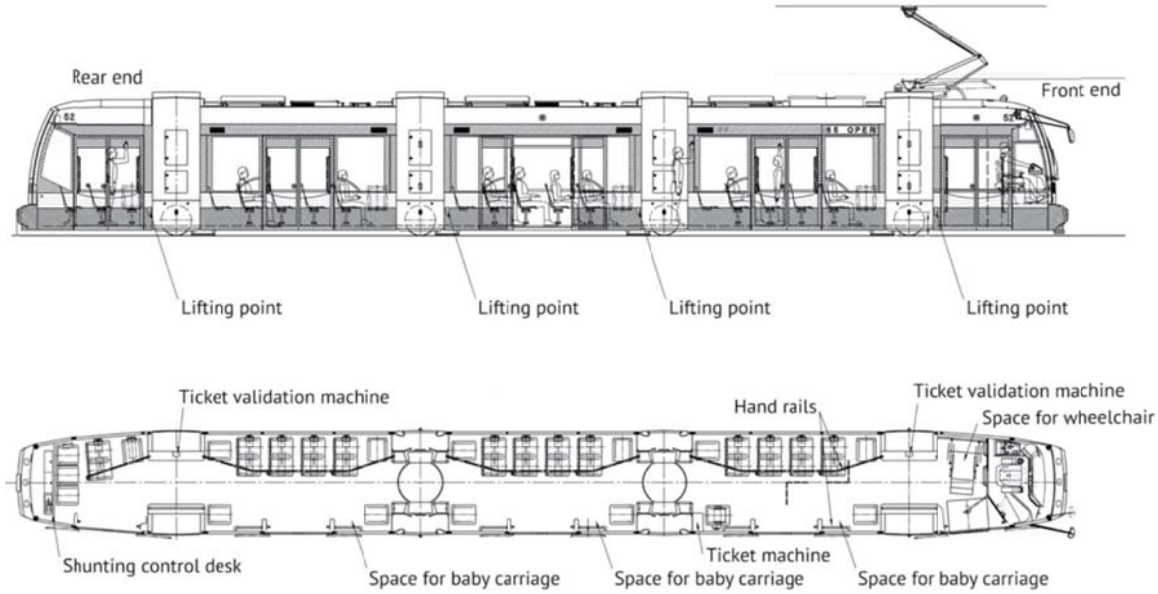
Obrázek 3.11 Tramvaj Combino [3]

Později vznikly další verze této tramvaje, až po nejnovější Avenio, které mají velmi podobné podvozky. Sekundární vypružení se přesunulo vedle motoru na podélník rámu. Tím vznikl prostor ve skříni vozidla pro umístění 16 sedadel v prostoru podvozku při uspořádání 2+2 na šířku vozidla. Prostředních 8 sedadel je vyvýšeno o cca *350mm* kvůli schodu přes motor. Výška schodu je snížena kvůli vyvýšené podlaze skříně v centrální části podvozku.



Obrázek 3.12 Tramvaj Avenio [3]

Dalším významným vozidlem tohoto výrobce je tramvaj ULF pro Rakouskou Vídeň. Jde o tříčlánkové vozidlo (viz. Obrázek 3.13) a s jednonápravovými podvozky a výškou podlahy *220mm* nad TK v uličce v celé délce vozidla a nástupní hranou *197mm* nad TK. Odtud pochází její název Ultra Low Floor, zkráceně tedy ULF. Podvozky jsou umístěny zhruba uprostřed krajních článků a v mezivozových přechodech.



Obrázek 3.13 Tramvaj ULF [3]

Podvozky nekonvenční koncepce jsou ve verzích trakční i běžné. Volně otočná kola jsou uložena v ložiskových komorách a komory jsou pak spojeny nápravou pro zajištění geometrických rozměrů dvojkolí. Na pryžových blocích primárního vypružení je umístěn rám, který je vytvarován kolem průchozí uličky kabiny vozidla. Rám tedy obklopuje prostor pro cestující a na něm je zavěšena skříň. Sekundární vypružení je řešeno pomocí dvou šroubových pružin a hydropneumatických

tlumičů. Pohon je řešen svisle zavěšeným motorem dříve kapalinou, dnes vzduchem chlazeným a hypoidní převodovkou. Nosnost do *12t/náp,* rychlost *70km/h*, výkon *2x52kW* a rozchod *1435mm*. Podvozek je vybaven i krátkou kolejnicovou brzdou.

Obrázek 3.14 Podvozek ULF v dílně [5]

Obrázek 3.15 Tramvaj ULF bez bočního krytu [5]

3.1.5 Škoda Transportation

Tramvaj 15T byla první 100% nízkopodlažní tramvaj této společnosti, vyvinutá pro náročné tratě v Praze, přičemž tříčlánková verze začala jezdit v roce 2008. Konstrukce podvozků pod krajními články a v mezivozových přechodech je velmi podobná. Volně otočná kola jsou poháněna synchronním motorem s permanentními magnety zavěšeným na rámu. Kotvou motoru prochází kloubová hřídel přenášející hnací moment na kola. Rám je uložen na primární stupeň vypružení, který tvoří osm pryžových elementů. Kolébky jsou uloženy na čtyři sady šroubovitých pružin sekundárního stupně. Krajní článek má jen jednu kolébku, s osou otáčení mimo osu symetrie podvozku. Výška podlahy nad podvozkem je *450 mm* nad TK. Nad prvním podvozkem je kabina řidiče, nad středními podvozky jsou čtyři sedadla na krajích přechodů, nad posledním podvozkem je pět sedadel. Výkon motorů je *4x46kW*, nosnost cca *10t/náp*

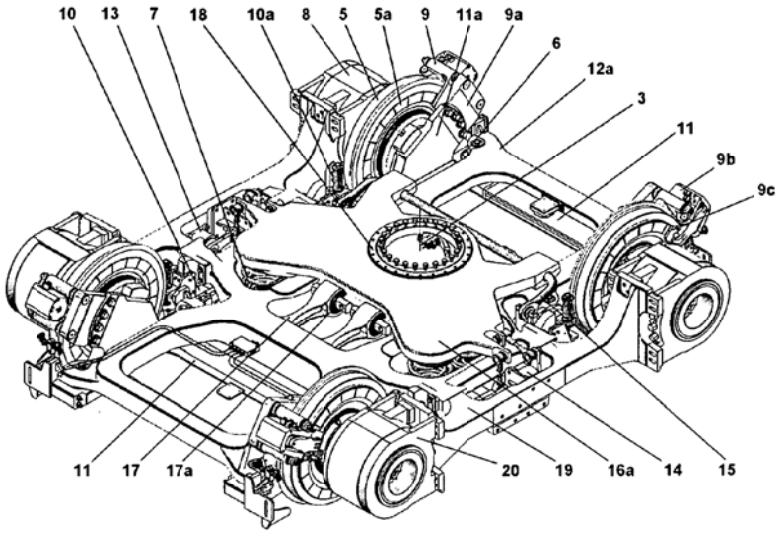


Fig. 4 - Krajní podvozek

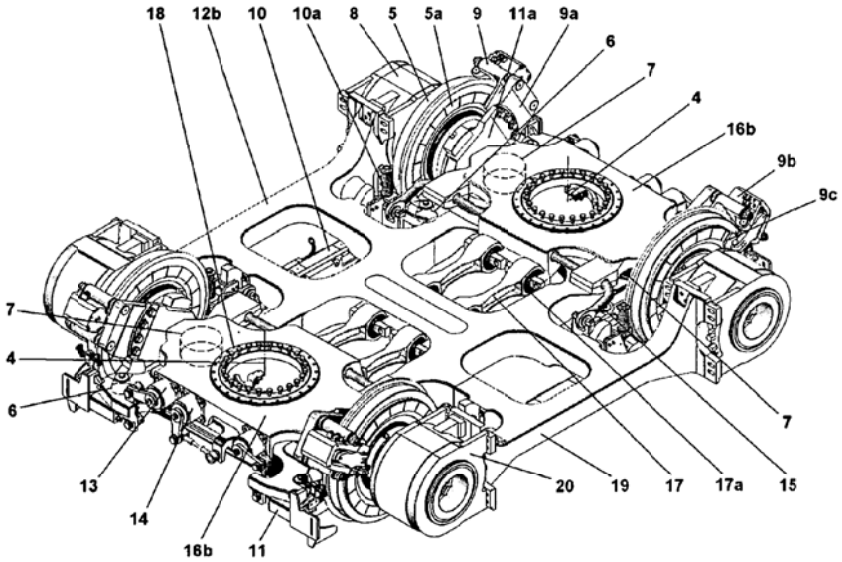
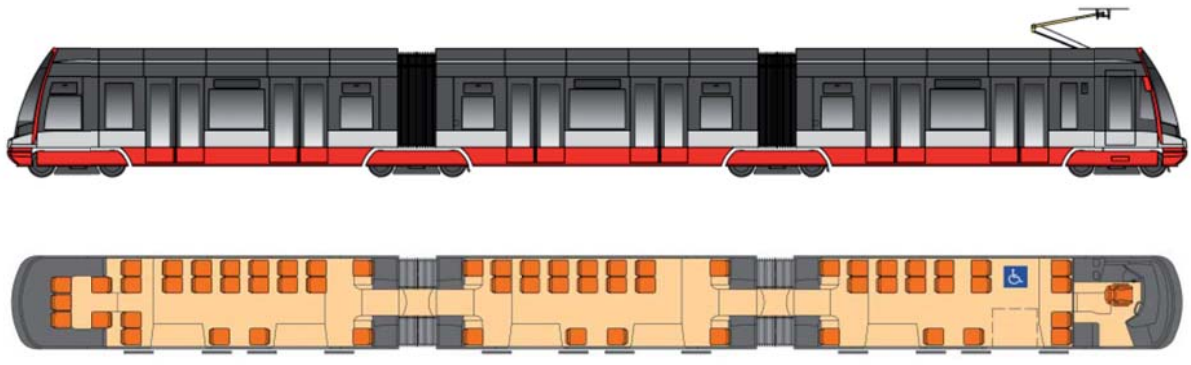


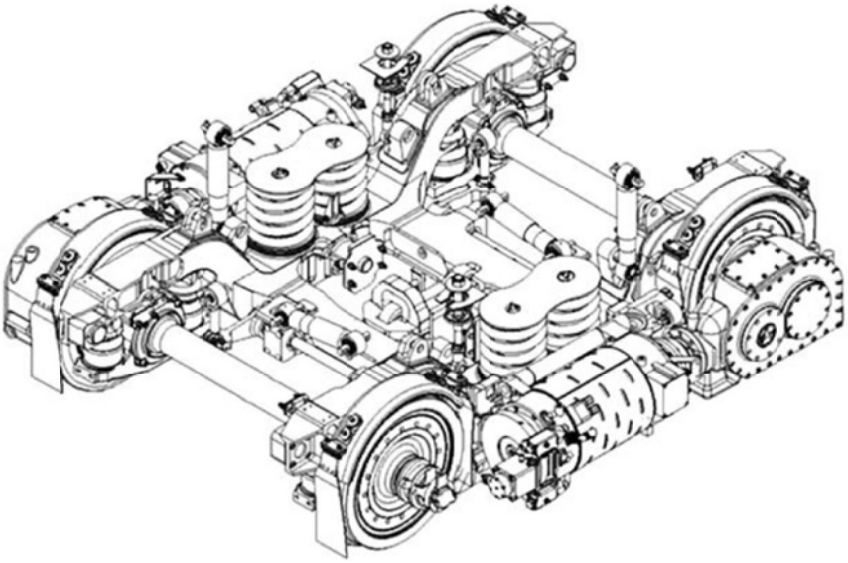
Fig. 5 - Prostřední podvozek

Obrázek 3.16 Podvozky 15T [8]



Obrázek 3.17 Tramvaj 15T [6]

Poté Škodovka přišla s tramvají 26T, na které byly podvozky neotočné s otevřeným H-rámem a klasickým dvojkolím s menším průměrem kol. Tyto pak zkombinovala na tramvaji 30T s podvozky otočnými z tramvaje 15T. Vzniklo tak pětičlánkové vozidlo s dvěma krajními podvozky otočnými a dvěma středními podvozky neotočnými.



Obrázek 3.18 Podvozek tramvaje 26T [6]

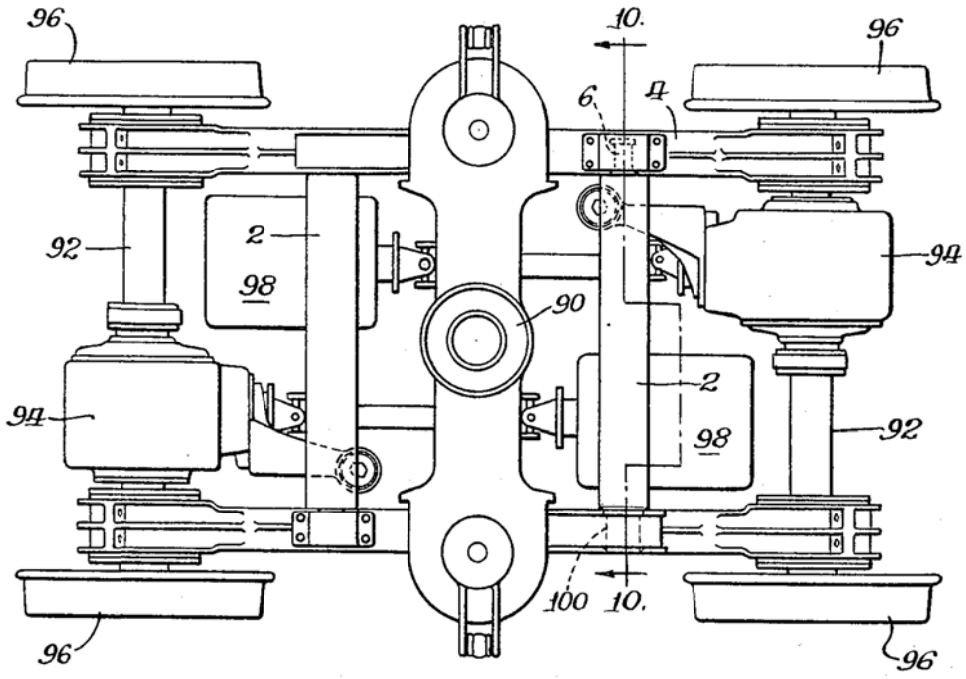
Obrázek 3.19 Tramvaj 30T [6]

3.2 Podvozky s poddajným rámem

Podvozky s poddajným rámem jsou výsledkem požadavku na co nejnižší cenu podvozku (absence primárního stupně vypružení) a zároveň potřebě zlepšení účinků vozidla na trať (přizpůsobení kol zborcené koleji). Nejdříve se objevily na nákladních podvozcích železničních vozidel, ale později si našly cestu i do vozidel městské hromadné dopravy.

3.2.1 Koncept PCC

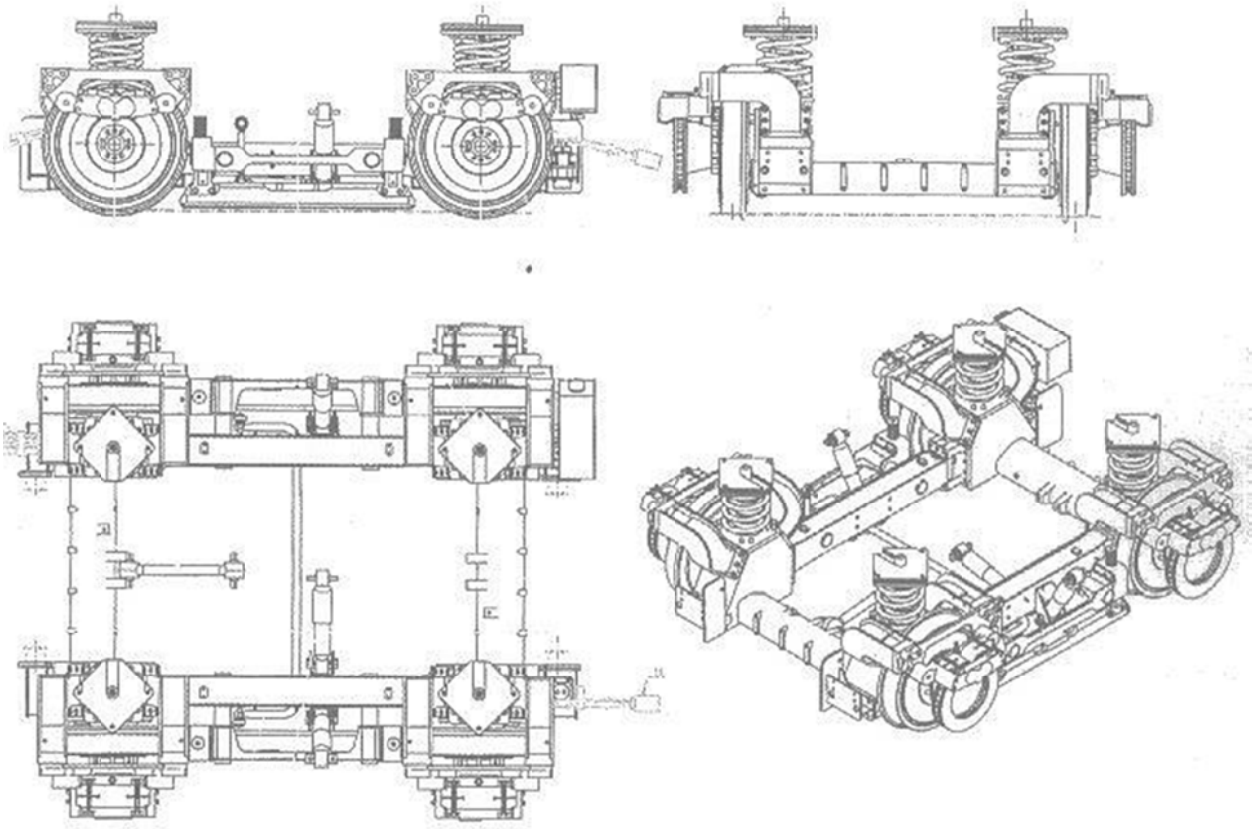
Torzně poddajné rámy se v tramvajích začali používat od 30. let minulého století v konceptu amerických podvozků PCC. Na licenci tohoto konceptu byly postaveny i československé tramvaje ČKD Tatra, kde se v pozdějších modifikacích a zejména modernizacích začalo objevovat i primární vypružení. Tento koncept výborně ilustruje Obrázek 3.20 z patentu [10]. Podélník slouží i jako domek nápravových ložisek. Pouze jeden příčník je k podélníku připojen pevně, druhý je uchycen pružně, a sice pryžovým pouzdrem (pozice 6).



Obrázek 3.20 Patent US 3398700 A [10]

3.2.2 Alstom Arpege

Tento podvozek je první nízkopodlažní podvozek s poddajným rámem. Volně otočná kola jsou zavěšená na torzně poddajný rám bez primárního vypružení. Sekundární vypružení je pomocí 4 šroubových pružin na ložiskových komorách, které zároveň plní funkci převodovky. Motor je umístěn příčně před kolem. Pomocí sestupného převodu je výkon sveden k rozváděcímu hřídeli v duté nápravě a odtud pak na kolové převodovky. Osazeny jsou i kolejnicové brzdy. Vzhledem k absenci primárního vypružení má podvozek velký podíl neodpružené hmoty, a tak je určen především pro nové, dobře udržované tratě s malými geometrickými odchylkami, ideálně v kombinaci s pružnou tratí.



Obrázek 3.21 Podvozek Arpege [1]

3.2.3 TransTec Vetschau

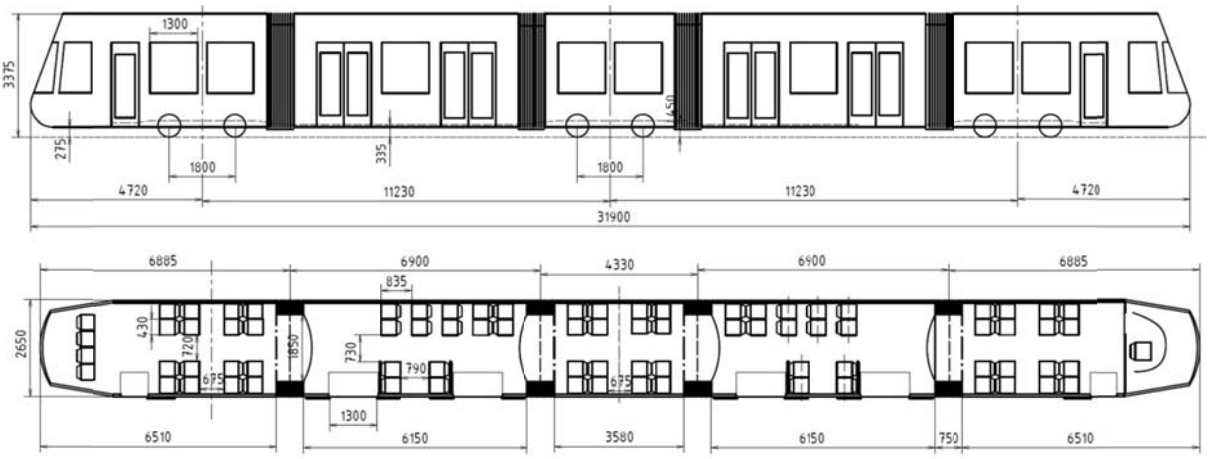
V roce 2014 představila firma TransTec Vetschau GmbH na veletrhu Innotrans podvozek s poddajným rámem a individuálním pohonem kol. V současnosti mi není známo žádné použití na vozidle v praxi a firma tento podvozek neprezentuje ani na svých webových stránkách. Veškeré informace jsou pouze z letáku, který rozdávala na veletrhu. Statická nosnost 12t/náp., široký rozchod *1524 mm*, rozvor *1900 mm*, hmotnost *4,7 tuny*.

Obrázek 3.22 Podvozek firmy TTV

Obrázek 3.23 Převodovka Durutram RSK-5-7,82

4 Popis vozidla

Modelové vozidlo, které uvažuji pro účely této práce, je podobné tramvaji 26T ForCity Classic od Škody Transportation. Je to pěti-článková 100% nízkopodlažní tramvaj s třemi články podvozkovými a dvěma články nesenými. Krajní podvozky jsou hnací, prostřední podvozek je běžný.



Obrázek 4.1 Modelová tramvaj

Díky historickému vývoji tramvajové dopravy je průjezdný profil, od kterého se šířka skříně odvíjí, pro každou zemi jiný. V západní Evropě převládá šířka skříně *2300* a *2450 mm*, která závisí i na konfiguraci vozidla. Mnou použitá šířka *2650 mm* je určena pro nově budované tramvajové tratě a pro země východní Evropy a Asie (Maďarsko, Turecko,…), tato má také největší potenciál k vysokým nápravovým tlakům. Tato šířka neplní průjezdný profil v České republice, a v daném uspořádání skříní vozidla je maximální šířka skříně cca *2450 mm*. Kapacita je 80 sedících cestující a 132/242 stojících cestující

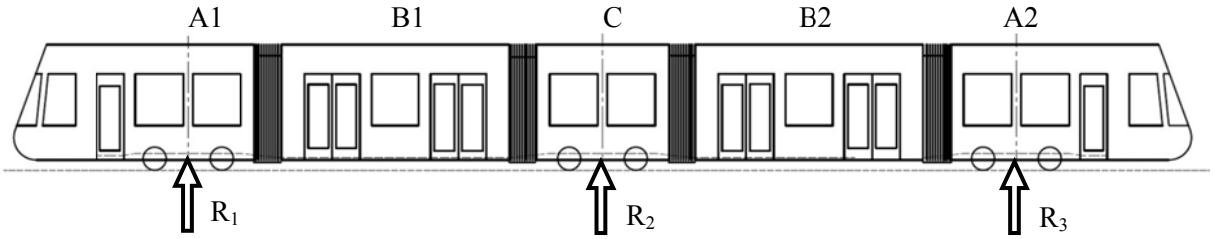
Skříně se většinou projektují s důrazem na modularitu. To znamená tak, aby skříň měla minimální rozdíly ve verzích *2300* až *2650 mm* šířky skříně. Stejně tak možnost prodlužovat vozidlo jen počtem článků, v mém případě sestava ze tří, pěti nebo sedmi článků. Zpravidla se také skříň navrhuje jako obousměrná a jednosměrná varianta je z ní pouze jednoduše odvozena. Zároveň musí mít odpovídající crashovou odolnost, protože u vozidel povrchové městské hromadné dopravy je vyšší riziko střetu s překážkou. Tramvaje také zpravidla nepoužívají elektronické zabezpečovací zařízení jako konvenční železnice a tak mohou dvě vozidla narazit i do sebe navzájem.

Dvoukřídlé dveře mají světlou šířku *1300 mm*, jednokřídlé *800 mm*. Díky počtu *4* a *2 ks* získávám dveřnatost *21,3%* což vede k vyšší rychlosti výměny cestujících a kratším dobám stráveným ve stanici.

Vozidlo je cíleno do provozu v centrech měst a zároveň jako rychlodráha na okraji aglomerací. Odtud plyne maximální nápravový tlak *125 kN/náp* a maximální rychlost *70 km/h*.

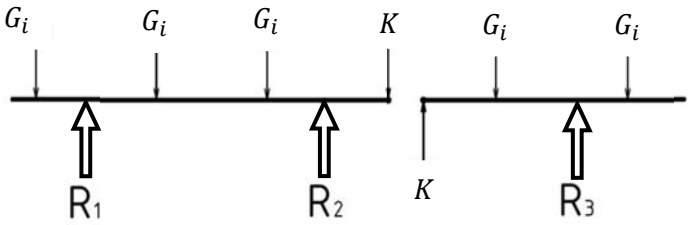
5 Hmotnostní bilance

Hmotnostní bilanci vozidla provádím, abych zjistil zatěžující síly podvozku a podle toho dimenzoval jeho komponenty.



Obrázek 5.1 Označení článků

Mezičlánkové vazby jsou v každém přechodu jiné. Jejich kombinace musí zajišťovat dodržení průjezdného profilu a zároveň musí umožnit vozidlu přizpůsobit se trati (přejezd přes vrchol, průjezd obloukem, postavení na zborcené koleji). Některé tedy umožnují natáčení kolem jedné osy, některé kolem více os. Nicméně z pohledu hmotnostní bilance mohu v bokorysu vozidla vazby v přechodech mezi články *A1-B1* a *B1-C* označit za pevné, a díky tomu mohu tuto část vozidla prohlásit za spojitou část nosníku. Následuje kloub v přechodu *C-B2* a díky válcovému spojení v přechodu *B2-A2* mám další spojitou část nosníku. Podvozky, přesněji tedy síly v sekundárním stupni představují podpory R_1, R_2, R_3. Dohromady tedy mám nespojitý nosník se třemi podporami. Pro výpočet konkrétních hodnot reakcí ho můžu s výhodou rozdělit na dva samostatné nosníky (články *A1,B1,C* a *B2,A2*) a zavést sílu *K* v kloubu vozidla. Na tento pak postupně aplikuji zatížení vlastní hmotností, sedícími a stojícími cestujícími a hledám reakce v podporách, respektive síly v sekundárním stupni vypružení (schematicky viz. Obrázek 5.2). Z koncepce sestavení vozidla vyplývá, že krajní podvozky budou zatížené jinak než podvozek prostřední, a to se pak odrazí v různých nápravových tlacích a nestejných tuhostech vypružení.



Obrázek 5.2 Silové schéma

Nejprve řeším pravý nosník. Z rovnice momentů sil ke kloubu najdu hodnotu reakce R_3 a z rovnováhy sil ve svislém směru dopočítám sílu v kloubu *K*.

$$R_3 = \frac{\sum M_G}{l_{R3}} \qquad\qquad K = \sum G_i - R_3$$

Potom mohu přejít k levému nosníku. Z rovnice momentů k podpoře R_1 získám reakci R_2, a z rovnováhy sil ve svislém směru dopočtu reakci R_1.

$$R_2 = \frac{\sum M_G + K \cdot l_i}{l_{R2}} \qquad R_1 = \sum G_i + K - R_2$$

Tímto jsem získal univerzální postup jak řešit reakce jednotlivě od vlastní hmotnosti, sedících cestujících a stojících cestujících. Obdobně by se daly počítat silové účinky od elektro-výzbroje a dalších zařízení.

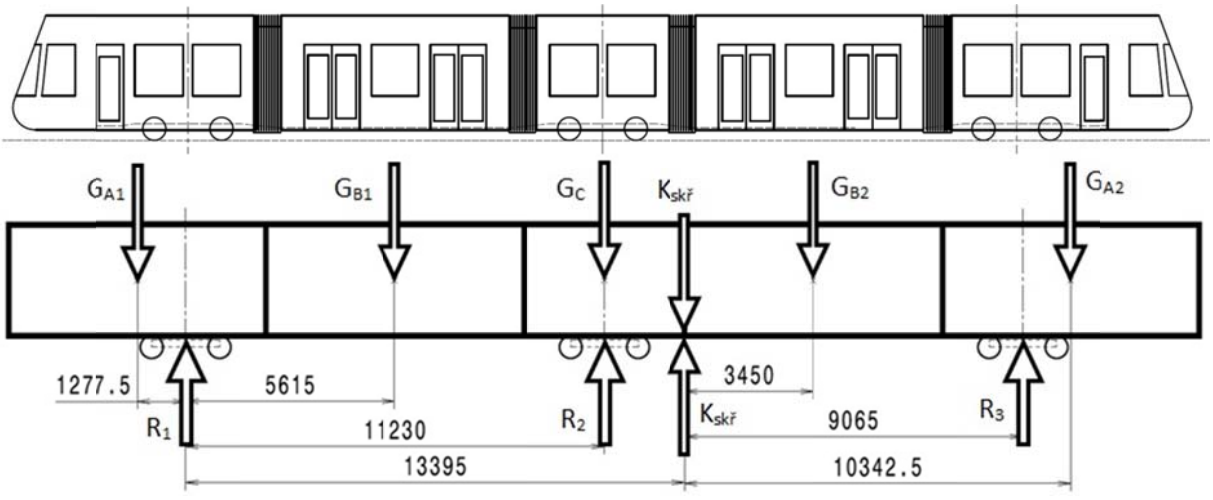
5.1 Vlastní hmotnost

Hmotnosti podvozků jsem částečně převzal z 3D modelu a částečně odhadl. Hmotnost podvozku hnacího je *5 t*, běžného *4 t*. Vzhledem k tomu, že nemám přesnější informace o rozložení hmotnosti po délce vozidla, odhadl jsem jednotkovou hmotnost skříně vozidla na $m_{skř} = 975\ kg/m$ délky vozidla. Pro účely hledání vnějších reakcí mohu nahradit hmotnost článků osamělou silou v místě těžiště článku.

$$G_{čl} = m_{skř} \cdot L_i \cdot g$$

Tabulka 5.1 Vlastní hmotnost

Vlastní hmotnost								
článek		A1	B1	C	B2	A2	suma	
délka	L_i	6,885	6,9	4,33	6,9	6,885	**31,9**	**m**
hmotnost	m_i	6 713	6 728	4 222	6 728	6 713	**31 103**	**kg**
tíha	G_i	65,9	66,0	41,4	66,0	65,9	305,1	kN



Obrázek 5.3 Schéma vlastní hmotnosti

Momentová rovnice ke kloubu pravého nosníku má tvar:

$$R_3 = \frac{\sum M_G}{l_{R3}} = \frac{G_{B2}.l_{B2} + G_{A2}.l_{A2}}{l_{R3}}$$

Silová rovnováha potom:

$$K = G_{B2} + G_{A2} - R_3$$

Následuje momentová rovnice levého nosníku k podpoře R_1.

$$R_2 = \frac{\sum M_G}{l_{R2}} = \frac{G_C.l_C + G_{B1}.l_{B1} - G_{A1}.l_{A1} + K.l_K}{l_{R2}}$$

Silová rovnováha pak dává

$$R_1 = G_{A1} + G_{B1} + G_C + K - R_2$$

Odtud získávám reakce odpovídající silám v sekundárním vypružení a kloubu připadajícím na vlastní hmotnost vozidla. Výsledky jsem shrnul do tabulky.

Tabulka 5.2 Reakce - vlastní hmotnost

i	l_i $[mm]$	G_i $[kN]$	moment k podpoře R1 [kNm]	moment ke kloubu [kNm]	Reakce
A1	1 277	65,9	-84,1		$R_{1sk\check{r}i\check{n}} = 100{,}3\ kN$
B1	5 615	66,0	370,6		$R_{2sk\check{r}i\check{n}} = 104{,}6\ kN$
C	11 230	41,4	465,1		$R_{3sk\check{r}i\check{n}} = 100{,}3\ kN$
B2	3 450	66,0		227,7	$K_{sk\check{r}i\check{n}} = 31{,}6\ kN$
A2	10 342	65,9		681,1	
suma		305,1	751,5	908,8	

Z výsledků je patrné že vlastní hmotnost vozidla působí na všechny podvozky zhruba stejně (liší se jen o cca 4kN). Ve skutečnosti bude snaha krajní podvozky přitížit vlastní vahou více než podvozek prostřední, ale vzhledem k nedostatku informací o elektrovýzbroji, klimatizaci a dalším příslušenství beru tento výsledek jako směrodatný a použiji ho pro další výpočty.

5.2 Užitečné zatížení

Při určování hodnot užitečného zatížení jsem vycházel ze směrnice VDV 152 (Svaz německých dopravních firem), která udává maximální zatížení jako všechna sedadla obsazená + zatížení stojícími cestujícími *5000N/m²*, z čehož při tíze 750 N jedné osoby vychází hustota *6,67 os/m².* Pokud použiju hmotnost jedné osoby *70kg* získám hustotu *7,3 os/m²* (zaokrouhleno na jedno desetinné místo). Provozní zatížení je pak definováno jako sedící + stojící cestující o hustotě *4 os/m²*.

5.2.1 Sedící cestující

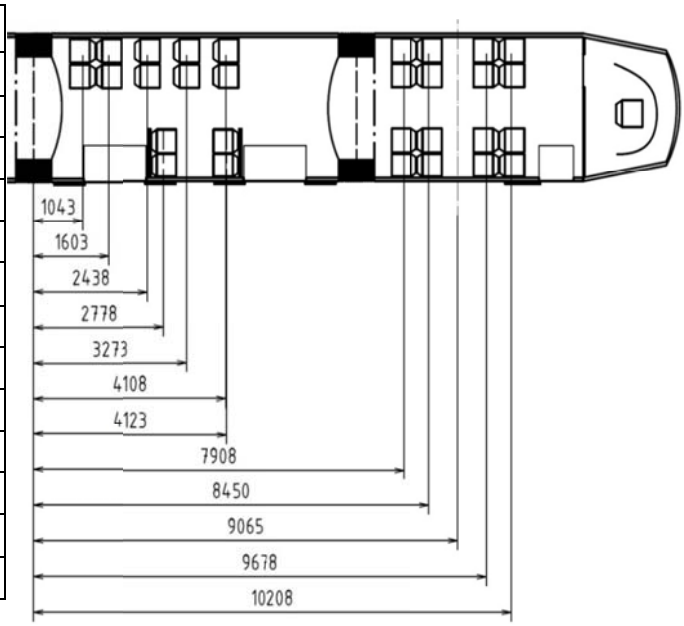
Sedící cestující nahrazuji silou úměrnou jejich počtu, hmotnosti. Potom jednotlivým silám přiřadím rameno a dopočítám moment podle rozmístění v typovém výkresu.

$$G_{se} = n \cdot m_{os} \cdot g \qquad M_{se} = \sum G_{se} \cdot l_i$$

Kde *n* je počet sedadel na šířku vozidla, m_{os} je hmotnost jedné osoby, *g* je gravitační zrychlení a l_i je příslušné rameno. Data jsou shrnutá v následujících tabulkách.

Momenty sedadel ke Kloubu			
l [mm]	poč.sed.	G_{se} [kN]	M_{se} [kNm]
1 043	2	1,4	1,4
1 603	2	1,4	2,2
2 438	2	1,4	3,3
2 778	2	1,4	3,8
3 273	2	1,4	4,5
4 108	2	1,4	5,6
4 123	2	1,4	5,6
7 908	4	2,7	21,7
8 450	4	2,7	23,2
9 678	4	2,7	26,6
10 208	4	2,7	28,0
suma	**30**	**20,6**	**126,1**

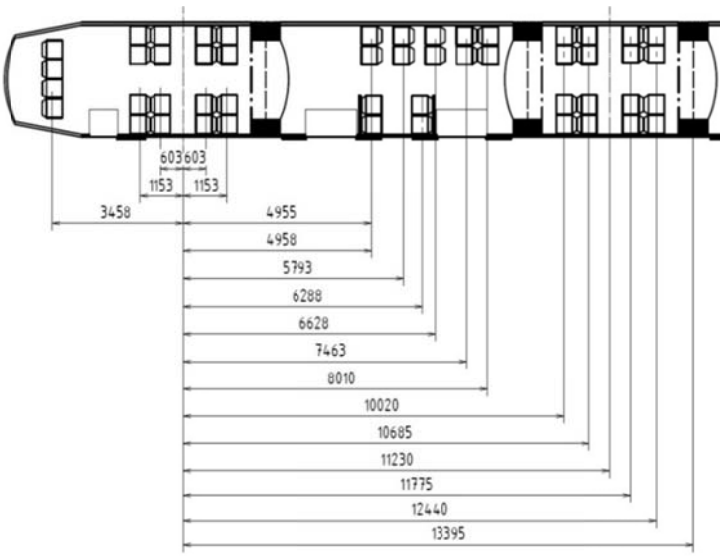
Tabulka 5.3 Momenty ke kloubu



Obrázek 5.4 Ramena ke kloubu

Momenty sedadel k R1			
l [mm]	poč.sed.	G_{se} [kN]	M_{se} [kNm]
3 458	4	2,7	-9,5
1 153	4	2,7	-3,2
603	4	2,7	-1,7
603	4	2,7	1,7
1 153	4	2,7	3,2
4 955	2	1,4	6,8
4 958	2	1,4	6,8
5 796	2	1,4	8,0
6 288	2	1,4	8,6
6 628	2	1,4	9,1
7 463	2	1,4	10,2
8 010	2	1,4	11,0
10 020	4	2,7	27,5
10 685	4	2,7	29,3
11 775	4	2,7	32,3
12 440	4	2,7	34,2
suma	**50**	**34**	**174,5**

Tabulka 5.4 Momenty k podpoře R1



Obrázek 5.5 Ramena k podpoře R1

Tyto pak opět dosadím do rovnic rovnováhy:

$$R_3 = \frac{\sum M_G}{l_{R3}} \qquad K = \sum G_i - R_3$$

$$R_2 = \frac{\sum M_G + K \cdot l_i}{l_{R2}} \qquad R_1 = \sum G_i + K - R_2$$

Odtud získám reakce odpovídající silám v sekundárním vypružení a kloubu připadajícím na sedící cestující.

$$R_{1sedící} = 18{,}0 \ kN$$
$$R_{2sedící} = 20{,}2 \ kN$$
$$R_{3sedící} = 16{,}7 \ kN$$
$$K_{sedící} = 3{,}9 \ kN$$

5.2.2 Stojící cestující

Stejně postupuji i u stojících cestujících. Nahrazuji je silou umístěnou do těžiště plochy ke stání. Potom jednotlivým silám přiřadím rameno a dopočítám moment podle rozmístění v typovém výkresu (viz Obrázek 5.6).

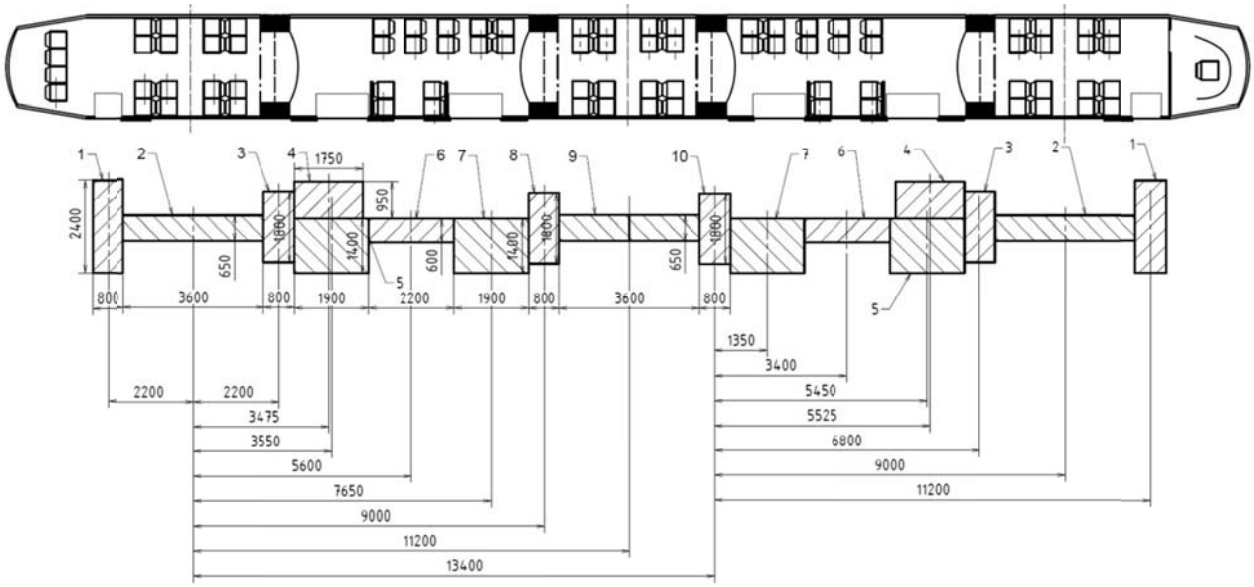
$$G_{st} = m_{os} \cdot S_i \cdot q_i \cdot g \quad [N]$$

$$M_{st} = \sum G_{st} \cdot l_i \quad [Nm]$$

Kde $m_{os} = 70kg$ je hmotnost jedné osoby, S_i je velikost příslušné plochy, q_i je plošná hustota cestujících, g je gravitační zrychlení.

Tabulka 5.5 Momenty stojících cestující

Stojící cestující								
					Momenty ke kloubu		**Momenty k R1**	
	A	**B**	**S**	**G**	**l_i**	**M_{st}**	**l_i**	**M_{st}**
plocha	**[mm]**	**[mm]**	**[m2]**	**[kN]**	**[mm]**	**[kNm]**	**[mm]**	**[kNm]**
1	800	2 400	1,92	9,6	11 200	107,8	-2 200	-21,2
2	3 600	650	2,34	11,7	9 000	105,6	0	0,0
3	800	1 800	1,44	7,2	6 800	49,1	2 200	15,9
4	1 750	950	1,66	8,3	5 525	46,0	3 475	29,0
5	1 900	1 400	2,66	13,3	5 450	72,7	3 550	47,3
6	2 200	600	1,32	6,6	3 400	22,5	5 600	37,1
7	1 900	1 400	2,66	13,3	1 350	18,0	7 650	102,0
8	800	1 800	1,44	7,2			9 000	65,0
9	3 600	650	2,34	11,7			11 200	131,4
10	800	1 800	1,44	7,2			13 400	48,4
		suma	**19,2**	**96,4**		**422**		**455**



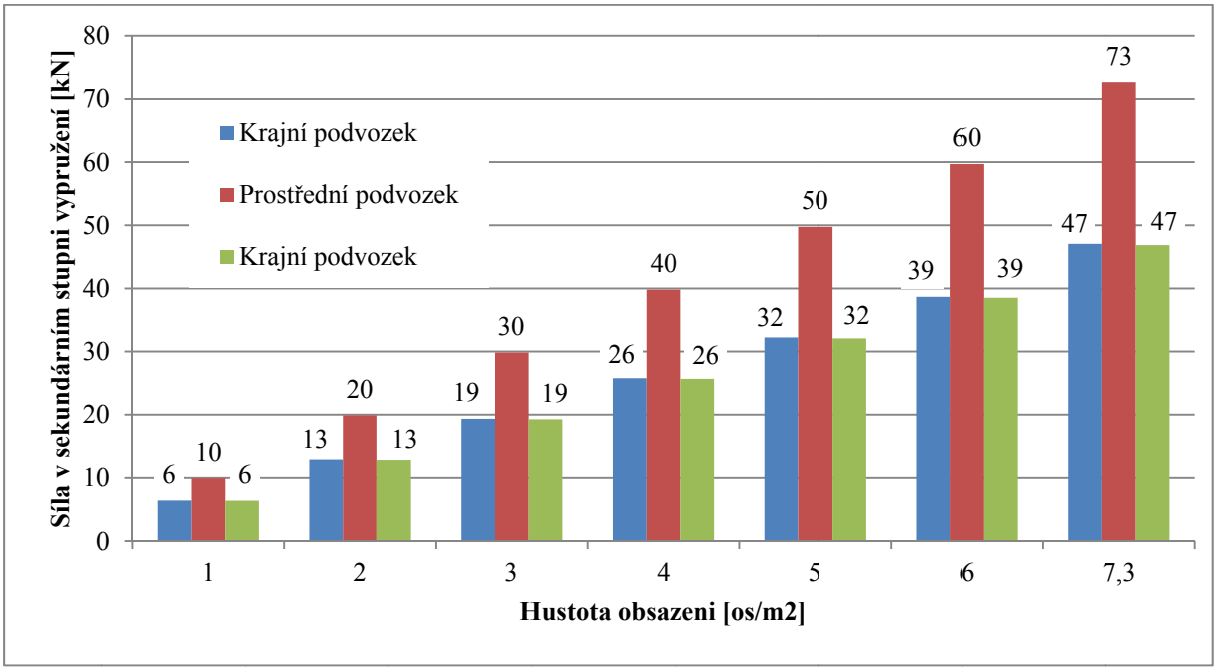
Obrázek 5.6 Schéma rozmístění stojících cestujících

Tyto pak opět dosadím do rovnic rovnováhy:

$$R_3 = \frac{\sum M_F}{l_{R3}} \qquad K = \sum F_i - R_3$$

$$R_2 = \frac{\sum M_F + K \cdot l_i}{l_{R2}} \qquad R_1 = \sum F_i + K - R_2$$

Odtud dostávám reakce odpovídající silám v sekundárním vypružení a kloubu připadajícím na sedící cestující. Do grafu vynáším síly v závislosti na hustotě obsazení.



Obrázek 5.7 Síly v sekundárním stupni od stojících cestujících

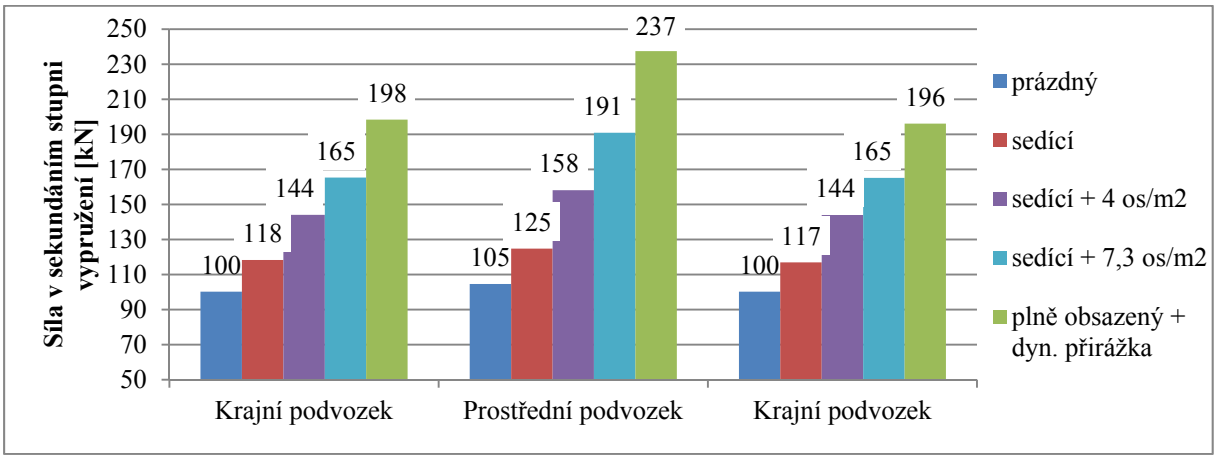
Z grafu je patrné, že cestující přitěžují prostřední podvozek více než podvozky krajní.

5.3 Shrnutí bilance

Celková síla v sekundárním vypružení je dána součtem dílčích výsledků, tedy vlastní hmotnosti, sedících a stojících cestující. Pro pozdější výpočty ještě zavadím dynamickou sílu v sekundárním stupni vypružení. Tu vypočtu ze síly statické, zvětšené o přirážku $k_{dyn} = 20\%$.

$$R_{celk} = R_{skříň} + R_{sedící} + R_{stojící}$$

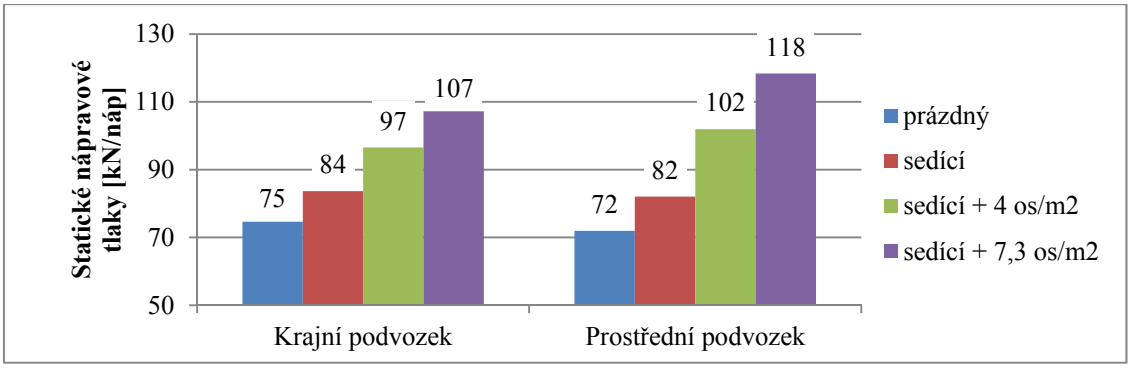
$$F_{dyn} = F_{stat}\left(1 + \frac{k_{dyn}[\%]}{100}\right)$$



Obrázek 5.8 Souhrnný graf sil v sekundárním stupni vypružení

Z výsledků bilance vyplývá několik závěrů. Oba krajní podvozky mají shodné spektrum zatížení a nadále tedy budu výpočty provádět jen pro podvozky dva – krajní a prostřední. Hmotnost skříně je *31,1 tuny*, hmotnost celé tramvaje (vč. podvozků) je *43,4 tuny*. Užitečné zatížení činí až *22,6 tuny*. Hmotnost plně obsazené tramvaje je *67 tun*. Nárůst sil sekundárního vypružení mezi stavy prázdný / (plný + dynamika) je 100% pro krajní podvozky a 130% pro prostřední podvozek.

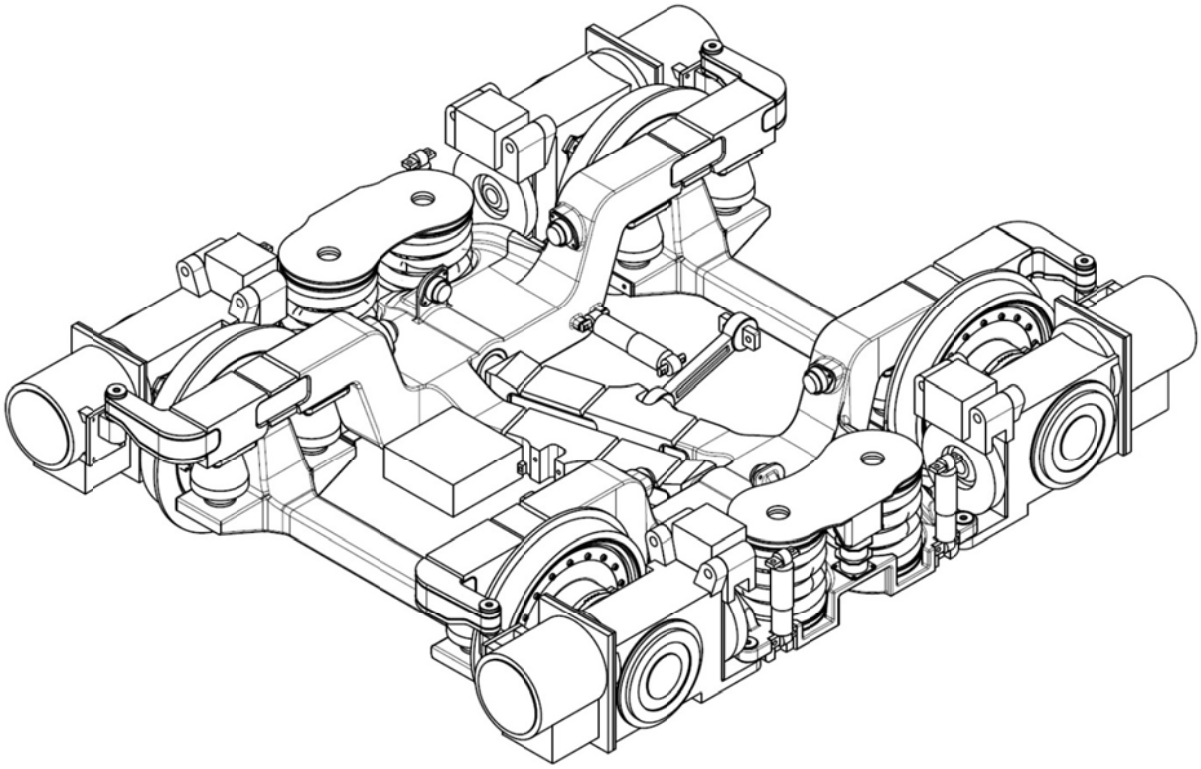
Za předpokladu rovnoměrného rozdělení sil mezi první a druhou nápravou v podvozku, mohu spočítat statické nápravové tlaky v závislosti na stavu ložení (hustotě obsazení). Díky vyšší hmotnosti trakčního podvozku je statický náp. tlak krajního podvozku vyšší než tlak podvozku prostředního. Při plném obsazení vozidlo splňuje limit maximálního statického nápravového tlaku *125 kN/náp*.



Obrázek 5.9 Nápravové tlaky

6 Podvozek

Při návrhu podvozku jsem se inspiroval podvozky uvedenými v rešerši, ale zadání pojal svým vlastním způsobem. Mnou vypracovaný koncept je dvounápravový podvozek s poddajným rámem a volně otočnými koly s individuálním pohonem. Otáčivost je omezena na ± 1,5°. Je navržen tak, aby na stejné platformě bylo možno udělat verzi trakční i běžnou. Většinu komponent je možné použít pro verzi s normálním rozchodem i případně širokým rozchodem. Při návrhu jsem také kladl důraz na zástavbové rozměry podvozku do skříně vozidla a díky tomu dosáhl počtu 16ti sedadel nad podvozkem. Sestavu celého podvozku jsem převedl do univerzálního formátu a dal na přiložené CD.

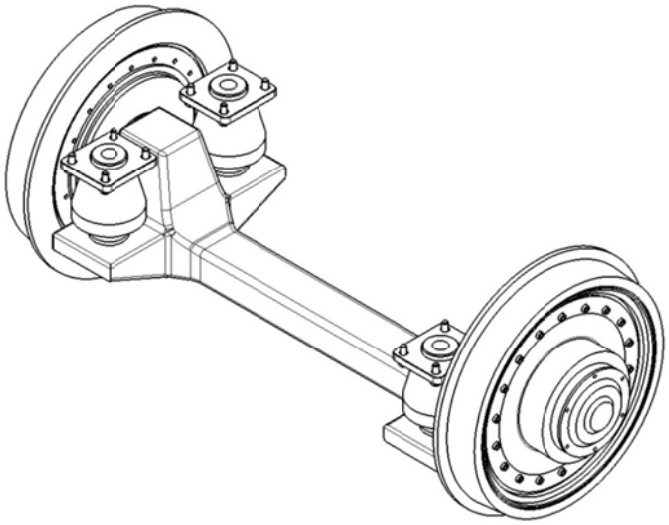


Obrázek 6.1 Trakční podvozek

Základní parametry podvozku jsou:

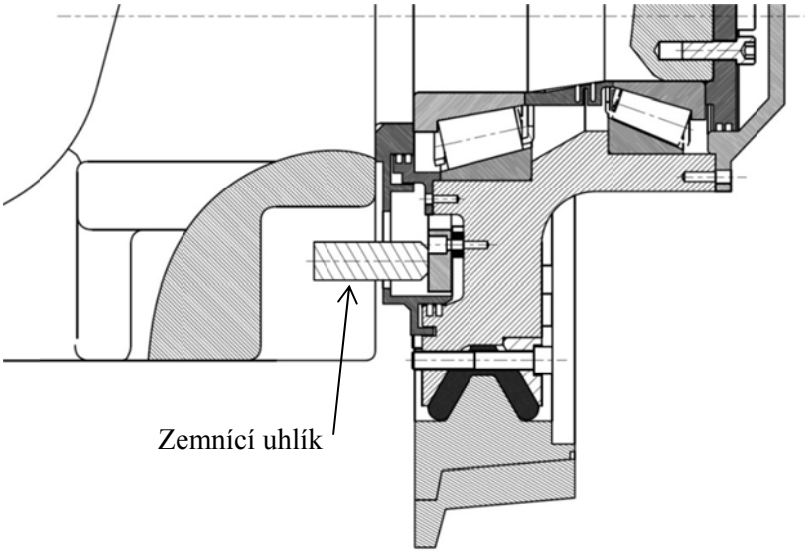
Rozchod	1435 mm
Rozvor	1800 mm
Trakční výkon	4 x 50 kW
Maximální nápravové zatížení	125 kN
maximální rychlost	70 km/h
Minimální traťový (manipulační) oblouk	20 (18) m
provozní brzda	EDB
Záložní a parkovací brzda	kotoučová
průměr kol nový (opotřebovaný)	640 (580) mm

6.1 Dvojkolí – portálová náprava



Obrázek 6.2 Dvojkolí – portálová náprava

Pro snížení výšky podlahy skříně nad TK v oblasti nad podvozkem, používám nápravnici s volně otočnými koly, na které jsou umístěny kuželové prvky primárního vypružení. Nápravnice trakčního a běžného podvozku jsou si velmi podobné a je možné je vyrábět ze stejného odlitku/výkovku což se příznivě odrazí ve výrobních nákladech.

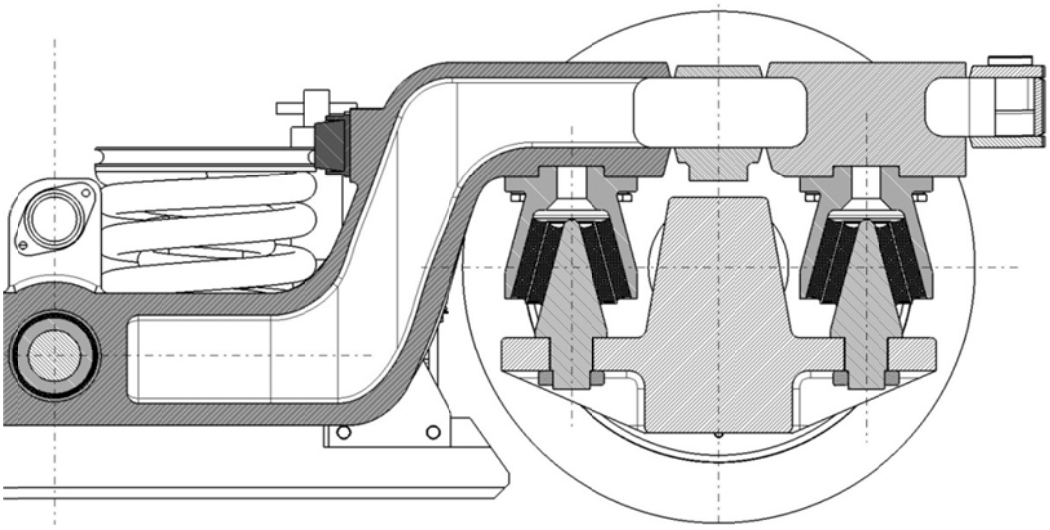


Obrázek 6.3 Sestava kola

Kolo je uloženo na dvou kuželíkových ložiskách, utěsněných labyrintem. Je vybaveno pryžovou vložkou mezi kotouč a obruč kola pro snížení hluku. Uzemnění je řešené z vnitřní strany kol pomocí speciálního sběracího kroužku. Zemnící uhlík je vložen do dutiny ve spodní části nápravnice (viz Obrázek 6.3). Uhlík je tak snadno dostupný z kontrolního kanálu depa a je možná jeho kontrola opotřebení a případně jednoduchá výměna. K tomuto řešení jsem přistoupil z prostorových důvodů, protože z vnější strany kola je umístěn pohon a na vrchní části nápravnice je doraz primárního stupně vypružení. Alternativou by bylo protáhnout uzemnění otvorem v čepu kola nápravy.

6.2 Primární stupeň vypružení

Vypružení vozidla je dvou stupňové. První stupeň je řešen pomocí celkem osmi kuželových pryžokovových prvků. Ty mají charakter progresivní pružiny a zároveň i tlumící schopnost. Dále umožnují příčné pružení, radiální stavění dvojkolí a v neposlední řadě plní i funkci vedení dvojkolí.



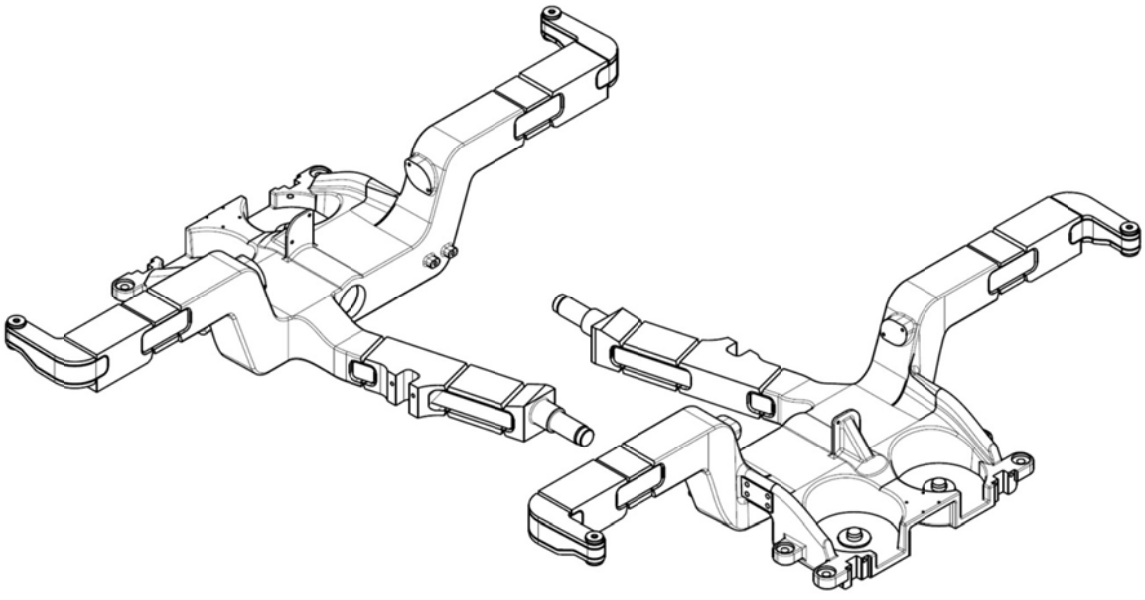
Obrázek 6.4 Řez podélníkem

Maximální hodnoty pohybů v primárním stupni vypružení:

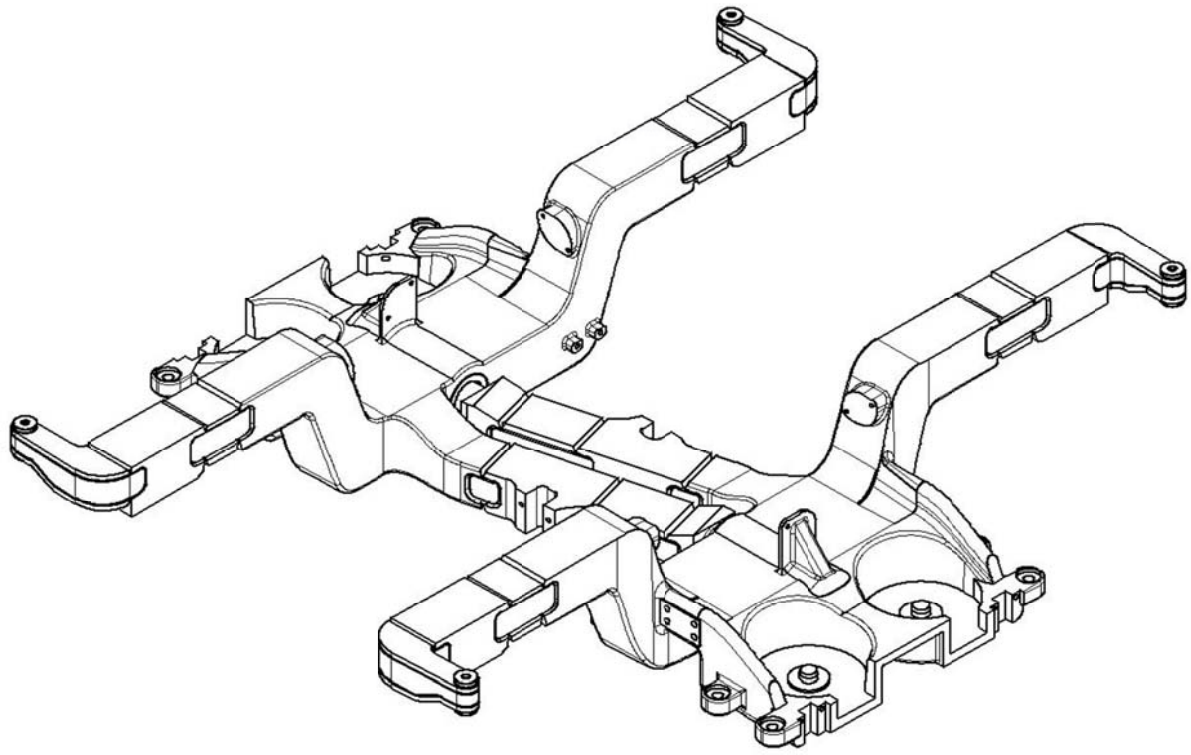
Tabulka 6.1 Posuvy primárního vypružení

Podélný směr	x	± 3 mm
Příčný směr	y	± 3 mm
Svislý směr	z	12mm

6.3 Rám



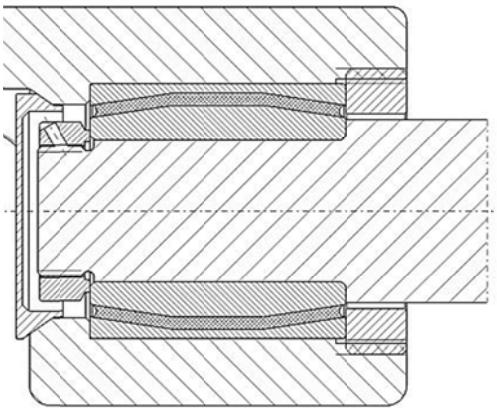
Obrázek 6.5 Půlrámy



Obrázek 6.6 Rám

Rám je složen ze dvou identických půlrámů spojených prostřednictvím horizontálních kloubů v podélnících. Půlrám je tvořen centrálním odlitkem podélníku s balkónem pro sekundární vypružení a přivařeným příčníkem a rameny podélníku pro primární vypružení. Ramena a příčník jsou svařeny z plechů do obdélníkového profilu.

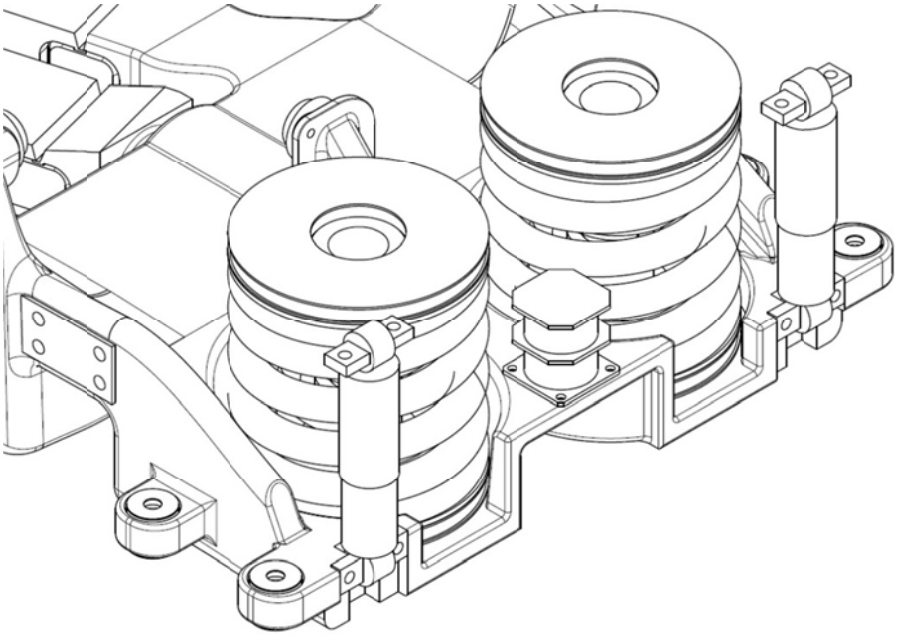
Kloub je řešen jako pryžový silentblok vložený do podélníku v místě příčné osy podvozku. Vnější kroužek silnetbloku je dělený na tři části s malou vůlí. Po nalisování do díry, je v pryži vytvořeno malé předpětí, které sníží tahová napětí při pracovním pohybu a tím zvýší jeho životnost. V díře je axiálně zajištěn maticí M140 s vnějším závitem. Na čepu je pouzdro uchyceno prostřednictvím matice KTMA 13 (M65) od firmy SKF, která se pojišťuje třemi stavěcími šrouby ISO 4027 velikosti M8x10 po jejím obvodu.



Obrázek 6.7 Kloub

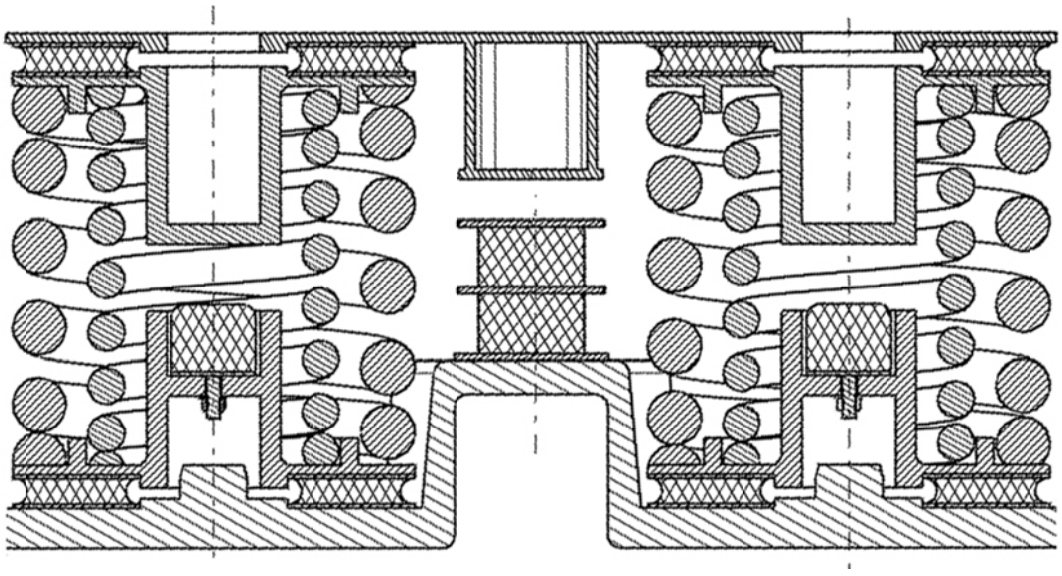
Pro zajištění dlouhé životnosti kloubu je také vhodné ho utěsnit od vlivů chemických látek v okolí. Jde zejména o pohonné látky, oleje a soli při smíšeném městském provozu. Z vnitřní strany je možnost kloub utěsnit silikonem nebo voskem, z vnější strany je utěsněn vlepeným víčkem.

6.4 Sekundární stupeň vypružení



Obrázek 6.8 Balkón se sekundárním stupněm vypružení

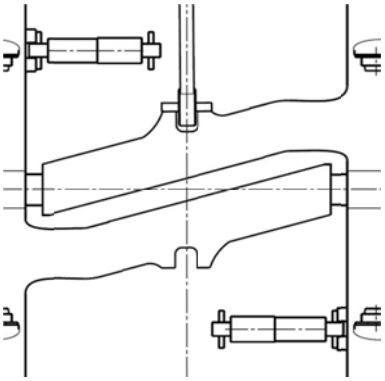
Druhý stupeň je sestaven ze čtyř sad duplexních šroubovitých válcových pružin oboustranně podložených pryžokovovou podložkou. Podložky mají velmi vysokou svislou tuhost a jejich vliv na svislé vypružení je zanedbatelný. Naopak mají velký význam pro vypružení příčné, kde z velké příčné báze vyplývají velké pohyby při natočení podvozku pod skříní. Podložky jsou příčně poměrně měkké, proto přebírají velkou část příčné deformace sekundárního stupně a tím zmenšují deformace pružin šroubovitých. Paralelně k těmto sadám, jsou ještě umístěny dva pryžokovové sloupky, které zprogresivňují celkovou charakteristiku svislého vypružení. Pracovní zdvih je *30mm* k pryžovému sloupku a *50mm* na pevný doraz. Díky velké příčné bázi není potřeba použít torzní stabilizátor.



Obrázek 6.9 Řez sekundárním stupněm vypružení

V sekundárním stupni jsou ještě umístěny hydraulické tlumiče. Čtyři svislé tlumiče mají konstrukční opatření, které umožnuje použít je jako svislý závěs, který zdvihne podvozek při nakolejování vozidla za skříň. Jde sice o dražší řešení, ale přistupuji k němu kvůli nedostatku prostoru pro jednoduchou alternativu závěsu podvozku v podobě lana nebo řetězu. Odpadne tím i další komponenta, která může trpět korozí a bude zdrojem hluku. Tyto vyrábí například firma KONI.

Dva příčné tlumiče jsou umístěny na podélnících ve výšce příčníku. Díky podélné bázi tlumí zároveň i vrtivé pohyby.



Obrázek 6.10 Příčné tlumení

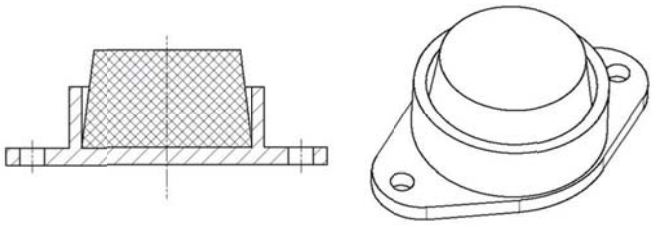
V následující tabulce uvádím maximální hodnoty pohybů v sekundárním stupni vypružení.

Tabulka 6.2 Pohyby sekundárního vypružení

posuv		
Podélný směr	x	± 5 mm
Příčný směr	y	± 15 mm
Svislý směr	z	50mm
rotace		
	x	± 1,5°
	y	± 2°
	z	± 1,5°

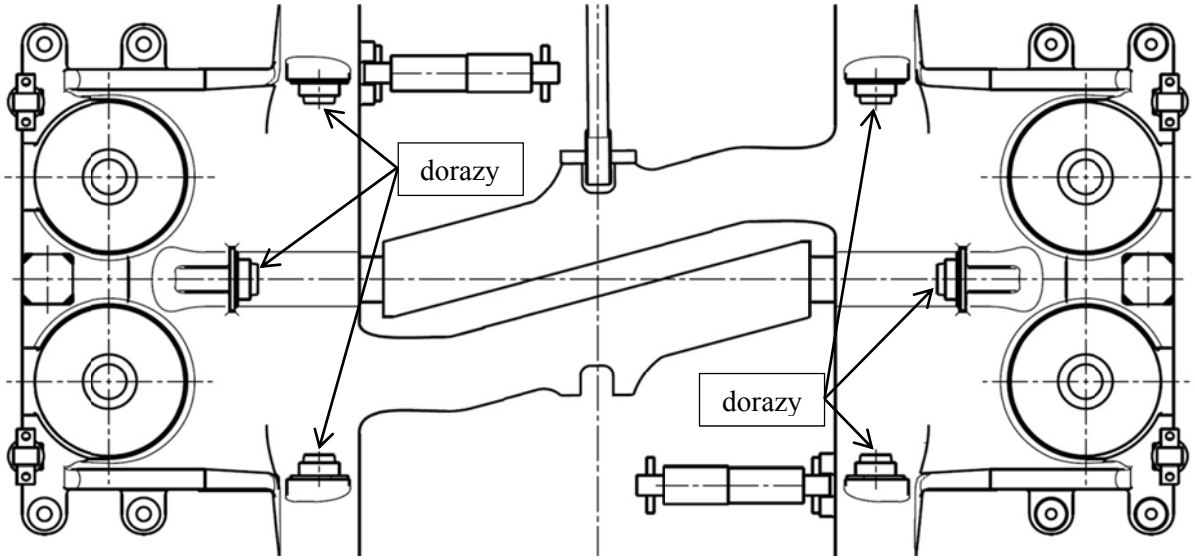
6.5 Podélné a příčné dorazy

Pro vymezení pohybů skříně vůči podvozku používám pružné pryžové dorazy. Ty jsou opatřeny kovovým lemem pro přesné vymezení maximálních výchylek od středové polohy nezávisle na mechanických vlastnostech pryže konkrétního kusu nebo jeho opotřebení.



Obrázek 6.11 Pružný doraz

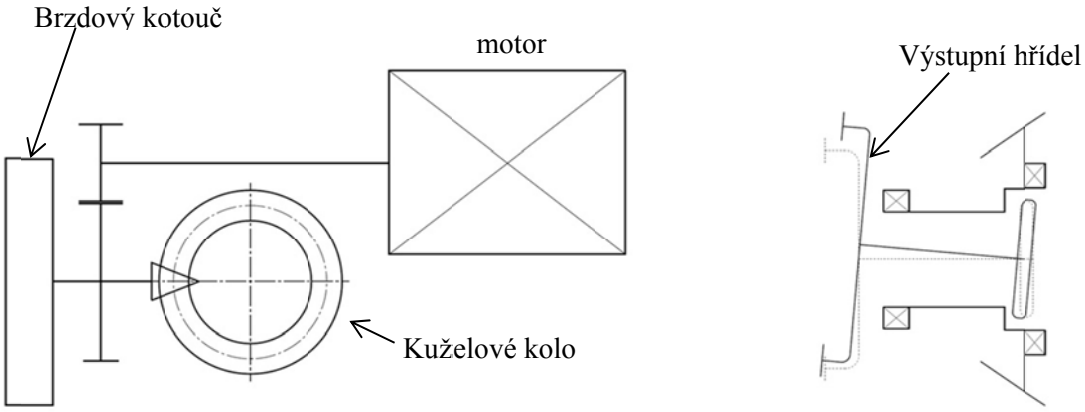
Použil jsem dva dorazy umístěné do příčné osy podvozku pro zachycení příčných pohybů a čtyři dorazy umístěné na rameni podélníků pro vymezení natáčení podvozku pod skříní vozidla. Tažná/brzdná síla se na skříň přenáší ojnicí připojenou k příčníku půlrámu.



Obrázek 6.12 Schéma dorazů

6.6 Pohon

Odpružený pohon je individuální pro každé kolo. Sestává se z převodovky Durutram RSK-5-7,82 od firmy Henschel Antriebstechnik a motoru DKWBZ 1606 od firmy VEM Sachsenwerk. Tyto jsou k sobě pevně spojeny do bloku a pružně tříbodově zavěšeny na rám podvozku. Pohonné bloky jsou pak umístěny zrcadlově proti sobě s motory orientovanými vně podvozku. Toto řešení minimalizuje podíl neodpružených hmot a vede ke snížení dynamických sil v kontaktu kolo-kolejnice.



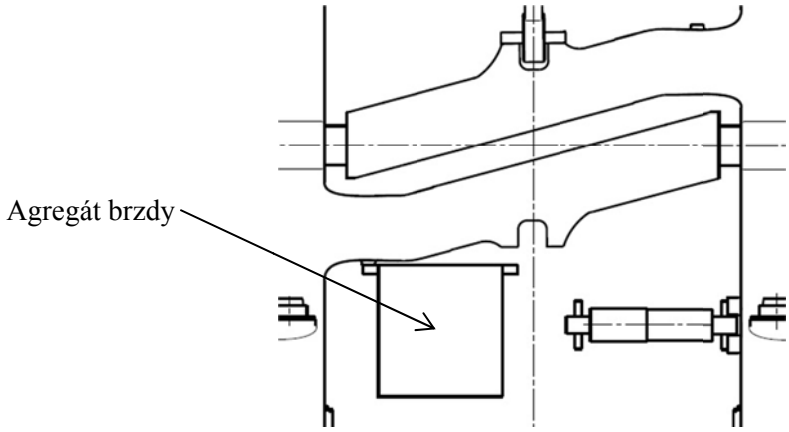
Obrázek 6.13 Schéma pohonu

Převodovka je čelně kuželová s dutým hřídelem. Výstupní hřídel má na jedné straně sférickou zubovou spojku a na druhé straně je pružná lamelová spojka. Tím je vytvořen kloubový hřídel pro přenos kroutícího momentu, umožňující relativní pohyb výstupního hřídele při propružení vozidla v primárním stupni. Tento je pak s kolem spojen prostřednictvím čelní zubové spojky. Na předlohovém hřídeli je ještě umístěna kotoučová brzda. Převod 7,82, hmotnost převodovky je *230 kg*.

Kapalinou chlazený 3-fázový asynchronní motor má jmenovitý výkon *50kW*, jmenovité otáčky *2653 ot/min*, maximální otáčky *5000 ot/min*, hmotnost cca *150 kg*.

6.7 Brzda

Primární způsob brždění trakčního podvozku je elektrodynamické brždění motorem buďto rekuperačně do napájecí sítě, a pokud to okolnosti nedovolují, brzdí se do odporníku umístěného na střeše vozidla. Záložní a parkovací je brzda střadačová kotoučová umístěná na převodovce. Ta se používá pro dobrzdění z malé rychlosti. Hydraulický agregát je umístěn na příčníku rámu. Podvozek je také vybaven brzdou kolejnicovou.

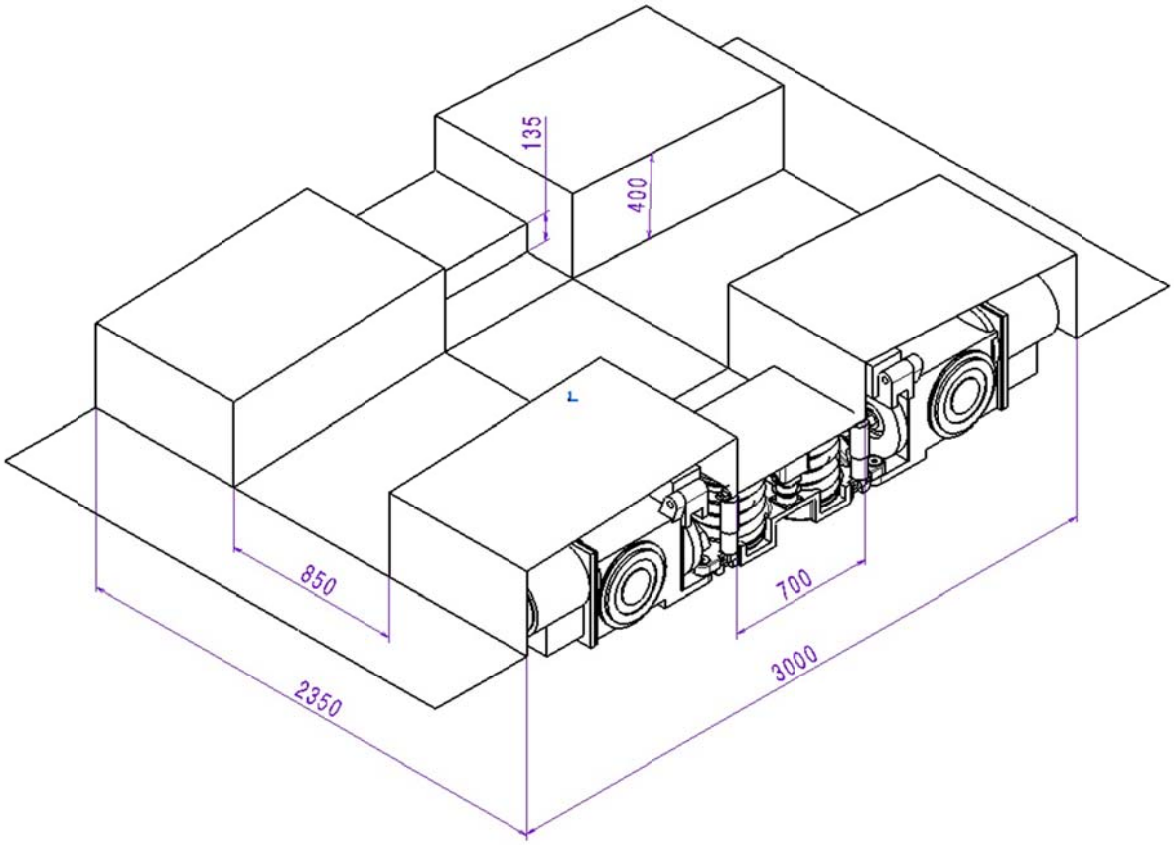


Obrázek 6.14 Umístění agregátu brzdy

Běžný podvozek je osazen kotoučovou brzdou připevněnou na disky kol. Brzdný moment je zachycován třmenem brzdy upevněným na nápravě. Toto je řešeno tak aby bylo možno kotouč a brzdové obložení vyměnit bez nutnosti vyvazování podvozku zpod vozidla. Vzhledem k tomu, že jeden kotouč brzdí pouze jedno kolo, mohu použít tenké kotouče šířky *35mm*. Nevýhodou tohoto řešení je změna sil v pružinách primárního vypružení. Podvozek je také vybaven kolejnicovou brzdou.

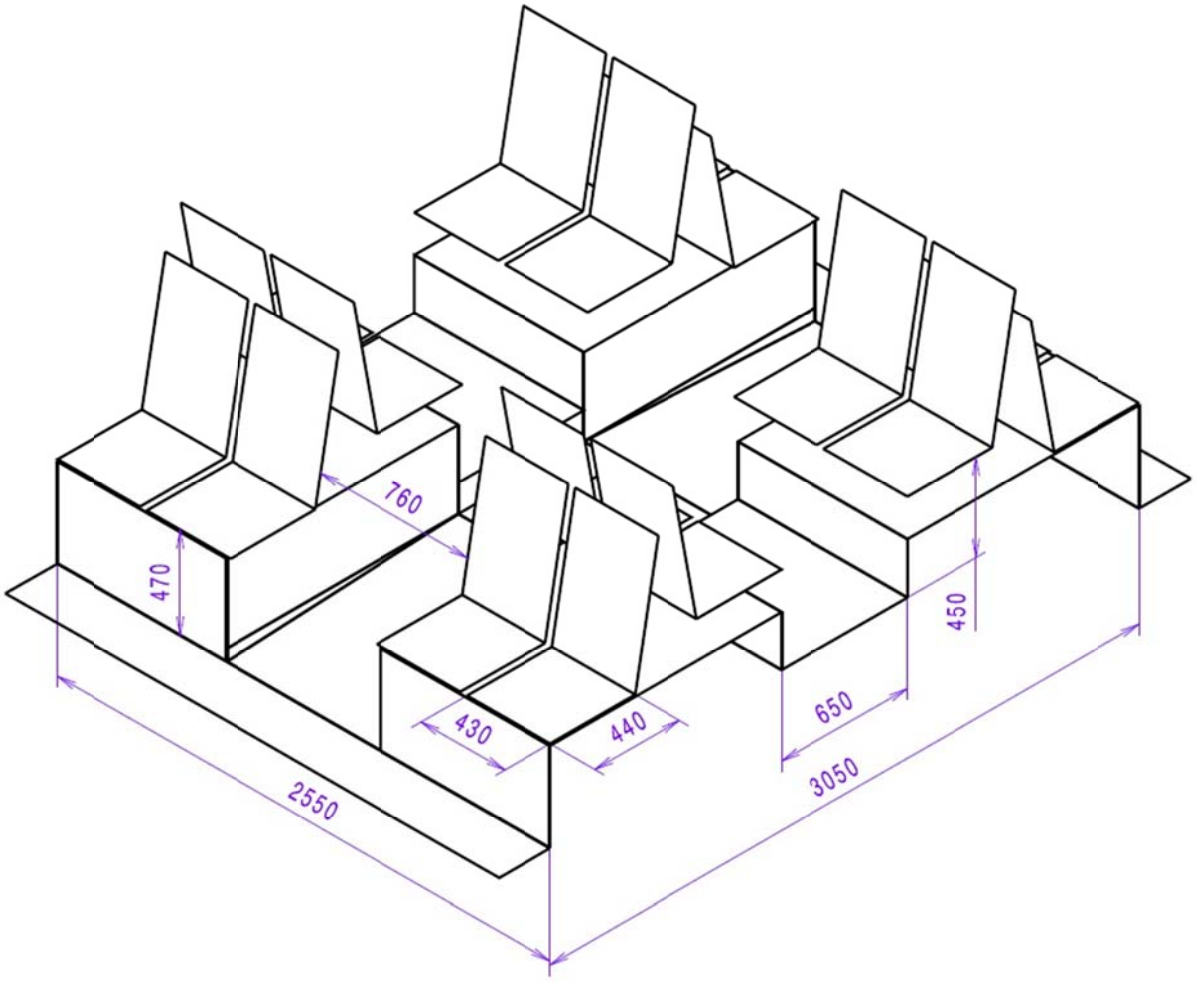
6.8 Zástavba do skříně vozidla

Zástavbové rozměry mají přímý dopad na rozmístění sedadel uvnitř vozidla, a jsou tak velmi důležité i pro provozovatele vozidla a cestující. Tyto ilustruje Obrázek 6.15.



Obrázek 6.15 Zástavbové rozměry

Návrh uspořádání interiéru jsem nastínil na Obrázek 6.16. Podlaha v centrální části podvozku je ve výšce 370 mm nad TK. Podélným směrem pak vede rampa se sklonem 5%. Nad sekundárním vypružením je malý schod s prostorem pro nohy. Nad motorem jsou umístěna čtyři sedadla zády k sobě. Podle šířky skříně je možno příčně umístit až 2+2 sedadla.

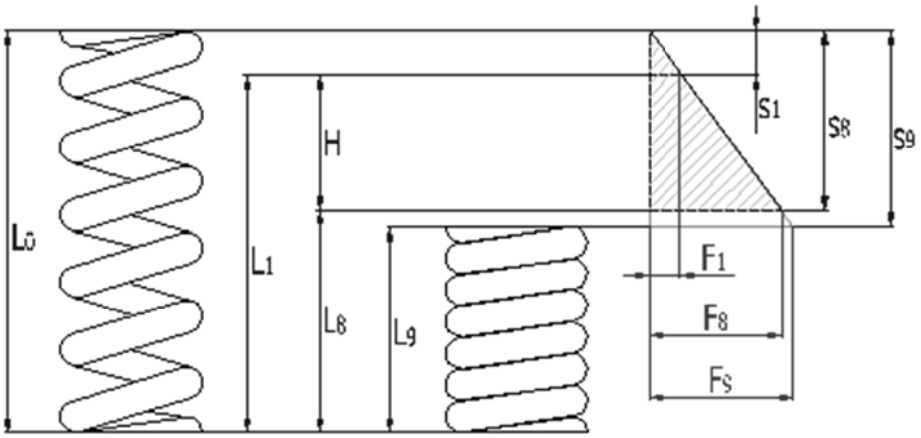


Obrázek 6.16 Návrh uspořádání interiéru

7 Vypružení

7.1 Šroubovité vinuté pružiny

Sady pružin počítám pro podvozek krajní i prostřední. Vzhledem k uspořádání pružin v podvozku mohu počítat jen jednu sadu pružin v sekundárním stupni vypružení, ostatní sady jsou stejné. Vnitřní pružina má dolní index *i*, vnější pružina má index *e*. Zároveň respektuji zvyklosti výpočtů pružin, a tak volný stav má index *0*, stav minimálního zatížení (prázdné vozidlo) má index *1*, maximální zatížení (stlačení na doraz) index *8*, stav dosednutí závitů index *9* (viz Obrázek 7.1). Výpočet provádím podle normy ČSN EN 13 906-1. Vzorce jsou pro každou pružinu stejné, proto je zde uvedu v obecném znění a jejich výsledky potom shrnu do tabulky. Dosazoval jsem v základních jednotkách SI a výsledky poté převedl na jednotky vhodné (např. napětí $[10^6 Pa = 1\,MPa]$ apod.). Všechny vztahy jsou pro pružiny vinuté za tepla s broušeným koncem.



Obrázek 7.1 Schéma pružiny

Z hmotnostní bilance vychází tyto zatěžující síly jedné čtvrtiny sekundárního vypružení:

Tabulka 7.1 Zatěžující síly jedné čtvrtiny sekundárního vypružení

		krajní podvozek	prostřední podvozek	
prázdné vozidlo	F_1	25,1	26,2	kN
provozně obsazené vozidlo	F_6	36,0	41,2	kN
plně obsazené vozidlo	F_7	41,3	49,5	kN
plně obsazené vozidlo + dyn. přirážka 20%	F_8	49,6	59,4	kN

Základní vstupní parametry výpočtu pružin jsem shrnul do následující tabulky.

Tabulka 7.2 Vstupní parametry výpočtu pružin

		krajní podvozek		prostřední podvozek		
	znak	vnější pružina	vnitřní pružina	vnější pružina	vnitřní pružina	jednotka
Pracovní zdvih svislý	h	50		50		mm
Pracovní zdvih příčný	y	21,5		18,5		mm
Střední průměr vinutí	D	240	150	240	150	mm
Průměr drátu	d	38	25	35	22	mm
Počet činných závitů	$n_č$	4	5,75	4	5,75	mm
Volná délka	L_0	359		340		mm
Modul pružnosti v tahu	E	205		205		GPa
Modul pružnosti ve smyku	G	78,5		78,5		GPa

Nejprve je třeba ověřit, jestli se pružiny dají vůbec sesadit do sebe a jaká je mezi nimi vůle. U malé vůle hrozí riziko kontaktu vnitřní a vnější pružiny při příčné výchylce. Vůli dopočtu z porovnání vnějšího průměru vnitřní pružiny a vnitřního průměru pružiny vnější.

$$\left.\begin{aligned} D_{max} &= D + d \\ D_{min} &= D - d \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad v_{e-i} = \frac{D_{e\,min} - D_{i\,max}}{2} \qquad [m]$$

Následně mohu přejít k výpočtu tuhosti. Ten vychází z kroucení prutu kruhového průřezu.

$$k = \frac{G.d^4}{8.D^3.n_č} \qquad [N/m]$$

Tuhost sady je pak dána prostým součtem tuhosti vnější a vnitřní pružiny (paralelní pružiny).

$$k_{sada} = k_e + k_i \qquad [N/m]$$

Stlačení pružiny je dáno silou prázdného vozidla. Počítám ho pro celou sadu. Délka pružiny je pak dána rozdílem délky volné pružiny a stlačením. Pružiny obou podvozků jsem navrhnul tak, aby měly stejnou výšku L_1 pod prázdným vozem.

$$s_1 = \frac{F_1}{k_{sada}} \quad \Longrightarrow \quad L_1 = L_0 - s_1 \qquad [m]$$

Síly v jednotlivých pružinách potřebuji k výpočtu napjatosti a dopočtu je z tuhosti a stlačení.

$$F_{1e} = k_e.s_1 \qquad F_{1i} = k_i.s_1 \qquad [N]$$

Následuje výpočet stlačení na pevný doraz a délka pružiny. Oba podvozky mají stejný pracovní zdvih, tudíž i stejnou výšku na dorazu.

$$s_8 = (s_1 + h) \quad \Longrightarrow \quad L_8 = L_0 - s_8 \qquad [m]$$

Nyní vypočtu sílu při stlačení sady na pevný doraz.

$$F_8 = s_8 . k_{sada} \qquad [N]$$

A spočítám síly v jednotlivých pružinách.

$$F_{8e} = k_e . s_8 \qquad F_{8i} = k_e . s_8 \qquad [N]$$

Ještě je třeba zkontrolovat, aby pracovní stlačení pružiny nebylo větší, než je stlačení při dosednutí závitů a zároveň aby oběma stavy byla dostatečně velká vůle. Délku pružiny při dosednutí vypočtu z počtu činných a závěrných závitů a průměru drátu.

$$L_9 = (n_č + n_z - 0{,}3) . d \qquad [m]$$

Následně se vypočte minimální vůle jako:

$$s_a = 0{,}02 . n_č . (D + d) \qquad [m]$$

Minimální přípustná délka dynamicky namáhané pružiny je pak dána vztahem:

$$L_{min} = L_9 + 2 . s_a \qquad [m]$$

Zbývá pak jen zkontrolovat vůli mezi výškou na dorazu a výškou minimální, která musí být vždy kladná.

$$v_{8-min} = L_8 - L_{min} > 0 \qquad [m]$$

Tabulka 7.3 Svislé deformace

		krajní podvozek		prostřední podvozek		
		vnější pružina	vnitřní pružina	vnější pružina	vnitřní pružina	jednotka
vůle mezi pružinami	v_{e-i}	16,5		13,5		mm
tuhost pružiny	k	266,3	118,4	370,0	197,5	N/mm
tuhost sady	k_{sada}	384,7		567,5		N/mm
min. pracovní zatížení sady	$F_{1\ sada}$	25,1		26,2		kN
min. pracovní zatížení pružiny	F_1	17,4	7,7	17,1	9,1	kN
max. pracovní zatížení sady	$F_{8\ sada}$	44,3*		54,6*		kN
max. pracovní zatížení pružiny	F_8	30,7	13,6	35,6	54,6	kN
volná délka	L_0	359		340		mm
stlačení pod min. zatížením	s_1	65,2		46,2		mm
stlačení pod max. zatížením	s_8	115,2		96,2		mm
délka pod prázdným vozem	L_1	293,8		293,8		mm
délka plně zatížené pružiny	L_8	243,8		243,8		mm
délka při dosednutí závitů	L_{min}	226,0	192,5	242,1	214,0	mm
vůle k minimální výšce	v_{8-min}	17,8	51,3	1,8	29,8	mm

*zbytek do maximální síly v sekundáru (49,6/59,4 kN) přenese pryžový sloupek a pružný doraz

Nyní je třeba zkontrolovat napjatost. Nejprve se vypočte poměr vinutí.

$$i = \frac{D}{d}$$

Pak následuje výpočet napětí od svislé síly. Ten vychází z nakrucování tyče, ale je ještě upraven výrazem v závorce, což je korekční součinitel, postihující koncentraci napětí na vnitřní straně závitů.

$$\tau_8 = \frac{8.F_8.D}{\pi.d^3}\left(\frac{i+0{,}5}{i-0{,}75}\right) \quad [Pa]$$

Příčná tuhost je funkcí tuhosti svislé a momentálního stlačení pružiny. Nejprve vypočtu štíhlostní poměr λ a relativní stlačení pružiny ξ a následně příčnou tuhost k_p $[N/m]$.

$$\lambda = \frac{L_0}{D} \qquad \xi = \frac{s}{L_0}$$

$$k_p = k.\eta = k.\xi\left\{\xi - 1 + \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{2}+\frac{G}{E}}\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{G}{E}\right)\left(\frac{G}{E}+\frac{1-\xi}{\xi}\right)}\tan\left[\lambda.\xi.\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{G}{E}\right)\left(\frac{G}{E}+\frac{1-\xi}{\xi}\right)}\right]\right\}^{-1}$$

Ještě dopočtu sílu při maximální příčné výchylce

$$F_y = k_p.y \qquad [N]$$

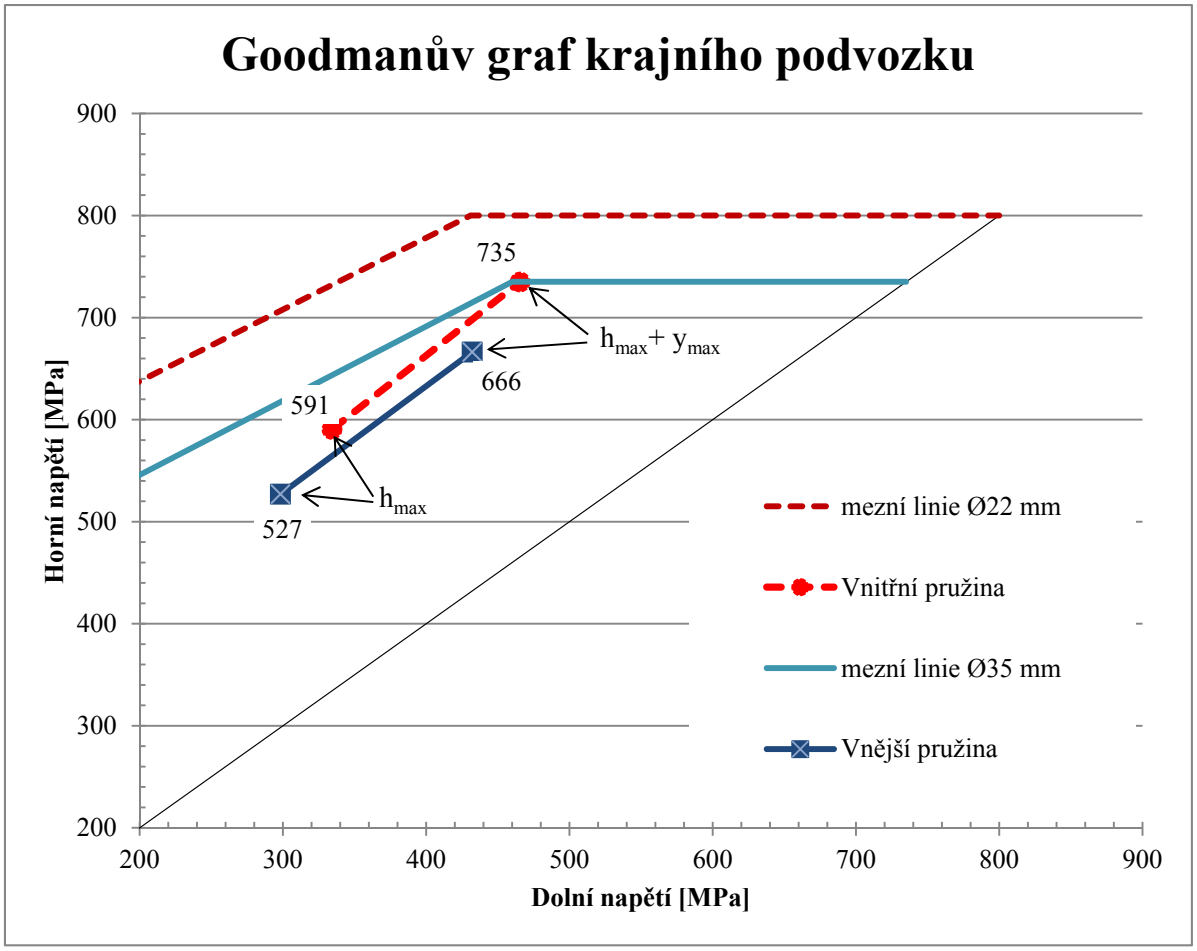
A pak mohu přistoupit k výpočtu napětí při kombinaci svislého a příčného stlačení.

$$\tau_{p8} = \frac{8}{\pi.d^3}\left(F_8(D+y) + F_y(L_8-d)\right)\frac{i+0{,}5}{i-0{,}75} \quad [Pa]$$

Tabulka 7.4 Napjatost pružin

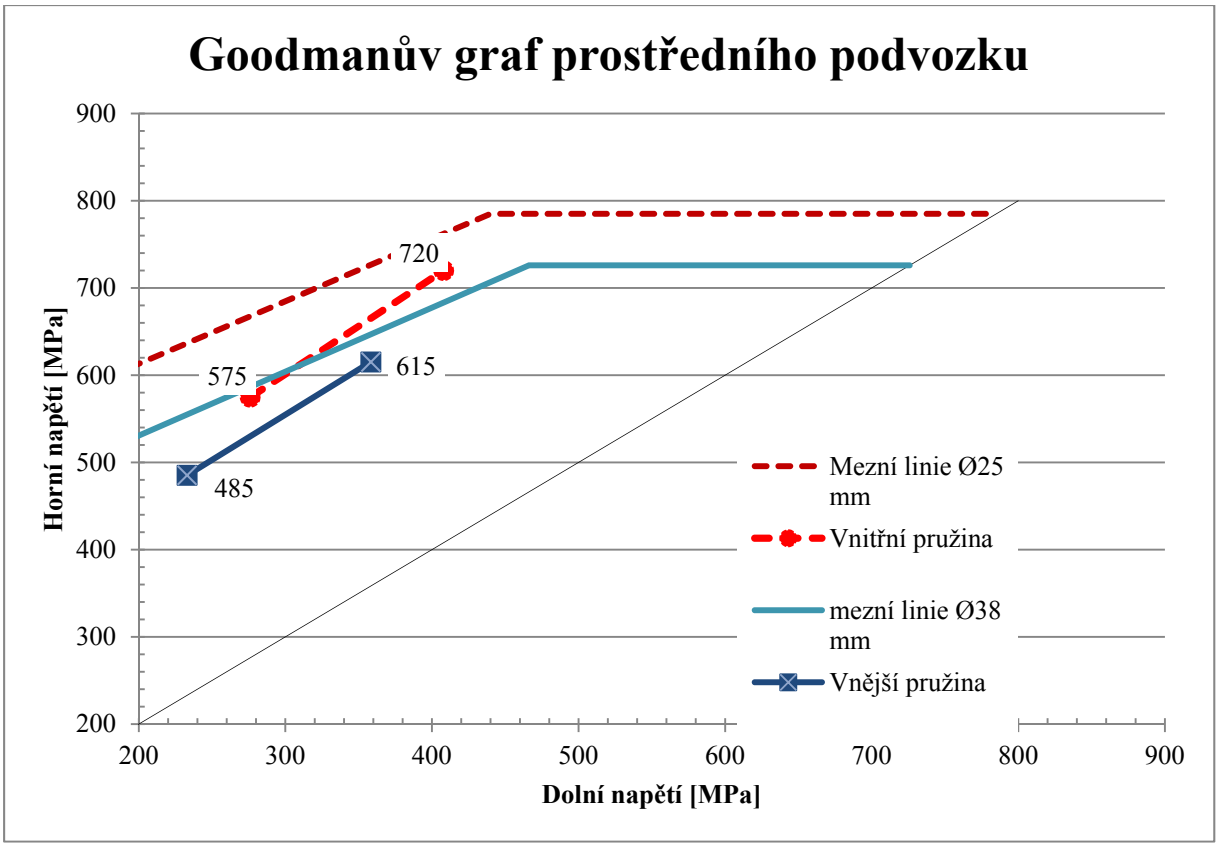
		krajní podvozek		prostřední podvozek		
		vnější pružina	vnitřní pružina	vnější pružina	vnitřní pružina	
Pracovní zdvih příčný	y	21,5		18,5		mm
příčná tuhost při svislém min. zatížení	k_{p1}	272,3	50,2	399,3	97,6	N/mm
příčná tuhost při svislém max. zatížení	k_{p8}	291,1	44,5	427,6	90,7	N/mm
příčná síla při svislém min. zatížení	F_{p1}	5,9	1,1	7,4	1,8	kN
příčná síla při svislém max. zatížení	F_{p8}	6,3	1,0	7,9	1,7	kN
napětí při svislém min. zatížení	τ_1	298,3	334,3	233,0	276,0	MPa
napětí při svislém max. zatížení	τ_8	527,0	590,5	485,3	574,9	MPa
napětí při svislém min. zatížení a příčné výchylce	τ_{p1}	433,4	466,8	358,3	408,0	MPa
napětí při svislém max. zatížení a příčné výchylce	τ_{p8}	667,6	736,4	615,3	719,9	MPa

Vzhledem k tomu, že je pružina dynamicky zatěžovaná součást, je potřeba hodnoty napjatosti vynést do některého z grafů hodnotící cyklické namáhání. K tomuto účelu jsem zvolil Goodmanův diagram. V normě jsou stanoveny základní linie pro 2.10^6 cyklů pro průměry 10, 15, 25, 35 a 50 mm. Pomocí lineární interpolace jsem dopočetl linie pro průměry jiné. Horizontální část linie je statické omezení, které nelze překročit. Skloněná část je dynamické omezení, které překročit lze, ale zmenší se tím životnost pružiny.



Obrázek 7.2 Goodmanův graf krajního podvozku

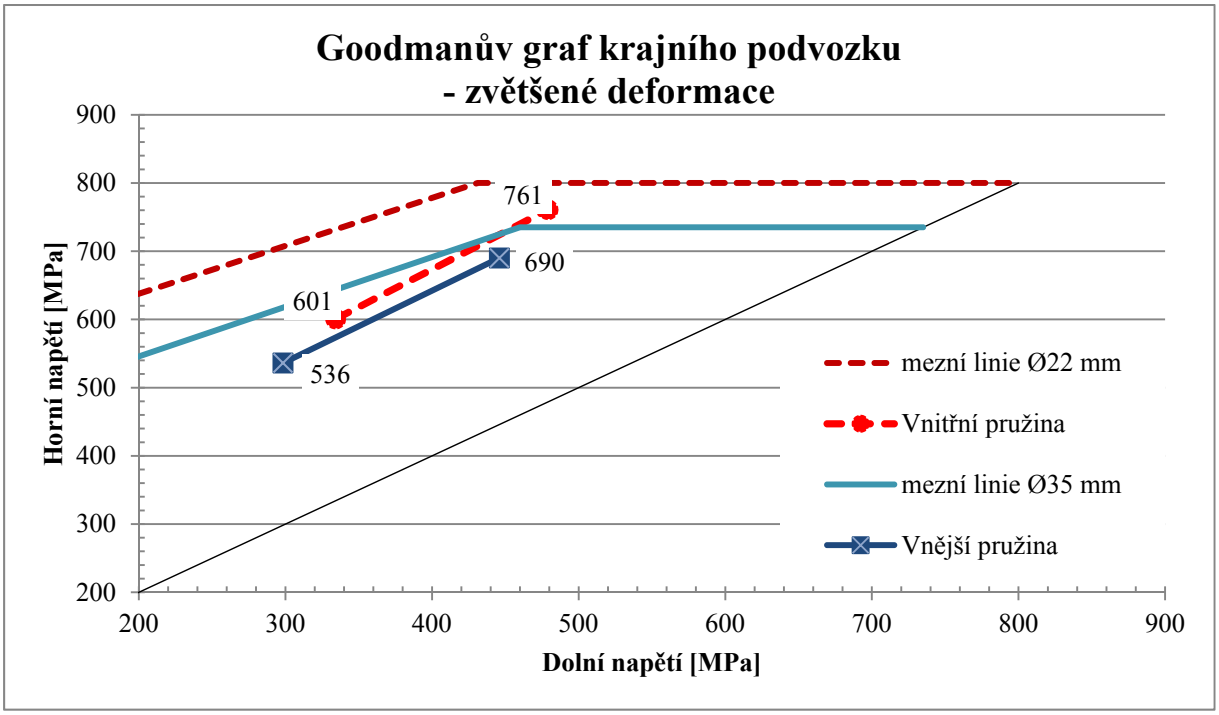
Do Goodmanova diagramu jsem vynesl bod maximálního svislého stlačení a bod maximálního svislého stlačení s maximální příčnou výchylkou. Do diagramu jsem umístil pružinu vnitřní i pružinu vnější a vytvořil jeden diagram pro každý podvozek. Z jejich zobrazení je patrné, že všechny pružiny vyhovují navrženým hodnotám sil a zdvihů s dostatečnou rezervou.



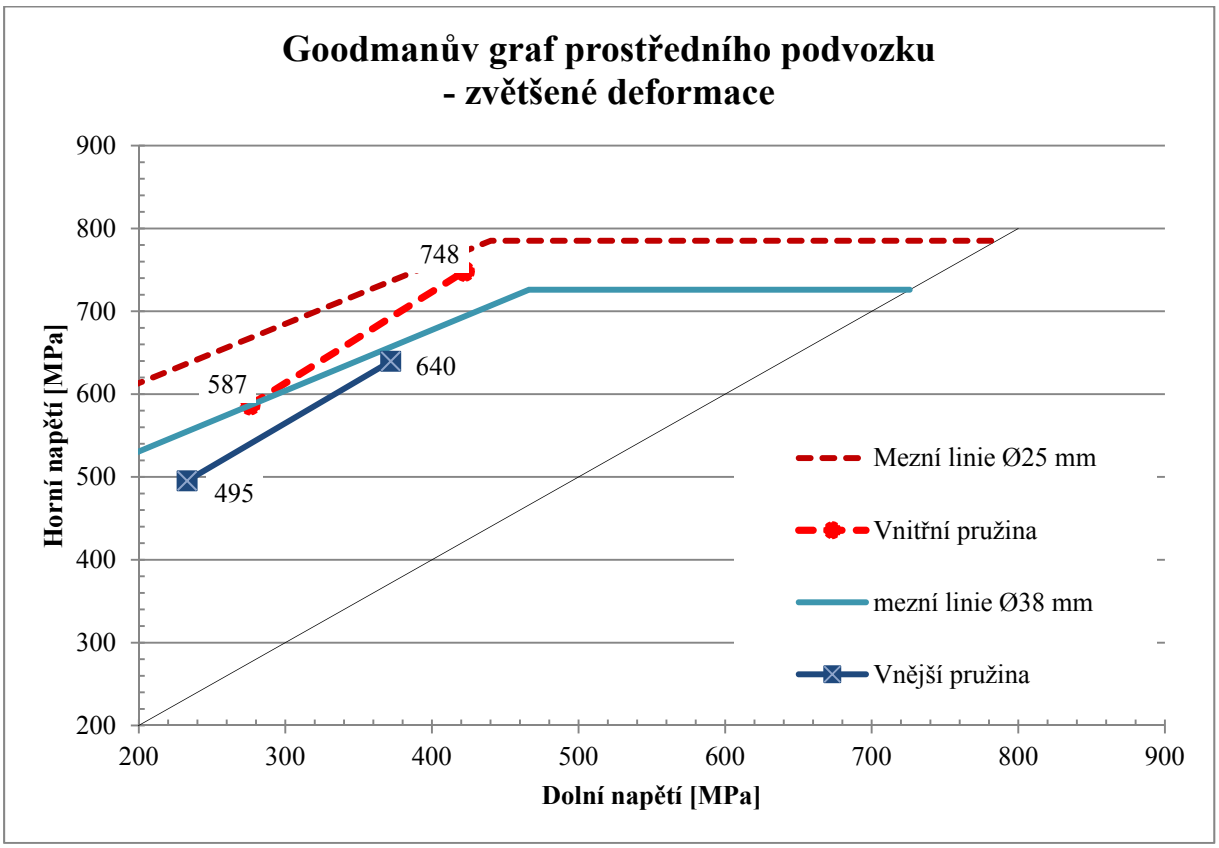
Obrázek 7.3 Goodmanův graf prostředního podvozku

K výsledkům je však třeba přistupovat kriticky, proto pokud vezmu v potaz geometrické nepřesnosti pružin samotných a především odchylky mechanických vlastností pryže je jasné, že deformace může být ještě větší v obou směrech, a napětí tak dále poroste. Toto jsem nasimuloval deformací pružin větší o 2 mm v obou směrech. Výsledné grafy jsou na následující straně.

Zde se už pružiny, zejména prostředního podvozku, dostávají blízko limitním čárám. Nicméně je nepřekročí a tak mohu pružiny prohlásit jako bezpečně vyhovující.

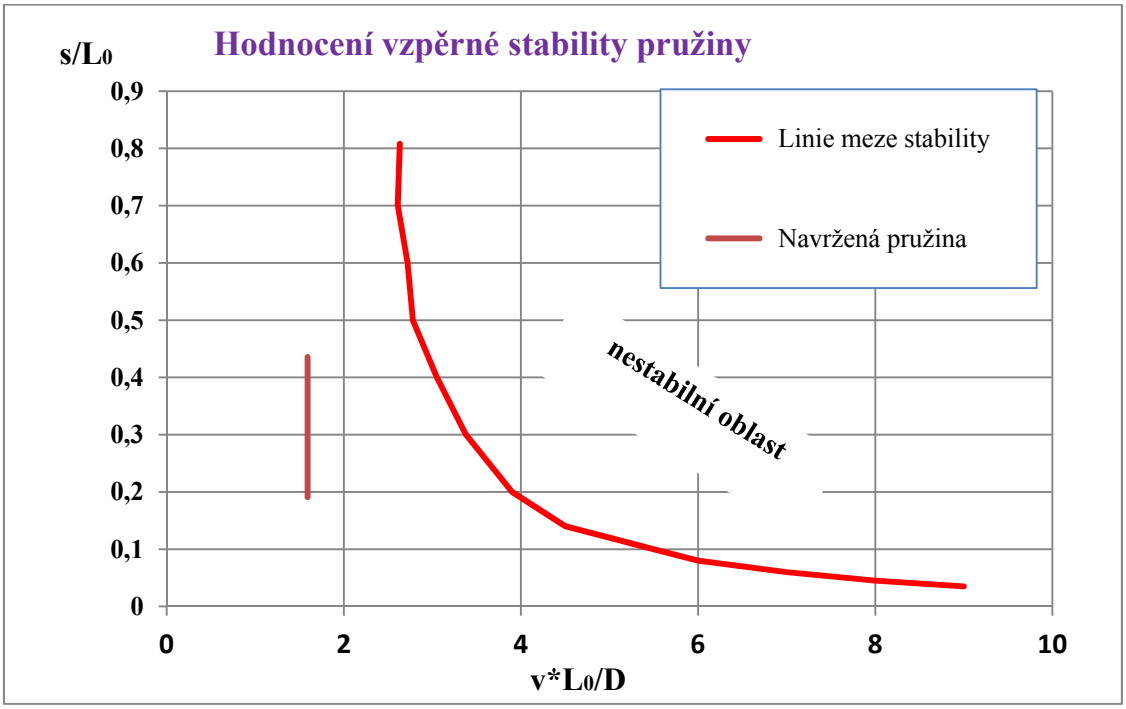


Obrázek 7.4 Goodmanův graf krajního podvozku - zvětšené deformace

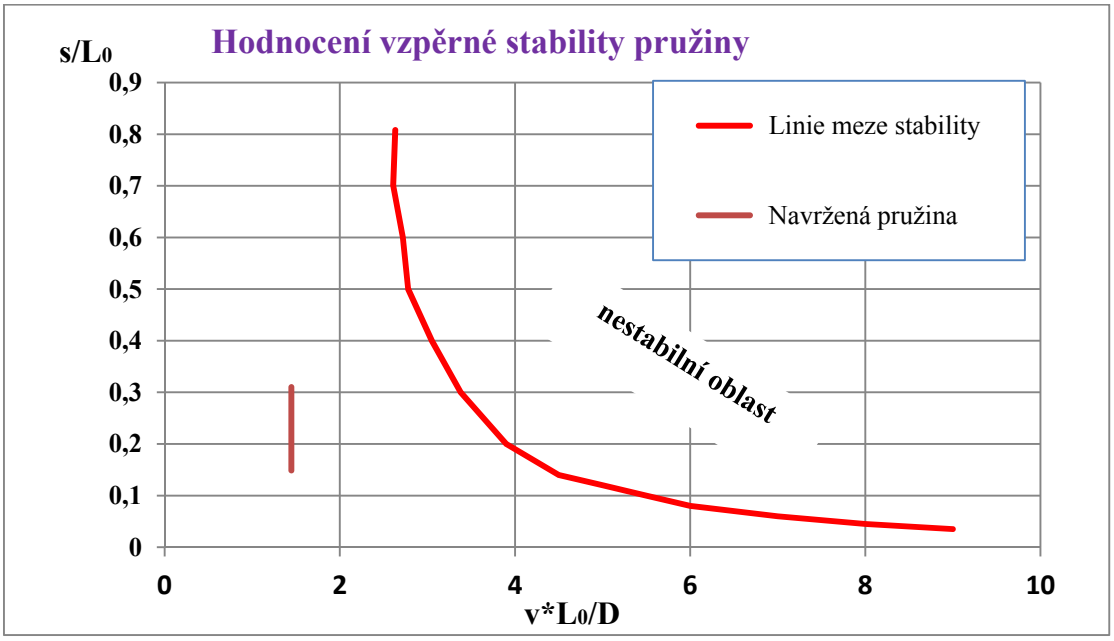


Obrázek 7.5 Goodmanův graf prostředního podvozku - zvětšené deformace

Na závěr je ještě třeba zkontrolovat stabilitu pružin. Do následujících grafů uvádím pouze pružiny vnitřní, které jsou překlopením více ohroženy. Z grafů je patrné že pružiny jsou stabilní s dostatečnou rezervou.

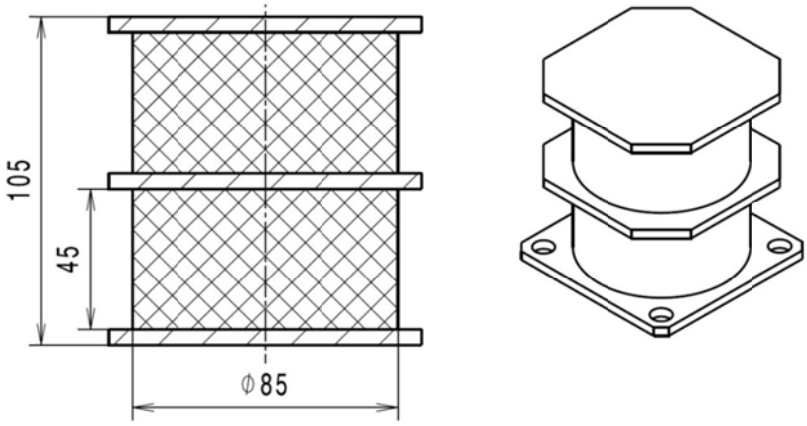


Obrázek 7.6 Stabilita vnitřní pružiny krajního podvozku



Obrázek 7.7 Stabilita vnitřní pružiny prostředního podvozku

7.2 Pryžový sloupek



Obrázek 7.8 Pryžový sloupek

Pryžový sloupek uvažuji stejný pro oba podvozky. Výpočet sloupku provádím podle skript [11], strana 68, Metoda redukovaného modulu pružnosti (podle Göbela). Nejprve se vypočte zatěžovaná a volná plocha bloku pryže.

$$s_z = \frac{\pi.d^2}{4} = \frac{\pi.\left(\frac{85}{1000}\right)^2}{4} = 0{,}0057\ m^2$$

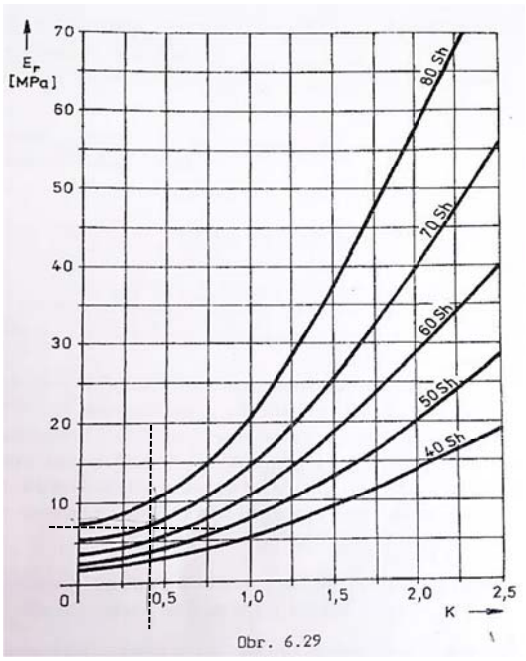
$$s_v = \pi.d.h = \frac{\pi.85.45}{10^6} = 0{,}012\ m^2$$

Poté se vypočte tvarový součinitel K

$$K = \frac{s_z}{s_v} = 0{,}47$$

A následně se podle tohoto součinitele určí redukovaný modul pružnosti (viz. Obrázek 7.9) Pro tvrdost pryže 55° Sh vychází $E_r \doteq 6\ MPa$

$$k_{pryž} = \frac{E_r.s_z}{h} = \frac{6.10^6.0{,}0057}{85/1000} = 757\ N/mm$$



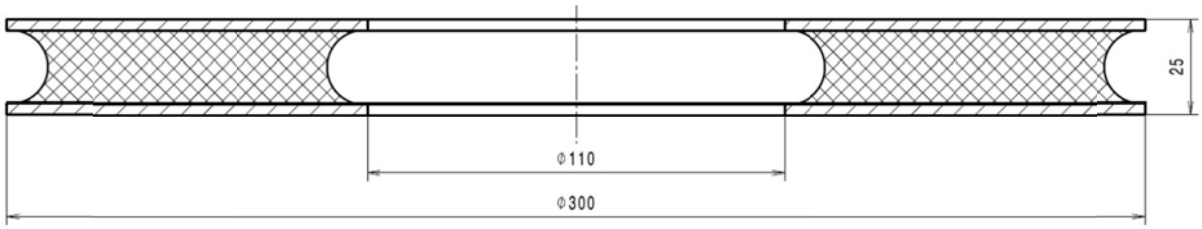
Obrázek 7.9 Redukovaný modul pružnosti [11]

Pokud se sloupek skládá ze dvou takovýchto bloků, mohu vypočítat jeho tuhost jako sériově řazené pružiny:

$$k_{sloupek} = \frac{1}{\frac{1}{k_{pryž}} + \frac{1}{k_{pryž}}} = \frac{1}{\frac{1}{757} + \frac{1}{757}} = 378{,}3\ N/mm$$

7.3 Pryžová podložka pružin

Pryžová podložka bude použita stejná pro krajní i prostřední podvozek. Pružiny mají podobné rozměry a použití co nejvíce shodných komponent na obou podvozcích se příznivě odrazí v ceně podvozků.



Obrázek 7.10 Pryžová podložka pružin

Výrobce (Ferrabyrne Ltd.) udává následující parametry:

- Svisle:
  - Tuhost $k_z = 30\,kN/mm\ \pm 15\%$
  - Maximální statická síla $F_{zS} = 55\,kN$
  - Maximální dynamická síla $F_{zD} = 66\,kN$
- Příčně:
  - Tuhost $k_y = 1{,}5\,kN/mm\ \pm 15\%$
  - Maximální síla $F_y = \pm 15\,kN$
  - Maximální deformace $y_{max} = \pm 10\,mm$

Tyto limity vyhovují mnou uvažovaným zatížením. Pro účely dalších výpočtů budu příčnou tuhost podložky označovat jako $k_{p-podložka}$

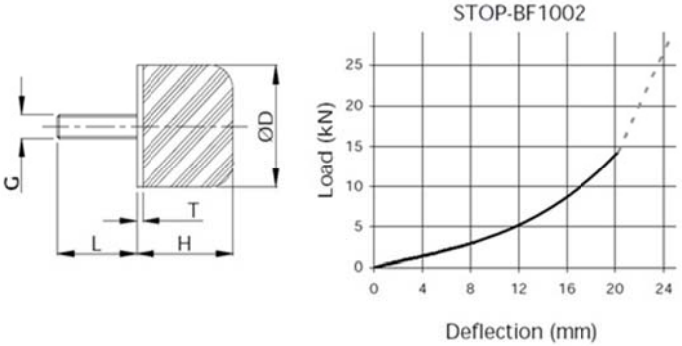
7.4 Pružný doraz

Tento typ pryžových prvků má v nabídce téměř každý výrobce. Já čerpám informace z katalogu firmy GMT. Vybral jsem doraz Stop-BF1002-71. Rozměry: $D = 63mm, H = 53mm, G = M10, L = 32mm$

Odečtením hodnot z grafu mohu dopočítat tuhost prvku jako:

$$k_{doraz} = \frac{F}{s}$$

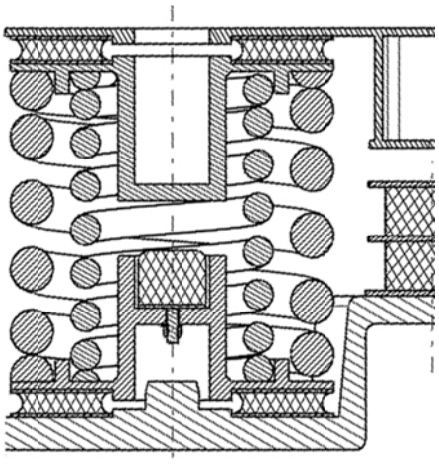
$$k_{doraz} = \frac{5000}{12} = 416{,}7 \quad [N/mm]$$



Obrázek 7.11 Pryžový doraz

7.5 Charakteristika svislého vypružení

Díky symetrii sekundárního stupně mohu řešit celkovou charakteristiku vypružení jen pro jeho jednu čtvrtinu. Tedy jednu vnitřní a vnější ocelovou pružinu, polovinu pryžového sloupku, a jeden pryžový doraz. Tuto sestavu zatěžuje ¼ síly v sekundárním stupni vypružení. Vypružení jsem rozdělil do tří fází. Nejdříve pruží pouze šroubovité pružiny, po 30 mm zdvihu se přidá pryžový sloupek a po dalších 15 mm se připojí pryžový doraz. Zdvihy jsem volil tak, aby v běžném provozu bylo vypružení co nejměkčí, čímž dosáhnu co nejnižší frekvence houpání skříně. Při obsazení sedící + 5 os/m^2 je statické sednutí zhruba 30 mm a dojde k dosednutí na pryžový sloupek. Poslední 5 mm zdvihu se přidá ještě pryžový doraz, který postihuje jen dynamické síly a slouží pro zmírnění nárazu dosedacích ploch dorazu.



Obrázek 7.12 Čtrvtina sekundárního stupně

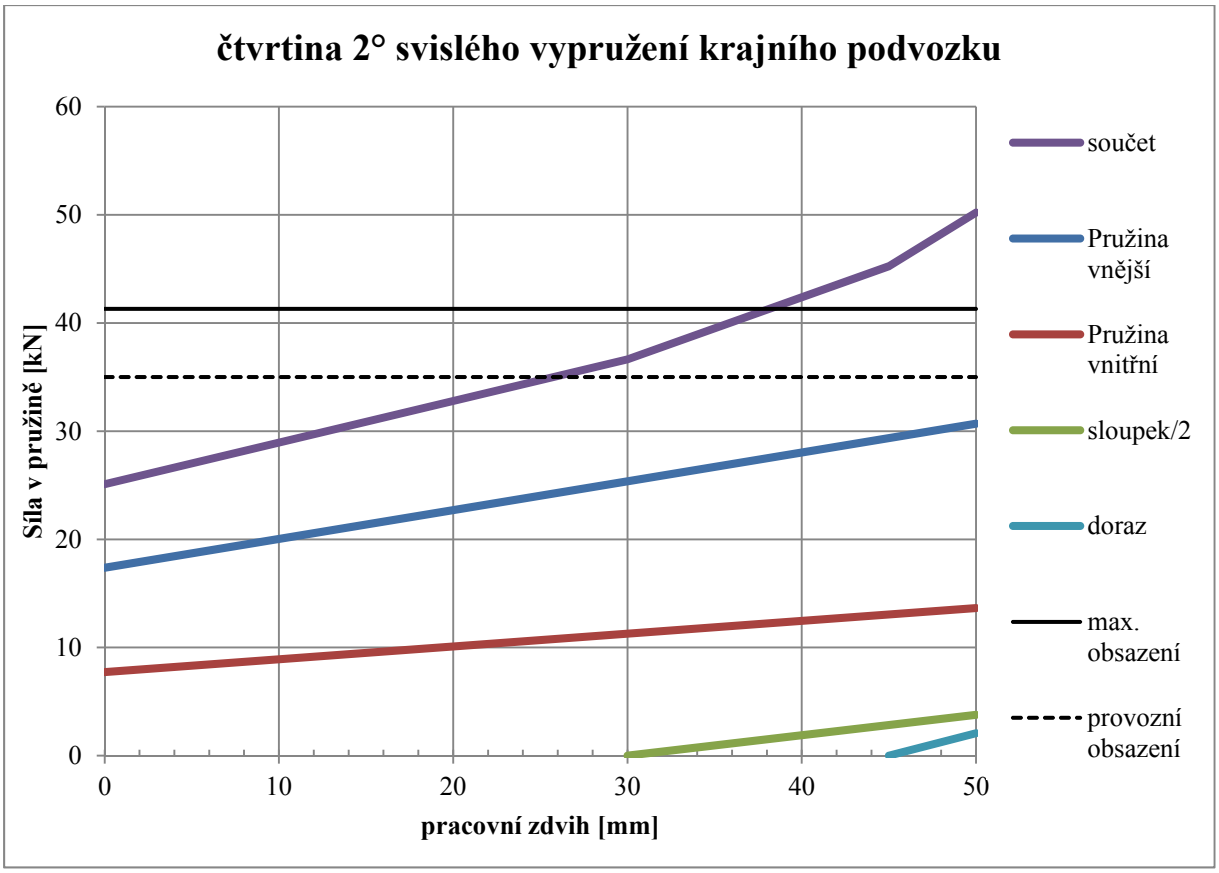
Sílu v jedné čtvrtině sekundárního stupně vypružení pak můžu napsat jako:

$$F_I = (s_1 + h).(k_e + k_i) \qquad pro\ h = (0 \div 30)\ mm$$

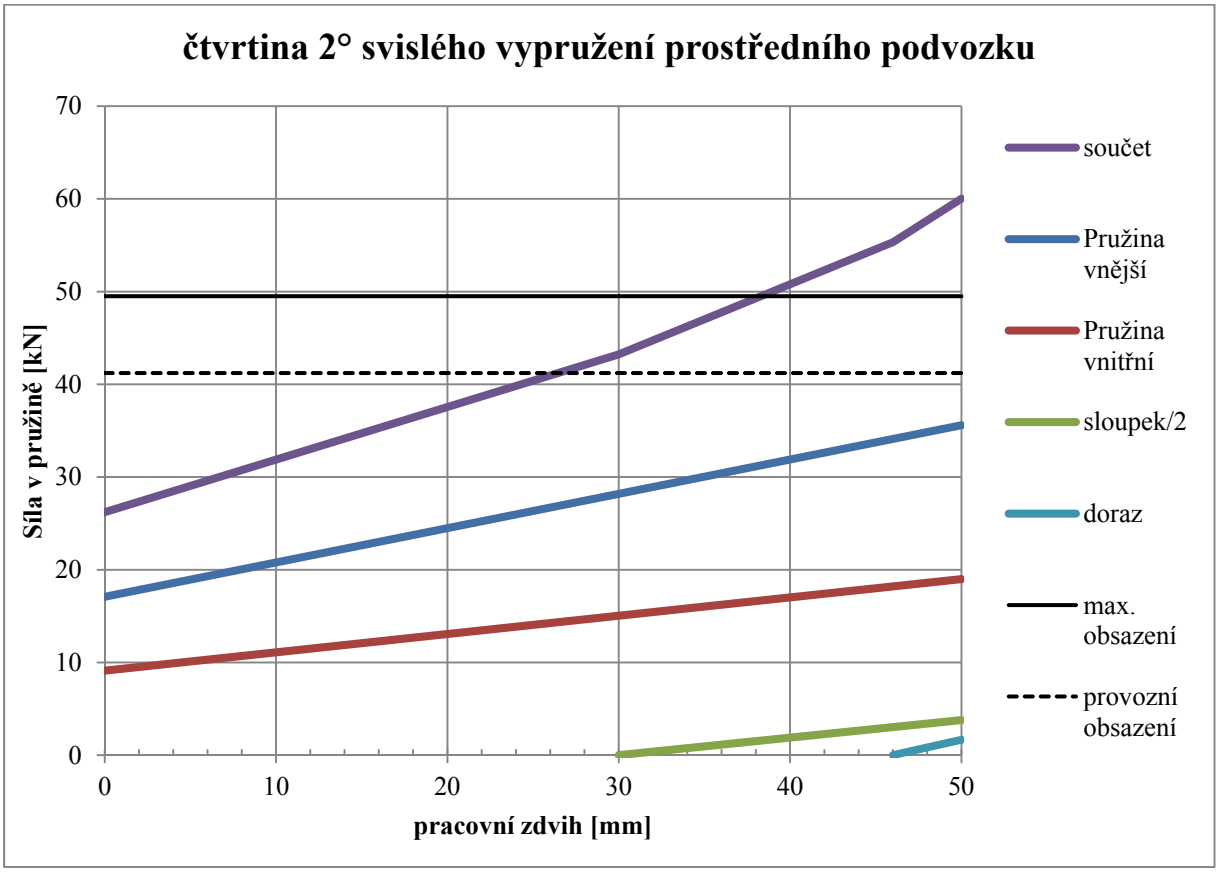
$$F_{II} = (s_1 + h).\left(k_e + k_i + \frac{k_{sloupek}}{2}\right) \qquad pro\ h = (30 \div 45)\ mm$$

$$F_{III} = (s_1 + h).\left(k_e + k_i + \frac{k_{sloupek}}{2} + k_{doraz}\right) \qquad pro\ h = (45 \div 50)\ mm$$

V následujících dvou grafech jsou vykresleny síly v jednotlivých pružinách a také jejich součet. Minimální síla odpovídá statickému zatížení prázdného vozu, maximální odpovídá plně loženému vozu s dynamickou přirážkou 20%.



Obrázek 7.13 Charakteristika svislého vypružení



Obrázek 7.14 Charakteristika svislého vypružení

7.6 Charakteristika příčného vypružení

V příčném vypružení figurují pryžové podložky a šroubovité pružiny. Velikost příčné deformace je dána dvěma hledisky. Jednak pohyby skříně vůči koleji a tedy omezení průjezdným profilem trati. A pak je to vztah skříň - podvozek. Vzhledem k tomu, že jde o částečně otočný podvozek bez otočného ložiska, veškeré pohyby spojené s natočením podvozku pod skříní musí překonat příčná deformace prvků vypružení, a tato se stává limitem natočení podvozku.

Nejprve je třeba si ujasnit, z jakých pohybů se příčná deformace prvků vypružení skládá. Základem je příčný pohyb skříně o $\Delta y = \pm 15\ mm$, k němuž se přidá natáčení podvozku pod skříní o úhel ±1,5°. Osa, kolem které se pružiny otáčí, je totožná se svislou osou podvozku *z*. Rameno, na kterém se otáčí je vzdálenost od osy *z* k svislé ose pružiny, neboli na čep balkónu podélníku. $R_p = 1m$

$$h_{p1,5} = R_p . \tan a_{stř} = 1000 . \tan 1{,}5° = 26{,}19\ mm$$

$$h_{p-komb} = \sqrt{h_{p1,5}^2 + \Delta y^2} = \sqrt{20{,}95^2 + 15^2} = 30{,}18\ mm$$

Pro zjednodušení následného výpočtu budu uvažovat jedinou příčnou výchylku $h_p = 30{,}5\ mm$

Nyní je třeba spočítat příčnou tuhost sestavy pružin. Ocelové pružiny jsou vedeny miskou, proto je považuji za paralelní pružiny, které jsou vloženy do série s pryžovými podložkami. Je nutné rozlišit příčnou tuhost pružin v krajních polohách svislého zdvihu. Výpočty opět provádím pro oba podvozky.

$$\frac{1}{k_{pC}} = \frac{1}{k_{p-podložka}} + \frac{1}{k_{pe} + k_{pi}} + \frac{1}{k_{p-podložka}}$$

Když znám celkovou tuhost a zdvih, mohu spočítat sílu při příčné deformaci.

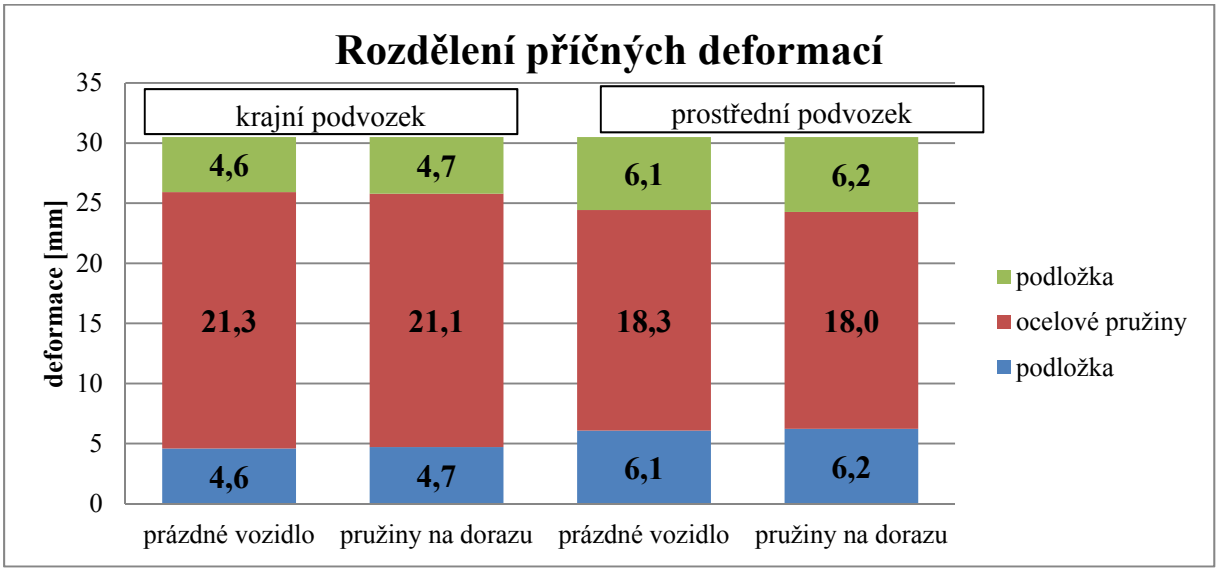
$$F_{pC} = h_p . k_{pC}$$

Ze síly pak zpětně dopočítám příčné zdvihy jednotlivých pružin sestavy, tedy podložek a ocelových pružin. Jejich součet musí být roven celkovému zdvihu.

$$s_p = \frac{F_P}{k}$$

Tabulka 7.5 Příčné deformace

		krajní podvozek	prostřední podvozek	
příčná tuhost při svislém min. zatížení	k_{pC1}	322	497	N/mm
příčná síla při svislém min. zatížení	F_{pC1}	6,88	9,12	kN
příčná deformace podložky	$s_{p1\text{- podložka}}$	4,6	6,1	mm
příčná deformace pružin	$s_{p1\text{-pružiny}}$	21,3	18,3	mm
příčná deformace podložky	$s_{p1\text{-podložka}}$	4,6	6,1	mm
příčná tuhost při svislém max. zatížení	k_{pC8}	336	519	N/mm
příčná síla při svislém max. zatížení	F_{pC8}	7,08	9,36	kN
příčná deformace podložky	$s_{p8\text{- podložka}}$	4,7	6,2	mm
příčná deformace pružin	$s_{p8\text{-pružiny}}$	21,1	18,0	mm
příčná deformace podložky	$s_{p8\text{-podložka}}$	4,7	6,2	mm



Obrázek 7.15 Rozdělení příčných deformací

Z grafu je jasně patrné, že více zatížené pružiny díky vyšší příčné tuhosti vykazují menší deformaci. Deformaci do krajní polohy natočení podvozku pokrývají pryžové podložky.

Dalším výsledkem je vratný moment pružin při natočení podvozku, který později použiji ve výpočtu sil při průjezdu obloukem. Moment je součinem příčných sil všech čtyř sad pružin a ramene k ose otáčení neboli svislé ose podvozku *z*.

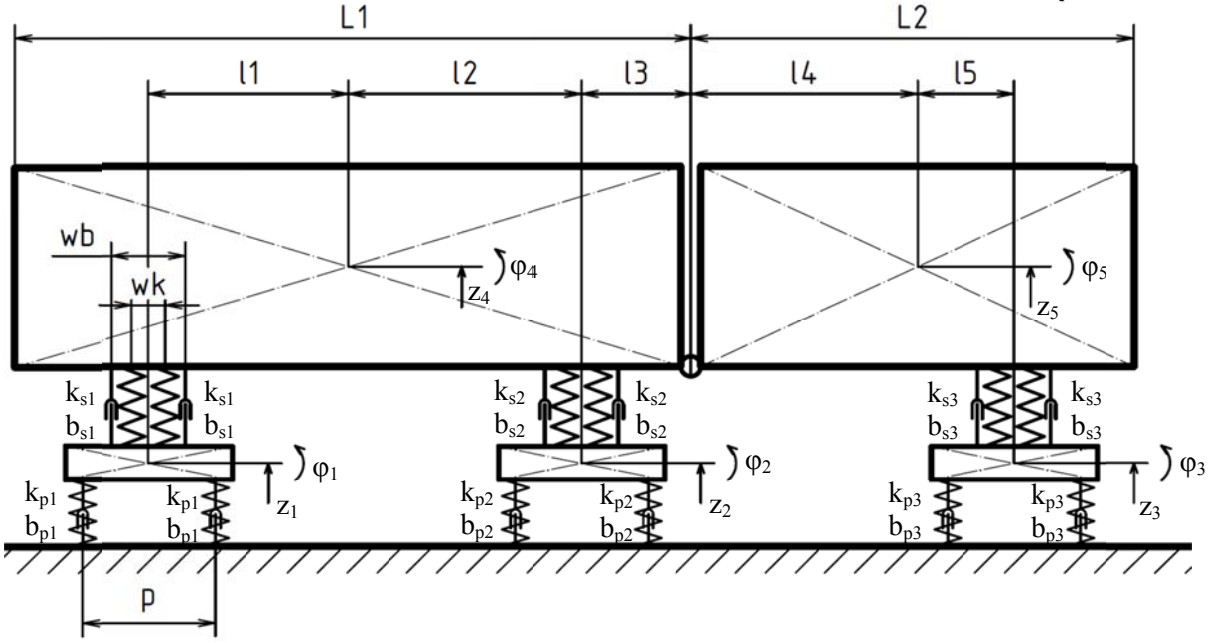
$$M_a = 4.R_p.F_{pC1} = \begin{cases} 26\,140\ Nm \\ 34\,610\ Nm \end{cases}$$

8 Svislá dynamika

8.1 Dynamický model

Prvky vypružení značím ve formátu A_{XY} přičemž:

$$A = \begin{cases} k - pružina \\ b - tlumič \end{cases} \quad X = \begin{cases} p - primární\ stupeň\ vypružení \\ s - sekundární\ stupeň\ vypružení \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 1 - 1.podvozek \\ 2 - 2.podvozek \\ 3 - 3.podvozek \end{cases}$$



8.2 Hmotnosti

$$m_{pi} - hmotnost\ podvozku$$
$$I_{pi} - moment\ setrvačnosti\ podvozku$$
$$m_{si} - hmotnost\ skříně$$
$$I_{si} - moment\ setrvačnosti\ skříně$$

Hmotnosti a momenty setrvačnosti podvozků jsem převzal z 3D modelu, přiřazením materiálu k jednotlivým dílům. Zahrnuji do nich pouze prvotně odpružené hmoty, tj. rám, pružiny a tlumiče sekundárního vypružení, případně motory s převodovkou. Nápravy s koly jako neodpružené hmoty ne.

Vzhledem k tomu, že nemám přístup k bližším hodnotám rozložení hmotnosti skříně, uvažuji rovnoměrné rozdělení hmoty v celé délce vozidla. Hmotnost skříně jsem spočetl stejně jako v hmotnostní bilanci. Uvažuji průměrnou hmotnost na metr délky ρ, a délku skříně L_i.

$$m_{si} = \rho \,.\, L_i$$

Moment setrvačnosti jsem pak spočetl pro uniformní rozdělení hmoty obdélníka.

$$I_{si} = \frac{m_{si}\, L_i^2}{12}$$

Hmotová charakteristika modelu				
index	1	2	3	
hmotnost podvozku	4 300	3 500	4 300	[kg]
mom. setrvačnosti podvozku	3 500	2 500	3 500	[kg.m^2]
hmotnost skříně prázdné	17 662	13 440		[kg]
hmotnost skříně provozně obsazené	26 544	19 741		[kg]
mom. setrvačnosti skříně prázdné	482 990	212 835		[kg.m^2]
mom. setrvačnosti skříně provozně obsazené	725 878	312 614		[kg.m^2]

8.3 Rozměry

Z typového výkresu znám rozměry skříně $L_1 = 18\,115\ mm$ a $L_2 = 13\,785\ mm$, vzdálenosti otočných bodů $(l_1 + l_2) = 11\,230\ mm$ a $(l_3 + l_4 + l_5) = 11\,230\ mm$, vzdálenost kloubu od druhého podvozku $l_3 = 2\,165\ mm$. Z konstrukce podvozku dále znám rozvor podvozku $p = 1\,800\ mm$, bázi pružin sekundárního vypružení $w_k = 410\ mm$ a bázi tlumičů sekundárního vypružení $w_b = 710\ mm$. Z dané geometrie jsem schopen dopočítat neznámé rozměry:

$$\frac{L_1}{2} = l_2 + l_3 \quad \rightarrow \quad l_2 = \frac{L_1}{2} - l_3 = \frac{18\,115}{2} - 2\,165 = 6\,892{,}5\ mm$$

$$(l_1 + l_2) \quad \rightarrow \quad l_1 = (l_1 + l_2) - l_2 = 11\,230 - 6\,892{,}5 = 4\,337{,}5\ mm$$

$$l_4 = \frac{L_2}{2} = \frac{13\,785}{2} = 6\,892{,}5\ mm$$

$$(l_3 + l_4 + l_5) \quad \rightarrow \quad l_5 = (l_3 + l_4 + l_5) - l_3 - l_4 = 11\,230 - 2\,165 - 6\,892{,}5 = 2\,172{,}5\ mm$$

Rozměry modelu [mm]	
$\boldsymbol{l_1}$	4 337,5
$\boldsymbol{l_2}$	6 892,5
$\boldsymbol{l_3}$	2 165
$\boldsymbol{l_4}$	6 892,5
$\boldsymbol{l_5}$	2 172,5
$\boldsymbol{L_1}$	18 115
$\boldsymbol{L_2}$	13 785
$\boldsymbol{p}$	1 800
$\boldsymbol{w_b}$	710
$\boldsymbol{w_k}$	410

8.4 Pohybové rovnice

Pro sestavení pohybových rovnic použiju metodu Lagrangeových rovnic druhého druhu. Pro hledání vlastních vlastností systému mi stačí levá strana rovnice, tudíž nepočítám s kinematickým buzením od koleje, ani s dynamickým buzením strojů ve vozidle. Proto je na pravé straně rovnice nula.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E_K}{\partial q_i} + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial E_P}{\partial q_i} = 0$$

Nejprve tedy sestavím rovnice jednotlivých energií, které postihují svislý posuv a rotaci kolem příčné osy *y*.

Kinetická energie v základním tvaru:

$$E_K = \frac{1}{2} m_n \dot{q}_n^2$$

Kinetická energie dynamického modelu:

$$E_K = \frac{1}{2} m_{p1} \dot{z}_1^2 + \frac{1}{2} I_{p1} \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_{p2} \dot{z}_2^2 + \frac{1}{2} I_{p2} \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} m_{p3} \dot{z}_3^2 + \frac{1}{2} I_{p3} \dot{\varphi}_3^2 + \frac{1}{2} m_{s1} \dot{z}_4^2 + \frac{1}{2} I_{s1} \dot{\varphi}_4^2 + \frac{1}{2} m_{s2} \dot{z}_5^2 + \frac{1}{2} I_{s2} \dot{\varphi}_5^2$$

Disipační energie jednoho tlumiče v základním tvaru:

$$E_D = \frac{1}{2} b_n (\dot{q}_n - \dot{q}_{n-1})^2$$

Disipační energie dynamického modelu

$$E_D = b_{p1} \dot{z}_1^2 + \frac{1}{2} b_{p1} p \dot{\varphi}_1^2 + b_{p2} \dot{z}_2^2 + \frac{1}{2} b_{p2} p \dot{\varphi}_2^2 + b_{p3} \dot{z}_3^2 + \frac{1}{2} b_{p3} p \dot{\varphi}_3^2 + b_{s1}\left((\dot{z}_4 - l_1 \dot{\varphi}_4) - \dot{z}_1\right)^2 + b_{s2}\left((\dot{z}_4 + l_2 \dot{\varphi}_4) - \dot{z}_2\right)^2 + b_{s3}\left((\dot{z}_5 + l_5 \dot{\varphi}_5) - \dot{z}_3\right)^2 + \frac{1}{2} b_{s1} w_b (\dot{\varphi}_4 - \dot{\varphi}_1)^2 + \frac{1}{2} b_{s2} w_b (\dot{\varphi}_4 - \dot{\varphi}_2)^2 + \frac{1}{2} b_{s3} w_b (\dot{\varphi}_5 - \dot{\varphi}_3)^2$$

Potencionální energie jedné pružiny v základním tvaru, je velmi podobná disipační energii, ovšem s tím rozdílem, že pracuje s posuvem namísto rychlostí a tuhostí namísto tlumení.

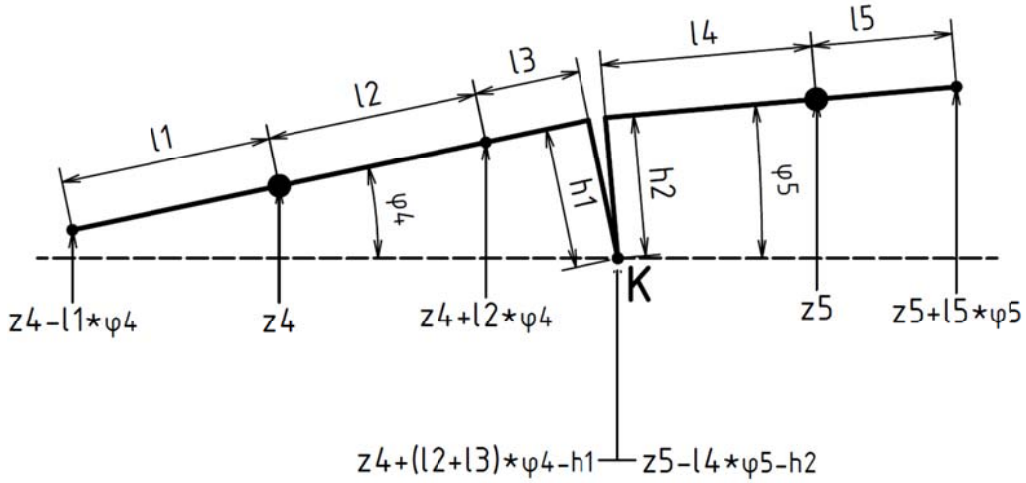
$$E_P = \frac{1}{2} k_n (q_n - q_{n-1})^2$$

Potenciální energie dynamického modelu je díky stejnému rozmístění pružin jako rozmístění tlumičů velmi podobná energii disipační. Liší se tak pouze jinými koeficienty na stejných místech.

$$E_P = k_{p1}z_1^2 + \frac{1}{2}k_{p1}p\varphi_1^2 + k_{p2}z_2^2 + \frac{1}{2}k_{p2}p\varphi_2^2 + k_{p3}z_3^2 + \frac{1}{2}k_{p3}p\varphi_3^2$$
$$+ k_{s1}\big((z_4 - l_1\varphi_4) - z_1\big)^2 + k_{s2}\big((z_4 + l_2\varphi_4) - z_2\big)^2 + k_{s3}\big((z_5 + l_5\varphi_5) - z_3\big)^2$$
$$+ \frac{1}{2}k_{s1}w_k(\varphi_4 - \varphi_1)^2 + \frac{1}{2}k_{s2}w_k(\varphi_4 - \varphi_2)^2 + \frac{1}{2}k_{s3}w_k(\varphi_5 - \varphi_3)^2$$

8.5 Vazební rovnice

Kloub mezi skříní 1 a 2 mi vytváří vazbu, kterou musím zohlednit v pohybových rovnicích tím, že napíši vazební rovnici, která mi odebere jeden stupeň volnosti.



Na levou stranu rovnice dám souřadnice od těžiště skříně 1 ke kloubu, na pravou stranu souřadnice od těžiště skříně 2 ke kloubu

$$z_4 + (l_2 + l_3)\varphi_4 - h_1 = z_5 - l_4\varphi_5 - h_2$$

Uvažuji stejnou výšku těžiště $h_1 = h_2$ obou skříní, tudíž mohu vazbu přepsat do tvaru

$$z_4 + (l_2 + l_3)\varphi_4 = z_5 - l_4\varphi_5$$

Odtud pak získávám vazební rovnici, kterou dosadím do rovnic energií, a tím odstraním jeden stupeň volnosti

$$\varphi_5 = \frac{z_5 - z_4 - (l_2 + l_3)\varphi_4}{l_4}$$

Vektor neznámých tak obsahuje pouze 9° volnosti

$$q = [z_1, \varphi_1, z_2, \varphi_2, z_3, \varphi_3, z_4, \varphi_4, z_5]^T$$

Při dosazování do energií pak budu ještě potřebovat druhou mocninu

$$\varphi_5^2 = \frac{z_5^2 - 2z_5z_4 - 2z_5(l_2 + l_3)\varphi_4 + z_4^2 + 2z_4(l_2 + l_3)\varphi_4 + (l_2 + l_3)^2\varphi_4^2}{l_4^2}$$

8.6 Dosazení do rovnic energií

Nyní je třeba vazební rovnici dosadit do rovnic energií. Do kinetické energie mohu vazební rovnici dosadit za úhel φ_5^2 přímo.

$$E_K = \frac{1}{2}m_{p1}\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2}I_{p1}\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_{p2}\dot{z}_2^2 + \frac{1}{2}I_{p2}\dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2}m_{p3}\dot{z}_3^2 + \frac{1}{2}I_{p3}\dot{\varphi}_3^2 + \frac{1}{2}m_{s1}\dot{z}_4^2 + \frac{1}{2}I_{s1}\dot{\varphi}_4^2$$
$$+ \frac{1}{2}m_{s2}\dot{z}_5^2 + \frac{1}{2}I_{s2}\left(\frac{\dot{z}_5^2 - 2\dot{z}_5\dot{z}_4 - 2\dot{z}_5(l_2+l_3)\dot{\varphi}_4 + \dot{z}_4^2 + 2\dot{z}_4(l_2+l_3)\dot{\varphi}_4 + (l_2+l_3)^2\dot{\varphi}_4^2}{l_4^2}\right)$$

Rovnice energie disipační a potenciální je třeba nejdříve roznásobit, a až poté mohu dosadit vazební rovnici za úhly φ_5 a φ_5^2.

Roznásobení disipační energie

$$E_D = b_{p1}\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2}b_{p1}p\dot{\varphi}_1^2 + b_{p2}\dot{z}_2^2 + \frac{1}{2}b_{p2}p\dot{\varphi}_2^2 + b_{p3}\dot{z}_3^2 + \frac{1}{2}b_{p3}p\dot{\varphi}_3^2$$
$$+ b_{s1}(\dot{z}_4^2 - 2\dot{z}_4 l_1\dot{\varphi}_4 - 2\dot{z}_4\dot{z}_1 + l_1^2\dot{\varphi}_4^2 + 2l_1\dot{\varphi}_4\dot{z}_1 + \dot{z}_1^2) + \frac{1}{2}b_{s1}w_b(\dot{\varphi}_4^2 - 2\dot{\varphi}_4\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_1^2)$$
$$+ b_{s2}(\dot{z}_4^2 + 2\dot{z}_4 l_2\dot{\varphi}_4 - 2\dot{z}_4\dot{z}_2 + l_2^2\dot{\varphi}_4^2 - 2l_2\dot{\varphi}_4\dot{z}_2 + \dot{z}_2^2) + \frac{1}{2}b_{s2}w_b(\dot{\varphi}_4^2 - 2\dot{\varphi}_4\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_2^2)$$
$$+ b_{s3}[\dot{z}_5^2 - 2\dot{z}_5 l_5\dot{\varphi}_5 - 2\dot{z}_5\dot{z}_3 + l_5^2\dot{\varphi}_5^2 + 2l_5\dot{\varphi}_5\dot{z}_3 + \dot{z}_3^2] + \frac{1}{2}b_{s3}w_b(\dot{\varphi}_5^2 - 2\dot{\varphi}_5\dot{\varphi}_3 + \dot{\varphi}_3^2)$$

A následné dosazení za úhel φ_5.

$$E_D = b_{p1}\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2}b_{p1}p\dot{\varphi}_1^2 + b_{p2}\dot{z}_2^2 + \frac{1}{2}b_{p2}p\dot{\varphi}_2^2 + b_{p3}\dot{z}_3^2 + \frac{1}{2}b_{p3}p\dot{\varphi}_3^2$$
$$+ b_{s1}(\dot{z}_4^2 - 2\dot{z}_4 l_1\dot{\varphi}_4 - 2\dot{z}_4\dot{z}_1 + l_1^2\dot{\varphi}_4^2 + 2l_1\dot{\varphi}_4\dot{z}_1 + \dot{z}_1^2) + \frac{1}{2}b_{s1}w_b(\dot{\varphi}_4^2 - 2\dot{\varphi}_4\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_1^2)$$
$$+ b_{s2}(\dot{z}_4^2 + 2\dot{z}_4 l_2\dot{\varphi}_4 - 2\dot{z}_4\dot{z}_2 + l_2^2\dot{\varphi}_4^2 - 2l_2\dot{\varphi}_4\dot{z}_2 + \dot{z}_2^2) + \frac{1}{2}b_{s2}w_b(\dot{\varphi}_4^2 - 2\dot{\varphi}_4\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_2^2)$$
$$+ b_{s3}\left\{\dot{z}_5^2 - 2\dot{z}_5 l_5\left[\frac{\dot{z}_5 - \dot{z}_4 - (l_2+l_3)\dot{\varphi}_4}{l_4}\right] - 2\dot{z}_5\dot{z}_3\right.$$
$$+ l_5^2\left[\frac{\dot{z}_5^2 - 2\dot{z}_5\dot{z}_4 - 2\dot{z}_5(l_2+l_3)\dot{\varphi}_4 + \dot{z}_4^2 + 2\dot{z}_4(l_2+l_3)\dot{\varphi}_4 + (l_2+l_3)^2\dot{\varphi}_4^2}{l_4^2}\right]$$
$$\left. + 2l_5\dot{z}_3\left(\frac{\dot{z}_5 - \dot{z}_4 - (l_2+l_3)\dot{\varphi}_4}{l_4}\right) + \dot{z}_3^2\right\}$$
$$+ \frac{1}{2}b_{s3}w_b\left\{\left[\frac{\dot{z}_5^2 - 2\dot{z}_5\dot{z}_4 - 2\dot{z}_5(l_2+l_3)\dot{\varphi}_4 + \dot{z}_4^2 + 2\dot{z}_4(l_2+l_3)\dot{\varphi}_4 + (l_2+l_3)^2\dot{\varphi}_4^2}{l_4^2}\right]\right.$$
$$\left. - 2\dot{\varphi}_3\left[\frac{\dot{z}_5 - \dot{z}_4 - (l_2+l_3)\dot{\varphi}_4}{l_4}\right] + \dot{\varphi}_3^2\right\}$$

Obdobně vypadá i roznásobení potenciální energie.

$$E_p = k_{p1}z_1^2 + \frac{1}{2}k_{p1}p\varphi_1^2 + k_{p2}z_2^2 + \frac{1}{2}k_{p2}p\varphi_2^2 + k_{p3}z_3^2 + \frac{1}{2}k_{p3}p\varphi_3^2$$
$$+ k_{s1}(z_4^2 - 2z_4l_1\varphi_4 - 2z_4z_1 + l_1^2\varphi_4^2 + 2l_1\varphi_4z_1 + z_1^2) + \frac{1}{2}k_{s1}w_k(\varphi_4^2 - 2\varphi_4\varphi_1 + \varphi_1^2)$$
$$+ k_{s2}(z_4^2 + 2z_4l_2\varphi_4 - 2z_4z_2 + l_2^2\varphi_4^2 - 2l_2\varphi_4z_2 + z_2^2) + \frac{1}{2}k_{s2}w_k(\varphi_4^2 - 2\varphi_4\varphi_2 + \varphi_2^2)$$
$$+ k_{s3}\left(z_5^2 - 2z_5l_5\varphi_5 - 2z_5z_3 + l_5^2\varphi_5^2 + 2l_5\varphi_5z_3 + z_3^2\right) + \frac{1}{2}k_{s3}w_k\left(\varphi_5^2 - 2\varphi_5\varphi_3 + \varphi_3^2\right)$$

A následné dosazení za úhel φ_5.

$$E_p = k_{p1}z_1^2 + \frac{1}{2}k_{p1}p\varphi_1^2 + k_{p2}z_2^2 + \frac{1}{2}k_{p2}p\varphi_2^2 + k_{p3}z_3^2 + \frac{1}{2}k_{p3}p\varphi_3^2$$
$$+ k_{s1}(z_4^2 - 2z_4l_1\varphi_4 - 2z_4z_1 + l_1^2\varphi_4^2 + 2l_1\varphi_4z_1 + z_1^2) + \frac{1}{2}k_{s1}w_k(\varphi_4^2 - 2\varphi_4\varphi_1 + \varphi_1^2)$$
$$+ k_{s2}(z_4^2 + 2z_4l_2\varphi_4 - 2z_4z_2 + l_2^2\varphi_4^2 - 2l_2\varphi_4z_2 + z_2^2) + \frac{1}{2}k_{s2}w_k(\varphi_4^2 - 2\varphi_4\varphi_2 + \varphi_2^2)$$
$$+ k_{s3}\left\{z_5^2 - 2z_5l_5\left[\frac{z_5 - z_4 - (l_2 + l_3)\varphi_4}{l_4}\right] - 2z_5z_3\right.$$
$$+ l_5^2\left[\frac{z_5^2 - 2z_5z_4 - 2z_5(l_2 + l_3)\varphi_4 + z_4^2 + 2z_4(l_2 + l_3)\varphi_4 + (l_2 + l_3)^2\varphi_4^2}{l_4^2}\right]$$
$$\left. + 2l_5z_3\left[\frac{z_5 - z_4 - (l_2 + l_3)\varphi_4}{l_4}\right] + z_3^2\right\}$$
$$+ \frac{1}{2}k_{s3}w_k\left\{\left[\frac{z_5^2 - 2z_5z_4 - 2z_5(l_2 + l_3)\varphi_4 + z_4^2 + 2z_4(l_2 + l_3)\varphi_4 + (l_2 + l_3)^2\varphi_4^2}{l_4^2}\right]\right.$$
$$\left. - 2\varphi_3\left[\frac{z_5 - z_4 - (l_2 + l_3)\varphi_4}{l_4}\right] + \varphi_3^2\right\}$$

8.7 Derivace

Když mám vyjádřené rovnice energií, mohu přistoupit k jejich derivaci podle jednotlivých zobecněných souřadnic, tak jak udává Lagrangeova rovnice.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E_K}{\partial q_i} + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial E_P}{\partial q_i} = 0$$

$$q = [z_1, \varphi_1, z_2, \varphi_2, z_3, \varphi_3, z_4, \varphi_4, z_5]^T$$

Derivuji tedy tři energie, které jsem si vyjádřil na předchozích stránkách podle devíti proměnných a následně derivaci kinetické energie ještě jednou podle času. Abych tuto kapitolu ještě více nekomplikoval rozepisováním dlouhých vztahů jednotlivých derivací, uvádím systém již přepsaný do tvaru matic.

$$\boldsymbol{M}\ddot{q} + \boldsymbol{B}\dot{q} + \boldsymbol{K}q = 0$$

Kde M je matice hmotnost, M matice tlumení, K matice tuhosti a q je vektor zobecněných souřadnic. Jako první kontrola správnosti derivací je symetrie matic podle hlavní diagonály.
V maticích je také dobře vidět jak se vazební podmínka promítne do systému rovnic. Matice jsou zobrazeny na následujících stránkách.

8.8 Matice

8.8.1 Matice hmotnosti

m_{p1}	0	0	0	0	0	0	0	0
0	I_{p1}	0	0	0	0	0	0	0
0	0	m_{p2}	0	0	0	0	0	0
0	0	0	I_{p2}	0	0	0	0	0
0	0	0	0	m_{p3}	0	0	0	0
0	0	0	0	0	I_{p3}	0	0	0
0	0	0	0	0	0	$m_{s1} + \frac{I_{s2}}{l_4^2}$	$\frac{I_{s2}}{l_4^2}(l_2 + l_3)$	$-\frac{I_{s2}}{l_4^2}$
0	0	0	0	0	0	$\frac{I_{s2}}{l_4^2}(l_2 + l_3)$	$I_{s1} + \frac{I_{s2}}{l_4^2}(l_2 + l_3)$	$-\frac{I_{s2}}{l_4^2}(l_2 + l_3)$
0	0	0	0	0	0	$-\frac{I_{s2}}{l_4^2}$	$-\frac{I_{s2}}{l_4^2}(l_2 + l_3)$	$m_{s2} + \frac{I_{s2}}{l_4^2}$

8.8.2 Matice tlumení

$2b_{s1}+2b_{p1}$	0	0	0	0	$-2b_{s1}$	$2b_{s1}l_1$	0	0	0
0	$b_{s1}w_b+b_{p1}p$	0	0	0	0	$-b_{s1}w_b$	0	0	0
0	0	$2b_{s2}+2b_{p2}$	0	0	$-2b_{s2}$	$-2b_{s2}l_2$	0	0	0
0	0	0	$b_{s2}w_b+b_{p2}p$	0	0	$-b_{s2}w_b$	0	0	0
0	0	0	0	$2b_{s3}+2b_{p3}$	$2b_{s3}\frac{l_5}{l_4}$	$2b_{s3}(l_2+l_3)\,l_5/l_4$	$-2b_{s3}(1+l_5/l_4)$	0	0
0	0	0	0	0	$b_{s3}w_b\frac{1}{l_4}$	$b_{s3}w_b\frac{(l_2+l_3)}{l_4}$	$-b_{s3}w_b\frac{1}{l_4}$	$b_{s3}w_b+b_{p3}p$	0
$-2b_{s1}$	0	$-2b_{s2}$	0	$2b_{s3}\frac{l_5}{l_4}$	$2b_{s1}+2b_{s2}+2b_{s3}\left(\frac{l_5^2}{l_4^2}+\frac{w_b}{l_4^2}\right)$	$-2b_{s1}l_1+2b_{s2}l_2+2b_{s3}\frac{(l_2+l_3)}{l_4^2}\left(l_5^2+\frac{w_b}{2}\right)$	$-2b_{s3}\frac{l_5}{l_4}\left(1+\frac{l_5}{l_4}\right)-b_{s3}\frac{w_b}{l_4^2}$	$b_{s3}w_b\frac{1}{l_4}$	$-2b_{s3}\frac{l_5}{l_4}$
$2b_{s1}l_1$	$-b_{s1}w_b$	$-2b_{s2}l_2$	$-b_{s2}w_b$	$2b_{s3}(l_2+l_3)\frac{l_5}{l_4}$	$b_{s3}w_b\frac{(l_2+l_3)}{l_4}$	$b_{s1}(2l_1^2+w_b)+2b_{s2}(l_2^2+w_b)+2bs_3(l_2+l_3)^2(2l_5^2+w_b)/l_4^2$	$-2b_{s3}\frac{l_5}{l_4}(l_2+l_3)\left(1+\frac{l_5}{l_4}\right)-b_{s3}\frac{w_b}{l_4^2}(l_2+l_3)$	$2b_3+2b_{s3}\frac{l_5}{l_4}\left(1+\frac{l_5}{l_4}\right)+b_{s3}\frac{w_b}{l_4^2}$	
0	0	0	0	$-2b_{s3}\left(1+\frac{l_5}{l_4}\right)$	$-b_{s3}w_b\frac{1}{l_4}$	$-2b_{s3}\frac{l_5}{l_4}\left(1+\frac{l_5}{l_4}\right)-b_{s3}\frac{w_b}{l_4^2}$			

8.8.3 Matice tuhosti

$2k_{s1}+2k_{p1}$	0	0	0	0	$-2k_{s1}$	$2k_{s1}l_1$	0	0	0
0	$k_{s1}w_k+k_{p1}p$	0	0	0	0	$-k_{s1}w_k$	0	0	0
0	0	$2k_{s2}+2k_{p2}$	0	0	$-2k_{s2}$	$-2k_{s2}l_2$	0	0	0
0	0	0	$k_{s2}w_k+k_{p2}p$	0	0	$-k_{s2}w_k$	0	0	0
0	0	0	0	$2k_{s3}+2k_{p3}$	$2k_{s3}\frac{l_5}{l_4}$	$2k_{s3}(l_2+l_3)\,l_5/l_4$	$2k_{s3}(1+l_5/l_4)$	0	0
0	0	0	0	0	$k_{s3}w_k\frac{1}{l_4}$	$k_{s3}w_k\frac{(l_2+l_3)}{l_4}$	$-k_{s3}w_k\frac{1}{l_4}$	$k_{s3}w_k+k_{p3}p$	0
$-2k_{s1}$	0	$-2k_{s2}$	0	$2k_{s3}\frac{l_5}{l_4}$	$2k_{s1}+2k_{s2}+2k_{s3}\left(\frac{l_5^2}{l_4^2}-\frac{w_b}{l_4^2}\right)$	$-2k_{s1}l_1+2k_{s2}l_2+2k_{s3}\frac{(l_2+l_3)}{l_4^2}\left(l_5^2+\frac{w_k}{2}\right)$	$-2k_{s3}\frac{l_5}{l_4}\left(1+\frac{l_5}{l_4}\right)-k_{s3}\frac{w_k}{l_4^2}$	$k_{s3}w_k\frac{1}{l_4}$	0
$2k_{s1}l_1$	$-k_{s1}w_k$	$-2k_{s2}l_2$	$-k_{s2}w_k$	$2k_{s3}(l_2+l_3)\frac{l_5}{l_4}$	$-2k_{s1}l_1+2k_{s2}l_2+2k_{s3}\frac{(l_2+l_3)}{l_4^2}\left(l_5^2+\frac{w_k}{2}\right)$	$-2k_{s1}(l_1^2+w_k)+2k_{s2}(l_2^2+w_k)+2k_{s3}(l_2+l_3)^2(2l_5^2+w_k)/l_4^2$	$-2k_{s3}\frac{l_5}{l_4}(l_2+l_3)\left(1+\frac{l_5}{l_4}\right)-k_{s3}\frac{w_k}{l_4^2}(l_2+l_3)$	$k_{s3}w_k\frac{1}{l_4}$	$-2k_{s3}\frac{l_5}{l_4}(l_2+l_3)\left(1+\frac{l_5}{l_4}\right)+k_{s3}\frac{w_k}{l_4^2}$
0	0	0	0	$-2k_{s3}\left(1+\frac{l_5}{l_4}\right)$	$-2k_{s3}\frac{l_5}{l_4}\left(1+\frac{l_5}{l_4}\right)-k_{s3}\frac{w_k}{l_4^2}$	$-2k_{s3}\frac{l_5}{l_4}(l_2+l_3)\left(1+\frac{l_5}{l_4}\right)-k_{s3}\frac{w_k}{l_4^2}(l_2+l_3)$	$-k_{s3}w_k\frac{1}{l_4}$	$2k_{s3}+2k_{s3}\frac{l_5}{l_4}\left(1+\frac{l_5}{l_4}\right)+k_{s3}\frac{w_k}{l_4^2}$	

8.9 Vyhodnocení systému

Vzhledem ke složitosti systému už ruční výpočet nepřipadá v úvahu, a proto jsem přistoupil k řešení pomocí softwaru Matlab ve verzi 2014a s použitím akademické licence. Soubor *Dynamika.m* se zdrojovým kódem i přídavnými funkcemi je umístěn na přiloženém CD. Zde uvedu použité postupy a jejich výsledky.

8.9.1 Vlastní frekvence

Pro výpočet vlastních frekvencí tlumené soustavy je výhodné převést systém 2. řádu na systém 1. řádu o dvojnásobném počtu rovnic.

$$\dot{q} = v$$
$$M\dot{v} + Bv + Kq = 0$$

Tento pak mohu rozepsat do tvaru:

$$\begin{bmatrix}\dot{q}\\ \dot{v}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & E\\ -M^{-1}K & -M^{-1}B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_0\\ v_0\end{bmatrix}$$

Pro další použití tento přepíšu na:

$$x = Ax_0$$

Následně použiji příkaz *damp* , který najde vlastní frekvence i poměné útlumy.

$$[Wn, br] = damp(A)$$

Kde *Wn* je vektor vlastních frekvencí, *br* je vektor poměrných útlumů. Příkaz generuje vlastní frekvence v *[rad/s]*, proto pro převod na jednotky *[Hz]* musím ještě vektor vydělit 2π.

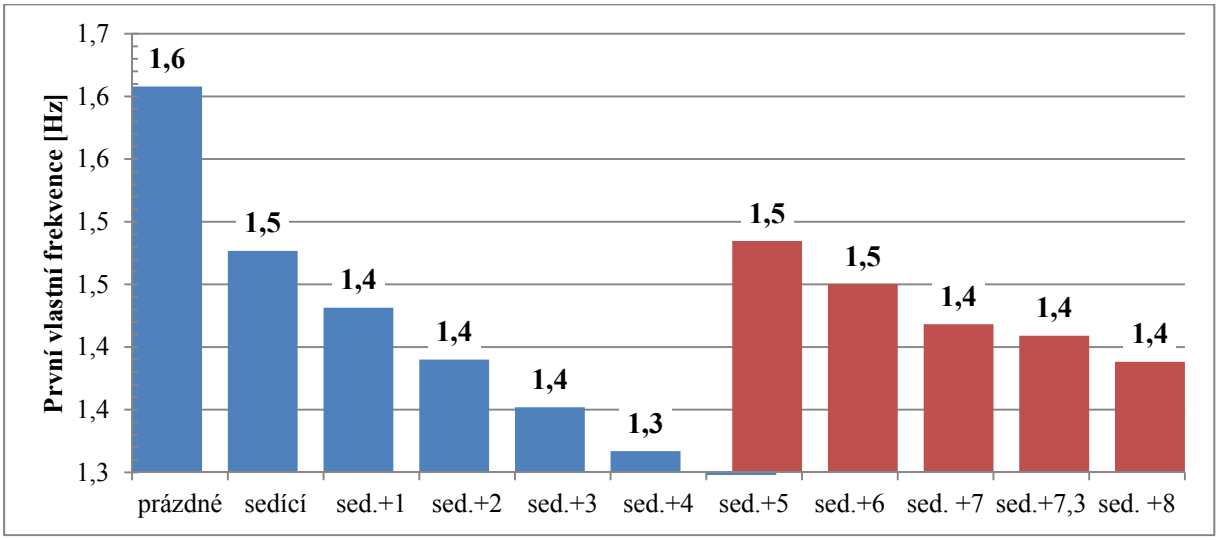
$$f = \frac{Wn}{2\pi}\ [Hz]$$

Do tabulky uvádím výsledky vozidla prázdného a provozně obsazeného.

Tabulka 8.1Vlastní frekvence a poměrný útlum

	prázdné vozidlo		provozně obsazené vozidlo (4 os/m^2)	
	frekvence	poměrný útlum	frekvence	poměrný útlum
f_1	1.63	0.25	1.33	0.21
f_2	2.00	0.31	1.61	0.25
f_3	2.96	0.44	2.32	0.35
f_4	7.14	0.30	7.35	0.28
f_5	7.35	0.29	7.45	0.27
f_6	7.51	0.15	7.52	0.15
f_7	7.52	0.15	7.52	0.15
f_8	10.07	0.33	10.29	0.32
f_9	10.68	0.18	10.68	0.18

První tři frekvence připadají na houpání a kývání skříně. Tyto tvary kmitu jsou zobrazeny v následující kapitole 8.9.2. Zbylých šest frekvencí potom připadá na rezonanční stavy podvozků.



Obrázek 8.1 Graf 1.vlastní frekvence v závislosti na obsazení

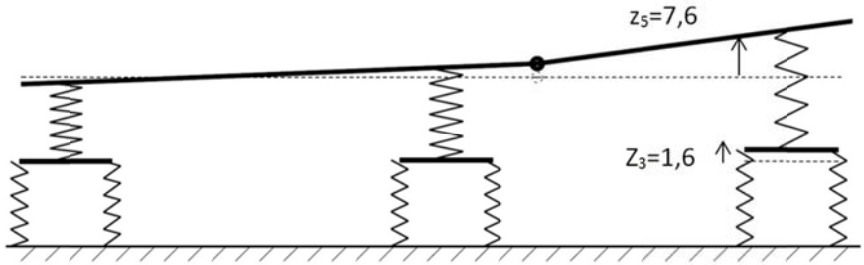
Pro lepší orientaci ve výsledcích jsem vykreslil první vlastní frekvenci v závislosti na obsazení. Velmi záleží na provozovateli, s jakým zatížením bude tramvaj provozována. Nicméně při návrhu jsem cílil na co nejnižší frekvence v oblasti provozního obsazení vozidla, v které se vozidlo bude pravděpodobně pohybovat po většinu svého života. V první části charakteristiky (vypružení pouze prostřednictvím vinutých pružin) jsem dosáhl poměrně nízkých frekvencí v rozmezí *1,5 až 1,3 Hz.* Dále je jasně patrný přechod na vyšší tuhost při dosednutí na pryžový sloupek v sekundárním stupni vypružení, který skokově zvýší první vlastní frekvenci vozidla. Svislá dynamika tak z pohledu cestujícího vykazuje velmi příznivé vlastnosti.

8.9.2 Vlastní tvary kmitu

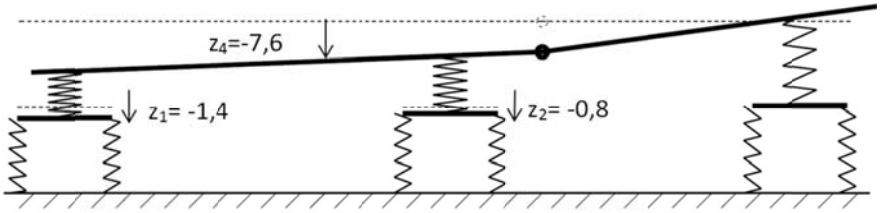
Pro hledání vlastních vektorů je vhodné použít příkaz *eig*

$$[V, D] = eig(-inv(M) * K)$$

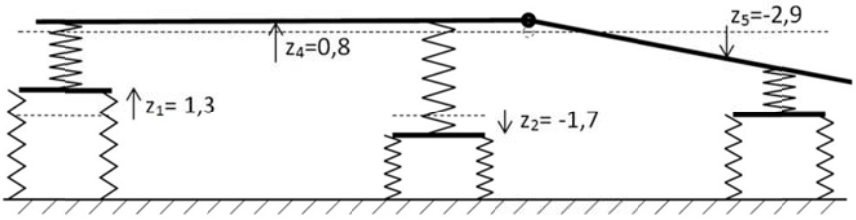
Kde *V* je matice vlastních vektorů a *D* je matice vlastních čísel. Zde uvádím pouze tři vybrané tvary kmitu, které mají rozhodující vliv na pohyb skříně a tudíž i komfort cestujících. Na obrázku jsou naznačeny jen významné výchylky normovaného vlastního vektoru v jednotkách *mm*. Z obrázků jsou patrné rezonanční stavy na jednotlivých frekvencích.



Obrázek 8.2 Vlastní tvar kmitu f= 1,33 Hz



Obrázek 8.3 Vlastní tvar kmitu f= 1,61 Hz



Obrázek 8.4 Vlastní tvar kmitu f= 2,32 Hz

8.9.3 Odezva na nenulové počáteční podmínky

K rychlému posouzení nastavení tlumení se hodí zjistit odezvu dynamického systému na vynucenou výchylku (nenulové počáteční podmínky). Dobře utlumený systém by se měl uklidnit po zhruba třech výkmitech.

K výpočtu odezvy používám vestavěnou funkci *ode45*, která integruje metodou Runge-Kutta. Matlab neumí počítat diferenciální systém vyššího než prvního řádu. Proto opět použiji systém s dvojnásobným počtem rovnic. Konstanty a poč. podmínky převedu na pravou stranu.

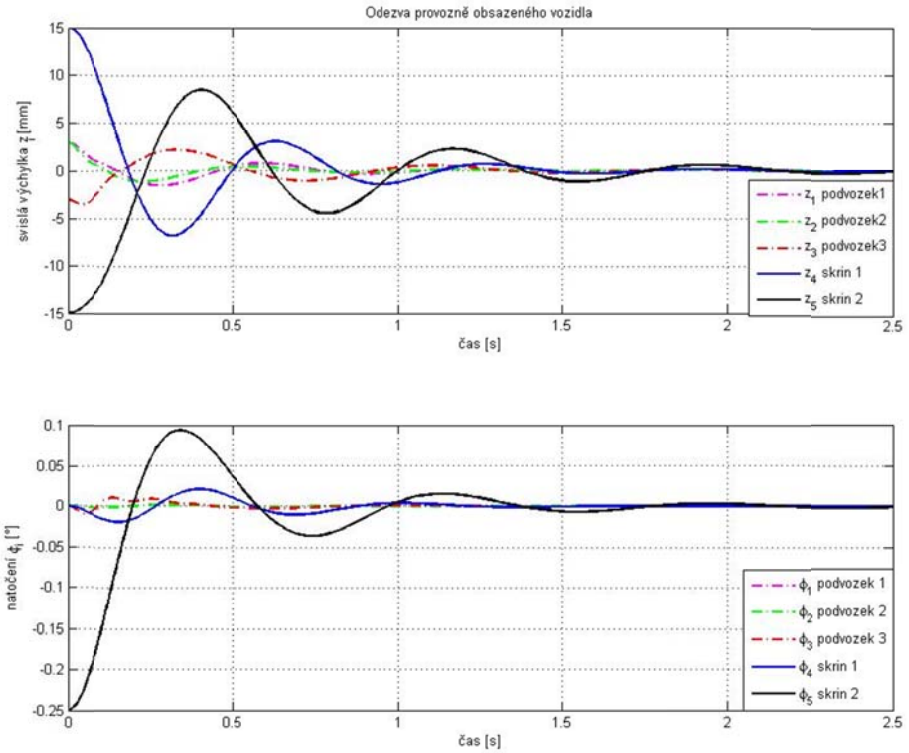
$$\dot{q} = v_0$$
$$\dot{v} = -M^{-1}Bv_0 - M^{-1}Kq_0$$

Počáteční podmínky jsou polohy a rychlosti v nulovém čase, které jsem zvolil náhodně. Podvozky jsem vychýlil o 3 mm, skříně o 15 mm, každou opačným směrem. Počáteční rychlosti jsou nulové.

$$q_0 = [z_{10}, \varphi_{10}, z_{20}, \varphi_{02}, z_{30}, \varphi_{30}, z_{40}, \varphi_{40}, z_{50}]^T$$

$$q_0 = [0.003; 0; 0.003; 0; -0.003; 0; 0.015; 0; -0.015]^T$$

$$\dot{q_0} = v_0 = [\dot{z_{10}}, \dot{\varphi_{10}}, \dot{z_{20}}, \dot{\varphi_{02}}, \dot{z_{30}}, \dot{\varphi_{30}}, \dot{z_{40}}, \dot{\varphi_{40}}, \dot{z_{50}}]^T = [0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0]^T$$



Obrázek 8.5 Odezva provozně obsazeného vozidla

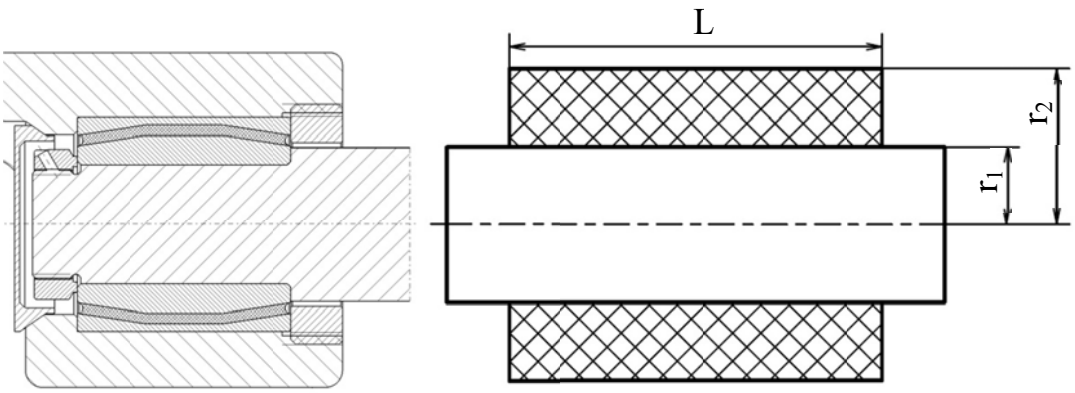
Odezva ukazuje, že houpání skříně se uklidní u třetího výkmitu a systém je tedy dobře zatlumen.

9 Změna kolových sil na zborcené koleji

V této kapitole porovnám změnu kolových sil na zborcené koleji podvozku s poddajným rámem a podvozku s rámem tuhým. Nejprve vypočítám tuhost pryžového kloubu a až poté přejdu k výpočtu změny kolových sil a zhodnotím přínos poddajnosti.

9.1 Tuhost pryžového kloubu

K výpočtům tuhosti pryžových součástí existuje několik přístupů, ať už empirických nebo pomocí nelineárních modelů metody konečných prvků. Mnou použitý kloub ve výpočtech nahradím jednoduchým rotačním silnetblokem mezikruhového průřezu s poloměry $r_1 = 50\ mm, r_2 = 56mm$ a délkou $L = 120mm$.



Obrázek 9.1 Náhradní model kloubu

Zároveň je problém najít přesnější informace o materiálových konstantách jako jsou: Modul pružnosti v tahu *E (1 až 10MPa)*, Modul pružnosti ve smyku *G (0,2 až 3,5MPa)* a Poissonova konstanta ν *(0,46 až 0,49)*, neboť tyto jsou velmi závislé na chemickém složení elastomeru, tvaru součásti, deformaci i frekvenci zatěžování a jsou utajovaným know-how výrobců. Významná je také nepřesnost výroby, kdy i při velkém důrazu na správný výrobní proces jsou běžné odchylky mechanických vlastností od jmenovité hodnoty kolem 15% a více.

Materiál volím často používaný NBR (Nitrile butadiene rubber), který má velký rozsah pracovních teplot (-40 až +140 °C); velmi dobrou odolnost proti olejům, naftě, benzínu a organickým sloučeninám; a je také odolný proti stárnutí; pevnost v tahu až *25 MPa*.

Provádím přibližný výpočet podle [11], kapitola 6. Na straně 73 těchto skript je přibližná křivka modulu pružnosti G ve smyku v závislosti na tvrdosti pryže. Ten jsem si překreslil do programu MS Excel a proložil exponenciální křivkou (viz. Obrázek 9.2).

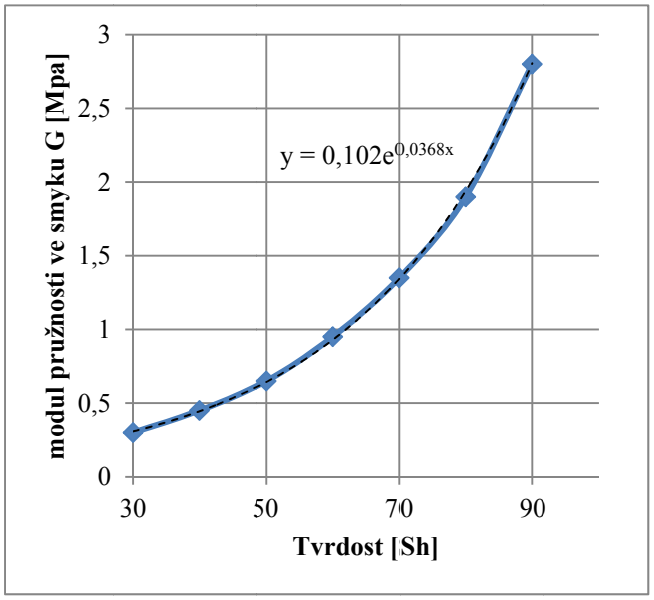
Tvrdost pryže volím 75° Shore, odtud pak dopočítám modul pružnosti ve smyku.

$$G = 0{,}102\, e^{0{,}0368\, Sh} = 1{,}61\ MPa$$

Pro výpočet modulu pružnosti v tahu pak používám klasický vztah, přičemž Poissonovu konstantu volím $\nu = 0{,}49$.

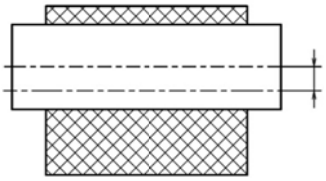
$$E = 2G(1+\nu) = 4{,}80\ MPa$$

Po získání těchto materiálových konstant mohu přistoupit k výpočtu tuhostí kloubu.



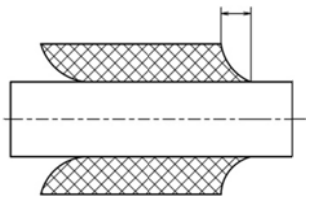
Obrázek 9.2 Graf modulu pružnosti pryže

Radiální tuhost (síla kolmá na podélnou osu):



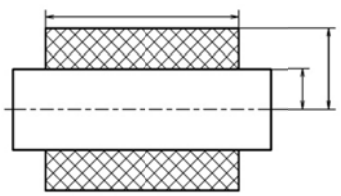
$$k_R = \frac{\pi L}{\ln\frac{r_2}{r_1}}(E+G) = 20\ 447\ 672 \qquad [N/m]$$

Axiální tuhost (síla ve směru podélné osy):



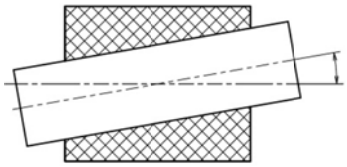
$$k_A = \frac{2\pi LG}{\ln\frac{r_2}{r_1}} = 10\ 257\ 212 \qquad [N/m]$$

Torzní tuhost (moment kolem podélné osy):



$$k_{\varphi x} = \frac{4\pi LG}{\frac{1}{r_1^2}-\frac{1}{r_2^2}} = 28\ 709 \qquad [Nm/rad]$$

Kardanová tuhost (moment kolem příčné osy):

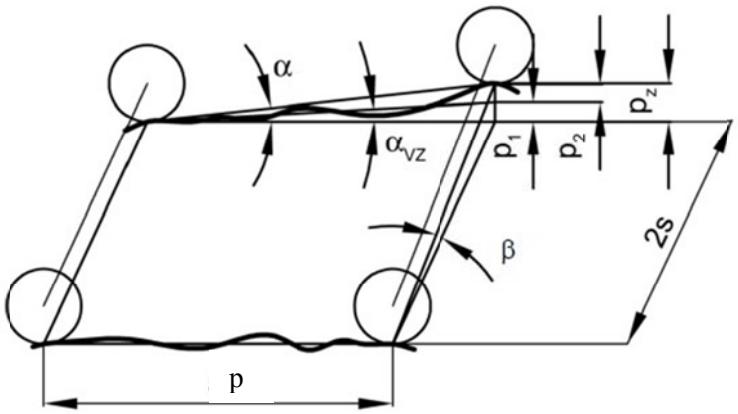


$$k_{\varphi y} = \frac{\pi L^3}{24 \ln \frac{r_2}{r_1}} (E + G) = 11\,268 \qquad [Nm/rad]$$

Kvůli tenké vrstvě pryže kloub vykazuje velkou radiální i axiální tuhost. Tyto jsou potřebné pro zachování polohy půlrámů vůči sobě a nebude tak docházet ke kosení celého rámu. Zároveň se rám nebude v příčné rovině „otevírat“ vlivem sil v sekundárním vypružení. Naopak vykazuje velmi malou torzní a kardanovou tuhost. Ty mají za následek malý odpor rámu proti nakroucení. Vzhledem k tomu, že radiální tuhost kloubu je mnohonásobně vyšší než tuhost torzní, budu ve výpočtu změny kolových sil uvažovat kloub jako radiálně absolutně tuhý.

9.2 Geometrie zborcení

Změna kolových sil plyne z postavení podvozku na koleji s rozdílnou výškou levé a pravé kolejnice pod jednotlivými koly. To se na trati vyskytuje buďto úmyslně (vzestupnice z přímé trati do převýšeného oblouku), nebo jako opotřebení trati (trvalá změna geometrie koleje vlivem dynamických sil). Geometrické poměry ilustruje Obrázek 9.3. Převýšení jednoho kola oproti ostatním je dáno úhlem vzestupnice α_{vz} a lokální svislou nerovností kolejnice p_2. Rozvor podvozku $p = 1{,}8\ m$, vzdálenost styčných kružnic $2s = 1{,}5\ m$.



Obrázek 9.3 Geometrie zborcení

Pro výpočet budu uvažovat limitní případ zborcení 1:150 + 25mm.

$$p_z = \alpha_{vz}.p + p_2 = \frac{1}{150} 1800 + 25 = 37\ mm$$

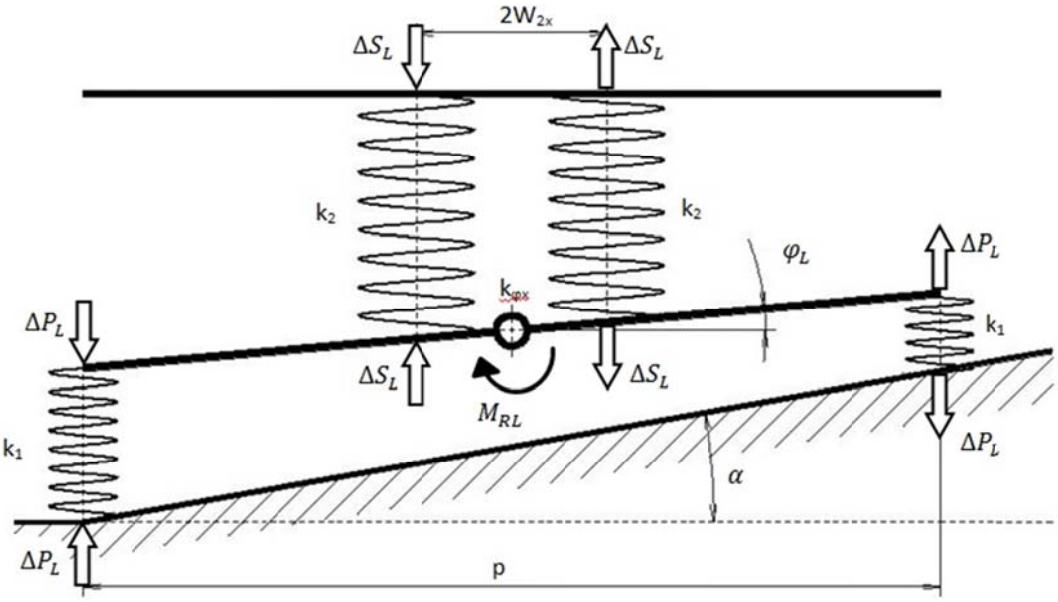
$$\alpha = \frac{p_z}{p} = 1{,}178°$$

9.3 Změna sil na rámu

Pro následné výpočty zavedu několik zjednodušení: pryžové prvky primárního vypružení vztáhnu do jedné pružiny v ose nápravnice, půlrámy prohlásím za absolutně tuhé, pryžové klouby jsou radiálně absolutně tuhé.

Nyní rozdělím rám na dva půlrámy a řeším jejich momentovou rovnováhu v podélném směru. Jeden půlrám připadá kolejnici bez převýšení, označím ho jako Pravá strana. Druhý půlrám sleduje kolejnici převýšenou a nazvu ho Levá strana. Do výpočtu zahrnuji vliv stlačení sekundárního vypružení při natočení půlrámu vůči skříni vozidla, protože se každý půlrám oproti skříni natočí jiným úhlem. To znamená, že každý z nich bude vykazovat jinou změnu síly v sekundárním stupni.

Levá strana se nachází na stoupající kolejnici, která je charakterizována úhlem α. Půlrám je vychýlen o obecný úhel φ_L , který bude menší než je úhel stoupání kolejnice. Proti tomuto vychýlení působí vnitřní moment rámu a síla sekundárního vypružení. Primární vypružení se naopak snaží půlrám dostat do polohy rovnoběžné s kolejnicí.



Změnu síly v pružinách sekundárního i primárního stupně mohu vypočítat z jejich tuhosti a stlačení. Natočení rámu vůči kolejnici je dáno rozdílem jejich absolutních úhlů.

$$\Delta S_L = k_2 . w_{2x} . \varphi_L \tag{9-1}$$

$$\Delta P_L = k_1 . \frac{p}{2} . (\alpha - \varphi_L) \tag{9-2}$$

Momentová rovnováha má potom tvar:

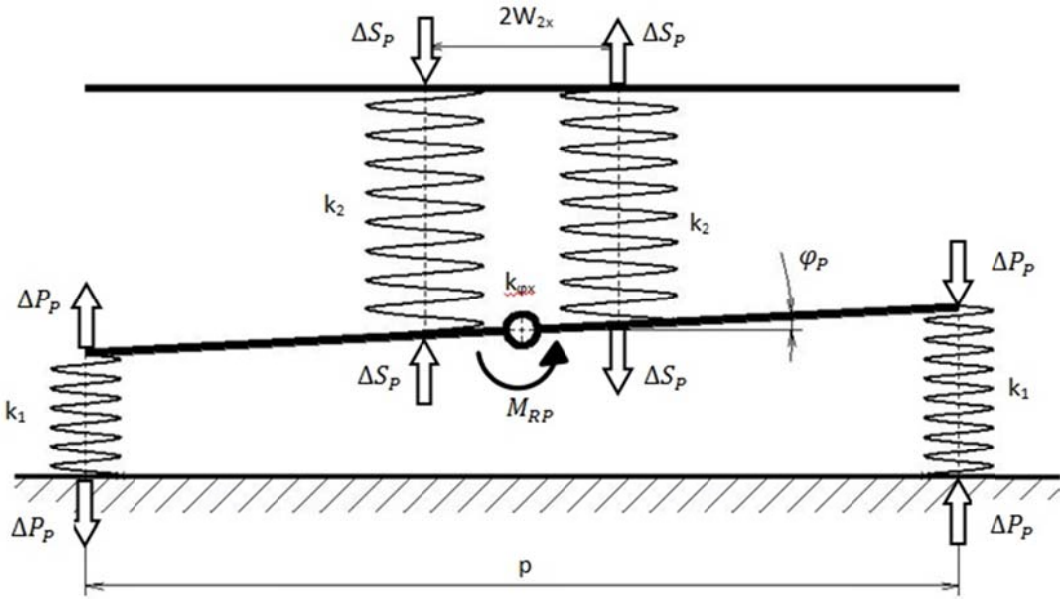
$$M_{RL} + 2.\Delta S_L.w_{2x} = 2.\Delta P_L\frac{p}{2} \tag{9-3}$$

Po dosazení (9-1) a (9-2) do vztahu a úpravě dostanu rovnici levého půlrámu ve tvaru:

$$M_{RL} = 2.k_1.\alpha.\left(\frac{p}{2}\right)^2 - 2.k_1.\left(\frac{p}{2}\right)^2\varphi_L - 2.k_2.w_{2x}^2.\varphi_L \tag{9-4}$$

Získám tak jednu rovnici o dvou neznámých (vnitřní moment a úhel natočení). Tu nejsem schopen samostatně vyřešit, proto přejdu k rovnováze druhého půlrámu.

Pravá strana jede po rovné kolejnici a tudíž je zatížena pouze vnitřním momentem rámu, který plyne z torzní tuhosti kloubů a relativního úhlu mezi půlrámy. Dojde k malému natočení, které označím jako úhel φ_P.Tento moment pak zachycuje primární i sekundární vypružení a z něj vyplívá malá změna kolové síly.



Obrázek 9.4 Pravý půlrám

Změnu síly v pružinách sekundárního i primárního stupně mohu vypočítat z jejich tuhosti a stlačení.

$$\Delta S_P = k_2.w_{2x}.\varphi_P \tag{9-5}$$

$$\Delta P_P = k_1.\frac{a}{2}.\varphi_P \tag{9-6}$$

Rovnice momentové rovnováhy má pak tvar:

$$M_{RP} = 2.\Delta S.w_{2x} + 2.\Delta P\frac{p}{2} \tag{9-7}$$

Po dosazení rovnic (9-5) a (9-6) do vztahu a úpravě dostanu rovnici pravého půlrámu ve tvaru:

$$M_{RP} = \varphi_P \left(2.k_2.w_{2x}^2 + 2.k_1.\left(\frac{p}{2}\right)^2\right) \tag{9-8}$$

Získal jsem opět jednu rovnici o dvou neznámých (vnitřní moment a úhel natočení).

Velikost vnitřního moment mohu také dopočíst z torzní tuhosti kloubů a relativního úhlu půlrámů.

$$M_R = 2.k_{\varphi x}.\varphi_{rel} = 2.k_{\varphi}.(\varphi_L - \varphi_P) \tag{9-9}$$

Tím jsem získal další vazební rovnici, kterou teď mohu dosadit do rovnice rovnováhy půlrámu. Po dosazení do rovnováhy pravého půlrámu (9-8) a úpravě dostávám vztah pro poměr absolutních úhlů půlrámů.

$$\varphi_P = \varphi_L \left(\frac{2.k_{\varphi x}}{2.k_2.w_{2x}^2 + 2.k_1.\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2.k_{\varphi x}}\right) \tag{9-10}$$

Protože vnitřní moment levého a pravého půlrámu musí být stejný, mohu dát vztahy (9-4) a (9-8) do jedné rovnice. Na levou stranu dám moment levého půlrámu a na pravou stranu dám moment pravého půlrámu, v kterém ještě dosadím za úhel φ_P vztah (9-10).

$$M_{RL} = M_{RP} \tag{9-11}$$

$$2.k_1.\alpha.\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2.k_1.\left(\frac{a}{2}\right)^2 \varphi_L - 2.k_2.w_{2x}^2.\varphi_L = \\ = \varphi_L \left(\frac{2.k_{\varphi x}}{2.k_2.w_{2x}^2 + 2.k_1.\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2.k_{\varphi x}}\right)\left(2.k_2.w_{2x}^2 + 2.k_1.\left(\frac{a}{2}\right)^2\right) \tag{9-12}$$

Po úpravě získávám rovnici pro výpočet úhlu φ_L, která je funkcí tuhostí a rozměrů podvozku a výšky nerovnosti.

$$\varphi_L = \frac{2.k_1.\alpha.\left(\frac{a}{2}\right)^2}{\left(2.k_2.w_{2x}^2 + 2.k_1.\left(\frac{a}{2}\right)^2\right)\left(1 + \frac{2.k_{\varphi x}}{2.k_2.w_{2x}^2 + 2.k_1.\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2.k_{\varphi x}}\right)} = 1{,}153° \tag{9-13}$$

Hodnotu úhlu následně mohu dosadit do předchozích vztahů (9-4) a (9-8) a dopočítat všechny ostatní hodnoty.

$$\varphi_P = 0{,}0097° \tag{9-14}$$

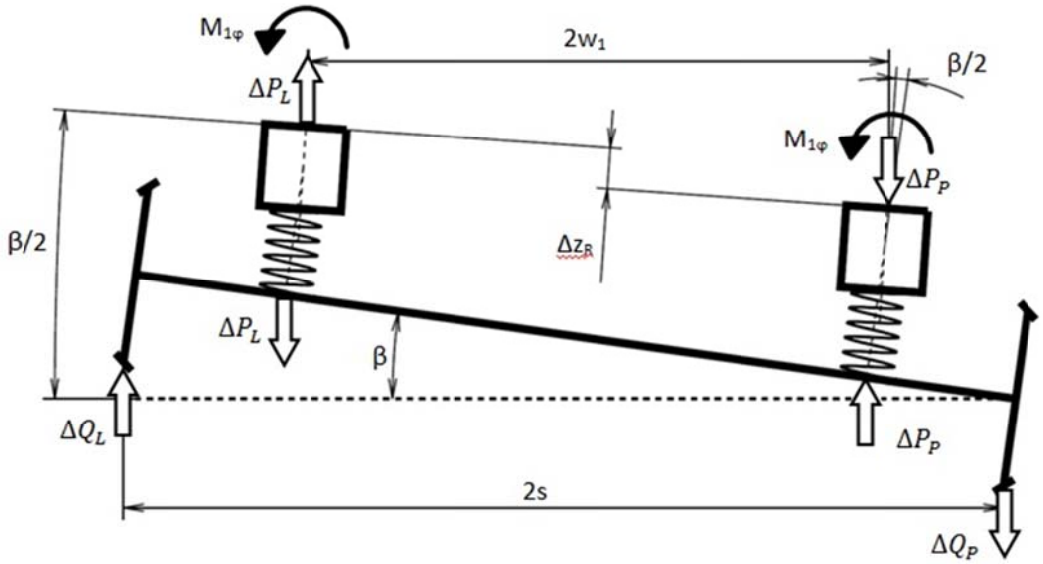
$$\varphi_{rel} = \varphi_L - \varphi_P = 1{,}144° \tag{9-15}$$

Tabulka 9.1 Změna sil rámu

	krajní podvozek	prostřední podvozek	
M_R	450	452	Nm
ΔP_L	608	780	N
ΔP_P	247	248	N
ΔS_L	1 588	2 348	N
ΔS_P	13	14	N

9.4 Změna kolových sil

Když znám změny sil v primárním vypružení, přejdu k rovnováze nápravy. Dá se matematicky dokázat, že příčná osa podvozku zaujme na zborcené koleji poloviční úhel příčného převýšení nápravy, tedy úhel $\beta/2$. Půlrámy jsou v příčné rovině nápravy vůči sobě posunuty o hodnotu Δz_R a také dojde k natočení kuželových prvků primárního vypružení o úhel $\beta/2$.



Obrázek 9.5 Postavení nápravy na zborcené koleji

Moment plynoucí z natočení kuželových prvků vypočtu z úhlu natočení a tuhosti prvku. Hodnotu jeho kardanové tuhosti nemám k dispozici, proto prvek zjednoduším na rotační mezikruhového průřezu jako je uveden v kapitole 9.1 a použiji stejný vztah pro výpočet jeho tuhosti. Poloměry $r_1 = 25\ mm, r_2 = 65mm$ a délkou $L = 110mm$. Odtud $k_{1\varphi} = 1170\ Nm/rad$.

$$M_{1\varphi} = 2.k_{1\varphi}.\beta/2 \tag{9-16}$$

Nyní mohu přejít k hledání změny kolových sil. Náprava je staticky určitý nosník o dvou podporách (Obrázek 9.5) Tento řeším klasickým postupem silové a momentové rovnováhy. Vzhledem k nestejným změnám sil v primárním stupni vypružení půlrámů dojde i k nestejným změnám sil na levém a pravém kole.

$$\Delta Q_P = \frac{-\Delta P_L(s - w_1) + \Delta P_P(s + w_1) + 2M_{1\varphi}}{2s} \tag{9-17}$$

$$\Delta Q_L = \Delta P_L - \Delta P_P + \Delta Q_P \tag{9-18}$$

Abych vyhodnotil přínos poddajnosti rámu, dopočtu ještě změnu kolové síly podvozku s pevným rámem se stejnými rozměry a tuhostí.

$$\Delta Q_{pevný} = \frac{1}{4}\left(\frac{w_1}{s}\right)^2 . k_1 . p_z \tag{9-19}$$

9.5 Vyhodnocení změny kolových sil

Tabulka 9.2 Změna kolových sil

	krajní podvozek	prostřední podvozek	
ΔQ_L	536	687	N
ΔQ_P	176	154	N
$\Delta Q_{pevný}$	8 310	11 919	N
Q_0	37 325	35 963	N
$\Delta Q_L/Q_0$	0,014	0,019	
$\Delta Q_{pevný}/Q_0$	0,22	0,33	

Změna kolové síly u podvozku s poddajným rámem klesla na pouhých 6% oproti podvozku s rámem pevným. Z toho vyplývá, že podvozek s poddajným rámem vykazuje na zborcené koleji výrazně bezpečnější provoz a zároveň bude způsobovat menší opotřebení trati i vozidla.

10 Průjezd obloukem

10.1 Příčné síly

Nejprve zjistím odstředivou sílu při průjezdu obloukem s nevyrovnaným příčným zrychlením jako součin hmotnosti článku a zrychlení. Působiště odstředivé síly je v těžišti tělesa (skříně nebo podvozku). Norma vyžaduje bezpečný průjezd při nevyrovnaném příčném zrychlení $a_p = 0{,}85\ m/s^2$. U předního podvozku uvažuji první článek A1 a polovinu neseného článku B1. U prostředního podvozku uvažuji článek C a poloviny dvou nesených článků B1 a B2.

$$F_O = m_{čl}.a_p$$

Další příčnou silou je síla bočního větru počítaná jako součin tlaku a boční plochy vozidla. Působiště této síly je ve středu této plochy ($délka\ x\ výška\ článku$). Pro evropské klima je typická maximální hodnota $p_v = 500\ \mathrm{N}/m^2$.

$$F_v = S_{čl}.p_v$$

Následně předpokládám stejnou polohu působiště odstředivé síly i větru, proto je mohu sečíst a označit jako rámovou sílu H_i. Rameno rámové síly je měřeno od první nápravy ve směru jízdy (viz. Obrázek 10.1). Odtud tedy rámová síla H_1 krajního článku, která působí na rameni h_1.

$$H_1 = m_{A1}.a_p + S_{A1}.p_v \qquad h_1 = -0{,}377\ m$$

Následuje odstředivá síla podvozku, samozřejmě bez vlivu větru, působící na rameni h_2.

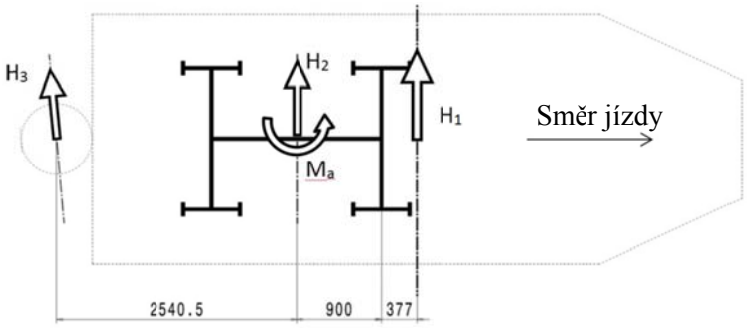
$$H_2 = m_{p1}.a_p \qquad h_2 = 0{,}9\ m$$

Nakonec vypočítám sílu odstředivou a větru zavěšeného článku. Polovinu této síly pak umístím do závěsů článku.

$$H_3 = \frac{m_{B1}.a_p + S_{B1}.p_v}{2} \qquad h_3 = 2{,}54\ m$$

Započítám ještě vratný moment pružin sekundárního vypružení, při natočení skříně nad podvozkem.

$$M_a = 4.F_p.R_{pružiny} = 26\ 140\ Nm$$



Obrázek 10.1 Schéma průjezdu obloukem

10.2 Řídící síly

Pro vyšetření sil při průjezdu podvozku obloukem používám Heumannovu metodu průjezdu dvounápravového podvozku. Ta zavádí několik zjednodušení (např. válcová kola torzně spojená s nápravou), ale pro základní pohled na chování podvozku v oblouku mi postačí. Rovnice jsem si naprogramoval v Matlabu. Nejprve se vypočtou mezní polohy postavení podvozku v koleji (úhly náběhu a středy tření). Kde α je úhel náběhu, rozvor podvozku$p = 1{,}8\ m$, poloměr oblouku $R = 20m$, vůle v kolejovém kanálu $2\sigma = 40\ mm$, střed tření x.

$$\alpha_{min} = \frac{p}{2R} \quad \rightarrow \quad Tětivová\ poloha$$

$$\alpha_{max} = \frac{p}{2R} + \frac{2\sigma}{p} \quad \rightarrow \quad Vzpříčená\ poloha$$

$$x_{min} = R\ \alpha_{min}$$

$$x_{max} = R\ \alpha_{max}$$

Následně se řeší rovnováha sil pro obecnou polohu, kde neznámé jsou řídící síla *P* a střed tření *x*.

$$P = 2Q\mu\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + s^2}} - \frac{p - x}{\sqrt{(p - x)^2 + s^2}}\right) + \sum_{k=1}^{n} H_k$$

$$M_a = Px - 2Q\mu\left(\sqrt{x^2 + s^2} - (p - x)^2 + s^2\right) - \sum_{k=1}^{n} H_k\,(h_k - x)$$

Pokud hodnota x_{skut} leží v intervalu $(x_{min}\ ;\ x_{max})$, podvozek se nachází v obecné poloze a vypočtené hodnoty jsou brány jako výsledek. Pokud však hodnota x_{skut} v intervalu neleží, tak se přistupuje k rozhodovacímu procesu:

Jestliže $x_{skut} < x_{min} \rightarrow$ podvozek je v tětivové poloze, a tedy $x_{skut} = x_{min}$ a podle toho jsou vypočteny vodící síly na první i druhé nápravě.

Jestliže $x_{skut} > x_{max} \rightarrow$ podvozek je ve vzpříčené poloze, a tedy $x_{skut} = x_{max}$ a podle toho jsou vypočteny vodící síly na první i druhé nápravě

Výpočet sil v tětivové poloze:

$$x_{skut} = x_{min} = R\ \alpha_{min} = \frac{p}{2}$$

$$P_1 = 2Q\mu\sqrt{\left(1 + \left(\frac{2s}{p}\right)^2\right)} + \sum_{k=1}^{n} H_k\left(\frac{h_k}{p}\right) + \sum_{j=1}^{m} M_{aj}$$

$$P_2 = -2Q\mu\sqrt{\left(1 + \left(\frac{2s}{p}\right)^2\right)} + \sum_{k=1}^{n} H_k\left(1 - \frac{h_k}{p}\right) - \sum_{j=1}^{m} M_{aj}$$

Výpočet sil ve vzpříčené poloze:

$$x_{skut} = x_{max} = R\ \alpha_{max} = \frac{p}{2} + \frac{2\sigma R}{p}$$

$$P_1 = 2Q\mu\left(\frac{\sqrt{x_{max}^2 + s^2}}{p} + \frac{\sqrt{(p - x_{max})^2 + s^2}}{p} + \frac{x_{max}(p - x_{max})}{p\sqrt{x_{max}^2 + s^2}} - \frac{(p - x_{max})^2}{p\sqrt{(p - x_{max})^2 + s^2}}\right) + \sum_{k=1}^{n} H_k\left(1 + \frac{h_k}{p} - \frac{2x_{max}}{p}\right) + \sum_{j=1}^{m} \frac{M_{aj}}{p}$$

$$P_2 = P_1 - 2Q\mu\left(\frac{x_{max}}{\sqrt{x_{max}^2 + s^2}} - \frac{p - x_{max}}{\sqrt{(p - x_{max})^2 + s^2}}\right) - \sum_{k=1}^{n} H_k$$

10.3 Vodící síly

Následuje dopočet vodící síly Y respektující součinitel tření, šplhání po okolku a úhel náběhu. Tramvajový okolek má oproti konvenční železnici úhel *75°*. Počítáno pro každé řídící kolo zvlášť.

$$Y = P\left(1 - \frac{\mu \tan\alpha_n \cot\beta}{\sqrt{\left(\frac{c}{r_k}\cos\beta\right)^2 + \tan^2\alpha_n}}\right)$$

Následně vypočítám poměr síly vodící a kolové prázdného vozidla.

$$\left(\frac{Y}{Q}\right)_{skut} = \frac{Y}{Q_0}$$

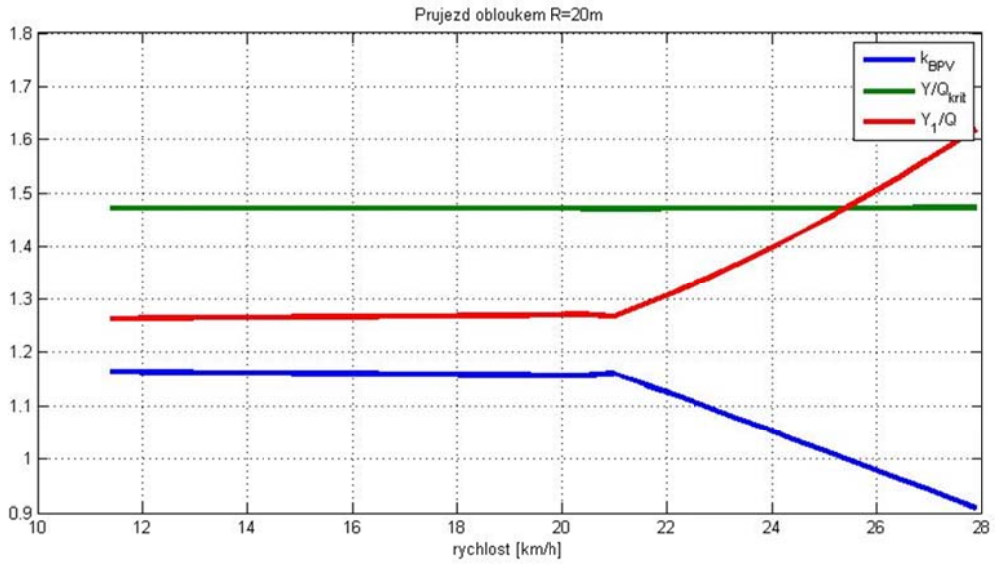
Pro zjištění míry bezpečnosti ještě potřebuji znát limitní hodnotu. Kritický poměr Y/Q počítám opět s respektováním součinitele tření, šplhání po okolku a úhlu náběhu.

$$\left(\frac{Y}{Q}\right)_{krit} = \frac{\tan\beta\sqrt{\left(\frac{c}{r_k}\cos\beta\right)^2 + \tan^2\alpha_n} - \mu\tan\alpha_n}{\sqrt{\left(\frac{c}{r_k}\cos\beta\right)^2 + \tan^2\alpha_n} + \mu\tan\alpha_n\tan\beta}$$

Nyní už mohu vypočítat bezpečnost proti vykolejení jako poměr hodnoty kritické a skutečné.

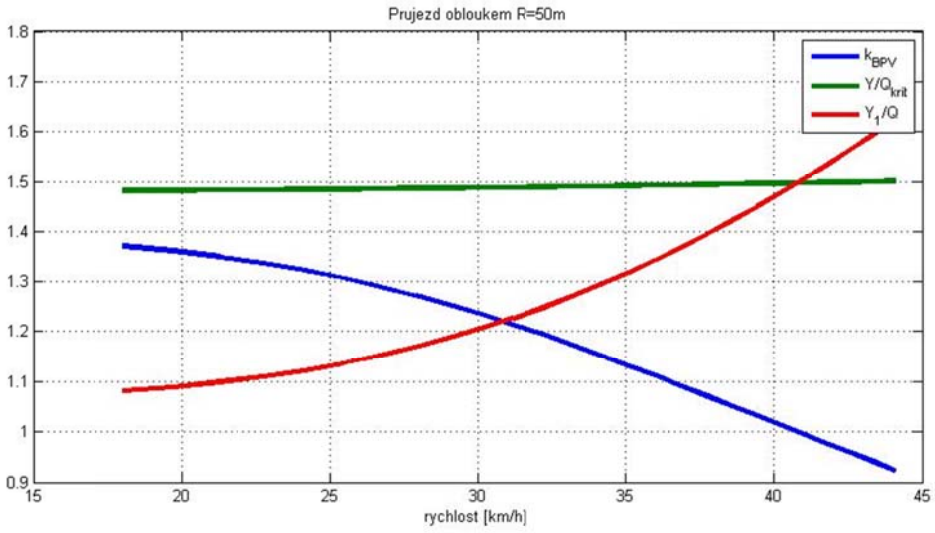
$$k_{BPV} = \left(\frac{Y}{Q}\right)_{krit} \Big/ \left(\frac{Y}{Q}\right)_{skut} \geq 1$$

Vztahy jsem naprogramoval v Matlabu a vynesl do grafů v závislosti na rychlosti vozidla. Soubor *heumann_podvozek_krajni.m* se zdrojovým kódem jsem umístil na přiložené CD. Výpočet jsem provedl pro dva vybrané poloměry oblouku. V obou výpočtech je započítána síla větru. Počítáno s maximálním součinitelem tření $\mu = 0{,}35$. Ve skutečnosti se průměrná hodnota součinitele pohybuje okolo *0,2* a zpravidla se úmyslně snižuje použitím mazání okolků v obloucích u vodících podvozků, a to jak přímo na vozidle, tak někdy i mazníky umístěnými na trati. Tuto hodnotu tedy beru jako absolutní limit a s ní budu porovnávat hodnoty skutečné



Obrázek 10.2 Průjezd obloukem R=20m

V nejmenším traťovém oblouku se projeví velký vratný moment pružin sekundárního vypružení a podvozek se dostane do vzpříčené polohy. V rychlosti cca 21 km/h stoupne příčné zrychlení ($a_p = 1{,}7\,m/s^2$) a tudíž i odstředivá síla natolik, že dojde k odlehnutí zadní nápravy a podvozek se v kolejovém kanálu dostane do obecné polohy. V rychlosti 25 km/h ($a_p = 2{,}4\,m/s^2$) už stoupne řídící síla natolik, že dojde k vykolejení. Podvozek tedy plní limit $a_p = 0{,}85\,m/s^2$ v kombinaci s bočním větrem $p_v = 500\ \mathrm{N}/m^2$ požadovaný předpisem s dostatečnou rezervou.



Obrázek 10.3 Průjezd obloukem R=50m

Ve větším oblouku R = 50 m už podvozek zaujímá pouze obecnou polohu a k vykolejení dojde při rychlosti 41 km/h čemuž odpovídá příčné zrychlení $a_p = 2{,}6\,m/s^2$.

11 Závěr

Náplní práce bylo předložení konstrukční studie trakčního podvozku s poddajným rámem pro 100% nízkopodlažní tramvaj a zhodnocení vybraných aspektů této studie.

Nejprve je představena pětičlánková nízkopodlažní tramvaj na kterou je podvozek cílen. Následně je provedena hmotnostní bilance vozidla a stanovení zátěžných stavů podvozku. Z bilance vyplývá, že podvozky vozidla jsou rozdílně zatížené a tomu je třeba přizpůsobit další postup návrhu. Užitečné zatížení dosahuje zhruba poloviny vlastní hmotnosti vozidla a má velký vliv dimenzování komponent.

Poté se věnuji popisu mnou navrženého podvozku a souvislostí s ním spojených. Podvozek je koncipován jako nízkopodlažní, neotočný, s poddajným rámem a individuálním pohonem kol. Je navržen tak, aby bylo možné na stejné platformě vytvořit verzi trakční i běžnou. Důraz je také kladen na zástavbu do vozidla a díky tomu jsem dosáhl nad podvozkem počtu šestnácti sedadel v uspořádání 2+2 na šířce vozidla *2650 mm*. Výška podlahy v nejvyšší části je *370 mm* nad TK.

Velká část práce je pak věnována návrhu sekundárního stupně vypružení. Nejprve pevnostnímu výpočtu prvků sekundárního vypružení. Dále pak vytvoření dynamického modelu vozidla a jeho analýzou. Vyladěním prvků vypružení jsem dosáhl nízkých hodnot frekvencí houpání a kývání skříně, což má příznivý vliv vnímání pohodlí cestujícími.

Na závěr je proveden rozbor silového působení podvozku na zborcené koleji a hodnocení přínosu podvozku s poddajným rámem. Poddajnost přináší snížení změny kolových sil na pouhých 6% oproti podvozku s rámem pevným. Je tak velmi výhodné ho použít na tratě s velkými geometrickými odchylkami. Důsledkem je zlepšení účinků vozidla na trať a její okolí a v neposlední řadě zvýšení bezpečnosti provozu.

Rám podvozku jsem řešil pouze konstrukčně, nikoliv pevnostně. Do budoucna se tedy otevírá možnost hmotnostní optimalizace navrženého řešení právě na základě pevnostní analýzy. Pro detailnější hodnocení dynamiky jízdy by také bylo potřeba rozšířit model o příčný směr. Zde už klasické sestavování rovnic nepřipadá v úvahu, a bylo by třeba přistoupit k softwaru zaměřenému právě na dynamické výpočty.

12 Použitá literatura

[1] Produktový leták Alstom

[2] Produktový leták Bombardier

[3] Produktový leták Siemens

[4] Produktový leták TransTec Vetschau

[5] Paul Bigland Photography - http://paulbigland.zenfolio.com/p204649795

[6] Produktový leták Škoda Transportation

[7] Vávra, P., a kolektiv – *Strojnické Tabulky*, SNTL 1983

[8] Patent EP2020355 A1 - http://www.google.com/patents/EP2020355A1

[9] Patent US 2316592 A - http://www.google.com/patents/US2316592

[10] Patent US 3398700 A - https://www.google.com/patents/US3398700

[11] Maruna Z., Hoffmann V., Koula J. - *Metodika konstruování kolejových vozidel*, ČVUT 1992, ISBN 80-01-00815-0

[12] Kolář J., Přednášky Teorie vozidel ČVUT 2015

13 Seznam příloh

Příloha 1 Typový výkres podvozku

Příloha 2 soubor Dynamika.m na přiloženém CD

Příloha 3 soubor odezva3.m na přiloženém CD

Příloha 4 soubor odezva4.m na přiloženém CD

Příloha 5 soubor heumann_podvozek_krajni.m na přiloženém CD

Příloha 6 soubor heumann1.m na přiloženém CD

Příloha 7 model Sestava_podvozku.stp na přiloženém CD

14 Seznam obrázků

Obrázek 3.1 Podvozek GT6N 11

Obrázek 3.2 Tramvaj GT6N 11

Obrázek 3.3 Tramvaj Citadis [1] 12

Obrázek 3.4 Podvozek Ixege 12

Obrázek 3.5 Podvozek Incentro 13

Obrázek 3.6 Flexx Urban 1000 [2] 14

Obrázek 3.7 Tramvaj Flexity [2] 14

Obrázek 3.8 Flexx Urban 3000 [2] 14

Obrázek 3.9 Tramvaj Flexity 2 [2] 14
Obrázek 3.10 Podvozek SF30 [3] 15
Obrázek 3.11 Tramvaj Combino [3] 15
Obrázek 3.12 Tramvaj Avenio [3] 16
Obrázek 3.13 Tramvaj ULF [3] 16
Obrázek 3.14 Podvozek ULF v dílně [5] Obrázek 3.15 Tramvaj ULF bez bočního krytu [5] 17
Obrázek 3.16 Podvozky 15T [8] 18
Obrázek 3.17 Tramvaj 15T [6] 18
Obrázek 3.18 Podvozek tramvaje 26T [6] 19
Obrázek 3.19 Tramvaj 30T [6] 19
Obrázek 3.20 Patent US 3398700 A [10] 20
Obrázek 3.21 Podvozek Arpege [1] 21
Obrázek 3.22 Podvozek firmy TTV 22
Obrázek 3.23 Převodovka Durutram RSK-5-7,82 22
Obrázek 4.1 Modelová tramvaj 23
Obrázek 5.1 Označení článků 24
Obrázek 5.2 Silové schéma 24
Obrázek 5.3 Schéma vlastní hmotnosti 25
Tabulka 5.3 Momenty ke kloubu Obrázek 5.4 Ramena ke kloubu 27
Tabulka 5.4 Momenty k podpoře R1 Obrázek 5.5 Ramena k podpoře R1 27
Obrázek 5.6 Schéma rozmístění stojících cestujících 29
Obrázek 5.7 Síly v sekundárním stupni od stojících cestujících 29
Obrázek 5.8 Souhrnný graf sil v sekundárním stupni vypružení 30
Obrázek 5.9 Nápravové tlaky 30
Obrázek 6.1 Trakční podvozek 31
Obrázek 6.2 Dvojkolí – portálová náprava 32
Obrázek 6.3 Sestava kola 32
Obrázek 6.4 Řez podélníkem 33
Obrázek 6.5 Půlrámy 33
Obrázek 6.6 Rám 34
Obrázek 6.7 Kloub 34
Obrázek 6.8 Balkón se sekundárním stupněm vypružení 35
Obrázek 6.9 Řez sekundárním stupněm vypružení 35
Obrázek 6.10 Příčné tlumení 36
Obrázek 6.11 Pružný doraz 37
Obrázek 6.12 Schéma dorazů 37
Obrázek 6.13 Schéma pohonu 38

Obrázek 6.14 Umístění agregátu brzdy 38
Obrázek 6.15 Zástavbové rozměry 39
Obrázek 6.16 Návrh uspořádání interiéru 40
Obrázek 7.1 Schéma pružiny 41
Obrázek 7.2 Goodmanův graf krajního podvozku 45
Obrázek 7.3 Goodmanův graf prostředního podvozku 46
Obrázek 7.4 Goodmanův graf krajního podvozku - zvětšené deformace 47
Obrázek 7.5 Goodmanův graf prostředního podvozku - zvětšené deformace 47
Obrázek 7.6 Stabilita vnitřní pružiny krajního podvozku 48
Obrázek 7.7 Stabilita vnitřní pružiny prostředního podvozku 48
Obrázek 7.8 Pryžový sloupek 49
Obrázek 7.9 Redukovaný modul pružnosti [11] 49
Obrázek 7.10 Pryžová podložka pružin 50
Obrázek 7.11 Pryžový doraz 50
Obrázek 7.12 Čtrvtina sekundárního stupně 51
Obrázek 7.13 Charakteristika svislého vypružení 52
Obrázek 7.14 Charakteristika svislého vypružení 52
Obrázek 7.15 Rozdělení příčných deformací 54
Obrázek 8.1 Graf 1.vlastní frekvence v závislosti na obsazení 66
Obrázek 8.2 Vlastní tvar kmitu f= 1,33 Hz 67
Obrázek 8.3 Vlastní tvar kmitu f= 1,61 Hz 67
Obrázek 8.4 Vlastní tvar kmitu f= 2,32 Hz 67
Obrázek 8.5 Odezva provozně obsazeného vozidla 68
Obrázek 9.1 Náhradní model kloubu 69
Obrázek 9.2 Graf modulu pružnosti pryže 70
Obrázek 9.3 Geometrie zborcení 71
Obrázek 9.4 Pravý půlrám 73
Obrázek 9.5 Postavení nápravy na zborcené koleji 75
Obrázek 10.1 Schéma průjezdu obloukem 77
Obrázek 10.2 Průjezd obloukem R=20m 81
Obrázek 10.3 Průjezd obloukem R=50m 81

15 Seznam tabulek

Tabulka 5.1 Vlastní hmotnost 25
Tabulka 5.2 Reakce - vlastní hmotnost 26

Tabulka 5.3 Momenty ke kloubu Obrázek 5.4 Ramena ke kloubu 27
Tabulka 5.4 Momenty k podpoře R1 Obrázek 5.5 Ramena k podpoře R1 27
Tabulka 5.5 Momenty stojících cestující 28
Tabulka 6.1 Posuvy primárního vypružení 33
Tabulka 6.2 Pohyby sekundárního vypružení 36
Tabulka 7.1 Zatěžující síly jedné čtvrtiny sekundárního vypružení 41
Tabulka 7.2 Vstupní parametry výpočtu pružin 42
Tabulka 7.3 Svislé deformace 43
Tabulka 7.4 Napjatost pružin 44
Tabulka 7.5 Příčné deformace 54
Tabulka 8.1 Vlastní frekvence a poměrný útlum 66
Tabulka 9.1 Změna sil rámu 75
Tabulka 9.2 Změna kolových sil 76