ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta elektrotechnická
Katedra elektroenergetiky

Možnosti využití indukčního ohřevu pro žíhání rotačně symetrických těles

Diplomová práce

Studijní program: Elektrotechnika, energetika a managment
Studijní obor: Elektroenergetika

Lukáš Žák

Praha 2015

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická

katedra elektroenergetiky

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Student: **Lukáš Žák**

Studijní program: Elektrotechnika, energetika a management
Obor: Elektroenergetika

Název tématu: **Možnosti využití indukčního ohřevu pro žíhání rotačně symetrických těles**

Pokyny pro vypracování:

1) Seznamte se s možnostmi modelování rotačně symetrických těles v SW Agros2D a Wolfram Mathematica.
2) Vytvořte model ve vybraném modelovacím programu a porovnejte s měřením.
3) Vytvořte program, který bude optimalizovat tvar a pozici induktoru pro různé typy těles.

Seznam odborné literatury:

[1] HRADÍLEK, Zdeněk, Ilona LÁZNIČKOVÁ a Vladimír KRÁL. Elektrotepelná technika. Vyd. 1. Praha: České vysoké učení technické v Praze, 2011
[2] ŠOLÍN, Pavel, Ilona LÁZNIČKOVÁ a Vladimír KRÁL. Higher-Order Finite Element Methods. Vyd. 1. Boca Raton: Chapman, 2004
[3] MAYER, Daniel. Aplikovaný elektromagnetizmus. 2. vyd. KOPP nakladatelství, 2012. ISBN 978-80-7232-436-1.
[4] www.agros2d.org

Vedoucí: Ing. Lubomír Musálek

Platnost zadání: do konce letního semestru 2015/2016

L.S.

Ing. Jan Švec Ph.D.
vedoucí katedry

prof. Ing. Pavel Ripka, CSc.
děkan

V Praze dne 1. 4. 2015

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

V Praze, dne 7. května 2015

……
Podpis

Poděkování

Rád bych touto cestou poděkoval především vedoucímu své diplomové práce Ing. Lubomíru Musálkovi za rady, připomínky, čas a mnohdy velkou trpělivost. Velké poděkování patří také Ing. Zdeňku Novákovi, který mi svými věcnými připomínkami nejednou ušetřil čas a práci.

Obsah

1 Úvod ... 12
2 Elektrotepelná zařízení ... 14
2.1 Odporový ohřev ... 14
2.1.1 Přímý ohřev ... 14
2.1.2 Nepřímý ohřev ... 15
2.2 Dielektrický ohřev ... 17
2.3 Indukční ohřev ... 19
3 Šíření tepla a obecná rovnice pro šíření v pevném tělese – teplotní pole ... 22
3.1 Vedení tepla ... 22
3.2 Proudění tepla ... 23
3.3 Sálání tepla ... 23
3.4 Obecná diferenciální rovnice pro šíření tepla v pevném tělese ... 25
4 Elektromagnetické pole ... 27
4.1 Maxwellovy rovnice a základní pojmy z vektorové analýzy ... 27
4.2 Materiálové vztahy jednotlivých prostředí ... 29
4.3 Obecná vlnová rovnice ... 31
4.3.1 Harmonické vyjádření vlnové rovnice ... 32
4.4 Poyntingův teorém a energie elektromagnetického pole ... 34
4.4.1 Poyntingův vektor v harmonickém poli ... 35
4.5 Elektromagnetické vlnění ve válcových souřadnicích ... 36
4.6 Rovnice magnetického pole v SW Agros2D ... 37
5 Numerické metody řešení elektromagnetických úloh ... 39
5.1 Metoda konečných diferencí ... 39
5.2 Metoda konečných prvků ... 40
5.3 Reálná aplikace FEM ... 42
6 Sdružené úlohy a SW aplikace ... 43
6.1 Úvod a definice ... 43
6.2 Druhy sdružených úloh ... 43
6.3 Dělení sdružených úloh ... 43
6.4 Numerické řešení pomocí SW ... 45
6.4.1 SW Agros2D ... 45
7 Teorie optimalizace ... 48
8 Praktická část ... 52
8.1 Vstupní materiálové parametry ... 53
8.1.1 Elektrická vodivost ... 54
8.1.2 Relativní permeabilita ... 54

8.1.3 Hustota ... 55
8.1.4 Měrná tepelná kapacita ... 56
8.1.5 Součinitel tepelné vodivosti ... 56
8.1.6 Součinitel přestupu tepla ... 57
8.1.7 Emisivita ... 58
8.1.8 Přehled ostatních materiálových veličin ... 58
8.2 Naměřené funkční závislosti ... 59
8.2.1 Teplota ... 59
8.2.2 Frekvence ... 61
8.2.3 Výkon ... 62
8.2.4 Proud ... 62
8.3 Model ... 64
8.4 Optimalizace ... 72
9 Závěr ... 75
10 Seznam použité literatury ... 76
11 Seznam obrázků ... 78
12 Seznam tabulek ... 79
13 Seznam grafů ... 79
14 Seznam příloh ... 79

Abstrakt

Tato diplomová práce se zabývá žíháním rotorů spalovacích turbín využívaných v oblasti těžby ropy, zemního plynu či výroby elektrické energie. K realizaci zmíněného procesu zvyšující mechanickou pevnost jednotlivých součástí je zvolen v současné době v průmyslu velmi populární způsob, kterým je indukční ohřev.

Náplní práce bude po teoretické stránce popsat a uvést základy sdílení tepla, krátce přiblížit jednotlivé druhy elektrotepelných zařízení a z nich se podrobně věnovat indukčnímu ohřevu. Jelikož hlavním smyslem práce je vytvoření modelu v programu Agros2D, je nutné popsat základní matematicko-fyzikální skutečnosti, které se týkají problematiky indukce. Práce se tedy bude dále v teoretické rovině zabývat základními poznatky o tepelném poli, elektromagnetickém poli a metodě konečných prvků (FEM).

Stěžejní částí této práce je praktická část, ve které bude rozebrán vytvořený model v již výše zmíněném modelačním programu a porovnán se skutečnými měřeními. Cílem snažení bude zajistit nejmenší možné odchylky mezi realitou a výpočty. Hlavním důvodem vzniku této práce je zjištění projevu ohřevu na žíhané součásti různých rotačně symetrických provedení. Z toho titulu základní model dostane určitou nadstavbu v podobě optimalizace pozice a druhu použitého induktoru v závislosti na žíhaném strojním dílu.

Klíčová slova:

elektrické teplo, indukční ohřev, tepelné pole, elektromagnetismus, metoda konečných prvků, žíhání kovů, Agros 2D

Abstract

This thesis deals with ignition of combustion turbine for extraction oil, natural gas or electricity production. In order to achieve that process, the use of induction heat is very popular in industry nowadays: that action increases the mechanical strength of each components. The first part of the thesis describes the theory of heat transfer and types of heating devices. Induction heat as one of heating devices is analysed in detail. For the essential scope of the thesis is to create a virtual model in software application Agros2D, it is necessary to depict mathematics and physics laws of induction heat. Furthermore, this part of the thesis deals with the basic interpretation of finite element methods (FEM), thermal field and electromagnetic field. The second (practical) part of the thesis is development of the virtual model itself, which is described in every step. The main aim of that development is as small divergence between the calculation and real measured numbers as possible. This thesis is written to determine the impact of heating on some rotationally symmetric parts. Finally, the model will be optimized in location and type of inductor depending on the type of turbine.

Keywords:

electric heat, induction heat, heat field, electromagnetism, finite element method, annealing of metals, Agros 2D

Definice a rozměr použitých symbolů

Značka	Veličina	Základní jednotka
$\boldsymbol{q}$	hustota tepelné toku	$W.m^{-2}$
λ	součinitel tepelné vodivosti	$W.m^{-1}.K^{-1}$
Q_J	teplo	J
T	termodynamická teplota	K
P	tepelný výkon	W
$\boldsymbol{A}$	magnetický potenciál	$Wb.m^{-1}$
α	součinitel přestupu tepla	$W.m^{-2}.K^{-1}$
c	měrná tepelná kapacita	$J.kg^{-1}.K^{-1}$
f	frekvence	Hz
ε_r	relativní permitivita	-
ε_0	permitivita vakua	$H.m^{-1}$
σ	Stefan-Boltzmannova konstanta	$W.m^{-2}.K^{-4}$
M	intenzita záření	$W.m^{-2}$
Q	elektrický náboj	C
ρ_m	objemová hustota	$kg.m^{-3}$
$\boldsymbol{E}$	intenzita el. pole	$V.m^{-1}$
U	elektrické napětí	V
C	kapacita	F
γ	měrná el. vodivost	$S.m^{-1}$
μ_0	permeabilita vakua	$F.m^{-1}$
μ_r	relativní permeabilita	-
$\boldsymbol{B}$	magnetická indukce	T
$\boldsymbol{D}$	elektrostatická indukce	$C.m^{-2}$
$\boldsymbol{H}$	intenzita mag. pole	$A.m^{-1}$
Ψ	spřažený indukční tok	W
$\boldsymbol{J}$	hustota proudu	$A.m^{-2}$
a	hloubka vniku	m
W	energie	J
t	čas	s
R	el. odpor	Ω
I	el. proud	A
$i(t)$	okamžitá hodnota el. proudu	A
ω	úhlová rychlost	$rad.s^{-1}$
l	délka	m
d	vzdálenost	m
j	imaginární jednotka	-
$\boldsymbol{v}$	rychlost	$m.s^{-1}$
p	měrný výkon	$W.m^{-3}$
r	poloměr	m
ρ_{el}	elektrická rezistivita	$\Omega.m^{-1}$
α_R	teplotní součinitel odporu	K^{-1}
S	plocha, průřez	m^2
w	hustota energie	$W.m^{-3}$
$tg\ \delta$	ztrátový činitel	-
a_{tep}	koeficient teplotní vodivosti	$m.s^{-2}$

λ_m	vlnová délka	m
Φ	magnetický tok	Wb
ρ	prostorová hustota volného náboje	$C.m^{-3}$

Přehled rozlišení jednotlivých druhů veličin

skalární veličina	obyčejná kurzíva (např. T)
vektorová veličina	tučná kurzíva (např. $\boldsymbol{E}$)
tenzor	tučná stojatá (např. $\boldsymbol{\varepsilon}$)
fázor vektorové veličiny	tučná kurzíva (např. $\widehat{\boldsymbol{H}}$)
funkcionál	obyčejná kurzíva (např. $\mathcal{F}$)
komplexně sdružená fázorová veličina	tučná kurzíva s pruhem a * (např. $\widehat{\boldsymbol{H}}^*$)

Tab. 1.1 Rozlišení veličin

1 Úvod

Elektrická energie patří v dnešní době k jedněm z nejdůležitějších druhů energií a pro elektrické teplo je přímo základní. Obliba elektrického tepla proti ostatním druhům tepla roste, a to především díky jeho nesporným výhodám. Těmi jsou zejména vyšší produktivita práce, vyšší kvalita výrobků, preciznější zpracování materiálů a surovin. Dále s ohledem na aktuální stav ovzduší a měnící se klimatické podmínky je také možné mimo jiné lokálně snížit námahu životního prostředí omezením exhalací ze zdrojů na tuhá paliva. Zvýšení lidských potřeb a nároků reflektuje strmý nárůst poptávky po energii, a to zejména v čistě průmyslovém odvětví. Tento fakt má za následek prudký nárůst počtu zařízení elektrotepelného typu. V dnešní době tato zařízení tvoří široké technické odvětví a z dříve poměrně jednoduchých konstrukcí, jež byla ale stále i jsou zařízení odporová a oblouková, se portfolio zdrojů rozrůstá na mnoho typů, mezi které lze dále zařadit indukční, dielektrická, plazmová, elektronová nebo laserová zařízení. Jednotlivé názvy jsou odvozeny z principu přeměny elektrické energie na teplo. V oboru tepla vzhledem k jiným technickým odvětvím, je stále velká možnost úspor. Z inženýrského pohledu je ku příkladu možno stále posunovat, tj. zvyšovat účinnosti elektrotepelných zařízení využitím nových materiálů, popřípadě dokonalejší údržbou.

Vezmeme-li nyní v potaz indukční ohřev, který je neodmyslitelnou částí této práce, je možné ihned bez dlouhého zamýšlení uvést několik jeho výhod a použití. Díky jeho univerzálnosti se vyskytuje indukční ohřev v celé společnosti od domácností v podobě vařičů až po široké využití v průmyslu, jakým může být pájení, žíhání nebo přímo rovnou tavení kovů pro jejich úpravu či zušlechtění. Disponuje neoddiskutovatelnými výhodami v podobě úspory energie, přímého ohřevu materiálu nebo relativně čistého provozu.

Indukční ohřev je založen na principu přestupu elektromagnetického vlnění do kovových materiálů. Ohřev zajišťují takzvané ztráty vířivými proudy. Systém se pro jednoduchost a přehlednost modeluje jako transformátor spojený dokrátka, jehož primární stranu tvoří cívka často s jedním nebo několika málo závity. Sekundární stranu představuje ohřívaný materiál, kterému se standardně říká vsázka. Pro indukční ohřev lze z praktického hlediska použít zdroje pracující nejen s běžným síťovým kmitočtem 50 Hz, ale také s kmitočtem vyšším, řádově až stovek kHz. Poté hovoříme o středofrekvenčních zdrojích, které bývají realizovány rezonančními střídači. Nižší frekvence jsou vhodné pro objemnější předměty, naopak frekvence vyšší pro předměty drobné nebo tenkostěnné.

Hlavním cílem této práce je vyřešit konkrétního problému společnosti zabývající se výrobou a renovací strojních dílů turbín. Ve skutečnosti provozem opotřebovaný nebo poničený díl je vzhledem ke své pořizovací ceně repasován na stav odpovídající kvalitě nové součásti. Přes obnovovanou část (drážky po celém obvodu dílce) jsou za pomocí digitálně řízeného svařovacího zařízení vytvořeny sváry, ze kterých by ve výsledku po zásahu obráběcího stroje měly vzniknout drážky nové s odpovídajícími rozměry v mezích výrobní tolerance. Přidání navařovaného materiálu je logicky v zásadě realizováno za přítomnosti vysoké teploty, která má neblahé účinky na krystalickou strukturu materiálu v podobě zvýšeného vnitřního pnutí. Stanoviště indukčního zařízení slouží k odstranění tohoto jevu. Účelem je řízené prohřátí místa, které bylo ovlivněno procesem sváření a následným samovolným zchladnutím na okolní teplotu. Tento proces se nazývá žíhání. Mezi některé další projevy žíhání lze zařadit zmenšení tvrdosti a zlepšení obrobitelnosti materiálů. Žíhání se dělí do dvou základních skupin, a to na žíhání s překrystalizací a bez ní. Typ žíhání volíme podle toho, co očekáváme a požadujeme od daného procesu. Klasicky jsou dvěma vstupními parametry teplota a procentní obsah uhlíku v ocelích. Malým příkladem teplotních rozsahů by mohlo být: žíhání ke snížení pnutí (600-630 °C), rekrystalizační (550-700 °C) nebo homogenizační (1000-1200 °C).

Pro náročný provoz a vysoké požadavky na kvalitu zpracování je potřebné mít jistotu homogenity vnitřní struktury renovovaného materiálu. K ověření vedou dva směry diagnostiky, destruktivní a nedestruktivní. Vzhledem k extrémně vysokým pořizovacím nákladům nepřipadá v úvahu destruktivní metoda kontroly. Nabízí se tedy ekvivalentní druh nedestruktivní kontroly v podobě počítačové simulace celého procesu žíhání. Vytvořením a použitím matematického modelu v aplikacích typu Agros2D založených na metodě konečných prvků obnáší mnoho úkonů, mezi které lze řadit:

- získání přesné geometrie součásti
- několik reálných měření na součásti pro získání potřebných závislostí veličin
- zavedení zjednodušujících opatření zefektivňujících časové dispozice bez vlivu na správnou funkčnost
- vytvoření modelu
- porovnání výsledků modelu s výsledky destrukční zkoušky
- aplikace modelu (vstupní data, optimalizace pozice a typu induktoru) na dražší rotační díly (v případě shody)

Odpovědi na uvedený výčet poskytne obsah této práce, jejímiž globálními cíli je nejen poskytnutí uvedené společnosti povědomí o nových možnostech modelování v oboru indukce, ale i přínos v podobě finanční a časové úspory.

2 Elektrotepelná zařízení

Tato kapitola, obsahuje přehled základních způsobů elektrického ohřevu, mezi které lze zařadit ohřev odporový, dielektrický a indukční. U každého z ohřevů bude vysvětlena a popsána jeho funkce, uvedeny jeho výhody, nevýhody, oblasti použití či specifické vlastnosti. Literatury, z nichž vychází tato část textu, jsou [1], [2], [5], [7].

2.1 Odporový ohřev

Joulův zákon říká, že součin elektrického odporu vodiče a kvadrátu proudu má za následek vznik tepelného výkonu, čili množství tepla, které se uvolňuje do okolí. Dle vzniku a působení tepla dělíme odporový ohřev na přímý a nepřímý. [1], [7]

2.1.1 Přímý ohřev

Pro tento ohřev je specifické, že teplo vzniká přímým průchodem elektrického proudu vsázkou a princip činnosti se ukrývá za Joulovým zákonem. Mezi nejdůležitější parametry, které jsou pro správnou funkci zařízení v provozu, lze zařadit rezistivitu materiálu vsázky, měrnou tepelnou kapacitu a součinitel tepelné vodivosti. Teplo vznikající ve vodiči se vyjadřuje jako:

$$Q_J = R \int_0^{t_0} i^2(t)\, dt \approx RI^2 t \approx Pt, \tag{2.1}$$

kde Q_J [J] je teplo vzniklé průchodem proudu,
R [Ω] elektrický odpor,
I [A] efektivní hodnota elektrického proudu,
$i(t)$ [A] okamžitá hodnota el. proudu
t [s] čas,
P [W] tepelný výkon.

Elektrický odpor je spjat s výše uvedenou rezistivitou materiálu pomocí geometrických rozměrů vodiče:

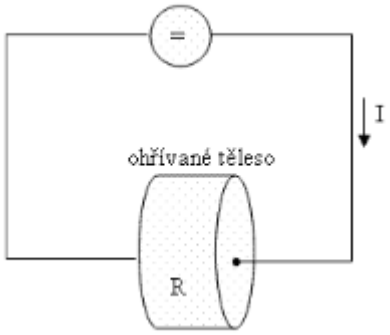
$$R = \rho_{el} \frac{l}{S}, \tag{2.2}$$

kde ρ_{el} [Ω.m^{-1}] je rezistivita neboli měrný elektrický odpor,
l [m] délka,
S [m^2] průřez.

Velikost elektrického odporu je mimo veličin figurujících ve vztahu (2.2) závislá též přímo úměrně na teplotě podle rovnice:

$$R_\vartheta = R_{20}(1 + \alpha_R \Delta T), \tag{2.3}$$

kde R_ϑ [Ω] je elektrický odpor při teplotě T = ϑ,
R_{20} [Ω] elektrický odpor při $T = 293$K,
α_R [K^{-1}] teplotní činitel odporu,
ΔT [K] rozdíl teplot před a po oteplení.



Obr. 2.1 Přímý ohřev [7]

Jednoduchou tepelnou bilanci přímého odporového ohřevu lze psát:

$$Q_J = Q_{VS} + Q_Z, \tag{2.4}$$

kde Q_J [J] je celkové teplo,
Q_{VS} [J] teplo k ohřátí vsázky,
Q_Z [J] tepelné ztráty.

Ve skutečnosti se přímý odporový ohřev dále rozděluje na ohřev pevné vsázky, kdy se jedná o kovový nebo uhlíkový předmět, a ohřev vsázky tekuté.

Mezi aplikaci přímého ohřevu pevné vsázky jsou řazeny ohřevy drátů, tyčí a podobných předmětů, přičemž ohřívaný materiál je zapojen na sekundární stranu transformátoru, která ohřev zajišťuje. Dále se jedná o tzv. Achesonovy pece na výrobu grafitu.

Typickým představitelem ohřevu tekuté vsázky je elektrodový ohřev vody, termická elektrolýza nebo přímý ohřev skla. Ohřev skla průchodem elektrického proudu má několik výhod, zachování čistoty a homogenity vsázky, nulový únos přísad komínem či poměrně přesné stanovení požadovaných parametrů (teplota, viskozita, atd.).

2.1.2 Nepřímý ohřev

K jeho realizaci dochází v takzvaných odporových pecích, ve kterých jsou rozmístěny topné odporové články. Odporové pece se dělí podle teploty, vnitřní atmosféry a účelu použití.

Rozdělení podle teploty:

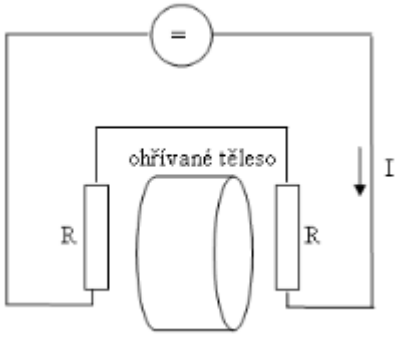
- nízkoteplotní do 600 °C,
- středoteplotní 600 až 1100 °C,
- vysokoteplotní nad 1100 °C.

Podle druhu atmosféry:

- běžná vzduchová,
- řízená například pro zamezení oxidace,
- vakuová.

Podle účelu použití:

- pro zpracování nebo tavení kovů,
- pro tavení skla,
- pro laboratoře, atd.



Obr. 2.2 Nepřímý ohřev [7]

Teplo vzniká v odporových článcích v pecním prostoru. Princip je téměř identický s přímým odporovým ohřevem, jen teplo nevzniká ve vsázce, nýbrž se šíří všemi třemi známými způsoby sdílení tepla. Zejména se jedná o sálání z topných článků na ohřívaný předmět, který již nemusí splňovat podmínku schopnosti vedení elektrického proudu.

Pomocí nepřímého odporového ohřevu lze v zásadě libovolné těleso, na které je pec uzpůsobená. Nelze opomenout, že vsázka se může v některých případech otáčet. Důvodů otáčení existuje mnoho, například zrovnoměrnění prohřátí.

V praxi se objevují spousty druhů pecí, malým příkladem mohou být komorové, vozové, pásové, válečkové, bubnové, karuselové a mnoho dalších.

Skladba běžné odporové pece vypadá:

- žáruvzdorná vyzdívka,
- tepelná izolace,
- samotná konstrukce pece,
- topné články,
- obslužná zařízení.

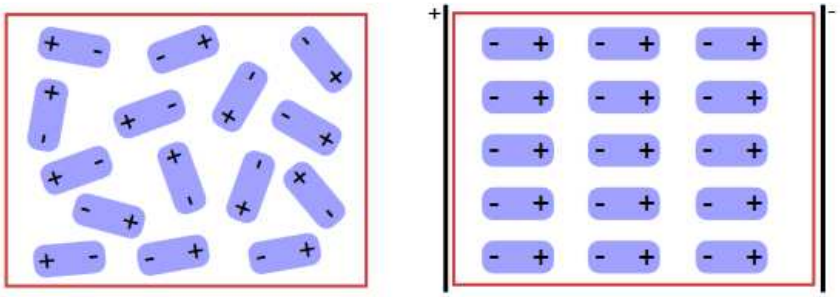
Žáruvzdorná vyzdívka ohraničuje pracovní prostor celé pece. Nejčastěji se používají pevné a chemicky stabilní šamotové díly. Tepelnou izolací často bývá porézní skelná vata. Srdcem celé pece jsou topné články, které se vyrábí z kovových i nekovových materiálů. V případě kovových materiálů se jedná o slitiny (austenitické, feritické) nebo čisté kovy (Pt, W, Mo). Články z čistých kovů se používají především pro speciální použití (laboratoře), neboť náklady na jejich pořízení jsou vysoké. Molybdenové články lze použít ve speciální atmosféře až do teplot cca 2000 °C. Hlavní výhoda nekovových topných článků proti kovovým jsou teploty použití v běžné atmosféře. Omezující hranicí kovových článků u takového prostředí je teplota pod hranicí 1400 °C. Z tohoto důvodu se používají uhlíkové, karbid křemíkové a cermentové topné články.

V průmyslu má použití pecí široké využití. Cílem jejich používání je za pomocí různých teplot, doby a cyklu aplikace přiřadit materiálům požadované, zejména mechanické vlastnosti. Takovými procesy jsou žíhání, kalení, popouštění, cementování a nitridování.

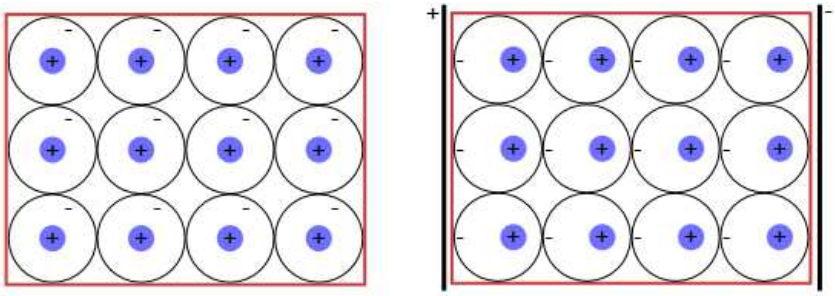
2.2 Dielektrický ohřev

Zařízení určená pro dielektrický ohřev jsou podobné zařízením indukčním, neboť se u nich uplatňuje elektrická složka vlnění a teplo vzniká přímo ve vsázce. Vsázka zpravidla bývá špatným elektrickým vodičem (polovodičem), ideálně izolantem a je vkládána mezi elektrody kondenzátoru. Hlavním důvodem vzniku tepla v dielektrických zařízeních jsou polarizační jevy ve vysokofrekvenčním elektromagnetickém poli. Následující úvahy lze najít v [1], [5].

Vždy v realitě je obecnou látkou reálné dielektrikum, ve kterém se nacházejí dva typy nosičů nábojů, a to volné a vázané. Dielektrika je možno dále rozdělit na takzvaně polární a nepolární. Polární dielektrika samy o sobě tvoří i bez přítomnosti elektrického pole asymetrickou molekulu s jednou částí kladnou a druhou zápornou, avšak navenek se látka tváří neutrálně. Oproti tomu nepolární dielektrika jsou symetrická a permanentní dipólový moment je nulový. Skutečnou představu ukazuje následující obrázek.



Obr. 2.3 Polární dielektrikum bez a s přítomností el. pole [8]



Obr. 2.4 Nepolární dielektrikum bez a s přítomností el. pole [9]

Za přítomnosti elektrického pole dochází v dielektriku k narušení rovnovážného stavu. Vázané nosiče náboje se natočí ve směru elektrického pole, dochází k vytvoření dipólu a vzniku dipólových momentů. Tyto procesy jsou obecně známy pod označením polarizace dielektrika. Schopnost polarizovat se vyjadřuje pomocí takzvané polarizovatelnosti (která se označuje stejným symbolem jako součinitel přestupu tepla [$W.m^{-2}.K^{-1}$]) α [$F.m^{-2}$].

Každý pohyb nosičů náboje v dielektriku přítomností el. pole spotřebovává energii tohoto pole a mění ji v energii tepelnou. Tento jev je hlavním principem dielektrického ohřevu a vyjadřuje se pomocí dielektrických ztrát. S odvoláním na druhy nosičů nábojů v dielektriku rozlišujeme charakter ztrát na vodivostní (Joulovy), polarizační a ionizační. Majoritním podílem z celkových ztrát jsou dle základní úvahy ztráty polarizační.

Ihned po odeznění vlivu elektrického pole zaniká volný pohyb nábojů, navrácení dipólů do původní polohy nastává s prodlevou. Proto, je-li dielektrikum myšlenkově vloženo mezi dvě desky kondenzátoru, na nichž se objevuje harmonicky proměnné vysokofrekvenční elektrické pole, dochází ke ztrátám díky vzájemnému vnitřnímu tření natáčejících se zpožděných dipólů. Zpoždění může způsobit odpor prostředí nebo vlastní hmotnost dipólu.

Poté fázor výsledné hustoty proudu vypadá:

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_V + \boldsymbol{J}_P = \gamma \boldsymbol{E} + \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = (\gamma + j\omega\varepsilon)\widehat{\boldsymbol{E}}, \tag{2.5}$$

kde $\boldsymbol{J}$ [A.m^{-2}] je hustota proudu,
$\boldsymbol{J}_V$ [A.m^{-2}] hustota proudu volných nosičů náboje,
$\boldsymbol{J}_P$ [A.m^{-2}] hustota proudu vázaných nosičů náboje,
γ[S.m^{-1}] konduktivita neboli měrná elektrická vodivost,
$\boldsymbol{E}$ [V.m^{-1}] intenzita elektrického pole,
ε[F.m^{-1}] permitivita, $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$, $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} . 10^{-9}$ [F.m^{-1}], ε_r [-] závisí na typu materiálu,
j [-] imaginární jednotka komplexního čísla.

Z jednoduché kombinace základních vztahů lze vyvodit tepelný výkon dielektrického ohřevu. Zjednodušeně, uvažujeme-li mezi deskami kondenzátoru *homogenní* pole, pak elektrický indukční tok odpovídá:

$$\Psi = Q = D\,S = CU, \tag{2.6}$$

kde Ψ [C] je elektrický indukční tok,
Q [C] elektrický náboj,
D [C.m^{-2}] elektrická indukce,
C [F] elektrická kapacita,
U [V] elektrické napětí.

Vztah mezi intenzitou a indukcí elektrického pole ve vakuu lze vyjádřit skrze permitivitu:

$$D = \varepsilon_0\, E. \tag{2.7}$$

Kombinací vztahu (2.6) a (2.7) po přenásobení vzdáleností desek kondenzátoru vychází:

$$Q\,d = \varepsilon_0\, EdS, \tag{2.8}$$

kde d [m] je vzdálenost desek kondenzátoru.

Pro napětí lze použít vyjádření:

$$U = Ed. \tag{2.9}$$

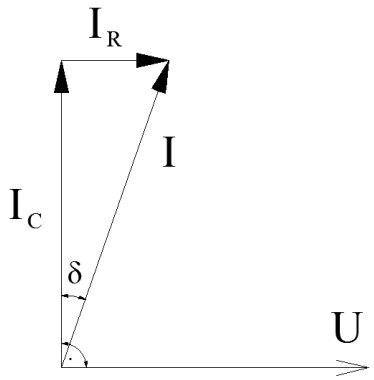
Aplikací vztahu (2.9) na vztah (2.8) a vydělením vzdáleností elektrod plyne vztah pro kapacitu:

$$C = \frac{\varepsilon_0\, S}{d}. \tag{2.10}$$

Objeví-li se na elektrodách kondenzátoru *střídavé harmonické napětí*, pak z obrázku 2.5 plyne vzájemný vztah pro reálnou a imaginární složku proudu.

$$tg\ \delta = \frac{I_R}{I_C} = \frac{1}{\omega\, R\, C} \tag{2.11}$$

kde $tg\ \delta$[-] je ztrátový činitel,
ω[rad.s^{-1}] uhlový kmitočet.



Obr. 2.5 Vztah mezi reálnou a imaginární složkou proudu pro kondenzátor

Využitím vztahu (2.2), dále vztahem (2.11) a nyní již znalostí reciproké hodnoty k rezistivitě reálného dielektrika dostáváme takzvanou náhradní konduktivitu dielektrika zahrnující vodivost volnými ale i vázanými náboji:

$$\gamma = \omega \varepsilon_0 \varepsilon_r tg\delta. \tag{2.12}$$

Rovnicí pro jalový výkon kondenzátoru rozumíme:

$$Q = U^2 \omega C. \tag{1.13}$$

Činná složka tepelného výkonu dielektrického ohřevu použitím rovnice (2.9), (2.10), (2.13) a obrázku 2.5 má výsledný tvar dle vztahu (2.14). [1]

$$P = E^2 \omega \varepsilon \, tg\delta \, Sd \tag{2.14}$$

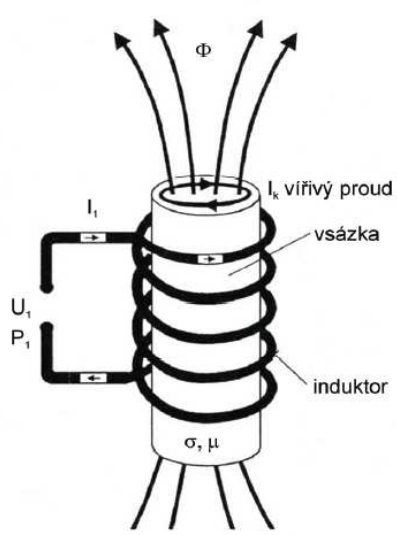
Dielektrický ohřev nachází uplatnění především v oblasti úpravy dielektrických materiálů. Bližší výčet oborů je:

- sušení papíru, dřeva, textilií
- tepelná úprava plastů (předehřev)
- svařování plastů
- ohřev v potravinářském průmyslu

Základními výhodami dielektrických elektrotepelných zařízení je snadná obsluha, možnost ohřevu silných vrstev materiálů, snadnější a méně časově náročná údržba. Na druhé straně tento typ ohřevu vyžaduje poměrně vysoké pořizovací náklady.

2.3 Indukční ohřev

Indukční ohřev lze realizovat pouze na elektricky vodivých materiálech. Je-li ohřívaný předmět vložen do magnetického střídavého pole, indukují se v něm vířivé proudy, které tento předmět přímo ohřívají. Distribuce tepla se nekoná spádem, jak je tomu u odporových ohřevů. Celé toto seskupení je možné zjednodušeně přirovnat k transformátoru se sekundárním vinutím nakrátko. Primární stranu představuje cívka, jíž protéká střídavý elektrický proud a sekundární stranu představuje vodivá vsázka. Konkrétní návrh či odvození jednotlivých prvků není předmětem této práce, proto jsou veškeré nutné vztahy a skutečnosti pro pochopení principu uvedeny v následujících kapitolách. Princip indukčního zařízení je možné vypozorovat z obrázku. [5]

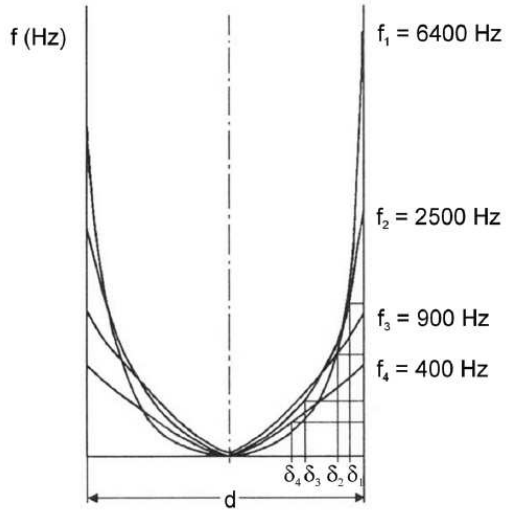


Obr. 2.6 Princip indukčního zařízení [5]

Velkou výhodou je také fakt, že vsázka bývá jediným teplým místem zařízení. Mimo to, to může být například i možnost velkého měrného příkonu do vsázky. Zvolením vhodných parametrů střídavého pole je možné ovlivnit chování prohřevu vsázky.
Dopadá-li elektromagnetické vlnění na vsázku, konkrétně na její povrch, dochází vlivem indukovaných proudů k zahřátí. Dopadlá energie elektromagnetického vlnění se na povrchu materiálu tlumí a mění ji na energii tepelnou. Vzdálenost od povrchu daného materiálu, u kterého dojde k útlumu amplitud veličin pole e-krát, nazýváme hloubka vniku. V ní se reflektují materiálové vlastnosti s vlastnostmi střídavého pole, frekvencí.

$$a = \sqrt{\frac{2}{\omega\,\gamma\,\mu_0\,\mu_r}}, \tag{2.15}$$

kde a [m] je hloubka vniku, v některých zdrojích též značena jako δ
μ_0 [H.m^{-1}] permeabilita vakua,
μ_r [-] relativní permeabilita.



Obr. 2.7 Závislost hloubky vniku na kmitočtu [5]

Motivací pro řešení problému žíhání strojních součástí pomocí indukčního ohřevu je v první řadě fakt, že všechny díly jsou elektricky vodivé. Z vlastností indukčního ohřevu, které jsou uvedeny výše, je nejdůležitější ta, že tento typ ohřevu je přímý a tepelný výkon lze distribuovat lokálně na rozdíl od odporového ohřevu. Možnost nastavení přesných vstupních hodnot zdroje indukčního ohřevu, např. volbou jeho frekvence, je možné měnit hloubku vniku, a tudíž ke každému dílu lze přistupovat individuálně podle požadavků na jeho vnitřní strukturu. Kombinací vhodně zvolené frekvence, pozicí induktoru a vstupního výkon lze tedy možno přibližně předpovídat rozložení teploty v čase a mnoho dalších veličin. Volba indukčního ohřevu je vhodná pro možnost tyto veličiny přesně zjistit díky snadné dostupnosti softwarových aplikací řešících problémy elektromagnetického pole. Simulací jevů v těchto aplikacích je možno vyladit jednotlivé vstupní hodnoty přesně na míru bez jakékoli finanční ztráty za neúspěšný pokus.

Mezi další argumenty hovořící pro indukční ohřev je fakt, že veškeré strojní díly uvažované v této práci určené k žíhání jsou rotačně symetrické a k ohřevu se používá jednozávitová cívka. Je úsporný, v porovnání například s používaným plynovým ohřevem je parametricky přesnější, za určitých podmínek bezpečnější nebo lokálně ekologičtější. Nic tedy nebrání provozu v uzavřené průmyslové hale s poměrně volným pohybem osob.

3 Šíření tepla a obecná rovnice pro šíření v pevném tělese – teplotní pole

Termokinetika, jak někdy bývá označováno šíření tepla, je považována za způsob přenosu energie mezi dvěma či více tělesy. Nejzákladnějším podmínkou je, že k šíření dochází vždy od místa s vyšší teplotou k místu s nižší teplotou. Teplo se šíří třemi obecně známými způsoby, avšak v praxi je zcela běžné, že k němu dochází kombinací jednotlivých způsobů. Jedná se o šíření tepla vedením (kondukcí), prouděním (konvenkcí) a sáláním (radiací). Přenos tepla uvedenými způsoby někdy nazýváme také termodynamickými procesy. Následující podkapitoly vycházejí z literatury [1], [3], [4] ,[5], [12].

3.1 Vedení tepla

Tento způsob vedení tepla v tělesech se uplatňuje pro všechna skupenství. Nejtypičtěji k němu však dochází v tuhých tělesech, naopak v kapalinách či plynech se uplatňuje navíc šíření tepla prouděním (kapaliny a plyny se téměř nikdy nenachází „v klidu“). Kondukci charakterizujeme na základě střední kinetické energie. Částice s vyšší střední kinetickou energií předávají srážkami energii částicím s nižší střední kinetickou energií, přitom se částice nikam nepřemisťují, nýbrž se jen rozkmitají kolem své rovnovážné polohy. [1], [4]

Vedení tepla lze dále rozdělit podle dynamických projevů na stacionární a nestacionární. Ustálený stav nezáleží na čase a rozdíl teplot mezi řešenými částmi tělesa se nemění. Naopak v neustáleném stavu na čase záleží, neboť s přibývajícím časem se rozdíly teplot řešených částí tělesa mění. Jelikož je pro vedení tepla bezpodmínečně nutná přítomnost rozdílu teplot, lze ho charakterizovat gradientem teploty. Ten je charakterizován jako největší teplotní spád vzhledem k normále izotermické plochy. Takovými plochami jsou chápány body v tělese se stejnou teplotou.

$$grad\ T = \overrightarrow{\boldsymbol{n_0}}\ \frac{dT}{dn}\,, \tag{3.1}$$

kde $\overrightarrow{\boldsymbol{n_0}}$ představuje jednotkový normálový vektor k izotermické ploše,
člen $\frac{dT}{dn}$ odpovídá skalární hodnotě gradientu, jedná se o derivaci teploty podle normály.

Vedení tepla popsané Fourierovým zákonem v ustáleném stavu lze definovat pomocí následujících vztahů:

$$\boldsymbol{q} = -\lambda\ \frac{dT}{dx}, \tag{3.2}$$

kde $\boldsymbol{q}$ [W.m^{-2}] je hustota tepelného toku,
λ [W.m^{-1}.K^{-1}] součinitel tepelné vodivosti.

$$\boldsymbol{q} = -\lambda\ grad\ T = -\lambda \nabla T, \tag{3.3}$$

$$P = \iint_{\boldsymbol{S}} (-\lambda\ grad\ T)\ d\boldsymbol{S}, \tag{3.4}$$

kde P [W] představuje tepelný výkon.

Výraz (3.2) představuje plošnou hustotu tepelného toku s gradientem měnícím se pouze v ose x. Oproti tomu je výraz (3.3) zapsán jako vektor respektující změnu teploty ve všech osách kartézské soustavy. Ve vztahu pro tepelný výkon se vyskytuje doposud nevysvětlená veličina s označením λ. Znakem λ (součinitel tepelné vodivosti) značíme konstantu respektující schopnost stejnorodého materiálu vést teplo při dané střední teplotě, jejíž empiricky zjištěná hodnota je závislá na fyzikálním stavu tělesa. Součinitel tepelné vodivosti je funkcí teploty a tlaku, $\lambda = \lambda(T, p)$, přičemž tlakovou závislost u tuhých

těles zanedbáváme. Někdy je možné se také setkat s fyzikálním parametrem nazývaným koeficient teplotní vodivosti označovaný písmenem a [m.s^{-2}]. Vztah mezi tepelnou a teplotní vodivostí je přes objemovou hustotu ρ a měrnou tepelnou kapacitu c.

$$a_{tep} = \frac{\lambda}{\rho_m \, c}, \tag{3.5}$$

kde ρ_m [kg.m^{-3}] je objemová hustota,
c [J.kg^{-1}.K^{-1}] měrná tepelná kapacita.

3.2 Proudění tepla

Oproti předešlému způsobu vedení tepla se vyskytuje proudění pouze u skupenství kapalného a plynného. Je pravda, že současně s prouděním dochází v tekutině v zanedbatelné míře proti konvekci i k šíření tepla vedením. Sdílení tepla prouděním je možné rozdělit do tří základních skupin. [3], [4]

- sdílení tepla konvekcí beze změny skupenství
- sdílení tepla konvekcí při změně skupenství z kapalného na plynné (var)
- sdílení tepla konvekcí při změně skupenství z plynné na kapalné (kondenzace)

Je-li nahlíženo na proudění tekutin ze základního fyzikálního hlediska, poté platí skutečnost, že proudění tekutin se řídí dvěma základními zákony, které zde jsou jen slovně popsány. Prvním z nich je zákon zachování hmoty vyjádřený rovnicí kontinuity, která v sobě nese informaci o proudění stlačitelné tekutiny na základě změny hustoty, rychlosti ve všech směrech trojrozměrného systému x,y,z a časové změny hustoty tekutiny v objemovém elementu. Druhým je zákon zachování energie, a po zjednodušení představuje ustálené, jednorozměrné proudění kapaliny v gravitačním poli. Neméně důležitým faktorem je i rychlost proudění tekutiny, která rozděluje proudění na typ laminární a turbulentní. U laminárního proudění nedochází k promíchání uvnitř tekutiny, proudnice se vzájemně neporušují. Naopak u turbulentního typu lze pozorovat neuspořádaný pohyb, díky němuž je docíleno vyššího stupně promíchání tekutiny a intenzivnějšího přenosu tepla.

K přestupu tepla tedy dochází prouděním hmoty jednoho média o médium jiné s odlišnými teplotami a hustotami vnitřní energie. V případě konvekce je také možné hovořit o přenosu tepla vázaného na přenos hmoty o dané vnitřní energii mezi dvěma tělesy. Proudění dělíme na nucené a volné. Volné proudění je způsobeno čistě rozdílem hustot látek, jejichž příčinou jsou rozdílné teploty. Naopak nucené proudění je takové, které je zapříčiněno vnějšími vlivy, jako například ventilátorem. Nucený způsob proudění lze využít při potřebě srovnání teplotních potenciálů v co nejkratším čase. Za základní vztah vycházející z Newtonova ochlazovacího zákona považujeme:

$$P = \alpha \, S \, (T_1 - T_2), \tag{3.6}$$

kde α [W.m^{-2}.K^{-1}] je koeficient součinitel přestupu tepla.

Svou hodnotu nachází ve výpočtu z podobnostních čísel (teorie podobnosti) jako například Nusseltovo, Prandtlovo, Grashofovo číslo a v materiálových vlastnostech dané látky.

3.3 Sálání tepla

Třetím způsobem jak dochází k šíření tepla je sálání, podrobně v [1], [5]. K sálání může docházet v libovolném prostředí, tj. i ve vakuu. Je totiž důležité uvědomit si, že kondukce a konvekce je čistě spjatá s hmotou. Každé neprůzračné těleso s teplotou $T > 0$ K vyzařuje svým povrchem tepelnou energii v podobě elektromagnetického vlnění šířícího se do všech směrů přímočaře. Při šíření energie mezi tělesy prochází elektromagnetické vlnění mezi prostředími, a je tedy nutné respektovat zákony geometrické

optiky. Při interakci vlnění s tělesem mohou nastat tři situace, energie záření je pohlcena - koeficient A, odražena – koeficient B nebo propuštěna - koeficient C. Každé ze tří kritérií je vztaženo k celkové dopadlé energii a platí, že:

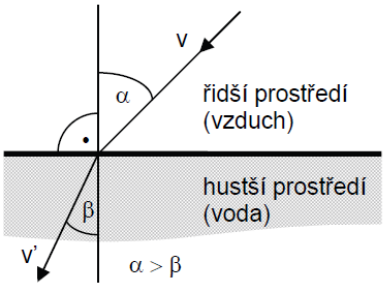
$$A + B + C = 1. \tag{3.7}$$

Kde koeficient *A* nabývá hodnoty *A* = 1 právě tehdy, když se jedná o absolutně černé těleso,
koeficient *B* = 1 odpovídá absolutně bílému tělesu, to znamená odražení veškeré dopadlé energie,
koeficient *C* = 1 je chápán jako absolutně průzračné těleso.

Přenos tepla sáláním je složen z více kritérií a řídí se podle několika fyzikálních zákonů:

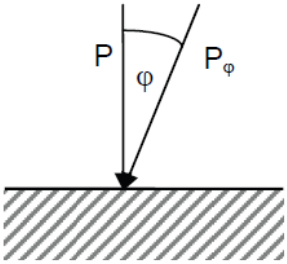
- Snellův zákon
- Lambertův zákon
- Stefan-Boltzmannův zákon
- Planckův zákon
- Wienův zákon
- Kirchhoffův zákon

Jednotlivé zákony budou vysvětleny pouze slovně s případným obrazovým doprovodem.
Snellův zákon jinak známý jako zákon odrazu je jeden ze základních jevů popisujících šíření vlnění při přechodu mezi dvěma rozdílnými prostředími.



Obr. 3.1 Snellův zákon [5]

Lambertův zákon hovoří o uplatnění pouze kolmé složky záření na dopadající plochu.



Obr. 3.2 Lambertův zákon [5]

Stefan-Boltzmannův zákon popisuje vztah mezi teplotou vyzařujícího tělesa a jím vyzařovanou intenzitou.

$$M = \sigma\, T^4, \tag{3.8}$$

kde *M* [W.m^{-2}] je intenzita záření,
σ[W.m^{-2}.K^{-4}] Stefan-Boltzmannova konstanta.

Planckův zákon zjednodušeně řečeno uvádí vztah mezi intenzitou záření *M* absolutně černého tělesa na teplotě jeho povrchu, $M_\lambda = f(T, \lambda)$. Celkový výkon vyzářený z 1 m^2 pro celé spektrum vlnových délek odpovídá součtu jednotlivých výkonů pro dané vlnové délky. Zintegrováním, tedy posčítáním jednotlivých výkonových příspěvků se dostaneme ke vztahu (3.8).

Wienův (posunovací) zákon – Wilhelm Wien zjistil, že při zvyšující se teplotě, se maximum spektrální zářivosti posouvá směrem ke kratším vlnovým délkám. Vlnová délka, při níž je záření maximální odpovídá vztahu:

$$\lambda_m = \frac{2892}{T}, \tag{3.9}$$

kde λ_m [m] je vlnová délka.

Pod Kirchhoffovým zákonem se skrývá odvození pohltivosti ze dvou ploch, z nichž jedna je absolutně černá a druhá je šedá s neznámou pohltivostí, z čehož vyvozujeme takzvanou emisivitu ε neboli stupeň černosti definovaný jako poměr intenzity vyzařování reálného tělesa k intenzitě absolutně černého tělesa.

Tepelný výkon radiací při sálání z tělesa 1 na těleso 2 lze zapsat obecně jako:

$$P_{1\to2} = \varepsilon_1 \, S_1 \, \sigma \, (T_1^4 - T_2^4), \tag{3.10}$$

kde ε_1 [-] je emisivita tělesa 1, nabývá hodnot 0 až 1.

3.4 Obecná diferenciální rovnice pro šíření tepla v pevném tělese

Obecná diferenciální rovnice pro šíření tepla popisuje takzvané teplotní pole. Toto pole má skalární charakter a rozumíme jím trojrozměrnou oblast. Každá část nebo spíše každé místo vymezené oblasti (Ω) je popsáno termodynamickou teplotou, která vychází ze známých zákonů termodynamiky. Uvažují-li se podmínky stacionární, potom je termodynamická teplota pole konstantní, v opačném případě za nestacionárních podmínek je teplota v čase proměnná. Výše zmíněná rovnice má původ v prvním zákoně termodynamiky a uvažuje nestacionární teplotní pole způsobené například dodanou energií nebo změnou skupenství.

$$div(\lambda \, grad \, T) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c \boldsymbol{v} \, grad \, T + \lambda \tau_r \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - p \tag{3.11}$$

Většina symbolů vztahu (3.11) byla již výše popsána. Symbol $\boldsymbol{v}$ označuje rychlost kontinua [$m.s^{-2}$], $\tau_r$je koeficient pro konečnou rychlost šíření tepla a *p* vyjadřuje měrný výkon [$W.m^{-3}$]. Jelikož rozměr samostatně figurujícího členu měrného výkonu je ve [$W.m^{-3}$], musí i ostatní členy (celá rovnice) nabývat tohoto rozměru. Rovnice (3.11) je zcela obecného charakteru a lze za určitých podmínek tvořit zjednodušení. Nastává-li pomalá změna termodymanické teploty v teplotním poli, prohlašuje se pole za stacionární a z rovnice (3.11) vypadne člen respektující změnu rychlosti šíření tepla, $\lambda\tau_r \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}$. V případě, že kontinuum je v klidném stavu, nehýbe se a jeho rychlost $\boldsymbol{v} = 0$, vypadne z diskutované rovnice i druhý člen na pravé straně. Výsledkem zjednodušujících předpokladů je Fourierova rovnice.

$$div(\lambda \, grad \, T) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - p \tag{3.12}$$

Zároveň pro obě rovnice (3.11) a (3.12) musí platit, že řešení se nalézá pro $t \geq 0$ na oblasti Ω.

Obecná diferenciální rovnice, po zjednodušení nazvaná Fourierova rovnice, nachází využití při řešení takových stavů, kdy nám nepostačují výše uvedené vztahy z podkapitol 3.1, 3.2 a 3.3 určené pro

ustálené stavy. Pro složité úlohy obecných rozměrů a tvarů je nutností znalost některých veličin. Patří mezi ně podmínky počáteční, okrajové a na rozhraní.

Okrajové podmínky jsou děleny do tří, někdy do čtyř kategorií a vyskytují se na hranici oblasti. Okrajové podmínky prvního typu, které jsou známy jako podmínky Dirichletovy, se používají v situaci, kdy není známa teplota povrchu nebo za předpokladu, že hranice (Γ) je tvořena izotermou (T = konstantní).

$$T(\Gamma, t) = T_{\Gamma}(\Gamma, t) \tag{3.13}$$

Neumannovy podmínky nazvané jako podmínky druhého typu vyjadřují bilanci hustoty tepelného toku $\boldsymbol{q}$ s hranicí.

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = q_n \tag{3.14}$$

Podmínka vyjadřující přestup tepla konvencí z prostředí o T_1 do prostředí o T_2 je podmínkou třetího druhu známá pod názvem Newtonova podmínka.

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha(T_1 - T_2) \tag{3.15}$$

Mezi podmínky IV. druhu jsou zařazeny podmínky týkající se šíření tepla radiací. Jelikož sálání vychází z více dílčích zákonů, nejčastěji je možno se setkat s následujícím vztahem:

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \varepsilon\sigma(T_1^2 - T_2^2). \tag{3.16}$$

Další kategorií jsou podmínky na rozhraní, pro které platí ($Tj = Ti$). Příkladem mohou být například chemické reakce. Pro hustotu tepelného toku na rozhraní musí platit:

$$\lambda_j \frac{\partial T_j}{\partial n} - \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial n} = q_n. \tag{3.16}$$

Jako poslední z výše uvedených druhů podmínek jsou počáteční podmínky. Řeší- li se rovnice (3.11), je důležité pro řešení nalézt dvě počáteční podmínky (rovnice 2. řádu). První podmínka bude zahrnovat počáteční teplotu v místě a čase počátečního okamžiku a druhá podmínka respektovat rychlost změny teplotního pole od začátku řešení daného děje. [12]

4 Elektromagnetické pole

Teorii elektromagnetického pole byly položeny v roce 1865 základy Jamesem Clarkem Maxwellem. Následující tvrzení a vztahy platí, jsou-li uvažovány makroskopické jevy. Klasická teorie popisuje model spojitého pole vyjádřený základními elektrickými a magnetickými veličinami. Jsou jimi časově a prostorově závislé vektory:

- intenzita elektrického pole $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$
- indukce elektrického pole $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)$
- intenzita magnetického pole $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$
- indukce magnetického pole $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$,

kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor.

Předpokládá se, že uvedené 4 veličiny jsou spojité funkce, včetně jejich derivací. Nespojitosti se mohou vyskytnou na rozhraní mezi dvěma prostředími. Maxwellovy rovnice (MR) je možné vyjádřit ve více než jednom tvaru. Typicky se v literatuře základní výklad provádí převážně v takzvaném integrálním tvaru. Pro tento tvar popisují vztahy elektromagnetické pole pro uvažovanou oblast (oproti rovnicím v diferenciálním tvaru). Tato kapitola vychází z literatury [10], [6], [11], [1], [12] a [14].

4.1 Maxwellovy rovnice a základní pojmy z vektorové analýzy

První Maxwellova rovnice

$$\oint_l \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = I + \frac{d\Psi}{dt}, \tag{4.1}$$

zjednodušeně říká, že integrál intenzity magnetického pole podél uzavřené křivky l odpovídá celkovému proudu procházejícího plochou ohraničenou touto křivkou. Levou stranu vztahu (4.1) je možné pojmenovat jako oběhové magnetické napětí v orientované smyčce. Pravá strana uvedeného vztahu se skládá ze dvou členů. První člen se nazývá vodivostní proud a druhý člen posuvný proud. Veličina Ψ přestavuje dielektrický tok a získá se ze vztahu: $\Psi = \iint_S \boldsymbol{D}\, d\boldsymbol{S}$

Druhá Maxwellova rovnice

$$\oint_l \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = -\frac{d\phi}{dt}, \tag{4.2}$$

se jinak nazývá Faradayův indukční zákon. Podobně jako u vztahu (4.1) platí skutečnost, že vektor elektrické intezity podél uzavřené křiky se rovná záporně vzaté časové změny magnetického toku. Opět se jedná o tok procházející plochou daný křivkou l.

Třetí Maxwellova rovnice

$$\oiint_S \boldsymbol{D}\, d\boldsymbol{S} = Q, \tag{4.3}$$

jako takzvaný Gaussův zákon elektrostatiky říká, že vektor elektrické indukce v uzavřené ploše odpovídá celkovému volnému náboj v objemu vytyčeném plochou S.

Poslední, čtvrtou Maxwellovou rovnicí je vztah

$$\oiint_S \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{S} = 0, \tag{4.4}$$

neboli zákon spojitosti indukčního toku. Slovně lze vztah (4.4) formulovat jako vektor magnetické indukce v uzavřené ploše je roven nule. Magnetické pole je nezřídlové, to lze chápat jako tok vstupující do uzavřené plochy je roven toku z plochy vystupujícímu. [10], [6], [12]

Jak bylo uvedeno v předchozím odstavci, mimo integrálního tvaru se pro vyjádření čtyř Maxwellových vztahů používá vyjádření v diferenciálním tvaru. Ten je z hlediska matematického vyjádření a pohledu dalšího použití, například pro odvození vlnových rovnic, nejen přehlednější ale i výhodnější.

Je proto nutností zde uvést základní poznatky z vektorové analýzy. U diferenciálního tvaru se pro první a druhou rovnici aplikuje Stokesova věta (SV) a pro třetí a čtvrtou věta Gaussova-Ostrogradského (GOV). První uvedená věta (SV) „převádí“ křivkový integrál vektoru přes uzavřenou křivku na plošný integrál z rotace daného vektoru.

$$\oint_l \boldsymbol{f}\, d\boldsymbol{l} = \iint_S rot\, \boldsymbol{f}\, d\boldsymbol{S}, \tag{4.5}$$

kde $\boldsymbol{f}$ je obecná vektorová veličina například v kartézských souřadnicích.

Gauss-Ostrogradského věta „převádí“ orientovaný plošný integrál vektoru na objemový integrál z divergence daného vektoru.

$$\oiint_S \boldsymbol{f}\, d\boldsymbol{S} = \iiint_V div\, \boldsymbol{f}\, d\boldsymbol{V} \tag{4.6}$$

Pro operátory vektorové analýzy *rot* a *div* je následující vysvětlení (nejnázornější pro kartézskou soustavu):

$$div\, \boldsymbol{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{dy} + \frac{\partial f_z}{\partial z} = \nabla . \boldsymbol{f} \tag{4.7}$$

$$rot\, \boldsymbol{f} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}, \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}, \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right) = \nabla \times \boldsymbol{f} \tag{4.8}$$

Ekvivalentně vztahu (4.1) přepisujeme první MR

$$rot\, \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{4.9}$$

Rotace vektoru intenzity magnetického pole se rovná hustotě vodivostního proudu $\boldsymbol{J}$ a hustotě posuvného proudu. Jiná interpretace, než je uvedena u ekvivalentního vztahu (4.1), může znít: proudové hustoty $\boldsymbol{J}$ a $\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ jsou vždy doprovázeny přítomností magnetického pole.

Druhá MR v diferenciálním tvaru nám říká, že prostorovou změnou vektoru elektrické intenzity dochází k časové změně vektoru $\boldsymbol{B}$, tedy k časové změně magnetického pole.

$$rot\ \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}. \tag{4.10}$$

Diferenciální tvar třetí MR je:

$$div\ \boldsymbol{D} = \rho_0, \tag{4.11}$$

kde ρ_0 [C.m^{-3}] je objemová hustota volného elektrického náboje. O vztahu (4.11) je možno říci, že elektrické pole tvořené volnými náboji Q_0 je zřídlové.

Čtvrtá rovnice má tvar:

$$div\ \boldsymbol{B} = 0. \tag{4.12}$$

Z rovnice divergence vektoru magnetické indukce rovné nule vyplývá, že magnetické pole je nezřídlové. Vysvětlení lze najít pomocí aplikace operátoru divergence na vztah (4.10). Jelikož ve vektorové analýze platí, že *div rot* $\boldsymbol{f}$ = 0, potom analogicky je $\frac{\partial}{\partial t} div\ \boldsymbol{B} = 0$. *Div* $\boldsymbol{B}$ je konstanta, což znamená, že neexistuje magnetický náboj. [10], [12]

Mimo čtyř základních MR je velice důležitým pojmem i takzvaná rovnice kontinuity vyjadřující zákon zachování náboje, což znamená, že náboj nikde nevzniká ani nezaniká. Aplikací vektorového operátoru divergence na první MR lze získat takzvanou rovnici kontinuity pro vodivý proud:

$$div\ rot\ \boldsymbol{H} = div\ \boldsymbol{J} + \frac{\partial}{\partial t} div\ \boldsymbol{D}, \tag{4.13}$$

která se dosazením z třetí MR a uplatněním úvahy jako v předchozím odstavci o platnosti *div rot* $\boldsymbol{f}$ = 0 zjednoduší na:

$$div\ \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho_0}{\partial t}. \tag{4.14}$$

4.2 Materiálové vztahy jednotlivých prostředí

V předchozí podkapitole byly popsány MR, ve kterých se objevovaly vektory $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{J}$. Mezi uvedenými vektory existují v látkovém prostředí vždy závislosti popisující elektrické a magnetické vlastnosti daného prostředí.

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} = \mu_0 \mu_r \boldsymbol{H} \tag{4.15}$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \boldsymbol{E} \tag{4.16}$$

$$\boldsymbol{J} = \gamma \boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{E}}{\rho} = \gamma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}_V) \tag{4.17}$$

Veličiny μ, ε a γ nazýváme materiálovými veličinami, které jak již bylo naznačeno, svým způsobem vyjadřují jakost prostředí,

kde μ_0 [$H.m^{-1}$] je permeabilita vakua s hodnotou $4\pi.10^{-7}$ [$H.m^{-1}$],
μ_r [-] relativní permeabilita,
ε_0 – permitivita vakua s hodnotou $\frac{1}{36\pi}.10^{-9}$ [$F.m^{-1}$],
ε_r – relativní permitivita [-],
γ – elektrická vodivost [$S.m^{-1}$] je reciproká hodnota elektrické rezistivity ρ [$\Omega.m^{-1}$],
$\boldsymbol{E}_V$[$V.m^{-1}$] intenzita vtištěných sil.

Materiálové veličiny mohou být vyjádřeny buď jako skalár nebo jako tenzor. Příklad tenzoru materiálové veličiny pro elektrické pole je vysvětlen například na veličině relativní permitivity.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \tag{4.18}$$

Pozorováním vztahů (4.15) až (4.17), lze tvrdit, že pro bližší popis prostředí jsou ve své podstatě pouze dva lineárně nezávislé vztahy tvořené základními pěti veličinami.

Obecně prostředí lze dále dělit na homogenní a nehomogenní, lineární a nelineární, izotropní či neizotropní a mnoho dalších. Více shrnuje jednotlivá prostředí následující tabulka.

Hodnota materiálové charakteristiky ε, μ, γ	Název prostředí	Matematický charakter materiálové charakteristiky
nezávisí na směru	izotropní	skalár
závisí na směru (tj. v daném bodě jsou hodnoty materiálové charakteristiky v různých směrech různé)	anizotropní	tenzor
v různých bodech prostředí je stejná	homogenní	konstanta
v různých bodech prostředí je různá	nehomogenní	funkce polohy
nezávisí na hodnotě stavových vektorů	lineární	konstanta
závisí na hodnotě stavových vektorů	nelineární	funkce velikosti příslušného stavového vektoru

Tab. 4.1 Materiálové charakteristiky pro různá prostředí [10]

Nahlédnutím na jednotlivé veličiny z praktického hlediska lze říci:

- Permitivita ε, jakožto součin permitivity vakua a relativní permitivity charakterizuje prostředí dielektrik (izolantů). Relativní permitivita vyjadřuje, kolikrát se zmenší elektrická síla, je-li těleso s elektrickým nábojem vloženo do látkového prostředí namísto vakua. Typické hodnoty pro ε_r jsou jednotky (např. vzduch), desítky (voda), v ojedinělých případech při použití do speciálních kondenzátorů až 10^5.

- Magnetika jsou charakterizována permeabilitou μ, která vyjadřuje vliv materiálu či prostředí na výsledné účinky magnetického pole. Celkový účinek může být zeslabující i zesilující. Hodnoty relativní permeability se značně odvíjejí od typu magnetika. Při uvážení diamagnetik a paramagnetik se hodnoty pohybují okolo jedné. Jde-li o feromagnetika, tak lze prohlásit, že hodnota μ_r je zásadně větší než jedna, v řádech stovek či tisíců.

- Konduktivita γ vyjadřuje schopnost průchodu elektrického proudu vodivým materiálem, charakterizuje tedy vodivá prostředí. V ideálním případě by hodnota elektrické vodivosti dosahovala limitně nekonečna, prakticky jsou to hodnoty v řádech 10^6. Konduktivita se

objevuje ve vztahu (4.17), který není ničím jiným než Ohmovým zákonem v diferenciálním tvaru.

Vzhledem k povaze této práce zabývající se indukčním ohřevem, je již ze základní úvahy nutné předpokládat v dalších kapitolách zejména přítomnost vodivého prostředí. [10], [6], [12]

4.3 Obecná vlnová rovnice

Při odvození základních vlnových rovnic vycházíme z výše uvedených čtyř Maxwellových rovnic v diferenciálním tvaru, vztahy (4.9) až (4.12). K dosažení správného výsledku je nutná znalost některých důležitých vzorců z vektorové analýzy, [10]. Vztah (4.9) se nyní se základní znalostí materiálových vztahů jednotlivých prostředí a Ohmova zákona v diferenciálním tvaru dá přepsat jako:

$$rot\ \boldsymbol{H} = \gamma \boldsymbol{E} + \ \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}. \tag{4.19}$$

Použitím rotace na rovnici (4.19) dostáváme:

$$rot\ rot\ \boldsymbol{H} = rot(\gamma \boldsymbol{E}) + rot\ \left(\varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right). \tag{4.20}$$

Jelikož v tomto případě materiálové veličiny považujeme za konstanty, lze rovnici (3.17) přepsat do tvaru:

$$rot\ rot\ \boldsymbol{H} = \gamma rot(\boldsymbol{E}) + \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial (rot \boldsymbol{E})}{\partial t}. \tag{4.21}$$

S využitím druhé Maxwellovy rovnice v diferenciálním tvaru s vyjádřením magnetické indukce pomocí materiálové konstanty μ a intenzity magnetického pole dosazením do (4.21) dostáváme:

$$rot\ rot\ \boldsymbol{H} = -\gamma \mu_0 \mu_r \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} - \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t}. \tag{4.22}$$

Odvoláním na vektorovou analýzu je možno psát

$$rot\ rot\ \boldsymbol{H} = grad\ div\ \boldsymbol{H} - \Delta \boldsymbol{H}, \tag{4.23}$$

kde Δ je Laplaceův operátor a odpovídá součinu $\nabla.\nabla = \nabla^2$, přičemž znak ∇ nazýváme nabla.

Čtvrtá Maxwellova rovnice je popsána vztahem (4.12), který je opět možno pomocí materiálových veličin psát jako:

$$div\ \boldsymbol{B} = div\ \mu \boldsymbol{H} = 0, \tag{4.24}$$

z čehož plyne:

$$grad\ div\ \boldsymbol{H} = 0, \tag{4.25}$$

a proto lze psát:

$$rot\ rot\ \boldsymbol{H} = -\Delta \boldsymbol{H}. \tag{4.26}$$

Pro magnetickou složku obecné vlnové rovnice dostáváme

$$\Delta \boldsymbol{H} = \gamma \mu_0 \mu_r \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t}. \tag{4.27}$$

Pro elektrickou složku obecné vlnové rovnice, jejíž odvození vychází z v podstatě identických kroků jako výše uvedený postup, platí:

$$\Delta \boldsymbol{E} = \gamma \mu_0 \mu_r \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t} + grad \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}, \tag{4.28}$$

kde ρ_0 [C.m^{-3}] je prostorová hustota volného el. náboje.

Při uvážení prostředí s absencí vnitřních zdrojů elektřiny vypadává z rovnice (4.28) poslední člen pravé strany, neboť je čtvrtá Maxwellova rovnice rovna nule.

Díky tomu, že je pro tuto práci stěžejní vodivé prostředí (ideálně $\gamma = \infty$, $\varepsilon_r = 0$), pak rovnice (4.27) a (4.28) s respektováním předchozí úvahy o absenci objemového prostorového náboje přejdou ve tvar:

$$\Delta \boldsymbol{H} = \gamma \mu_0 \mu_r \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{4.29}$$

$$\Delta \boldsymbol{E} = \gamma \mu_0 \mu_r \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}. \tag{4.30}$$

Literatura [1], [11].

4.3.1 Harmonické vyjádření vlnové rovnice

Harmonické vyjádření veličin má v praxi mnohem větší využití než výše uvedené rovnice derivované podle času. Často je totiž pracováno se střídavým harmonickým elektrickým polem s kmitočtem ω [s^{-1}]. Ve své podstatě jde o nahrazení časové derivace rotujícím fázorem v komplexní rovině, které nemá žádný vliv na konečné řešení. Proto budou použity následující vztahy vyjádřené v exponenciálním tvaru komplexních čísel (za předpokladu, že $j^2 = -1$):

$$\hat{\boldsymbol{H}} = \boldsymbol{H}\, e^{j\omega t}, \hat{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E}\, e^{j\omega t}, \tag{4.31}$$

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{H}}}{\partial t} = j\omega \boldsymbol{H}\, e^{j\omega t} = j\omega \hat{\boldsymbol{H}},\ \frac{\partial \hat{\boldsymbol{E}}}{\partial t} = j\omega \boldsymbol{E}\, e^{j\omega t} = j\omega \hat{\boldsymbol{E}}, \tag{4.32}$$

$$\frac{\partial^2 \hat{\boldsymbol{H}}}{\partial t^2} = (j\omega)^2 \hat{\boldsymbol{H}}\, e^{j\omega t} = -\omega^2 \hat{\boldsymbol{H}},\ \frac{\partial^2 \hat{\boldsymbol{E}}}{\partial t^2} = (j\omega)^2 \hat{\boldsymbol{E}}\, e^{j\omega t} = -\omega^2 \hat{\boldsymbol{E}}. \tag{4.33}$$

kde $\boldsymbol{H}$ a $\boldsymbol{E}$ jsou časově neměnné vektory magnetického a elektrického pole.

Použitím vztahů (4.31) až (4.33) a jejich dosazením do vztahů (4.29) a (4.30) dostáváme rovnice pro jednotlivé složky elektromagnetického pole v harmonickém vyjádření.

$$\Delta \boldsymbol{H} = j\omega\gamma \mu_0 \mu_r \hat{\boldsymbol{H}} - j\omega^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r \hat{\boldsymbol{H}} \tag{4.34}$$

$$\Delta \boldsymbol{E} = j\omega\gamma \mu_0 \mu_r \hat{\boldsymbol{E}} - j\omega^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r \hat{\boldsymbol{E}} + grad \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \tag{4.35}$$

Ve vodivém prostředí nastává zjednodušení vztahů (4.34) a (4.35) vypadnutím všech členů pravé strany kromě prvního.

Následující postup názorně přibližuje postup řešení magnetické složky, tj. vztahu (4.34) a odvození hloubky vniku. Zjednodušujícím předpokladem je uvážení jednorozměrného případu. Jedná se o rovinnou vlnu. Pak tedy pro součin Laplaceova operátoru a fázoru intenzity magnetického pole platí:

$$\Delta \boldsymbol{H} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial x^2}. \tag{4.36}$$

Ve vodivém prostředí tedy vztah (4.36) lze napsat jako:

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial x^2} = j\omega\gamma\mu_0\mu_r \widehat{\boldsymbol{H}}. \tag{4.37}$$

Obecné řešení lineární parciální diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty, kterému odpovídá rovnice (4.37), známé z matematiky vypadá:

$$\widehat{\boldsymbol{H}} = \widehat{\boldsymbol{A}} e^{\lambda_2 x} + \widehat{\boldsymbol{B}} e^{\lambda_1 x}, \tag{4.38}$$

kde $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ jsou integrační konstanty a $\lambda^2 = j\omega\gamma\mu_0\mu_r$.

Řešení kořenu uvedeného polynomu druhého řádu je:

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{j\omega\gamma\mu_0\mu_r} = \pm\sqrt{j}\sqrt{\omega\gamma\mu_0\mu_r}. \tag{4.39}$$

Vyčíslením výrazu $\sqrt{j}$ za předpokladu, že $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$ dostáváme přes goniometrický tvar ve výsledku převedený do základního tvaru komplexního čísla rovnost:

$$\sqrt{j} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}. \tag{4.40}$$

Zpětným dosazením vztahu (4.40) do (4.39) pro $\lambda_{1,2}$ lze napsat:

$$\lambda_{1,2} = \pm\frac{1+j}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega\gamma\mu_0\mu_r} = \pm(1+j)\sqrt{\frac{\omega\gamma\mu_0\mu_r}{2}} = \pm\frac{1+j}{a}, \tag{4.41}$$

kde a [m] je hloubka vniku a odpovídá vztahu $a = \sqrt{\frac{2}{\omega\gamma\mu_0\mu_r}}$. Konkrétní výsledek obecného řešení pro rotující fázor $\widehat{\boldsymbol{H}}$ v komplexní rovině dle vztahu (4.38) je:

$$\widehat{\boldsymbol{H}} = \left(\widehat{\boldsymbol{A}} e^{-\frac{1+j}{a}x} + \widehat{\boldsymbol{B}} e^{\frac{1+j}{a}x}\right) e^{j\omega t}. \tag{4.42}$$

První výraz v závorce rovnice (4.42) vyjadřuje postupnou vlnu a druhý výraz vlnu zpětnou. [1], [11]

4.4 Poyntingův teorém a energie elektromagnetického pole

Tyto dva pojmy jsou spolu velice úzce svázány a jejich vztah bude v této kapitole rozebrán. V prvním kroku se vychází z energie uložené v elektromagnetickém poli definovaným určitým objemem.

$$W = W_e + W_m = \iiint_V w_e dV + \iiint_V w_m dV = \iiint_V \frac{\boldsymbol{ED}}{2} dV + \iiint_V \frac{\boldsymbol{HB}}{2} dV, \quad (4.43)$$

kde W [J] je celková energie elektromagnetického pole,
W_e [J] energie elektrické složky elmag. pole,
W_m [J] energie magnetické složky elmag. pole,
w_e [Jm^{-3}] hustota energie el. složky elmag. pole,
w_m [Jm^{-3}] hustota energie mag. složky elmag. pole.

Za platnosti zákonu zachování energie a předpokladu, že energie obsažená v objemu elektromagnetického pole se bude zmenšovat, existují dvě možnosti snížení jeho energie. První variantou je přeměna na jiný druh energie (u indukčního ohřevu se jedná o tepelnou energii) a druhou je vyzáření energie do okolí. Nejsou-li materiálové veličiny η a ε funkcí času, poté platí následující rovnosti:

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\boldsymbol{D} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\boldsymbol{E} = \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\varepsilon\boldsymbol{E} \quad (4.42)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\boldsymbol{B} = \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\eta\boldsymbol{H} \quad (4.43)$$

Dalším krokem je potřeba definovat časovou změnu úbytku hustoty energie, která může byt přepsána do tvaru:

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{ED} + \boldsymbol{HB}) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\boldsymbol{D} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\boldsymbol{B} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\boldsymbol{H}\right). \quad (4.44)$$

S uvážením výše uvedených vztahů (4.42) a (4.43) se výraz (4.44) zjednoduší na:

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = -\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\varepsilon\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\eta\boldsymbol{H}\right) \quad (4.45)$$

Vyjádřením z 1. MR v diferenciálním tvaru lze z pravé strany rovnice nahradit část prvního členu $\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\varepsilon$ a z 2. MR nahradit část členu druhého $\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\eta$. Výsledkem těchto operací je:

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = -(\boldsymbol{E}\,rot\boldsymbol{H} - \boldsymbol{EJ} - \boldsymbol{H}\,rot\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{H}\,rot\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\,rot\boldsymbol{H} + \boldsymbol{EJ}. \quad (4.46)$$

Využitím identity z vektorové analýzy $div(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H}\,rot\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\,rot\boldsymbol{H}$ je získána rovnice Poyntigova teorému v diferenciálním tvaru.

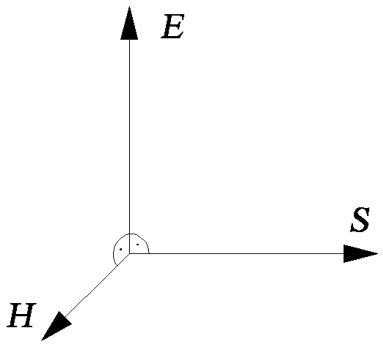
$$-div\,(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{EJ} + \frac{\partial w}{\partial t} \quad (4.47)$$

Ve skutečnosti se jedná o bilanci elektromagnetického pole v obecném bodu prostoru, která doslova říká, že úbytek objemové hustoty energie za časový úsek odpovídá vyzářenému výkonu z definovaného prostoru a Joulovým ztrátám.

Vektorový součin intenzity elektrického a magnetického pole z rovnice (4.47) je nazýván jako takzvaný Poyntigův vektor.

$$\boldsymbol{S_P} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}, \tag{4.48}$$

kde $\boldsymbol{S_P}$ [Wm^{-2}] značí Poyntigův vektor.



Obr. 4.1 Orientace vektorů E, H, S

Jedná se o vektor popisující přenos energie pomocí elektromagnetického pole. Jak je uvedeno v rovnici (4.48), vektor $\boldsymbol{S}$ je kolmý na vektory $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{H}$. Směr i orientace tohoto vektoru odpovídá směru a orientaci výkonu. Příkladem využití tohoto vektoru v praxi je například ověření správnosti složitých elektotechnických výpočtů. [11]

4.4.1 Poyntingův vektor v harmonickém poli

I zde, podobně jako v minulé kapitole, je převeden Poyntingův teorém do oblasti fázorových veličin. Vychází z [11]. Pro svou nelinearitu však nelze parciální derivaci vektoru veličiny podle času přímo nahrazovat součinem $j\omega$. Vyjádření 1. a 2. MR ve fázorových veličinách (zde lze nahradit časovou derivaci výrazem $j\omega$) a použitím stejného obratu z vektorové analýzy jako ve vztahu (4.47), lze psát:

$$div\left(\widehat{\boldsymbol{E}} \times \widehat{\boldsymbol{H}}^*\right) = \widehat{\boldsymbol{H}}^*\, rot\widehat{\boldsymbol{E}} - \widehat{\boldsymbol{E}}\, rot\widehat{\boldsymbol{H}}^* = \widehat{\boldsymbol{H}}^*\left(-j\omega\widehat{\boldsymbol{B}}\right) - \widehat{\boldsymbol{E}}\left(\hat{J}^* - j\omega\widehat{\boldsymbol{D}}^*\right). \tag{4.49}$$

Integrací rovnice (4.49) přes objem, aplikací Gauss-Ostrogradského věty na levou stranu a použitím materiálových veličin vyjde rovnice, která má po separaci reálné a imaginární složky podobu:

$$-\oiint_{\boldsymbol{S}} div\left(\widehat{\boldsymbol{E}} \times \widehat{\boldsymbol{H}}^*\right)d\boldsymbol{S} = \iiint_V \gamma\widehat{\boldsymbol{E}}\widehat{\boldsymbol{E}}^* dV - j\omega \iiint_V \left(\mu\widehat{\boldsymbol{H}}\widehat{\boldsymbol{H}}^* - \varepsilon\widehat{\boldsymbol{E}}\widehat{\boldsymbol{E}}^*\right) dV. \tag{4.50}$$

Součin fázoru s jeho komplexně sdruženou hodnotou odpovídá kvadrátu modulu fázoru s označením E_m, popřípadě H_m. Potom lze komplexní rovnici (4.50) rozdělit na:

$$\oiint_{\boldsymbol{S}} Re\left(\widehat{\boldsymbol{E}} \times \widehat{\boldsymbol{H}}^*\right)d\boldsymbol{S} = \iiint_V \gamma E_m^2 dV, \tag{4.51}$$

$$\oiint_{\boldsymbol{S}} Im\left(\widehat{\boldsymbol{E}} \times \widehat{\boldsymbol{H}}^*\right)d\boldsymbol{S} = \omega \iiint_V (\varepsilon E_m^2 - \mu H_m^2) dV, \tag{4.52}$$

kde pravá strana rovnice (4.51) je dvojnásobkem střední hodnoty ztrát vodivými proudy a pravá strana rovnice (4.52) je dvojnásobkem střední hodnoty toku Poyntigova vektoru do definovaného objemu. Odtud lze napsat, že střední hodnota Poyntigova vektoru je:

$$\boldsymbol{S_{Pstř}} = \frac{1}{2}\left(\widehat{\boldsymbol{E}} \times \widehat{\boldsymbol{H}}^{*}\right) \tag{4.53}$$

4.5 Elektromagnetické vlnění ve válcových souřadnicích

V reálném světě velmi často nastává situace, kdy je potřeba řešit chování elektromagnetického pole na válcových předmětech. Je obecně známo, že vektorový počet je nezávislý na zvolené souřadnicové soustavě. Hlavní důvod beztrestného přechodu mezi soustavami, nejčastěji mezi kartézskou souřadnou soustavou a válcovou (cylindrickou), popřípadě kulovou (sférickou), spočívá v obtížnosti řešení dané úlohy. Jinými slovy lze říci, že se použije pro řešení úlohy takový souřadný systém, který je nejpřehlednější a nejjednodušší. V případě válcových předmětů, tedy rotačně symetrických, se nabízí volba válcových souřadnic. Proto zde bude v následujících odstavcích naznačen, nikoli podrobně odvozen, převod z kartézské soustavy do válcové včetně uvedení základních rovnic elektromagnetického vlnění. [10]

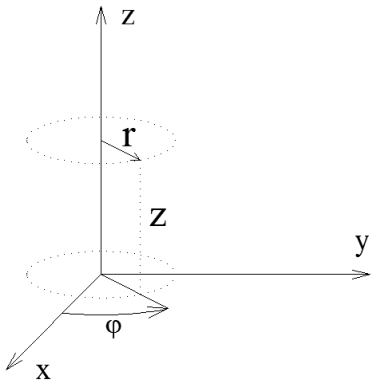
Mezi kartézskými pravoúhlými souřadnicemi a válcovými souřadnicemi platí:

$$\begin{aligned} x &= r\,cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= z, \end{aligned} \tag{4.54}$$

kde *r* [m] je poloměr ve směru polohového vektoru od osy *z*, která je zpravidla ztotožněna s osou rotačně symetrického tělesa,

φ je úhel natočení od osy *x* s orientací dle obrázku 4.2.

V situaci na následujícím obrázku je každý libovolný bod válcové soustavy popsán třemi argumenty, polohovým vektorem, úhlem natočení a souřadnicí z.



Obr. 4.2 Válcová soustava

Při bližší úvaze o tvaru vlnových rovnic je nutné zavést několik předpokladů týkajících se geometrických rozměrů zkoumaného tělesa. Hlavním zjednodušením je teoreticky nekonečná délka, a proto sledované jevy jsou pouze funkcí polohového vektoru. Obecně řečeno pro vektor platí v kartézských souřadnicích:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\,. \tag{4.55}$$

Pro válcový souřadný systém lze napsat:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\,. \tag{4.56}$$

Při platnosti tvrzení vázajícího se na zavedený předpoklad, že jev závisí pouze na *r*, lze po dosazení do již dříve odvozených pro vodivé prostředí ((4.29), (4.30)) napsat:

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial r} = \gamma \mu_0 \mu_r \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \tag{4.57}$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial r} = \gamma \mu_0 \mu_r \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}. \tag{4.58}$$

Skutečný význam, jak již zde bylo řečeno, mají tyto rovnice ve tvaru vyjádřeném pro harmonické pole. Interpretace vztahu (4.29), (4.30) do fázorových veličin nahrazením časové derivace výrazem $j\omega$ je následující:

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial r} = j\omega\gamma \mu_0 \mu_r \widehat{\boldsymbol{H}}, \tag{4.59}$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial r} = j\omega\gamma \mu_0 \mu_r \widehat{\boldsymbol{E}}. \tag{4.60}$$

Jak se v mnoha odborných literaturách uvádí, např. v [1], jsou rovnice (4.59) a (4.60) takzvanými Besselovými funkcemi. Jejich základní tvar s reálnou proměnnou *x* je:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0. \tag{4.61}$$

Rovnice má řešení v podobě vztahu:

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 N_n(x) \tag{4.62}$$

kde C_1 a C_2 jsou integrační konstanty,
$J_n(x)$ je Besselova funkce 1. řádu, *n*-tého řádu proměnné *x*,
$N_n(x)$ je Neumannova funkce (též Besselova 2. řádu), *n*-tého řádu proměnné *x*.

4.6 Rovnice magnetického pole v SW Agros2D

Přesné originální znění parciální diferenciální rovnice magnetického pole softwaru z [14] vybraného pro řešení problému této práce je:

$$curl\left(\frac{1}{\mu}\left(curl\,\underline{\boldsymbol{A}} - \boldsymbol{B}_r\right)\right) - \gamma \boldsymbol{v} \times curl\underline{\boldsymbol{A}} + j\omega\gamma\underline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{J}_{ext} \tag{4.63}$$

kde označení *curl* je anglický symbol pro operátor rotace značený *rot*,
$\boldsymbol{B}_r$ [T] je remanentní složka magnetické indukce,
$curl\,\underline{\boldsymbol{A}}$ [T] magnetická indukce vyjádřená rotací vektoru magnetického potenciálu.

Snahou této podkapitoly je přiblížit rovnici (4.63) k odvozeným rovnicím v předchozích kapitolách a objasnit pojem vektoru magnetického potenciálu $\boldsymbol{A}$ [Wb.m^{-1}].

Magnetický potenciál je, jak je známo, definován jako:

$$\boldsymbol{B} = rot\,\boldsymbol{A}. \tag{4.64}$$

Tento vztah nachází svůj původ ve čtvrté Maxwellově rovnici a vektorové analýze. Díky tomu, že $\boldsymbol{A}$ je vektorová funkce polohy, lze psát:

$$div\ rot\ \boldsymbol{A} = 0, \tag{4.65}$$

k tomu ze čtvrté Maxwellovy rovnice:

$$div\ \boldsymbol{B} = 0, \tag{4.66}$$

zpětně plyne rovnice (4.64).

Magnetický potenciál je spojitý a diferencovatelný, jeho výhoda je v univerzálnosti použití. Rovnice vyjádřené pomocí magnetického potenciálu (vektorovou funkcí) se nutně při řešení dělí na rovnice složkové, což lze považovat za nevýhodu. Vektorový potenciál je funkce nejednoznačná, proto musí být doplněna podmínkou. Lze zvolit podmínku $div\ \boldsymbol{A} = 0$, kterou nazýváme Coulombovou podmínkou.

V rovnici (4.63) je možno spatřit na první pohled rysy zejména první a druhé Maxwellovy rovnice, byť se uplatňují všechny čtyři. V každém členu je skryt vztah pro hustotu proudu. První člen levé strany rovnice (4.63) lze rozepsat jako:

$$rot\ \boldsymbol{H} = rot\left(\mu^{-1}\left(rot\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}_r\right)\right) = \boldsymbol{J}, \tag{4.67}$$

Ve druhém členu rovnice se objevuje vektorový součin rychlosti a magnetické indukce, který by po vynásobení elementárním nábojem odpovídal síle na náboj, pohybující se rychlostí $\boldsymbol{v}$ v magnetickém poli o indukci $\boldsymbol{B}$. Ve znění uvedeném v následujícím vztahu se však jedná vztah odpovídající diferenciálnímu vyjádření Ohmova zákona.

$$\gamma\boldsymbol{v} \times rot\ \boldsymbol{A} = \gamma(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = \gamma\boldsymbol{E}_v = \boldsymbol{J}, \tag{4.68}$$

kde $\boldsymbol{E}_v$ [V.m^{-1}] je část intenzity elektrického pole vyvolaná indukovaným pohybem

Jednoduchou úpravou druhé Maxwellovy rovnice (4.69), se lze opět dostat až k vyjádření Ohmova zákona v diferenciálním tvaru (4.70).

$$rot\ \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} rot\ \boldsymbol{A} \Leftrightarrow \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \tag{4.69}$$

Platí pro takové $\boldsymbol{E}$, které bude podle $-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$ splňovat předchozí rovnici.

$$\gamma\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = j\omega\gamma\widehat{\boldsymbol{A}} = \gamma\boldsymbol{E}_v = \boldsymbol{J} \tag{4.70}$$

5 Numerické metody řešení elektromagnetických úloh

Numerické metody jsou v posledních letech jednou z velkých pomocníků při řešení složitých a zdlouhavých úloh. Tento fakt platí nejen pro úlohy elektrotechnického typu, ale také pro složité úlohy v ostatních odvětví techniky, jako například strojnictví či stavitelství. V okamžiku, kdy není známo přesné analytické řešení problému nebo kdy je postup natolik obtížný, že nelze nabýt jistoty správného a časově efektivního nalezení řešení, což je v reálném světě zcela běžné, je nutné uchýlit se k použití numerických výpočtů. V zásadě jsou známy tři základní metody. Jedná se o metodu konečných diferencí, metodu konečných prvků a metodu hraničních prvků. Jako první se začala používat metoda konečných diferencí (MKD), někdy také známa pod názvem metoda sítí. U této metody bude pouze naznačen princip funkce. Další z uvedených příkladů je metoda konečných prvků (angl. Finite Elements Method), která se dnes těší vysoké oblíbenosti a bude zde přiblížena podrobněji. Odborná literatura pro tuto kapitolu je [10], [12], [13].

5.1 Metoda konečných diferencí

Metoda (MKD) byla poprvé využita na začátku třicátých let 20. století a je považována za nejjednodušší z numerických metod. Její elementární myšlenkou je v řešené úloze popsané neznámým počtem diferenciálních rovnic nahrazení derivací diferencemi. Vykonáním tohoto kroku se přechází ze systému diferenciálních rovnic na systém algebraických rovnic. Pro názornost je zde uveden naznačený postup při řešení úlohy touto metodou, který se skládá ze čtyř základních kroků. Nechť je tedy uvažována dvourozměrná úloha a její definiční oblast Ω je ohraničena křivkou Γ.

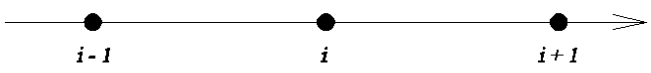
V prvním kroku je oblast Ω pokryta sítí, která je standardně čtvercového tvaru. V jiných případech se může jednat o síť obdélníkovou nebo polární. Ta se používá, je-li řešený problém definován v polárních souřadnicích. Průsečíky čar tvořících síť nazýváme uzly, a v nich se hledají přibližné hodnoty neznámé veličiny. Po rozdělení oblasti Ω například čtvercovou sítí, dochází ke změně hraniční oblasti z hladké křivky na schodovitou křivku tvořenou stranami čtverců sítě, což vnáší do modelu nepřesnost. Velikostí čtverců, tj. jemností sítě lze snížit vytvořenou chybu, která však logicky vyústí nárůstem počtu čtverců v síti ve vyšší výpočetní a časové nároky.

Druhým krokem je nahrazení derivací diferencemi ve všech vnitřních uzlech oblasti Ω. Diference se získávají podílem přibližných hodnot neznámé veličiny řešeného uzlu a jeho sousedních uzlů. Nastávají však i případy uzlů ležících na hranici. Takovýmto uzlům je přiřazena Neumannova okrajová podmínka, jejíž hodnota je také nahrazena přibližným algebraickým výrazem. Dojde-li k případu, že oblast Ω se skládá z více různých prostředí, musí být bodům ležících na rozhraní přidělena podmínka na rozhraní opět v podobě aproximovaného algebraického výrazu.

Následujícím třetím krokem díky provedeným krokům jedna a dvě je vznik souboru zpravidla stovek až tisíců algebraických rovnic. Tento počet závisí na výše uvedené hustotě sítě. Některé softwary, pomocí nichž se řeší tyto úlohy, jsou schopny samy intuitivně měnit hustotu sítě pro zvýšení přesnosti výsledků. Potom je možné hovořit nerovnoměrných sítí, neboť velikosti elementárních segmentů jsou proměnné.

Posledním krokem je vyřešení soustavy algebraických rovnic vhodnou numerickou metodou. Z dosažených hodnot se určují přibližné hodnoty hledaných veličin. [12]

Získávání přibližných aproximací z derivací obecné veličiny lze využitím Taylorovy formule. S využitím následujícího obrázku jsou známy 3 typy diferencí:



Obr. 5.1 Uzly ve směru jedné proměnné [12]

1) Dopředná

$$u_i' = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + 0(h) \tag{5.1}$$

2) Zpětná

$$u_i' = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} + 0(h) \tag{5.2}$$

3) Centrální

$$u_i' = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{h} + 0(h^2). \tag{5.3}$$

5.2 Metoda konečných prvků

Numerická metoda konečných prvků (anglicky Finite Elements method), dále jen MKP patří v současnosti k nejvyužívanějším metodám řešení okrajových úloh, a to zejména díky své schopnosti řešit úlohy s geometricky velmi složitým uspořádáním. Podstata úloh tohoto typu se skrývá v diskretizaci problému, tedy hledání neznámé funkce v určité oblasti se stanovenými hranicemi se nahradí konečným počtem hodnot naleznutých funkcí, kterými se konstruuje výsledek. Jistou výhodou je schopnost řešení sdružených problémů, tj. řešení přítomnosti více fyzikálních polí a jejich interakcí, viz kapitola 6. Hlavním rozdílem MKP oproti MKD je fakt, že u MKP známe funkční hodnotu funkce popisující hledanou veličinu nejen v uzlech sítě, ale i uvnitř konečných elementů (čtverce, trojúhelníky, aj.)

Hlavní podstatou MKP je řešení kupříkladu dvojrozměrné okrajové úlohy popsané funkcí *f (x,y)*. Zjištění funkční hodnoty *f* na definiční oblasti Ω lze splnit na základě variačního principu. Splňují-li funkce *f (x,y)* okrajové podmínky na hranici Γ definované oblasti Ω, pak existuje právě jedna funkce *f*, pro niž má následující funkcionál minimální hodnotu.

$$\mathcal{F}\{f(x,y)\} = \int_\Omega f(x,y)\, dxdy, \tag{5.4}$$

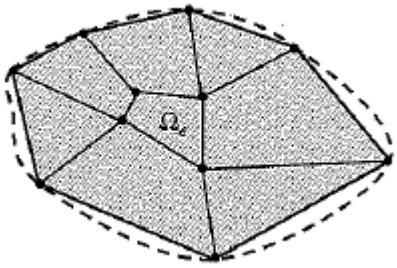
kde označením $\mathcal{F}$ rozumíme veličinu funkcionálu. Ten přiřazuje každé funkci definičního oboru reálné číslo. Existuje-li množina funkcí $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$,…,$f_n(x,y)$, nabývá vztah (5.4) hodnoty $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_n$, přičemž nejnižší hodnota z výsledných funkcionálů odpovídá funkci *f (x,y)*, tz. je řešením dané okrajové úlohy. Numerickou realizací MKP je zobecněná Ritzova-Galerkinova variační metoda.

Podobně jako v předchozím případě metody konečných diferencí lze MKP rozdělit do několika kroků, které vedou k vyřešení úlohy. Je-li vymezena definiční oblast Ω s hranicí Γ poté se provádí triangulace oblasti (obdoba síťování u MKD). Triangulací se rozumí co nejpřesnější požadovaná aproximace oblasti Ω za pomocí trojúhelníků. Pro náhodně vzaté dva trojúhelníky z oblasti Ω musí platit :

- trojúhelníky nemají žádný společný bod
- trojúhelníky mají společný jeden vrchol
- trojúhelníky mají společnou stranu.

Výsledkem výše popsané triangulace je poměrně přesná aproximace oblasti Ω pomocí polygonu. Ideálně by strany elementů měly co nejvěrněji kopírovat hranici Γ. Za uzly soustavy jsou brány uzly trojúhelníkové sítě a jednotlivé trojúhelníky bereme jako konečné elementy, kdy pro každý z těchto trojúhelníků je aproximováno rozložení hledané veličiny (teplota, magnetická indukce, apod.) pomocí Lagrangeovy lineární interpolace.

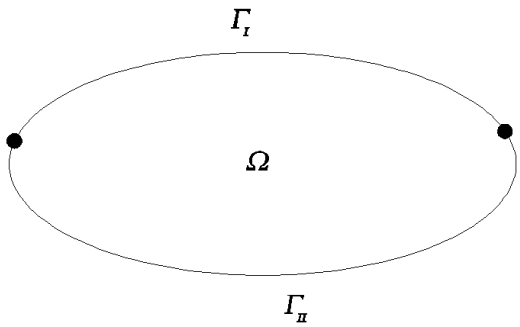
$$f(x,y) = a + bx + cy \tag{5.5}$$



Obr. 5.2 Oblast nahrazená polygonem [13]

Několika dílčími úpravami jsou dopočteny konstanty *a, b, c* ze vztahu (5.5), což ve výsledku přináší znalost hledaných hodnot nejen ve vrcholech, ale i uvnitř trojúhelníků. Následujícími kroky jsou konstrukce funkcionálu a jeho následná minimalizace, což obnáší použití poměrně složitého matematického aparátu. [10]

Zcela obecný princip lze nastínit na okrajové úloze se skalární funkcí, pro níž platí:
$\Omega \cup \Gamma$, kde definiční oblast Ω spadá do R^3 a hranice oblasti $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_I = \Gamma_{II}$. Blíže situaci znázorňuje obrázek 5.3.



Obr. 5.3 Okrajové podmínky a definiční oblast [12]

Za funkci *f* na oblasti Ω považujeme zobecněnou rovnici vedení tepla.

$$-div(\lambda\ grad\ T) = f, \tag{5.6}$$

$$T = g_I \qquad na\ \Gamma_I\ , \tag{5.7}$$

$$-\lambda\frac{\partial T}{\partial n} = g_{II} \qquad na\ \Gamma_{II}\ , \tag{5.8}$$

kde T je funkce proměnných například v kartézských souřadnicích *x,y,z* (R^3).

Jako souřadný systém se může vyskytnout i neméně často používaný cylindrický. Veličina λ je buď zastoupena konstantou nebo funkcí souřadnic, popřípadě funkcí |*grad T*|. Dále *f* může býti konstantou nebo funkcí souřadnic definovaných na oblasti Ω. Proměnná g_I je definována na Γ_I a $\frac{\partial T}{\partial n}$ je derivace ve směru vnější normály k hranici Γ_{II}.

Jak již bylo výše poznamenáné, MKP je možné považovat za úpravu variančních metod. Vynásobíme-li rovnici (5.6) variací funkce T ($v_f = \delta T$), aby platilo $v_f = 0$ na Γ_I dostáváme vztah:

$$-div(\lambda\ grad\ T).v_f = f.v_f\ , \tag{5.9}$$

který po zintegrování přes definiční oblast zní:

$$\int_{\Omega} - div(\lambda\ grad\ T).v_f\ d|\Omega| = \int_{\Omega} f.v_f\ d|\Omega|\ . \tag{5.10}$$

Využitím znalosti o Greenově větě lze vztah (5.10) upravit do následujícího tvaru.

$$\int_{\Omega} - div(\lambda\ grad\ T)\ v_f\ d|\Omega| = \int_{\Omega} p\ grad\ T.grad\ v_f\ d|\Omega| - \int_{\Gamma} \lambda\ \frac{\partial T}{\partial n}\ v\ d|\Gamma| \tag{5.11}$$

S odvoláním na podmínky úlohy platí vztah:

$$\int_{\Gamma} \lambda\ \frac{\partial T}{\partial n}\ v_f\ d|\Gamma| = \int_{\Gamma_I} \lambda\ \frac{\partial T}{\partial n}\ v_f\ d|\Gamma| + \int_{\Gamma_{II}} \lambda\ \frac{\partial T}{\partial n}\ v_f\ d|\Gamma|, \tag{5.12}$$

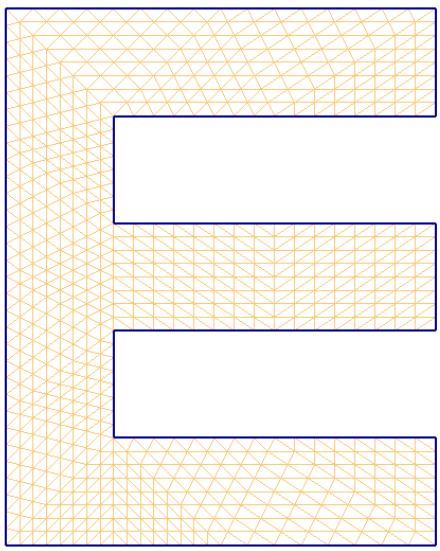
který se však za předpokladu platnosti $v_f = 0$ na Γ_I zjednoduší vypadnutím prvního členu na pravé straně. Poté je možné psát vztah (11) jako:

$$\int_{\Omega} - div(\lambda\ grad\ T)\ v_f\ d|\Omega| = \int_{\Omega} p\ grad\ T.grad\ v_f\ d|\Omega| - \int_{\Gamma_{II}} \lambda\ \frac{\partial T}{\partial n}\ v_f\ d|\Gamma|. \tag{5.13}$$

Nechť pro funkci T na Γ_I platí vztah (5.7) a na $\Omega \cup \Gamma_I$ platí vztah (5.11). Splňuje-li i libovolná funkce v_f vztah (5.7), poté je možné prohlásit funkci T za slabé řešení okrajové úlohy. [12]

5.3 Reálná aplikace FEM

Na uvedeném principu funguje mnoho softwarů řešících nejen elektromagnetické pole. Pro přehled to mohou být pole akustická, tepelná a další. V současné době jsou dostupné produkty jako ANSYS, Maxwell, Agros2D atd. Pro řešení této práce byl zvolen poslední konkrétně jmenovaná aplikace Agros2D, o níž je blíže pojednáno v následující kapitole.



Obr. 5.4 Triangulace geometrie

6 Sdružené úlohy a SW aplikace

6.1 Úvod a definice

Současnost z pohledu energetické náročnosti a dokonalosti transformuje formulaci leckdy jednoduchých problémů do stavu, kdy je velmi náročné takové úkoly řešit. Hlavním důvodem je propojení jednotlivých částí rozsáhlých systémů, které přináší vzájemnou provázanost jak interních procesů, tak procesů probíhajících vně. Vyhodnocování takovýchto problematik nazýváme sdružené úlohy. Kvantifikace fyzikálních polí často může končit i v oblasti, kterou nelze posat známými rovnicemi, a proto dochází k aproximaci skutečnosti.

Sdružené úlohy v sobě ukrývají v drtivé většině obsáhlé soustavy diferenciálních parciálních i běžných rovnic. Tyto soustavy mnohdy popisují nelineární problémy. Z toho titulu se analytické řešení skoro ve 100% vylučuje a je bezpodmínečné nutné aplikovat diskretizaci zvoleného modelu a přistoupit k numerickým metodám. Numerické metody v kombinaci s vysokými výpočtovými procesorovými schopnostmi tvoří silný nástroj umožňující nalézt cesty k úspěšným řešením. Mezi nejpropracovanější metody patří takzvané metody konečných diferencí (MKD – finite difference method), metoda hraničních prvků (MHP – boundary element method), metoda konečných objemů (MKO – finite volume method) a v neposlední řadě metoda konečných prvků (MKP – finite element method), která je použita v této práci. Pro tuto kapitolu je čerpáno ze zdrojů [12], [15], [14].

6.2 Druhy sdružených úloh

Napříč elektroenergetikou a silnoproudou elektrotechnikou existuje několik typických úloh, které lze rozčlenit do několika tříd.

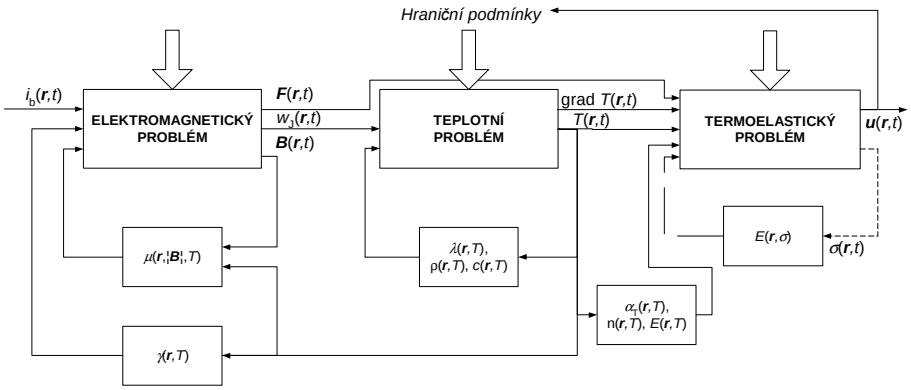
Nejčastěji se pravděpodobně vyskytují úlohy s účastí elektromagnetického a tepelného pole. Pro zlepšení představy se jedná například o řešení oblastí supravodivosti, všech možných ohřevů (odporový, indukční, dielektrický) či záležitosti ohledně permanentních magnetů. Pro tuto práci je nejzajímavějším z uvedeného výčtu indukční ohřev, který je blíže popsán v předchozích kapitolách. Zde prozatím stačí uvést, že rozsah použití indukčního ohřevu je díky stále výkonnějším a levnějším polovodičovým zdrojům rostoucí.

Dalšími typy jsou úlohy za přítomnosti elektromagnetického a silového pole, dále elektromagnetického pole s polem termoelastických deformací či kombinací elektromagnetického, teplotního pole s polem rychlostí. V elektromagnetickém a silovém poli se rozebírají třeba případy namáhání vodičů nebo jiných konstrukčních prvků elektromagnetickými a elektrodynamickými silami (pro úplnost například silový projev zkratu na přípojnici). Zkoumání lisovaných kovových spojů za tepla je typickým zástupcem elektromagnetického pole s polem termoelastickým. Poslední uvedené pole elektromagnetické, tepelné a rychlostní bývá aplikováno při řešení úloh, kde dochází k oteplení a proudění kontinua jako tomu zcela běžně dochází ve výkonových vypínačích VN a VVN.

6.3 Dělení sdružených úloh

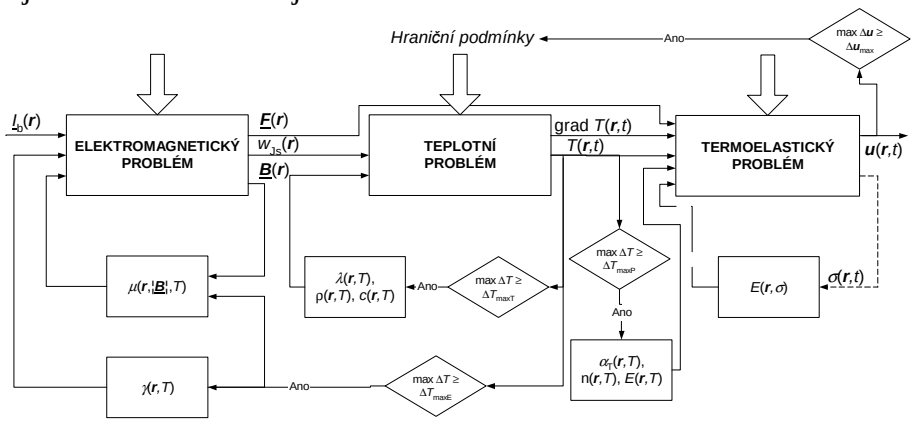
Zcela obecně dělíme sdružené úlohy na tři typy algoritmů a to podle úrovně sdruženosti na silné, kvazi a slabě sdružené. Úroveň, na které se podle vzájemného vztahu úlohy dělí, lze posoudit na základě časových konstant charakterizujících návaznost změn uvažovaných polí.

U silně sdruženého problému působí všechna nestacionární fyzikální pole (u například elektromagneticko-tepelně-termoeleastického pole působí všechny tři), neboť dochází k neustálému, silnému vzájemnému ovlivňování. Při výpočtu se v jednotlivých časových hladinách provede vyhodnocení všech polí, dojde k vyhodnocení, a s novými vstupními hodnotami se výpočet opakuje do doby než je naplněn požadovaný čas působení nebo ukončovací podmínka. Tento typ pole je ze všech tří výpočetně nejnáročnější.



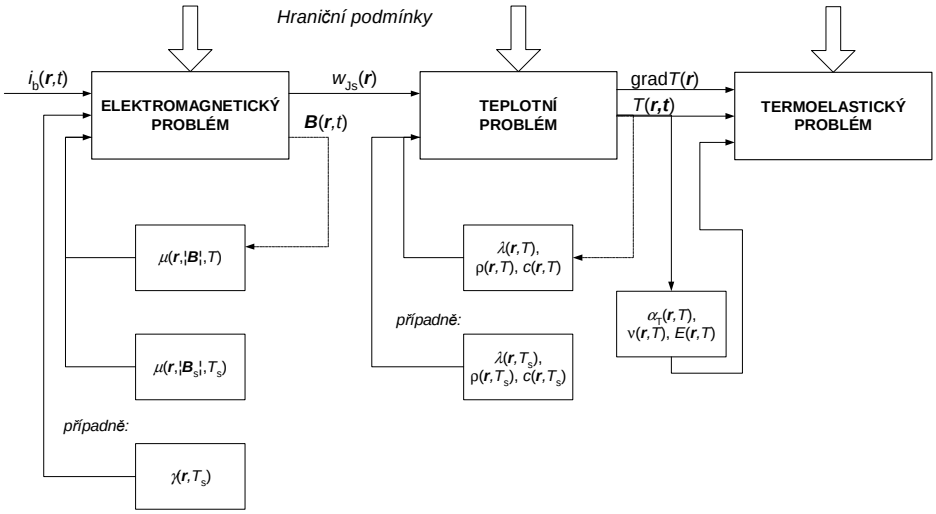
Obr. 6.1 Schéma algoritmu silně sdružené úlohy

Kvazi-sdružený druh úloh je osvobozen oproti výpočtům silně sdruženého o část výpočtů a to proto, že se zjednodušeně řečeno počítají jen některá pole, která fungují jako vstup do jiných polí ve stejném kroku nebo se podle výsledků určitých polí další pole nepočítají, pouze se koriguje jejich hodnota. Schéma algoritmu je uvedeno na následujícím obrázku.



Obr. 6.2 Schéma algoritmu kvazi sdružené úlohy

Slabě sdružená úloha je pravděpodobně nejvyužívanějším typem pro svoji v určitých případech postačující přesnost výsledků a především relativně krátký výpočetní čas. Základní úvahou je za uvedených zjednodušujících předpokladů výpočet zpravidla elektromagnetického pole. Až poté následuje řešení ostatních polí, u kterých se nepředpokládá vzájemné zpětné ovlivňování. Tento jev se označuje jako jednosměrná závislost mezi sdruženými poli, proto hovoříme o slabých vazbách. Tento typ úloh využívá program Agros2D, který bude využit k řešení žíhání materiálu indukčním ohřevem. [12]



Obr. 6.3 Schéma algoritmu slabě sdružené úlohy

6.4 Numerické řešení pomocí SW

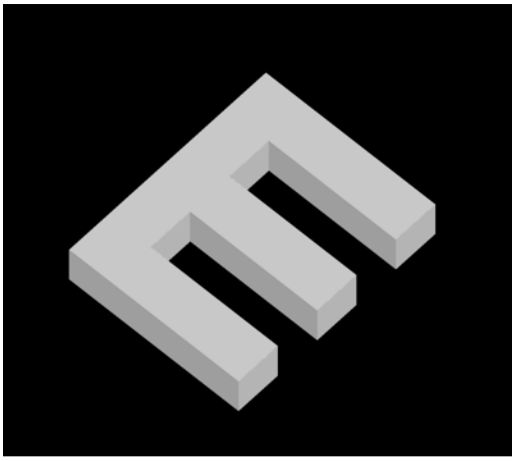
Numerické řešení takto náročného problému, jehož se týká tato práce, je v dnešní době reálné vypočítat v dostupném čase pouze pomocí software. Elementární podmínkou je sestrojení matematického modelu, který řeší požadované fyzikální pole popřípadě jejich kombinaci. Blíže o sdružených úlohách bylo již napsáno výše. Výsledkem numerických modelů jsou rozložení hledaných veličin. Například u sdružené úlohy tepelného a magnetického pole to bude konečné rozložení teploty, magnetické indukce, hustoty energie a mnoho dalšího.

6.4.1 SW Agros2D

Pro splnění zadání této úlohy byla vybrána multiplatformní aplikace Agros 2D. Její zdrojový kód je psán v jazyce C++ s podporou knihovny Hermes2D. Jedná se o knihovnu řešící parciální diferenciální rovnice, která je založená na adaptivní metodě konečných prvků vyššího řádu přesnosti, hp-FEM. Vykreslování geometrie a vypočtených dat zajišťuje knihovna OpenGL. Software Agros2D je vyvíjen na FEL ZČU v Plzni. Program je schopný řešit jednotlivá fyzikální pole ve dvourozměrném kartézském osovém systému a osově symetrickém systému. Nejvýznamnějšími fyzikálními poli, které lze řešit touto aplikací jsou elektrické, magnetické a teplotní pole. Mezi hlavní výhody je možno zařadit jednoduchost, maximální možnou komplexnost a možnost řešení harmonických, ustálených a přechodových jevů. Strukturu aplikace se dělí na takzvaný:

- preprocesor
- procesor
- postprocesor
- editor skriptů.

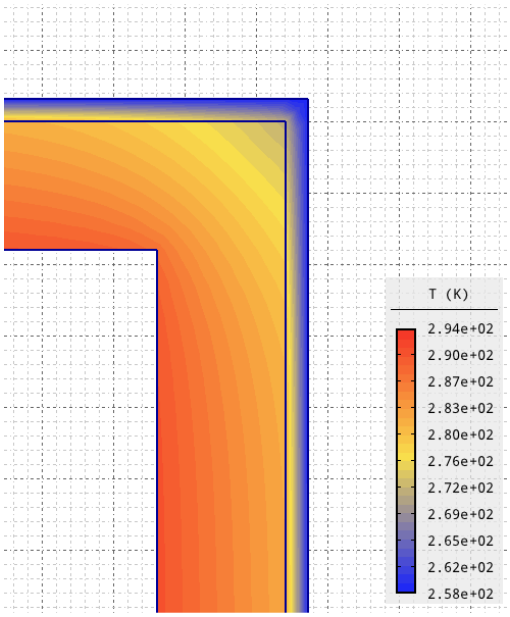
Smyslem části zvané preprocesor je tvorba řešené geometrie, definic jednotlivých materiálů a okrajových podmínek. K realizaci geometrie lze přistupovat dvěma způsoby. Prvním ryze „Agrosovým“ je vytvoření kompletní tvarové koncepce v editoru geometrie, který umožnuje práci s uzly, hranami a oblastmi. Druhou možností je import geometrie z CAD systému ve formátu .dxf.



Obr. 6.4 Zrendrovaná geometrie

Procesor má na starosti dva hlavní úkoly vedoucí ke správnému řešení. V teorii o metodách konečných prvků je uvedeno, že uvažovaná výpočetní oblast Ω musí být rozdělena na jednotlivé elementy, nejčastěji jimi jsou trojúhelníky. Právě modul procesoru tvoří nestrukturovanou trojúhelníkovou síť (triangulaci) pomocí programu Triangle, který je založen na Delaunayho triangulaci. Mimo triangulace se procesor stará o řešení získané soustavy algebraických rovnic. Mohutnost soustavy závisí na jemnosti sítě, která je automaticky regulována podle nároků na přesnost. Toto je projev hp-adaptivity.

Postprocesor lze laicky přirovnat k uživatelskému výstupu, neboť realizuje analýzu vypočtených dat pomocí barevných map či vektorů. Například rozložení magnetické indukce je získáno z vypočtených hodnot magnetického potenciálu. Charakter vypočteného pole lze také zobrazit pomocí povrchových a objemových integrálů (celkový tepelný tok definovanou oblastí). Eventuálním výstupem může být i soubor se všemi dostupnými vypočtenými hodnotami ve formátu .csv.



Obr. 6.5 Příklad výstupu rozložení teploty

Editor skriptů je velmi cennou částí programu. Skripty se píší v jazyce Python, který je snadné implementovat do jazyka, v němž je celá aplikace psána, C++. Význam samotných skriptů nemá smysl blíže popisovat, stačí jen konstatovat, že skripty usnadňují práci při opakujících se úkonech. Existuje možnost vygenerovat kompletní skript z vytvořené úlohy v grafickém prostředí aplikace a následně ho upravovat. Za pomocí skriptu lze upravit model do takové úrovně, kterou nelze z grafického prostředí realizovat.

Mimo Agros2D existuje mnoho dalších produktů řešících fyzikální pole. Do krátkého výčtu lze zařadit například: Maxwell, QuickField, Flux či ANSYS. Jednotlivé aplikace se liší podporou platformy, řešením úrovně sdružených úloh, geometrií (2D, 3D), atd.

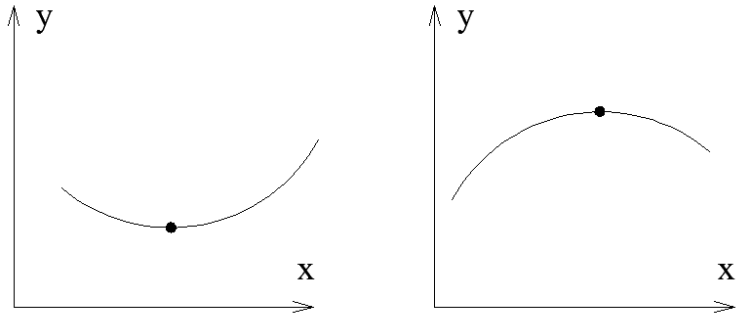
Na závěr této kapitoly s přihlédnutím k řešenému problému je důležité zdůvodnit výběr softwaru Agros2D. V předchozích odstavcích bylo již dosti řečeno o druzích sdružených úloh i principu a výhodách tohoto softwaru. Nejzásadnější skutečností je však fakt, že volně dostupný Agros2D má schopnost sdružovat fyzikální pole. Sdružení polí je v tomto případě nutnou podmínkou pro úspěšné dořešení úlohy. Od prvního okamžiku byl předpoklad použití slabého sdružení polí a to z důvodu postačující přesnosti výpočtů i časových dispozic pro dokončení zadání. Slabé sdružení založené na přednostním výpočtu elektromagnetického pole s následujícím dopočtem pole teplotního vybraný software v plné míře poskytuje. Dalším důvodem této volby je dlouhodobá katederní zkušenost s touto aplikací, potenciální odhalení drobných nedostatků vývojářů či možnost doplnění modelu vytvořeného v grafickém prostředí pomocí skriptu v jazyce Python. [15], [14]

7 Teorie optimalizace

Optimalizace, lépe řečeno optimalizační úloha je považována za druh matematické disciplíny spadající pod odvětví matematické analýzy. Hlavním úkolem je nalézt za definovaných podmínek proměnné takového charakteru, aby účelová (reálná) funkce *f(x)* nabývala minima, popřípadě maxima na zvoleném definičním oboru. Nejčastěji se provádějí optimalizace na konkrétním reálném případě, kterými mohou být například úlohy fyzikálního, ekonomického charakteru a mnohých dalších. Pro představu mohou být základní omezující podmínky formulovány u fyzikálních problémů tak, aby vyřešené zadání nabylo realizovatelné podoby.

Získání základní představy o optimalizaci vyžaduje výklad několika hlavních pojmů a jejich rozdělení. Nejelementárnějším úkonem při tvorby optimalizační úlohy je formulace slovního zadání, požadavků do matematické formy v podobě obecně *n*-rozměrných funkcí (účelová funkce). Obecně tato funkce může na zvolené množině nabývat extrémů, tj. dvou stavů, maxima a minima. Vyskytuje-li se na zvolené množině více než jeden extrém, je funkce prohlášena za multimodární. Jinak mluvíme o funkci unimodární. V návaznosti na minima a maxima funkce rozlišujeme extrémy lokální a globální. Lokální jsou takové, které splňují, že maximum/minimum funkce nabývá na bezprostředním oboustranném okolí. Globální extrém se může vyskytovat na hranicích intervalu, popřípadě může být totožný s lokálním. Mimo extrému se u funkcí sledují inflexní body, tj. body změny polarity křivosti.

Podle výše uvedeného, je nutné určit množinu všech hodnot, na kterých je účelová funkce definována. Volné extrémy jsou charakterizovány tím, že hledání extrémů funkce probíhá na definičním oboru odpovídajícímu celé oblasti R^n nebo v celé oblasti, kde je funkce definována, tj. podmnožině R^n. U hladkých a spojitých funkcí jedné proměnné je dostatečné pro analýzu extrému použít první (rostoucí či klesající charakter) a druhou derivaci funkce (inflexní bod funkce, existuje-li). Literatura pro tuto kapitolu je [16], [17], [18], [19].

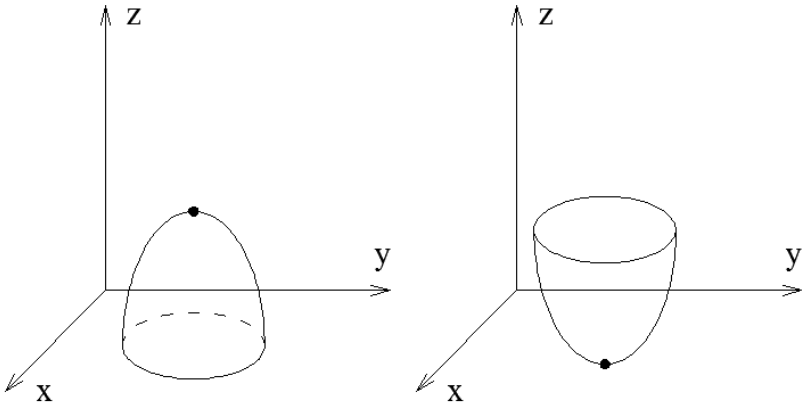


Obr. 7.1 - Minimum a maximum funkce jedné proměnné

U funkcí s více než jednou proměnnou je postup vyšetřování velice podobný, namísto první derivace se používá gradient (směr největšího růstu) (7.1) a druhá derivace je v tomto případě nahrazena tzv. Hessovou maticí (7.2), u které se testuje kladná či záporná definitnost pomocí Sylvestrova kritéria vycházejícího ze subdeterminantů matice. Obdobou inflexního bodu je bod sedlový.

$$grad\ f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \tag{7.1}$$

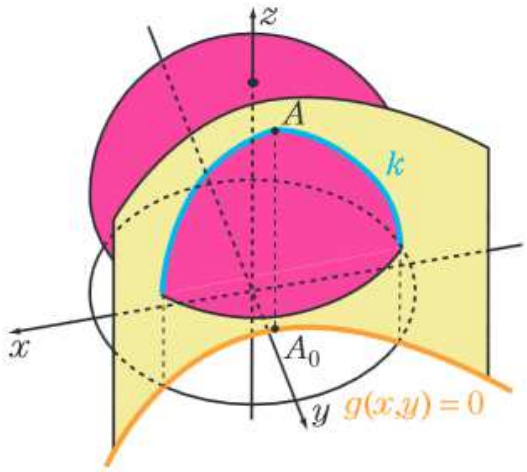
$$H = \nabla^2 f = \Delta f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \tag{7.2}$$



Obr. 7.2 - Maximum a minimum funkce více proměnných

Druhou možností jsou vázané extrémy, u nichž dochází k hledání extrému funkce za přítomnosti omezujících podmínek ve tvaru spojité diferencovatelné funkce *g(x)*. Funkce omezujících podmínek lze dále rozdělit do dvou podkaterogií na funkce typu rovnost a nerovnost. Úlohy typu rovnost se řeší pomocí Lagrangeovy metody jindy řečena jako metoda Langrangeových multiplikátorů. Pro úlohy typu nerovnost je možné použít větu o sedlovém bodě neboli Kuhn-Tuckerovu větu. Podrobné vysvětlení včetně příkladů vázaných extrémů je v [16].

Grafická představa je naznačena na obrázku 7.3, kde lokální extrém funkce *f (x,y)=z* vzhledem k podmínce dané funkcí *g (x,y)= 0* spadá do definičního oboru funkce *f* ležící na křivce *g*, tedy na prostorové křivce *k* vzniklé průnikem vyobrazených ploch.



Obr. 7.3 Vázaný extrém [18]

Optimalizační metody jako celek lze rozřadit do několika kategorií [19]. Jsou jimi:

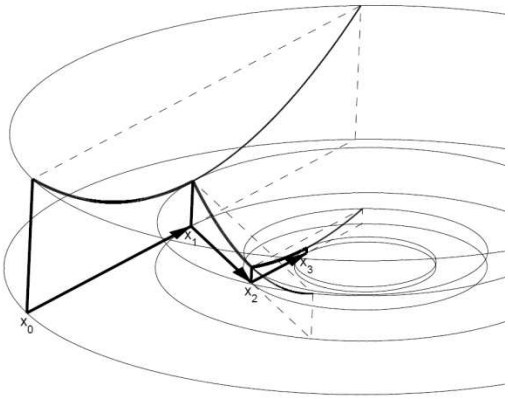
- Analytické metody
  - jedné proměnné – derivace
  - více proměnné – gradienty
- Iterační metody
  - komparativní (Fibonacciho metoda, metoda zlatého řezu, simplexová metoda, aj.)
  - gradientní (metoda největšího spádu, Newtonova metoda, Regula-Falsi metoda, aj.)
  - náhodného vyhledávání (striktně náhodné (jednoduché) metody, adaptivní metody, aj.)
- Speciální metody
  - lineární
  - dynamické
  - konvexní programování.

Analytické metody a jejich způsob řešení jsou nepřímo uvedeny v předchozích odstavcích. Za mnohem důležitější se v dnešní době považují iterační metody. V této práci bude použita jedna z nich a tou bude metoda gradientní (metoda největšího spádu). Z tohoto důvodu zde bude také podrobněji vysvětlena.

Jedná se o základní a nejjednodušší metodu využívající derivaci účelové funkce. Obecný princip je možné naznačit na tzv. spádové metodě, jejímž smyslem je dostat se z bodu x_k co nejblíže k minimu účelové funkce. Volbou správného klesajícího směru $\boldsymbol{d}_k$ na polopřímce $x_k + \lambda \boldsymbol{d}_k$ pro $\lambda \geq 0$ musí být vybrán bod

$$x_{k+1} = x_k + \lambda \boldsymbol{d}_k, \tag{7.3}$$

aby platilo $f(x_{k+1}) < f(x_k)$. Parametr λ_k se běžně nazývá délka kroku. Symbol λ_k je získán minimalizací funkce $\varphi(\lambda) = f(x_k + \lambda \boldsymbol{d}_k)$ pro $\lambda \geq 0$ a její vhodnou jednorozměrnou minimalizací určíme minimum λ_k.



Obr. 7.4 - Spádová metoda

Konkrétně tedy funkce $f(x)$ nejrychleji klesá ve směru záporného gradientu. Z této úvahy lze tedy spádový vektor zadefinovat jako:

$$\boldsymbol{d}_k = -g(x_k), \tag{7.4}$$

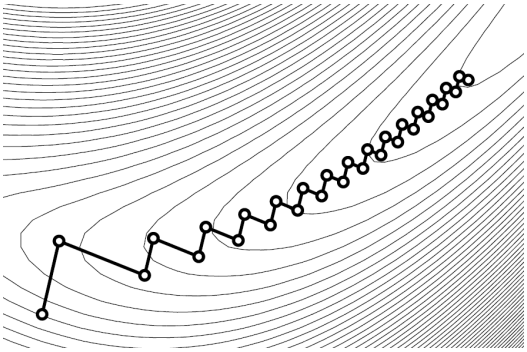
kde

$$g(x) = \nabla f(x). \tag{7.5}$$

Výpočet je ukončen ve chvíli, kdy x_{k+1} je dostatečná aproximace v tolerančním pásmu ε_{tp} minima x (v minimu funkce $g(x)$ je nulový vektor).

$$|g(x_{k+1})| < \varepsilon_{tp} \tag{7.6}$$

Z počátku je konvergence velmi rychlá a s blížícím se minimem její rychlost klesá. Jistou nevýhodou této metody je „cik cak“ efekt zpomalující zmíněnou konvergenci. Ten je znázorněn na následujícím obrázku.



Obr. 7.5 - Cik cak efekt

Ukázkový postup na příkladu funkce $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + xy - x$ s počátečním odhadem $x_0 = 1$ a $y_0 = 2$.

$$-\boldsymbol{g}(x,y) = -\nabla f(x,y) = \boldsymbol{d}(x,y) = \begin{pmatrix} -2x - y + 1 \\ -x - 4y \end{pmatrix} \tag{7.7}$$

Dosazením počátečního odhadu $\boldsymbol{k}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ do směrového vektoru $\boldsymbol{d}$ lze napsat předpis pronásledující krok:

$$\boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{k}_0 + \lambda_0 \boldsymbol{d}_0 = \begin{pmatrix} 1 - 3\lambda_0 \\ 2 - 9\lambda_0 \end{pmatrix}. \tag{7.8}$$

V tuto chvíli je možno přistoupit k sestavení funkce pro získání parametru λ.

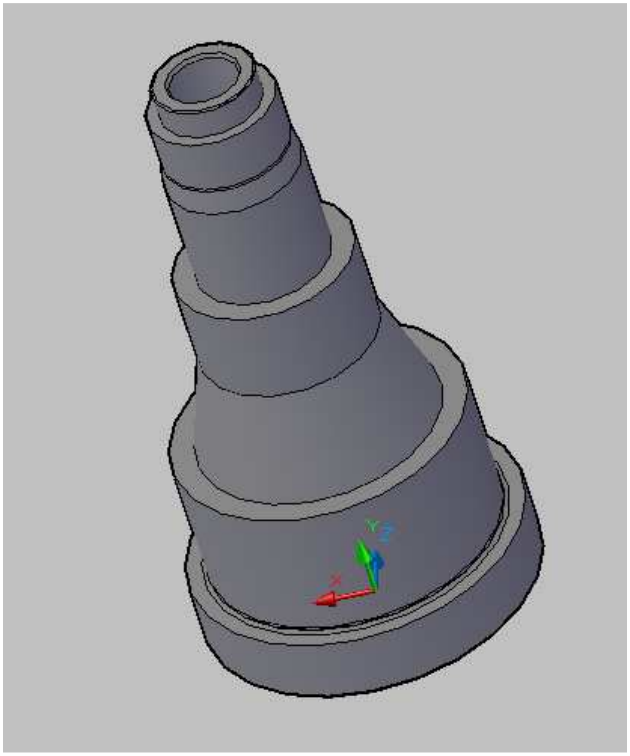
$$\varphi(\lambda) = f(\boldsymbol{k}_0 + \lambda_0 \boldsymbol{d}_0) = 198\lambda^2 - 90\lambda + 10 \tag{7.9}$$

Parametr λ_0 vychází z minimalizace funkce a tudíž lze psát:

$$\varphi'(\lambda_0) = 396\lambda - 90 = 0. \tag{7.10}$$

Dopočtením vztahu (7.10) se $\lambda_0 = 5/22$. Poté se podle vztahu (7.8) dopočítá $\boldsymbol{k}_1$ a pokračuje se ve stejném smyslu dalším cyklem, tj. vypočítá se $\boldsymbol{d}_1$ pomocí $\boldsymbol{k}_1$, napíše předpis pro $\boldsymbol{k}_2$, provede minimalizace $\varphi(\lambda)$ a získá se konkrétní hodnota $\boldsymbol{k}_2$. Tento algoritmus se opakuje do doby než funkce zkonverguje na požadovanou přesnost, tj. dvě po sobě jdoucí hodnoty se liší o méně než zvolená tolerance. [17]

8 Praktická část



Obr. 8.1 Zjednodušená silueta žíhaného dílu

Touto kapitolou přecházím od teoretických úvah ke konkrétnímu praktickému příkladu. Práce vznikala na základě několika časových etap. Mezi první úkony spadal sběr dat v podobě několika měření na zařízení indukčního ohřevu přímo v průmyslové hale společnosti a mimo to také získání geometrie žíhané součásti. Dále se jednalo o vyhodnocení naměřených dat, teoretický popis problému a zavedení teoretických předpokladů, tvorbu prvního modelu pro ověření stanovených tvrzení s realitou, dodatečné úpravy modelu a optimalizace modelu. Konkrétní časový přehled poskytuje tabulka 8.1.

listopad-prosinec 2014	získání geometrie dílu, měření na indukčním zařízení
leden 2015	vyhodnocení naměřených dat
únor - březen 2015	tvorba teoretické části práce
březen 2015	tvorba modelu a úpravy
duben 2015	optimalizace modelu
květen 2015	dokončení práce

Tab. 8.1 Časový plán

Následující struktura kapitol a podkapitol bude odpovídat chronologicky prováděným úkonům při řešení problému tak, jak tomu ve skutečnosti bylo. Přeskočením podrobnějšího popisu návštěvy pracoviště spojené s měřením, sběrem důležitých informací a přesným nakreslením strojního dílu dle poskytnutých výkresů ve studentském prostředí AutoCad 2010, je nutné vyhodnotit reálné materiálové charakteristiky. Podklady ve formě dat pro sestrojení a vyhodnocení jednotlivých závislostí mi byly poskytnuty vedoucím práce, nebo je bylo potřeba nutno co nejlépe odhadnout, popřípadě získat z veřejně dostupných literatur či serverů.

8.1 Vstupní materiálové parametry

Protože je žíhání strojního dílu úzce spojeno se změnou určitých vlastností materiálů vlivem teploty, je pochopitelné, že pro vytvoření modelu věrně zobrazujícího skutečnost, je nutné tyto teplotní závislosti změřit, popřípadě jak je výše uvedeno, co nejpřesněji na základě zkušeností či podobných případů tomuto odhadnout a vyhodnotit. Mezi nejdůležitější byly zařazeny:

- elektromagnetické pole – elektrická vodivost γ a relativní permeabilita μ_r
- teplotní pole – hustota ρ_m, měrná tepelná kapacita c_p, součinitel teplotní vodivosti λ, součinitel přestupu tepla α a emisivita ε.

Jedinou možností, jak zkonstruovat správně fungující model, je nutná znalost všech uvedených parametrů pro každý materiál, který v modelu vystupuje. Elektromagnetické pole zastupuje ocel, měď a vzduch. V případě pole tepelného je možné za určitých předpokladů uvažovat pouze žíhanou ocel, neboť teplota induktoru vyrobeného z mědi je regulována chladící vodou v úzkém pásmu, ve kterém nedochází k zásadním změnám jejích vlastností (v modelu nejsou u induktoru chladící kanály naznačeny, induktor a jeho řešení je zjednodušeno přítomností vhodných podmínek). Dalším důvodem je skutečnost, že induktor není předmětem řešení. Paralelně k tomuto jevu se předpokládá průtok vody takový, že potenciální ohřátí vody průchodem induktoru nemá zásadní vliv na její vlastnosti. Jelikož je dále uvažován neomezený nebo alespoň dostatečně velký vzduchový prostor, nepředpokládá se zásadní změna parametrů okolního vzduchu. Proudění vzduchu uvnitř dílu je bráno jako nucená konvekce. Z uvedených důvodů je možné některým materiálům přisoudit namísto proměnné teplotní závislosti jen konstantní hodnotu sledovaného parametru.

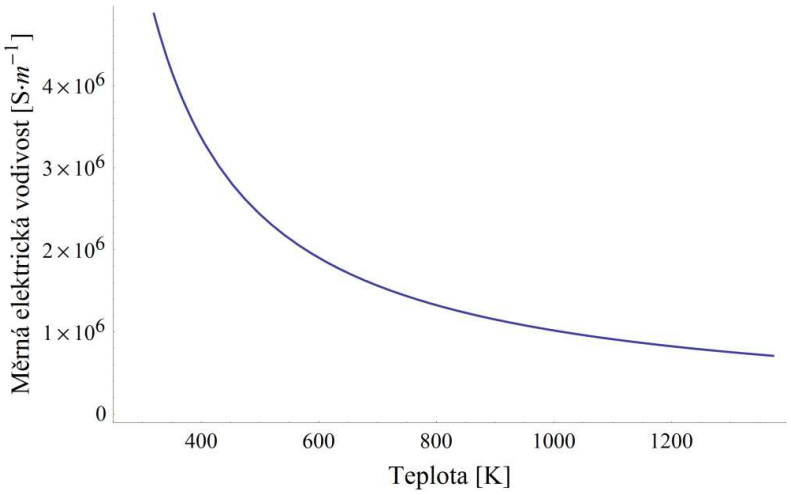
Pro vytvoření a zpracování jednotlivých teplotních závislostí byl použit software Mathematica verze 8.0. Jedná se o matematický software určený pro moderní technické výpočty. Podrobnější informace jsou v [23].

Následující podkapitoly se budou zabývat čistě teplotními závislostmi použité oceli.

8.1.1 Elektrická vodivost

Teplotní závislost elektrické vodivosti má velmi proměnný charakter. Obecně lze říci, že látky s vodivostí $\gamma > 10^6$ [S.m^{-1}] se považují za látky elektricky vodivé. Předpis pro ocel je možné napsat jako:

$$\gamma(T) = \frac{5{,}7.10^6}{\left(1+6{,}5.10^{-3}(T-293{,}15)\right)}. \tag{7.1}$$

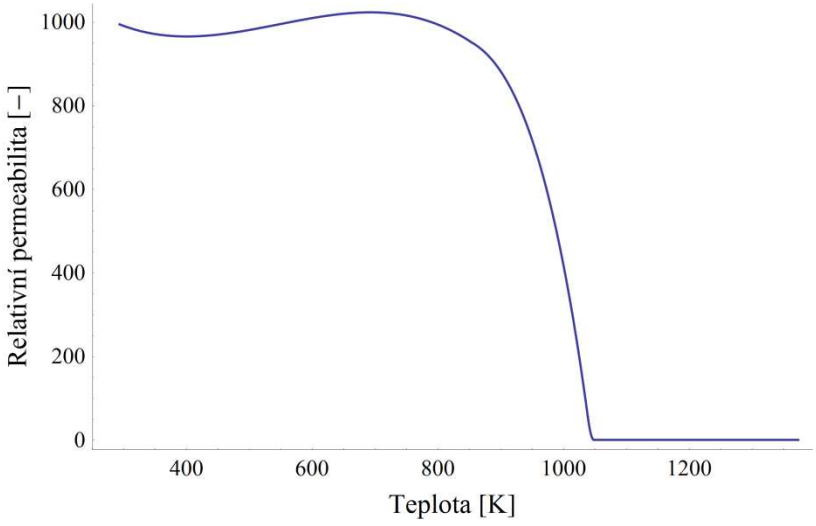


Graf. 8.1 Funkce elektrická vodivosti na teplotě

Funkční předpis pro teplotní změnu vodivosti vychází z obecně známého a platného vztahu závislosti rezistivity na teplotě, $\rho = \rho_{20}(1 + \alpha\Delta T)$. Převrácením a použitím hodnot $\rho_{20} = 1{,}75.10^{-7}$[Ω.m], $\alpha = 6{,}5.10^{-3}$[K^{-1}] vznikl vztah (7.1). Velikosti hodnot parametrů odpovídají přibližným hodnotám vyskytujícím se na běžně dostupných webech.

8.1.2 Relativní permeabilita

Z poskytnutých dat přímo od společnosti prostřednictvím vedoucího práce, je možné ocel, ze které je strojní díl vyroben, zařadit mezi feromagnetické materiály. Tato vlastnost se přibližně v okolí teploty 1050 K zásadně mění. Feromagnetické vlastnosti se vytrácí a hodnota relativní permeability je rovna jedné. Proto lze usoudit, že hodnota Curieho teploty této oceli je v uvedeném okolí 1050 K.



Graf. 8.2 Funkce relativní permeability na teplotě

Výsledný průběh je složen z několika funkcí, které nabývají svou platnost v určitých intervalech.

$$\mu_r(T) = 1008{,}3 - 0{,}7405(T - 273{,}15) + 0{,}0038(T - 273{,}15)^2 - 4{,}6318.10^{-6}(T - 273{,}15)^3$$
$$na\ T \in \langle 273{,}15; 853{,}15) \quad (7.2)$$

$$\mu_r(T) = 460{,}146 + 0{,}8988(T - 273{,}15) + 1{,}2253.10^{-6}(T - 273{,}15)^3 - 1{,}1701.10^{-12}(T - 273{,}15)^5 -$$
$$-8{,}6853.10^{-18}(T - 273{,}15)^7\ na\ T \in \langle 853{,}15; 1038{,}15) \quad (7.3)$$

$$\mu_r(T) = 63571{,}1 - 15{,}8655(T - 273{,}15) - 0{,}0847(T - 273{,}15)^2 - 0{,}00011(T - 273{,}15)^3 -$$
$$-3{,}6802.10^{-8}(T - 273{,}15)^4 + 2{,}3005.10^{-10}(T - 273{,}15)^5\ na\ T \in \langle 1038{,}15; 1048{,}15) \quad (7.4)$$

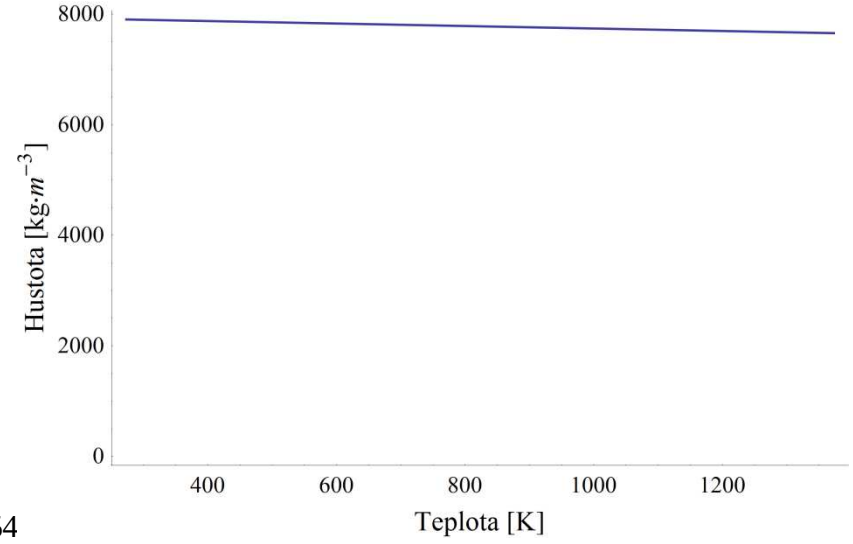
$$\mu_r(T) = 1\ na\ T \geq 1048{,}15 \quad (7.5)$$

Záložním řešením pro zjištění magnetických vlastností transformátoru byla výroba vlastního toroidního transformátoru navinutém na jádře ze stejné oceli jako jsou strojní díly. Měření naprázdno na tomto transformátoru, tj. závislosti $U_{20} = f(I_{10})$, za předpokladu, že nedochází k rozptylu magnetického toku do okolí (činitel vazby $k = 1$), odpovídá magnetizační charakteristice $B = f(H)$. Odtud je možné zjistit permeabilitu materiálu. Konstrukčně složitější je však zjistit tuto závislost pro různé, zejména vyšší teploty.

8.1.3 Hustota

Hustota je další typickým údajem o materiálech. V případě teplotní závislosti hustoty oceli jsem vycházel ze dvou nalezených hodnot hustoty pro různé teploty. Teplotní závislost je tedy lineárně klesající funkcí.

$$\rho_m(T) = 7904{,}24 - 0{,}225(T - 273{,}15) \quad (7.5)$$



6554

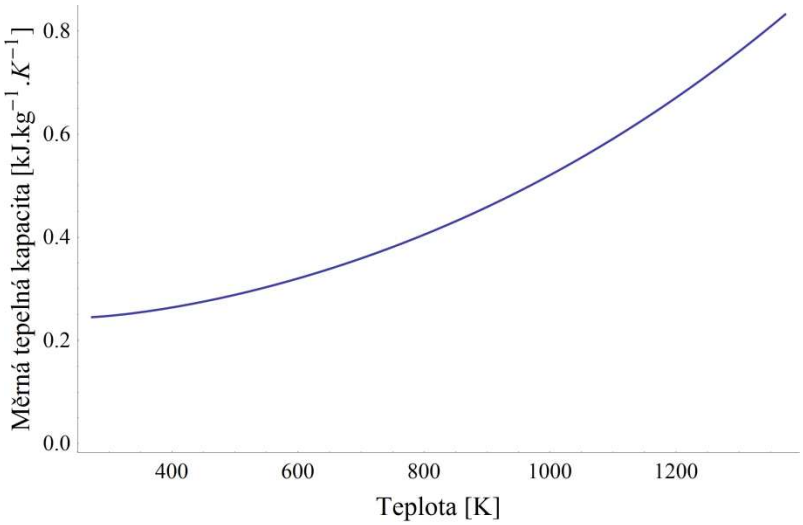
Graf. 8.3 Funkce hustoty na teplotě

Křivka vzniklá proložením dvou získaných bodů od vedoucího práce polynomem prvního stupně představuje teplotní závislost hustoty oceli.

8.1.4 Měrná tepelná kapacita

Jedná se o jednu z dalších závislostí poskytnutých přímo společností. Chápeme ji jako velikost energie potřebné k ohřátí jednoho kilogramu látky o jeden Kelvin. Předpis pro teplotní závislost měrné tepelné kapacity je:

$$c_p(T) = 2326\left(0{,}3241 + 3{,}038.10^{-6}\left(32 + \frac{9}{5}(T - 273{,}15)\right)^{1{,}5}\right)^2 \tag{7.6}$$

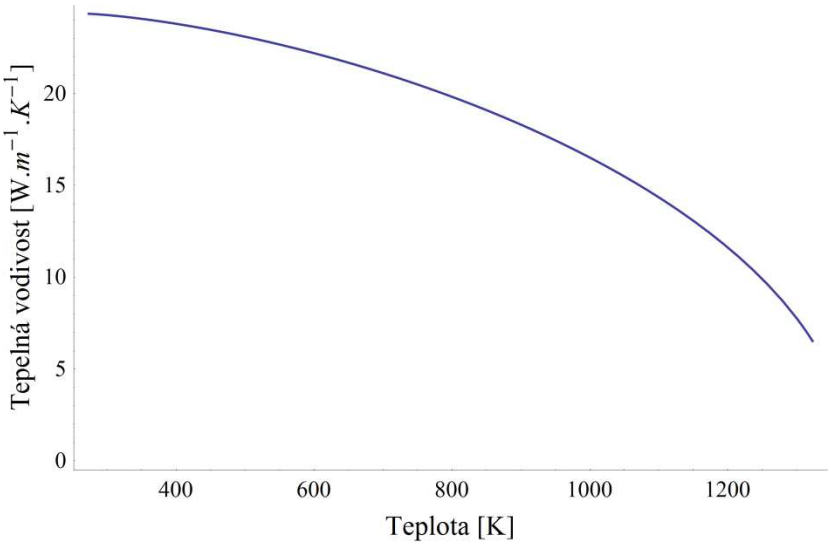


Graf. 8.4 Funkce měrné tepelné kapacity na teplotě

8.1.5 Součinitel tepelné vodivosti

Velmi důležitým parametrem pro teplotní pole je právě závislost součinitele teplotní vodivosti na teplotě. Vztah mezi součinitelem λ a T spadá také mezi dodané podklady společností.

$$\lambda(T) = 0{,}9606\left(643{,}71 - 0{,}007092\left(32 + \frac{9}{5}(T - 273{,}15)\right)^{1{,}5}\right)^{0{,}5} \tag{7.7}$$



Graf. 8.5 Funkce tepelné vodivosti na teplotě

8.1.6 Součinitel přestupu tepla

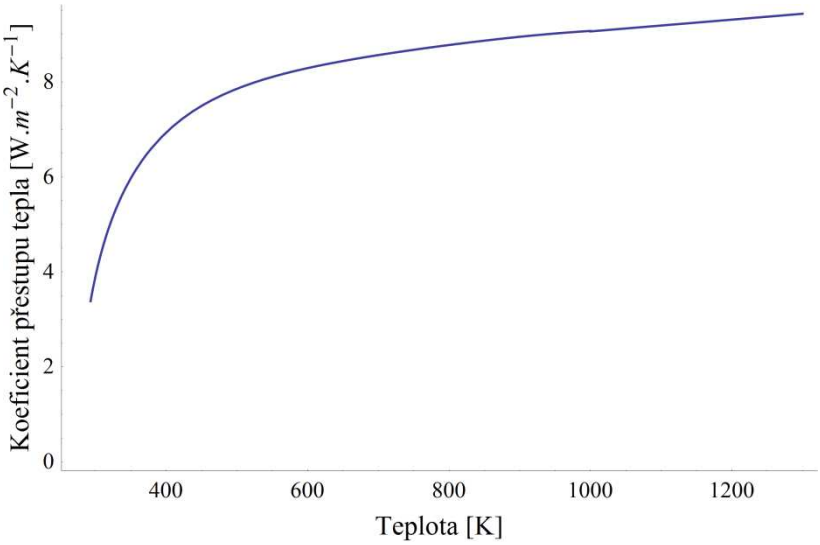
Při získávání této závislosti jsem vycházel z literatury [20], kde je podrobně proveden výklad získání koeficientu přestupu tepla pro všechny případy, které se zde nachází. V případě této práce se objevují dvě varianty šíření tepla konvenkcí. První a jednodušší na vyhodnocení je volné proudění do neomezeného prostoru, které je přítomno z vnější strany žíhaného dílu i induktoru. Druhým typem šíření konvekce je takzvané nucené proudění, pro které je oproti volnému proudění do neomezeného prostoru typický značně vyšší koeficient přestupu tepla.

Základem pro získání součinitele α volného proudění do neomezeného prostoru je nutný výpočet tří podobnostních čísel. Jsou jimi Grashofovo, Pradtlovo a Nusseltovo číslo. Pro jednotlivá konkrétní podobnostní čísla je nutná znalost jistých materiálových vlastností, jako jsou například kinematická viskozita, hustota, měrná tepelná kapacita aj., [22]. Za charakteristiký rozměr (ve směru gravitačního pole) jsem zvolil vzhledem k tvaru součásti a k místu, které je tepelně namáháno, spodní část dílu z obrázku 8.1. Velikost charakteristického rozměru je d_{char} = 130 mm.

Podobně jako v případě teplotní závislosti relativní permeability je výsledný průběh složen ze dvou funkcí platných na určitých intervalech.

$$\alpha(T) = -0{,}0828 + 1{,}1276(T - 273{,}15)^{0{,}5} - 0{,}0422(T - 273{,}15) + 0{,}0027.10^{-2}(T - 273{,}15)^2 - \\ -1{,}1082.10^{-8}(T - 273{,}15)^3 \; na \; T \in \langle 273{,}15; 1000) \tag{7.8}$$

$$\alpha(T) = 8.1616 + 0{,}001239(T - 273{,}15) \; na \; T \geq 1000 \tag{7.9}$$



Graf. 8.6 Funkce koeficientu přestupu tepla na teplotě

Na vnitřní straně dílu nelze v zásadě hovořit o volné konvekci do neomezeného prostoru. Jedná se totiž o prostor omezený, ve kterém dochází vlivem rozdílu teplot vzduchu (popřípadě jeho vlhkosti) na spodní a horní části dílu k takzvanému komínovému efektu. S narůstajícím rozdílem teplot roste rozdíl hustoty vzduchu (vztlak) a komínový efekt sílí, koeficient přestupu tepla roste. Z tohoto důvodu v této práci předpokládám proudění nucené. S výše popsanou druhou variantou je situace na určení koeficientu přestupu tepla komplikovanější, neboť ani během jednoho měření nedošlo ke zjištění teploty na spodní a vrchní části dílu. Nebyla zjištěna ani celková rychlost proudění, která se běžně měří pomocí aneometru. Znalost rychlosti proudění je důležitým vstupem pro zisk Reynoldsova čísla, které vypovídá o typu proudění. Vztahy v oblasti nuceného proudění jsou téměř vždy empirického původu. I zde se podobně jako u volné konvekce do neomezeného prostoru mimo *Re* objevují podobnostní čísla *Gr*, *Pr*, *Nu*, viz [20]. Z výše popsaných důvodů jsem vzhledem ke konstrukčnímu uspořádání vnitřní strany dílu zvolil fixní hodnoty koeficientu přestupu tepla, a to v reálných velikostech od 20 do 30 $W.m^{-2}.K^{-1}$.

Při podrobnějších výpočtech lze uplatnit některé úvahy z [21], kde se říká, že za určitých okolností je možné některé parametry dopočítat či téměř beztrestně zanedbat. Například je-li tlaková ztráta odpovídající rozdílu p_1-p_2 před a za otvorem menší než 5000 Pa, je možné zanedbat změnu hustoty. Dále lze při uplatnění předpokladu značného rozdílu velikosti vstupního a výstupního otvoru považovat vtokovou rychlost v_1 za nulovou. Z Bernoulliho rovnice:

$$p_1 + \frac{v_1^2}{2}\rho = p_2 + \frac{v_2^2}{2}\rho + p_z, \tag{7.10}$$

kde p_1, p_2 [Pa] je tlak před a za otvorem,
v_1, v_2 [m.s^{-1}] vtoková a výtoková rychlost,
ρ [kg.m^{-3}] hustota tekutiny (plynu),
p_z [Pa] místní tlaková ztráta,

$$p_z = \xi \frac{v_2^2}{2}\rho, \tag{7.11}$$

je poté možno dopočítat výtokovou rychlost v_2.

8.1.7 Emisivita

Posledním zmíněným parametrem ve výčtu závislostí teplotního pole byla právě zmíněná emisivita. Z provedených měření termokamerou a laserovým měřičem teploty vyšlo najevo, že změna emisivity od hodnoty $\varepsilon = 0{,}8$ s rostoucí teplotou je natolik malá, že nemá žádný vliv na přesnost modelu. Kalibrace termokamery byla provedena dle laserového měřiče teploty za ustálené teploty tělesa. Správná hodnota emisivity odpovídala okamžiku shodě teplot na laserovém měřiči a termokameře při ručním nastavení hodnoty ε.

8.1.8 Přehled ostatních materiálových veličin

V úvodním odstavci kapitoly 8.1 jsou popsány předpoklady a zjednodušení, se kterými se v modelu počítá. Z textu přímo vyplývá, že na první pohled se namísto funkčních závislostí používají konstantní hodnoty vlastností jednotlivých materiálů. Přehled je uveden v následujících tabulkách 7.2 a 7.3.

Magnetické pole

	Konduktivita γ[S.m^{-1}]	Permeabilita μ_r [H.m^{-1}]
Měď	5,6 . 10^7	1
Vzduch	0	1
Voda	0	1

Tab. 8.2 Parametry materiálů pro magnetické pole

Teplotní pole - uvedené hodnoty jsou jen informativní, nejsou v modelu použity. A to z toho důvodu, že nejsou předmětem řešení. Dále by zbytečným zesložitěním negativním způsobem ovlivňovaly délku řešení.

	Hustota ρ [kg.m^{-3}]	Měrná tepelná kapacita c_p [J.kg^{-1}.K^{-1}]	Součinitel tepelné vodivosti λ [W.m^{-1}.K^{-1}]
Měď	8900	390	393
Vzduch	1	1000	0,035
Voda	1000	4200	0,65

Tab. 8.3 Parametry materiálů pro tepelné pole

8.2 Naměřené funkční závislosti

Z několika návštěv pracoviště indukčního zařízení, během kterých proběhly série měření na stejném strojním dílu, vzešly celkem čtyři časové závislosti. Jedná se o funkce proudu, výkonu, frekvence a teploty. Časové průběhy uvedených parametrů jsou bezpodmínečně nutné pro správné sestrojení modelu a ověření jeho shodnosti s realitou. Ve své podstatě lze prohlásit, že zjištěné průběhy jednotlivých veličin jsou čistě výsledkem kombinace volby parametrů na elektronicky regulovaném zdroji indukčního zařízení a materiálovými vlastnostmi ohřívané součásti. Veškeré použité podklady, tj. výsledky měření jsou umístěny v závěru této práce v příloze.

8.2.1 Teplota

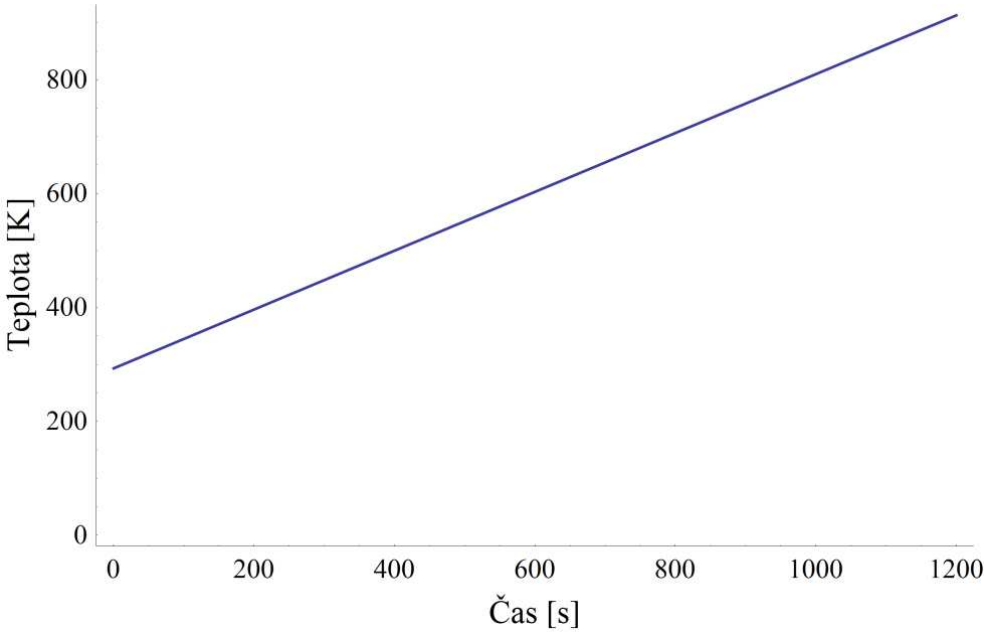
První naměřenou veličinou je teplota. Měření teploty na pracovišti je řešeno laserovým teploměrem namířeným na prostřední svár z pěti celkových.

Obr. 8.2 Skutečná podoba svárů před žíháním

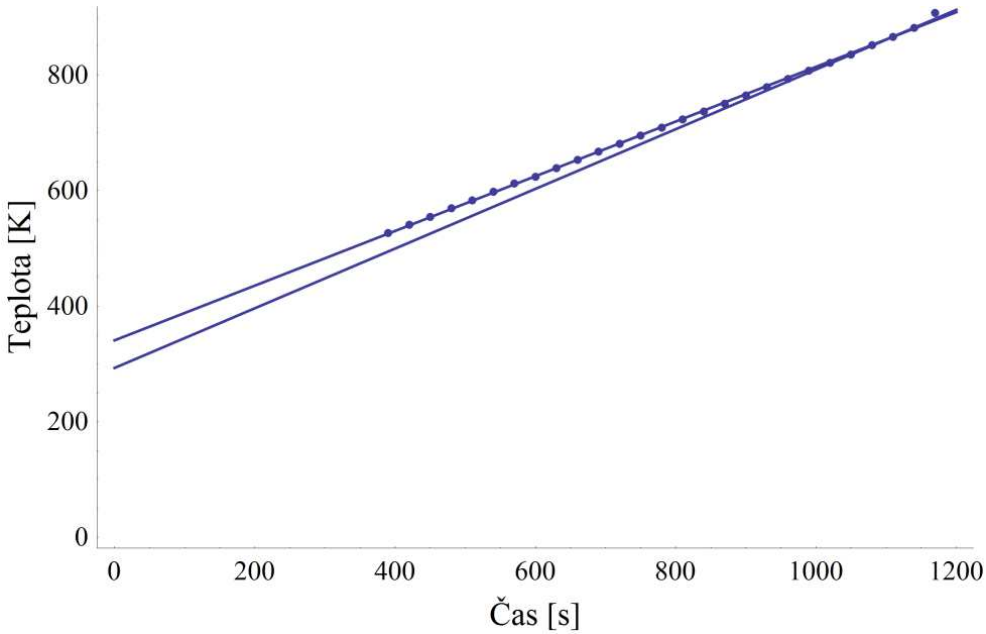
Laserový teploměr je schopný měřit teplotu bezkontaktně přibližně až od 520 K, což mi zatemňuje známost časového průběhu teploty od teploty počáteční, cca 295 K. Z jednotlivých naměřených bodů je možné usoudit, že se jedná o lineární závislost (nevylučuje se, že skutečností je v nezměřeném úseku jiný než lineární průběh teploty). Přímé proložení zjištěných bodů by určovalo počáteční teplotu okolo 340 K (cca 67 °C), což jistě není pravda, neboť se s dílem ručně manipulovalo bez speciálních pracovně ochranných pomůcek. Z uvedeného důvodu byl lineární průběh upraven tak, aby počáteční teplota dosahovala přibližně zmíněných 295 K (vnitřní teplota haly). Úpravou funkčního předpisu pro teplotu nedošlo k zásadním změnám, upravený průběh se proti originálnímu lišil v hraničním případě o 30 K. Po úpravě je časovou funkcí teploty následující vztah:

$$T(t) = 293{,}15 + 0{,}5166t. \tag{7.10}$$

Znalost vývoje teploty v čase je pro tuto úlohu zásadním parametrem, neboť pro správný proces vyžíhání je potřeba dodržet v mezích dovolené tolerance korektní náběh teploty a její konečnou maximální hodnotu. Jde tedy ve skutečnosti o regulaci na stanovenou teplotu. Teplota v daný okamžik je ve výsledku zpětnou vazbou pro regulační člen zdroje indukční stanice, což se samozřejmě projeví v proměnnosti frekvence, výkonu i proudu. Pro reálnou představu jsou vyobrazeny následující dva grafy, první z nich odpovídá průběhu použitému v modelu a druhý znázorňuje výše popsanou situaci s korekcí.



Graf. 8.7 Upravená použitá závislost dle předpisu (7.10)

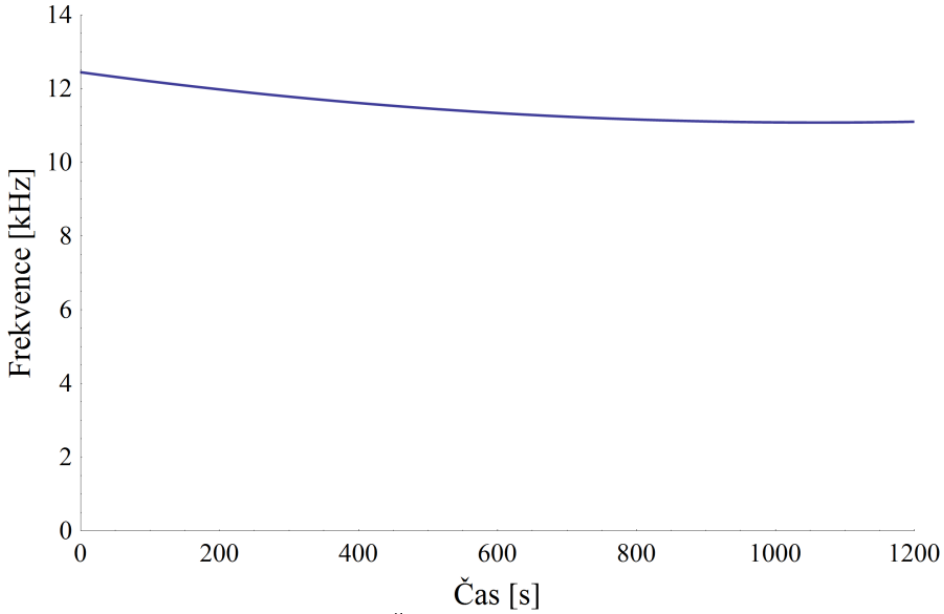


Graf. 8.8 Průběh před a po korekci

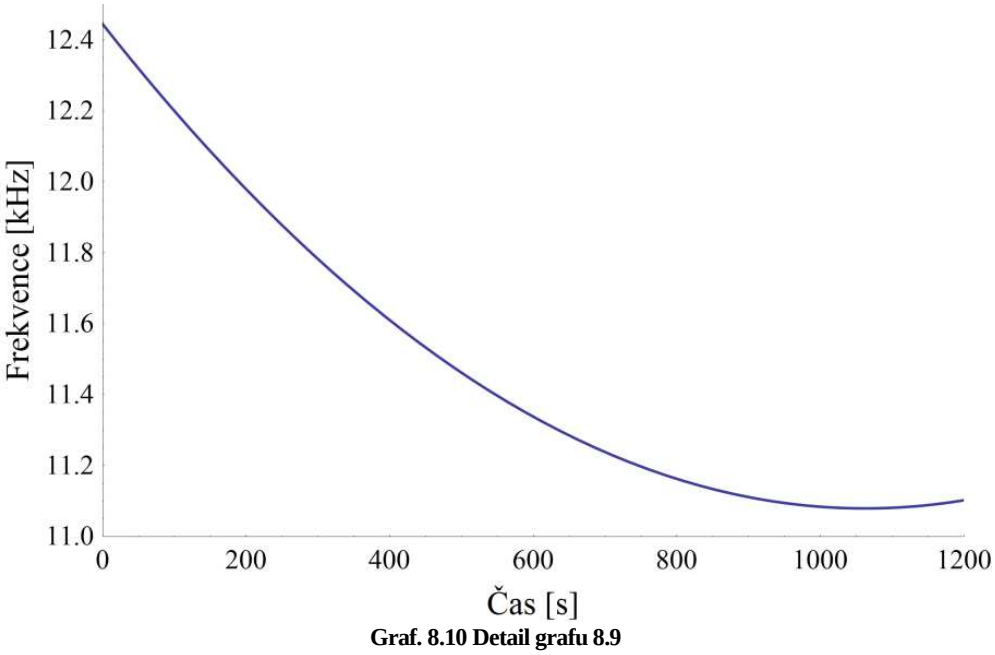
8.2.2 Frekvence

Frekvence je jedním ze stěžejních parametrů, neboť její velikost zásadně ovlivňuje hloubku vniku, ve kterém jako veličina vystupuje. Z tohoto důvodu je velmi výhodné použít konstantní hodnotu frekvence, aby se hloubka vniku neměnila a vznikla stálost ostatních parametrů. Zvolená hodnota se nacházela na úrovni přibližně 12 kHz. Lze tedy potvrdit skutečnost, že zdroj indukčního zařízení je středofrekvenční měnič. Během dvacetiminutového měření se frekvence zdroje pohybovala v rozmezí 1,6 kHz. Podle grafu 7.9 je možné s jistou tolerancí prohlásit, že frekvence je udržována téměř konstantní.

$$f(t) = 12{,}444 - 0{,}0257t + 1{,}21.10^{-6}t^2 \tag{7.11}$$



Graf. 8.9 Časová závislost frekvence

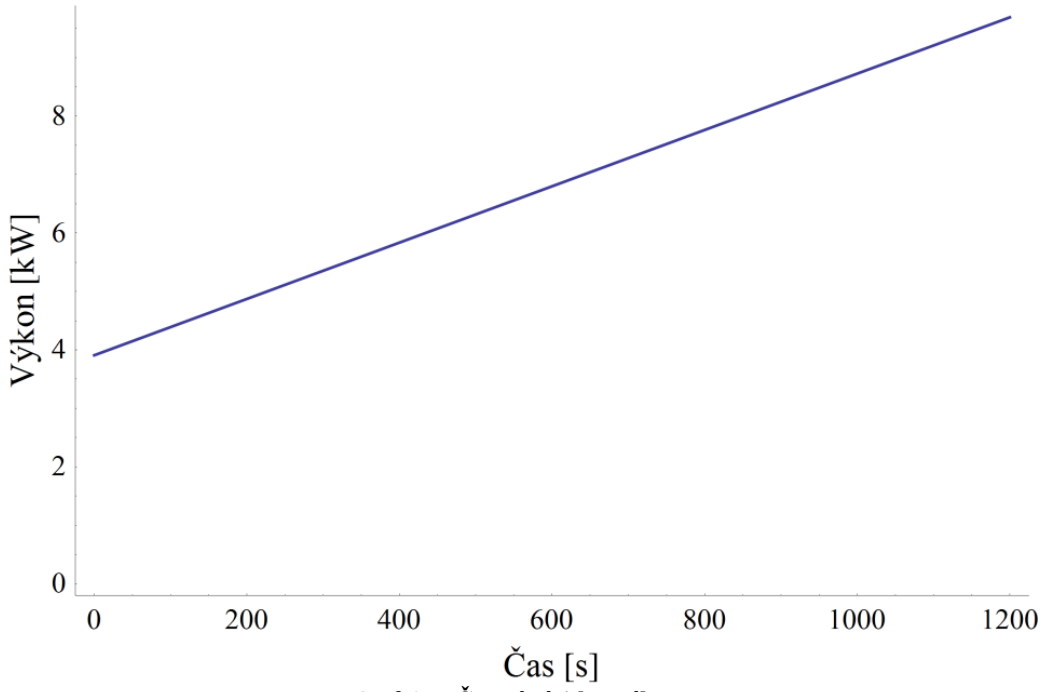


Graf. 8.10 Detail grafu 8.9

8.2.3 Výkon

Závislost výkonu na čase je důležitou časovou závislostí pro realizaci modelu, a to z důvodu povědomí o reálných velikostech tepelných výkonů ve vsázce i induktoru. Jak bude dále popsáno, po delších úvahách a mnoha pokusech na připraveném modelu naměřený výkon bohužel neodpovídá přímo elektrickému výkonu v induktoru, který by se za jistých předpokladů v celé své velikosti dal prohlásit za výkon tepelný. Pořízený průběh výkonu odpovídá zcela jistě vstupnímu výkonu celého zařízení, tj. i zdroje, který pracuje s definovanou účinností. Předpis pro funkci výkonu je:

$$P(t) = 3{,}9084 + 0{,}004819t. \tag{7.12}$$



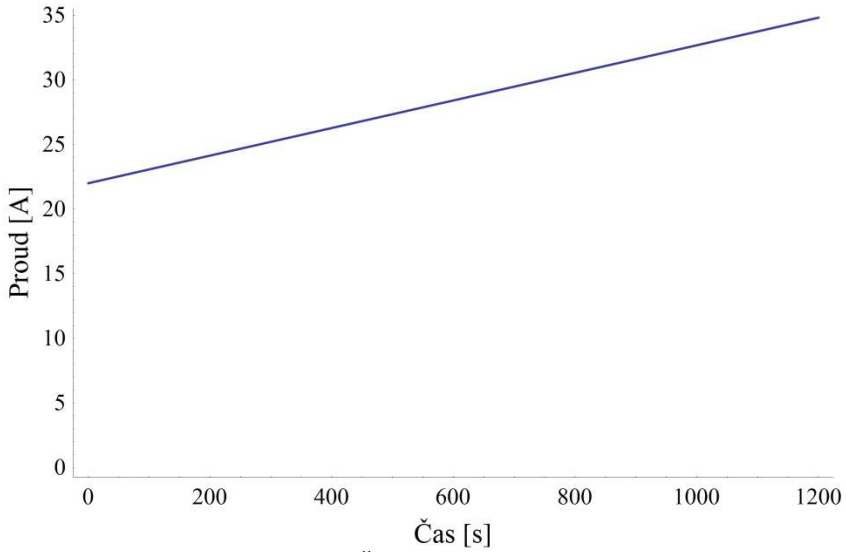
Graf. 8.11 Časová závislost výkonu

8.2.4 Proud

Obdobná situace, jako v případě výkonu, nastává i s proudem. Přímá neznalost skutečné časové závislosti proudu v induktoru vnesla do tvorby a vyladění modelu poměrně komplikace. I zde platí, že odečtené hodnoty proudu během měření jsou hodnoty na vstupu celého zařízení. Tento závěr plyne ze zjištěných hodnot řádově o velikostech 20 až 30 A, které by mimo jiné mohly přibližně korespondovat s měřeným výkonem. Takové hodnoty proudu jsou pro indukční ohřev až nezvykle nízké. Z tohoto titulu je nutností z modelu zpětně získat představu o možném skutečném průběhu proudu induktorem.

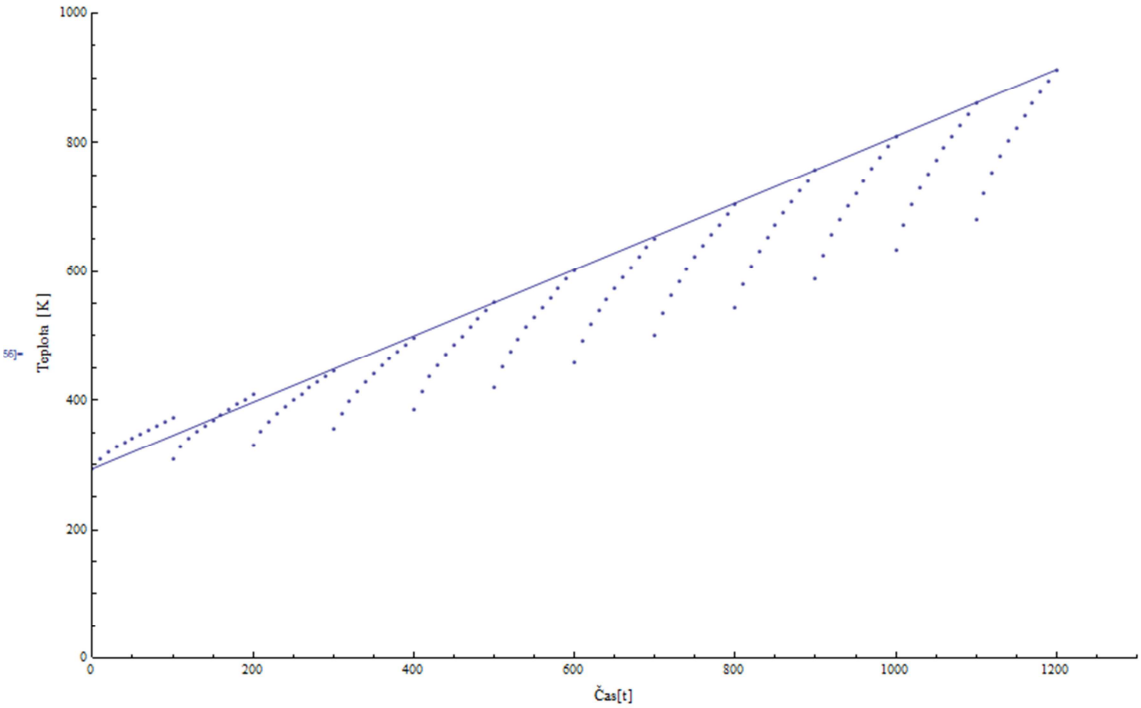
Výsledný funkční vztah a graf pro naměřený proud je:

$$I(t) = 22{,}0085 + 0{,}01067t \tag{7.13}$$



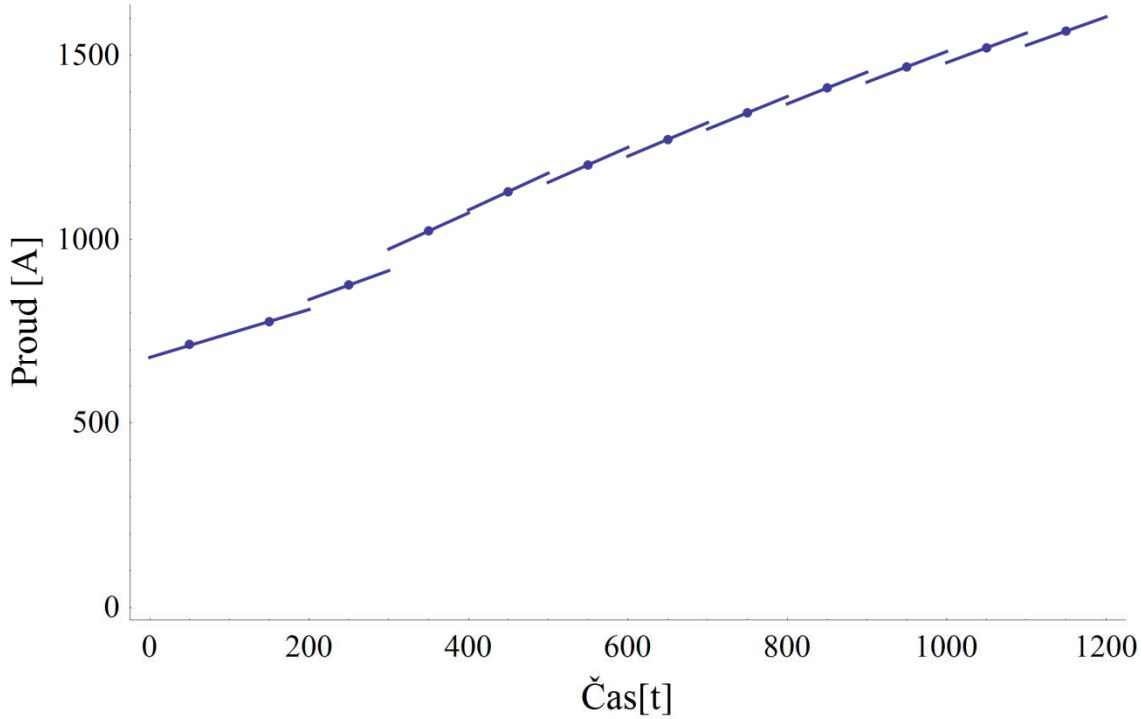
Graf. 8.12 Časová závislost proudu

Hlavní pointou naleznutí dostatečně přesné aproximace skutečného proudu je dodržení nárůstu teploty v čase v pozorovaném bodě za předpokladu platnosti všech uvedených naměřených i materiálových závislostí. Při prvních pokusech zjišťování řádových velikostí proudu induktoru byly voleny konstantní hodnoty, přičemž bylo zprvu jasné i z naměřených závislostí, že se bude jednat o časově proměnnou hodnotu. Jedinou možností, jak rozumně získat průběh proudu je rozdělit si 1200 sekundový interval na menší časové úseky a v nich postupně vždy s návazností na předchozí (problematika počátečních podmínek) hledat takový průběh proudu, aby odpovídal správnému růstu teploty na čase. Názornou ukázkou je graf 8.13.



Graf. 8.13 Vztah teplot a proudů

V tomto konkrétním případě byl celkový interval rozdělen na 12 časových úseků, v nichž se, jak je výše předesláno, hledal konkrétní proud takový, aby vždy na konci daného intervalu bylo dosaženo teploty odpovídající teplotě naměřené. Pro mnoho provedených zkušebních simulací a jednoduchost, byl proud dosazován do jednotlivých časových intervalů ve tvaru $I(t) = 680 + kt$, kde *k* nabývalo hodnot mezi 0,6 až 1. Je tedy na první pohled zřejmé, že proud je na intervalu $t \in \langle 0{,}1200 \rangle$ nespojitou funkcí. Proudy v jednotlivých intervalech vypadají podle grafu 8.14.



Graf. 8.14 Závislost proudu na čase v jednotlivých intervalech

Tento algoritmus zjištění aproximace skutečného proudu za použití Agros2D má určité nedostatky, které lze podle mého názoru částečně potlačit jedině zkušeností v oblasti simulování slabě sdružených úloh elektromagnetického a tepelného pole. Nejdůležitějším aspektem je definice výpočetní funkce, která má v nejzákladnější podobě dva vstupy, teplotu ve sledovaném bodě a střední teplotu dílce, jakožto počáteční podmínku přechodového děje, pro níž se získávají a dosazují na patřičná místa hodnoty všech shromážděných materiálových a naměřených závislostí. Provedením výpočtu v jednom časovém úseku dále rozděleným programem na *n* zvolených kroků dostáváme grafické rozložení veličin teplotního i magnetického pole. Důležitými jsou pro nás konečné hodnoty teplot, které zároveň slouží jako vstupní hodnoty do následujícího intervalu. K chybě dochází v okamžiku, kdy poslední rozložení teplot z dokončeného cyklu je plošně nahrazeno střední teplotou v celém objemu dílu a slouží jako výchozí stav cyklu nadcházejícího. Je nutné si uvědomit, že střední teplota bude vždy nižší něž teplota sledovaného bodu (sváru), a tudíž jednou ohřáté místo a nejen to ,je skokově plošně „ochlazeno“, také neexistuje žádné předchozí rozložení teploty. Jinými slovy se díl ohřívá z vyšší teploty, než tomu bylo na začátku cyklu předchozího, ale znovu se musí vytvořit rozložení teploty vlivem šíření tepla, které ve skutečnosti již existuje a za normálních okolností by pokračovalo dále.

Aktuálně jediným možným způsobem, jak omezit tuto chybu, je výpočet v programu Agros2D rozmělnit na co nejmenší časové úseky.

8.3 Model

Krátké teoretické pojednání o programu, v němž celá praktická část této práce vzniká, je především v šesté kapitole této práce. Proto tato část bude spíše pojednávat o konkrétním řešení zadaného úkolu, o jeho cíli, smyslu, provedení, zjednodušení, přidaných hodnotách a předběžných výsledcích. Přestože bylo v předchozím textu několikrát na mnoho způsobů naznačováno, čemu se práce věnuje a jaký je její cíl, rád bych veškeré předchozí myšlenky stručně spojil a shrnul. Cílem této diplomové práce je zpracovat skutečný případ týkající se využití indukčního ohřevu k žíhání rotačně symetrických těles. K žíhání kovových součástí jakožto strojnímu úkonu je nutné dodat po určitý čas určité množství tepelné energie. Tato energie a její transport je zajištěn pomocí elektromagnetického pole, jehož zdrojem je induktor. Hovoří se tedy o sdružené úloze tepelného a magnetického pole. Žíhání zásadně ovlivňuje krystalické složení ohřívané látky a má určité regenerační vlastnosti v podobě zvýšení pevnosti látky na původní mez. Při překročení, popřípadě nedosažení limitních hranic doby a teploty žíhání, nelze tento úkon považovat za správně provedený. Odtud se bere myšlenka vytvořit takový simulační skript, aby bylo možné sledovat a

měnit nastavené parametry na takovou úroveň, aby bylo žíhání provedeno zcela bezchybně na první pokus. Tento nápad také úzce souvisí s ekonomickou stranou věci, neboť špatně vyžíhaný díl se považuje za takzvaný „zmetek“. Orientačně se ceny rotačních dílů vysokootáčkových turbín pohybují v tisících amerických dolarů.

Model je možné ve své podstatě tvořit dvěma způsoby, nejčastěji však kvůli ulehčení či náročnost se jedná o kombinaci těchto způsobů. První variantou je úplné vytvoření programu v grafickém rozhraní softwaru Agros2D. Druhá varianta, kterou Agros2D nabízí, je napsání programu pomocí kódu v jazyce Python ve vývojovém prostředí PythonLab. Napsání kódu je zcela univerzální metodou tvorby skriptu, avšak nevýhodou je popsání řešené geometrie, které je i v těch nejelementárnějších případech o mnoho časově náročnější než nakreslení geometrie v grafickém prostředí, popřípadě její import ve formátu .dxf. Proto běžný postup při přípravě skriptu začíná v grafickém prostředí výběrem fyzikálních polí, definováním jejich podmínek, tvorbou geometrie, přiřazením materiálů a okrajových podmínek. Dalším možným a častým krokem je vygenerování skriptu z grafického prostředí ve vývojovém prostředí PythonLab. Zde je skript možno lépe modifikovat, doplňovat o vlastní funkce a závislosti, což v grafickém prostředí doposud nelze.

V případě skriptu této práce bylo postupováno v podstatě identicky popisu předchozího odstavce. Vygenerovaný základní skript tvoří v součtu definice polí, podmínek, vstupních parametrů a geometrie. Obsah vygenerovaného skriptu je doplněn o vypočítané a naměřené závislosti, které jsou zapsány jako funkce podle syntaxe jazyku Python. Vygenerovaný kód je pomocí pár jednoduchých kroků také převeden na funkci, která má celkem dva vstupy (teplotu sledovaného bodu a střední teplotu ohřívaného tělesa) a čtyři výstupy (střední teplotu tělesa, balík informací objemových magnetických vlastností ohřívaného tělesa, balík informací objemových magnetických vlastností induktoru a souhrn informací teplotních vlastností sledovaného bodu).

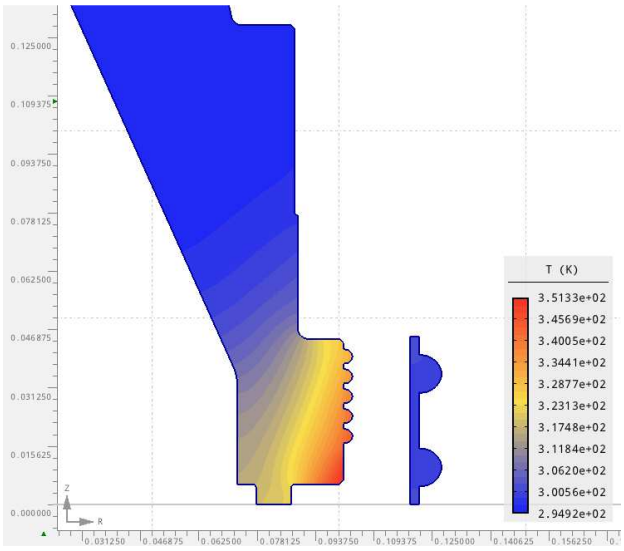
Hlavním účelem tohoto modelu je mimo vyřešení problematiky teplotního rozložení v dílu také vysledování nejdůležitějších a méně důležitých závislostí v porovnání na chybu ve výsledku. Tyto předpoklady jsou klíčové v otázce úpravě základního skriptu na skript optimalizační, který je jistě výpočetně mnohem náročnější než-li program základní.

Konkrétní představu řešení modelu přibližuje následující obrázek, zachycuje hlavní myšlenku celé problematiky, opakované volání funkce po malých intervalech. Dohromady je 1200 sekundový interval rozdělen na 40 intervalů o délce 30 sekund, v nichž se počítá 10 krát magnetické pole s teplotním. Ve výsledku je tedy možné za určitých podmínek pozorovat vývoj parametrů po 3 sekundách po celý časový úsek. Všechny definované funkce jsou volány na vypočítanou střední teplotu dílu.

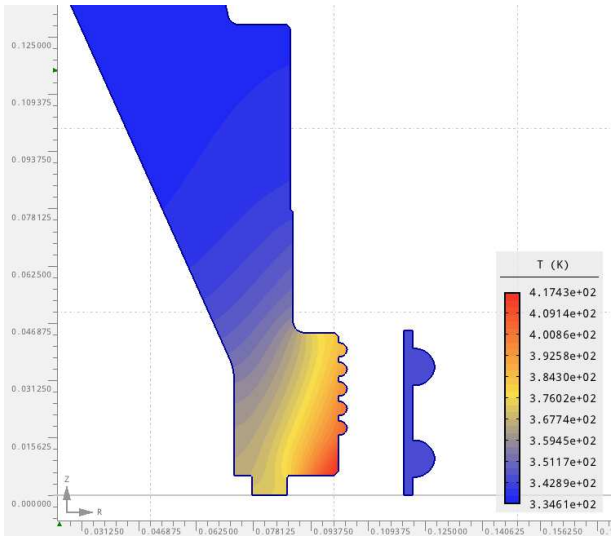
```
    geometry.add_edge(0.101459, 0.0164634, 0.103619, 0.0183428, angle = 90, boundaries = {"heat" : "Convection"})
    geometry.add_edge(0.101459, 0.0164634, 0.101219, 0.0162234, angle = 90, boundaries = {"heat" : "Convection"})
    geometry.add_edge(0, 3.4365, 6, 3.4365, boundaries = {"heat" : "T=293", "magnetic" : "A=0"})
    geometry.add_edge(6, 3.4365, 6, -3.5785, boundaries = {"heat" : "T=293", "magnetic" : "A=0"})
    geometry.add_edge(6, -3.5785, 0, -3.5785, boundaries = {"heat" : "T=293", "magnetic" : "A=0"})
    geometry.add_edge(0, -3.5785, 0, 0, boundaries = {"heat" : "T=293", "magnetic" : "A=0"})
    geometry.add_edge(0, 0.388899, 0, 0, boundaries = {"heat" : "Symetry", "magnetic" : "A=0"})
    geometry.add_edge(0, 3.4365, 0, 0.388899, boundaries = {"heat" : "T=293", "magnetic" : "A=0"})

    geometry.add_label(0.801169, 0.546789, materials = {"heat" : "none", "magnetic" : "Air"})
    geometry.add_label(0.0491161, 0.152854, materials = {"heat" : "Steel", "magnetic" : "Steel"})
    geometry.add_label(0.120183, 0.0251398, materials = {"heat" : "Copper", "magnetic" : "Copper"})


    problem.solve()
    teplota=heat.volume_integrals(labels=[1])# volani parametru teplotnich objemovych vlastnosti na oblast pod oznacenim 1 (zihany dil)
    Tk=teplota["T"]/teplota["V"]# vypocet stredni hodnoty
    return (Tk,magnetic.volume_integrals(labels=[1]),magnetic.volume_integrals(labels=[2]),heat.local_values(0.1036,0.03973, time_step=
# vystupem funkce jsou 4 promenne: stredni teplota, informace o magnetickych objemovych vlastnostech oblasti 1 a 2(induktor), informace

Tpoc=295
Tav=295
k=fce(Tpoc,Tav)# volani hlavni funkce s nazvem "fce" se dvema vstupy
list_tep=[]# prazdny seznam urceny na ukladani vysledku funkce
list_tep.append(Tpoc)# pridani prvni pocatecni teploty

for i in range(39):# 39*30=1170 + 1*30 z prvniho cyklu = 1200s
    list_tep.append([k[0],k[1]["Pj"],k[2]["Pj"],k[3]["T"]])# plneni seznamu vystupem funkce v kazdem cyklu
    k=fce(k[0],k[0])# volani funkce s parametry z predchoziho cyklu
```

Obr. 8.3 Skript

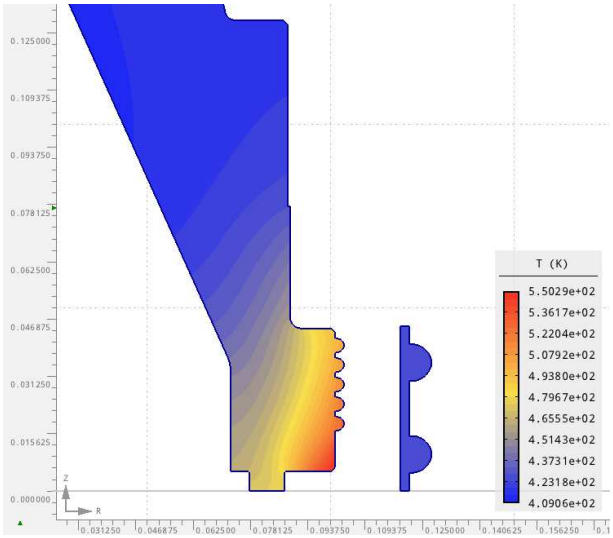
Při samotném hodnocení výsledků modelu je mimo vyobrazení koncových rozložení teploty, ukázky magnetické indukce, pole či hustoty ztrát také srovnání jednotlivých použitých parametrů, například proudu a výkonu. Rozložení koncových teplot, tj. po každých 30 sekundách je následující:



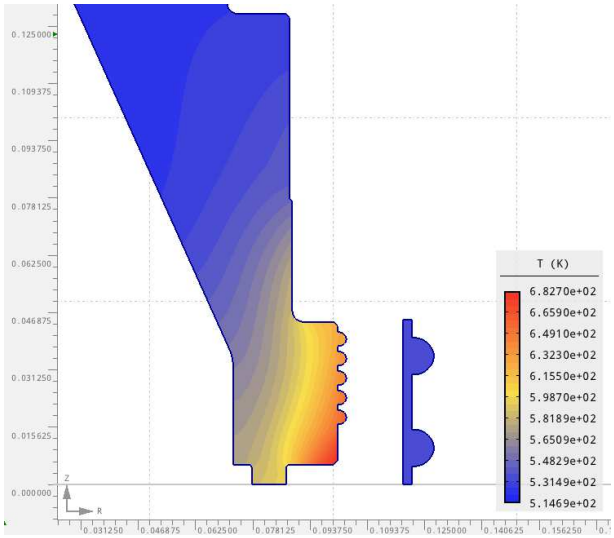
Obr. 8.4 Rozložení teploty t = 30 s



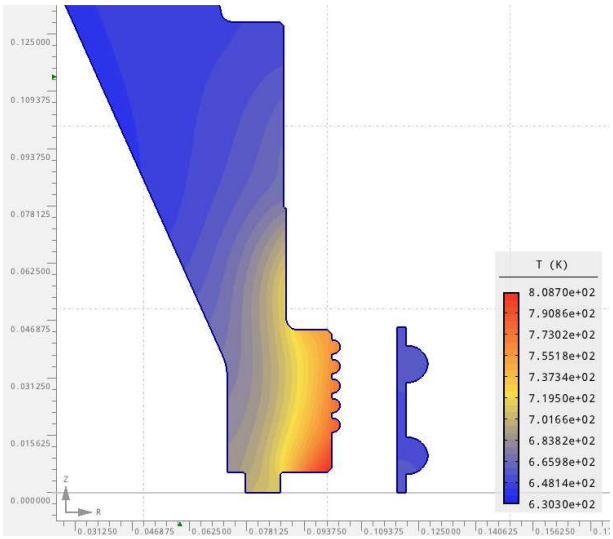
Obr. 8.5 Rozložení teploty t = 240 s



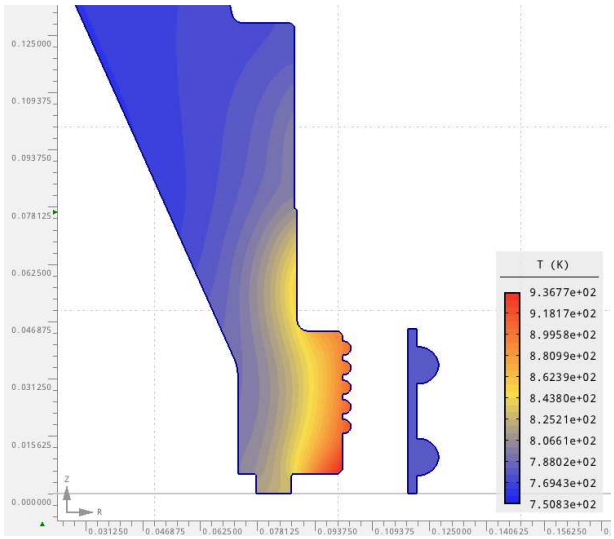
Obr. 8.6 Rozložení teploty t = 480 s



Obr. 8.7 Rozložení teploty t = 720 s



Obr. 8.8 Rozložení teploty t = 960 s

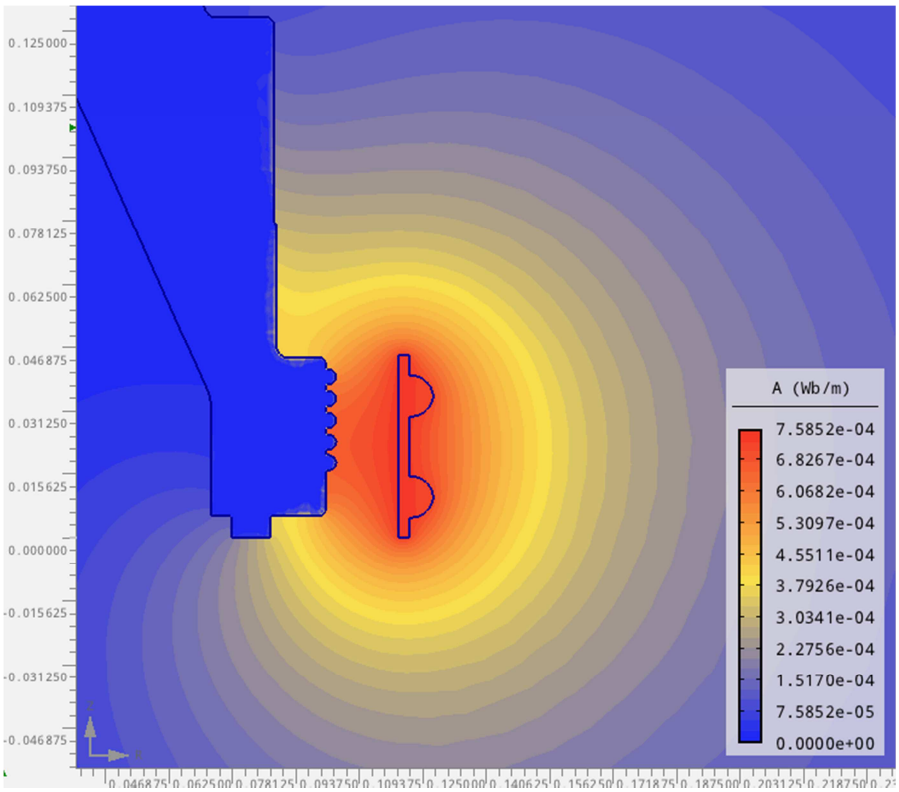


Obr. 8.9 Rozložení teploty t = 1200 s

Ke každému z uvedených obrázků koncového rozložení teploty jsou v příloze přidány i zbylé obrázky zachycující každé 3 sekundy. Žádaná koncová teplota pro žíhání tohoto typu dílu je dle změřené závislosti okolo 910 K. Výsledkem modelu je hodnota T = 908,7 K. Pro respektování mlčenlivosti z důvodu patentových práv (konkrétního zobrazení celé součásti) zde není možné představit rozložení teploty napříč celým dílem. Jak je ale již z uvedených výsledků zřejmé, zbylá část dílu není nijak zásadně teplotně ovlivněna s odvoláním na její materiálové vlastnosti.

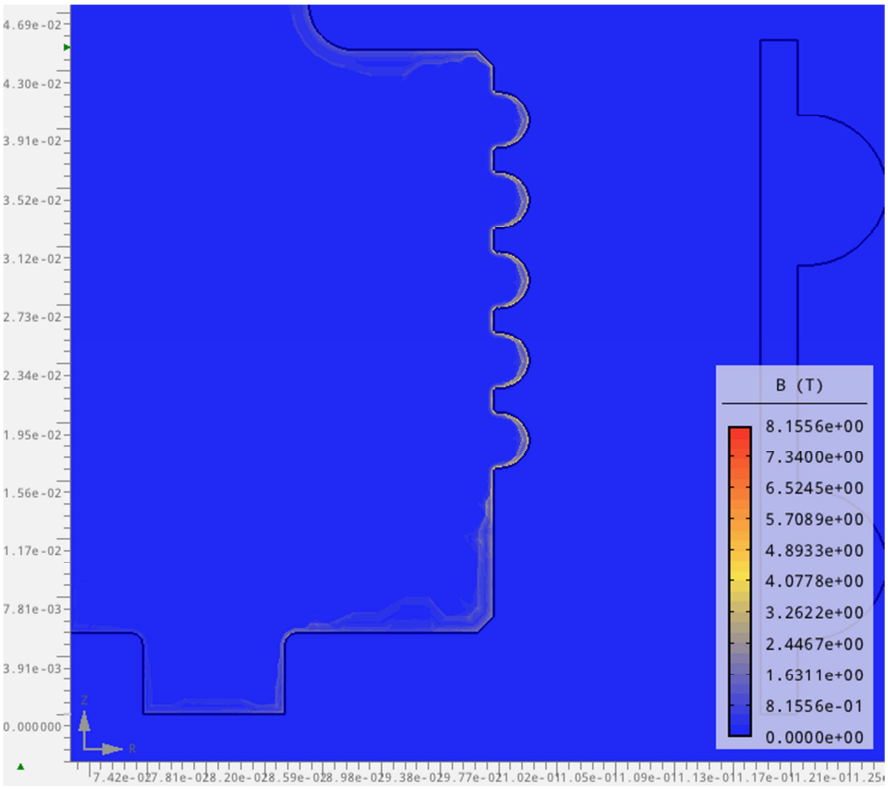
V případě magnetického pole lze pozorovat vývoj vektorového potenciálu, magnetické indukce, magnetického pole či hustoty ztrát, které znamenají tepelný výkon. Pro ukázku a přehlednost jsou uvedeny pouze záběry z posledního cyklu, tedy zobrazení definitivních a výsledných hodnot. Dílčí výsledky se nalézají v příloze této práce.

Vektorový potenciál A [Wb.m^{-1}] dosahuje maximální velikosti 7,5.10^{-7}.



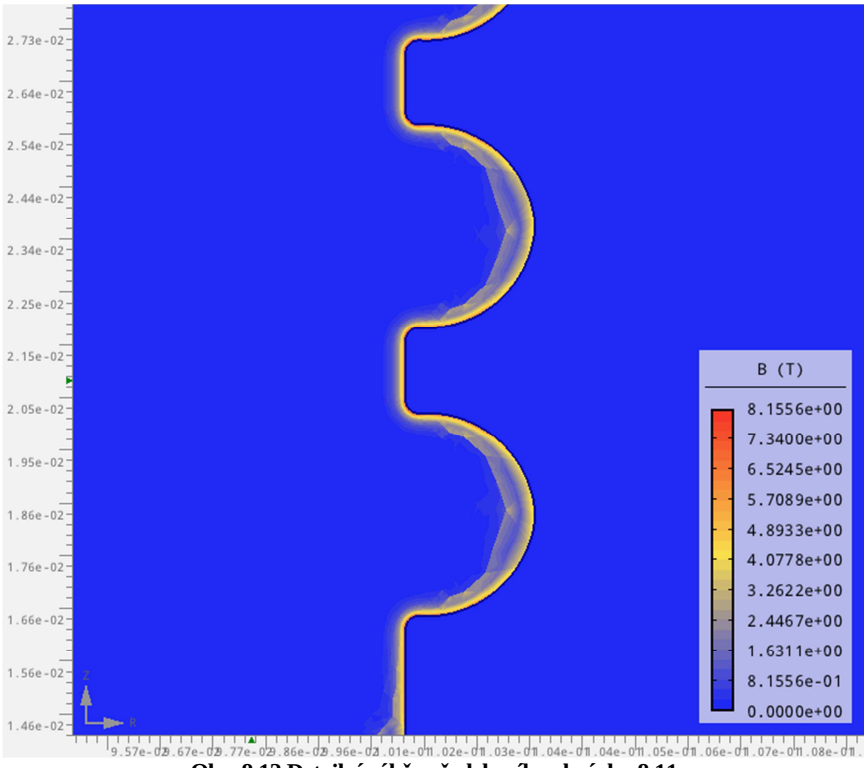
Obr. 8.10 Vektorový potenciál v oblasti induktoru a ohřívané části dílu

Z pohledu na výsledek magnetické indukce je zřejmé, že velikost *B* [T] dosahuje vzhledem k běžným poměrům vyšších hodnot okolo 8 T.



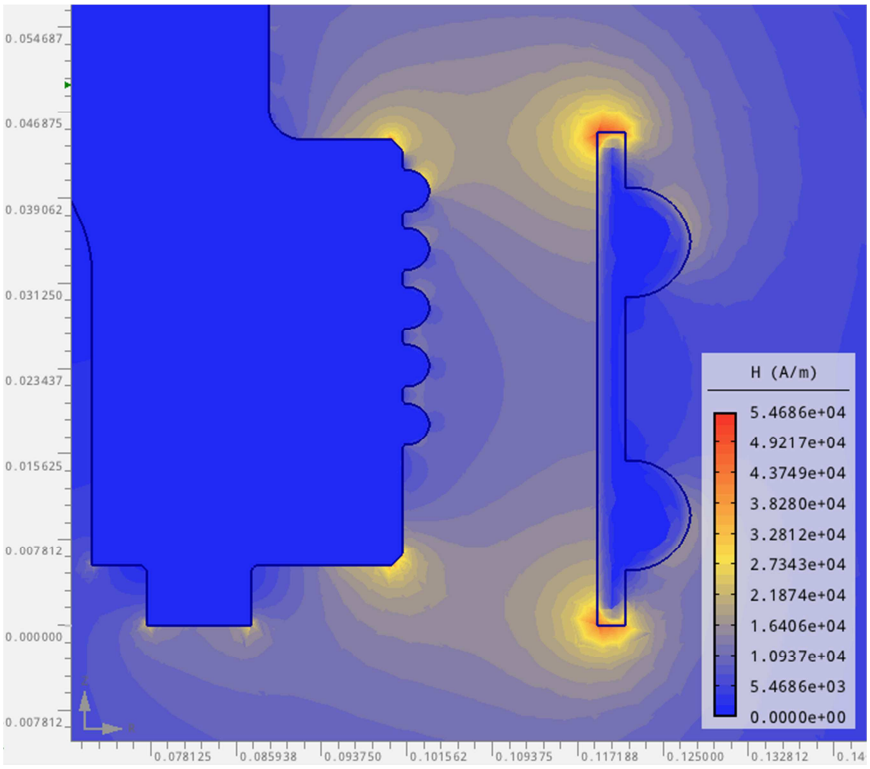
Obr. 8.11 Přítomnost magnetické indukce v čase t = 1200 s

Detailní pohled na výsledek magnetického pole nabízí následující ukázka.



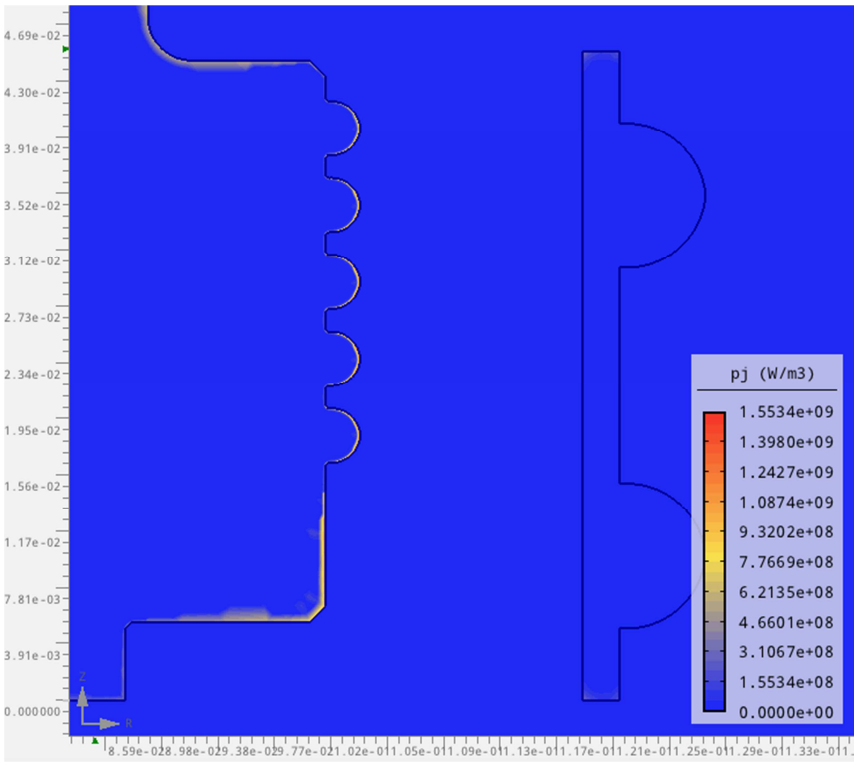
Obr. 8.12 Detailní záběr předchozího obrázku 8.11

Z obrázku magnetického pole si nelze nevšimnout jeho zvýšených hodnot v místech ostrého spojení hran, kde velikost H [A.m^{-1}] dosahuje velikosti až 5468 A.m^{-1}.



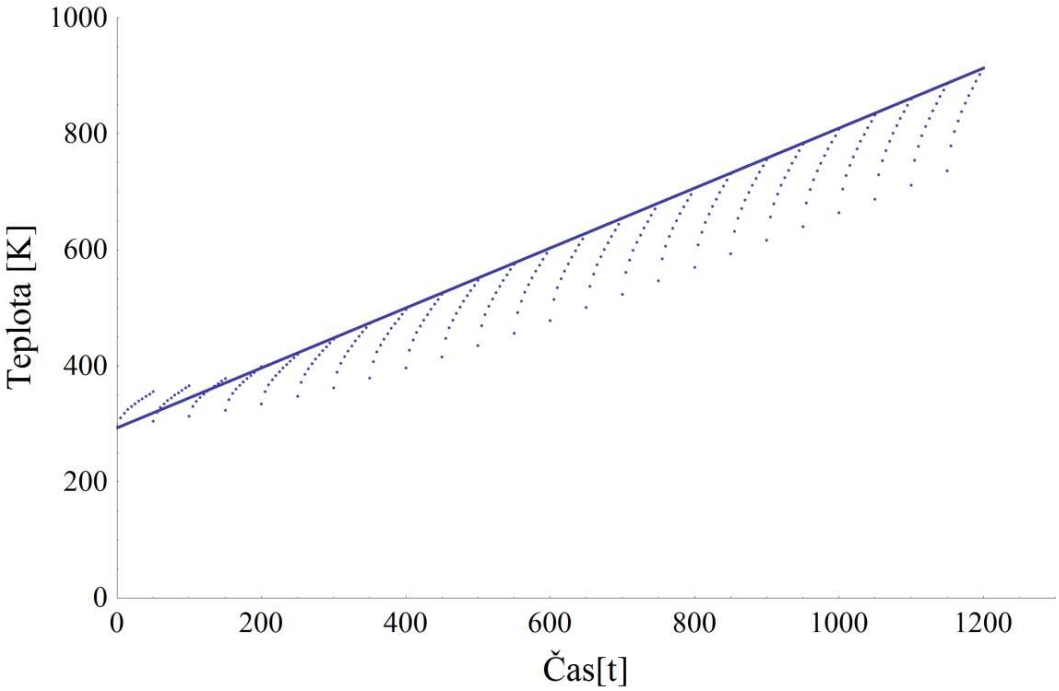
Obr. 8.13 Průběh magnetického pole při ohřívání pro t = 1200 s

V poslední řadě je z vyhodnocení magnetických vlastností nutno uvést i zobrazení hustoty ztrát p_j [W.m^{-3}]. Ty dosahovaly avšak v malém množství až jednotek GW.m^{-3}, viz obrázek 8.14.



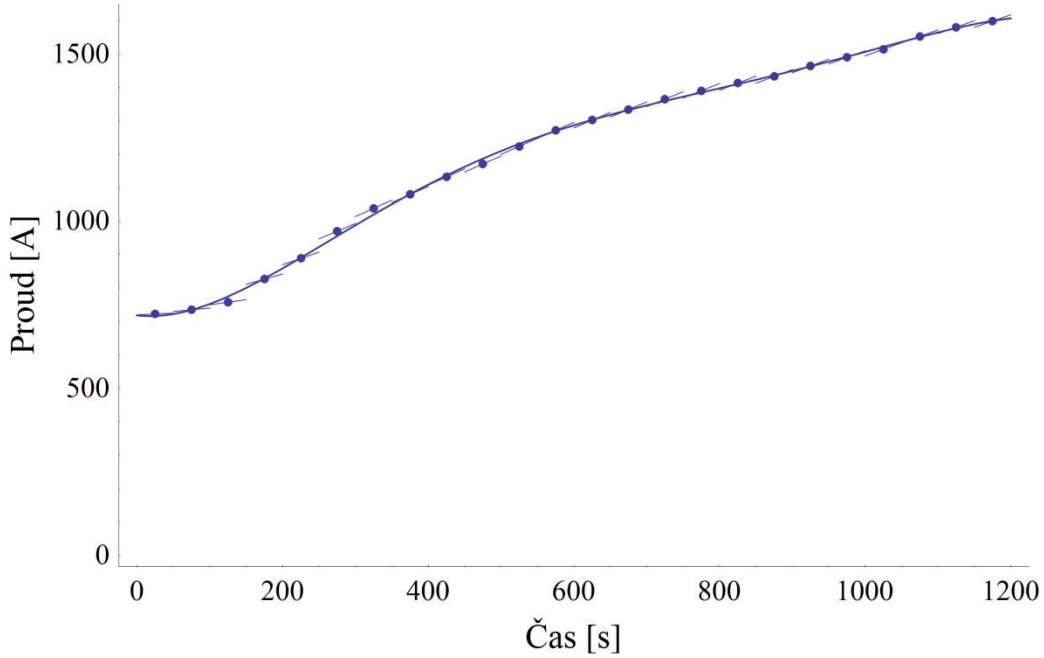
Obr. 8.14 Místa, ve kterých dochází ke ztrátám vyvolanými vířivými proudy

Dalším velmi důležitým výsledkem je zpracování průběhu teploty naměřených hodnot s výsledkem modelu, skutečného tepelného výkon vzniklého ve vsázce a induktoru, o němž bylo psáno výše v podkapitole 8.2.3. Úroveň korespondence naměřené a vypočítané teploty úzce souvisí s nalezením více parametrů modelu, zejména však ale s velikostí a průběhem proudu. V části 8.2.4. jsou uvedeny skutečnosti s naměřeným a skutečným proudem procházejícím induktorem a jeho získáním s dopomocí činnosti modelu. Z mnoha pokusů a testování vyšlo najevo, že vyhledání průběhu proudu s dostatečnou přesností požadovaných vlastností na výstupu vyhovuje nalezení lineárních funkcí v intervalech po 50 s za předpokladu, že daný proud ohřeje žíhaný díl za definovaných počátečních podmínek z předchozího časového úseku na teplotu, která byla reálně naměřena.



Graf. 8.15 Hledané proudy dle teplotní závislosti

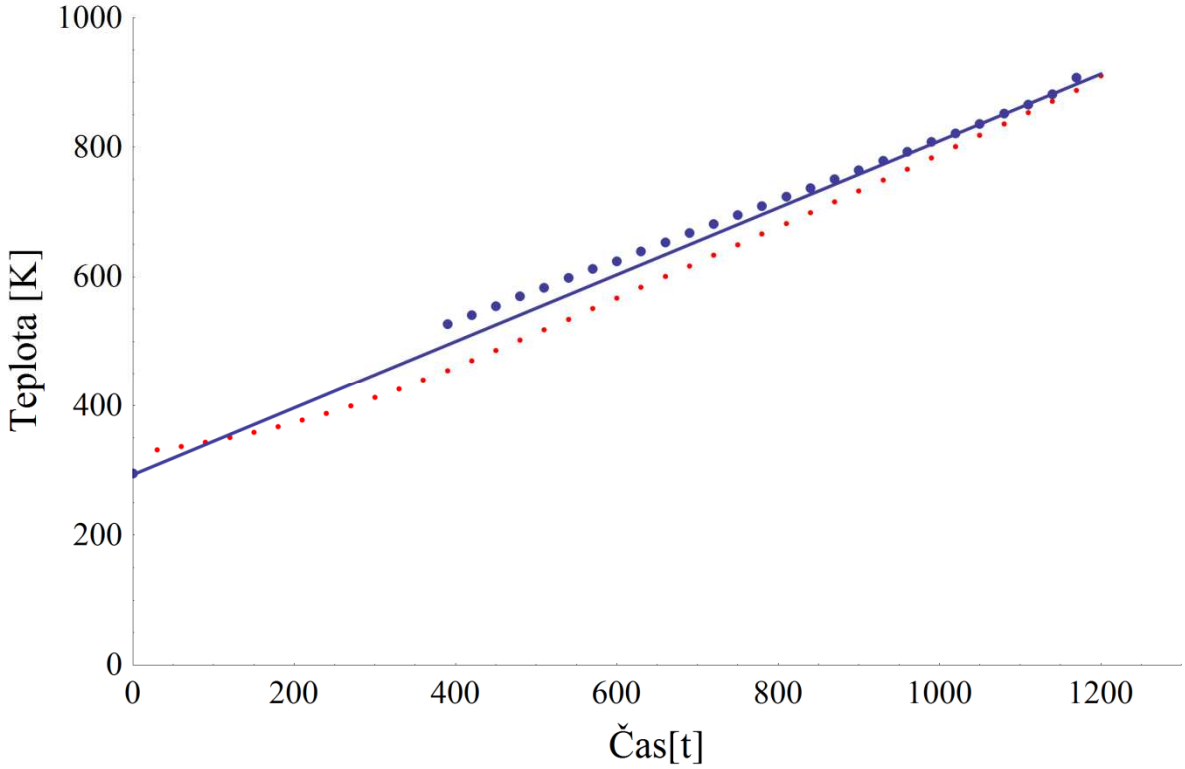
Průběhům jednotlivých tepelných přechodných jevů zobrazených exponencielami odpovídá vždy jedna lineární funkce platná pro daný 50 sekundový interval.



Graf. 8.16 Proklad nalezených proudů jednotlivých časových intervalů

Jelikož je vstupem hlavní výpočetní funkce skriptu teplota, je nutností si zajistit ze známé závislosti teploty na čase přepočet na čas. Pro absolutní přesnost by bylo nejideálnějším řešením zajišťující nejmenší možnou chybu výsledku použít proud rozčleněný například podle programovací funkce *if* na časové úseky, pro které byl počítán. Z testování vyšlo najevo, že má-li být model komplexní a vycházet z něj pro optimalizaci, není možné použít předchozí postup. Při změnách teploty (například posunutím induktoru) dojde k špatnému výběru proudu pro daný časový interval. Z tohoto důvodu jsou jednotlivé lineární funkce proloženy polynomem vysokého stupně.

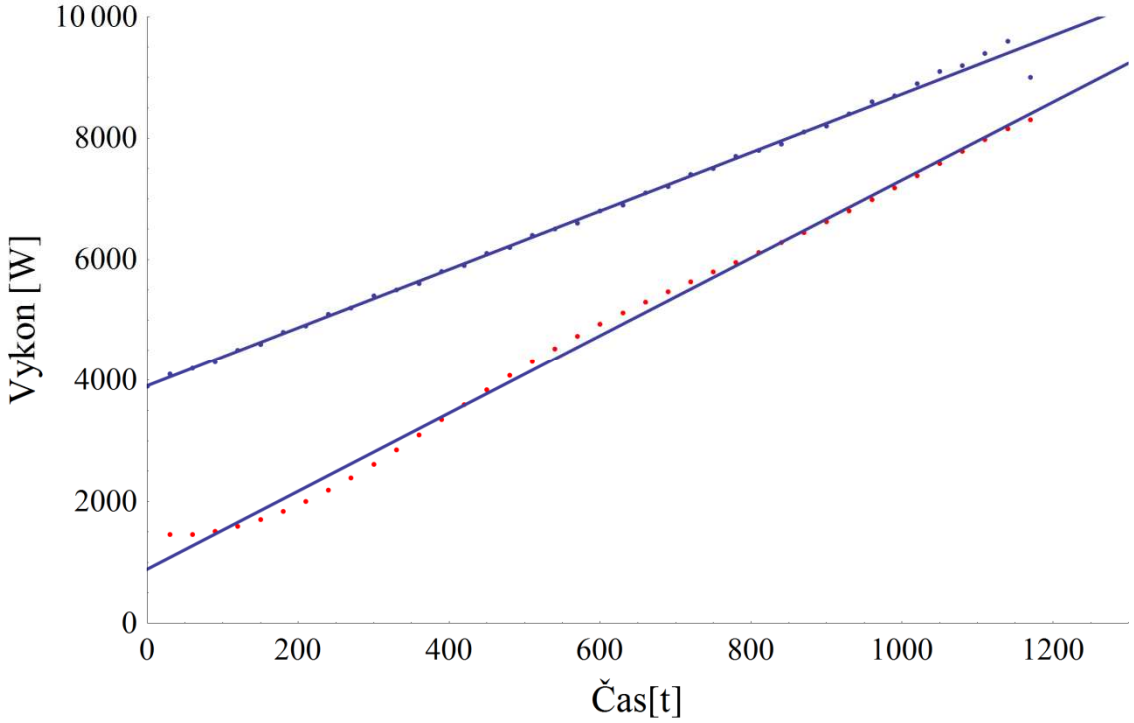
Vzhledem k faktu, že je celý ohřev regulován na teplotu, a ta je z tohoto důvodu hlavním parametrem, tak srovnání výsledku základního modelu s naměřenými hodnotami je zobrazeno na následujícím grafu.



Graf. 8.17 Srovnání měřené a spočítané teploty

Na grafu 8.17 jsou modrými body vyneseny naměřené teploty v různých časových okamžicích v místě prostředního sváru. Lineární funkce vynesená modrou úsečkou je proklad naměřených bodů tak, jak bylo popsáno a naznačeno v podkapitole 8.2.1 a pro model slouží jako časová teplotní závislost. Zbývající červené body jsou výsledky vygenerované programem Agros 2D. Odchylky od časové teplotní závislosti nejsou nikterak zásadně veliké a jsou způsobeny přítomností mnoha funkcí. Model nelze vyladit a nastavit tak, aby teploty v jednotlivých časových intervalech přesně odpovídaly hodnotám prokladové funkce. Nejdůležitějším aspektem stále zůstává fakt, že teploty na konci žíhání spolu korespondují a je tedy splněna podmínka korektní žíhací teploty.

Společně s proudem je svázán i tepelný výkon, který je generován v ohřívaném dílu a induktoru. S odvoláním na kapitolu 8.2.3, kde je naznačeno, že změřený výkon neodpovídá výkonu tepelnému, je proto zde proveden podle výsledku modelu jeho pravděpodobný průběh.



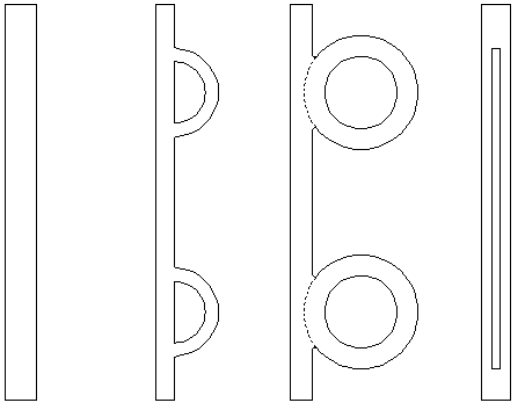
Graf. 8.18 Srovnání měřeného a vypočteného výkonu

Obdobně jako v předchozím případě jsou oba průběhy proloženy lineární funkcí. Úsečka prokládající modré body odpovídá naměřenému výkonu, kdežto úsečka prokládající červené body výkonu spočtenému. Tento graf uspokojivě potvrzuje předpoklady, které byly dříve vysloveny, tj. změřený výkon odpovídá výkonu celého zařízení. Rozdíl ve výkonech (ztráty) lze tedy přisoudit zdroji pracujícímu s určitou účinností η. Z přibližného výpočtu vychází účinnost na počátku žíhání (t = 50 s) přibližně 30 % a ke konci (t = 1200 s) cca 90 %.

Na závěr podkapitoly zabývající se popisem modelu a jeho výsledků je důležité stručně uvést některé poznatky z dlouhé práce na modelu a shrnout celkové pozorování. Funkčnost skriptu se potvrdila s poměrně věrnou schopností reprodukce výsledků v porovnání se získanými daty, přestože některé materiálové závislosti jsou pouze odhadnuty na základě názorů a zkušeností vedoucího práce. Součástí modelu je mnoho materiálových závislostí, které mají na přesnost výsledku různou váhu. Ku příkladu ke zjednodušení by mohlo dojít u závislosti frekvence nebo objemové hustoty. Tyto závislosti nelze přímo považovat za stěžejní. Obdobně je tomu tak i s některými hodnotami, které již dopředu byly stanoveny jako konstanty. Jedná se o emisivitu či hodnoty koeficientu přestupu tepla při nucené konvekci uvnitř ohřívaného dílu. Hlavní výhodou znalosti výsledků šíření tepla v žíhané součásti je možnost sledování vývoje tepla v rámci celého objemu, odkud lze poměrně snadno stanovit, zda dochází k nežádoucímu tepelnému namáhání ostatních míst dílu. To může mít za následek potenciální zvýšení produktivity, kvality odvedené práce a snížení finančních nákladů spojených s provedením vyžíhání jedné součásti. Model lze v aktuální podobě možné považovat za připravený pro optimalizaci nejvhodnější pozice induktoru zajišťující nejrovnoměrnější prohřátí.

8.4 Optimalizace

Optimalizace je v problematice definovaného ohřívání těles pomocí indukčního ohřevu poměrně důležitý a mocný nástroj. Konkrétně v problematice, kterou se zabývá tato práce, je nezbytně nutné dodržet dva základní aspekty. Jsou jimi definovaný úzký rozsah teplot a rovnoměrnost prohřátí. Softwarová optimalizace na funkčním modelu věrně zobrazujícím skutečnost má opět pozitivní vliv na kvalitu odvedené práce, která je u vysokorychlostně otáčejících se dílů více než žádoucí. Jelikož společnost vlastnící stanici indukčního ohřevu realizuje žíhání na mnoha typech rotačních těles, vlastní i mnoho typů induktorů sloužících právě k tomuto účelu. Názornou ukázkou mohou být induktory na následujícím obrázku (neodpovídají přesným rozměrům).



Graf. 8.19 Ukázky typů induktorů

Pomocí rozdílných tvarů a rozměrů induktorů je možné dosáhnout různých lokálních prohřátí, což je ruku v ruce dle tvaru, rozměrů a nároků na prohřátí s ohřívaným dílem. Zde se rodí otázka, který induktor, a s jakými parametry použít na žíhaný díl.

Cílem optimalizačního skriptu řešeného dílu a induktoru je najít takovou pozici, aby byly splněny zejména podmínky rovnoměrnosti prohřátí a vhodné žíhací teploty. Skript přímo vychází ze skriptu týkajícího se základního modelu. Pro optimalizaci je nejdůležitější zvolit dostatečně vhodnou a přesnou hodnotící funkci. Hodnotící funkce je pro tuto práci řešena jako součty absolutních hodnot odchylek teplot ve snímaných bodech od ideální žíhací teploty. Ukázky části optimalizačního skriptu jsou na následujících obrázcích.

```
278     geometry.add_label(0.120183, 0.0251398+x, materials = {"heat" : "Copper", "magnetic" : "Copper"})
279 #    geometry.add_label(0.0121286, 0.124921, materials = {"heat" : "none", "magnetic" : "none"})
280
281     problem.solve()
282     teplota=heat.volume_integrals(labels=[1])
283     Tk=teplota["T"]/teplota["V"]
284     return (Tk,heat.local_values(0.1036,0.03973, time_step=10, adaptivity_step = None, solution_type = "normal"),heat.local_values(0.1036,
285
286 def hodnoceni(l):
287     s=abs(float(l[0][0])-reference)+abs(float(l[0][1])-reference)+abs(float(l[0][2])-reference)+abs(float(l[0][3])-reference)+abs(float(l[
288     return s
289
290 reference=float(908.7)
291
292 def poloha(x):
293     Tpoc=295
294     Tav=295
295     k=fce(Tpoc,Tav,float(x))
296     for i in range(39):
297         list_tep=[]
298         if i==38:
299             k=fce(k[0],k[0],float(x))
300             list_tep.append((k[1]["T"],k[2]["T"],k[3]["T"],k[4]["T"],k[5]["T"]))
301             optimal=hodnoceni(list_tep)
302             print("Vyhodnocovaci funkce nabyva hodnoty: ",optimal)
303             print("Pocitana poloha je pro: ",float(x),"m")
304         else:
305             k=fce(k[0],k[0],float(x))
306     return optimal
307
```

Obr. 8.15 Vyhodnocovací funkce

```
k1=-0.0005
k2=0.0000
k3=0.0005
x1=poloha(k1)# vychozi pozice
x2=poloha(k2)# prvni nastrel
x3=poloha(k3)
print("x1,x2,x3 startovni: ",x1,x2,x3)
print("k1,k2,k3: ",k1,k2,k3)
mezkrok=0.002#funguje zaroven jako maximalni krok

if (x1>x2 and x3>x2):
    print("Idealni poloha induktoru je ve vychozi pozici ",k2," m")

if (x1<x2):
    while (x1<x2):#do zap hodnot
        krok=(abs(x2-x1)/float(x2))*mezkrok  #jenom posun, nutno pricist k predchozimu kroku
        k1=k1-krok
        x2=x1
        x1=poloha(k1)
        print("Zaporna poloha je pro krok: ",k1," m. Odpovida hodnote: ",x1)
    else:
        print("Idealni poloha induktoru proti zakladni pozici je posunuta o ",float(k1+krok)," m")
else:
    while (x3<x2):
        krok=(abs(x2-x3)/float(x2))*mezkrok
        k3=k3+krok
        x2=x3
        x3=poloha(k3)
        print("Kladna poloha je pro krok: ",k3," m. Odpovida hodnote: ",x3)
    else:
        print("Idealni poloha induktoru proti zakladni pozici je posunuta o ",float(k3-krok)," m")
```

Obr. 8.16 Algoritmus optimalizace

Pro účel zjištění nejideálnější pozice induktoru byly vytvořeny dva mírně se lišící druhy optimalizace. Jedna ideologicky navazuje na gradientní metodu popsanou v teoretické části této práce, druhá je metoda hledání minima pomocí fixně stanoveného kroku. Ve své podstatě se napsané funkce programu od sebe nijak příliš neliší, za cíl však bylo porovnat přesnost a rychlost konvergence a vyhodnotit, která metoda je z průmyslového hlediska účinnější. Při uvážení přesnosti nastavení polohy induktoru lze předpokládat toleranci alespoň například jeden milimetr. V tento okamžik by téměř nemělo význam použít gradientní metodu, která jistě konverguje mnohem přesněji byť za cenu delšího výpočtu než metoda s fixním krokem. Oproti tomu, chtělo-li by se za pomoci metody s fixním krokem dosáhnout stejně přesného výsledku jako dosahuje metoda gradientní, lze s jistotou tvrdit, že výpočet by byl mnohem časově náročnější.

Obě výše zmíněné metody pracují na stejné úvaze. Jak lze vypozorovat z obrázku 8.16, jsou pro začátek pevně definovány tři pozice, pro které se počítá vyhodnocovací funkce (viz obrázek 8.15). Jsou jimi pozice výchozí a vždy po jedné pozici do kladného i záporného směru v ose induktoru. Je-li nejnižší vypočtená hodnota ve výchozí pozici, je zřejmé, že ideální pozice je právě tam. V ostatních případech následuje testování hodnot obdržených pozic pro kladný a záporný směr. Zcela určitě bude v jednom směru hodnota nejnižší a program skočí do příslušného podmíněného cyklu *while*, ve kterém se testuje buď s fixním nebo proměnným krokem vždy nová pozice a porovnává se s předchozí do té doby, dokud je hodnota v nové pozici vždy menší než hodnota v pozici předchozí. Nenastane-li splnění podmínky, je nalezena optimální pozice induktoru.

Při strategii dosažení co nejpřesnějšího možného výsledku za nejkratší možný čas se nabízí použít kombinaci obou skriptů. V prvním kroce by došlo k otestování a nalezení optima pomocí fixního kroku například s délkou 1 mm. V kroce druhém by se dle nalezeného optima metodou s fixním krokem provedl výpočet gradientní metodou za předpokladu, že by gradientní metoda byla již přímo nasměřována k pravděpodobnému minimu. V přibližném minimum by probíhal mnohem jemnější výpočet vedoucí k přesnému výsledku. Výsledky této strategie jsou shrnuty v následujících tabulkách.

Fixní metoda	(krok = 1 mm)	
Pozice [m]	*Hodnota vyhodnocovací funkce*	*Posun*
0,001	62,2144194	↑
0	60,7607059	–
-0,001	59,4502487	↓
-0,002	58,3202671	↓
-0,003	57,3751879	↓
-0,004	56,6217166	↓
-0,005	56,0811867	↓
-0,006	55,7454933	↓
-0,007	55,6179937	OPTIMUM
-0,008	55,7111116	↓

Tab. 8.4 Shrnutí výsledků optimalizace s fixním krokem

Gradientní metoda		
Pozice [m]	*Hodnota vyhodnocovací funkce*	*Posun*
-0,0068	55,62251399	↑
-0,007	55,61799378	–
-0,0072	55,61660521	↓
-0,0072002497	55,61360649	OPTIMUM
-0,007200789	55,61689156	↓

Tab. 8.5 Shrnutí výsledků optimalizace s proměnným krokem

Celkový čas výpočtu optimalizace s fixním krokem byl 15 hodin a 45 minut. Dopočet přesné polohy pomocí gradientní metody trval celkem 7 hodin a 4 minuty. Teplota ve sledovaném místě dosáhla 897,4 K, což je přibližně o 11 K méně než teplota ve sledovaném bodě u základního modelu. Při znalosti referenční teploty (908,7 K) lze i z výsledků vyhodnocovací funkce odhadnout změnu teploty (55/5 = 11). I přes tento fakt se teplota nachází v tolerančním pásmu. Možným řešením jak dosáhnout zpět ideální teploty okolo 910 K, je pomocí modelu najít ekvivalentní navýšení hodnoty proudu.

9 Závěr

Předkládaná práce se zabývala možností využití indukčního ohřevu pro žíhání rotačně symetrických těles. Její význam spočíval ve ověření, zda je reálně možné nasimulovat proces žíhání do takové úrovně, aby v rámci stanovených tolerancí korespondoval se skutečností. V úvodu práce byly popsány veškeré teoretické poznatky týkající se a související s praktickou částí práce. Po první kapitole, která se obecně týká elektrotepelných zařízení, se práce dále věnuje vybraným oblastem z teplotního a elektromagnetického pole. V těchto kapitolách byly vysvětleny základní principy a jejich spojitosti. Druhá polovina teoretické části práce se věnuje již relativně konkrétním tématům, které jsou poměrně úzce spjaty s praktickou částí. Jedná se o základní vysvětlení numerických řešení sdružených úloh pomocí softwarových aplikací a optimalizace.

Stěžejními kapitolami předložené práce byly části zabývající se modelem a optimalizací. Napříč celou praktickou částí byly chronologicky popsány veškeré úkony, které vedly k vyřešení zadaných úkolů. Praktickou část je možno dělit do čtyř kroků. Prvním krokem bylo měření na stanici indukčního zařízení a zisk většiny potřebných dat, získání a vyhodnocení nutných materiálových závislostí, tvorbu základního modelu a v poslední řadě optimalizace pozice induktoru. Po úspěšném shrnutí všech potřebných vstupních údajů byly závislosti zakomponovány do modelu, který postupným vyladěním vykazoval v porovnání s měřením podobně shodné výsledky, a to i přes to, že některé závislosti v modelu byly nahrazeny pouze hodnotami nezávislými na čase, popřípadě na teplotě. V těchto místech je tedy stále otevřena možnost model zdokonalovat a vylepšovat.

V průběhu tvorby této práce jsem došel k závěru, že je v praxi často mnohem důležitější být efektivní v rámci stanovených mezí, něž efektivitu práce ztratit nad zbytečným zdokonalováním, které nevede k zásadním změnám a zlepšením. Za uspokojivý výsledek se považuje dosáhnutí přijatelně rovnoměrného teplotního rozložení bez ovlivnění jiných než žádaných oblastí dílu v požadovaném rozsahu teplot 870 až 920 K (600 - 650 °C). Ideální teplotou pro žíhaný materiál je cca 910 K. Výsledná teplota z modelu dosahuje na prostředním sváru hodnoty T = 908,7 K. Lze tedy již v tuto chvíli konstatovat, že je možné využít indukční ohřev pro žíhání rotačně symetrických těles s predikcí vývoje šíření tepla pomocí softwarové simulace v programu Agros2D.

Velkou nadstavbou je aplikace optimalizačního algoritmu na základní model. Byly vytvořeny dva skripty, z nichž jeden hledal optimální polohu induktoru v pravidelném, pevném kroku a druhý si ze získaných hodnot upravoval délku kroku tak, aby dosáhl přesného výsledku co nejrychleji. Pokud jsou uvedené metody použity izolovaně, poté nelze z pohledu přesnosti či časových dispozic dosáhnout požadovaného výsledku efektivně. Při vhodné strategii použití metod, lze získat přesnější výsledky za mnohem kratší čas.

Pro hrubou představu nejvhodnější pozice byla nasazena varianta s pevným krokem, na zjištění přesnějšího výsledku byla s odvoláním na výsledek první metody nasazena metoda s proměnným krokem. Výsledkem optimalizace je ideální poloha posunuta oproti základní pozici o -0,0072002497 m – (přesné a podrobné výsledky jsou uvedeny v příslušné kapitole).

Při absolutním shrnutí celé této práce je v úvodu s předstihem potřebné konstatovat, že dosažené výsledky jsou velmi uspokojující a práce vykazuje potenciál, aby se v ní dále pokračovalo. Tím je myšleno zobecnit modely na takovou úroveň, aby šly snadno aplikovat na jinou geometrii a jiné typy induktorů, jejichž ukázky jsou v kapitole 7. Výsledky simulace správně převzaté do praxe přímo k rukám výrobních inženýrů či obsluze indukčního zařízení jistě mohou vést ke zvýšení jakosti práce, úspoře času nebo finančních prostředků. Cíl práce byl splněn.

10 Seznam použité literatury

[1] RADA, Josef. *Elektrotepelná technika*. 1. vyd. Praha: SNTL, 1985, 344 s. ISBN 80-707-8874-7.

[2] LANGER, Emil. *Teorie indukčního a dielektrického tepla*. 2. přep. a dop. vyd. Praha: Academia, 1979, 319 s.

[3] SAZIMA, Miroslav. *Sdílení tepla*. Praha: Vydavatelství ČVUT, červen 1986, 214 s.

[4] HEJZLAR, Radko. *Sdílení tepla*. Vyd. 2. Praha: ČVUT, 1993, 186 s. ISBN 80-010-1011-2.

[5] HRADÍLEK, Zdeněk, Ilona LÁZNIČKOVÁ a Vladimír KRÁL. *Elektrotepelná technika*. Vyd. 1. Praha: České vysoké učení technické v Praze, 2011, 264 s. ISBN 978-80-01-04938-9.

[6] LUPI, Sergio, FORZAN, Michele, ALIFEROV, Aleksandr. *Induction and direct rezistance heating.* Springer, 2015, 370 s. ISBN 978-3-319-03478-2.

[7] Elektrické teplo. *Fei1.vsb.cz* [online]. [cit. 2015-03-16]. Dostupné z: http://fei1.vsb.cz/kat420/vyuka/Bakalarske_FMMI/Prednasky/TEPLO_bc_08.pdf

[8] Polární dielektrikum. *Cs.wikipedia.org* [online]. [cit. 2015-03-16]. Dostupné z: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/0b/Dielektrikum_polarni.svg

[9] Nepolární dielektrikum. *Cs.wikipedia.org* [online]. [cit. 2015-03-16]. Dostupné z: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/88/Dielektrikum_nepolarni.svg

[10] MAYER, Daniel. *Aplikovaný elektromagnetizmus*. 2. vyd. KOPP nakladatelství, 2012. ISBN 978-80-7232-436-1.

[11] NOVOTNÝ, Karel. *Teorie elektromagnetického pole I.* Vyd. 1. Praha: ČVUT, 1998, 187 s. ISBN 80-010-1774-5.

[12] DOLEŽEL, Ivo, P KARBAN a Pavel ŠOLIN. Integral methods in low-frequency electromagnetics. Hoboken, N.J.: Wiley, c2009. ISBN 04-701-9550-9.

[13] REDDY, J. N. *An introduction to the finite element method*. 3. ed., Internat. ed. Boston: McGraw-Hill, 1984. ISBN 00-712-4473-5.

[14] KARBAN,Pavel, MACH, František, KŮS, Pavel, PÁNEK, David, DOLEŽEL, Ivo. *Agros2d.org* [online]. [cit. 2015-03-16]. Dostupné z: http://www.agros2d.org/

[15] KARBAN, Pavel. *Agros2D – aplikace pro řešení fyzikálních polí. Abclinuxu.cz* [online]. [cit. 2015-03-16]. Dostupné z: http://www.abclinuxu.cz/clanky/agros2d-aplikace-pro-reseni-fyzikalnich-poli

[16] WERNER, Tomáš. ČVUT. *Optimalizace: Elektronická skripta předmětu A4B33OPT* [online]. 19.12.2014. [cit. 2015-05-01]. Dostupné z: https://cw.fel.cvut.cz/wiki/_media/courses/a4b33opt/opt.pdf

[17] ČERMÁK, Libor a Rudolf HLAVIČKA. VUT. *Numerické metody: Numerický výpočet derivace a integrálu* [online]. 24.3.2006. Ústav Matematiky, FSI, Brno [cit. 2015-05-01]. Dostupné z: http://mathonline.fme.vutbr.cz/UploadedFiles/242.pdf

[18] *Matematika II: Vázané extrémy* [online]. s. 308-317 [cit. 2015-05-01]. Dostupné z: http://homen.vsb.cz/~kre40/esfmat2/kapitoly/kapitola_6_2.pdf

[19] JUREK, Miloš. *Numerické metody optimalizace* [online]. [cit. 2015-05-01]. Dostupné z: http://digilib.k.utb.cz/bitstream/handle/10563/3990/jurek_2007_dp.pdf?sequence=1. Diplomová práce. Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně. Vedoucí práce Ing. Radek Matušů.

[20] MICHEJEV, M. *Základy sdílení tepla*. Praha: Průmyslové nakladelství, 1953, 382 s. svazek 9..

[21] RÉDR, Miroslav. *Základy tepelné techniky*. Vyd. 1. Praha: SNTL, 1991, 677 s. ISBN 80-030-0366-0.

[22] Hodnoty vody a vzduchu pro výpočet přestupu tepla. In: LABOUTKA, Karel a Tomáš SUCHÁNEK. *Výpočtové tabulky pro vytápění 9* [online]. 2001 [cit. 2015-05-01]. Dostupné z: http://vytapeni.tzb-info.cz/tabulky-a-vypocty/55-hodnoty-vody-a-vzduchu-pro-vypocet-prestupu-tepla

[23] *Wolfram Mathematica* [online]. [cit. 2015-05-01]. Dostupné z: http://www.wolfram.com/

11 Seznam obrázků

Obr. 2.1 Přímý ohřev [7] ... 15
Obr. 2.2 Nepřímý ohřev [7] ... 16
Obr. 2.3 Polární dielektrikum bez a s přítomností el. pole [8] ... 17
Obr. 2.4 Nepolární dielektrikum bez a s přítomností el. pole [9] ... 17
Obr. 2.5 Vztah mezi reálnou a imaginární složkou proudu pro kondenzátor ... 19
Obr. 2.6 Princip indukčního zařízení [5] ... 20
Obr. 2.7 Závislost hloubky vniku na kmitočtu [5] ... 20
Obr. 3.1 Snellův zákon [5] ... 24
Obr. 3.2 Lambertův zákon [5] ... 24
Obr. 4.1 Orientace vektorů E, H, S ... 35
Obr. 4.2 Válcová soustava ... 36
Obr. 5.1 Uzly ve směru jedné proměnné [12] ... 39
Obr. 5.2 Oblast nahrazená polygonem [13] ... 41
Obr. 5.3 Okrajové podmínky a definiční oblast [12] ... 41
Obr. 5.4 Triangulace geometrie ... 42
Obr. 6.1 Schéma algoritmu silně sdružené úlohy ... 44
Obr. 6.2 Schéma algoritmu kvazi sdružené úlohy ... 44
Obr. 6.3 Schéma algoritmu slabě sdružené úlohy ... 45
Obr. 6.4 Zrendrovaná geometrie ... 46
Obr. 6.5 Příklad výstupu rozložení teploty ... 46
Obr. 7.1 - Minimum a maximum funkce jedné proměnné ... 48
Obr. 7.2 - Maximum a minimum funkce více proměnných ... 49
Obr. 7.3 Vázaný extrém [18] ... 49
Obr. 7.4 - Spádová metoda ... 50
Obr. 7.5 - Cik cak efekt ... 51
Obr. 8.1 Zjednodušená silueta žíhaného dílu ... 52
Obr. 8.2 Skutečná podoba svárů před žíháním ... 59
Obr. 8.3 Skript ... 65
Obr. 8.4 Rozložení teploty t = 30 s ... 66
Obr. 8.5 Rozložení teploty t = 240 s ... 66
Obr. 8.6 Rozložení teploty t = 480 s ... 66
Obr. 8.7 Rozložení teploty t = 720 s ... 66
Obr. 8.8 Rozložení teploty t = 960 s ... 66
Obr. 8.9 Rozložení teploty t = 1200 s ... 66
Obr. 8.10 Vektorový potenciál v oblasti induktoru a ohřívané části dílu ... 66
Obr. 8.11 Přítomnost magnetické indukce v čase t = 1200 s ... 67
Obr. 8.12 Detailní záběr předchozího obrázku 8.11 ... 67
Obr. 8.13 Průběh magnetického pole při ohřívání pro t = 1200 s ... 68
Obr. 8.14 Místa, ve kterých dochází ke ztrátám vyvolanými vířivými proudy ... 68
Obr. 8.15 Vyhodnocovací funkce ... 72
Obr. 8.16 Algoritmus optimalizace ... 73

12 Seznam tabulek

Tab. 1.1 Rozlišení veličin 11
Tab. 4.1 Materiálové charakteristiky pro různá prostředí [10] 30
Tab. 8.1 Časový plán 52
Tab. 8.2 Parametry materiálů pro magnetické pole 58
Tab. 8.3 Parametry materiálů pro tepelné pole 58
Tab. 8.4 Shrnutí výsledků optimalizace s fixním krokem 74
Tab. 8.5 Shrnutí výsledků optimalizace s proměnným krokem 74

13 Seznam grafů

Graf. 8.1 Funkce elektrická vodivosti na teplotě 54
Graf. 8.2 Funkce relativní permeability na teplotě 54
Graf. 8.3 Funkce hustoty na teplotě 55
Graf. 8.4 Funkce měrné tepelné kapacity na teplotě 56
Graf. 8.5 Funkce tepelné vodivosti na teplotě 56
Graf. 8.6 Funkce koeficientu přestupu tepla na teplotě 57
Graf. 8.7 Upravená použitá závislost dle předpisu (7.10) 60
Graf. 8.8 Průběh před a po korekci 60
Graf. 8.9 Časová závislost frekvence 61
Graf. 8.10 Detail grafu 8.9 61
Graf. 8.11 Časová závislost výkonu 62
Graf. 8.12 Časová závislost proudu 63
Graf. 8.13 Vztah teplot a proudů 63
Graf. 8.14 Závislost proudu na čase v jednotlivých intervalech 64
Graf. 8.15 Hledané proudy dle teplotní závislosti 69
Graf. 8.16 Proklad nalezených proudů jednotlivých časových intervalů 69
Graf. 8.17 Srovnání měřené a spočítané teploty 70
Graf. 8.18 Srovnání měřeného a vypočteného výkonu 71
Graf. 8.19 Ukázky typů induktorů 72

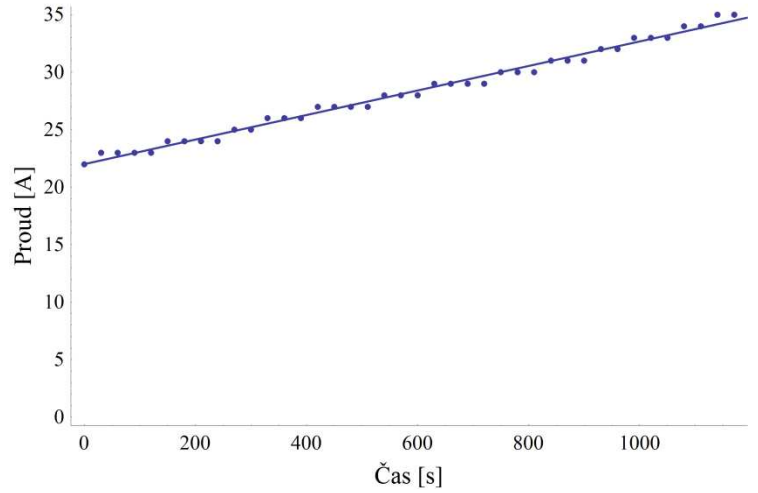
14 Seznam příloh

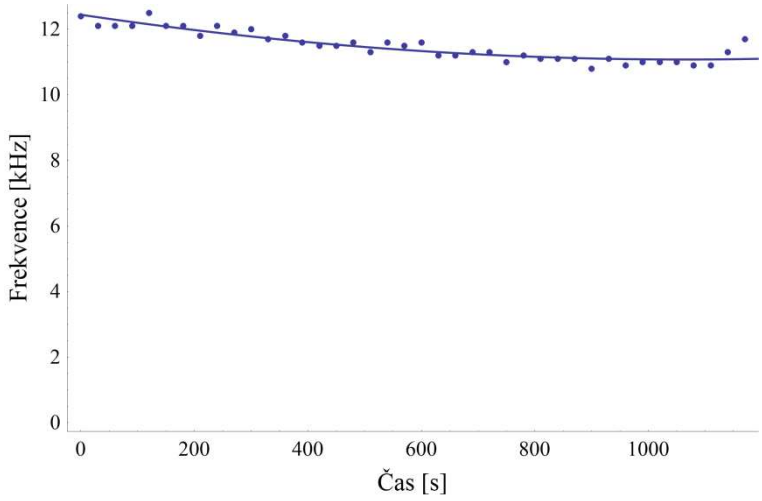
Příloha 1: Naměřená data 80
Příloha 2: Materiálové závislosti 82
Příloha 3: Model 83
Příloha 4: Optimalizace 95
Příloha 5: Seznam souborů přidružených k práci 98

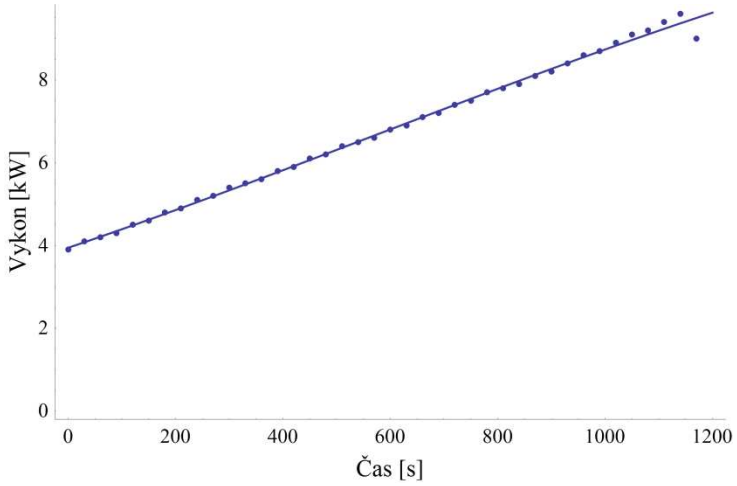
Příloha 1: Naměřená data

Tato příloha obsahuje tabulku naměřených dat a jejich grafický výstup včetně proložení.

čas [s]	teplota [°C]	proud [A]	frekvence [kHz]	výkon [kW]
0	22	22	12,4	3,9
30	-	23	12,1	4,1
60	-	23	12,1	4,2
90	-	23	12,1	4,3
120	-	23	12,5	4,5
150	-	24	12,1	4,6
180	-	24	12,1	4,8
210	-	24	11,8	4,9
240	-	24	12,1	5,1
270	-	25	11,9	5,2
300	-	25	12	5,4
330	-	26	11,7	5,5
360	-	26	11,8	5,6
390	253,7	26	11,6	5,8
420	267,7	27	11,5	5,9
450	281,7	27	11,5	6,1
480	296,7	27	11,6	6,2
510	310	27	11,3	6,4
540	325	28	11,6	6,5
570	339	28	11,5	6,6
600	351	28	11,6	6,8
630	366,1	29	11,2	6,9
660	379,9	29	11,2	7,1
690	394,1	29	11,3	7,2
720	408,3	29	11,3	7,4
750	422,3	30	11	7,5
780	436,2	30	11,2	7,7
810	450,3	30	11,1	7,8
840	463,5	31	11,1	7,9
870	477,5	31	11,1	8,1
900	491,4	31	10,8	8,2
930	505,7	32	11,1	8,4
960	519,9	32	10,9	8,6
990	534,8	33	11	8,7
1020	548	33	11	8,9
1050	562,7	33	11	9,1
1080	578,8	34	10,9	9,2
1110	592,9	34	10,9	9,4
1140	608,9	35	11,3	9,6
1170	634,4	35	11,7	9


Proud [A]
35
30
25
20
15
10
5
0
0
200
400
600
800
1000
Čas [s]


Frekvence [kHz]
12
10
8
6
4
2
0
0
200
400
600
800
1000
Čas [s]

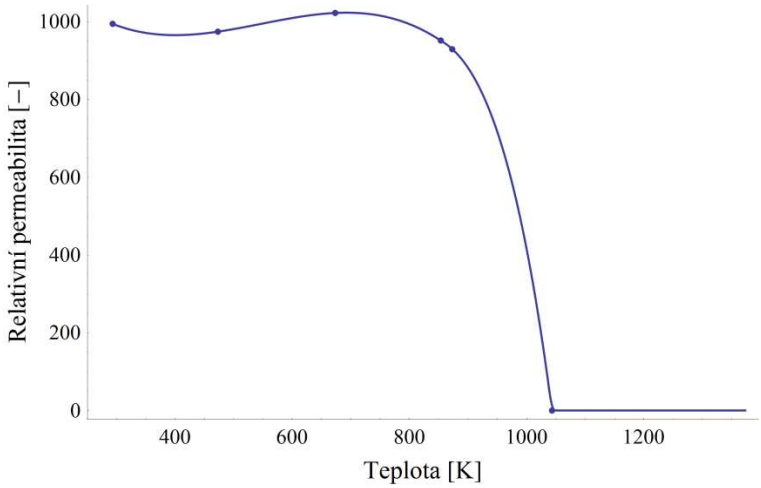

Vykon [kW]
8
6
4
2
0
0
200
400
600
800
1000
1200
Čas [s]

Příloha 2: Materiálové závislosti

Zde jsou uvedeny tabulky a grafy materiálových závislostí, které vznikly prokladem vyobrazených bodů. V ostatních případech se jedná přímo o funkční závislosti, které již jsou v hlavní části textu.

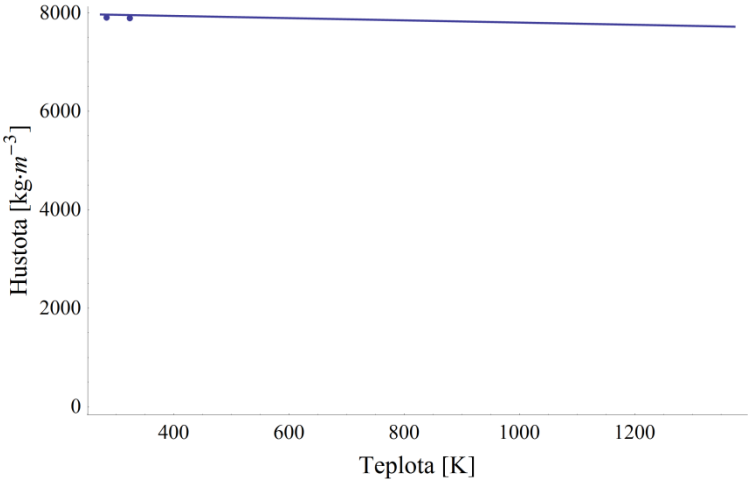
Relativní permeabilita:

Relativní permeabilita [-]	995	975	1023	930	1
Teplota [°C]	20	200	400	600	770



Hustota:

Hustota [kg.m^{-3}]	7902	7893
Teplota [°C]	10	50



Příloha 3: Model

Součástí této přílohy je kód včetně všech koncových grafických výstupů rozložení teplot (po 30 s).

Kód skriptu:

```
def ro(T):
if T >=273.15 and T<=1575.15:
return 7904.25-0.225*(-273.15+T)
else:
return 1.0

def gama(T):
if T >=273.15 and T<=1575.15:
return (5.7*10**6)*(1+0.0065*(T-293.15))**-1
else:
return 1.0

def nyr(T):
if T >=273.15 and T<853.15:
return 1008.33-0.740517*(T-273.15)+0.00379573*(T-273.15)**2 -(4.63186*10**-6)*(T-273.15)**3
elif T>=853.15 and T<1038.15:
return 460.146+0.898872*(T-273.15)+(1.22531*10**-6)*(T-273.15)**3 -(1.1701*10**-12)*(T-273.15)**5 -
(8.68583*10**-18)*(T-273.15)**7
elif T>=1038.15 and T<1048.15:
return 63571.1-15.8655*(T-273.15)-0.0847057*(T-273.15)**2 -0.000110511*(T-273.15)**3 -(3.68002*10**-
8)*(T-273.15)**4 +(2.30054*10**-10)*(T-273.15)**5
elif T>=1048.15 and T<=1575.15:
return 1
else:
return 1.0

def lam(T):
if T >=273.15 and T<=1575.15:
return 0.960656*(643.71-0.007092*(32+(9./5)*(T-273.15))**1.5)**0.5
else:
return 1.0

def cp(T):
if T >=273.15 and T<=1575.15:
return 2326*(0.3241+3.038*(10**-6) *(32+(9./5)*(T-273.15))**1.5)**2
else:
return 1.0

def alfa(T):
if T>=273.15 and T<=1000:
return -0.0828283+1.12785*(T-273.15)**0.5-0.0422461*(T-273.15)+0.0000273622*((T-273.15)**2)-
1.10817*10**-8*((T-273.15)**3)
elif T>=1000 and T<=1575.15:
return 8.16161+0.00123984*(T-273.15)
else:
return 1.0

def roekv(T):
return 0.000945939+347.901*(T**-1)-(2.69823*(10**-7))*T

def cpekv(T):
return 977.562+0.124788*T

def lamekv(T):
return -0.54359+0.00465858*T-0.0000136841*(T**2)+(2.13156*(10**-8))*(T**3)-(1.83125*(10**-
11))*(T**4)+(8.20835*(10**-15))*(T**5)-(1.5001*(10**-18))*(T**6)
```

```
57
58  def tnaTf(T):
59  casf=-569.419+1.93581*T
60  return casf
61
62  def tnaTI(T):
63  casI=-9009.82+78.663*(T)-0.272383*((T)**2)+0.000482996*((T)**3)-4.25761*(10**-
64  7)*((T)**4)+1.49015*(10**-10)*((T)**5)
65  return casI
66
67  def frek(t):
68  return 1000*(12.4444-0.00257021*t+(1.21003*10**-6)*(t**2))
69
70  def proud(t):
71  proudik=718.554-0.246831*t+0.00721585*(t**2)-0.0000145503*(t**3)+1.17901*(10**-8)*(t**4)-3.42045*(10**-
72  12)*(t**5)
73  return proudik
74
75  def fce(T,Tav):
76  import agros2d as a2d
77
78  # problem
79  problem = a2d.problem(clear = True)
80  problem.coordinate_type = "axisymmetric"
81  problem.mesh_type = "triangle"
82  problem.frequency = frek(tnaTf(T))
83  problem.time_step_method = "fixed"
84  problem.time_method_order = 2
85  problem.time_total = 30
86  problem.time_steps = 10
87
88  # fields
89  # heat
90  heat = a2d.field("heat")
91  heat.analysis_type = "transient"
92  heat.matrix_solver = "mumps"
93  heat.transient_initial_condition = Tav
94  heat.number_of_refinements = 2
95  heat.polynomial_order = 2
96  heat.adaptivity_type = "disabled"
97  heat.solver = "linear"
98
99  # boundaries
100 heat.add_boundary("Convection", "heat_heat_flux", {"heat_heat_flux" : 0,
101 "heat_convection_heat_transfer_coefficient" : alfa(T), "heat_convection_external_temperature" : 293.15,
102 "heat_radiation_emissivity" : 0.8, "heat_radiation_ambient_temperature" : 293.15})
103 heat.add_boundary("T=293", "heat_temperature", {"heat_temperature" : 293})
104 heat.add_boundary("Symetry", "heat_heat_flux", {"heat_heat_flux" : 0,
105 "heat_convection_heat_transfer_coefficient" : 0, "heat_convection_external_temperature" : 293,
106 "heat_radiation_emissivity" : 0, "heat_radiation_ambient_temperature" : 293})
107 heat.add_boundary("Convection25", "heat_heat_flux", {"heat_heat_flux" : 0,
108 "heat_convection_heat_transfer_coefficient" : 25, "heat_convection_external_temperature" : 293.15,
109 "heat_radiation_emissivity" : 0, "heat_radiation_ambient_temperature" : 293.15})
110 heat.add_boundary("Convection20", "heat_heat_flux", {"heat_heat_flux" : 0,
111 "heat_convection_heat_transfer_coefficient" : 20, "heat_convection_external_temperature" : 293.15,
112 "heat_radiation_emissivity" : 0, "heat_radiation_ambient_temperature" : 293.15})
113 heat.add_boundary("Convection30", "heat_heat_flux", {"heat_heat_flux" : 0,
114 "heat_convection_heat_transfer_coefficient" : 30, "heat_convection_external_temperature" : 293.15,
115 "heat_radiation_emissivity" : 0, "heat_radiation_ambient_temperature" : 293.15})
116 # materials
117 heat.add_material("Steel", {"heat_velocity_x" : 0, "heat_velocity_y" : 0, "heat_velocity_angular" : 0,
118 "heat_conductivity" : lam(T), "heat_volume_heat" : 0, "heat_density" : ro(T), "heat_specific_heat" : cp(T)})
```

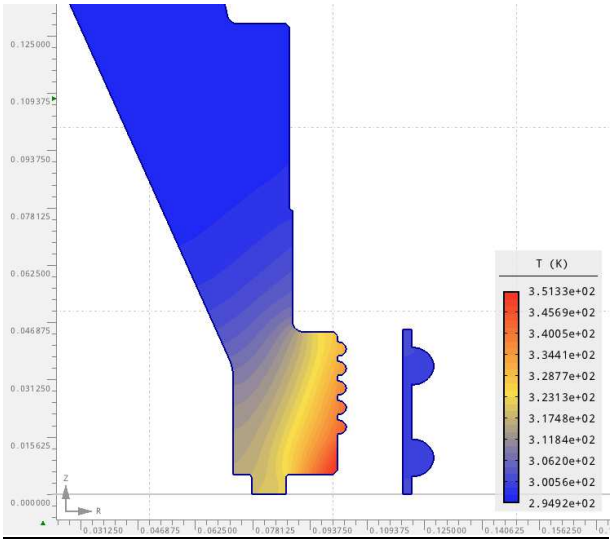
```
heat.add_material("Copper", {"heat_velocity_x" : 0, "heat_velocity_y" : 0, "heat_velocity_angular" : 0,
"heat_conductivity" : 393, "heat_volume_heat" : 0, "heat_density" : 8900, "heat_specific_heat" : 390})
heat.add_material("Air_ekv", {"heat_velocity_x" : 0, "heat_velocity_y" : 0, "heat_velocity_angular" : 0,
"heat_conductivity" : lamekv(T), "heat_volume_heat" : 0, "heat_density" : roekv(T), "heat_specific_heat" :
cpekv(T)})
# magnetic
magnetic = a2d.field("magnetic")
magnetic.analysis_type = "harmonic"
magnetic.matrix_solver = "mumps"
magnetic.transient_time_skip = 0
magnetic.number_of_refinements = 1
magnetic.polynomial_order = 2
magnetic.adaptivity_type = "disabled"
magnetic.solver = "linear"

# boundaries
magnetic.add_boundary("A=0", "magnetic_potential", {"magnetic_potential_real" : 0, "magnetic_potential_imag" :
0})

# materials
magnetic.add_material("Steel", {"magnetic_permeability" : nyr(T), "magnetic_conductivity" : gama(T),
"magnetic_remanence" : 0, "magnetic_remanence_angle" : 0, "magnetic_velocity_x" : 0, "magnetic_velocity_y" : 0,
"magnetic_velocity_angular" : 0, "magnetic_current_density_external_real" : 0,
"magnetic_current_density_external_imag" : 0, "magnetic_total_current_prescribed" : 0,
"magnetic_total_current_real" : 0, "magnetic_total_current_imag" : 0})
magnetic.add_material("Air", {"magnetic_permeability" : 1, "magnetic_conductivity" : 0, "magnetic_remanence" :
0, "magnetic_remanence_angle" : 0, "magnetic_velocity_x" : 0, "magnetic_velocity_y" : 0,
"magnetic_velocity_angular" : 0, "magnetic_current_density_external_real" : 0,
"magnetic_current_density_external_imag" : 0, "magnetic_total_current_prescribed" : 0,
"magnetic_total_current_real" : 0, "magnetic_total_current_imag" : 0})
magnetic.add_material("Copper", {"magnetic_permeability" : 1, "magnetic_conductivity" : 5.6e+07,
"magnetic_remanence" : 0, "magnetic_remanence_angle" : 0, "magnetic_velocity_x" : 0, "magnetic_velocity_y" : 0,
"magnetic_velocity_angular" : 0, "magnetic_current_density_external_real" : 0,
"magnetic_current_density_external_imag" : 0, "magnetic_total_current_prescribed" : 1,
"magnetic_total_current_real" : proud(tnaTI(T)), "magnetic_total_current_imag" : 0})
magnetic.add_material("Air_ekv", {"magnetic_permeability" : 1, "magnetic_conductivity" : 0,
"magnetic_remanence" : 0, "magnetic_remanence_angle" : 0, "magnetic_velocity_x" : 0, "magnetic_velocity_y" : 0,
"magnetic_velocity_angular" : 0, "magnetic_current_density_external_real" : 0,
"magnetic_current_density_external_imag" : 0, "magnetic_total_current_prescribed" : 0,
"magnetic_total_current_real" : 0, "magnetic_total_current_imag" : 0})

# geometry
geometry = a2d.geometry
geometry.add_edge(0.072771, 0.0318586, 0.072771, 0.0054356, boundaries = {"heat" : "Convection20"})
geometry.add_edge(0.0873125, 0.0046736, 0.0873125, -1.3e-15, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.100142, 0.0054356, 0.0880745, 0.0054356, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.100141, 0.0443731, 0.101219, 0.0432955, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.101219, 0.0432955, 0.101219, 0.0417981, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.101219, 0.0375594, 0.101219, 0.0364641, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.101219, 0.0322254, 0.101219, 0.0311301, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.101219, 0.0268914, 0.101219, 0.0257961, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.101219, 0.0215574, 0.101219, 0.0204621, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.101219, 0.0162234, 0.101219, 0.00651256, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0889, 0.0474211, 0.0889, 0.0775462, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0889, 0.0775462, 0.0887095, 0.0775462, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.100141, 0.0443731, 0.091948, 0.0443731, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0889, 0.0474211, 0.091948, 0.0443731, angle = 90, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0871245, 0.128346, 0.0741454, 0.128346, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0882015, 0.0780542, 0.0882015, 0.127269, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0882015, 0.0780542, 0.0887095, 0.0775462, angle = 90, boundaries = {"heat" :
"Convection"})
geometry.add_edge(0.0882015, 0.127269, 0.0871245, 0.128346, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0711673, 0.130745, 0.0614121, 0.175523, boundaries = {"heat" : "Convection"})
```

```
geometry.add_edge(0.0601635, 0.181254, 0.0595548, 0.184048, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0711673, 0.130745, 0.0741454, 0.128346, angle = 77.7097, boundaries = {"heat" :
"Convection"})
geometry.add_edge(0.0601635, 0.181254, 0.0614121, 0.175523, angle = 90, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0595548, 0.184048, 0.05461, 0.193497, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.05461, 0.249536, 0.05461, 0.244424, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0573786, 0.251663, 0.0573786, 0.251155, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0573786, 0.251663, 0.05461, 0.251663, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0554572, 0.25064, 0.0573786, 0.251155, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0554572, 0.25064, 0.05461, 0.249536, angle = 75, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0573786, 0.243281, 0.0573786, 0.242773, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0573786, 0.243281, 0.055753, 0.243281, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.05461, 0.244424, 0.055753, 0.243281, angle = 90, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.05461, 0.241154, 0.05461, 0.230803, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0554572, 0.242258, 0.05461, 0.241154, angle = 75, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0573786, 0.242773, 0.0554572, 0.242258, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0573786, 0.228676, 0.055753, 0.228676, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.055753, 0.228676, 0.05461, 0.227533, angle = 90, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0573786, 0.228676, 0.0573786, 0.229184, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0554572, 0.229699, 0.0573786, 0.229184, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.05461, 0.230803, 0.0554572, 0.229699, angle = 75, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0573786, 0.224993, 0.055753, 0.224993, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.055753, 0.224993, 0.05461, 0.22385, angle = 90, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0573786, 0.224993, 0.0573786, 0.225501, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0554572, 0.226016, 0.0573786, 0.225501, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.05461, 0.22712, 0.0554572, 0.226016, angle = 75, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.05461, 0.227533, 0.05461, 0.22712, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0573786, 0.22112, 0.055753, 0.22112, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.055753, 0.22112, 0.05461, 0.219977, angle = 90, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0573786, 0.22112, 0.0573786, 0.221628, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0554572, 0.222143, 0.0573786, 0.221628, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.05461, 0.223247, 0.0554572, 0.222143, angle = 75, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.05461, 0.22385, 0.05461, 0.223247, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.05461, 0.219977, 0.05461, 0.208737, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0573786, 0.207594, 0.0573786, 0.207086, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0573786, 0.207594, 0.055753, 0.207594, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.05461, 0.208737, 0.055753, 0.207594, angle = 90, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0554572, 0.206571, 0.0573786, 0.207086, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0554572, 0.206571, 0.05461, 0.205467, angle = 75, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0573786, 0.203911, 0.0573786, 0.203403, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0573786, 0.203911, 0.055753, 0.203911, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.05461, 0.205054, 0.055753, 0.203911, angle = 90, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0554572, 0.202888, 0.0573786, 0.203403, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0554572, 0.202888, 0.05461, 0.201784, angle = 75, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.05461, 0.205054, 0.05461, 0.205467, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0573786, 0.200101, 0.0573786, 0.199593, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0573786, 0.200101, 0.055753, 0.200101, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.05461, 0.201244, 0.055753, 0.200101, angle = 90, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0554572, 0.199078, 0.0573786, 0.199593, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0554572, 0.199078, 0.05461, 0.197974, angle = 75, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.05461, 0.201244, 0.05461, 0.201784, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.05461, 0.197974, 0.05461, 0.193497, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.041275, 0.256743, 0.041275, 0.320243, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.041275, 0.256743, 0.041275, 0.251663, angle = 66.797, boundaries = {"heat" :
"Convection"})
geometry.add_edge(0.041275, 0.251663, 0.05461, 0.251663, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0406881, 0.326171, 0.0410056, 0.320513, angle = 90, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0409575, 0.326441, 0.0409575, 0.330251, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0409575, 0.330251, 0.0406881, 0.33052, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0409575, 0.326441, 0.0406881, 0.326171, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.041275, 0.320243, 0.0410056, 0.320513, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0406881, 0.33052, 0.038735, 0.33052, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.038735, 0.335092, 0.038735, 0.33052, angle = 90, boundaries = {"heat" : "Convection"})
```

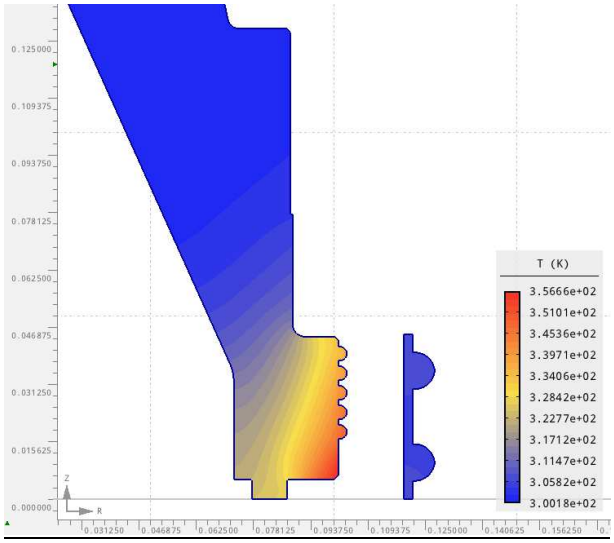
```
geometry.add_edge(0.038735, 0.336931, 0.038735, 0.370144, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0314325, 0.373065, 0.0314325, 0.372053, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0314325, 0.372053, 0.0314325, 0.370144, angle = 73.6117, boundaries = {"heat" :
"Convection"})
geometry.add_edge(0.0314325, 0.370144, 0.038735, 0.370144, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0212735, 0.386232, 0.0228132, 0.388899, boundaries = {"heat" : "Convection30"})
geometry.add_edge(0.0314325, 0.373065, 0.0325101, 0.374143, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0314325, 0.383566, 0.0325101, 0.382488, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0325101, 0.382488, 0.0325101, 0.374143, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.038735, 0.336931, 0.038735, 0.335092, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0880745, 0.0054356, 0.0873125, 0.0046736, angle = 90, boundaries = {"heat" :
"Convection"})
geometry.add_edge(0.072771, 0.0318586, 0.071657, 0.0370599, angle = 24.1767, boundaries = {"heat" :
"Convection25"})
geometry.add_edge(0.0770255, 0.0054356, 0.072771, 0.0054356, boundaries = {"heat" : "Convection20"})
geometry.add_edge(0.0777875, 0.0046736, 0.0777875, -1.3e-15, boundaries = {"heat" : "Convection20"})
geometry.add_edge(0.0777875, 0.0046736, 0.0770255, 0.0054356, angle = 90, boundaries = {"heat" :
"Convection20"})
geometry.add_edge(0.0777875, -1.3e-15, 0.0873125, -1.3e-15, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0212735, 0.14929, 0.0212735, 0.386232, boundaries = {"heat" : "Convection30"})
geometry.add_edge(0.071657, 0.0370599, 0.0212735, 0.14929, boundaries = {"heat" : "Convection25"})
geometry.add_edge(0.0314325, 0.387822, 0.0314325, 0.383566, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.100142, 0.0054356, 0.101219, 0.00651256, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.119019, 0.045, 0.119019, 0, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.121519, 0, 0.119019, 0, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.121519, 0, 0.121519, 0.005, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.121519, 0.005, 0.127519, 0.01, angle = 90, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.127519, 0.01, 0.121519, 0.015, angle = 90, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.121519, 0.015, 0.121519, 0.03, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.121519, 0.03, 0.127519, 0.035, angle = 90, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.127519, 0.035, 0.121519, 0.04, angle = 90, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.121519, 0.04, 0.121519, 0.045, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.121519, 0.045, 0.119019, 0.045, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0228132, 0.388899, 0.0295132, 0.388899, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.0295132, 0.388899, 0.0314325, 0.387822, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.101219, 0.0417981, 0.101459, 0.0415581, angle = 90, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.103619, 0.0396787, 0.101459, 0.0415581, angle = 90, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.101459, 0.0377994, 0.103619, 0.0396787, angle = 90, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.101459, 0.0377994, 0.101219, 0.0375594, angle = 90, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.101219, 0.0364641, 0.101459, 0.0362241, angle = 90, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.103619, 0.0343448, 0.101459, 0.0362241, angle = 90, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.101459, 0.0324654, 0.103619, 0.0343448, angle = 90, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.101459, 0.0324654, 0.101219, 0.0322254, angle = 90, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.101219, 0.0311301, 0.101459, 0.0308901, angle = 90, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.103619, 0.0290108, 0.101459, 0.0308901, angle = 90, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.101459, 0.0271314, 0.103619, 0.0290108, angle = 90, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.101459, 0.0271314, 0.101219, 0.0268914, angle = 90, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.101219, 0.0257961, 0.101459, 0.0255561, angle = 90, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.103619, 0.0236767, 0.101459, 0.0255561, angle = 90, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.101459, 0.0217974, 0.103619, 0.0236767, angle = 90, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.101459, 0.0217974, 0.101219, 0.0215574, angle = 90, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.101219, 0.0204621, 0.101459, 0.0202221, angle = 90, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.103619, 0.0183428, 0.101459, 0.0202221, angle = 90, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.101459, 0.0164634, 0.103619, 0.0183428, angle = 90, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0.101459, 0.0164634, 0.101219, 0.0162234, angle = 90, boundaries = {"heat" : "Convection"})
geometry.add_edge(0, 3.4365, 6, 3.4365, boundaries = {"heat" : "T=293", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(6, 3.4365, 6, -3.5785, boundaries = {"heat" : "T=293", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(6, -3.5785, 0, -3.5785, boundaries = {"heat" : "T=293", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(0, -3.5785, 0, 0, boundaries = {"heat" : "T=293", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(0, 0.388899, 0, 0, boundaries = {"heat" : "Symetry", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(0, 3.4365, 0, 0.388899, boundaries = {"heat" : "T=293", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_label(0.801169, 0.546789, materials = {"heat" : "none", "magnetic" : "Air"})
geometry.add_label(0.0491161, 0.152854, materials = {"heat" : "Steel", "magnetic" : "Steel"})
```

```
308 geometry.add_label(0.120183, 0.0251398, materials = {"heat" : "Copper", "magnetic" : "Copper"})
309
310 problem.solve()
311 teplota=heat.volume_integrals(labels=[1])# volani parametru teplotnich objemovych vlastnosti na oblast pod
312 oznacenim 1 (zihany dil)
313 Tk=teplota["T"]/teplota["V"]# vypocet stredni hodnoty
314 return
315 (Tk,magnetic.volume_integrals(labels=[1]),magnetic.volume_integrals(labels=[2]),heat.local_values(0.1036,0.0397
316 3, time_step=10, adaptivity_step = None, solution_type = "normal"))
317 # vystupem funkce jsou 4 promenne: stredni teplota, informace o magnetickych objemovych vlastnostech oblasti 1 a
318 2(induktor), informace o teplotnich vlastnostech v definovanem bode (svar)
319
320
321 Tpoc=295
322 Tav=295
323 k=fce(Tpoc,Tav)# volani hlavni funkce s nazvem "fce" se dvema vstupy
324 list_tep=[]# prazdny seznam urceny na ukladani vysledku funkce
325 list_tep.append(Tpoc)# pridani prvni pocatecni teploty
326
327 for i in range(39):# 39*30=1170 + 1*30 z prvniho cyklu = 1200s
328 list_tep.append([k[0],k[1]["Pj"],k[2]["Pj"],k[3]["T"]])# plneni seznamu vystupem funkce v kazdem cyklu
329 k=fce(k[0],k[0])# volani funkce s parametry z predchoziho cyklu
```

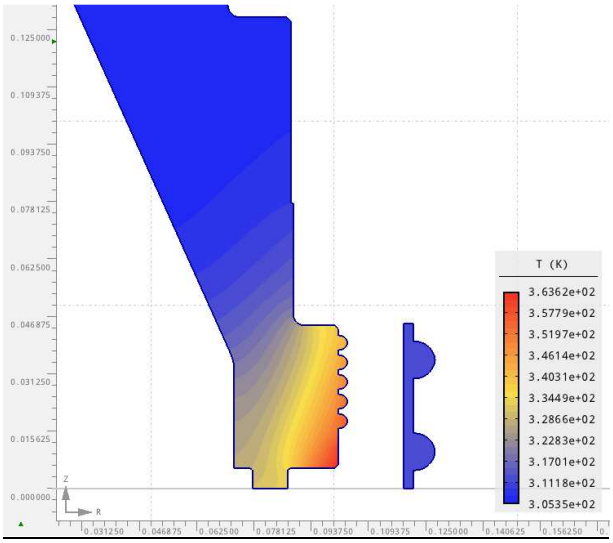
Grafický výstup:



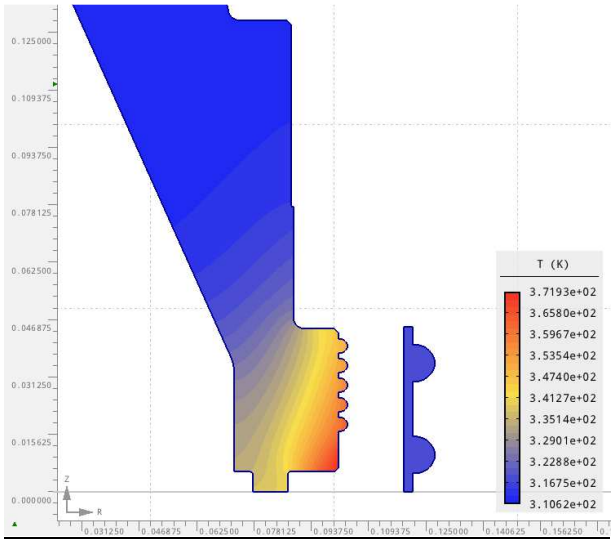
Rozložení 1 - 30 s



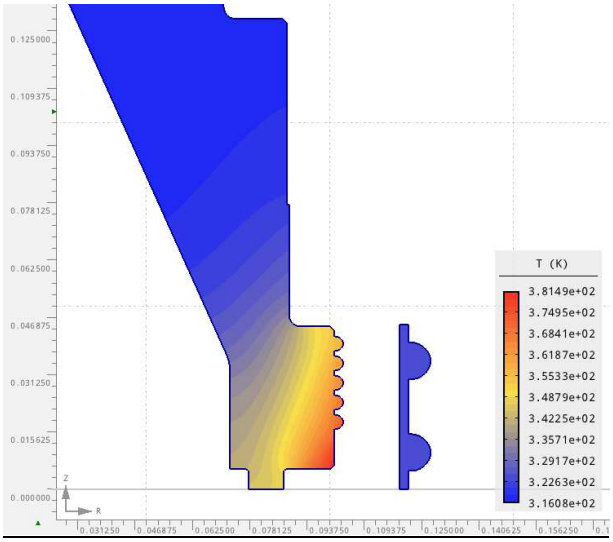
Rozložení 2 - 60s



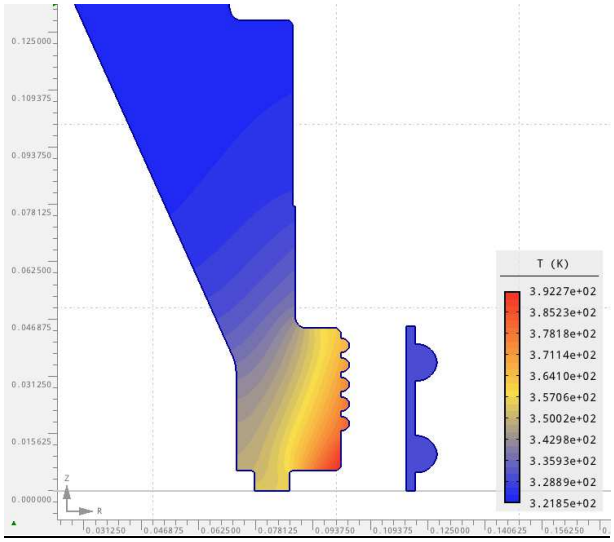
Rozložení 3 - 90 s



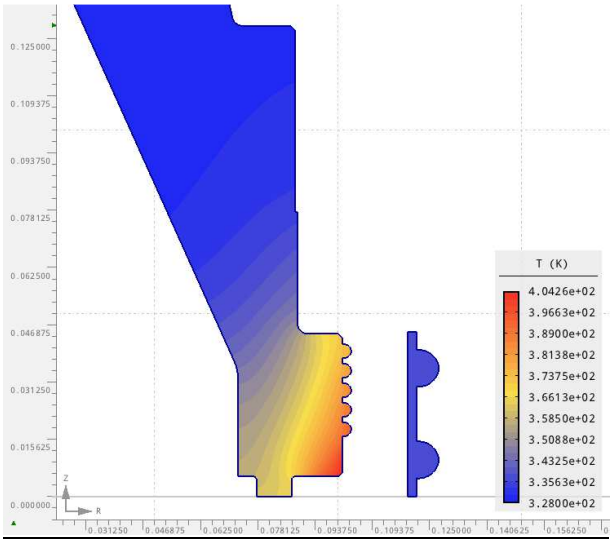
Rozložení 4 - 120 s



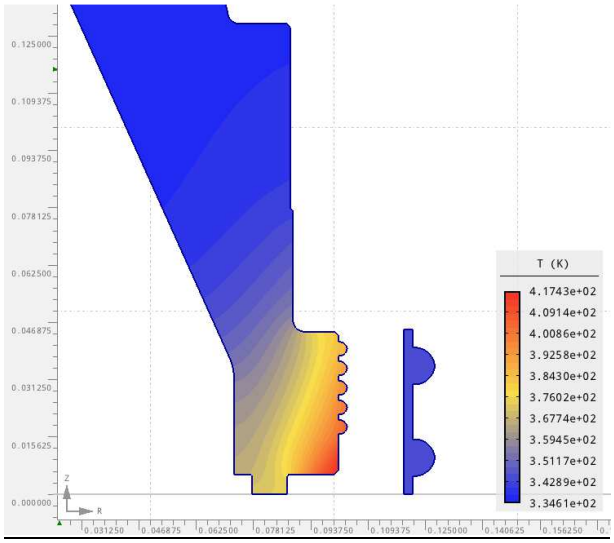
Rozložení 5 - 150 s



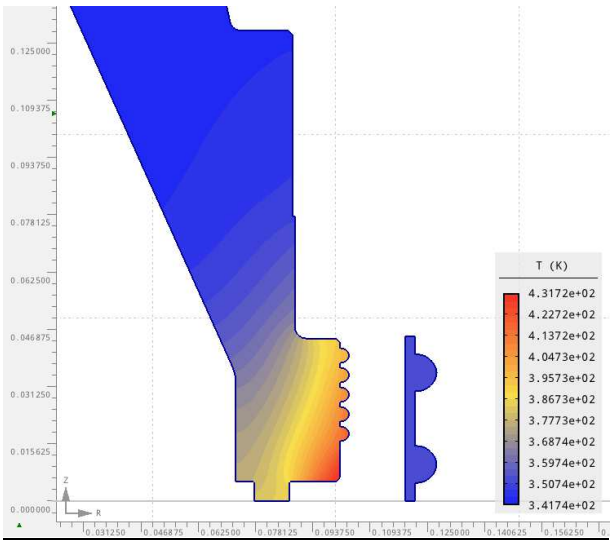
Rozložení 6 - 180 s



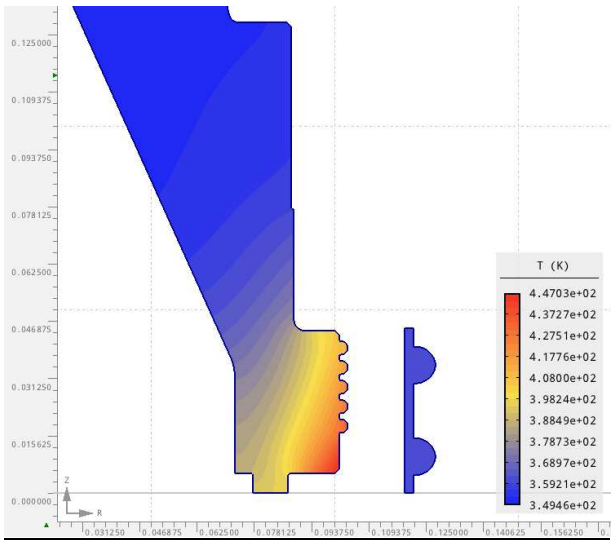
Rozložení 7 - 210 s



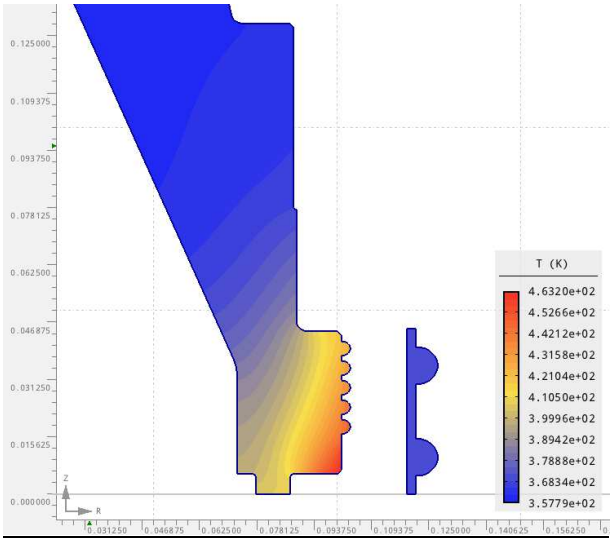
Rozložení 8 - 240 s



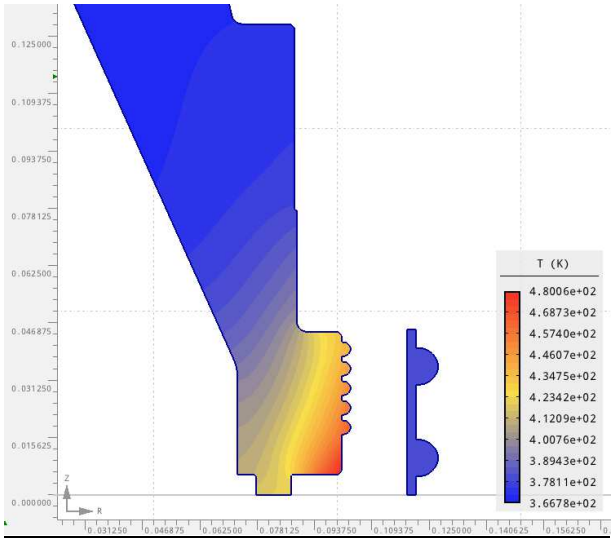
Rozložení 9 - 270 s



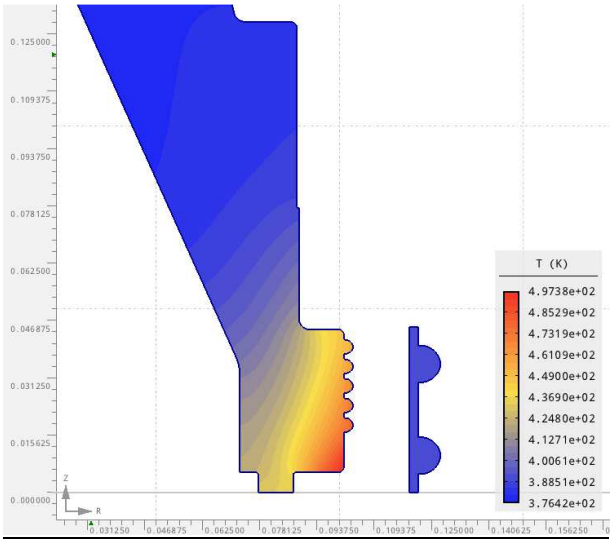
Rozložení 10 - 300 s



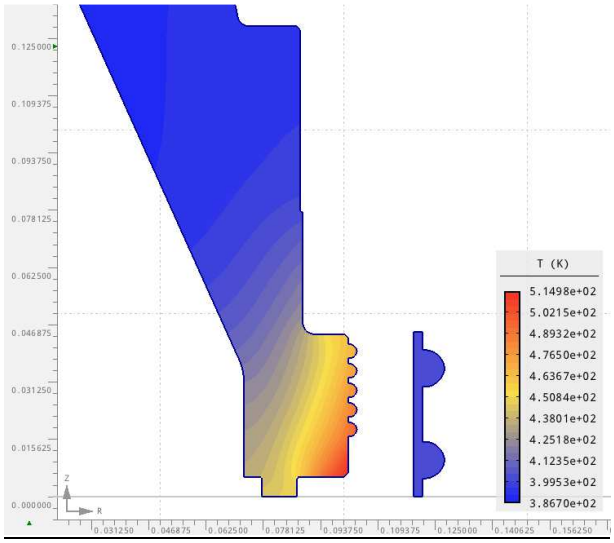
Rozložení 11 - 330 s



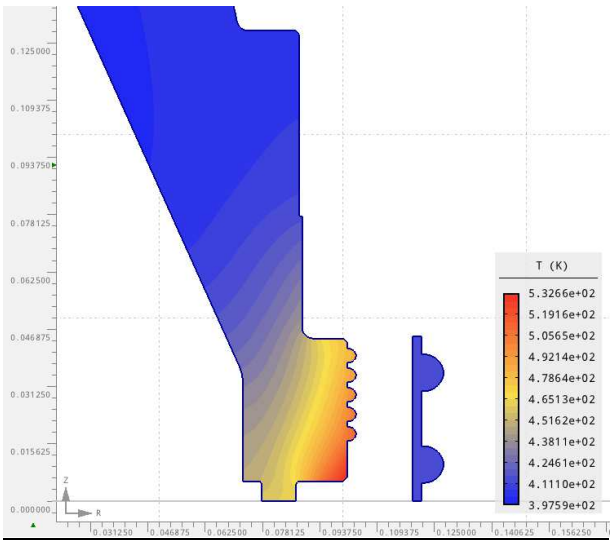
Rozložení 12 - 360 s



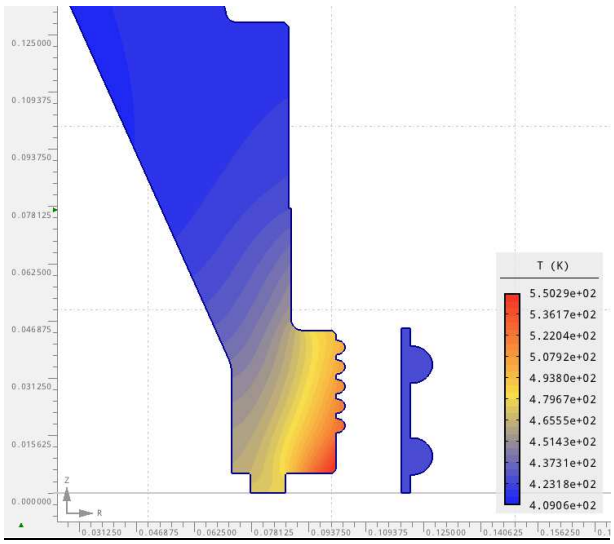
Rozložení 13 - 390 s



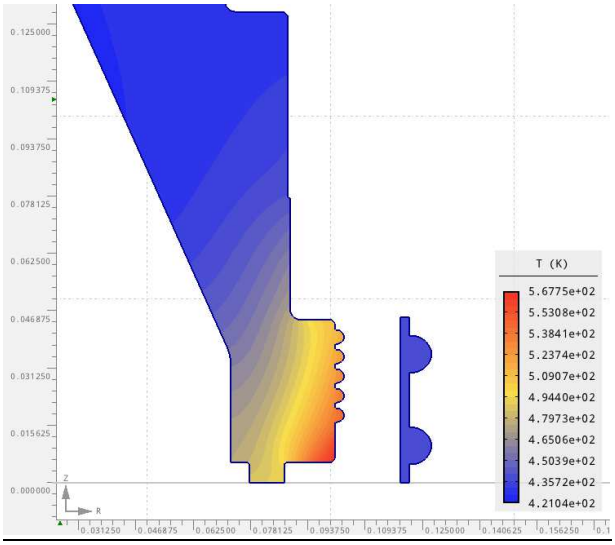
Rozložení 14 - 420 s



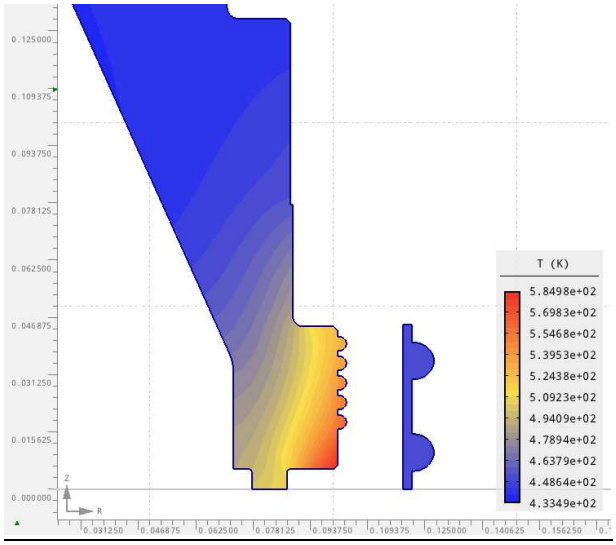
Rozložení 15 - 450 s



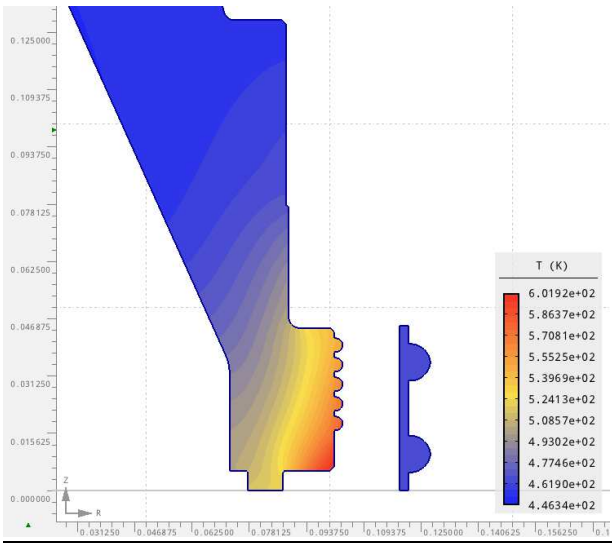
Rozložení 16 - 480 s



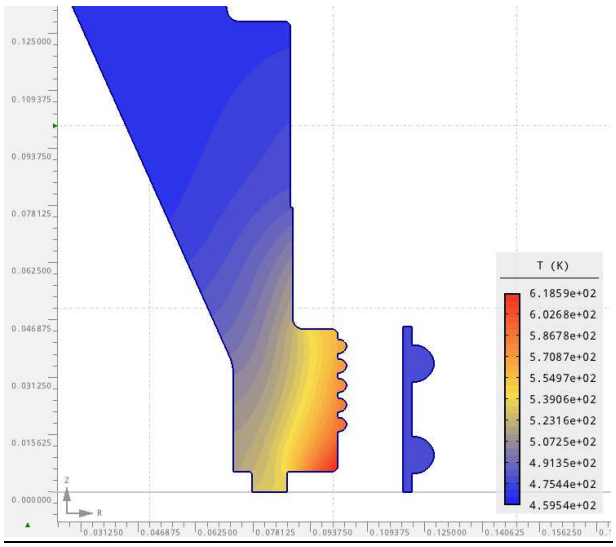
Rozložení 17 - 510 s



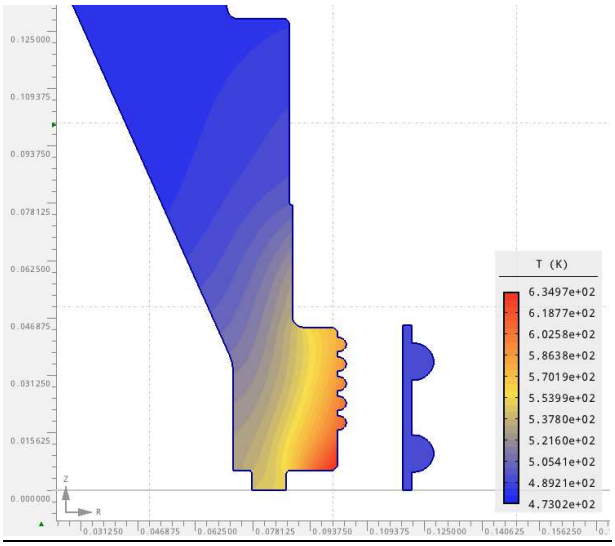
Rozložení 18 - 540 s



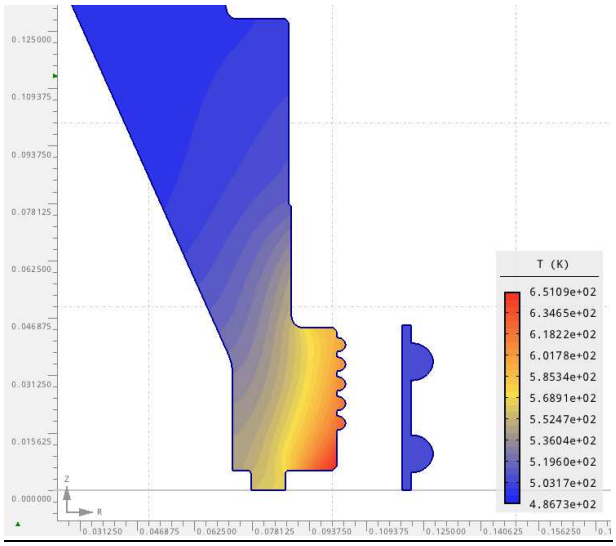
Rozložení 19 - 570 s



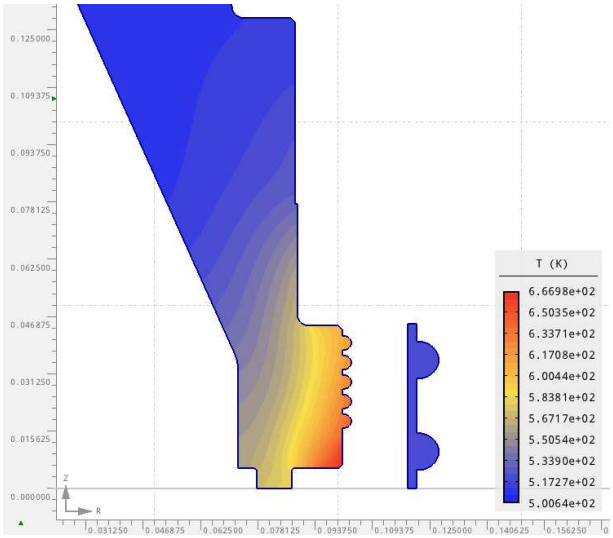
Rozložení 20 - 600 s



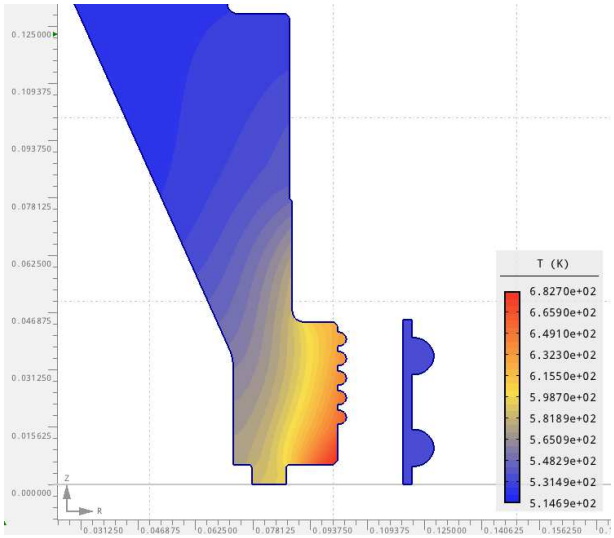
Rozložení 21 - 630 s



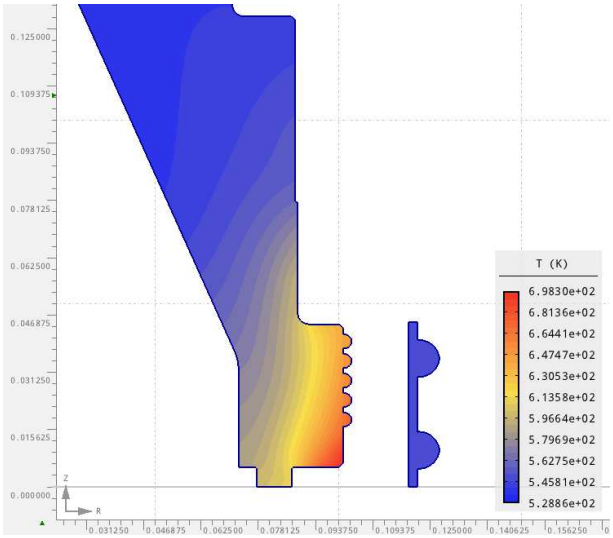
Rozložení 22 - 660 s



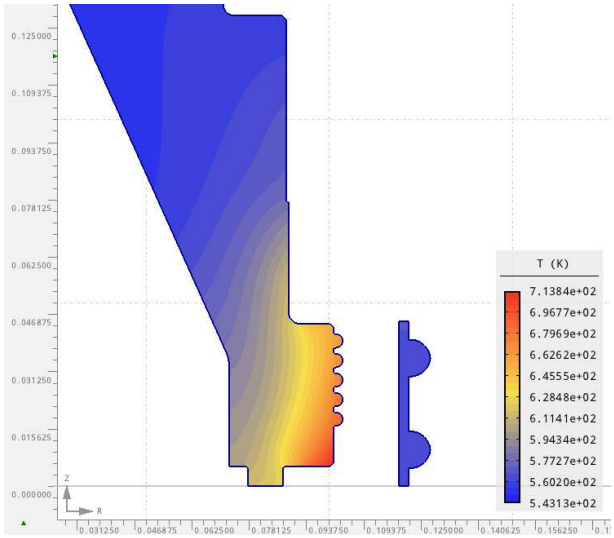
Rozložení 23 - 690 s



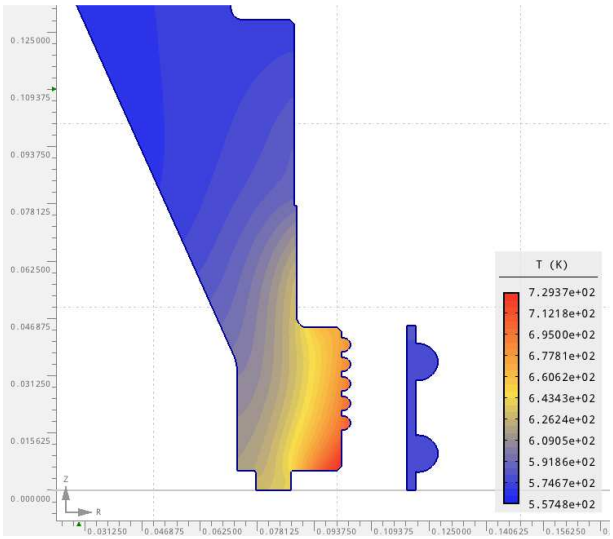
Rozložení 24 - 720 s



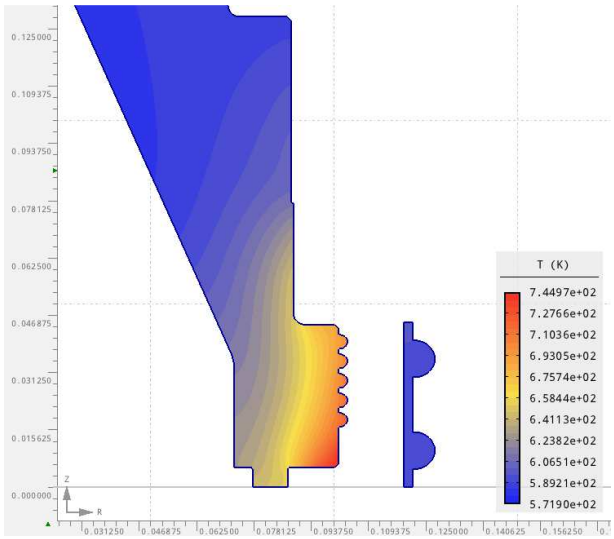
Rozložení 25 - 750 s



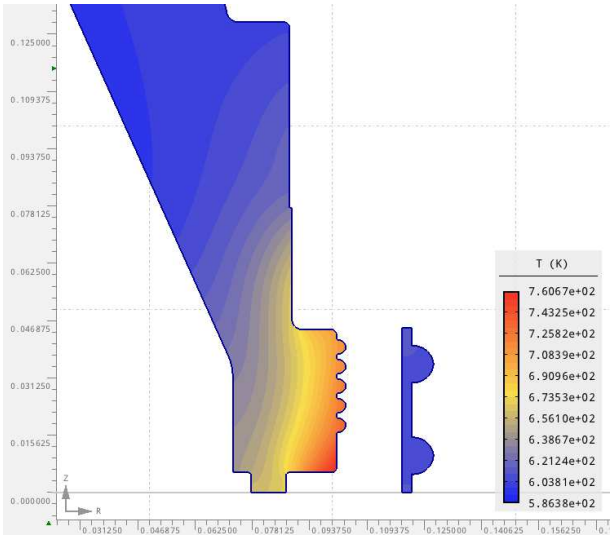
Rozložení 26 - 780 s



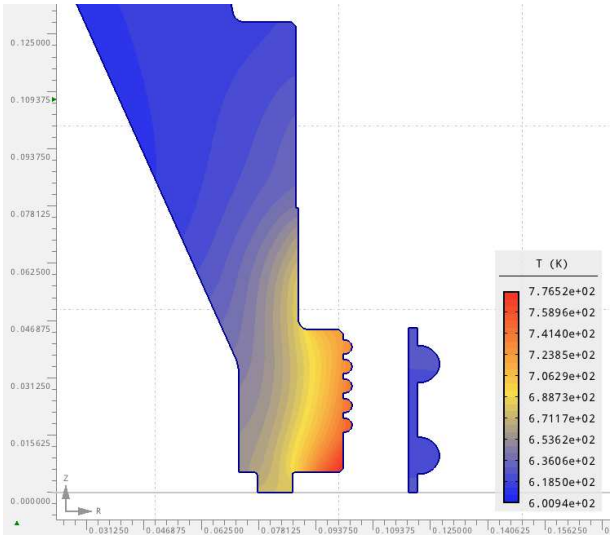
Rozložení 27 - 810 s



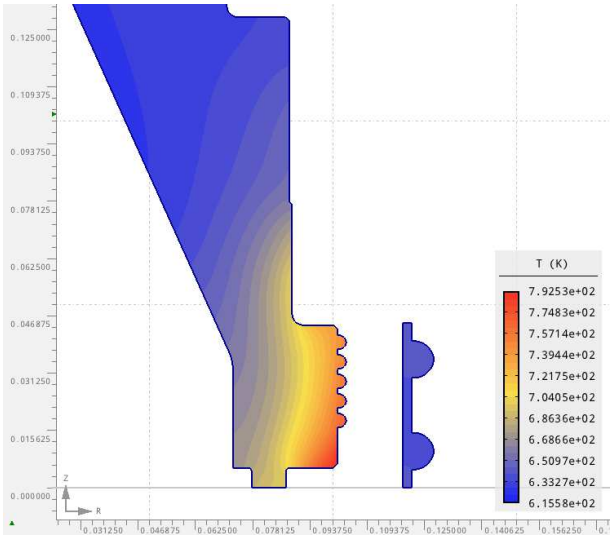
Rozložení 28 - 840 s



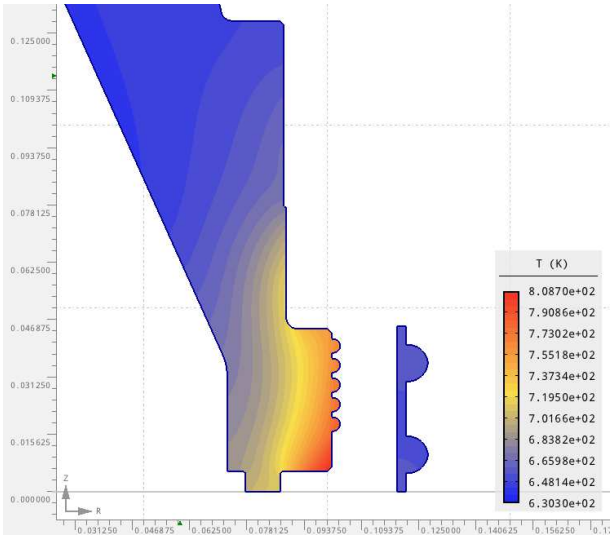
Rozložení 29 - 870 s



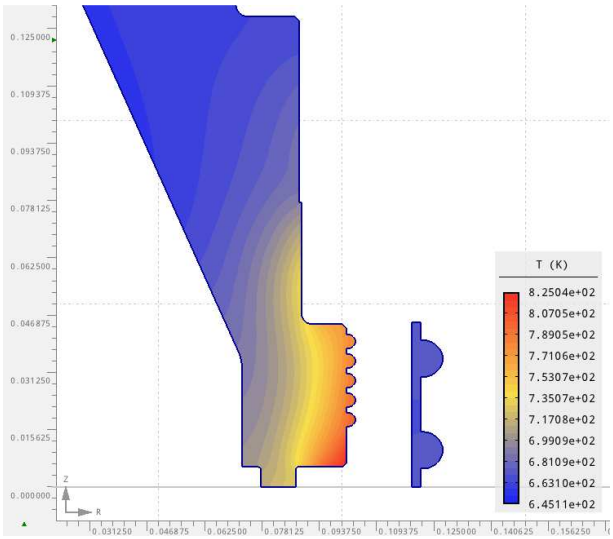
Rozložení 30 - 900 s



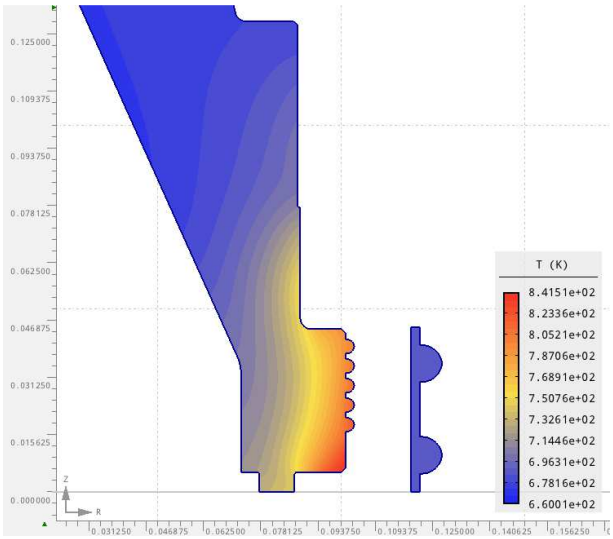
Rozložení 31 - 930 s



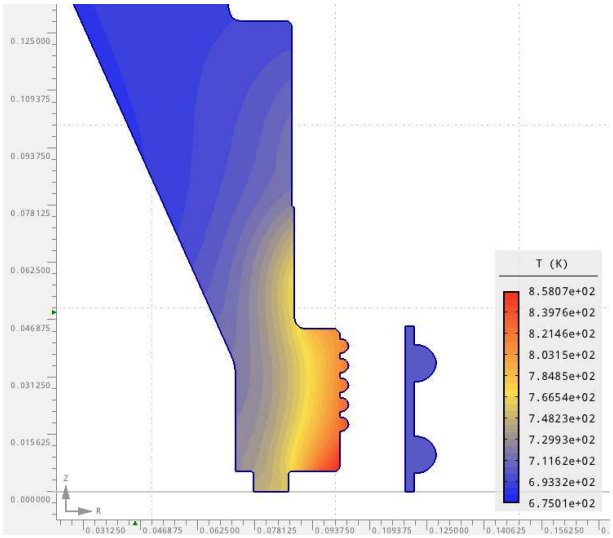
Rozložení 32 - 960 s



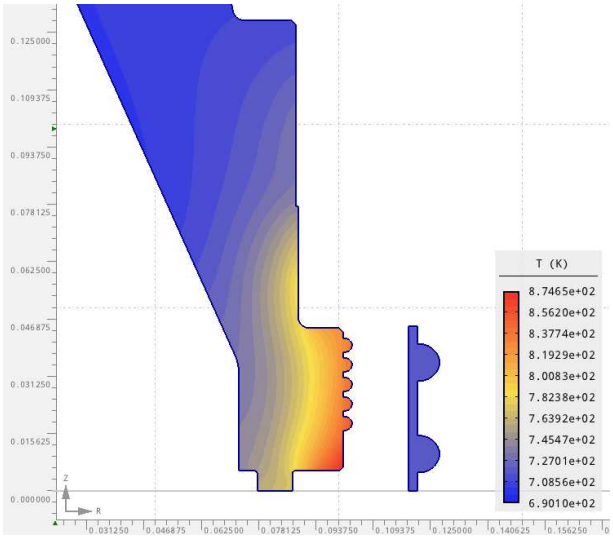
Rozložení 33 - 990 s



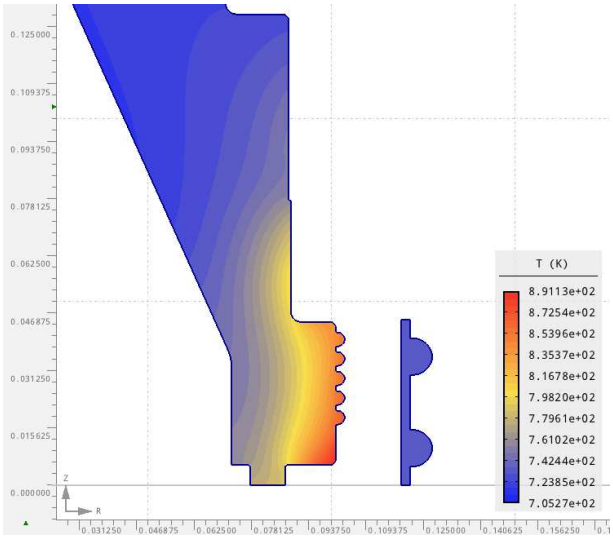
Rozložení 34 - 1020 s



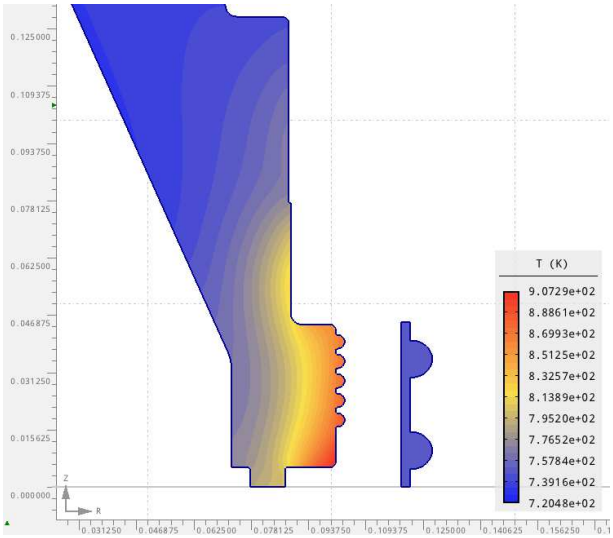
Rozložení 35 - 1050 s



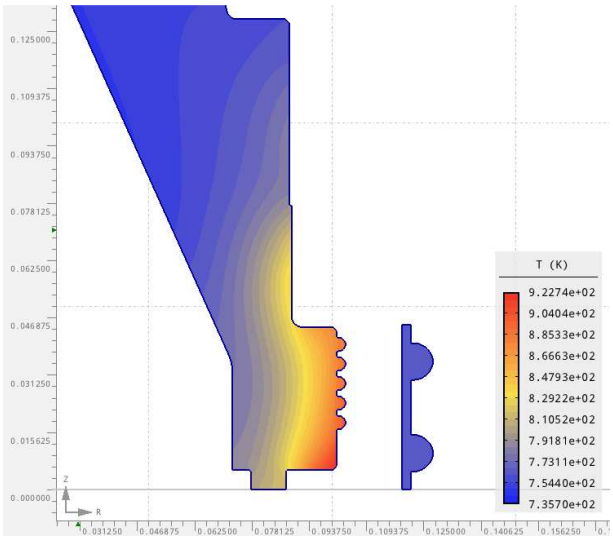
Rozložení 36 - 1080 s



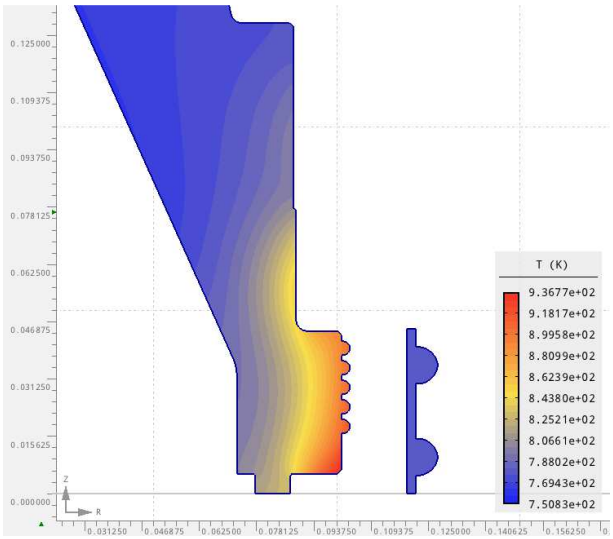
Rozložení 37 - 1110 s



Rozložení 38 - 1140 s



Rozložení 39 - 1170 s



Rozložení 40 - 1200 s

Příloha 4: Optimalizace

Zde je zobrazen kód optimalizace. Pro svou shodnost s kódem modelu je uvedena jen odlišná závěrečná část (ř. 310 a dále).

Kód skriptu s fixním krokem:

```
310 problem.solve()
311 teplota=heat.volume_integrals(labels=[1])
312 Tk=teplota["T"]/teplota["V"]
313 return (Tk,heat.local_values(0.1036,0.03973, time_step=10, adaptivity_step = None, solution_type =
314 "normal"),heat.local_values(0.1036,0.03436, time_step=10, adaptivity_step = None, solution_type =
315 "normal"),heat.local_values(0.1036,0.029, time_step=10, adaptivity_step = None, solution_type =
316 "normal"),heat.local_values(0.1036,0.02367, time_step=10, adaptivity_step = None, solution_type =
317 "normal"),heat.local_values(0.1036,0.01835, time_step=10, adaptivity_step = None, solution_type = "normal"))
318
319 def hodnoceni(l):#hodnotici funkce
320 s=abs(float(l[0][0])-reference)+abs(float(l[0][1])-reference)+abs(float(l[0][2])-reference)+abs(float(l[0][3])-
321 reference)+abs(float(l[0][4])-reference)
322 return s
323
324 reference=float(908.7)
325
326 def poloha(x):# funkce volajici hlavni funkci s argumentem pozice induktoru
327 Tpoc=295
328 Tav=295
329 k=fce(Tpoc,Tav,float(x))
330 for i in range(39):
331 list_tep=[]
332 if i==38:
333 k=fce(k[0],k[0],float(x))
334 list_tep.append((k[1]["T"],k[2]["T"],k[3]["T"],k[4]["T"],k[5]["T"]))
335 optimal=hodnoceni(list_tep)
336 print("Vyhodnocovaci funkce nabyva hodnoty: ",optimal)
337 print("Pocitana poloha je pro: ",float(x),"m")
338 else:
339 k=fce(k[0],k[0],float(x))
340 return optimal
341
342 #zakladni definice pozic
343 x1=poloha(0.00)# vychozi pozice
344 x2=poloha(0.001)# prvni nastrel
345 krok=0.001
346 vstupkl=0.001
347 vstupzap=0
348 minuskrok=-0.001
349
350 #vyhodnoceni stavu vzajemnych pozic
351 if (x1>x2):
352 while (x1>x2):#do kladnych hodnot
353 vstupkl=vstupkl+krok
354 x1=x2
355 x2=poloha(vstupkl)
356 else:
357 print("Idealni poloha induktoru proti zakladni pozici je posunuta o ",float(vstupkl-krok)," m")
358 else:
359 x3=poloha(float(vstupzap-krok))
360 if (x3>x1 and x2>x1):
361 print("Idealni poloha induktoru je v zakladni pozici. Tj.",float(vstupzap),"m.")
362 else:
363 while (x1<x2):#do zapornych hodnot
364 vstupzap=vstupzap-krok
```

```
365 if (vstupzap==minuskrok):
366 x2=x1
367 x1=x3
368 else:
369 x2=x1
370 x1=poloha(vstupzap)
371 else:
372 print("Idealni poloha induktoru proti zakladni pozici je posunuta o ",vstupzap+krok," m")
```

Kód skriptu s proměnným krokem:

```
310 problem.solve()
311 teplota=heat.volume_integrals(labels=[1])
312 Tk=teplota["T"]/teplota["V"]
313 return (Tk,heat.local_values(0.1036,0.03973, time_step=10, adaptivity_step = None, solution_type =
314 "normal"),heat.local_values(0.1036,0.03436, time_step=10, adaptivity_step = None, solution_type =
315 "normal"),heat.local_values(0.1036,0.029, time_step=10, adaptivity_step = None, solution_type =
316 "normal"),heat.local_values(0.1036,0.02367, time_step=10, adaptivity_step = None, solution_type =
317 "normal"),heat.local_values(0.1036,0.01835, time_step=10, adaptivity_step = None, solution_type = "normal"))
318
319 def hodnoceni(l):
320 s=abs(float(l[0][0])-reference)+abs(float(l[0][1])-reference)+abs(float(l[0][2])-reference)+abs(float(l[0][3])-
321 reference)+abs(float(l[0][4])-reference)
322 return s
323
324 reference=float(908.7)
325
326 def poloha(x):
327 Tpoc=295
328 Tav=295
329 k=fce(Tpoc,Tav,float(x))
330 for i in range(39):
331 list_tep=[]
332 if i==38:
333 k=fce(k[0],k[0],float(x))
334 list_tep.append((k[1]["T"],k[2]["T"],k[3]["T"],k[4]["T"],k[5]["T"]))
335 optimal=hodnoceni(list_tep)
336 print("Vyhodnocovaci funkce nabyva hodnoty: ",optimal)
337 print("Pocitana poloha je pro: ",float(x),"m")
338 else:
339 k=fce(k[0],k[0],float(x))
340 return optimal
341
342 #zakladni definice pozic
343 k1=-0.0072
344 k2=-0.007
345 k3=-0.0068
346 x1=poloha(k1)# vychozi pozice
347 x2=poloha(k2)# prvni nastrel
348 x3=poloha(k3)
349 print("x1,x2,x3 startovni: ",x1,x2,x3)
350 print("k1,k2,k3: ",k1,k2,k3)
351 mezkrok=0.010#funguje zaroven jako maximalni krok
352
353 #vyhodnoceni stavu vzajemnych pozic
354 if (x1>x2 and x3>x2):
355 print("Idealni poloha induktoru je ve vychozi pozici ",k2," m")
356 if (x1<x2):
357 while (x1<x2):#do zap hodnot
358 krok=(abs(x2-x1)/float(x2))*mezkrok #jenom posun, nutno pricist k predchozimu kroku
359 k1=k1-krok
360 x2=x1
361 x1=poloha(k1)
```

```
362 print("Zaporna poloha je pro krok: ",k1," m. Odpovida hodnote: ",x1)
363 else:
364 print("Idealni poloha induktoru proti zakladni pozici je posunuta o ",float(k1+krok)," m")
365 else:
366 while (x3<x2):#do klad hodnot
367 krok=(abs(x2-x3)/float(x2))*mezkrok
368 k3=k3+krok
369 x2=x3
370 x3=poloha(k3)
371 print("Kladna poloha je pro krok: ",k3," m. Odpovida hodnote: ",x3)
372 else:
373 print("Idealni poloha induktoru proti zakladni pozici je posunuta o ",float(k3-krok)," m")
374
```

Příloha 5: Seznam souborů přidružených k práci

Pro vysoké množství souborů souvisejících s touto prací jsou přiloženy soubory ve formátu *.rar, ve kterých se nachází veškerá potřebná data.

- Optimalizace.rar
- Prilohy.rar
- Program.rar