



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta elektrotechnická

Katedra radioelektroniky

Určování polohy dálkoměrnou metodou. Algoritmy a jejich přesnost.

Position determination by ranging method. Algorithms and their accuracy.

Diplomová práce

Studijní program: Komunikace, multimédia a elektronika
Studijní obor: Bezdrátové komunikace

Vedoucí práce: prof. Ing. František Vejražka, CSc.

Václav Navrátil

Praha 2015

Zadání

Ve svázaném výtisku: Originál / kopie oficiálního zadání diplomové práce

Určování polohy dálkoměrnou metodou. Algoritmy a jejich přesnost.

Position determination by ranging method. Algorithms and their accuracy.

Popište známé algoritmy určování polohy v dálkoměrných systémech (především družicových). Analyzujte je z hlediska přesnosti a hardwarové náročnosti. Přesnost se pokuste stanovit teoretickým rozbohem, ten ověřte simulací. Zvolený algoritmus se pokuste implementovat a ověřte jeho vlastnosti.

Anotace

Cílem diplomové práce je analyzovat a porovnat známé algoritmy určení polohy aplikované na systémy družicové navigace. Kromě tradičních algoritmů založených na měření pseudovzdáleností se práce věnuje využití nejednoznačných měření fáze nosné vlny (RTK). Je zkoumána konvergence iterativních algoritmů určení polohy a jejich přesnost. Dále je simulací potvrzován vliv činitelů DOP a je určeno statistické rozložení chyb odhadu polohy.

Klíčová slova

GNSS, GPS, určení polohy, RTK

Annotation

This diploma thesis aims at analysis and comparison of known positioning algorithms applied in navigation satellite systems. Besides traditional pseudorange-based algorithms the thesis interests in the use of the ambiguous carrier phase measurements (RTK). The convergence and accuracy of the iterative positioning algorithms is examined. Furthermore the influence of DOP coefficients is verified and the statistical distribution of positioning error is derived.

Keywords

GNSS, GPS, positioning, RTK

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

V Praze 7. května 2015

podpis studenta

Poděkování

Chtěl bych touto cestou poděkovat vedoucímu práce prof. Ing. Františku Vejražkovi, CSc. za cenné rady, spojené s formální i obsahovou stránkou této práce, a za jeho vstřícný přístup. Dále také děkuji kolektivu Centra integrovaných družicových a pozemských navigačních technologií.

Děkuji své rodině, která mi stále poskytuje podporu nejen při studiu a umožnila mi tak věnovat se této práci.

Obsah

Zadání	1
Anotace	2
Prohlášení	3
Poděkování	4
Obsah	5
Seznam použitých zkratk	7
Seznam použitých symbolů	8
1. Úvod	10
2. Výpočet polohy (PVT)	12
2.1. Souřadnicové systémy	12
2.1.1. WGS 84 ECEF	12
2.1.2. ECI	14
2.1.3. ENU	15
2.2. Navigační úloha	16
2.2.1. Měřené veličiny	16
2.2.2. Soustava navigačních rovnic	17
2.2.3. Určení polohy družic	18
2.3. Tradiční metody	20
2.3.1. Iterativní algoritmy	20
2.3.2. Neiterativní Bancroftův algoritmus	24
2.4. ML odhad polohy	26
2.5. DOP, Dilution of Precision	28
2.5.1. Hustoty pravděpodobnosti chyb	30
2.6. Metody vylepšující výkonost	32
2.6.1. Carrier Smoothing	32
2.6.2. DGPS	32
2.7. Kalmanova filtrace	34
2.7.1. Integrace GNSS a inerciální navigace	35

Obsah

3. Real Time Kinematics (RTK)	37
3.1. Princip činnosti	37
3.1.1. Řešení celočíselných nejednoznačností fáze	39
3.2. RTKLIB	45
3.2.1. Implementace metody dvojitého diferencí	46
3.2.2. Implementace rozšířeného Kalmanova filtru (EKF)	46
4. Implementace drážního lokátoru	49
4.1. Popis technického vybavení	49
4.1.1. Přístrojové vybavení	49
4.1.2. Programové vybavení	50
4.1.3. Referenční stanice	50
4.2. Ukázka činnosti	51
4.2.1. Statická měření	51
4.2.2. Dynamická měření	53
5. Závěr	55
Literatura	56
A. Porovnání konvergence iterativních PVT metod	59
B. Přesnost Bancroftova algoritmu	61
C. Obrázky k vlivu DOP	63
D. Ověření hustot pravděpodobnosti chyb	71

Seznam použitých zkratek

AWGN	Additive White Gaussian Noise - Gaussovský bílý šum
BPSK	Binary Phase Shift Keying - binární fázová modulace
C/A	Coarse/Acquisition
CE	Complex Envelope - komplexní obálka
CNR	Carrier to Noise Ratio - odstup nosné od šumu
DD	Double Differences - dvojité diference, metoda RTK
DGPS	Diferenciální GPS
DLL	Delay Locked Loop
DOP	Dilution of Precision
ECEF	Earth-Centered, Earth-Fixed - statický souřadnicový systém
ECI	Earth-Centered, Inertial - inerciální souřadnicový systém
EKF	Extended Kalman Filter - rozšířený Kalmanův filtr
ENU	East, North, Up - lokální souřadnicový systém
FFT	Fast Fourier Transform - rychlá Fourierova transformace
GNSS	Global Navigation Satellite System
GPS	Global Positioning System
LLA	Longitude, Latitude, Altitude - zeměpisná šířka, délka a výška nad povrchem
ML	Maximum Likelihood - maximální věrohodnost
PLL	Phase Locked Loop - smyčka fázového závěsu
PRN	Pseudorandom Noise - pseudonáhodný šum
PVT	Position, Velocity, Time
RTCM	The Radio Technical Commission for Maritime Services
RTK	Real-Time Kinematics
WGS 84	World Geodetic System 1984

Seznam použitých symbolů

Poznámky k notaci: skalární veličiny jsou značeny obyčejnými písmeny velké i malé latinky a řecké abecedy (a , A , α). Pro označení vektorů je využito pouze malých písmen latinky a písmen řecké abecedy, pro rozlišení je použit tučný duktus písma (\mathbf{a} , $\boldsymbol{\alpha}$). Pro matice jsou vyhrazena velká písmena latinky v tučném provedení (\mathbf{A}). Transpozice vektorů a matic je značena horním indexem indexem \mathbf{A}^T .

b	bias přijímače
c	rychlost světla
\mathbf{D}	matice replik signálu (ML odhad polohy, sekce 2.4) diagonální matice $\mathbf{L}^T \mathbf{D} \mathbf{L}$ dekompozice
δ	Diracův impuls
δ_ρ	korekční člen pro pseudovzdálenost (DGPS)
ϵ	chyba, odchylka
f_D	Dopplerův frekvenční posun
f_{sa}	vzorkovací frekvence
φ	fáze, ve stupních
Φ	fáze, v celých cyklech
ϕ	fáze, v metrech zeměpisná šířka
\mathbf{F}_k	matice přechodu EKF
\mathbf{G}	matice geometrie konstelace
\mathbf{G}'	matice geometrie konstelace (v soustavě ENU)
γ	koeficient gradientní metody
$\mathbf{h}(\mathbf{x})$	vektor modelu měření EKF
$\mathbf{H}(\mathbf{x})$	Jakobián vektoru modelu měření EKF
\mathbf{I}	jednotková matice, matice identity
\mathbf{K}_k	Kalmanovský zisk
L	koeficient carrier-smoothing rekurzivního filtru

Seznam použitých symbolů

λ	vlnová délka zeměpisná délka koeficient Levenberg-Marquardtovy metody
M	počet družic
N_0^i	počet celých cyklů fáze (vztaženo k i -té družici a referenčnímu přijímači)
N_{10}^{ij}	dvojitá diference počtu celých cyklů fáze
P_k	kovarianční matice stavového vektoru EKF
Q_k	kovarianční matice systémových šumů (EKF)
r	vektor polohy
r	geometrická vzdálenost
R_{ENU}	matice rotace do lokální souřadné soustavy
ρ	pseudovzdálenost
σ^2	rozptyl
t	čas
τ	zpoždění
θ	zeměpisná délka
x	stavový vektor EKF
y	vektor měření EKF
$\mathbf{1}$	jednotkový směrový vektor
$\underline{1}_x, \underline{1}_y, \underline{1}_z$	složky jednotkového směrového vektoru

1. Úvod

Znalost polohy je velmi důležitou součástí jakéhokoliv navigačního systému. V současnosti je běžnou praxí určovat polohu pomocí Globálních Navigačních Satelitních Systémů (GNSS). Mezi ně patří např. americký systém NAVSTAR - GPS (NAVigation System using Time And Range - Global Positioning System), ruský GLONASS (Globalnaja Navigacionnaja Sputnikovaja Sistěma), budovaný evropský systém Galileo, či čínský systém BEIDOU. V této práci se budeme věnovat téměř výhradně systému GPS, většina principů je však platná pro všechny GNSS, které pracují s dálkoměrnou metodou.

Tato metoda je označována zkratkou TOA (Time Of Arrival), nebo také trilaterace. Je měřena vzdálenost od uživatele k družici se známou polohou. Tím získáme pro každou družici kulovou plochu, na které leží hledaná poloha. Budeme-li mít k dispozici 3 měření, můžeme určit polohu uživatele ve třídímním prostoru. Vzdálenost je odhadována na základě známé rychlosti šíření elektromagnetických vln a času šíření signálu od družice k přijímači. Bude ukázáno, že ve skutečnosti jsou k odhadu polohy potřeba alespoň 4 družice, protože je nutné odhadnout ještě jeden parametr - ofset systémového času a času přijímače. V této práci se věnujeme pouze TOA způsobu určení polohy.

Dalším možným principem je například hyperbolické určení polohy, TDOA (Time Difference Of Arrival), aplikované ve starším terestriálním systému Omega [1], systému Loran, resp. jeho inovované verzi eLoran. Při využití TDOA je, jak název napovídá, měřen rozdíl času přijetí signálu od synchronizovaných vysílačů se známou pozicí. Křivka, pro kterou je rozdíl vzdáleností (časů) konstantní, je v rovině hyperbolou. Průsečíkem s další hyperbolou je možné získat odhad polohy v rovině.

První systém družicové navigace Transit využíval k určení polohy měření změny kmitočtu vlivem Dopplerova efektu [1]. Přibližuje-li se satelit, je kmitočet vyšší než nominální (vysílaný), v opačném případě je nižší. V okamžiku, kdy je družice nejbližší, dochází ke snižování kmitočtu. Při známém času a parametrech oběžné dráhy je známa i poloha družice. Vzdálenost družice je možno odhadnout ze strmosti přechodu z vysoké na nízkou frekvenci. Čím blíže bude přijímač k družici, tím více bude převažovat radiální složka vzájemné rychlosti družice a přijímače. Změna Dopplerova kmitočtu pak bude strmější.

Systém GPS patří mezi tzv. pasivní radionavigační systémy a používá kódové dělení. Díky tomu je možné pracovat na jednom nosném kmitočtu a zároveň poskytnout možnost určení polohy neomezenému počtu uživatelů. Výhodou také může být, že uživatel nemusí vysílat, a tedy prozradit svoji polohu.

Problém určení polohy, rychlosti a času je často označován jako odhad PVT (Position, Velocity, Time). Nejdříve se pokusíme stručně ukázat princip a způsoby výpočtu polohy z naměřených pseudovzdáleností pomocí tradičních iterativních algoritmů. Dále se

1. Úvod

budeme krátce věnovat i Bancroftovu neiterativnímu algoritmu a řešení úlohy bez obvyklého měření pseudovzdáleností - ML odhadu polohy. V další části podrobíme analýze činitele DOP (Dilution of Precision), které umožňují odhadnout přesnost odhadu polohy v závislosti na geometrii konstelace družic. V navazující sekci jsou ukázány některé z používaných metod, které slouží k vylepšení vlastností odhadu polohy.

Další kapitola je věnována velmi přesnému určování polohy s využitím referenční měřicí stanice a měření fáze nosné vlny - Real Time Kinematics (RTK). Nejdříve budou popsány principy určení polohy touto metodou. Je zahrnut i stručný popis metody LAMBDA, která slouží k řešení fázové nejednoznačnosti (tzv. Integer Ambiguity Resolution). RTK bylo dlouhou dobu spojováno s vysokými pořizovacími náklady. Většina běžných, cenově dostupných přijímačů umožňuje pouze výstup odhadu polohy, jeho kvalitu, případně seznam viditelných družic. Obvykle je výstup ve formátu NMEA. Některé z přijímačů však umožňují i tzv. „raw data“ výstup, tedy přímo hodnoty naměřených pseudovzdáleností, akumulované fáze, Dopplerova frekvenčního posunu a síly signálu. Je možné tato měření využít jako vstupy pro RTK algoritmy a dosáhnout lepších výsledků než běžný algoritmus implementovaný v přijímači. Během přípravy této práce byl autor seznámen s open-source balíkem RTKLIB, který implementuje některé z metod RTK. S výhodou byla tato knihovna programů využita pro ověření vlastností tohoto typu odhadu polohy. Dále bylo zkoumáno, zda je možné tento balík dále použít, případně ho upravit nebo rozšířit.

Práce je uzavřena kapitolou, která se věnuje implementaci lokátoru pro použití na železnici. V aplikaci je třeba dosáhnout přesnosti lepší než 1 m, což nebylo při běžném měření ani DGPS (Diferenciální GPS) splněno. Proto bylo zvoleno řešení s využitím RTK, které v případě správné funkce splňuje tuto hodnotu s rezervou. Dosažené výsledky jsou doloženy výstupy statických měření, která proběhla přímo s prototypem drážního lokátoru, či podobnou sestavou.

2. Výpočet polohy (PVT)

2.1. Souřadnicové systémy

Abychom se mohli věnovat určování polohy, je třeba nejdříve definovat potřebné souřadnicové systémy. Nejdříve se budeme věnovat globálnímu souřadnicovému systému, své využití však najde i lokální souřadný systém.

2.1.1. WGS 84 ECEF

Tvar naší planety je velmi nepravidelný. Obvykle je reprezentován tzv. geoidem. Jedná se o gravitační ekvipotenciální plochu, která nejlépe aproximuje střední hladinu moře [1]. Pro naše účely je však zapotřebí jednoduššího popisu, aproximace geoidu jednoduchým geometrickým tvarem - elipsoidem. Systém GPS využívá referenčního rámce WGS 84 (World Geodetic System 1984), vyvinutého americkou Defence Mapping Agency.

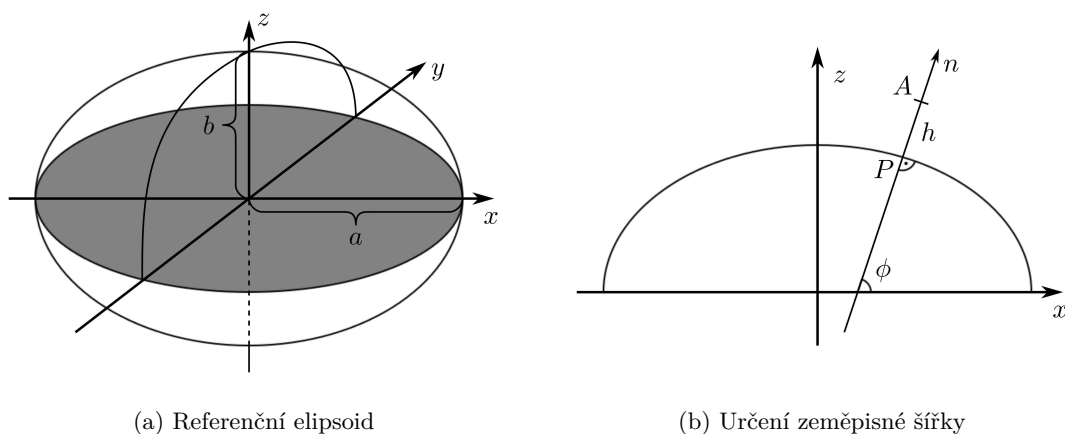
Jedná se o tzv. ECEF (Earth Centered, Earth Fixed) souřadnicový systém, počátek je tedy ve středu Země. Osa x v tomto případě prochází bodem s nulovou zeměpisnou šířkou i délkou, osa z směřuje k severnímu pólu. Osa y leží v rovině rovníku a prochází bodem se zeměpisnou délkou 90° východně. Tvoří tak pravotočivý Kartézský souřadnicový systém, který budeme označovat jako WGS 84 XYZ.

V této Kartézské soustavě je definován tzv. referenční elipsoid. Jeho střed je totožný se středem souřadné soustavy, hlavní poloosa a leží na ose x . Vedlejší poloosa b kopíruje osu z . Celý zploštělý elipsoid je rotačně symetrický podle osy z , viz obrázek 2.1a. V následující tabulce jsou shrnuty parametry referenčního elipsoidu WGS 84 [1, 2].

Parametr		Hodnota
Délka hlavní poloosy	a	6 378 137, 0 m
Zploštění	f	$1/298.257223563$
Normovaná excentricita	e	$\sqrt{0.00669437999014}$
Délka vedlejší poloosy	b	6 356 752, 3142 m

Tabulka 2.1.: Parametry referenčního elipsoidu WGS 84

2. Výpočet polohy (PVT)



Obrázek 2.1.: WGS 84

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} \quad (2.1)$$

$$f = 1 - \frac{b}{a} \quad (2.2)$$

Vzhledem k tomuto elipsoidu je definována soustava označovaná jako LLA, nebo LLH (Latitude, Longitude, Altitude/Height). Často je také používán termín geodetické souřadnice. Uvažujme nyní bod A , který neleží na povrchu referenčního elipsoidu. Tímto bodem je vedena normála k povrchu elipsoidu, označme ji n , průsečík označme P . Rovina, ve které leží osa z i normála n svírá s rovinou xz úhel λ . Ten udává zeměpisnou délku (Longitude).

V řezu (rovině) zn je definována zeměpisná šířka (Latitude) jako úhel ϕ , který svírá normála s rovinou rovníku (rovinou xy). Výška nad elipsoidem h je vzdálenost bodu P a A . Pokud leží bod A mimo elipsoid, je hodnota h kladná, v opačném případě záporná. Grafické znázornění je na obrázku 2.1b.

Převod z LLA do XYZ

Známe-li geodetické souřadnice (LLA) bodu, je možné vypočítat Kartézskou (XYZ) reprezentaci vektoru polohy v uzavřeném tvaru. Následující rovnice popisuje výpočet [2]. První, zlomková, část výrazu vždy určuje souřadnice bodu P na elipsoidu. Druhá část

2. Výpočet polohy (PVT)

výrazu představuje úsečku PA , normálu k referenčnímu elipsoidu o délce (výšce) h .

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a \cos \lambda}{\sqrt{1+(1-e^2) \tan^2 \phi}} + h \cos \lambda \cos \phi \\ \frac{a \sin \lambda}{\sqrt{1+(1-e^2) \tan^2 \phi}} + h \sin \lambda \cos \phi \\ \frac{a(1-e^2) \sin \phi}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \phi}} + h \sin \phi \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Převod z XYZ do LLA

V opačném případě je situace složitější, zejména protože normála k povrchu elipsoidu neprochází jeho středem (viz obrázek 2.1b). Tento fakt však nemá žádný vliv na výpočet zeměpisné délky λ . Tu je možno vypočítat z poměru souřadnic x a y . Protože oborem hodnot funkce \tan^{-1} je pouze interval $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$, je třeba upravit výslednou hodnotu podle příslušného kvadrantu, tj. znamének x a y .

$$\lambda = \begin{cases} \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) & x \geq 0 \\ \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) + \pi & x < 0 \wedge y \geq 0 \\ \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) - \pi & x < 0 \wedge y < 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

K určení zeměpisné šířky ϕ a výšky nad povrchem elipsoidu h je možné použít podle [2] iterativní Bowringovu metodu, uvedenou zde jako algoritmus 2.1.

2.1.2. ECI

Souřadnicový systém ECI (Earth-Centered Inertial) může být využit při výpočtu polohy, protože signály GPS se v něm šíří po přímkách [3]. Tento systém vychází ze systému ECEF - v referenčním čase t_0 je s ním totožný. ECI však nerotuje spolu s tělesem Země, v časech různých od t_0 tak splývá pouze počátek souřadnic a osa z .¹ Transformací mezi souřadnými soustavami ECEF a ECI je tak pouze rotace kolem osy z o úhel daný rovnicí

$$\theta = \dot{\Omega}_e (t - t_0) \quad (2.5)$$

kde konstanta $\dot{\Omega}_e = 7.2921151467 \cdot 10^{-5} [s^{-1}]$ je střední rychlost rotace Země. Převod vektoru polohy $\mathbf{r}_{ECEF} = [x, y, z]^T$ z ECEF souřadnic do ECI rámce lze zapsat jako

$$\mathbf{r}_{ECI} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{r}_{ECEF} \quad (2.6)$$

¹Protože je systém ECI využíván zejména pro relativně krátké rozdíly od referenčního času, můžeme zanedbat pohyby zemské osy a tedy i odchylku osy z .

2. Výpočet polohy (PVT)

Algoritmus 2.1 Bowringova metoda určení zeměpisné šířky

1. Inicializace:

$$p = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\tan u = \frac{z}{p} \cdot \frac{a}{b}$$

2. Iterace, dokud $\tan u$ nekonverguje:

$$\cos^2 u = \frac{1}{1 + \tan^2 u}$$
$$\sin^2 u = 1 - \cos^2 u$$
$$\tan \phi = \frac{z + e'^2 b \sin^3 u}{p - e^2 a \cos^3 u}$$
$$\tan u = \frac{b}{a} \tan \phi$$

3. Závěr algoritmu

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}}$$
$$h = \begin{cases} \frac{p}{\cos \phi} - N & \phi \neq \pm \frac{\pi}{2} \\ \frac{z}{\sin \phi} - N - e^2 N & \phi \neq 0 \end{cases}$$

2.1.3. ENU

Například pro vykreslení a vyhodnocení chyb měření je výhodné použít lokální souřadnou soustavu ENU (East - North - Up). Jak název napovídá, její první dvě osy mají směr tečen k povrchu referenčního elipsoidu ve směru k severu a na východ. Třetí osa je normálou k elipsoidu směřující ven. Počátek tohoto systému souřadnic je ve zvoleném referenčním bodě. Dalším využitím je převod poloh satelitů do lokální souřadné soustavy, aby mohl být určen jejich azimut a elevace vzhledem k přijímači.

Převod vektoru polohy $\mathbf{r}_{ECEF} = [x, y, z]^T$ z ECEF souřadnic do soustavy ENU je realizován posunem počátku souřadné soustavy do referenčního bodu a následně příslušnou rotací, popsanou maticí \mathbf{R}_{ENU} .

$$\mathbf{r}_{ENU} = \mathbf{R}_{ENU} (\mathbf{r}_{ECEF} - \mathbf{r}_{REF}) \quad (2.7)$$

\mathbf{r}_{REF} je v tomto případě polohový vektor referenčního bodu v soustavě ECEF. Obvykle bývá volen jako průměr měřené polohy, nebo jako skutečná poloha přijímače (pokud je

2. Výpočet polohy (PVT)

známa). Matice \mathbf{R}_{ENU} nabývá tvaru [2, 9]

$$\mathbf{R}_{ENU} = \begin{bmatrix} -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\sin \phi \cos \lambda & -\sin \phi \sin \lambda & \cos \phi \\ \cos \phi \cos \lambda & \cos \phi \sin \lambda & \sin \phi \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

2.2. Navigační úloha

V této části se pokusíme popsat princip určení polohy využívaný současnými systémy družicové navigace. Jedná se o metodu měření času příchodu signálu - TOA (Time Of Arrival). Nejdříve bude věnována pozornost veličinám, které jsou měřeny přijímači GNSS. Dále bude odvozena soustava rovnic, která popisuje vztah některých měřených veličin k poloze přijímače. Pro úplnost bude popsán postup určení polohy družice z dat navigační zprávy.

2.2.1. Měřené veličiny

Uvažujme nejdříve použití monofrekvenčního civilního přijímače pro systém GPS. Pro každý satelit je možné získat 4 typy měřených veličin.

Pseudovzdálenost je hlavní měřenou veličinou, nejčastěji se označuje řeckým písmenem ρ . Je postačující k určení polohy standardním postupem. Jedná se o zpoždění přijímaného dálkoměrného kódu vůči jeho replice generované v přijímači. Přestože se jedná o zpoždění, je pseudovzdálenost udávána v metrech. Přesnost odhadu pseudovzdálenosti je limitována tvarem autokorelační funkce dálkoměrného signálu, požadováno je co nejostřejší maximum. K měření se využívá zpětnovazebního systému DLL (Delay Locked Loop). Ačkoli by se mohlo zdát, že pseudovzdálenost je nejednoznačná veličina vzhledem k periodě dálkoměrného kódu (např. u C/A kódu GPS je perioda 1 ms \sim 300 km), není tomu tak. Dálkoměrný kód je synchronizován s bity navigační zprávy, která obsahuje jednoznačnou časovou značku. S využitím čítače počtu bitů a počtu celých cyklů dálkoměrného kódu je možné určit pseudovzdálenost jednoznačně².

Fáze nosné vlny musí být známa ve všech přijímačích GNSS díky přítomnosti fázového závěsu (PLL - Phase Locked Loop). Toto měření je výrazně přesnější než měření pseudovzdálenosti, avšak je nejednoznačné. Díky tomu, že je fáze v přijímači akumulována, může být přesně a jednoznačně určen rozdíl měřené fáze³, a tedy

²Hrubá naměřená pseudovzdálenost může být korigována modely šíření v ionosféře a troposféře. Koeficienty těchto modelů jsou obsaženy v navigační zprávě družice. Popis těchto modelů je možno získat např. v [2, 1].

³Rozdíl měřené fáze je určen jednoznačně, pouze když nedojde ke ztrátě zavěšení nebo prokluzu cyklů (cycle slip) fázového závěsu. V případě prokluzu cyklů vznikne chyba odpovídající několika celým vlnovým délkám. Přijímače umožňující výstup fázových měření také mají výstup indikátoru stavu fázového závěsu, často označovaný LLI (Loss of Lock Indicator).

2. Výpočet polohy (PVT)

i pseudovzdálenosti ve dvou okamžicích. Tohoto využívá technika carrier smoothing, popsaná v sekci 2.6.1. Při použití referenčního přijímače je možné vyřešit nejednoznačností fáze a určit polohu velice přesně. Tomuto se budeme věnovat v kapitole 3. Akumulovaná fáze nosné vlny bývá označována φ , pokud je udávána ve stupních či radiánech. V zájmu přehlednosti vzorců je akumulovaná fáze také často udávána v jednotkách celých cyklů (v této práci označováno Φ) nebo v metrech (v této práci ϕ), podobně jako pseudovzdálenost.

Dopplerův frekvenční posun vzniká vlivem nenulové rychlosti radiálního pohybu přijímače a družice. V běžných podmínkách se pohybuje v rozmezí ± 5 kHz. K měření je opět využito fázového závěsu.

Síla signálu je parametr, jehož měření nepřináší při určení polohy téměř žádnou výhodu. Hodnota bývá využita pouze k odhadu kvality odhadů ostatních měřených veličin. Není zcela jasně definováno, co se skrývá pod pojmem síla signálu. Obvykle je udávána hodnota odstupu signálu od šumu S/N nebo C/N_0 .

V případě přijímačů, které jsou schopny přijímat signály na více frekvencích, se soubor měřených veličin opakuje pro každou frekvenci. Podobným způsobem přibude měřených veličin, pokud budeme přijímat jiný dálkoměrný kód na totožném kmitočtu. Ucelený přehled o možných kombinacích měřených veličin nám může poskytnout definice formátu RINEX (The Receiver Independent Exchange Format) [4, 5]. Ten je ve velké míře používán k záznamu měřených veličin v přijímačích pro účely dalšího zpracování.

2.2.2. Soustava navigačních rovnic

Tradiční podoba úlohy určení polohy v systémech GNSS vychází pouze z naměřených pseudovzdáleností. Ty jsou závislé na vzdálenosti přijímače a družice r . Jelikož však hodiny přijímače a družice nejsou synchronní, je součástí pseudovzdálenosti ještě tzv. bias⁴ b . Bias je pro všechny družice shodný, protože sdílejí časovou referenci GPST (GPS Time). Pro pseudovzdálenost k i -tému satelitu tak platí

$$\rho_i = r_i + b + \epsilon_i \quad (2.9)$$

Vzdálenost r je závislá na poloze přijímače $\mathbf{r}_r = (x_r, y_r, z_r)^T$ a i -té družice \mathbf{r}_i . Určení polohy družice z navigační zprávy popisuje následující sekce.

$$\rho_i = \|\mathbf{r}_r - \mathbf{r}_i\| + b + \epsilon_i \quad (2.10)$$

$$\rho_i = \sqrt{(x_r - x_i)^2 + (y_r - y_i)^2 + (z_r - z_i)^2} + b + \epsilon_i \quad (2.11)$$

Jedná se o nelineární rovnici o 4 neznámých. K určení všech neznámých, tří souřadnic polohy a biasu, musíme mít k dispozici alespoň stejný počet nezávislých rovnic, tedy čtyři pseudovzdálenosti. Získáme tak určenou, v případě většího počtu měření přeuročenou, soustavu rovnic, jejíž možné postupy řešení budou popsány v části 2.3.

⁴Stejně jako u pseudovzdálenosti je bias obvykle udáván v metrech. Přepočtení mezi hodnotou v časových jednotkách a délkových jednotkách je intuitivní, s využitím konstanty rychlosti světla $b = c_0 \cdot \Delta t$

2. Výpočet polohy (PVT)

2.2.3. Určení polohy družic

Poloha družice je určována v přijímači z Keplerovských parametrů obsažených v navigační zprávě. Tyto tzv. efemeridy jsou vždy platné pro omezený časový rámec. Přesný matematický popis poskytuje Interface Control Document [3]. Parametry obsažené v navigační zprávě budeme v zájmu přehlednosti značit vlnkou pod parametrem. Souhrn těchto parametrů a symbolů je uveden v tabulce 2.2.

\sqrt{A}	Odmocnina hlavní poloosy	Amplitudy harmonických korekcí:	Sinové složky	
Δn	Korekce střední úhlové rychlosti		c_{us}	Argumentu šířky
t_{oe}	Referenční čas		c_{rs}	Poloměru dráhy
\underline{M}_0	Střední anomálie v referenčním čase	c_{is}	Inklinace	
e	Excentricita	Kosinové složky		
ω	Argument perigea	c_{uc}	Argumentu šířky	
Ω_0	Délka vzestupného uzlu	c_{rc}	Poloměru dráhy	
$\dot{\Omega}$	Rychlost změny délky vzestupného uzlu	c_{ic}	Inklinace	
i_0	Inklinace v referenčním čase			
\dot{i}	Rychlost změny inklinace			

Tabulka 2.2.: Parametry orbit v navigační zprávě

Nejprve jsou vypočteny hodnoty korigované střední úhlové rychlosti n a čas uplynulý od referenční epochy příslušných efemerid t_k . Konstanta $\mu = 3,986005 \cdot 10^{14} [m^3 s^{-2}]$ je gravitační konstanta Země z WGS 84. Čas t je systémový čas systému GPS v okamžiku vyslání signálu.

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{(\sqrt{A})^3} + \Delta n \quad (2.12)$$

$$t_k = t - t_{oe} \quad (2.13)$$

Ze znalosti těchto dvou parametrů je vypočtena střední anomálie

$$M_k = \underline{M}_0 + n \cdot t_k \quad (2.14)$$

Řešením transcendentní rovnice (2.15) dostáváme excentrickou anomálii E_k . Jedním z iterativních řešení může být Newtonova metoda hledání kořenů.

$$M_k = E_k - e \cdot \sin(E_k) \quad (2.15)$$

Dalším krokem je výpočet pravé anomálie v_k . Podotkněme, že přestože je možné argument arcustangenty $\sin v_k / \cos v_k$ zjednodušit vykrácením jmenovatelů vzorců (2.17) a (2.18),

2. Výpočet polohy (PVT)

je třeba znát alespoň znaménka těchto výrazů. Důvodem je potřeba jednoznačného určení kvadrantu pravé anomálie.

$$v_k = \tan^{-1} \left(\frac{\sin v_k}{\cos v_k} \right) \quad (2.16)$$

$$\sin v_k = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E_k}{1 - e \cos E_k} \quad (2.17)$$

$$\cos v_k = \frac{\cos E_k - e}{1 - e \cos E_k} \quad (2.18)$$

Součtem pravé anomálie a argumentu perigea ω dostaneme argument délky Φ_k , tedy úhel svíraný vzestupným uzlem orbity a družicí.

$$\Phi_k = v_k + \omega \quad (2.19)$$

V tomto okamžiku jsou vypočteny korekce argumentu šířky, poloměru a inklinace orbity. S korekčními členy z výrazu (2.20) jsou upraveny příslušné hodnoty korigovaného argumentu délky u_k , korigovaného poloměru dráhy r_k a korigované inklinace i_k .

$$\begin{bmatrix} \delta u_k \\ \delta r_k \\ \delta i_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{us} & c_{uc} \\ c_{rs} & c_{rc} \\ c_{is} & c_{ic} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin 2\Phi_k \\ \cos 2\Phi_k \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

$$u_k = \Phi_k + \delta u_k \quad (2.21)$$

$$r_k = \sqrt{A^2} \left(1 + e \cos E_k \right) + \delta r_k \quad (2.22)$$

$$i_k = i_0 + \delta i_k \quad (2.23)$$

S využitím základních goniometrických funkcí je získána poloha v kartézském systému v rovině oběžné dráhy

$$\begin{bmatrix} x'_k \\ y'_k \end{bmatrix} = r_k \begin{bmatrix} \cos u_k \\ \sin u_k \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Posledním vypočteným parametrem je korigovaná délka vzestupného uzlu, která je potřeba pro transformaci ze souřadnic roviny orbity do ECEF souřadnicového systému.

$$\Omega_k = \Omega_0 + (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}_e) t_k - \dot{\Omega}_e t_{oe} \quad (2.25)$$

Posledním krokem je samotná rotace z roviny oběžné dráhy do ECEF souřadnic.

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Omega_k & -\cos i_k \sin \Omega_k \\ \sin \Omega_k & \cos i_k \cos \Omega_k \\ 0 & \sin i_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_k \\ y'_k \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

2. Výpočet polohy (PVT)

Tato poloha je platná pro daný okamžik t vyslání signálu, což je patrné z rovnice (2.13). K určení tohoto času je však třeba znát odhad doby šíření signálu od družice k přijímači, který může být přesně určen až při znalosti biasu, viz rov. (2.9). Určeme nyní přibližné limity doby šíření. Uvažujeme-li Zemi jako kulové těleso s poloměrem $R_E = 6378$ km a kruhové orbity družic ve výšce $H_O = 20\,200$ km nad Zemským povrchem, můžeme odhadnout vzdálenost družice na horizontu z Pythagorovy věty.

$$r_{horiz} = \sqrt{H_O^2 - 2H_O R_E} \doteq 25\,800 \text{ km} \quad (2.27)$$

Doba šíření signálu odpovídající odhadnuté minimální a maximální vzdálenosti uživatel-družice je 67 ms, respektive 86 ms. Při prvním výpočtu polohy družice je doba šíření pevně zvolena, typicky na 75 ms, v dalších iteracích řešení navigační úlohy pak mohou být využity odhadnuté doby šíření signálu [2].

Další z nesnází při výpočtu polohy je tzv. Sagnacův efekt. Bude-li k výpočtu použita ECEF souřadná soustava, vznikne v důsledku nenulové doby šíření chyba vlivem rotace Země.⁵ Jeví se tak jako vhodné využít pro výpočet polohy souřadnicovou soustavu ECI. Transformace mezi těmito souřadnými systémy je pouze rotace (sekce 2.1.2).

2.3. Tradiční metody

Všechny metody, které v této práci označujeme jako tradiční, používají k určení polohy výhradně naměřenou pseudovzdálenost⁶, případně Dopplerův frekvenční posun. Níže popsané algoritmy řeší soustavu navigačních rovnic (2.10). Nejdříve se budeme věnovat třem zástupcům iterativních algoritmů. Ty budou doplněny popisem neiterativní Bancroftovy metody.

2.3.1. Iterativní algoritmy

Newton-Raphsonova metoda

Jedním z často používaných iterativních řešení soustavy navigačních rovnic je Newton-Raphsonova metoda nejmenších čtverců. Tato iterativní metoda využívá v každém kroku linearizaci problému v podobě Taylorova polynomu prvního řádu. Oblast využití je velice rozsáhlá, v této práci se však budeme věnovat pouze popisu pro rovnice pseudovzdáleností. Podrobný popis obecné podoby této metody je možno najít v knize [6] v sekci 5.5.1.

⁵Země se během šíření signálu (uvažujeme 75 ms) potočí přibližně o 1,13 úhlové vteřiny. To na rovníku odpovídá vzdálenosti přes 30 m.

⁶Pseudovzdálenost může být případně filtrována fázovým měřením, jedná se však pouze o úpravu naměřených dat, nikoli využití fázového měření k výpočtu polohy. Technice carrier smoothing je věnována sekce 2.6.1.

2. Výpočet polohy (PVT)

Nejdříve si rozdělme hodnoty proměnných navigační rovnice na prediktor a korektor. Princip metody můžeme vnímat tak, že na základě rozdílu predikované a měřené pseudovzdálenosti budeme korigovat odhad polohy a biasu.

$$\mathbf{r}_u = \mathbf{r}_{up} + \mathbf{r}_{uc} \quad (2.28)$$

$$\rho_i = \rho_{ip} + \rho_{ic} \quad (2.29)$$

$$b = b_p + b_c \quad (2.30)$$

Na základě výše zmíněného a výrazu (2.10) je možno vyjádřit rovnici pro korektor pseudovzdálenosti

$$\begin{aligned} \rho_{ic} &= \rho_i - \rho_{ip} = (\|\mathbf{r}_{up} - \mathbf{r}_i\| + b) - (\|\mathbf{r}_{up} - \mathbf{r}_i\| + b_p) + \epsilon'_i \\ &= \|\mathbf{r}_{up} + \mathbf{r}_{uc} - \mathbf{r}_i\| - \|\mathbf{r}_{up} - \mathbf{r}_i\| + b_c + \epsilon'_i \end{aligned} \quad (2.31)$$

Dosažením aproximace jedné z velikostí vektorů Taylorovou řadou prvního řádu (proměnnou polynomu je \mathbf{x}_{uc})

$$\|\mathbf{r}_{up} + \mathbf{r}_{uc} - \mathbf{r}_i\| \approx \|\mathbf{r}_{up} - \mathbf{r}_i\| + \frac{(\mathbf{r}_{up} - \mathbf{r}_i)}{\|\mathbf{r}_{up} - \mathbf{r}_i\|} \cdot \mathbf{r}_{uc} \quad (2.32)$$

do vzorce (2.31) dostáváme (2.33). Dále můžeme upravit dosažením $\mathbf{1}_i$ za jednotkový sloupcový směrový vektor od přijímače k družici.

$$\rho_{ic} = \frac{(\mathbf{r}_{up} - \mathbf{r}_i)}{\|\mathbf{r}_{up} - \mathbf{r}_i\|} \cdot \mathbf{r}_{uc} + b_c + \epsilon'_i = -\mathbf{1}_i^T \cdot \mathbf{r}_{uc} + b_c + \epsilon'_i \quad (2.33)$$

Soustava rovnic pro korektory \mathbf{r}_{uc} a b_c v maticovém tvaru tak bude odpovídat následujícímu výrazu:

$$\begin{bmatrix} \rho_{1c} \\ \rho_{2c} \\ \vdots \\ \rho_{Kc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{1}_1^T & 1 \\ -\mathbf{1}_2^T & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -\mathbf{1}_M^T & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{uc} \\ b_c \end{bmatrix} + \boldsymbol{\epsilon}' = \mathbf{G} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{uc} \\ b_c \end{bmatrix} + \boldsymbol{\epsilon}' \quad (2.34)$$

Matice \mathbf{G} bývá označována jako matice geometrie (geometry matrix), případně matice směrových kosinů. V sekci 2.5 bude ukázán její význam při určení činitelů DOP, svázaných s rozptylem odhadu polohy.

Následuje řešení této soustavy rovnic, které je možné, pouze obsahuje-li \mathbf{G} alespoň 4 lineárně nezávislé řádky, tj. hodnota matice $\text{rank}(\mathbf{G}) \geq 4$.

2. Výpočet polohy (PVT)

Metodou nejmenších čtverců je možno dostat rovnici pro korektory polohy a biasu.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_{uc} \\ b_c \end{bmatrix} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \begin{bmatrix} \rho_{1c} \\ \rho_{2c} \\ \vdots \\ \rho_{Mc} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Zpřesněné odhady pak dostaneme dosazením do rovnic (2.28) a (2.30), tedy korekcí predikovaných hodnot. Iterace probíhá tak dlouho, dokud velikost korektoru (např. $\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{uc}^T & b_c \end{bmatrix} \right\|$) není dostatečně malá. Přehledné shrnutí postupu je v algoritmu 2.2.

Algoritmus 2.2 Newton-Raphsonova metoda

1. Predikce pozice \mathbf{r}_{up}, b_p
2. Výpočet ρ_{ip} z hodnot \mathbf{r}_{up}, b_p a poloh družic
3. Výpočet $\rho_{ic} = \rho_i - \rho_{ip}$
4. Vyřešení soustavy rovnic pro korektory (2.35)
5. Úprava prediktorů \mathbf{r}_{up}, b_p
6. Porovnání korektoru s tolerancí η :
 - a) $\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{uc}^T & b_c \end{bmatrix} \right\| > \eta \Rightarrow$ další iterace od kroku 2.
 - b) $\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{uc}^T & b_c \end{bmatrix} \right\| < \eta \Rightarrow$ konec iterací, upravené prediktory jsou výsledkem

Zatímco pro Newton-Raphsonův algoritmus v jedné dimenzi je možné dokázat alespoň lokální konvergenci [7], pro náš čtyřrozměrný problém není konvergence dokázána. Nicméně praxe ukazuje, že konvergence je spolehlivá. Pramen [8] ukazuje možnost využití **QR** dekompozice ke zvýšení efektivity metody.

Gradientní metoda

Gradientní metoda, často také označovaná jako metoda největšího spádu, je další možností řešení soustavy navigačních rovnic. Ve svém principu je velmi podobná výše zmíněné Newton-Raphsonově metodě. Rozdílný je pouze krok výpočtu korekčního členu,

2. Výpočet polohy (PVT)

kde není nutné provádět maticovou inverzi $(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1}$.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_{uc} \\ b_c \end{bmatrix} = \delta \mathbf{G}^T \begin{bmatrix} \rho_{1c} \\ \rho_{2c} \\ \vdots \\ \rho_{Mc} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Koeficient δ upravuje délku kroku ve směru největšího spádu. Jeho volba je pro tuto metodu kritická, protože příliš velká hodnota vede k oscilacím odhadu okolo správného výsledku nebo k divergenci. Malé hodnoty δ implikují sice bezpečnou cestu k lokálnímu minimu, avšak za cenu vysokého množství iterací. Gradientní metoda je ve srovnání s Newton-Raphsonovým algoritmem velice pomalá.

Levenberg-Marquardtova metoda

Tato metoda kombinuje výhodným způsobem Newton-Raphsonovu a gradientní metodu řešení soustavy rovnic. Přesný popis metody je možné najít v literatuře [6]. Opět se liší ve výpočtu korektoru:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_{uc} \\ b_c \end{bmatrix} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}^T \begin{bmatrix} \rho_{1c} \\ \rho_{2c} \\ \vdots \\ \rho_{Mc} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Podobně jako u gradientní metody zde vystupuje koeficient, v tomto případě označovaný λ . Jeho hodnota rozhoduje, zda bude více uplatněna metoda nejmenších čtverců, nebo gradientní metoda. Při nízkých hodnotách λ se Levenberg-Marquardtova metoda blíží chováním metodě Newtonově. Pokud bude $\lambda = 0$, člen $(\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I})$ přejde do podoby $(\mathbf{G}^T \mathbf{G})$ v rovnici a v tomto extrémním případě budou metody totožné. S vysokými hodnotami koeficientu λ se stává dominantní část výrazu s jednotkovou maticí \mathbf{I} a metoda se více přiklání ke gradientnímu způsobu konvergence. Vhodnou volbou koeficientu je tak možné snížit riziko divergence při zachování dostatečně vysoké rychlosti metody.

Porovnání iterativních metod

Všechny tři výše zmíněné metody výpočtu polohy byly implementovány v prostředí programu MATLAB. Byla provedena simulace, jejíž podrobnější popis a grafické výstupy jsou obsaženy v příloze A.

Ukazuje se, že nejvhodnější je využití Newton-Raphsonova algoritmu (obr. A.1a), nebo Levenberg-Marquardtova algoritmu s velmi malou hodnotou koeficientu λ (obr. A.1d).

2. Výpočet polohy (PVT)

Je patrné, že těmito dvěma způsoby je možno dosáhnout velmi rychlé a relativně spolehlivé konvergence. Ve většině případů oba algoritmy konvergují v řádu jednotek iterací.

Simulace rovněž potvrzuje intuitivní předpoklad, že při nižších hodnotách GDOP, tj. příznivější geometrii konstelace (podrobnější popis v sekci 2.5 níže), konvergují algoritmy rychleji. Zajímavým jevem je, že přestože je iterování zastaveno, když velikost poslední korekce klesne pod 0,1 cm, dosahuje přesnost velmi často lepších hodnot, zejména při nízkých hodnotách GDOP. S vyššími hodnotami DOP nastává opačný efekt - přesnost je nepatrně horší, než limit velikosti poslední korekce.

Na grafech si lze povšimnout, že v nepříznivých případech Levenberg-Marquardtův algoritmus sice nekonverguje, ale nediverguje. Oproti tomu Newton-Raphsonova metoda v několika případech zcela divergovala. Zůstává otázkou, který typ chování je vhodnější. Nepřesná a zdlouhavá konvergence může být jistě v některých případech⁷ více na škodu než jasně rozeznatelná divergence. Například lze předpokládat, že poloha přijímače bude maximálně několik kilometrů nad povrchem Země, nebo je možné také eliminovat výsledek při příliš vysokém GDOP.

Gradientní metodu (obr. A.1b) shledáváme pro tuto úlohu jako nevhodnou. V simulaci již nebylo možné použít větší koeficient γ , algoritmus pak divergoval. Takto je ovšem korekční krok velmi malý, ke konvergenci je třeba o několik řádů více iterací než u Newton-Raphsonovy metody, nebo vhodně nastavené Levenberg-Marquardtovy metody. Navíc, protože se blížíme velmi pomalu ke kýženému odhadu, je podmínky velikosti korekce pro zastavení iterování dosaženo dříve, než je odhad dostatečně přesný. Při limitu korekce 0,1 cm bylo dosaženo pouze přesnosti v řádu centimetrů a decimetrů při nízkém GDOP, při vyšších hodnotách GDOP byla přesnost ještě horší.

2.3.2. Neiterativní Bancroftův algoritmus

Tento algoritmus nachází svůj původ v článku [9]. Stejně jako předchozí využívá naměřených pseudovzdáleností. Pro zjednodušení notace je zaveden vektor

$$\mathbf{a}_i = \left(\mathbf{r}_i^T, \rho_i \right)^T \quad (2.38)$$

slučující informaci o pozici i -tého satelitu a příslušné pseudovzdálenosti. Dále je definován Minkowského funkcionál pro čtyřrozměrný prostor.

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 - a_4 b_4 \quad (2.39)$$

Matice \mathbf{A} ve svých řádcích obsahuje všechny vektory \mathbf{a}_i .

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)^T \quad (2.40)$$

⁷Příkladem může být vzniklý impulz je-li prováděna následná filtrace polohy. Může to vést k nepřesným výsledkům nebo i k nestabilitě filtru.

2. Výpočet polohy (PVT)

Kromě toho jsou vypočteny hodnoty s_i , které jsou dále uspořádány do sloupcového vektoru \mathbf{s} .

$$s_i = \frac{\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i \rangle}{2} \quad (2.41)$$

$$\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)^T \quad (2.42)$$

Dále je vypočtena matice \mathbf{B} . Podotkněme, že matice \mathbf{W} je maticí vah jednotlivých měření, kterou je možno v nejjednodušším případě nahradit jednotkovou maticí.

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W} \quad (2.43)$$

Jsou definovány sloupcové vektory

$$\mathbf{u} = \mathbf{B} \mathbf{i}_0 \quad (2.44)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{B} \mathbf{s} \quad (2.45)$$

Vektor \mathbf{i}_0 je stejně dlouhý jako vektor \mathbf{s} a všechny jeho elementy jsou rovny 1. Minkowského funkcionály z nich vypočtených vektorů \mathbf{u} a \mathbf{v} jsou dosazeny do kvadratické rovnice (2.46). Řešením (2.46) jsou dva kořeny λ_1 a λ_2 .

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \lambda^2 + 2(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - 1) \lambda + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0 \quad (2.46)$$

Ze znalosti kořenů λ je možné vypočítat vektory \mathbf{y} , které obsahují informaci o poloze přijímače a biasu

$$\mathbf{y} = \lambda \mathbf{u} + \mathbf{v} \quad (2.47)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} r \\ -b \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Protože řešení kvadratické rovnice (2.46) není jednoznačné, dostáváme dva vektory \mathbf{y} . Správný výsledek proto musí být verifikován dosazením do rovnic pseudovzdáleností (2.9). Vznik druhého kořenu je dán nelinearitou rovnice pro pseudovzdálenost, kde figuruje geometrická vzdálenost družice a přijímače. V její formě (2.11) se vyskytují kvadráty a odmocnina.

Diskuse v článku [9] uvádí, že pro vysoké hodnoty DOP poskytuje tento algoritmus přesnější výsledky, než iterativní algoritmy. Klíčovým rozdílem je, že iterativní algoritmy používají při výpočtu aproximaci Taylorovým polynomem prvního řádu, Bancroftův algoritmus se však této aproximace nedopouští. Zanedbání členů vyšších řádů Taylorova rozvoje může při nepříznivé konstelaci vést ke snížení hodnoty matice geometrie \mathbf{G} a tedy neřešitelnosti soustavy rovnic⁸. Námi provedená simulace v programu MATLAB však vyšší přesnost nepotvrzuje, viz příloha B.

⁸Zde je nutno připomenout, že u iterativních algoritmů správná podoba matice \mathbf{G} není známa, protože je závislá na posledním odhadu polohy a mění se s každou iterací.

2.4. ML odhad polohy

Tato metoda odhadu polohy se od výše uvedených podstatně liší. Při popisu vycházíme ze zdrojů [10, 11], kde byla metoda prezentována. Jedná se o algoritmus, který nevyužívá naměřené hodnoty pseudovzáleností a Dopplerova frekvenčního posunu. Teoreticky tak není nutné provádět akvizici, nicméně celý popisovaný algoritmus úlohu akvizice velmi připomíná.

Odhad polohy dostáváme minimalizací cenové funkce (cost function), což je ekvivalentní maximalizaci věrohodnostní funkce. K této minimalizaci je využita metoda označovaná jako SMC (Sequential Monte-Carlo). Princip její funkce je také často označován jako particle filtering.

Věnujme se nyní podobě funkce, kterou budeme minimalizovat. Nejprve definujeme matici \mathbf{D} , jež obsahuje vzorky frekvenčně a časově posunutých replik signálu o délce K vzorků. Počet řádků této matice odpovídá počtu družic M .

$$\mathbf{D}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{f}_D) \begin{bmatrix} r_1[1] & r_1[2] & \cdots & r_1[K] \\ r_2[1] & r_2[2] & \cdots & r_2[K] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_M[1] & r_M[2] & \cdots & r_M[K] \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Vektory $\boldsymbol{\tau}$ a \mathbf{f}_D obsahují hodnoty časového a frekvenčního posunu replik. Podobně vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_M)^T$ obsahuje komplexní amplitudy replik signálů od jednotlivých satelitů. Dále je zavedena cenová funkce $C(\mathbf{a}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{f}_D)$ (Cost function)⁹. V tomto případě je \mathbf{s} řádkovým vektorem vzorků přijatého signálu.

$$C(\mathbf{a}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{f}_D) = \frac{1}{K} \|\mathbf{s} - \mathbf{D}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{f}_D) \mathbf{a}\| \quad (2.50)$$

Při definicích odhadů korelací

$$\hat{r}_{ss} = \frac{1}{K} \mathbf{s} \mathbf{s}^H \quad (2.51)$$

$$\hat{\mathbf{R}}_{sD}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{f}_D) = \frac{1}{K} \mathbf{s} \mathbf{D}^H(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{f}_D) \quad (2.52)$$

$$\hat{\mathbf{R}}_{Ds}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{f}_D) = \hat{\mathbf{R}}_{sD}^H(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{f}_D) \quad (2.53)$$

$$\hat{\mathbf{R}}_{DD}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{f}_D) = \frac{1}{K} \mathbf{D}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{f}_D) \mathbf{D}^H(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{f}_D) \quad (2.54)$$

jsou odhady zpoždění a frekvenčního posunu získány následující minimalizací. Vektor komplexních amplitud signálů není dále potřeba.

⁹V člancích prezentujících metodu je cenová funkce označována Λ . Toto označení je používané spíše pro věrohodnostní (likelihood) funkci a tedy jsme přistoupili k označení C

2. Výpočet polohy (PVT)

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\tau}}, \hat{\boldsymbol{f}}_D &= \arg \min_{\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{f}_D} \{C(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{f}_D)\} \\ &= \arg \min_{\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{f}_D} \left\{ \hat{r}_{ss} - \check{\mathbf{R}}_{sD}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{f}_D) \check{\mathbf{R}}_{DD}^{-1}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{f}_D) \check{\mathbf{R}}_{sD}^H(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{f}_D) \right\}\end{aligned}\quad (2.55)$$

Hodnoty $\boldsymbol{\tau}$, \boldsymbol{f}_D jsou nelineární funkcí polohy, rychlosti a biasu přijímače. Zavedeme-li označení $\boldsymbol{\gamma}$ pro vektor nesoucí tuto informaci, můžeme vyjádřit předcházející výraz jako

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \arg \min_{\boldsymbol{\gamma}} \{C(\boldsymbol{\gamma})\} \quad (2.56)$$

Funkce $C(\boldsymbol{\gamma})$ není analyticky vyjádřitelná, k minimalizaci je použita iterativní SMC metoda. Její podrobný popis je možno nalézt ve zdroji [11] Zde se pouze pokusíme nastínit princip činnosti.

V N -rozměrném prostoru je náhodně rozptýleno velké množství bodů. Dimenzionalita prostoru N odpovídá délce vektoru $\boldsymbol{\gamma}$. Pro všechny body je vypočtena cenová funkce a je vyhledán bod s minimální hodnotou. Parametry tohoto bodu se stávají novým odhadem $\boldsymbol{\gamma}$ a rozptyl bodů je upraven s ohledem na hodnoty cenové funkce ve zbylých bodech.

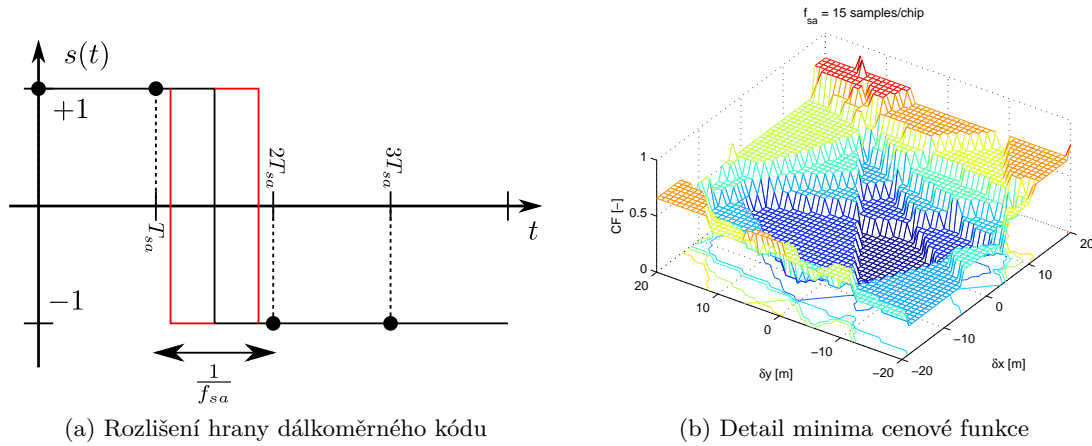
Tento postup se dále opakuje. Vždy na konci každé iterace je porovnána hodnota nového minima cenové funkce s hodnotou z předcházející iterace. Nový odhad je přijat pouze pokud je nová hodnota nižší, v opačném případě algoritmus pokračuje s odhadem z předchozího kroku.

Významnou nevýhodou tohoto přístupu k určení polohy je nutnost přibližné znalosti polohy a biasu. Dále je také nutné znát obsah navigační zprávy, kterou družice vysílají, jinak by nebylo možné popsat vztah vektoru $\boldsymbol{\gamma}$ s $\boldsymbol{\tau}$ a \boldsymbol{f}_D . Při implementaci zjednodušené verze tohoto algoritmu v programu MATLAB bylo zjištěno, že přesnost určení polohy je omezena vzorkovacím kmitočtem f_{sa} . Považujme nyní komplexní obálku dálkoměrného signálu za BPSK signál, jenž není ovlivněn dopplerovskou komplexní exponenciálou. Rozlišení určení hrany chipu dálkoměrného kódu pak bude odpovídat vzorkovací periodě. Na obrázku 2.2a je tento jev graficky znázorněn. Červeně jsou zobrazeny příklady průběhů signálu, které odpovídají stejným vzorkům jako ideální černý průběh. I při relativně vysoké vzorkovací frekvenci $f_{sa} = 20$ MHz je rozlišení přibližně 15 m.

Tento nedostatek se negativně projevuje ve tvaru minima cenové funkce. Na obrázku 2.2b jsou vyneseny hodnoty cenové funkce pro nenulové chyby ve směru osy x a y . Bias i souřadnice z jsou zafixovány na správné hodnotě. Byla volena vzorkovací frekvence 15 vzorků na chip dálkoměrného kódu (tj. rozlišení do 20 m). Je patrné, že minimum cenové funkce je konstantní plocha, jejíž tvar je daný konstelací družic. Při tradičním způsobu určení polohy je tento jev eliminován při měření pseudovzdálenosti smyčkou DLL.

Vliv omezeného rozlišení na výsledný odhad polohy je možno určit podobně jako u tradičních metod, tedy díky činitelům DOP. Potřebujeme však znát rozptyl odhadu pseudovzdálenosti. Chyba určení pseudovzdálenosti má uniformní rozložení na intervalu o délce

2. Výpočet polohy (PVT)



Obrázek 2.2.: Omezení přesnosti ML odhadu polohy

odpovídající rozlišení určení hrany dálkoměrného kódu, tj. c/f_{sa} . Dosazením do vzorce pro rozptyl rovnoměrného rozložení [12] můžeme získat výraz (2.57).

$$\sigma_{\rho}^2 = \frac{1}{12} \left(\frac{c}{f_{sa}} \right)^2 \quad (2.57)$$

2.5. DOP, Dilution of Precision

Činitele DOP udávají, s jakým rozptylem bude určena poloha či čas při dané varianci měřené pseudovzdálenosti. Nejdříve se pokusíme nastínit princip určení DOP. Pro úplnost zopakujeme definici matice geometrie konstelace družic \mathbf{G} .

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -\mathbf{1}_1^T & 1 \\ -\mathbf{1}_2^T & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -\mathbf{1}_K^T & 1 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

Uvažujme dále, že měření pseudovzdáleností jsou nezávislá, nevyčýlená a s totožným rozptylem. Pro chybu odhadu pseudovzdáleností $\boldsymbol{\epsilon}_{\rho}$ pak platí

$$\mathbf{E}[\boldsymbol{\epsilon}_{\rho}] = \mathbf{0} \quad (2.59)$$

$$\text{Cov}[\boldsymbol{\epsilon}_{\rho}] = \sigma_{\rho}^2 \mathbf{I} \quad (2.60)$$

2. Výpočet polohy (PVT)

Podle [1] je možné ukázat, že

$$\mathbf{E} \left[\begin{bmatrix} \mathbf{r}_{uc} \\ b_c \end{bmatrix} \right] = \mathbf{E} \left[\begin{bmatrix} \mathbf{r}_u \\ b \end{bmatrix} \right] = \mathbf{0} \quad (2.61)$$

$$\text{Cov} \left[\begin{bmatrix} \mathbf{r}_{uc} \\ b_c \end{bmatrix} \right] = \text{Cov} \left[\begin{bmatrix} \mathbf{r}_u \\ b \end{bmatrix} \right] = \sigma_\rho (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \quad (2.62)$$

Obvykle se zavádí označení $\mathbf{H} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1}$. Díky znalosti matice \mathbf{H} můžeme nyní vyjádřit rozptyly ve směrech jednotlivých os souřadného systému a rozptyl biasu. Jednotlivé činitele DOP jsou odmocninou příslušných prvků matice \mathbf{H} ležících na diagonále. Následující rovnice ukazuje postup určení rozptylu v ose x , postup je však totožný pro všechny hodnoty.

$$\sigma_x^2 = XDOP^2 \cdot \sigma_\rho^2 \quad (2.63)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} XDOP^2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & YDOP^2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & ZDOP^2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & TDOP^2 \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

Znalost rozptylů v kartézských osách soustavy ECEF však není v blízkosti povrchu Země prakticky využitelná. Je proto vhodné vyjádřit si matici \mathbf{H} , respektive \mathbf{G} v lokální souřadné soustavě ENU.

$$\mathbf{G}' = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{ENU} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{G} \quad (2.65)$$

Z transformované matice \mathbf{G}' dostáváme matici \mathbf{H}' , jež má na diagonále kvadráty DOP ve směru východu, severu a normály k referenčnímu elipsoidu.

$$\mathbf{H}' = \begin{bmatrix} EDOP^2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & NDOP^2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & VDOP^2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & TDOP^2 \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

Kromě DOP ve směrech jednotlivých os souřadnicové soustavy je možné určit i rozptyl určení polohy v horizontální rovině (HDOP), případně ve třech rozměrech (PDOP). Je možné určit tzv. GDOP, které bere v úvahu i časovou dimenzi. Přehledné shrnutí obvyklých činitelů DOP je v tabulce 2.3. Podotkněme, že \mathbf{H}'_{11} značí prvek na diagonále matice \mathbf{H}' .

2. Výpočet polohy (PVT)

Označení	Význam	Výpočet
EDOP	East	$\sqrt{\mathbf{H}'_{11}}$
NDOP	North	$\sqrt{\mathbf{H}'_{22}}$
VDOP	Vertical	$\sqrt{\mathbf{H}'_{33}}$
TDOP	Time	$\sqrt{\mathbf{H}'_{44}}$
HDOP	Horizontal	$\sqrt{\mathbf{H}'_{11} + \mathbf{H}'_{22}}$
PDOP	Position	$\sqrt{\mathbf{H}'_{11} + \mathbf{H}'_{22} + \mathbf{H}'_{33}}$
GDOP	General	$\sqrt{\mathbf{H}'_{11} + \mathbf{H}'_{22} + \mathbf{H}'_{33} + \mathbf{H}'_{44}}$

Tabulka 2.3.: Souhrn činitelů DOP

Nyní se věnujme vlastnostem činitelů DOP. Z výše uvedeného plyne, že nižší hodnota DOP implikuje menší rozptyl polohy. Přibude-li v konstelaci další družice, DOP se nezvýší. Pro dosažení nízkých hodnot HDOP je třeba přijímat signály od satelitů s nízkou elevací, VDOP je pak snižováno zejména dalšími satelity blízko zenitu. Jako ideální konstelace čtyř družic se tak jeví tři s nulovou elevací rozmístěné po 120° doplněné čtvrtou v nadhlavníku. Tohoto však není možné v reálné situaci dosáhnout. Je také nutné podotknout, že měření od družic pohybujících se v blízkosti horizontu jsou zatížena největšími chybami. Kromě chyb vzniklých šířením atmosférou¹⁰ je dominantní také mnohacestné šíření.

DOP několika konstelací bylo vyšetřováno za pomoci skriptu v programu MATLAB. Některé z výstupů této analýzy ilustrující chování činitelů DOP jsou obsaženy v příloze C.

2.5.1. Hustoty pravděpodobnosti chyb

Věnujme se nyní tvaru rozložení hustot pravděpodobnosti chyb měření, zejména pak délky vektoru chyby. Zavedme si pro tuto sekci značení x, y, z pro odchylku ve směrech os kartézských souřadnic, r_3 označme délku vektoru odchylky ve třech dimenzích. Chyby ve všech třech osách budeme považovat za normálně rozložené s nulovou střední hodnotou¹¹. Každou ze tří hustot pravděpodobnosti je tak možno popsat vzorcem

$$f(x, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.67)$$

Uvažujeme-li chyby nezávislé se stejným rozptylem, můžeme pro rozložení ve třech dimenzích psát

$$f(x, y, z, \sigma) = \frac{1}{\sigma^3 (2\pi)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.68)$$

¹⁰Trajektorie průchodu atmosférou je pro satelity nad horizontem podstatně delší. Míra prodloužení vůči zenitové trajektorii je popsána činitelem označovaným v anglické literatuře jako obliquity factor.

¹¹V obecném případě nemusí být střední hodnota chyby nulová. Často však není známa přesná reálná poloha a proto se bere jako referenční bod průměr naměřené polohy.

2. Výpočet polohy (PVT)

S využitím vzorkovací vlastnosti Diracova impulsu δ , viz (2.69), je možné vyjádřit tuto hustotu pravděpodobnosti v závislosti na délce vektoru chyby r_3 .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a) \quad (2.69)$$

$$f(r_3, \sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma^3 (2\pi)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2\sigma^2}\right) \delta\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - r_3\right) dx dy dz \quad (2.70)$$

Díky tomuto kroku nyní můžeme využít substituce a přejít do sférických souřadnic definovaných výrazem (2.71).

$$\begin{aligned} \Phi : x &= \rho \sin \beta \cos \alpha & \rho &= (0, +\infty) \\ x &= \rho \sin \beta \sin \alpha & \alpha &= (0, 2\pi) \\ x &= \rho \cos \beta & \beta &= (0, \pi) \end{aligned} \quad (2.71)$$

$$\det J_{\Phi}(\rho, \alpha, \beta) = \rho^2 \sin \beta \quad (2.72)$$

S využitím vlastnosti sférických souřadnic $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ dostáváme výraz

$$f(r_3, \sigma) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sigma^3 (2\pi)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right) \delta(\rho - r_3) \rho^2 \sin \beta d\rho d\beta d\alpha \quad (2.73)$$

$$f(r_3, \sigma) = \frac{2\pi}{\sigma^3 (2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\pi} \sin \beta d\beta \int_0^{+\infty} \rho^2 \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right) \delta(\rho - r_3) d\rho \quad (2.74)$$

$$f(r_3, \sigma) = \frac{2r_3^2}{\sigma^3 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{r_3^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.75)$$

Integrací v proměnné α dostáváme pouze multiplikativní konstantu 2π . Dále byly všechny konstanty vytknuty na začátek výrazu a integrály podle zbývajících proměnných byly izolovány. Ve výrazu (2.74) tak dostáváme dva jednoduché integrály. Integrací v proměnné β dostáváme konstantu 2. Druhý z integrálů řešíme využitím vzorkovací vlastnosti Diracova impulsu. Výsledkem je hustota pravděpodobnosti popsaná vzorcem (2.75), kde parametr σ^2 odpovídá rozptylu určení polohy v jedné dimenzi.

V případě, že bychom se věnovali podobnému problému pouze ve dvou dimenzích, například v horizontální rovině, je úloha jednodušší. Velice podobným postupem lze dospět k závěru, že velikost r_2 chybového vektoru se řídí Rayleighovým rozložením hustoty pravděpodobnosti.

$$f(r_2, \sigma) = \frac{r_2}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r_2^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.76)$$

2. Výpočet polohy (PVT)

Experimentální ověření platnosti obou těchto hustot pravděpodobnosti je v příloze D. Součástí přílohy je také graf obou hustot pravděpodobnosti.

2.6. Metody vylepšující výkonost

2.6.1. Carrier Smoothing

Metoda Carrier smoothing slouží k vyhlazení průběhu měřené pseudovzdálenosti. Ten zpravidla obsahuje relativně velkou náhodnou složku. K vyhlazení je využito měření akumulované fáze nosné vlny, které je mnohonásobně přesnější, avšak nejednoznačné. Použití této techniky pouze snižuje rozptyl pseudovzdálenosti, nemůže sloužit k potlačení systematických chyb. Výhodou je velmi jednoduchá implementace tohoto algoritmu. Snižování rozptylu pseudovzdáleností přímo vede ke snížení rozptylu odhadu polohy, viz část 2.5 věnující se DOP.

Hlavní myšlenkou této metody je, že změna fáze je úměrná změně pseudovzdálenosti. Mezi těmito veličinami existuje jednoznačný přepočít přes vlnovou délku. V následujícím výrazu $\rho[i]$ označuje pseudovzdálenost měřenou v epoše i , podobně $\Phi[i]$ označuje akumulovanou fázi nosné vlny (v jednotkách celých cyklů).

$$\rho[i] - \rho[i - 1] = \lambda(\Phi[i] - \Phi[i - 1]) \quad (2.77)$$

Podrobný popis této metody je možno nalézt v pramenu [1]. Stejný pramen ukazuje také efektivní implementaci carrier smoothing diskretním rekurzivním filtrem, pro filtrovanou hodnotu pseudovzdálenosti použijeme znak $\bar{\rho}$.

$$\bar{\rho}[i] = \frac{1}{L}\rho[i] + \frac{L-1}{L}(\bar{\rho}[i-1] + \lambda(\Phi[i] - \Phi[i-1])) \quad (2.78)$$

Tento filtr by měl aproximovat klouzavý průměr o délce okna L . Při vysokých hodnotách koeficientu L mají větší váhu vyhlazená data. V tomto případě se však můžeme potýkat s divergencí filtru. Vlivem zejména ionosférických efektů se průběh fáze a kódu může v určitém časovém úseku rozcházet. Možnost divergence může být potlačena snížením koeficientu L , což vede i ke snížení míry vyhlazení. Volba koeficientu je vždy kompromisem.

2.6.2. DGPS

Diferenciální GPS vychází z předpokladu, že v dostatečně malé oblasti jsou systematické chyby měření korelované. Kromě chyb efemerid a hodin satelitu, které se ve všech přijímačích projeví totožně, můžeme předpokládat, že troposférické i ionosférické podmínky šíření signálu v dané lokalitě jsou velice podobné. V této sekci se budeme věnovat dvěma způsobům diferenciálního určení polohy. Nejdříve se budeme věnovat principu s korekcí měřených pseudovzdáleností, následně bude ukázána možnost využití fázových měření při relativním určování polohy. Při popisu obou metod korekce vycházíme z knihy [1].

2. Výpočet polohy (PVT)

Korekce měřených pseudovzdáleností

Při znalosti skutečné polohy referenčního přijímače je možné určit geometrickou vzdálenost mezi družicí a přijímačem. Porovnáním s měřenými pseudovzdálenostmi lze zjistit systematickou chybu měření. Použijeme nyní rozšířenou rovnici pro pseudovzdálenost (2.9). Rovnice (2.79) a (2.80) popisují pseudovzdálenost od jedné družice pro referenční přijímač ρ_0 a pohyblivý přijímač (často označovaný jako rover) ρ_1 . Chyba měření je rozložena na chyby vzniklé na satelitu ϵ_{sat} , chyby vzniklé šířením ϵ_t a ostatní chyby ϵ .

$$\rho_0 = r_0 + b_0 + \epsilon_{sat} + \epsilon_{t0} + \epsilon_0 \quad (2.79)$$

$$\rho_1 = r_1 + b_1 + \epsilon_{sat} + \epsilon_{t1} + \epsilon_1 \quad (2.80)$$

Z rovnice pro referenční přijímač je určen korekční člen pro pseudovzdálenost.

$$\delta_\rho = \rho_0 - r_0 \quad (2.81)$$

Tímto činitelem je dále korigována pseudovzdálenost měřená roverem a dostáváme tak výraz

$$\bar{\rho} = \rho_1 - \delta_\rho = r_1 + b_1 - b_0 + \epsilon_{t1} - \epsilon_{t0} + \epsilon_1 - \epsilon_0 \quad (2.82)$$

$$\bar{\rho} = r_1 + b_{10} + \epsilon_{t10} + \epsilon_{10} \quad (2.83)$$

Předpoklad, že chyby vzniklé šířením jsou totožné, je platný pouze částečně a proto stále existuje reziduální chyba vyjádřená členy ϵ_{t10} a ϵ_{10} . Dekorelace chyb nastává zejména při větší vzdálenosti přijímačů, obvykle označované baseline¹², a samozřejmě také stářím použitých korekcí. Hranice použitelnosti DGPS není možné exaktně definovat. Obvyklé hodnoty délky baseline jsou desítky kilometrů, stáří korekcí bývá menší než několik vteřin.

Relativní určení polohy

Při relativním určování polohy se omezujeme na určení vektoru baseline. Znalost polohy referenční stanice není pro aplikace, kde nemusíme znát absolutní polohu roveru, nutná. Tento přístup využívá akumulovaná fázová měření, podobně jako carrier smoothing však neřeší nejednoznačnost počtu celých cyklů fáze. Vycházíme z faktu, že rozdíl pseudovzdáleností měřených roverem a referenčním přijímačem odpovídá rozdílu fází a neznámému počtu celých cyklů fáze.

$$\rho_{10} = \rho_1 - \rho_0 \approx \varphi_1 - \varphi_0 + 2\pi N = \varphi_{10} + 2\pi N \quad (2.84)$$

¹²Označení baseline se používá nejen pro vzdálenost referenčního přijímače a roveru, tak pro příslušný vektor.

2. Výpočet polohy (PVT)

Nedojde-li ke ztrátě zavěšení fáze ani na jednom z přijímačů, je hodnota N přes epochy měření konstantní. Diferencováním v čase tak můžeme tuto nejednoznačnost eliminovat.

$$\rho_{10}^{\Delta} [i] = \rho_{10} [i] - \rho_{10} [i - 1] \approx \varphi_{10} [i] - \varphi_{10} [i - 1] \quad (2.85)$$

Podobně jako u carrier smoothing je průběh rozdílů pseudovzdáleností vyhlazen využitím rozdílů akumulovaných fází. Diferenci měření roveru a referenční stanice je potlačen vliv ionosférických efektů a tedy je sníženo riziko divergence pseudovzdálenosti a fáze. Vektor baseline a bias je možné určit podobně jako u běžného způsobu určení polohy. Jedná se opět o soustavu nelineárních rovnic o čtyřech neznámých.

$$\rho_{10} = \|\mathbf{r}_{10}\| + b_{10} + \epsilon_{10} \quad (2.86)$$

Při znalosti polohy referenčního přijímače je možné získat absolutní polohu roveru superpozicí vektoru \mathbf{r}_{10} k vektoru polohy referenční stanice.

2.7. Kalmanova filtrace

Další možností vylepšení odhadu polohy je Kalmanova filtrace. Jedná se o způsob, jak zohlednit při výpočtu polohy chyby měření a kinematiku přijímače. V této sekci bude pouze nastíněn princip činnosti rozšířeného Kalmanova filtru (EKF, Extended Kalman Filter). Konkrétní podoba rozšířeného Kalmanova filtru implementovaná v programovém balíku RTKLIB [13] bude popsána dále v této práci, nicméně zde dodržíme totožnou notaci¹³.

Pro samotnou definici rozšířeného Kalmanova filtru použijeme označení, kde dolní index definuje epochu měření. Horní index udává, zda se jedná o hodnotu stavového vektoru predikovanou z předchozí epochy ($-$), nebo již korigovanou měřením v současné epoše ($+$). Znak \mathbf{x}_k označuje stavový vektor Kalmanova filtru v epoše k . Jedná se o sloupcový vektor obsahující stavové proměnné (např. polohu, rychlost). Stříškou nad \mathbf{x} je naznačeno, že se jedná o jeho odhad. \mathbf{P}_k je kovarianční maticí stavového vektoru \mathbf{x} . Dále je definován sloupcový vektor měření \mathbf{y}_k , který obsahuje hodnoty měřených veličin (např. pseudovzdálenost, akumulovaná fáze) změřené v dané epoše.

Následující rovnice popisují fázi korekce hodnot stavového vektoru predikovaných na základě modelu. V anglické literatuře je tato fáze filtrace označována jako „measurement update“.

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k \left(\mathbf{y}_k - \mathbf{h} \left(\hat{\mathbf{x}}_k^- \right) \right) \quad (2.87)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_k^+ = \mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H} \left(\hat{\mathbf{x}}_k^- \right) \hat{\mathbf{P}}_k^- \quad (2.88)$$

$$\mathbf{K}_k = \hat{\mathbf{P}}_k^- \mathbf{H} \left(\hat{\mathbf{x}}_k^- \right) \cdot \left(\mathbf{H} \left(\hat{\mathbf{x}}_k^- \right) \hat{\mathbf{P}}_k^- \mathbf{H} \left(\hat{\mathbf{x}}_k^- \right)^T + \mathbf{R}_K \right)^{-1} \quad (2.89)$$

¹³Tato práce si neklade za cíl podrobné odvození Kalmanova filtru, spíše popis činnosti. Další informace ke Kalmanově filtraci je možno nalézt v pramenech [14, 2, 15]

2. Výpočet polohy (PVT)

Matice \mathbf{K}_k bývá označována jako matice zesílení, případně Kalmanovský zisk (Kalman gain). Označení $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ přísluší vektoru modelu měření, který popisuje vztah vektoru měření k hodnotám stavového vektoru. $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ je maticí parciálních derivací (Jakobián) vektoru modelu měření.

Pro přechod z epochy k do epochy další $(k+1)$ jsou určeny matice přechodu \mathbf{F}_k a kovarianční matice systémových šumů \mathbf{Q}_k . Pro úplnost dodejme anglický termín používaný pro tuto fázi filtrace „time update“ nebo „temporal update“. Tyto matice jsou vytvořeny na základě kinematického modelu přijímače.

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_k^+ \quad (2.90)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{k+1}^- = \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{P}}_k^+ \mathbf{F}_k^T + \mathbf{Q}_k \quad (2.91)$$

Kalmanova filtrace se na odhadu polohy může projevit i v negativním smyslu, zejména pokud skutečný pohyb přijímače neodpovídá modelu, podle kterého byl filtr navržen¹⁴. Jedná se tedy vždy o hledání kompromisu mezi efektivitou filtrace a univerzálností kinematického modelu.

2.7.1. Integrace GNSS a inerciální navigace

Kalmanovu filtraci je možno využít i k fúzi dat z družicové navigace a inerciálních senzorů. Tato integrace umožňuje potlačení nevýhod obou typů určení polohy. Problémem družicové navigace je bezesporu zastínění satelitů, například vegetací, zástavbou nebo terénem. V takových případech může být k extrapolaci odhadu polohy využito inerciálního navigačního systému. Ten umožňuje měřit zrychlení s využitím akcelerometrů a rotaci objektu s využitím gyroskopů. Oba tyto typy senzorů vykazují tzv. biasy, tedy i při nulovém mechanickém buzení je výstup nenulový. Nejsou-li senzory kalibrovány, bias vede k degradaci navigace, zejména s přibývajícím délkou měření. Díky integraci systémů je však možné tyto parametry inerciálních parametrů odhadnout a korigovat dále jejich výstup.

Odhad polohy získaný pouze z inerciálního systému je vždy relativní, protože je měřena pouze akcelerace, druhá derivace polohy, a úhlová rychlost v případě gyroskopů. Poloha, rychlost a orientace je tak získávána integrací měřených veličin, tento způsob navigace je označován jako „dead reckoning“. Bez znalosti absolutní počáteční polohy a rychlosti, tj. vztahu k ECEF souřadnicové soustavě, nemůžeme určit ani jednu z veličin jednoznačně. Tyto údaje však může poskytnout družicový systém určení polohy.

Literatura [2] uvádí, že je možné dělit takové systémy podle míry integrace - na těsnou a volnou. Je-li použita volná vazba, je vstupem filtru (vektorem měření) kromě výstupů

¹⁴Vezměme si za příklad GNSS přijímač v mobilním telefonu. Na jedné straně je model pohybu chodce, vyznačující se nízkou rychlostí, ale rychlými změnami směru a rychlosti. Stejný přijímač však může být použit v automobilu, s podstatně vyššími rychlostmi, ale menší dynamikou.

2. Výpočet polohy (PVT)

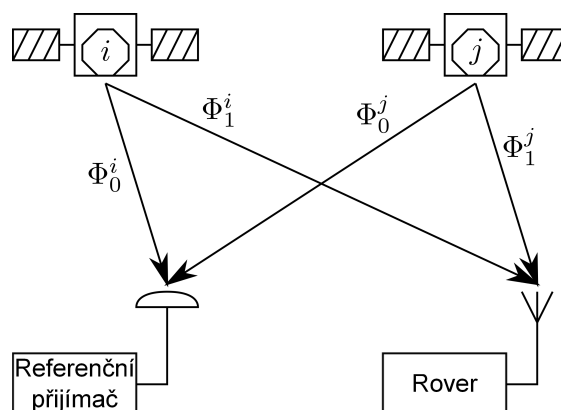
inerciálních senzorů ještě výstup řešení PVT úlohy GNSS přijímače (vektory polohy a rychlosti, čas). V případě těsné integrace jsou vstupem filtru namísto řešení PVT přímo měřené veličiny GNSS přijímače, obvykle pseudovzdálenosti. V obou případech z filtru vystupuje (je stavovým vektorem) pozice, rychlost a poloha přijímače.

Stejný zdroj také uvádí možnost extrémně integrovaného systému, kdy jsou přímo smyčky DLL sledující zpoždění dálkoměrného kódu (pro každou družici jedna smyčka) uzavřeny přes společný Kalmanův filtr. Tímto přístupem jsou všechny sledovací smyčky svázány s polohou a rychlostí přijímače. Tento postup bývá označován jako vektorové sledování (vector tracking), samotná smyčka je označena zkratkou VDLL.

3. Real Time Kinematics (RTK)

3.1. Princip činnosti

Zkratka RTK je používána pro termín Real-Time Kinematics. Jedná se o metodu velmi přesného diferenciálního určení polohy, která využívá vyřešení nejednoznačnosti měření fáze. Tím se stává proces výpočtu polohy složitějším a zároveň výpočetně náročným. Samozřejmě se také zvyšují požadavky na aktuálnost přenášených korekcí. Měřené pseudovzdálenosti mohou být v tomto případě považovány za redundantní, je možné je však využít při odhadu neurčitostí fáze. V našem případě se omezíme na využívání monofrekvenčních přijímačů (pro pásmo L1), v obecném případě je však možné používat multifrekvenční přijímače. Označme nyní Φ_0^i akumulované fázové měření. Horní index značí, ke které družici se měření vztahuje, dolní index označuje přijímač (0 pro referenční stanice, 1 pro rover), viz obrázek 3.1. Uvažujme model měření akumulované fáze



Obrázek 3.1.: Schema označení fázových měření

příslušící i -tému satelitu pro rover a referenční přijímač:

$$\Phi_1^i = \frac{r_1^i}{\lambda} + N_1^i + b_1^\Phi + \epsilon_1 + \epsilon^i \quad (3.1)$$

$$\Phi_0^i = \frac{r_0^i}{\lambda} + N_0^i + b_0^\Phi + \epsilon_0 + \epsilon^i \quad (3.2)$$

Měřená akumulovaná fáze tedy odpovídá geometrické vzdálenosti přijímač-družice r , počáteční neurčitosti počtu celých cyklů fáze N . Znakem b^Φ je označena neceločíselná

3. Real Time Kinematics (RTK)

část rozdílu fáze místní fázové reference přijímače (počáteční fáze). Měření je degradováno chybami vzniklými na družici ϵ^i , chybami na příslušném přijímači ϵ_0 , respektive ϵ_1 . V několika dalších odstavcích se pokusíme ukázat principy fázového měření. Všechny níže uvedené metody využívají diferenciaci měření za účelem potlačení chyb nebo přebytečných parametrů.

Jednoduché difference (SD – Single Differences)

Hlavní měřenou veličinou je v tomto případě rozdíl akumulovaných fází mezi roverem a referenční stanicí. Stejně jako u DGPS je jednoduchou diferencí potlačen vliv nedokonalostí hodin družice, částečně i vliv chyb vzniklých šířením atmosférou. Tato metoda nemůže eliminovat rozdíl hodin přijímačů. Počet měřených hodnot odpovídá počtu družic, které jsou současně viditelné pohyblivým i referenčním přijímačem.

$$\Phi_{10}^i = \Phi_1^i - \Phi_0^i \quad (3.3)$$

$$\Phi_{10}^i = \frac{r_1^i - r_0^i}{\lambda} + N_{10}^i + b_{10}^\Phi + \epsilon_{10} \quad (3.4)$$

Tento přístup není příliš využíván, zejména protože nepotlačuje chyby vzniklé oscilátory přijímačů. Ty mohou být navíc časově proměnné.

Dvojitě difference (DD – Double Differences)

Kromě rozdílu rover-referenční stanice se přidává ještě difference vůči zvolenému referenčnímu satelitu a eliminuje se tak rozdíl hodin přijímačů b_{10}^Φ . Takto získaných měření je o jedno méně než společně viditelných družic.

$$\Phi_{10}^{ij} = \Phi_{10}^i - \Phi_{10}^j \quad (3.5)$$

$$\Phi_{10}^{ij} = \frac{(r_1^i - r_0^i) - (r_1^j - r_0^j)}{\lambda} + N_{10}^{ij} + \epsilon_{10} \quad (3.6)$$

Je patrné, že není možné určit polohu na základě hodnot naměřených v jedné epoše, jak tomu bylo u tradičních způsobů určení polohy. Důvodem je, že máme stejný počet neznámých nejednoznačností N_{10}^{ij} , jako počet naměřených hodnot Φ_{10}^{ij} . Pro každou epochu měření máme dále neznámý vektor polohy roveru \mathbf{r}_1 .¹⁵ Označíme-li počet družic M a počet epoch K , je počet neznámých $(M - 1) + 3K$, pro řešení soustavy rovnic je třeba stejného, nebo vyššího počtu měřených dvojitých diferencí $K(M - 1)$.

¹⁵Pokud bychom uvažovali určování polohy statického roveru, byl by vektor polohy samozřejmě společný pro všechny epochy měření a klesl by tak počet neznámých.

Trojité diference (TD – Triple Differences)

Dalším diferencováním, mezi dvěma epochami měření, jsou eliminovány vlivy konstantní v čase. Mezi ně patří i neurčitosti počtu celých cyklů fáze, respektive jejich dvojité diference N_{10}^{ij} . Přířímým důsledkem je však velmi pravděpodobné snížení přesnosti, protože se eliminací daného členu zbavíme i podmínky celočíselnosti těchto hodnot [16]. I přesto je možné tuto metodu využít, příkladem může být článek [17]. Dále v této práci bude rozebrán rozdíl celočíselného a neceločíselného řešení u dvojitých diferencí.

3.1.1. Řešení celočíselných nejednoznačností fáze

Velmi často využívanou metodou řešení nejednoznačnosti fáze je metoda LAMBDA (Least-squares AMBIGUITY Decorrelation Adjustment). Při jejím popisu budeme vycházet zejména z pramenů dostupných s implementací metody [18]. Pokušíme se zachovat podobnou notaci. V rovnicích pro určování polohy měření fáze se vyskytují jak spojité proměnné (poloha, rychlost, atd.) a proměnné celočíselné (nejednoznačnosti). Jako příklad vezměme rovnici (3.6) pro měření dvojitých diferencí. Ta obsahuje dvojitou diferenci nejednoznačnosti fáze N_{10}^{ij} a poté dvojitou diferenci geometrických vzdáleností družice-přijímač - tu je možné určit z polohy přijímačů a družic. Linearizovanou soustavu rovnic pro dvojité diference je tedy možné zapsat obecně jako

$$\mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{b} + \mathbf{A}\mathbf{a} + \boldsymbol{\epsilon} \quad (3.7)$$

Vektor \mathbf{y} je v tomto případě opět vektorem měření, \mathbf{b} zahrnuje všechny neznámé z množiny reálných čísel, \mathbf{a} obsahuje celočíselné nejednoznačnosti fáze. Matice \mathbf{A} a \mathbf{B} vyjadřují vztah příslušných neznámých veličin k měřeným hodnotám. Znakem $\boldsymbol{\epsilon}$ je označen souhrn nemodelovaných chyb a chyb měření. Pro řešení metodou nejmenších čtverců je možné dostat následující rovnici, kde \mathbf{Q}_y je kovarianční maticí vektoru měření.

$$\min_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \|\mathbf{y} - \mathbf{B}\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{a}\|_{\mathbf{Q}_y}^2 \quad \mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^p \quad (3.8)$$

Tento problém bývá označován díky přítomnosti obou typů veličin jako Mixed Least-Squares. Metoda LAMBDA využívá k řešení tři kroků. Prvním z nich je řešení (3.8) bez omezení v podobě celočíselnosti hodnot vektoru \mathbf{a} .

$$\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}} = \min_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \|\mathbf{y} - \mathbf{B}\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{a}\|_{\mathbf{Q}_y}^2 \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^p \quad (3.9)$$

Toto řešení se nazývá v anglické literatuře „float solution”. Zdroj [19] nastiňuje řešení pomocí soustavy normálních rovnic, které přináší výhodu vypočtení Choleského činitele G , který je dále využit v postupu. Cílem je však získat tzv. „fix solution”, tedy řešení s podmínkou $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$. Toho by šlo dosáhnout prostým zaokrouhlením hodnot, či technikou zvanou integer bootstrapping [20]. Nicméně se ukazuje, že správným řešením je

3. Real Time Kinematics (RTK)

ILS (Integer Least-Squares) odhad. V druhém kroku metody LAMBDA je tedy řešen problém

$$\check{\mathbf{a}}, = \min_{\mathbf{a}} \|\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a}\|_{\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}}^{-1}}^2 \quad \mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n \quad (3.10)$$

Ve finálním třetím kroku je získána i druhá část fix řešení $\check{\mathbf{b}}$ vyjádřené jako

$$\check{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{b}} - \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{a}}} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}}^{-1} (\hat{\mathbf{a}} - \check{\mathbf{a}}) \quad (3.11)$$

Dekorelace celočíselných nejednoznačností

Vyhledávání správného celočíselného řešení, tj. přechod od float k fix, rovnice (3.10), probíhá v oblasti tvaru elipsoidu. Tato oblast je definována odhadem kovarianční matice $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}}$ získaným z float řešení.

$$(\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a}) \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}} (\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a}) \leq \chi^2 \quad (3.12)$$

Vzhledem k tomu, že variance jednotlivých nejednoznačností, obvykle fázových dvojitých diferencí, se mohou ve velké míře lišit a navíc jsou tyto hodnoty silně korelovány, bude elipsoid velmi protáhlý. Je výhodné jednotlivé nejednoznačnosti dekorelovat, tvar elipsoidu se bude blížit kouli. Metoda LAMBDA k tomuto využívá Z-transformaci¹⁶. Ta je založená na $\mathbf{L}^T \mathbf{D} \mathbf{L}$ dekompozici kovarianční matice $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}}$. Algoritmy vhodné k výpočtu tohoto rozkladu je možno nalézt v pramenu [19, sekce 3.3].

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}} = \mathbf{L}^T \mathbf{D} \mathbf{L} \quad (3.13)$$

Prvky d_i diagonální matice \mathbf{D} mají význam rozptylů $d_i = \sigma_{\hat{a}_{i|i+1, \dots, n}}^2$ podmíněných nejednoznačností¹⁷. Cílem je dosáhnout toho, aby rozptyl prvků byl co nejmenší. Dále je také požadováno, aby rozptyl klesal s i . Důvod druhé z této podmínek vyplyne ze způsobu vyhledávání správného odhadu popsaného dále.

$$d_n \leq d_{n-1} \leq \dots \leq d_1 \quad (3.14)$$

Z-transformace zachovává objem a její matice musí mít všechny elementy celočíselné [21]. Pro transformaci platí

$$\mathbf{z} = \mathbf{Z}^T \mathbf{a} \quad (3.15)$$

$$\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{Z}^T \hat{\mathbf{a}} \quad (3.16)$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}} = \mathbf{Z}^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}} \mathbf{Z} \quad (3.17)$$

Prohledávaná oblast (3.12) se tak transformací změní na

$$(\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}) \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}} (\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}) \leq \chi^2 \quad (3.18)$$

¹⁶Nejedná se o z-transformaci známou z oblasti diskretních systémů.

¹⁷Chápejme, že odhad $\hat{a}_{i|i+1, \dots, n}$ je odhad i -té složky vektoru $\hat{\mathbf{a}}$, pakliže už známe odhad všech složek s vyšším pořadovým číslem. Podobně pracuje výše zmíněná technika integer bootstrapping.

3. Real Time Kinematics (RTK)

Ideálním případem by bylo, kdyby po transformaci byla kovarianční matice \mathbf{Q}_z diagonální, protože by bylo možné získat výsledky pouhým zaokrouhlením. Bohužel to vzhledem k podmínce celočíselnosti elementů matice \mathbf{Z}^T není možné a nejednoznačnosti jsou stále částečně korelované.

Matice, respektive transformace, \mathbf{Z} se sestává z několika celočíselných Gaussovských transformací a permutací. Podrobně popisuje proces získání matice \mathbf{Z} pramen [19], zde se pokusíme ukázat princip jejího výpočtu jednodušší formou. Gaussovská transformace má v obecném případě tvar (3.19), kde \mathbf{e}_i je i -tým sloupcem jednotkové matice, tedy vektorem, který kromě nul obsahuje pouze jedničku na pozici i .

$$\mathbf{Z}_{ij} = \mathbf{I} + \mu \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i^T \quad i \neq j \quad (3.19)$$

V metodě LAMBDA je však použita varianta Gaussovské transformace pro dva sousední sloupce, takže matice transformace odpovídá výrazu (3.20)¹⁸.

$$\mathbf{Z}_{i,i+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 & 0 \\ & & & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

[19] ukazuje, že takováto transformace nemá vliv na matici \mathbf{D} a tedy na podmíněné variance. Zásadní je vliv na podmíněné kovariance. K plné dekorelaci by došlo, kdyby hodnota členu $\mu = -l_{i+1,i}$. Vzhledem k podmínce celočíselnosti je však tato hodnota zaokrouhlena na nejbližší celé číslo $\lfloor -l_{i+1,i} \rfloor$, rovnost je tedy pouze přibližná. Poskládáním několika takových Gaussovských transformací je možné dekorelovat sloupec matice \mathbf{L} pomocí algoritmu 3.1.

Kromě dekorelace je však nutné jednotlivé podmíněné variance vhodně seřadit tak, aby spektrum těchto variancí¹⁹ bylo pokud možno ploché. Toho je dosaženo za pomoci permutací sousedních sloupců.

$$\mathbf{P}_{i,i+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

¹⁸Protože se jedná vždy o dva sousední sloupce bude člen μ ve výrazu (3.20) vždy ležet těsně pod diagonálou matice. V obecném případě popsaném rovnicí (3.19) může prvek μ ležet v matici kdekoliv mimo diagonálu, případně pod ní, pokud přistoupíme na podmínku $i < j$

¹⁹Příklad spektra variancí, resp. směrodatných odchylek, před a po Z-transformaci je možno najít v [22].

3. Real Time Kinematics (RTK)

Algoritmus 3.1 Dekorelace sloupce matice \mathbf{L}

Pro každý nenulový prvek k -tého sloupce matice \mathbf{L} , $l_{j,k}$:

1. $\mu = [l_{j,k}]$
2. Od k -tého sloupce matic \mathbf{L} a \mathbf{Z} jsou odečteny μ násobky jejich j -tých sloupců, odpovídajícím způsobem je transformován vektor odhadu nejednoznačností $\hat{\mathbf{a}}$

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{:,k} &= \mathbf{L}_{:,k} - \mu \mathbf{L}_{:,j} \\ \mathbf{Z}_{:,k} &= \mathbf{Z}_{:,k} - \mu \mathbf{Z}_{:,j} \\ \hat{\mathbf{a}}_k &= \hat{\mathbf{a}}_k - \mu \hat{\mathbf{a}}_j\end{aligned}$$

Vliv této permutace na prvky matic \mathbf{L} a \mathbf{Z} je popsán několika následujícími rovnicemi [19].

$$d'_{i+1} = d_i + l_{i+1,i}^2 d_{i+1} \quad (3.22)$$

$$d_i = \frac{d_i}{d'_{i+1}} d_{i+1} \quad (3.23)$$

$$l'_{i+1,i} = \frac{d_{i+1}}{d'_{i+1}} l_{i+1,i} \quad (3.24)$$

$$\mathbf{L}'_{i:i+1,1:i-1} = \begin{bmatrix} -l_{i+1,i} & 1 \\ \frac{d_i}{d'_{i+1}} & l'_{i+1,i} \end{bmatrix} \mathbf{L}_{i:i+1,1:i-1} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{L}'_{i+2:n,i:i+1} = \mathbf{L}_{i+2:n,i:i+1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Vhodnou kombinací několika permutací a dekorelací je poté získána matice \mathbf{Z} , respektive provedena transformace vektoru $\hat{\mathbf{a}}$. Tento postup je shrnut v algoritmu 3.2.

Sekvenční podmíněné prohledávání

Hodnoty celočíselných nejednoznačností jsou vyhledávány v oblasti tvaru elipsoidu podle rovnice (3.12), respektive (3.18). Tato rovnice může však být přepsána do tvaru

$$\sum_{i=1}^n \frac{(a_i - \hat{a}_{i|i+1,\dots,n})^2}{\sigma_{\hat{a}_{i|i+1,\dots,n}}^2} \leq \chi^2 \quad (3.27)$$

Vyhledání správného řešení probíhá sekvenčně po dimenzích. V této práci vynecháváme exaktní vzorce pro efektivní výpočet hranic elipsoidu a normy $\|\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a}\|_{\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}}}^2$, respektive

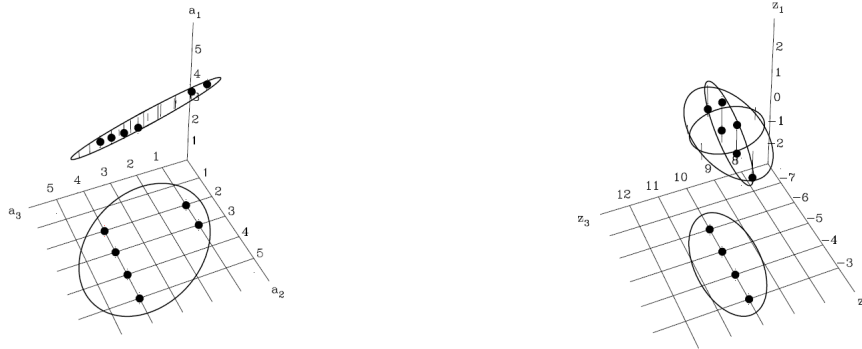
Algoritmus 3.2 Získání matice \mathbf{Z}

1. Začínáme s maticí \mathbf{Z} jednotkovou, $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}} = \mathbf{L}^T \mathbf{D} \mathbf{L}$ rozklad kovarianční matice. Proměnná i_r uchovává index posledního nedekorelovaného sloupce matice \mathbf{L} , počáteční hodnota je $n - 1$.
 2. Ukazatel na sloupec i je nastaven na hodnotu počtu sloupců n a je zahájen cyklus
 - a) Dekrementace i , pokud je $i \leq i_r$ je i -tý sloupec dekorelován algoritmem 3.1.
 - b) Je vypočtena hodnota d'_{i+1} podle rovnice (3.22). Pokud je tato hodnota nižší než původní hodnota d_{i+1} jsou provedeny kroky (c), (d) a (e), v opačném případě jsou přeskočeny a pokračuje se krokem (a).
 - c) Matice \mathbf{D} a \mathbf{L} jsou upraveny způsobem odpovídajícím rovnicím (3.22) až (3.26) .
 - d) Je prohozen i -tý a $i + 1$ sloupec matice \mathbf{Z} , podobně je provedena záměna i -tého a $i + 1$ prvku vektoru $\hat{\mathbf{a}}$ nejednoznačností fáze.
 - e) Proměnná i_r je nastavena na hodnotu ukazatele sloupce i , cyklus je ukončen a je spuštěn znovu krokem 2.
 3. Dojde-li k průchodu celého cyklu bez provedení permutace (tedy kroků (c)-(e)) je algoritmus ukončen.
-

$\|\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}\|_{\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}}}^2$ pro transformované veličiny. Věnujeme se spíše sekvenčnímu způsobu odhadu. Podotkněme, že popis vyhledávacího algoritmu je totožný pro transformované (dekorelované) nejednoznačnosti \mathbf{z} i původní nejednoznačnosti \mathbf{a} . Je třeba vyhledat všechny body ležící v elipsoidu a poté porovnáním jejich normy vybrat nejlepší řešení.

Nejdříve jsou určeny možné hodnoty nejednoznačnosti \hat{z}_n . Pro každou z hodnot nejednoznačnosti \hat{z}_n jsou určeny možné hodnoty nejednoznačností \hat{z}_{n-1} , stejným způsobem se pokračuje dále. Tím získáme jakýsi strom prohledávaných hodnot. Právě ve tvaru tohoto stromu tkví efektivita metody LAMBDA. Protože jsme \mathbf{Z} -transformací seřadili podmíněné rozptyly nejednoznačností podle rovnice (3.14), nejmenší rozptyl má nejednoznačnost \hat{z}_n . Na počátku tak získáme relativně malé množství možných bodů. Tím, že se podmíněné rozptyly postupně zvyšují, je pravděpodobné, že i při prohledávání další dimenze budou body také ležet uvnitř elipsoidu. Získáme tak strom, který není příliš rozvětven, avšak velká část jeho větví dosahuje maximální délky (zahrnují všechny dimenze vektoru $\hat{\mathbf{z}}$). V případě korelovaných a neseřazených nejednoznačností je častým jevem, že bod „projde“ vyhledáváním téměř ve všech dimenzích vektoru $\hat{\mathbf{a}}$, nicméně v jednom z kroků na konci je vyřazen, protože není vhodným kandidátem (nespadá do oblasti elipsoidu). Strom vyhledávání je v tomto případě košatý, ale většina větví nedosáhne cíle. Většina výpočtů však již byla provedena a tedy efektivita vyhledávání značně klesá.

3. Real Time Kinematics (RTK)



(a) Původní elipsoid

(b) Transformovaný elipsoid

Obrázek 3.2.: Demonstrace vlivu Z-transformace na tvar prohledávaného elipsoidu, převzato z [19]

Tuto vlastnost ilustruje graf 3.3. Jedná se o reálný příklad řešení celočíselných nejednoznačností pro pozorování 7 GPS družic na dvou kmitočtech²⁰ [19]. Jedná se o měření s baseline 2,2 km ve dvou epochách (časový rozdíl 1 s).

ADOP - Ambiguity DOP

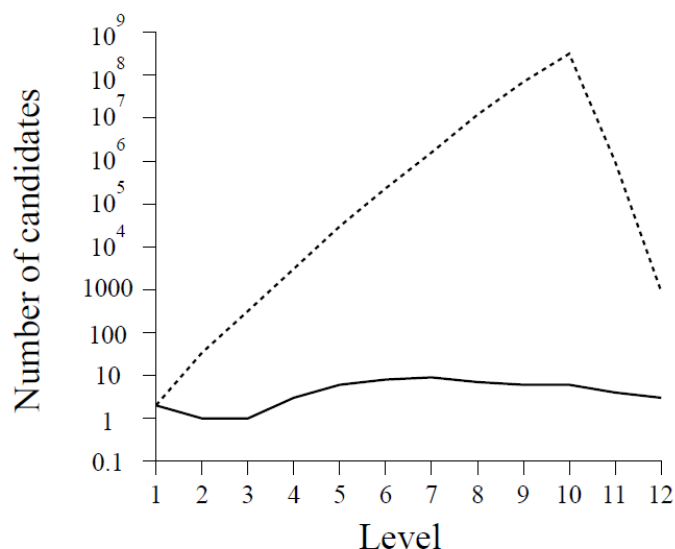
Podobně jako u tradičních způsobů určení polohy je vhodné mít skalární, tedy jednoduše interpretovatelný, ukazatel kvality odhadu nejednoznačností. Článek [23] definuje činitel ADOP, který vychází z kovarianční matice nejednoznačností $\mathbf{Q}_{\hat{a}}$. Zdroj ukazuje, že vzhledem k silné vzájemné korelaci nejednoznačností není vhodné použít stejný výpočet jako u tradičního PVT řešení, tedy geometrický průměr prvků hlavní diagonály (sekce 2.5). Dalším důvodem je, že takto vypočtený činitel ADOP není invariantní vzhledem ke změně referenčního satelitu dvojitých diferencí - pro totožnou konstelaci by existovalo více platných hodnot ADOP. Ve světle těchto poznatků je činitel ADOP svázán s determinantem kovarianční matice.

$$ADOP = \sqrt[2n]{|\mathbf{Q}_{\hat{a}}|}$$

Článek [23] dále ukazuje efektivní výpočet tohoto determinantu, používající \mathbf{LDL}^T dekompozici, která je využita i v metodě LAMBDA. Dále je dokázán uzavřený analytický tvar pro výpočet determinantu matice $\mathbf{Q}_{\hat{a}}$.

²⁰Je odhadováno 12 neurčitostí, což odpovídá dvojitým diferencím.

3. Real Time Kinematics (RTK)



Obrázek 3.3.: Srovnání vývoje počtu kandidátů v závislosti na stupni vyhledávání (přerušovaná čára - bez transformace, plná čára - s transformací), převzato z [19]

3.2. RTKLIB

RTKLIB je open-source balík programů a knihoven implementující určování polohy metodou RTK. Je zde implementována upravená metoda dvojitého diferencí. Knihovna je kompatibilní s přijímači mnoha výrobců, režim RTK je podmíněn možností výstupu měřené fáze, pseudovzdálenosti a demodulovanou navigační zprávou, který je často označován jako „raw data“. Zajištěna je také kompatibilita s korekcemi ve formátu RTCM2 a RTCM3, tedy typem korekcí, které generuje i referenční stanice katedry radioelektroniky.

V této sekci se pokusíme stručně popsat implementaci RTK určování polohy a zejména pak EKF. Důraz bude zejména na rozlišení dvou kinematických a statického režimu odhadu polohy, které programový balík nabízí.

Dokumentace RTKLIB [13], ze které tato sekce čerpá, používá hodnotu akumulované fáze udávanou v metrech. To může přinášet výhodu v případě multifrekvenčních systémů, kde se vyskytuje více rozdílných vlnových délek. Přestože se v této práci věnujeme implementaci pouze pro monofrekvenční měření, budeme se i v této kapitole držet tohoto zápisu. Je proto třeba dbát zvýšenou pozornost na umístění členu vlnové délky λ .

3.2.1. Implementace metody dvojitých diferencí

Rovnice pro DD použité v RTKLIB využívají rozklad dvojitě diference na rozdíl dvou jednoduchých diferencí, viz (3.5). Rovnice pro dvojitě diference pak nabývá tvaru (3.28).

$$\phi_{10}^{ij} = \left(r_1^i - r_0^i \right) - \left(r_1^j - r_0^j \right) + \lambda \left(N_{10}^i - N_{10}^j \right) + \epsilon_{10} \quad [\text{m}] \quad (3.28)$$

Použitím jednoduchých diferencí nejednoznačností přibude jedna neznámá, kterou je třeba odhadnout. Na druhou stranu je tímto řešením zjednodušena změna referenčního satelitu dvojitých diferencí. Tento případ může nastat např. ve chvíli ztráty kontinuity fázového měření u referenční družice. Při použití dvojitých diferencí nejednoznačností by bylo nutné přepočítat všechny hodnoty, zatímco při použití jednoduchých diferencí nejednoznačností je možno ponechat beze změny, samozřejmě kromě nového odhadu nejednoznačností odpovídající referenční družici. Tento přístup také umožňuje, aby jako referenční byla vždy volena družice s největší elevací.

K řešení celočíselných nejednoznačností je využita metoda LAMBDA. Kvalita odhadu nejednoznačností fáze je ověřována výpočtem poměru

$$R = \frac{\left(\check{N}_{\#2} - \hat{N} \right) \mathbf{Q}_N^{-1} \left(\check{N}_{\#2} - \hat{N} \right)}{\left(\check{N}_{\#1} - \hat{N} \right) \mathbf{Q}_N^{-1} \left(\check{N}_{\#1} - \hat{N} \right)} \quad (3.29)$$

Tento poměr je označován jako AR validation ratio a jedná se o vážené sumy reziduí dvou nejlepších fix odhadů $\check{N}_{\#1}$, respektive $\check{N}_{\#2}$. V RTKLIB je možno zvolit pevnou prahovou hodnotu, při jejímž překročení bude fix odhad považován za platný.

3.2.2. Implementace rozšířeného Kalmanova filtru (EKF)

V RTKLIB je implementován rozšířený Kalmanův filtr, který umožňuje využití tří režimů určení polohy - statický režim, kinematický režim a režim pohyblivé baseline. Věnujme se pouze režimům se stálou polohou referenční stanice, protože třetí z režimů neumožňuje přesné určení absolutní polohy. Nejprve definujme obsah vektoru měření \mathbf{y} a stavového vektoru EKF \mathbf{x} .

$$\mathbf{y} = \left(\phi_{10}^{12}, \phi_{10}^{13}, \dots, \phi_{10}^{1(M-1)}, \rho_{10}^{12}, \rho_{10}^{13}, \dots, \rho_{10}^{1(M-1)} \right) \quad [\text{m}] \quad (3.30)$$

$$\mathbf{x} = \left(\mathbf{r}_1^T, \mathbf{v}_1^T, \mathbf{N}_{10}^T \right)^T \quad [\text{m}, \text{ms}^{-1}, -] \quad (3.31)$$

Vektor modelu měření odkrývá vztah hodnot stavového vektoru k měřeným veličinám. V zápisu využijeme označení r_{10}^{1i} pro dvojitou diferenci geometrické vzdálenosti k i -tému satelitu.

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(\mathbf{x}) &= \left(h_{\phi_1}, h_{\phi_2}, \dots, h_{\phi_{(M-1)}}, h_{\rho_1}, h_{\rho_2}, \dots, h_{\rho_{(M-1)}} \right) \quad (3.32) \\ h_{\phi_i} &= r_{10}^{1i} + \lambda B_{10}^{1i} \\ h_{\rho_i} &= r_{10}^{1i} \end{aligned}$$

3. Real Time Kinematics (RTK)

Matici parciálních derivací vektoru modelu měření lze přehledně zapsat s využitím matice \mathbf{S} , která realizuje jednoduché diference a matice \mathbf{E} , která obsahuje ve svých řádcích jednotkové směrové vektory. Jejich směr je od přijímače (roveru) k příslušné družici. Pro označení jednotlivých složek směrového vektoru k i -tému satelitu $\mathbf{1}_i$ je použito označení $\underline{1}_x^i$, $\underline{1}_y^i$ a $\underline{1}_z^i$.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -1\mathbf{S}\mathbf{E} & 0 & \lambda\mathbf{S} \\ -1\mathbf{S}\mathbf{E} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & 0 & 0 & & -1 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

$$\mathbf{E} = (\mathbf{1}_1, \mathbf{1}_2, \dots, \mathbf{1}_M)^T = \begin{bmatrix} \underline{1}_x^1 & \underline{1}_y^1 & \underline{1}_z^1 \\ \underline{1}_x^2 & \underline{1}_y^2 & \underline{1}_z^2 \\ & \vdots & \\ \underline{1}_x^M & \underline{1}_y^M & \underline{1}_z^M \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Potřebujeme ještě znát kovarianční matici měření \mathbf{R} , kterou je možno složit z kovarianční matice dvojitých diferencí fázových měření \mathbf{R}_Φ a podobné matice pro měření pseudovzdálenosti \mathbf{R}_ρ (ta zde není uvedena, od matice \mathbf{R}_Φ se liší pouze dolním indexem u jednotlivých variancí).

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_\Phi & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_\rho \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

$$\mathbf{R}_\Phi = 2 \cdot \begin{bmatrix} (\sigma_\Phi^1)^2 + (\sigma_\Phi^2)^2 & (\sigma_\Phi^1)^2 & \cdots & (\sigma_\Phi^1)^2 \\ (\sigma_\Phi^1)^2 & (\sigma_\Phi^1)^2 + (\sigma_\Phi^3)^2 & & (\sigma_\Phi^1)^2 \\ \vdots & & \ddots & \\ (\sigma_\Phi^1)^2 & (\sigma_\Phi^1)^2 & & (\sigma_\Phi^1)^2 + (\sigma_\Phi^M)^2 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Nyní již známe kompletní sadu členů potřebných pro výpočet Kalmanovského zisku \mathbf{K}_k , podle rovnice (2.89), a provedení „measurement update“ kroku Kalmanovy fitrace podle rovnic (2.87),(2.88). V dosavadním popisu nebylo rozdílu mezi statickým a kinematickým režimem. Rozdíl je v podobě matice přechodu \mathbf{F}_k a kovarianční matice systémových šumů \mathbf{Q}_k . Tyto dvě matice jsou využity při časovém kroku EKF „temporal update“. V zájmu přehlednosti budeme \mathbf{F}_k a \mathbf{Q}_k popisovat po částech, které odpovídají jednotli-

3. Real Time Kinematics (RTK)

vým vlastnostem pohybového modelu přijímače.

$$\mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{rr} & \mathbf{F}_{rv} & 0 \\ 0 & \mathbf{F}_{vv} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{F}_{NN} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

$$\mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_{vv} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{Q}_{NN} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Submatice \mathbf{F}_{rr} , \mathbf{F}_{vv} a \mathbf{F}_{BB} vyjadřují „přenos“ pozice na pozici, podobně pro rychlost a nejednoznačnosti. Ve značení je možno vidět analogii s S-parametry (rozptylovými parametry), jež jsou používány k popisu vysokofrekvenčních n-branů. Tyto matice jsou pro všechny režimy Kalmanovy filtrace v RTKLIB jednotkové, příslušných rozměrů. Submatice \mathbf{F}_{rv} upravuje vektor polohy tak, jako by se projevil rovnoměrný přímočarý pohyb s rychlostí \mathbf{v} . Takto se děje v kinematickém režimu, pokud je uvažován dynamický model přijímače, v ostatních režimech je submatice \mathbf{F}_{rv} nulová.

$$\mathbf{F}_{rv} = (t_{k+1} - t_k) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Nyní se již věnujme submaticím systémových šumů. Při použití kinematického režimu, kdy je uvažován dynamický model přijímače jsou submatice \mathbf{Q}_{rr} a \mathbf{Q}_{BB} nulové, příslušných rozměrů. Submatice \mathbf{Q}_{vv} obsahuje informaci o časově normovaných rozptylech rychlosti přijímače ve dvou horizontálních směrech (σ_{vE}^2 východo-západním a σ_{vN}^2 severo-j jižním) a ve směru vertikálním σ_{vU}^2 . Tyto normované rozptyly jsou udávány v jednotkách m^2s^{-3} , což odpovídá $(\text{ms}^{-1})^2/\text{s}$.

$$\mathbf{Q}_{vv} = (t_{k+1} - t_k) \mathbf{R}_{ENU}^T \begin{bmatrix} \sigma_{vE}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{vN}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{vU}^2 \end{bmatrix} \mathbf{R}_{ENU} \quad (3.41)$$

V případě kinematického režimu bez dynamického modelu obsahuje submatice \mathbf{Q}_{rr} na své diagonále velmi vysoké hodnoty. Manuál RTKLIB [13] uvádí, že z důvodu zachování numerické stability jsou v tomto režimu hodnoty vektoru polohy v každé epoše nastaveny na výchozí hodnotu, kterou představuje výstup řešení navigační úlohy běžnými algoritmy. Ostatní submatice \mathbf{Q} jsou nulové.

Tvar matic pro statický režim je triviální - matice \mathbf{F}_k je jednotkovou maticí, \mathbf{Q}_k je nulová.

4. Implementace drážního lokátoru

4.1. Popis technického vybavení

4.1.1. Přístrojové vybavení

Jádrem drážního lokátoru je drážní počítač nROK 3000 od firmy NEXCOM. Počítač je vybaven procesorem Intel® Atom™ D525 Dual Core 1.8GHz, 1 GB operační paměti a 8 GB CFast paměťovou kartou. K připojení do sítě je možné využít některého ze tří Ethernet portů (konektory M12), nebo bezdrátové LAN, 802.11. Také je možno využít GSM modulu. Počítač má zabudován i modul GPS, ale použitý čip neumožňuje výstup „raw data” a je tedy pro naše účely nepoužitelný.

PC nROK 3000 vyžaduje stejnosměrné napájení 24 V. V drážním lokátoru je instalován zdroj TRACO POWER TEP 150-2415WI, s odpovídajícím výstupním napětím. Vstupní rozsah napájecího napětí tohoto zdroje (a tedy celého drážního lokátoru) je 9 – 36 V. Díky tomu je možné použít k napájení i 12 V rozvod v osobním automobilu, zároveň však není nutné měnič odpojovat při práci v laboratoři, kde je přístroj připojen k externímu 24 V zdroji, který je možné zapojit do běžné rozvodné sítě 230 V/50 Hz.

Na čelním panelu drážního lokátoru je vyveden 100 Mbit Ethernet na čtyřpinovém konektoru M12 (D-Coded). V horní části jsou tři SMA konektory sloužící k připojení antén WLAN, GSM a GPS. V pravém dolním rohu je instalován konektor pro napájení.²¹ Klávesnici či USB flash je možné připojit do standardních USB (Typ A) konektorů pod krytkou na zadním panelu. Fotografie prototypu lokátoru je na obrázku 4.1.

K určení polohy (přesněji jen pseudovzdáleností, fází nosné vlny) je využit přijímač μ Blox EVK-6T.²² Tento přijímač podporuje výstup „raw data”, a tedy může sloužit k určování polohy pomocí RTK. Bohužel je přijímač pouze monofrekvenční ($f_{L1} = 1575,42$ MHz), a tedy není možné zcela eliminovat vliv ionosferické refrakce. Diferenciální korekce jsou přijímány pomocí GSM modulu, nicméně v laboratorních podmínkách často využíváme kabelové připojení k internetu.

²¹Do panelu je zasazen konektor Amphenol LTW, BD-04PMMS-LC7001, na kabel je třeba použít konektor BD-04BFFA-LL7001.

²²Písmeno -T na konci označení značí „timing” verzi přijímače. Přijímač disponuje oscilátorem TCXO. Je možné využít i variantu -P (Precise Point Positioning), která má běžný krystalový oscilátor. V současné době probíhají také experimenty s přijímačem μ Blox řady M8T, který podporuje kromě GPS i další družicové navigační systémy.

4. Implementace drážního lokátoru



Obrázek 4.1.: Prototyp drážního lokátoru

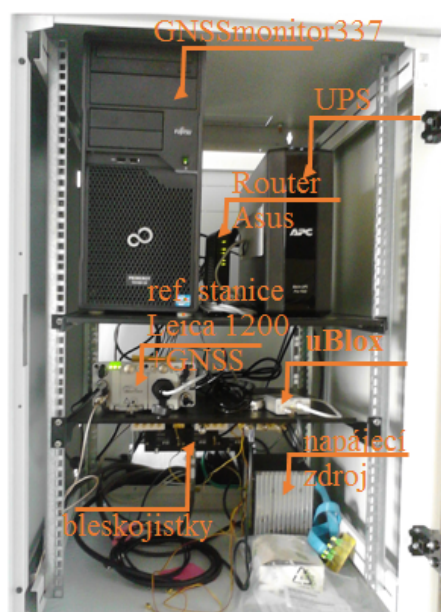
4.1.2. Programové vybavení

V počítači běží operační systém Gentoo Linux. Pro určování polohy je využit program `rtkrcv` z balíku `RTKLIB`. Parametry běhu programu (určování polohy, vstupní a výstupní datové toky, atp.) jsou uloženy v konfiguračním textovém souboru. Počítač je pomocí `INIT` skriptu konfigurován tak, aby při jeho spuštění byl spuštěn i program `rtkrcv` s příslušným konfiguračním souborem. Děje se tak, pokud je dostupné jakékoliv síťové připojení. Pro naši aplikaci je výhodná nejen možnost záznamu vypočtené polohy do souboru na SSD disku počítače, ale zejména její přenos do jiného zařízení (např. řídicího pracoviště) prostřednictvím `TCP/IP` protokolu.

4.1.3. Referenční stanice

Použitá referenční stanice `Leica GRX1200+ GNSS` je instalována na katedře radioelektroniky ČVUT-FEL. Její anténa `AS10` je umístěna na vrcholu stožáru na bloku B2 budovy fakulty v Dejvicích. Svod antény je u paty stožáru vybaven plynovou bleskojistkou s útlumem menším než $0,5 \text{ dB}$ do frekvence 4 GHz (typ `HSPKO-N-50-4,0G-B/F-F`). Použitý přijímač generuje potřebné fázové korekce s frekvencí 2 Hz , ve formátu `RTCM2` i `RTCM3`. Kromě tohoto jsou na `FTP` serveru ukládány výstupy měření ve formátu `RINEX`. Celá sestava je napájena ze zásuvek zálohovaných `UPS`, počítač kontrolního pracoviště je při výpadku proudu automaticky vypnut.

4. Implementace drážního lokátoru



(a) Rack s referenčním přijímačem a příslušenstvím



(b) Anténní stožár, anténa AS10 je na vrcholu stožáru

Obrázek 4.2.: Referenční stanice katedry radioelektroniky, obrázky poskytnuty Ing. Svatoněm

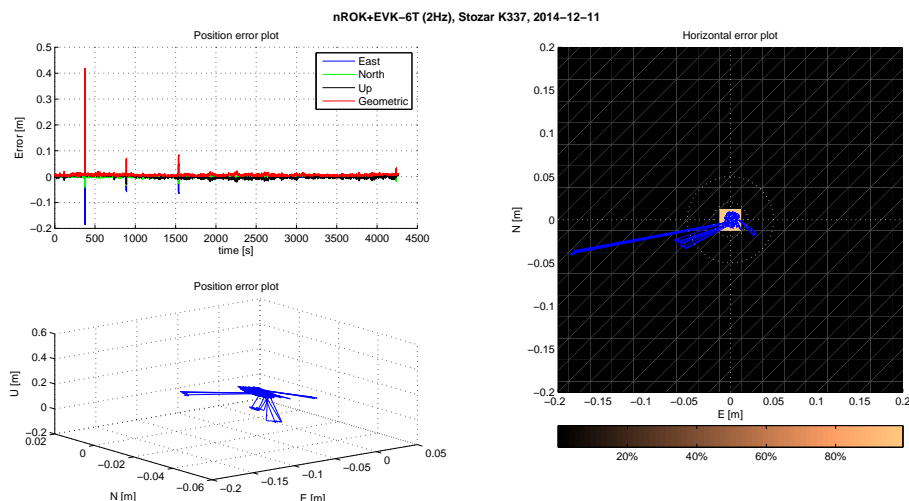
4.2. Ukázka činnosti

4.2.1. Statická měření

K ověření správné funkce metody určování polohy a balíku RTKLIB bylo provedeno několik statických měření. První ze zde popsaných měření probíhalo na střeše budovy FEL ČVUT v Dejvicích. Anténa roveru (drážního lokátoru) byla umístěna taktéž na anténním stožáru, takže délka baseline byla přibližně 1 m. Byl zvolen kinematický režim určení polohy bez uvažování dynamiky přijímače (viz popis implementace Kalmanovy filtrace v sekci 3.2.2).

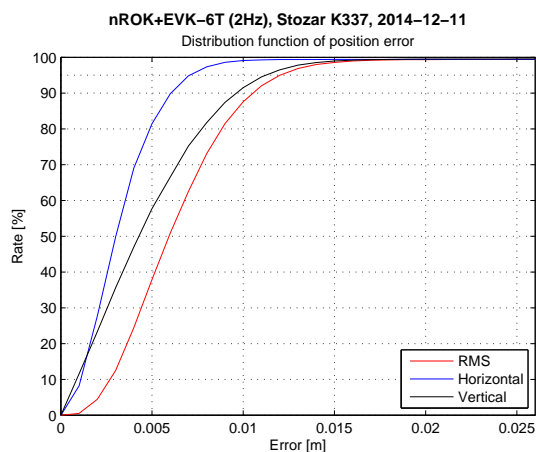
Naměřená data byla transformována do lokální souřadné soustavy ENU, referenčním bodem byl průměr naměřené polohy. Při zpracování nebyla brána v potaz data z úvodních 30 s měření, kdy nebyly vyřešeny fázové nejednoznačnosti. V tomto časovém úseku byl využit i tradiční způsob určení polohy, chyba odhadu překročila 3 m. Časový vývoj chyby odhadu a jeho pohyb v prostoru popisují grafy na obrázku 4.3. Po většinu času měření bylo platné „fix“ řešení. Několik okamžiků, kdy bylo dostupné pouze float řešení, je možné identifikovat díky nižší přesnosti (špičky v časovém průběhu, velká odchylka v ostatních grafech). Zpravidla se tak stalo při změně počtu viditelných družic.

4. Implementace drážního lokátoru



Obrázek 4.3.: Statické měření, anténní stožár FEL

Graf na obrázku 4.4 ukazuje distribuční funkce chyby získané z měření. Díky nim je možné určit velikost chyby, která nebyla v 95 % epoch měření překročena. V horizontální rovině byla tato hodnota 0,76 cm. Přesnost ve vertikále je horší (1,14 cm), což se negativně projeví na celkové 95 % chybě ve třech dimenzích, která činí 1,33 cm. Tuto stochastickou charakteristiku považujeme za lepší ukazatel funkce systému než směrodatnou odchylku chyby. Velikost směrodatné odchylky je totiž zatížena relativně velkými odchylkami ve „float” režimu určení polohy - také proto dosáhla směrodatná odchylka (ve třech dimenzích) hodnoty 1,84 cm, tj. vyšší hodnoty než 95 % chyba. I tak považujeme tyto výsledky za velmi pozitivní.

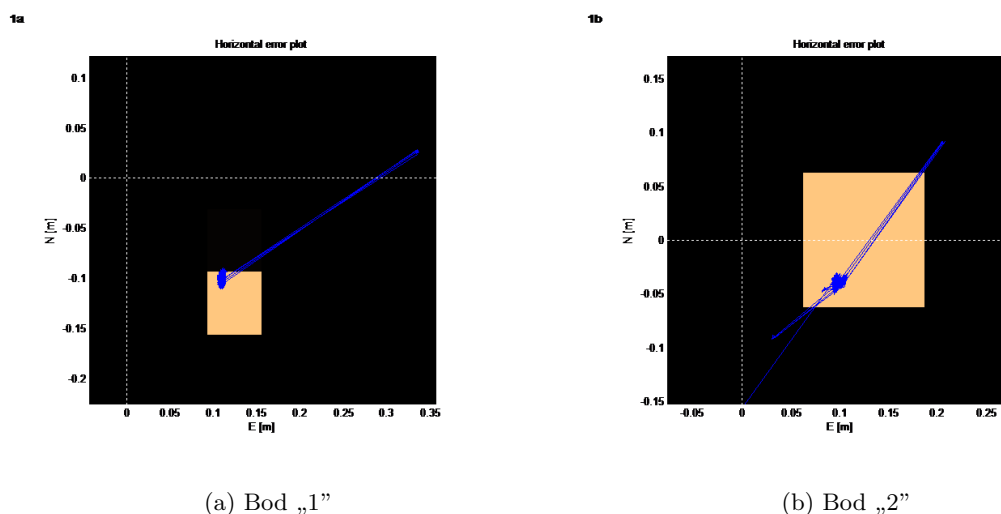


Obrázek 4.4.: Statické měření, anténní stožár FEL, distribuční funkce

4. Implementace drážního lokátoru

Další měření probíhalo na střeše budovy společnosti TRS v Pardubicích, kde jsou pro tyto účely geodeticky zaměřeny dva body (označované „1” a „2”). Délka baseline tak byla přibližně 100 km. Přesný popis konfigurace měření a další výsledky jsou obsaženy ve zprávě [24]. Jelikož v době tohoto měření ještě nebyl vyroben prototyp drážního lokátoru, byla k měření použita sestava podobná drážnímu lokátoru: Přijímač μ Blox EVK-6T, připojený k notebooku s programem RTKNAVI. Korekce byly do notebooku přenášeny přes mobilní telefon (bylo použito sdílení připojení k internetu přes WiFi).

Výše zmíněná zpráva uvádí, že odchylka průměru měřených hodnot od skutečné polohy je pro bod „1“ 18,1 cm, pro bod „2“ 7,2 cm. Dokládají to i grafy na obrázcích 4.5, kde je vykreslena horizontální odchylka od přesné pozice referenčních bodů. Je také patrné, že po většinu času byl platný fix odhad polohy.



Obrázek 4.5.: Statické měření v Pardubicích, horizontální chyba, převzato z [24]

4.2.2. Dynamická měření

V roce 2014 bylo provedeno pouze orientační dynamické měření se sestavou podobnou v té době vznikajícímu prototypu drážního lokátoru. Podrobný popis postupu měření a výsledků je uveden ve zprávě [25]. Jednalo se o kontinuální měření polohy vozidla na trase z Prahy-Ládví do Pardubic. Bylo využito totožného přijímače μ Blox EVK-6T. Použitá patch anténa od stejného výrobce byla umístěna přibližně uprostřed střechy automobilu. Přijímač byl připojen k notebooku s operačním systémem Windows 7, ve kterém byla poloha určována programem RTKNAVI. Korekce z referenční stanice byly přenášeny přes internet, USB 3G modemem (datová SIM T-Mobile).

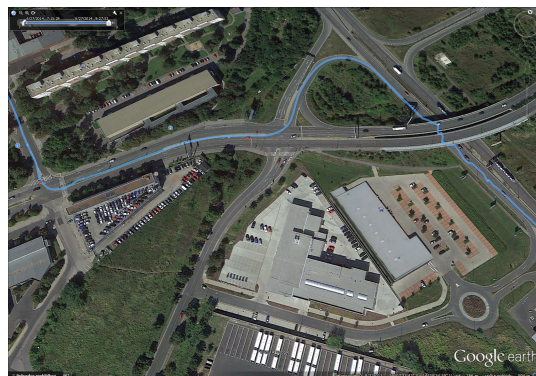
Data, zaznamenaná ve formátu NMEA, byla vykreslena do mapy v programu Google Earth. Jsme si vědomi, že není garantována přesnost mapy, avšak pro účely ověření funkce a některých vlastností systému byla shledána jako postačující.

4. Implementace drážního lokátoru

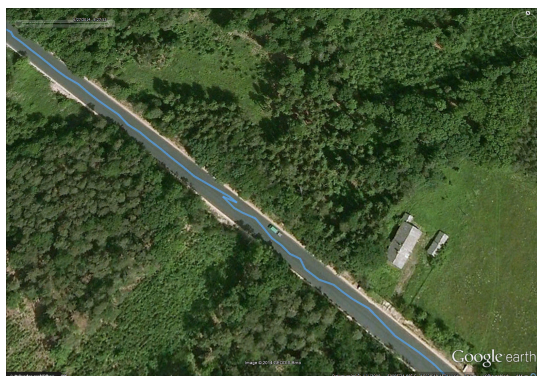
Měřeními jsme ověřili, že je systém možno použít v podmínkách silničního provozu i při vyšších rychlostech. Některé ze zajímavých situací jsou zaznamenány na obrázcích. Absolutní přesnost odhadu polohy není možné určit. Trajektorie je, kromě dále popsaných situací, hladká a odpovídá pohybu automobilu (obrázek 4.6a). Zhoršení přesnosti nastávalo při zastínění oblohy, kdy dochází ke ztrátě signálu GPS a kontinuity fázového měření (obrázky 4.6b a 4.6c). Problémy způsobují zejména podjezdy, mosty nebo hustá vegetace v okolí silnice. Po chvíli je odhad opět ustálen. Obrázek 4.6d ukazuje situaci, kdy došlo ke ztrátě připojení k internetu a bylo k odhadu využito běžného algoritmu.



(a) Výjezd z parkoviště, Praha – Ládví
50°07'35.66" N, 14°28'04.82" E



(b) Průjezd křižovatkami, mimoúrovňové křížení
50°07'23.43" N, 14°30'34.59" E



(c) Zastínění hustou vegetací
50°05'34.98" N, 15°38'48.15" E



(d) Ztráta datového připojení
50°03'38.19" N, 15°43'20.59" E

Obrázek 4.6.: Zajímavé situace z dynamického měření, převzato z [25]

5. Závěr

Práce shrnuje možné algoritmy určení polohy dálkoměrnou TOA metodou. Byly implementovány a simulovány tři zástupci iterativních algoritmů - Newton-Raphsonova, gradientní a Levenberg-Marquardtova metoda. Simulací bylo zjištěno, že gradientní metoda je pro řešení soustavy navigačních rovnic nevhodná. Při vhodném nastavení koeficientu λ nabízí Levenberg-Marquardtova metoda výsledky srovnatelné s metodou Newton-Raphsonovou jak ve smyslu přesnosti výsledného odhadu, tak v počtu potřebných iterací.

Dále byl uveden Bancroftův neiterativní algoritmus, jenž řeší úlohu bez využití aproximace Taylorovým polynomem prvního řádu. Cenou za to je však nutnost řešení kvadratické rovnice a výběr správného kořenu řešení. Byla zkoumána i možnost tzv. ML odhadu polohy. Bylo však zjištěno, že přesnost tohoto výpočetně náročného odhadu je limitována vzorkovacím kmitočtem signálu.

Podrobně jsme se zabírali činiteli DOP, které mají významný vliv na výslednou přesnost určení polohy. Jejich význam byl podložen simulací. Dále byl vytvořen skript, jehož využitím je možno demonstrovat chování jednotlivých činitelů v závislosti na geometrii konstelace družic. Činitele DOP popisují rozptyl, resp. směrodatnou odchylku odhadu. V sekci 2.5.1 byly odvozeny hustoty pravděpodobnosti pro velikost chyby - ve dvou rozměrech se jedná o Rayleighovo rozložení, ve třech rozměrech je rozložení jiné, avšak tvarově podobné. Správnost řešení byla ověřena metodou Monte-Carlo (Příloha D).

V teoretické rovině byly popsány způsoby využití fázových měření (carrier smoothing) a diferenciálních metod (DGPS) pro konvenční způsob určení polohy. Byl nastíněn princip metody DGPS, která pracuje pouze s měřenými pseudovzdálenostmi, i metoda, která využívá akumulované fázové měření. Byl také popsán rozšířený Kalmanův filtr (EKF), příklad jeho implementace v balíku RTKLIB byl uveden v dalších sekcích.

Nemalá část byla věnována RTK určení polohy, tedy metodě, která využívá fázová měření a vyřešení jejich nejednoznačnosti počtu celých cyklů. Byly ukázány tři způsoby lišící se mírou diferenciace. Jako nejvhodnější se jeví využití dvojitých diferencí (DD, difference rover-referenční stanice, difference mezi družicemi), protože na rozdíl od jednoduchých diferencí eliminuje rozdíl hodin přijímačů. Využití třetí, časové, difference vede k eliminaci celočíselných nejednoznačností z rovnic a tedy i podmínky jejich celočíselnosti.

Náročný proces hledání řešení fázových nejednoznačností usnadňuje metoda LAMBDA [18]. Jedná se o sestavu algoritmů pro řešení tzv. mixed least-squares problémů, tedy takových kde jsou zastoupeny reálné i celočíselné proměnné. LAMBDA značně zefektivňuje vyhledávací proces využitím dekorelace a správného seřazení jednotlivých celočíselných nejednoznačností.

5. Závěr

Funkce tohoto RTK odhadu polohy byla ověřena a demonstrována měřením na prototypu drážního lokátoru. S výhodou byla využita knihovna RTKLIB [13], která mj. implementuje dvojité diference, metodu LAMBDA a EKF. Výsledky statických měření jsou uspokojivé, avšak stále nabízí prostor pro vylepšení. Je třeba také provést podrobnější kinematická měření.

Téma RTK měření polohy poskytuje významný potenciál pro další výzkum. Nabízí se propojení RTK a inerciální navigační jednotky, například s využitím výše zmíněné open-source knihovny jako základu.

Literatura

- [1] MISRA, Pratap; ENGE, Per: *Global positioning system: signals, measurements, and performance*. Lincoln, Mass.: Ganga-Jamuna Press, 2001, ISBN 0-9709544-0-9.
- [2] KAPLAN, Elliot D.; HEGARTY, Christopher J.: *Understanding GPS: principles and applications*. Artech House, druhé vydání, 2006, ISBN 1-58053-894-0.
- [3] Navstar GPS Space Segment / Navigation User Interfaces. [Online], 2000, verze IRN-200C-004 (2000), [rev. 2000-04-12], [vid. 2012-04-08].
URL <<http://www.navcen.uscg.gov/pubs/gps/icd200/icd200cw1234.pdf>>
- [4] GURTNER, Werner; ESTEY, Lou; IGS/RTCM RINEX Working Group: RINEX: The Receiver Independent Exchange Format Version 2.11. [online], 2012.
URL <<ftp://igsb.jpl.nasa.gov/igsb/data/format/rinex211.txt>>
- [5] International GNSS Service, RINEX Working Group and Radio Technical Commission for Maritime Services Special Committee 104: RINEX: The Receiver Independent Exchange Format Version 3.02. [online], 2013.
URL <<ftp://igs.org/pub/data/format/rinex302.pdf>>
- [6] DOBEŠ, Josef; ŽALUD, Václav: *Moderní radiotechnika*. BEN - technická literatura, 2006, ISBN 80-7300-132-2.
- [7] MATHEWS, John H.: *Numerical Methods for Mathematics, Science, and Engineering*. Prentice-Hall International, druhé vydání, 1992, ISBN 0-13-625047-5.
- [8] PETROVSKI, Ivan G.: *GPS, GLONASS, Galileo, and BeiDou for Mobile Devices*. Cambridge University Press, 2014, ISBN 978-1-107-03584-3.
- [9] BANCROFT, Stephen: An Algebraic Solution of the GPS Equations. V *IEEE TRANSACTIONS ON AEROSPACE AND ELECTRONIC SYSTEMS*, svazek AES-21, 1985.
- [10] CLOSAS, Pau; FERNÁNDEZ-PRADES, Carles; FERNÁNDEZ-RUBIO, Juan A.: Maximum Likelihood Estimation of Position in GNSS. V *IEEE SIGNAL PROCESSING LETTERS*, svazek 14, Květen 2007.
- [11] CLOSAS, Pau; FERNÁNDEZ-PRADES, Carles; FERNÁNDEZ-RUBIO, Juan A.: Optimizing the Likelihood with Sequential Monte-Carlo Methods. V *XXI Simposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio*, svazek 14, Zář 2006.
- [12] ROGALEWICZ, Vladimír: *Pravděpodobnost a statistika pro inženýry*. Vydavatelství ČVUT, druhé vydání, 2007, ISBN 978-80-01-03785-0.

- [13] TAKASU, Tomoji: RTKLIB ver.2.4.2 Manual. [online], Duben 2013.
URL <http://www.rtklib.com/prog/manual_2.4.2.pdf>
- [14] SHIN, Eun-Hwan: *Estimation Techniques for Low-Cost Inertial Navigation*. Dizertační práce, University of Calgary, Květen 2005.
URL <http://www.ucalgary.ca/engo_webdocs/NES/05.20219.EHShin.pdf>
- [15] HRDINA, Zdeněk; PÁNEK, Petr; VEJRAŽKA, František: *Rádiové určování polohy: družicový systém GPS*. Vydavatelství ČVUT, 1999, ISBN 80-01-01386-3.
- [16] ŠPAČEK, Josef: Kinematická měření GPS. ČVUT FEL, 1997.
- [17] CODOL, J. M.; MONIN, A.: Improved triple difference GPS carrier phase for RTK-GPS positioning. V *Statistical Signal Processing Workshop (SSP)*, IEEE, 2011, s. 61 – 64, doi:10.1109/SSP.2011.5967776.
- [18] VERHAGEN, Sandra; LI, Bofeng: LAMBDA - Matlab implementation, version 3.0. Delft University of Technology and Curtin University [online], 2014.
URL <<http://www.citg.tudelft.nl/en/about-faculty/departments/geoscience-and-remote-sensing/research-themes/gps/lambda-method/>>
- [19] DE JONGE, Paul; TIBERIUS, Christian: The LAMBDA method for integer ambiguity estimation: implementation aspects. Technická zpráva 12. LGR-Series, Delft University of Technology, 1996.
- [20] TEUNISSEN, Peter J.G.: Mixed integer estimation and validation for next generation GNSS. V *FREEDEN W., NASHED M., SONAR T. (Eds.): Handbook of Geomatics*, Springer Berlin Heidelberg, 2010, s. 1101–1127.
- [21] TEUNISSEN, Peter J.G.: Least squares estimation of the integer GPS ambiguities. V *Invited Lecture, Section IV Theory and Methodology*, Beijing: IAG General Meeting, 1993.
- [22] TEUNISSEN, Peter J.G.: Least-Squares Estimation of the Integer GPS Ambiguities. *Journal of Geodesy*, svazek 70, č. 1-2, 1995: s. 65–82.
- [23] TEUNISSEN, Peter J.G.: A canonical theory for short GPS baselines. Part IV: precision versus reliability. *Journal of Geodesy*, svazek 71, č. 9, 1997: s. 513–525.
- [24] NAVRÁTIL, Václav; SVATOŇ, Jiří; VEJRAŽKA, František: Dílčí ověření určování polohy metodou RTK. Interní zpráva č. TE01020186/CTU/2014/2, Centrum integrovaných družicových a pozemských navigačních technologií, 2014.
- [25] NAVRÁTIL, Václav; SVATOŇ, Jiří; VEJRAŽKA, František: Úvodní experimenty s určováním polohy metodou RTK-GPS. Interní zpráva č. TE01020186/CTU/2014/2, Centrum integrovaných družicových a pozemských navigačních technologií, 2014.
- [26] USCG Navigation Center: High Horizontal Dilution of Precision (HDOP) Advisory 12 March 2015. [online], Březen 2015, [vid. 2015-03-12].
URL <http://www.navcen.uscg.gov/?pageName=degradation_03122015>

A. Porovnání konvergence iterativních PVT metod

Využitím skriptu v programu MATLAB byla ověřována konvergence iterativních PVT algoritmů popsaných v sekci 2.3.1. Stručný popis funkce skriptu budou následovat grafické výstupy simulace.

V každém cyklu simulace je vygenerován náhodný bod (poloha přijímače) nad povrchem Země. V rámci zjednodušení byl uvažován kulový tvar planety, výška nad povrchem se řídí uniformním rozložením. Poloměr Země byl uvažován 6378 km, maximální výška nad povrchem byla 10 km. Dále byla vygenerována zcela náhodná²³, statická konstelace předem zvoleného počtu družic. Skript umožňuje zadat minimální přípustnou elevaci družice nad horizontem.

Jsou vypočteny geometrické vzdálenosti družice - přijímač a modelovány pseudovzdálenosti podle vzorce (2.9). Bias b je zvolen z uniformního rozdělení a chyby ϵ_i jsou Gaussovské.

$$\rho_i = r_i + b + \epsilon_i \quad (2.9)$$

Polohy družic a pseudovzdálenosti jsou poté použity jako vstupy pro testované iterativní algoritmy, jako výchozí poloha je použita skutečná (vygenerovaná) poloha z předchozího cyklu (první cyklus startuje z průsečíku Greenwichského poledníku a rovníku). Do grafů je posléze vynesena vývoj chyby odhadu v průběhu výpočtu. Velikost chyby byla určena podle A.1, kde \mathbf{r} je skutečný vektor polohy a b simulovaný bias hodin přijímače. Stríškou nad znakem je označeno, že se jedná o odhad příslušné veličiny.

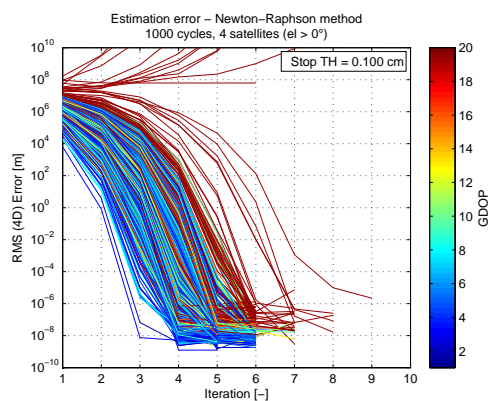
$$\epsilon = \sqrt{\|\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}\|^2 + (\hat{b} - b)^2} \quad (A.1)$$

Skript umožňuje obarvit jednotlivé průběhy v závislosti na odhadnuté hodnotě GDOP. Pro obarvení je vždy použita hodnota GDOP získaná z řešení Newton-Raphsonovou metodou. V následujících grafech je horním limitem barevné osy hodnota $GDOP = 20$. V simulaci se jistě vyskytly i vyšší hodnoty GDOP, průběhy iterací jsou taktéž vykresleny, jen hodnota DOP je „oříznuta“. Skript `Test_convergence.m` je přiložen k diplomové práci na CD.

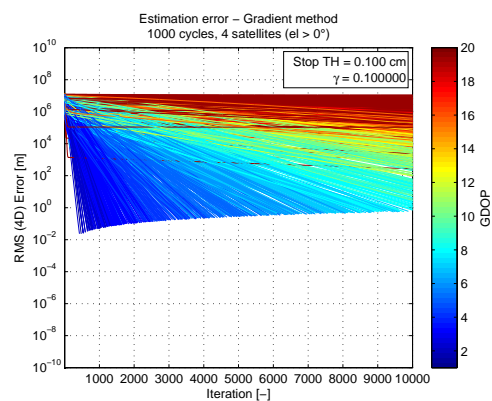
Závěry vyplývající z této simulace je možno nalézt na konci sekce 2.3.1.

²³Rozložení družic na obloze (polokouli) se řídilo rovnoměrným rozložením. Družice ležely vždy 26 000 km od středu Země.

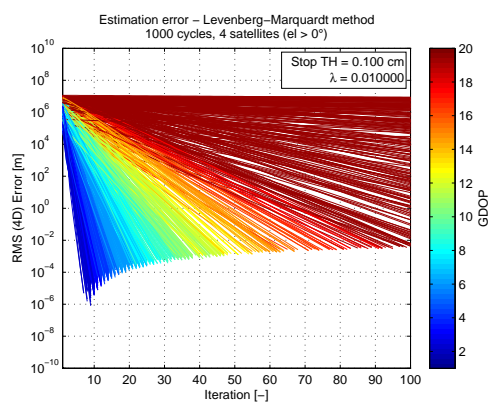
A. Porovnání konvergence iterativních PVT metod



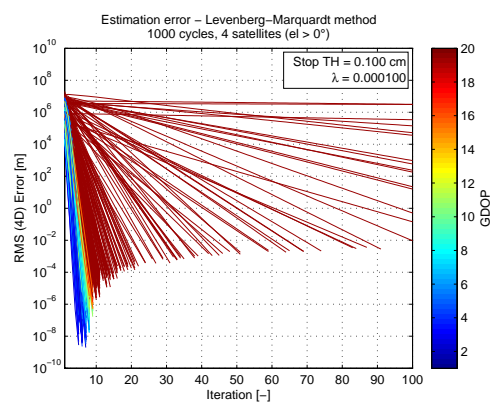
(a) Newton-Raphsonova metoda



(b) Gradientní metoda, $\gamma = 0,1$



(c) Levenberg-Marquardtova metoda $\lambda = 10^{-2}$



(d) Levenberg-Marquardtova metoda $\lambda = 10^{-4}$

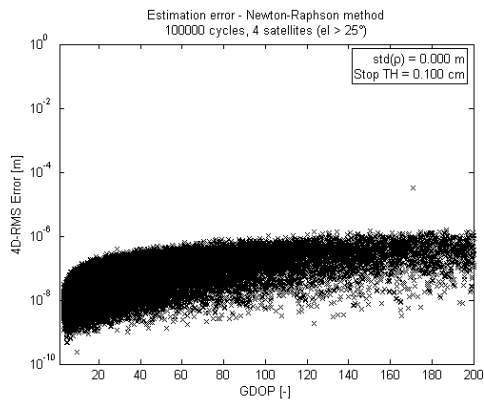
Obrázek A.1.: RMS chyba odhadu v průběhu iterování

B. Přesnost Bancroftova algoritmu

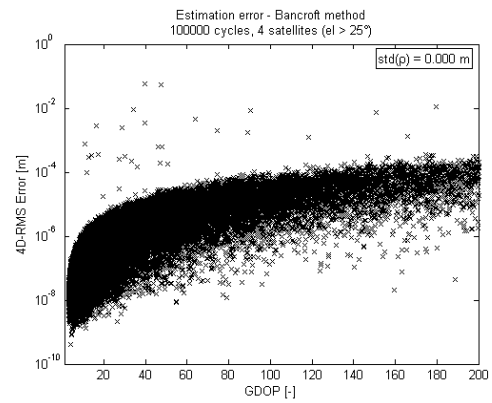
Podobným skriptem, jako v příloze A byla zkoumána přesnost, které dosahuje Bancroftova neiterativní metoda (sekce 2.3.2). Pro dosažení vyšších hodnot DOP byla minimální elevace družic omezena na 25° . Bylo provedeno 10^5 cyklů určení polohy Newton-Raphsonovou metodou a metodou Bancroftovou, vstupní data (pseudovzdálenosti) byla totožná. Pro každý cyklus simulace byla určena výsledná chyba odhadu polohy a času (A.1), která byla vynesena do grafu v závislosti na GDOP. Hodnota GDOP byla zjištěna jako součást iterativního výpočtu.

Obrázky B.1a a B.1b porovnávají chybu obou algoritmů, když pseudovzdálenosti nejsou zatíženy aditivní chybou. Ukazuje se, že v naší provedené implementaci nedosahuje Bancroftův algoritmus lepších výsledků. Vzhledem k velikosti chyby odhadu se rozdíl jeví jako zanedbatelný. Pokud simulované pseudovzdálenosti zatížíme aditivní chybou s normálním rozložením a směrodatnou odchylkou $\sigma_\rho = 1$ m, vzniklá chyba spolehlivě převýší dílčí nepřesnosti zkoumaných metod, viz obrázky B.1c, B.1d. Použitý skript je uložen na CD pod názvem `Test_BANC.m`.

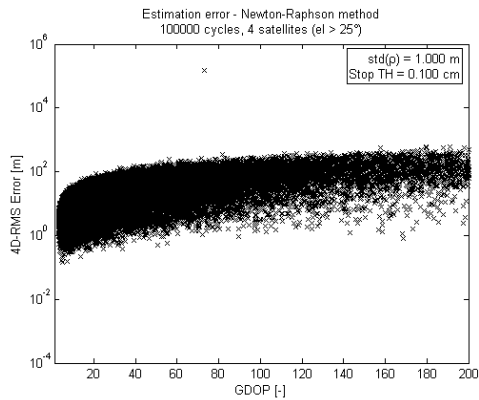
B. Přesnost Bancroftova algoritmu



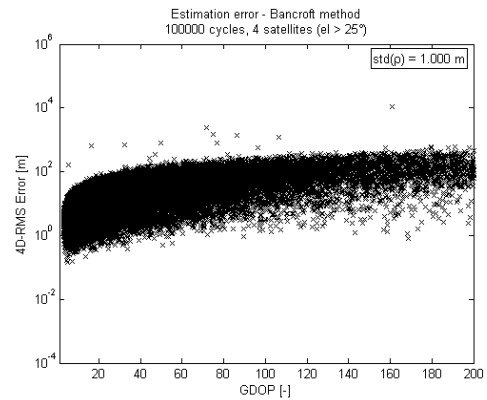
(a) Newton-Raphsonův algoritmus, bez aditivní chyby



(b) Bancroftův algoritmus, bez aditivní chyby



(c) Newton-Raphsonův algoritmus, $\sigma_\rho = 1$ m



(d) Bancroftův algoritmus, $\sigma_\rho = 1$ m

Obrázek B.1.: Porovnání Newton-Raphsonova a Bancroftova algoritmu

C. Obrázky k vlivu DOP

Tato příloha si klade za cíl dokumentovat chování hodnot činitelů DOP pro reprezentativní konstelace a jejich varianty. Většina ze zde uvedených konstelací se v praxi takto nevyskytuje, nicméně pro ilustraci vlivu tvaru konstelace byly voleny raději pravidelné tvary. Způsobu výpočtu činitelů DOP se věnuje sekce 2.5.

Nejdříve se věnujme konstelaci s minimálním počtem družic, tedy se čtyřmi. Nejlepších výsledků je možno dosáhnout s jednou družicí v nadhlavníku a třemi zbylými satelity rozmístěnými pravidelně na horizontu. Grafické znázornění konstelace je na obrázku C.1a, společně s vypočtenými činiteli DOP. V reálném prostředí jsou však družice nízko nad horizontem s velkou pravděpodobností zastíněny a také chyby měření jsou obvykle vyšší. Další konstelace z obrázku C.1 potom ukazují, jak se zvyšují všechny hodnoty DOP, když konstelaci smršťujeme zvyšováním elevace tří družic. Je patrné, že čím rozevřenější konstelace bude, tím kvalitnější dostaneme odhad polohy. Potěšujícím výsledkem může být, že nejmenší zhoršení vykazuje činitel HDOP vztahující se k horizontální přesnosti určení polohy, viz obr. C.1f pro extrémně uzavřenou konstelaci.

Další relativně typický jev popisuje obrázek C.2. V tomto případě se pohybuje celá konstelace 4 satelitů (původně 1 v zenitu, 3 s elevací 60°, obrázek C.1e) směrem k horizontu. Zatímco hodnoty GDOP, PDOP a TDOP zůstávají při snižování elevace celé konstelace konstantní, rozptyl ve vertikále (VDOP) se snižuje na úkor přesnosti v horizontální rovině (HDOP). Dále porovnáním obrázku C.2c s konstelacemi z obr. C.3 zjistíme, že na velikost činitelů VDOP a HDOP nemá vliv, na kterou stranu konstelace „zapadá“²⁴.

Obrázky C.4 a C.5 ukazují hodnoty činitelů pro větší množství viditelných družic. Pro konstelaci pěti družic (obr. C.4a, C.4b) dostáváme nižší hodnoty všech činitelů DOP než u podobných konstelací s minimálním počtem satelitů (obr. C.1a, C.1e). Při rozmístění 7 družic klesá dokonce HDOP pod hodnotu 1. Podotkněme, že hodnoty jednotlivých činitelů nezávisí na vzájemném azimutálním natočení družic s elevací 0° a 45°, viz obrázky C.5a a C.5b. Na obrázcích C.4c a C.4d je zachyceno zvýšení všech činitelů DOP v případě, že je 5 viditelných satelitů, ovšem všechny na jedné polovině oblohy. Podobná situace může nastat při zastínění např. v blízkosti vysoké budovy nebo na okraji lesa.

Hodnotami činitelů DOP se zabývá i Navigační centrum Pobřežní stráže Spojených států amerických. Tento úřad vydává varování v případě očekávaných vysokých hodnot DOP.

²⁴Směr zapadání bude samozřejmě mít vliv na poměr činitelů DOP pro jednotlivé osy horizontální roviny EDOP a NDOP.

C. Obrázky k vlivu DOP

Příkladem může být stav z 12. března 2015, kdy kvůli údržbě nevysílala jedna z družic [26]. Na obrázku C.6 je porovnáno HDOP pro konstelaci nejlepších čtyř družic v případě bezproblémové funkce systému GPS a pro výše zmíněný případ údržby. Je však třeba podotknout, že významnějšímu zvýšení DOP došlo jen v relativně krátkém časovém úseku. Pro oblast nejhoršího DOP (v tomto případě Tichý oceán) graf C.7 dokládá, že PDOP bylo vyšší než 6 pouze 7 minut.

Na obrázku C.6a je dále potvrzen efekt „zapadání“ konstelace. Nejnižší hodnoty DOP jsou dosahovány zpravidla v pásu okolo rovníku, tedy v případě, kdy je přijímač téměř vždy mezi satelity. Vzhledem k inklinaci orbit družic systému GPS 55° se družice v oblastech vyšších zeměpisných šířek na obloze častěji vyskytují směrem k rovníku, v blízkosti pólů se žádné satelity nevyskytují.

Simulací na podobném základě jako v příloze A bylo ověřeno, že činitele DOP mají vliv na rozptyl odhadu polohy v jednotlivých směrech. Pseudovzdálenosti byly zatíženy Gaussovskou chybou s nenulovým rozptylem, v tomto případě byla směrodatná odchylka zvolena $\sigma_\rho = 1$ m. Výpočet polohy byl proveden Newton-Raphsonovou metodou. V případě, že algoritmus nekonvergoval, byla konstelace vygenerována znovu a špatný výsledek nahrazen novým (pokud již došlo ke konvergenci). Do grafů (obrázek C.8) pak byla vynesena normovaná chyba odhadu v závislosti na činiteli DOP.

$$\epsilon_n = \frac{\epsilon}{\sigma_\rho} \quad (\text{C.1})$$

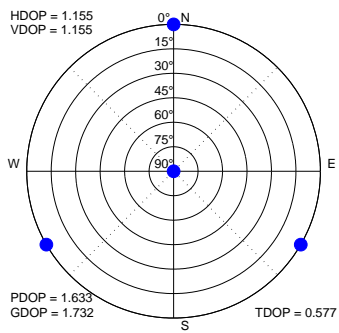
Pro jednotlivé intervaly činitelů DOP pak byly ze simulovaných dat vypočteny normované směrodatné odchylky chyby odhadu (v grafech červené „schody”).

$$\hat{\sigma}_n(a, b) = \sqrt{\sum_{a < DOP \leq b} (\epsilon_n)^2} \quad (\text{C.2})$$

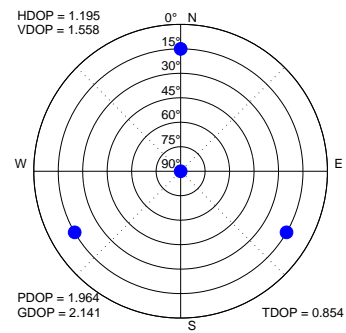
Modrou barvou je v grafech vyznačena teoretická hodnota normované směrodatné odchylky. Odmocněním a normováním vztahu pro variance (2.63) je možné ukázat, že se jedná přímo o hodnotu činitele DOP. Grafy ukazují, že ve všech zkoumaných případech nastává dobrá shoda simulovaných a teoretických hodnot směrodatné odchylky odhadu polohy.

Použité skripty `DOP_skyp1ot.m` a `Test_DOP.m` jsou dostupné na přiloženém CD.

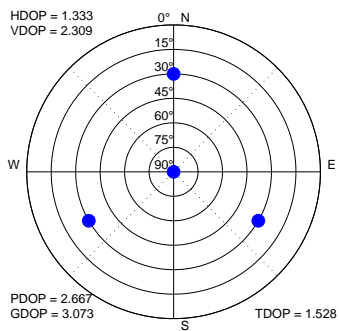
C. Obrázky k vlivu DOP



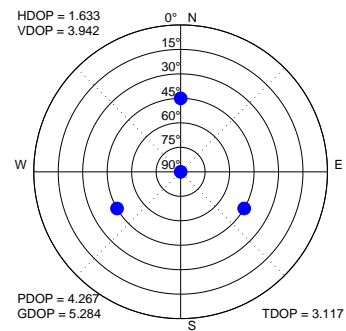
(a) Na horizontu



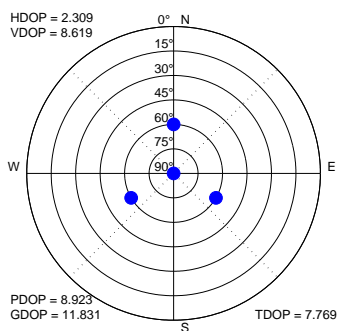
(b) Elevace 15°



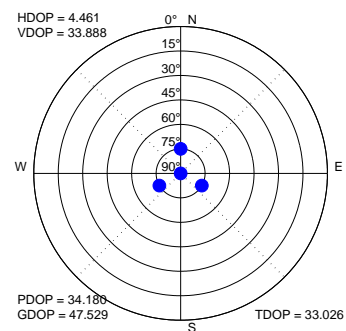
(c) Elevace 30°



(d) Elevace 45°



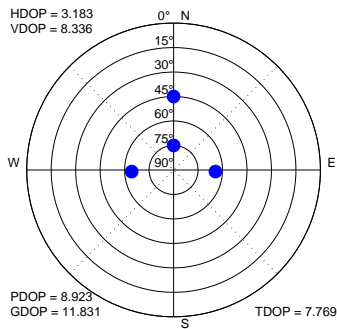
(e) Elevace 60°



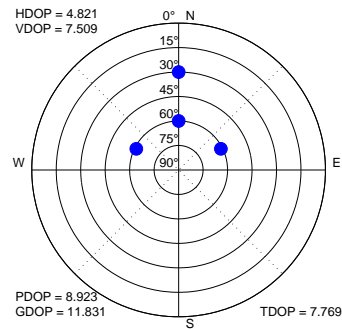
(f) Elevace 75°

Obrázek C.1.: DOP pro 4 družice, vliv rozevřenosti konstelace (elevace 3 družic)

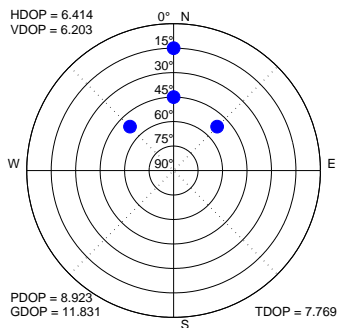
C. Obrázky k vlivu DOP



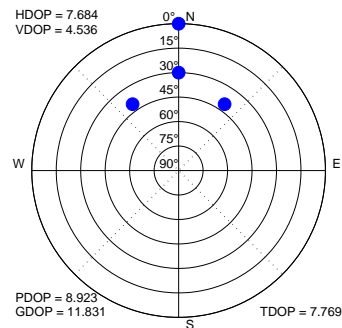
(a) 15° od zenitu



(b) 30° od zenitu

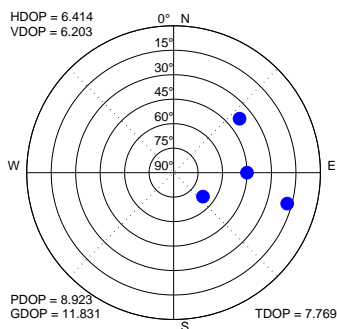


(c) 45° od zenitu

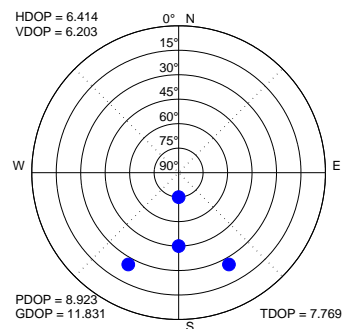


(d) 60° od zenitu

Obrázek C.2.: DOP pro 4 družice, vliv elevace celé konstelace - „zapadání“ k severu



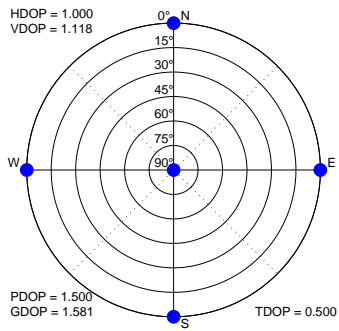
(a) 45° od zenitu - Východ



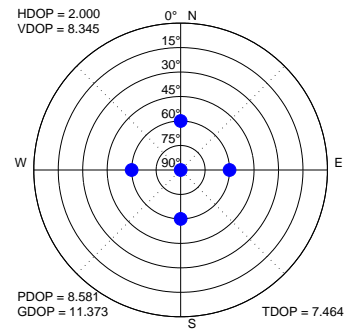
(b) 45° od zenitu - Jih

Obrázek C.3.: DOP pro 4 družice, nezávislost na směru „zapadání“

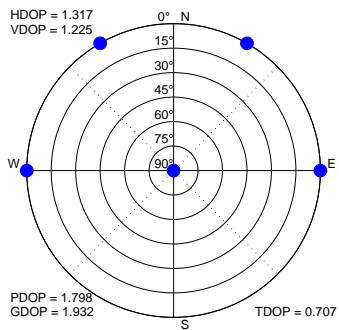
C. Obrázky k vlivu DOP



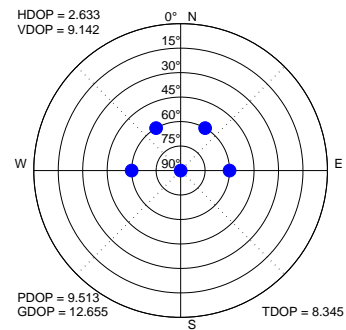
(a) Na horizontu



(b) Elevace 60°

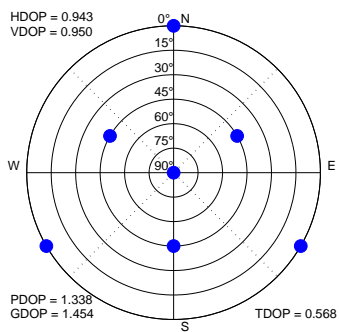


(c) Na horizontu, polovina oblohy

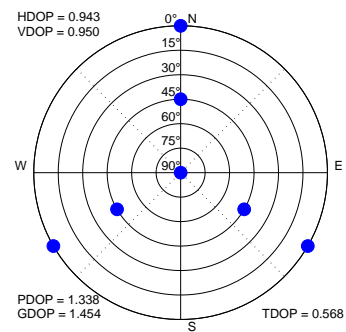


(d) Elevace 60°, polovina oblohy

Obrázek C.4.: DOP pro 5 družic, vliv elevace a „poloviční oblohy”



(a)

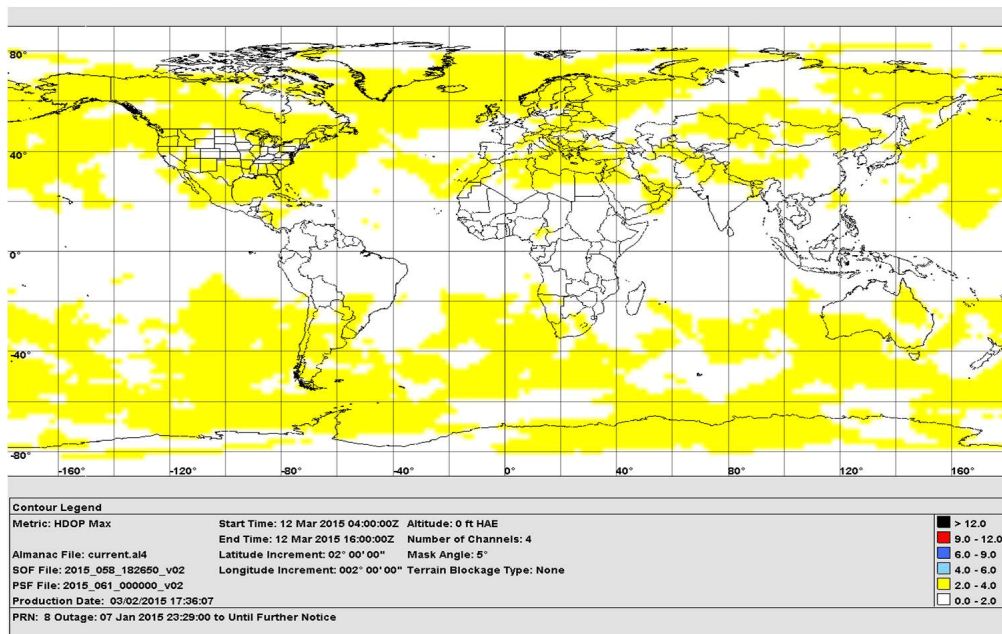


(b)

Obrázek C.5.: DOP pro 7 družic

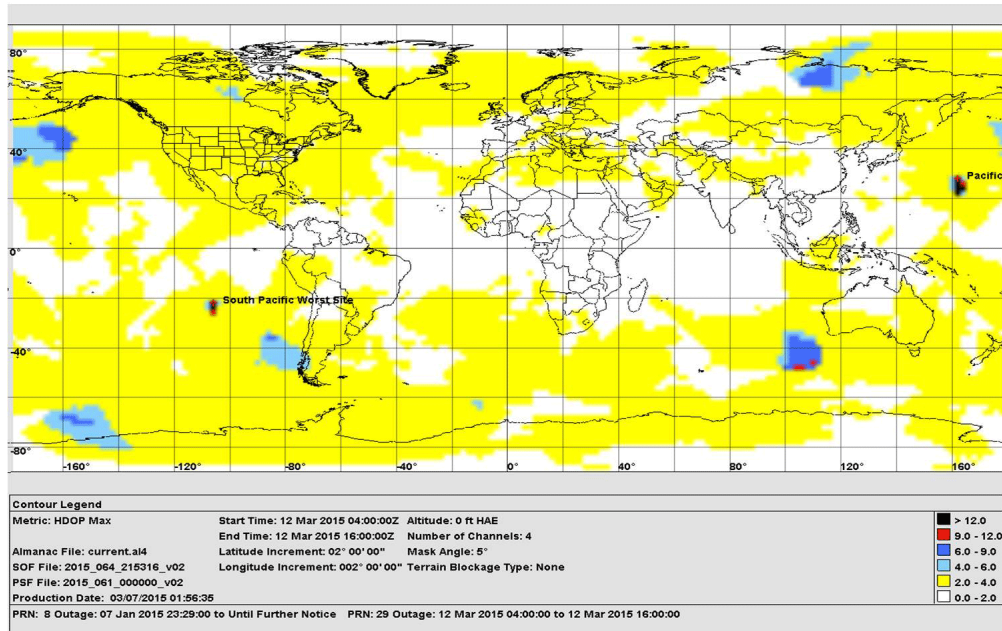
C. Obrázky k vlivu DOP

World HDOP (All Satellites in Operation)



(a) DOP při běžném stavu konstelace

World HDOP SVN 57 / PRN 29 Out

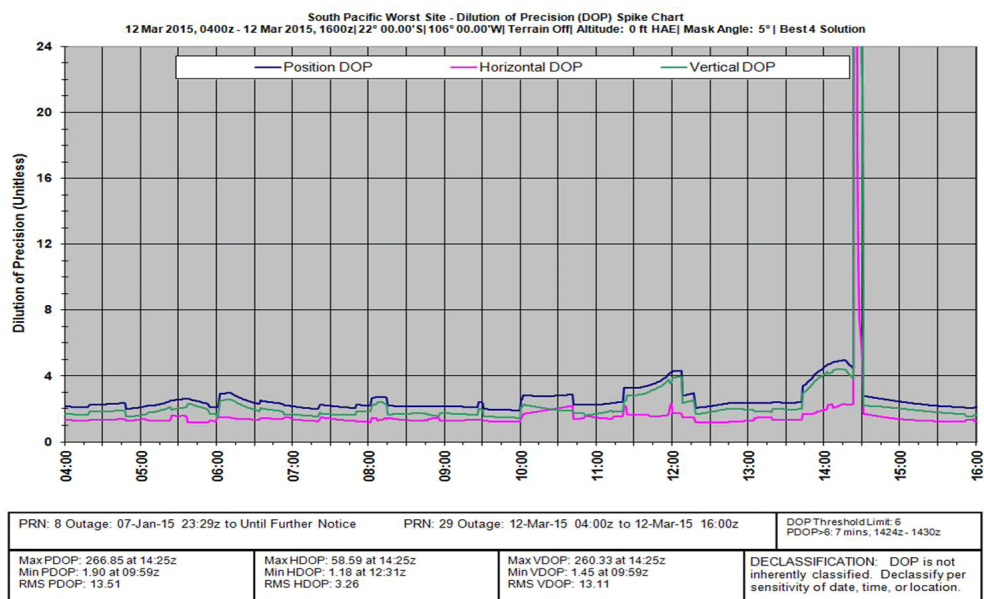


(b) DOP při údržbě družice

Obrázek C.6.: Vliv údržby družice na DOP, převzato z [26]

C. Obrázky k vlivu DOP

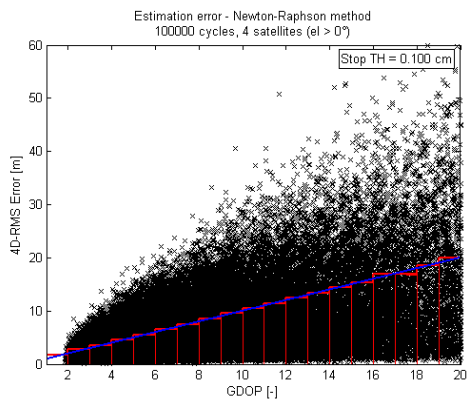
South Pacific – HDOP Spike Chart
SVN 57 / PRN 29 Out



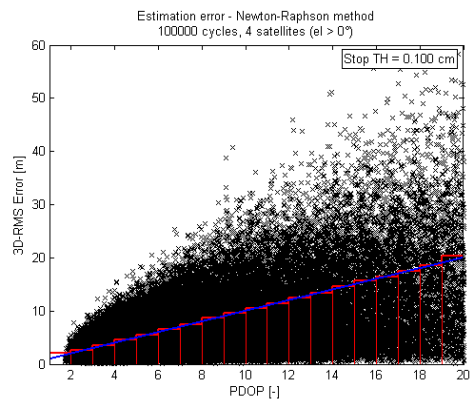
GPS Operation Center
Schriever AFB, CO - Ver. 1.17

Obrázek C.7.: Vliv údržby družice na DOP, převzato z [26]

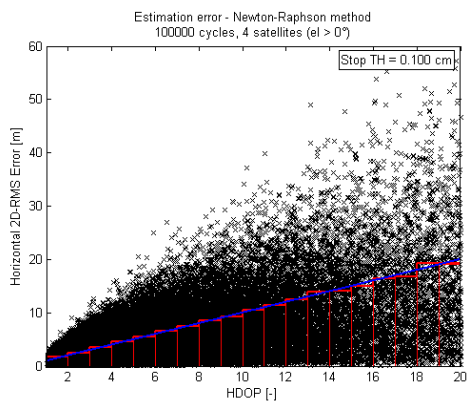
C. Obrázky k vlivu DOP



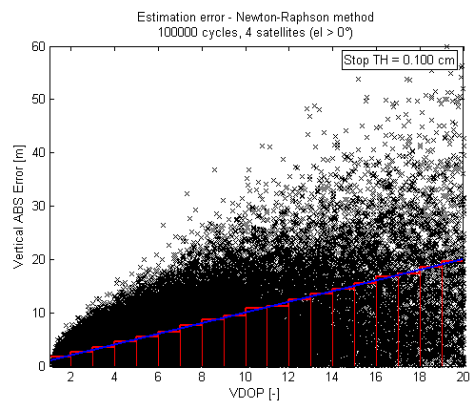
(a) GDOP



(b) PDOP



(c) HDOP



(d) VDOP

Obrázek C.8.: Vztah přesnosti odhadu polohy a činitelů DOP

D. Ověření hustot pravděpodobnosti chyb

V části 2.5.1 na straně 30 jsme odvodili rozložení hustoty pravděpodobnosti pro speciální případy délky vektorů. Pro přehlednost úvodem této přílohy zopakujeme příslušné poznatky.

Uvažujeme náhodné vektory, jejichž složky jsou nezávislé, normálně rozložené s nulovou střední hodnotou a totožným rozptylem σ^2 . Hustota pravděpodobnosti délky vektoru o dvou dimenzích se pak řídí Rayleighovým rozložením:

$$f(r_2, \sigma) = \frac{r_2}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r_2^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.76)$$

Pro délku r_3 vektoru se třemi složkami je hustota pravděpodobnosti popsána výrazem

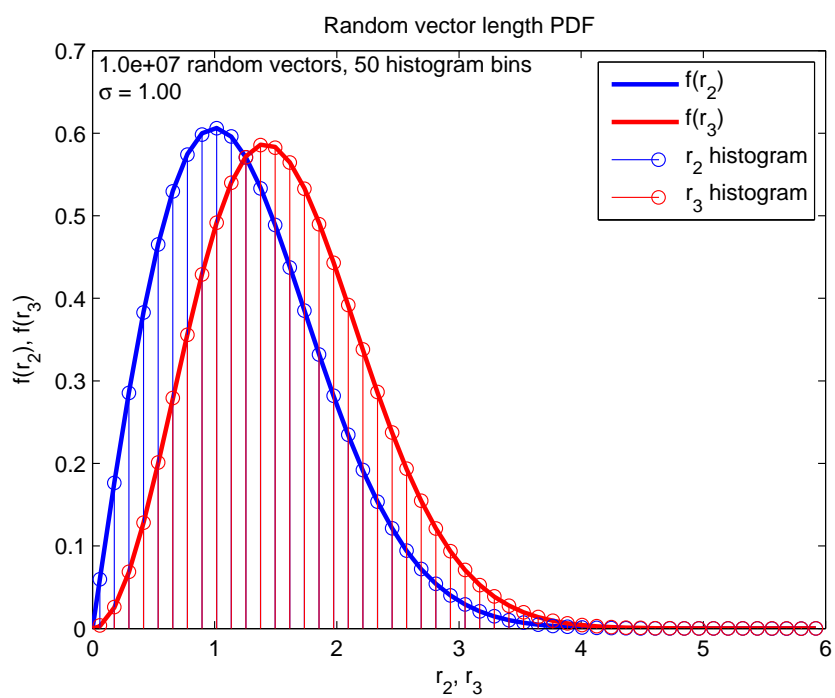
$$f(r_3, \sigma) = \frac{2r_3^2}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{r_3^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.75)$$

Platnost těchto vzorců byla ověřována metodou Monte-Carlo v programu MATLAB. Bylo vygenerováno $N = 10^7$ náhodných vektorů o třech dimenzích s normálním rozložením, a danou směrodatnou odchylkou (funkce `randn()`). Posléze byly získány dvě sady délek těchto vektorů. První sada brala v úvahu pouze první dvě složky vektoru, druhá sada všechny tři složky. Za pomoci funkce `hist()` byly získány histogramy těchto délek. Histogramy byly vyhodnocovány na 50 totožných intervalech. Dále byly získané histogramy normovány, aby získané hodnoty mohly být graficky porovnány s odvozenými hustotami pravděpodobnosti. Jedná se pouze o dělení počtem náhodných vektorů N a délkou intervalu na vodorovné ose histogramu Δr .

$$h'[r] = \frac{h[r]}{N \Delta r} \quad (D.1)$$

Na obrázku D.1 jsou společně vyneseny grafy Rayleighovy hustoty pravděpodobnosti (modře) a nové 3D hustoty pravděpodobnosti (červeně). Svislými čarami s kroužkem na konci jsou znázorněna data z normovaných histogramů (v odpovídajících barvách). Je jasné patrné, že odchylky histogramů od hustot pravděpodobnosti jsou velmi malé. Použitý skript `rayleigh3d_plot.m` je k práci přiložen na CD.

D. Ověření hustot pravděpodobnosti chyb



Obrázek D.1.: Zobrazení hustot pravděpodobnosti a histogramů