

Diplomová práce

Jan Petrášek

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ

FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ

KATEDRA ELEKTROENERGETIKY



Model indukčního ohřevu pro manipulaci s rotorovými obručemi

Autor
Jan Petrášek

Vedoucí:
Prof. Ing. Ivo Doležel, CSc.

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická

katedra elektroenergetiky

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Student: **Jan Petrášek**

Studijní program: Elektrotechnika, energetika a management
Obor: Elektroenergetika

Název tématu: **Model indukčního ohřevu pro manipulaci s rotorovými obručemi**

Pokyny pro vypracování:

1. Popište fyzikální základy úlohy.
2. Sestavte spojitý matematický model problému v silně sdružené formulaci.
3. Navrhněte vhodný numerický model.
4. Realizujte tento model ve vhodném počítačovém programu
5. Optimalizujte parametry procesu s ohledem na dané cílové veličiny a zhodnoťte dosažené výsledky.

Seznam odborné literatury:

- [1] Doležel, V., Kotlan, B., Ulrych: Design of joint between disk and shaft based on induction shrink fit, Journal of Computational and Applied Mathematics, Volume 270, November 2014, Pages 52-62
- [2] Karban, P., Kotlan, V., Doležel, I.: Numerical Model of Induction Shrink Fit in Monolithic Formulation, IEEE Trans. Magn. 48, 2012, No. 2, pp. 315-318.
- [3] Rada, J. a kol: Elektrotepelná technika, SNTL Praha, 1986.

Vedoucí: prof. Ivo Doležel Ing., CSc.

Platnost zadání: do konce zimního semestru 2017/2018

L.S.

doc. Ing. Zdeněk Müller, Ph.D.
vedoucí katedry

prof. Ing. Pavel Ripka, CSc.
děkan

V Praze dne 18. 4. 2016

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

.....

Podpis

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval všem, kteří jakýmkoliv způsobem napomohli úspěšnému dokončení této práce. Předně je to vedoucí mé práce Prof. Ing Ivo Doležel, CSc., ale i řada dalších, především Ing. František Mach, Ph.D., Doc. Ing. Pavel Karban, Ph.D., a Ing. Lukáš Koudela.

Další velký dík potom patří společnosti BRUSH SEM s.r.o., která mi vyšla vstříc a umožnila zabývat se reálně existujícím problémem, jmenovitě paní Martě Rypplové a Ing. Františku Zemanovi, Ph.D..

Samozřejmě děkuji i celému svému okolí za podporu.

Abstrakt

Tato diplomová práce se zabývá modelem indukčního ohřevu rotorových obručí, což je proces realizovaný při jejich demontáži z rotoru především synchronních turbogenerátorů. Indukční ohřev je preferovaný postup především proto, že při něm nedochází k chemickému ovlivnění materiálu obruče.

Náplní práce je numerická implementace tohoto procesu jako takzvané sdružené úlohy, při níž dochází ke vzájemné interakci elektromagnetického, teplotního a pole termoelastických deformací. V úvodu práce se proto věnuji popisu spojitého modelu jednotlivých polí, a dále uvádím základní principy metody konečných prvků, použité při numerickém řešení.

V závěru práce popisuji realizaci modelu v prostředí Agros2D, uvádím získané výsledky a diskutuji možná zlepšení modelu směřující k jeho dostatečné přesnosti pro praktické nasazení.

Klíčová slova: Agros2D, indukční ohřev, sdružená úloha, metoda konečných prvků, rotorová obruč

Abstract

This thesis deals with modeling of induction heating of rotor rings, which is a process taking place during their disassembly primarily from synchronous turbogenerators rotors. Induction heating is nowadays a favoured procedure mainly because it does not affect the chemical properties of the rings.

Numerical implementation of this process is treated as a so called coupled problem, during which the interaction between electromagnetic, thermal and field of thermoelastic displacements is realized. At the beginning I describe some basic relations and aspects of their continuous models, after which some general principles of the finite element method are presented. This method is also used in the numerical part. In the end the model is put into practice in the Agros2D environment and its results are discussed, as well as some possible improvements of the model heading towards its better accuracy needed for practical applications.

Keywords: Agros2D, induction heating, coupled problem, finite element method, rotor ring

Obsah

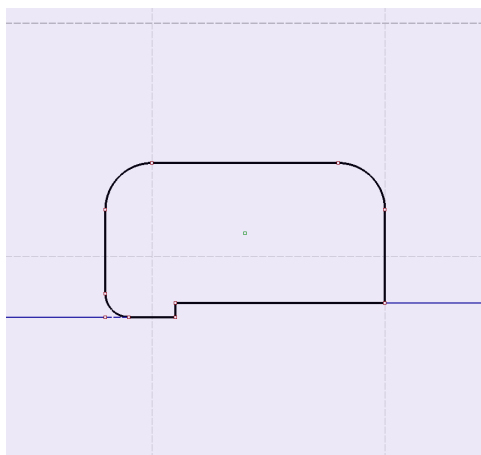
1	Úvod	7
2	Spojité matematický model	9
2.1	Parciální diferenciální rovnice	9
2.1.1	Klasifikace parciálních diferenciálních rovnic	9
2.1.2	Okrajové podmínky	10
2.2	Vztahy popisující elektromagnetické pole	12
2.2.1	Odvození vlnové rovnice	12
2.2.2	Poyntingův vektor	14
2.2.3	Rovnice pro popis elektromagnetického pole v numerickém modelu	15
2.3	Zákony a rovnice popisující termoelastické pole	17
2.3.1	Fourier-Kirchhoffova rovnice	17
2.3.2	Okrajové podmínky	19
2.4	Rovnice popisující termoelastické pole	23
2.4.1	Posuvy a deformace	23
2.4.2	Hookův zákon	25
2.4.3	Zobecněný Hookův zákon	25
2.4.4	Lamého rovnice	26
2.4.5	Rovnice popisující rovnováhu sil působících na těleso	28
3	Volba metody pro numerický model	30
3.1	Demonstrativní příklad a jeho analytické řešení	30
3.1.1	Metoda separace proměnných	30
3.1.2	Fourierova metoda	31
3.1.3	Metoda konečných prvků	33
3.1.4	Diskretizace definiční oblasti	34
3.1.5	Aproximace potenciálu uvnitř konečných prvků	35
3.1.6	Rovnice pro popis pole	38
3.2	Techniky numerické integrace	42
3.2.1	Numerická integrace na trojúhelníku	45
3.3	Newton-Raphsonova metoda	48
4	Realizace numerického modelu	51
4.0.1	Geometrické uspořádání	52
4.0.2	Vstupní data a okrajové podmínky	52
4.0.3	Získané výsledky	57
5	Závěr	63
.1	Přehled nejpoužívanějších programů pro řešení multifyzikálních úloh	65

Kapitola 1

Úvod

Cílem této práce je vytvořit matematický model indukčního ohřevu rotorových obručí, a tento model dále využít při predikci vývoje jednotlivých parametrů pro konkrétní konfiguraci, respektive k návrhu takového uspořádání, aby byl ohřev vůbec realizovatelný. Tato úloha vzešla ze spolupráce s firmou BRUSH-SEM s.r.o., je tedy motivovaná konkrétními případy ohřevů, které je potřeba realizovat.

Rotorové obruče jsou důležitou součástí rotorů synchronních turbostrojů, nacházející se v prostoru čel vinutí, jejichž hlavní úloha je zajistit jejich mechanickou odolnost při provozu. Samotná obruč se na rotor obvykle nasazuje za tepla, a její upevnění zajišťují nejen vzniklé termoelastické síly, ale především několikamilimetrový výstupek na rotoru. Příklad konstrukce takové obruče uvádím níže na obrázku.



Obrázek 1.1: Příklad konstrukce rotorové obruče

Během servisu turbogenerátorů je potřeba tuto obruč sejmout, a poté opět nasadit. Aby bylo možné překonat výstupek na rotoru, zahřívá se obruč na teplotu, při níž se její vnitřní průměr zvětší právě o tento rozdíl, což odpovídá zhruba 400-500 °C.

Ohřev je možné realizovat několika způsoby, z nichž nejjednodušší je ohřátí propan-butanovým plamenem. To má ovšem za následek změnu v chemické struktuře obruče, proto se jeho používání nedoporučuje, a jako optimální postup se volí ohřev indukcí. Zde ovšem vstupuje do hry několik parametrů (rozměry rotoru, rozměry induktoru, napájecí frekvence, čas, ...), jejichž nastavení určuje průběh ohřevu, respektive jeho realizovatelnost. Cílem práce je proto vytvořit model řešící proces ohřívání jako sdruženou úlohu všech tří fyzikálních polí (elektromagnetického, teplotního a termoelastických deformací), který by proces s dostatečnou přesností namodeloval, a na jehož základě by bylo možné formulovat některé závěry, případně doporučení pro možnou optimalizaci procesu.

V následujících kapitolách uvedu nejdříve základní pojmy a vztahy pro spjité modely jednotlivých polí, dále budu diskutovat výběr vhodné metody pro jejich numerické řešení, na což naváži popisem principu metody konečných prvků, což je v současné době převládající metoda pro řešení sdružených úloh. V závěru práce se potom budu věnovat výběru vhodného softwarového prostředí a vlastní realizaci modelu, spolu s diskuzí získaných výsledků a možností jak tento model vylepšit pro jeho co nejlepší fungování v ostrém provozu.

Kapitola 2

Spojité matematický model

2.1 Parciální diferenciální rovnice

Základní vztahy pro formulování většiny přírodních zákonů jsou dané rovnicemi, v nichž se vyskytují derivace nějaké funkce, obecně nazývané diferenciální rovnice. Ty dělíme na dvě základní skupiny - obyčejné, charakteristické tím, že obsahují pouze derivace podle jedné proměnné a parciální, ve kterých má neznámá funkce více proměnných a ve kterých se vyskytují parciální derivace této funkce. Zatímco obyčejné diferenciální rovnice se obvykle řeší obecně, a následně upřesní zadanými počátečními podmínkami, v případě parciálních není většinou možné obecné řešení nalézt¹, a problém se formuluje ve tvaru takzvané okrajové úlohy. Vztahy pro popis elektromagnetického a teplotního pole, stejně jako pole termoelastických posuvů, jsou formulovány právě ve tvaru obsahujícím parciální diferenciální rovnice. Vzhledem k náročnosti a rozsahu (který má navíc víceméně jen teoretický charakter) se omezím pouze na definici základních pojmů, nutných pro formulování řešené úlohy.

Obdobně jako u obyčejných diferenciálních rovnic, i v případě parciálních mluvíme o řádu rovnice, který určuje nejvyšší derivace neznámé funkce. Obecně můžeme parciální diferenciální rovnici řádu $k \in \mathbb{N}$ zapsat ve tvaru:

$$F\left(\mathbf{x}, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\right)$$

Zde se ovšem omezím pouze na parciální diferenciální rovnice druhého řádu, které mají v praktických aplikacích největší zastoupení. Pokud se na parciální derivaci díváme jako na operátor, můžeme rovnici druhého řádu v \mathbb{R}^n zapsat následovně

$$\sum_{i=1}^n a_{ii} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + 2 \sum_{i=1}^n a_{i0} \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_{00} u = f \quad (2.1)$$

2.1.1 Klasifikace parciálních diferenciálních rovnic

V případě, že se omezíme na funkci dvou proměnných, dostaneme rovnici (1) ve tvaru

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2a_{10} \frac{\partial u}{\partial x} + 2a_{20} \frac{\partial u}{\partial y} + a_{00} u = f \quad (2.2)$$

(Pro úplnost dodejme, že alespoň jeden z koeficientů a_{11}, a_{22}, a_{12} musí být nenulový.) Tato rovnice potom může být vhodnou transformací souřadnic $\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y)$ převedená na jeden ze tří takzvaných kanonických tvarů

¹jediným případem je d'Alembertovo řešení vlnové rovnice v \mathbb{R}^2

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + a \frac{\partial u}{\partial \xi} + b \frac{\partial u}{\partial \eta} + cu = f \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + a \frac{\partial u}{\partial \xi} + b \frac{\partial u}{\partial \eta} + cu = f \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + a \frac{\partial u}{\partial \xi} + b \frac{\partial u}{\partial \eta} + cu = f \quad (2.5)$$

Protože tyto tvary mají stejnou strukturu jako rovnice kuželoseček, bývají rovnice, které takto lze převést, označované jako eliptické, parabolické, respektive hyperbolické. O typu rovnice rozhoduje hodnota výrazu $a_{12}^2 - a_{11}a_{12}$ takto

$$\text{pokud } a_{12}^2 - a_{11}a_{12} < 0, \text{ je rovnice eliptická} \quad (2.6)$$

$$\text{pokud } a_{12}^2 - a_{11}a_{12} = 0, \text{ je rovnice parabolická} \quad (2.7)$$

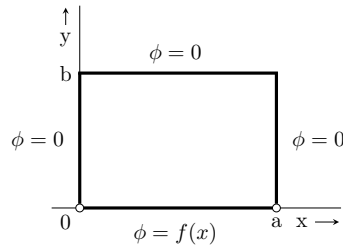
$$\text{pokud } a_{12}^2 - a_{11}a_{12} > 0, \text{ je rovnice hyperbolická} \quad (2.8)$$

2.1.2 Okrajové podmínky

Abychom mohli formulovat okrajový problém a nalézt jednoznačný popis nějakého pole, je potřeba kromě oblasti Ω , která musí být omezená a jednoduše, nebo vícenásobně souvislá, formulovat podmínky na její hranici Γ , jejichž význam spočívá v interakci pole a prostředí v okolí hranice. Pro lepší představivost uvádím jako příklad jednoduchou oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ a její hranice $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ (kde zároveň $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$), na níž rozlišujeme dva typy okrajových podmínek.

Okrajová podmínka I. druhu neboli Dirichletova okrajová podmínka na $\Gamma_1 \subset \Gamma$ zadává na této části hranice potenciál

$$u = g_1, \text{ respektive } \mathbf{u} = \mathbf{g}_1$$



Obrázek 2.1: Jednoduchá oblast a její hranice

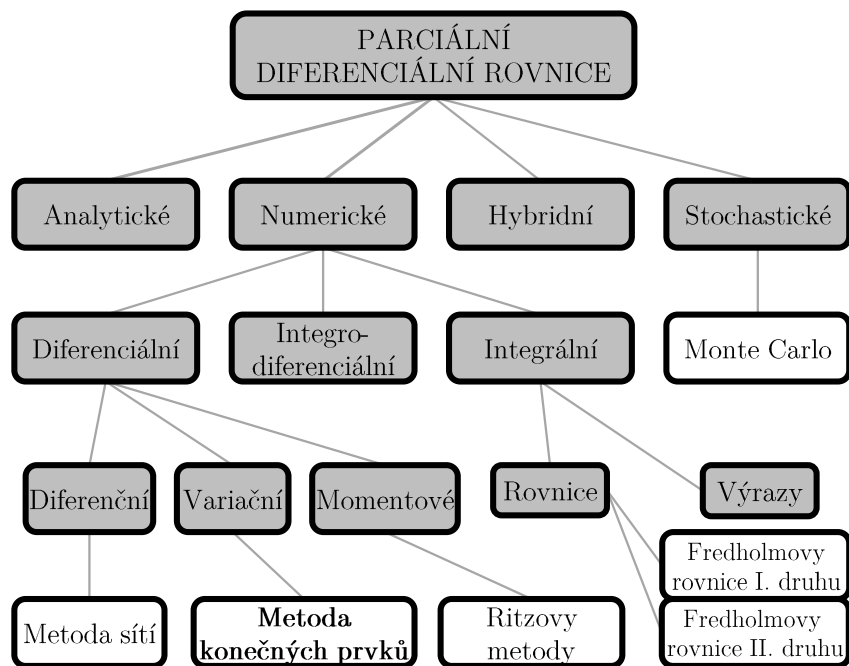
Pokud řešíme pole na neomezené oblasti Ω_∞ , pro kterou v případě $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je potřeba nahradit skalární respektive vektorový potenciál, pro který platí $u(\infty) = 0$, respektive $\mathbf{u}(\infty) = \mathbf{0}$ aproximativně omezenou oblastí, na jejíž hranici má pole specifické vlastnosti. V praxi se většinou vyskytují dva případy. V první případě přidáme nulovou Dirichletovu podmínku do takové vzdálenosti, kde neuvážováním vlivu pole vznikne zanedbatelně malá chyba, v druhém případě řešíme úlohu s nějakým typem symetrie, díky které můžeme Neumannovu okrajovou podmínku položit rovnou nule

Následující tabulka uvádí řešitelnost jednotlivých typů rovnic v závislosti na typu oblasti a okrajových podmínkách.

		Typ parciální diferenciální rovnice		
		Eliptická	Parabolická	Hyperbolická
Dirichletova nebo Neumannova	Otevřená množina	Podurčená	Unikátní a stabilní řešení pouze v jednom směru	Podurčená
	Uzavřená množina	Unikátní a stabilní řešení	Přeurčená	Přeurčená
Cauchyova	Otevřená množina	Nemá fyzikální význam	Přeurčená	Unikátní a stabilní řešení
	Uzavřená množina	Přeurčená	Přeurčená	Přeurčená

Tabulka 2.1: Řešitelnost p.d.r. v závislosti na typu a okrajové podmínce

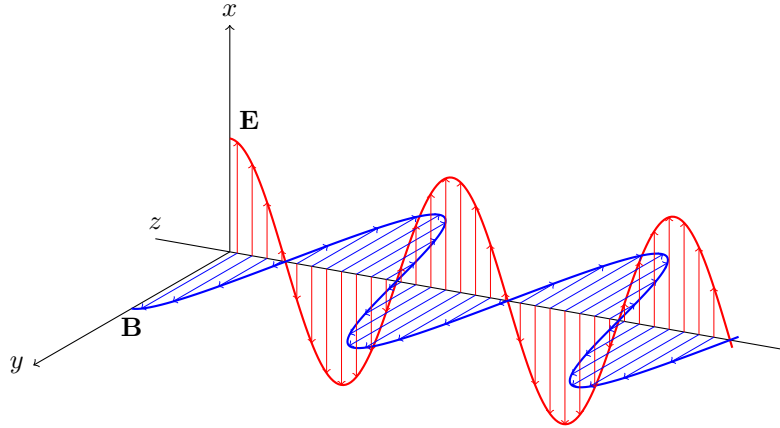
Obecně je analytické řešení parciálních diferenciálních rovnic možné jen pro ty nejjednodušší případy, a proto je pro modelování reálných aplikací prakticky nepoužitelné. Z toho důvodu byly rozvíjeny další techniky, jejichž přehled uvádím v následujícím schématu. V dalších kapitolách se pak zaměřím na popis metody konečných prvků.



Obrázek 2.2: Přehled základních metod pro řešení parciálních diferenciálních rovnic

2.2 Vztahy popisující elektromagnetické pole

První pole, které je třeba při indukčním ohřevu analyzovat, je pole elektromagnetické. Abychom získali základní představu o jeho chování, a zároveň hrubou kontrolu numerického modelu, uvedu nejdříve odvození vlnové rovnice, čímž dostanu k významu hloubky vniku pro indukční ohřívání, dále se zmíním o Poyntingově vektoru, ukáži analytický výpočet hlavních veličin ve vodivé vsázce, a jako poslední odvodím rovnici, použitou při řešení numerického modelu.



Obrázek 2.3: Znázornění elektromagnetické vlny - vektory \mathbf{E} a \mathbf{B} jsou na sebe navzájem kolmé (ve skutečnosti se ovšem \mathbf{B} o mnoho řádů menší)

2.2.1 Odvození vlnové rovnice

Aplikujme operátor rotace na první Maxwellovu rovnici

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{H}) = \text{rot } \gamma \mathbf{E} + \text{rot } \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \gamma \text{rot } \mathbf{E} + \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial \text{rot } \mathbf{E}}{\partial t}$$

a dosadíme za \mathbf{E} z druhé rovnice

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{H}) = -\gamma \mu_0 \mu_r \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

využitím identity

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{H}) = \text{grad}(\text{div } \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H}$$

dostaneme

$$\text{grad}(\text{div } \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H} = -\gamma \mu_0 \mu_r \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

Protože musí platit (ze 4. rovnice)

$$\text{div } \mathbf{H} = 0$$

dostaneme po úpravě rovnici pro magnetickou složku

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \gamma \mu_0 \mu_r \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

Pro odvození elektrické složky opět aplikujeme operátor rotace, tentokrát na druhou Maxwellovu

rovnici

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{E}) = -\mu_0 \mu_r \frac{\partial(\operatorname{rot} \mathbf{H})}{\partial t}$$

a z první rovnice dosadíme za $\operatorname{rot} \mathbf{H}$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{E}) = \gamma \mu_0 \mu_r \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

respektive

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = \gamma \mu_0 \mu_r \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Protože podle třetí rovnice platí

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

můžeme psát

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \gamma \mu_0 \mu_r \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \operatorname{grad} \frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

Tím dostáváme dvě rovnice, které jsou obecnými rovnicemi popisujícími šíření elektromagnetického vlnění v prostředí, kde ε_r , μ_r a γ jsou konstanty. V praxi ovšem, vzhledem k tomu, že konduktivita izolantů a vodičů se od sebe liší až o 24 řádů (!), můžeme zanedbat buď hodnoty γ (nevodivé prostředí), nebo ε_r (vodivé prostředí). Stejně tak neuvažujeme volné náboje ($\rho = 0$), čímž se obě rovnice zjednoduší. Pro nevodivé prostředí budou ve tvaru

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (2.9)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (2.10)$$

A pro vodivé prostředí

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \gamma \mu_0 \mu_r \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (2.11)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \gamma \mu_0 \mu_r \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.12)$$

Vzhledem k tomu, že pro indukční ohřev se obvykle používají zdroje s harmonickým průběhem proudu, budou se i jednotlivé intenzity měnit harmonicky. Můžeme tedy psát

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m e^{j\omega t}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_m e^{j\omega t}$$

Časové derivace potom můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = j\omega \mathbf{E}_m e^{j\omega t} = j\omega \mathbf{E}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \mathbf{E}_m e^{j\omega t} = -\omega^2 \mathbf{E}$$

a analogicky i pro \mathbf{H} . Pokud se omezíme na vodivé prostředí, a budeme pro zjednodušení uvažovat vlnu pouze jako jednorozměrnou, dostaneme

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} = j\omega\gamma\mu_0\mu_r \mathbf{H} \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} = j\omega\gamma\mu_0\mu_r \mathbf{E} \quad (2.14)$$

Řešení rovnice bude ve tvaru $\mathbf{H} = Ae^{\lambda_2 x} + Be^{\lambda_1 x}$, kde A,B jsou integrační konstanty a $\lambda^2 = j\omega\gamma\mu_0\mu_r$, proto bude

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{j}\sqrt{\omega\gamma\mu_0\mu_r}$$

Odmocninu z komplexní jednotky můžeme dále vyjádřit různými způsoby

$$\sqrt{j} = e^{j\pi/4} = \cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}$$

Po dosazení dostaneme

$$\lambda_{1,2} = \pm(1+j)\sqrt{\frac{\omega\gamma\mu_0\mu_r}{2}} = \pm\frac{1+j}{\sqrt{2}}a$$

$$a = \sqrt{\frac{2}{\omega\gamma\mu_0\mu_r}}$$

kde a je takzvaná hloubka vniku, což je také vzdálenost, v níž se amplituda veličin pole utlumí e -krát. Tento parametr hraje důležitou roli při návrhu indukčního ohřevu. Pokud totiž snížíme hloubku vniku, bude se dodávaná energie soustředit blíže k povrchu ohřívajícího předmětu. Tím sice na jednu stranu zvětšíme ztráty tepla způsobené výměnou s okolím, na druhou stranu ale minimalizujeme prohřívání ostatních částí. V případě, kdy chceme indukčním ohřevem upravit pouze povrchovou vrstvu materiálu se potom bez použití vyšších frekvencí neobejdeme.

2.2.2 Poyntingův vektor

Nyní uvedu odvození takzvaného Poyntingova vektoru, což je často používaný koncept při výpočtu indukčních zařízení, a zároveň důležité odvození pro správné pochopení přenosu elektromagnetické energie. Vyjdeme z energie elektromagnetického pole v objemu V :

$$W = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dV + \frac{1}{2} \mu_0 \mu_r \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} dV$$

Předpokládejme, že v tomto objemu dochází v čase k ubývání energie W , což vyjádříme derivací

$$P = -\frac{\partial W}{\partial t} = -\varepsilon_0 \varepsilon_r \int_V \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} dV - \mu_0 \mu_r \int_V \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} dV$$

Do této rovnice dosadíme z Maxwellových rovnic

$$\text{rot } \mathbf{H} = \gamma \mathbf{E} + \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \implies \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} (\text{rot } \mathbf{H} - \gamma \mathbf{E})$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\mu_0 \mu_r \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \implies \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0 \mu_r} \text{rot } \mathbf{E}$$

a dostaneme

$$P = -\frac{\partial W}{\partial t} = \int_V \mathbf{E} \cdot (\gamma \mathbf{E} - \text{rot } \mathbf{H}) dV + \int_V \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{E} dV = \int_V \gamma \mathbf{E}^2 dV + \int_V (\mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H}) dV$$

využitím identity $\mathbf{H} \cdot \text{rot}\mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \text{rot}\mathbf{H} = \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$ můžeme psát

$$P = \int_V \gamma \mathbf{E}^2 dV + \int_V \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV$$

Tento výraz udává dva základní způsoby přeměny energie v objemovém elementu. Člen $\int_V \gamma \mathbf{E}^2 dV$ určuje teplo, které se v objemovém elementu za jednotku času vyvinulo. Druhý člen představuje výkon vycházející z objemu a připadající na jednotku plochy. S využitím Gaussovy ho můžeme upravit na tvar

$$\int_V \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV = \int_A (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{A} = \int_A \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A}$$

kde $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ je Poyntingův vektor. Ten má kromě praktického využití i svůj teoretický přínos - ukazuje, že nosičem elektromagnetické energie je pole, nikoliv náboje nebo proud.

2.2.3 Rovnice pro popis elektromagnetického pole v numerickém modelu

I zde vyjdu z Maxwellových rovnic. S tím rozdílem, že do první z rovnic zahrnu navíc koercivní sílu permanentního magnetu:

$$\text{rot}(\mathbf{H} - \mathbf{H}_c) = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

K nim je ovšem potřeba dodat ještě materiálové vztahy

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{J} = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_v)$$

Začneme rozepsáním první rovnice, do níž dosadíme s využitím posledních dvou jmenovaných členů. Budeme také rovnou předpokládat harmonický průběh veličin, čímž dostaneme

$$\text{rot}\mathbf{H} = \gamma \mathbf{E}_v + \gamma \mathbf{E} + j\omega \varepsilon \mathbf{E}$$

Vzhledem k tomu, že vodivost kovů se pohybuje v řádu 10⁶ až 10⁷, zatímco permitivita epsilon má hodnoty okolo 10-11, můžeme i pro frekvence okolo 1 MHz zanedbat poslední člen na pravé straně. V další odvozování proto vyjdeme z upravených rovnic

$$\text{rot}(\mathbf{H} - \mathbf{H}_c) = \mathbf{J}$$

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

a ze vztahu $\mathbf{J} = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_v)$ mezi vektory \mathbf{E} a \mathbf{J} v systému, jehož část nebo části se pohybují rychlostí \mathbf{v} v magnetickém poli \mathbf{B} . Zde je doplňková intenzita \mathbf{E}_v daná vztahem

$$\mathbf{E}_v = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

V dalších rovnicích budeme pracovat s takzvaným magnetickým potenciálem, definovaným rovnicí

$$\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$$

a zužující podmínkou

$$\text{div}\mathbf{A} = 0$$

Hlavní motivací pro jeho zavedení je fakt, že práce s vektory znamená práci s jejich složkami, jejichž počet odpovídá dimenzi úlohy, což řešení úlohy komplikuje. Druhou nepříjemnou vlastností vektorů je skutečnost, že mohou být nespojitě. Oba tyto důvody proto vedly k zavedení několika různých potenciálů.

Nyní tedy můžeme dosadit a psát

$$\text{rot}\left(\frac{1}{\mu} \text{rot}\mathbf{A} - \mathbf{H}_c\right) = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \text{rot}\mathbf{A}) \quad (2.15)$$

Magnetický vektorový potenciál nyní zavedem i do druhé rovnice, čímž dostaneme

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)$$

Tato rovnice má obecné řešení ve tvaru

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi - \mathbf{f}(t) \quad (2.16)$$

kde φ je obecná skalární funkce souřadnic a $\mathbf{f}(t)$ je obecná funkce času. Po dosazení 2.16 do 2.15 bude

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{H}_c \right) = \gamma \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi - \mathbf{f}(t) + \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{A} \right)$$

Člen $-\gamma \mathbf{f}(t)$ reprezentuje proudové hustoty závislé pouze na čase, a nikoliv na souřadnicích. Takové proudové hustoty se v případě výkonových indukčních ohřevů v žádném systému nevyskytují, a proto je nebudeme dále uvažovat. Dále přeznačíme člen $-\gamma \operatorname{grad} \varphi$, který představuje hustotu proudů dodávaných do systému zvnějšku, na J_{ext} , čímž dostaneme výsledný tvar rovnice popisující elektromagnetické pole

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{H}_c \right) + \gamma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{A} \right) = \mathbf{J}_{ext} \quad (2.17)$$

Zbývající členy rovnice mají následující význam:

- Člen $-\gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ představuje hustotu proudů indukovaných v elektricky vodivých částech systému systémem časovými změnami magnetického pole

- Člen $\gamma \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}$ představuje hustoty proudů indukovaných pohybem elektricky vodivých částí v magnetickém poli.

Vzhledem k tomu, že žádná část systému se při indukčním ohřevu nepohybuje, redukuje se rovnice 2.17 na tvar

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A} \right) + \gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{J}_{ext} \quad (2.18)$$

2.3 Zákony a rovnice popisující termoelastické pole

Teplotní pole se od ostatních dvou odlišuje tím, že v jeho případě je třeba definovat celkem čtyři okrajové podmínky. Kromě obvyklých dvou - v případě teplotního pole jde o předepsanou teplotu na rozhraní, respektive o předepsaný teplotní tok - je potřeba určit parametry přenosu tepla konvekcí a radiací. Spolu s kondukcí představují tyto mechanismy tři základní způsoby šíření tepla. Pro lepší přehlednost jsem se ovšem rozhodl jimi nezačínat, ale začlenit jejich popis do sekce o Fourier-Kirchhoffově rovnici, což je i rovnice s níž počítá numerický model, a následně diskuzi jejich okrajových podmínek. (Vzájemný vztah jednotlivých pojmů ještě ilustruji na obrázku níže).

2.3.1 Fourier-Kirchhoffova rovnice

Odvození Fourier-Kirchhoffovy rovnice začnu popisem kondukcce, což je způsob šíření tepla v pevných tělesech, jejichž různé části mají různé teploty. Teplo se sice kondukcí šíří i v kapalinách a plynech, zde se ovšem v mnohem větší míře uplatňuje konvekce, o které budu hovořit dále. Protože při výpočtech jednodušších úloh platí velmi výrazná analogie mezi teplotním a elektrickým polem (stejný tvar, jaký má řešení modelové úlohy v kapitole o konečných prvcích tak zároveň popisuje i rozložení teploty mezi čtyřmi stěnami o dané teplotě), rozhodl jsem se pro jeho popis pomocí následující tabulky:

Tabulka 2.2: Analogie mezi teplotním a elektrickým polem

Potenciál V (V) (nulový potenciál v nekonečnu)	Termodynamická teplota (K) (nulová teplota je -273.15 C)
Napětí = potenciální rozdíl $U = V_1 - V_2$ (V)	Teplotní rozdíl $\Delta\Theta = \Theta_1 - \Theta_2$ (K nebo C)
Konduktivita γ ($\frac{S}{m} = \frac{1}{\Omega \cdot m}$)	Součinitel tepelné vodivosti λ ($\frac{W}{m \cdot K}$)
Rezistivita $\rho = \frac{1}{\gamma}$ ($\Omega \cdot m$)	Tepelný měrný odpor $\frac{1}{\lambda}$ ($\frac{m \cdot K}{W}$)
Elektrický odpor $R = \frac{\text{délka}}{\gamma \cdot \text{průřez}} = \frac{\rho \cdot \text{délka}}{\text{průřez}}$ ($\frac{1}{\Omega \cdot m} \cdot m^2 = \Omega$)	Tepelný odpor $R = \frac{\text{délka}}{\lambda \cdot \text{průřez}}$ ()
Hustota proudu $J = \gamma E = \gamma(-grad V) = -\gamma grad V$ ($\frac{1}{\Omega \cdot m} \cdot \frac{V}{m} = \frac{V}{\Omega \cdot m^2} = \frac{A}{m^2}$) Vektor, jehož směr je určený normálou na ekvipotenciální plochu	Hustota tepelného toku $q = -\lambda grad \Theta$ ($\frac{W}{m \cdot K} \cdot \frac{K}{m} = \frac{W}{m^2}$) Vektor, jehož směr je určen normálou na izotermální plochu
Elektrický proud $I = \int_S J \cdot dS = \int_S \gamma E \cdot dS = \int_S -\gamma grad V \cdot dS$	Tepelný tok $P = \int_S q \cdot dS = \int_S -\lambda grad \Theta \cdot dS$

Tyto analogie využijeme při popisu průchodu tepla jednoduchou válcovou stěnou v ustáleném stavu, což je případ, který nejvíce odpovídá dějům probíhajícím při ohřevu rotorové obruče. Mějme tedy válcovou stěnu o vnějším poloměru r_2 , vnitřním poloměru r_1 a délky l , jak je znázorněno na obrázku. Teploty v jednotlivých poloměrech nechť jsou popsány hodnotami θ_2 a θ_1 . Potom můžeme určit tepelný odpor proužku radiální šířky dr jako:

$$dR = \frac{dr}{\lambda \cdot 2\pi r l} = \frac{\text{délka}}{\lambda \cdot \text{průřez}}$$

takže celkový odpor stěny bude

$$R = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\lambda \cdot 2\pi r l} = \frac{1}{2\pi \lambda l} [ln r]_{r_1}^{r_2}$$

Tepelný už potom lehce vyjádříme jako

$$P = \frac{\Delta \vartheta}{R} = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{R}$$

Obecné vedení tepla ve třech dimenzích lze potom zapsat jako

$$q(r, t) = -\lambda \operatorname{grad} T(r, t)$$

Dále vyjdeme z úvahy, že tepelný výkon v dané oblasti se rovná součtu výkonu vzniklého v daném objemu z jiné energie a tepelného výkonu dodaného do objemu přes jeho hranici.

$$U(t) = \int_V \rho c_p (T(r, t) - T_1) dV$$

takže

$$\frac{dU(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\int_V \rho c_p (T(r, t) - T_1(r)) dV \right] = \int_V \frac{d}{dt} [\rho c_p (T(r, t) - T_1(r))] dV$$

vzhledem k tomu, že veličiny ρ , c_p ani T_1 nejsou funkcí času, můžeme rovnici zjednodušit

$$\frac{dU(t)}{dt} = \int_V \rho c_p \frac{dT(r, t)}{dt} dV$$

Druhý člen pak můžeme vyjádřit jako

$$Q(t) = \oint_S q(r, t) dS = \oint_S q(r, t) \cdot n dS = \int_V \operatorname{div} q(r, t) dV$$

Dosazením za [?] dostaneme

$$\int_V p(r, t) dV = \int_V \rho c_p \frac{dT(r, t)}{dt} dV + \int_V \operatorname{div} q(r, t) dV$$

Protože rovnice musí platit pro libovolný objem, můžeme integrály na obou strany "vykrátit"

$$p(r, t) = \rho c_p \frac{dT(r, t)}{dt} + \operatorname{div} q(r, t)$$

což po dosazení za q bude

$$p(r, t) = \rho c_p \frac{dT(r, t)}{dt} - \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T(r, t))$$

respektive

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T(r, t)) = \rho c_p \frac{dT(r, t)}{dt} - p(r, t)$$

Jako poslední rozepíšeme a upravíme derivaci $dT(r, t)/dt$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} v_x + \frac{\partial T}{\partial y} v_y + \frac{\partial T}{\partial z} v_z = \frac{\partial T}{\partial t} + v \cdot \operatorname{grad} T$$

čímž dostaneme výsledný tvar takzvané Fourier-Kirchhoffovy rovnice

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) - \rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \cdot \operatorname{grad} T \right) = -p \quad (2.19)$$

Jednotlivé členy mají následující fyzikální význam:

- člen $\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T)$, z něhož jsme vyšli, reprezentuje stacionární stav
- teplotní pole měnící se s časem popisuje člen $\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$
- člen $\rho c_p v \cdot \operatorname{grad} T$ popisuje pohybující se části systému. Pro indukční ohřev, při němž jsou všechny části systému v klidu, se tak rovnice 2.19 zjednoduší:

$$\boxed{\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) - \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -p} \quad (2.20)$$

2.3.2 Okrajové podmínky

Nyní se podrobněji podívejme na jednotlivé okrajové podmínky, které, jak bylo předznamenáno v úvodu, budou celkem čtyři:

- První okrajová podmínka je určena klasickou Dirichletovou podmínkou

$$T_{\Gamma_1} = \textit{konst.}$$

Kde Γ_1 představuje část hranice s pevně danou teplotou.

- Druhá okrajová podmínka je určena klasickou Neumannovou podmínkou

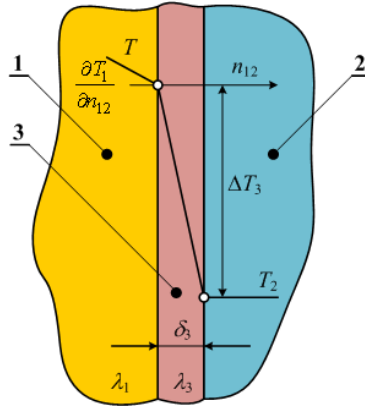
$$\frac{\partial T_{\Gamma_2}}{\partial n} = \textit{konst.}$$

Kde Γ_2 je část hranice se známou derivací teploty ve směru vnější normály, respektive teplotního toku. (Typické použití této podmínky je v ose symetrie zkoumaného systému, na níž musí platit

$$\frac{\partial T_{\Gamma_2}}{\partial n} = 0$$

)

- Třetí okrajová podmínka určuje přenos tepla pomocí konvekce, což je způsob charakteristický především pro plynné a kapalná skupenství, v nichž dochází ke konvektivnímu promíchávání částic. Z fyzikálního hlediska existují dva základní druhy konvekce: -přirozená konvekce, k níž dochází vlivem různé hustoty teplejších a studenějších částic, které těleso obklopují -nucená konvekce, k níž dochází vlivem vnějších sil, což bývá buď vítr nebo ventilátor, respektive čerpadlo. Intenzita konvektivního přenosu tepla mezi pevným tělesem (1) a tekutinou (2) závisí na materiálových parametrech a tloušťce mezní vrstvy (3), jak je ukázáno na obrázku. Přenos tepla $q_{c,1 \rightarrow 2}$ v této oblasti je daný, podobně jako u pevných těles, Fourierovým zákonem



Obrázek 2.4: Průběh hustoty ztrát v jednotlivých hloubkách

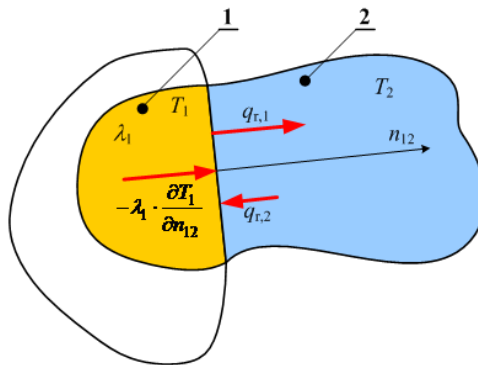
$$q_{c,1\rightarrow 2} = -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n_{1,2}} = \frac{\lambda_3}{\delta_3} \Delta T_3 \quad (2.21)$$

kde λ je tepelná vodivost pevného tělesa (1) a λ_3 příčná tepelná vodivost mezní vrstvy (3) o tloušťce δ_3 . Prakticky ale tento vztah aplikovat nelze, vzhledem k tomu, že neznáme přesné hodnoty parametrů λ_3 , δ_3 a ΔT_3 , které závisí jak na teplotě, tak na charakteru proudění (laminárního, přechodového nebo turbulentního) zkoumané tekutiny. Z toho důvodu nahrazujeme rovnicí 2.21 výrazem

$$q_{c,1\rightarrow 2} = \alpha_{c,1,2}(T_1 - T_2)$$

kde $\alpha_{c,1,2}$ je koeficient konvektivního přestupu tepla mezi pevným tělesem (1) a tekutinou (2), T_1 teplota na povrchu pevného tělesa, jež je v kontaktu s tekutinou (2), a T_2 teplota tekutiny (2) v dostatečné vzdálenosti od tělesa (1). Tento koeficient je pak potřeba určit experimentálně, k čemuž se často využívají závěry teorie podobnosti, především podobnostní čísla Reynoldsovo, Nusseltovo a Biotovo, a upravit v závislosti na teplotě.

- Poslední z okrajových podmínek je přestup tepla radiací, odehrávající se, pokud těleso vyzařuje (nejen) na vlnových délkách od cca $0.1 \mu\text{m}$ do cca 1 mm . Situaci opět ilustruji na obrázku, kde dochází k vyzařování z tělesa (1) s teplotou $T_{em} = T_1$ a součinitelem emisivity (také stupněm černosti) C_{em} na absorbující médium o teplotě $T_{ab} = T_2$ a součinitelem absorpce C_{ab} , pro jehož praktický popis jsou důležité tři zákony:



Obrázek 2.5: Průběh hustoty ztrát v jednotlivých hloubkách

- Kirchhoffův zákon, který říká, že sálavost tělesa je tím větší, čím větší je jeho pohltivost, což matematicky vyjádříme jako $C_{em} = C_{ab} = C_r$, kde C_r je obecný

koeficient charakterizující povrch pevného tělesa z hlediska tepelného vyzařování.

■ Stefan-Boltzmannův zákon, který uvedu pro tři základní případy

- Pro pevná tělesa - specifický přestup tepla z pevného tělesa (1) o teplotě T_1 (za předpokladu, že se jedná o černé nebo šedé těleso) udává vztah

$$q_{r,1} = C_{r1}\sigma T_1^4$$

kde je takzvaná Stefan-Boltzmannova konstanta a $C_{r1} \in (0, 1)$ součinitel emisivity pevného tělesa (1). Pro $C_{r1} \rightarrow 1$ se chování tělesa přibližuje absolutně černému, zatímco $C_{r1} \rightarrow 0$ znamená, že těleso se svým chováním přibližuje absolutně bílému tělesu, respektive zrcadlu. (Například pro eloxovaný hliník se udává $C_{r1} = 0.9$, zatímco pro alobalovou folii pouze $C_{r1} = 0.03$.)

- Plyny - většina plynů emituje, a v některých případech také absorbuje radiaci podobně jako pevná tělesa, pouze s několika odlišnostmi:
 - monoatomické nebo diatomické plyny (vodík, kyslík, dusík, a tím pádem také vzduch), které jsou z hlediska radiace téměř transparentní a prakticky žádnou energii neabsorbují
 - plyny emitují, případně i absorbují, záření pouze na specifických intervalech jeho vlnových délek

Z hlediska praktické aplikace můžeme i energii vyzářenou z plynu (2) vyjádřit ve tvaru Stefan-Boltzmannova zákona

$$q_{r,2} = C_{r2}\sigma T_2^4$$

kde $C_{r2} \in (0, 1)$ je součinitel emisivity pro daný plyn, který však obvykle nebývá snadné dohledat, mimo jiné proto, že jeho hodnota závisí na teplotě i tlaku. Například pro oxid uhličitý se jeho hodnota pohybuje v intervalu (0.003, 0.25).

- Pevné těleso obklopené plynným médiem - i v případě přestupu tepla radiací mezi pevným tělesem (1) a plynným médiem (2) můžeme tepelný tok aproximovat Stefan-Boltzmannovým zákonem

$$q_{r,1 \rightarrow 2} = q_{r,1} - q_{r,2} = C_{r1}C_{r2}\sigma(T_1^4 - T_2^4) = \bar{C}_{r12}\sigma(T_1^4 - T_2^4)$$

kde $\bar{C}_{r12} \in (0, 1)$ značí "efektivní" součinitel emisivity rozhraní mezi tělesem a plynem.

■ Planckův zákon, vyjadřující závislost intenzity záření I absolutně černého tělesa na vlnové délce, případně jiné proměnné charakterizující vyzářené spektrum, uvedu bez odvozování:

$$B_\lambda(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}$$

kde h je Planckova konstanta, c rychlost světla, k_B Boltzmannova konstanta, T teplota a λ vlnová délka.

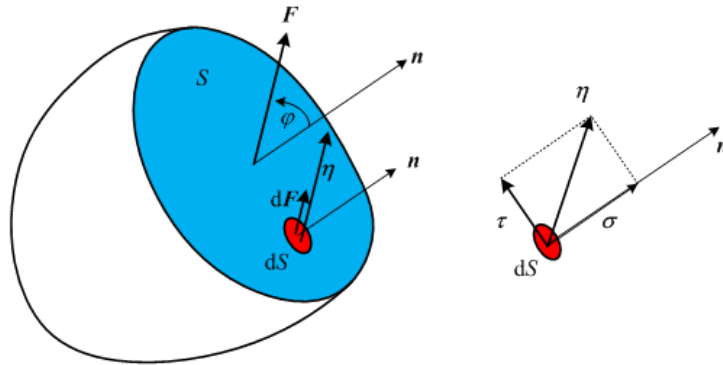
Pokud bychom dosadili do Stefan-Boltzmannova zákona, zjistili bychom, že při indukčním ohřevu, kde teplota ohříváné obruče dosáhne maximálně 400-500 °C, je podíl přestupu

tepla radiací zanedbatelně malý. Vzhledem ke snadné implementaci nicméně není důvod jeho vliv do řešených rovnic nezahrnout.

2.4 Rovnice popisující termoelastické pole

Pro získání rovnic popisujících mechanické chování obruče (respektive modelu) vyjdu ze základních vztahů mechaniky kontinua. Nejdříve uvedu jednotlivé typy deformací, které mohou působit na těleso, a dále uvedu Hookův zákon, který ve svém obecném tvaru vede v kombinaci s rovnicemi popisujícími rovnováhu sil působících na těleso k takzvané Lamého rovnici, použité v numerickém modelu.

V dalších úvahách budeme pracovat s konceptem kontinua, což je imaginární médium, spojitě v prostoru a libovolně dělitelné. Uvažujme v tomto kontinuu plochu vytvořenou pomyslným řezem, a charakterizovanou její normálou. Dále uvažujme sílu F působící na plochu pod úhlem



Obrázek 2.6: Síly působící na prostorové kontinuum

φ vzhledem k normále, která působí na celou plochu řezu. V tomto řezu si můžeme vybrat elementární plošku dS , na níž působí síla dF . Velikost síly bude zřejmě nějakým způsobem souviset s velikostí plochy dS . Označme tuto konstantu úměrnosti η , čímž pádem budeme platit

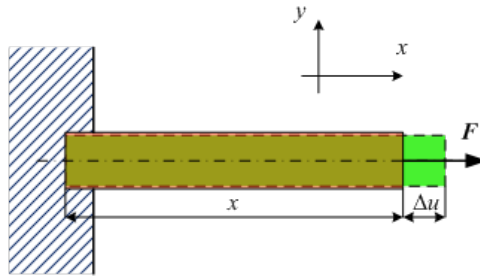
$$dF = \eta dS \implies \eta = \frac{dF}{dS}$$

Tuto konstantu nazveme napětím. Vektory F , dF , a η mají stejný směr, který ale v obecném případě nebude stejný jako směr normály n . V tom případě bývá výhodné vyjádření vektoru η jako součet napětí paralelního s normálou, označovaného σ , a tangenciálního napětí τ , rovnoběžného s plochou S . Ke stejnému výsledku můžeme dojít také pomocí rozkladu sil.

2.4.1 Posuvy a deformace

Síly působící na kontinuum způsobují vychýlení jeho atomů z rovnovážných poloh, což se v makroskopickém měřítku projeví jako jeho prodloužení. V případě použití kartézské soustavy xyz označujeme tato prodloužení u, v, w . Výhoda popisu materiálu pomocí prodloužení je daná jeho snadným experimentálním stanovením. Pro popis stavu, v němž se nějaký materiál nachází, ale potřebujeme veličinu, která by byla na tvaru a rozměrech tělesa nezávislá. Z toho důvodu zavádíme prodloužení vztahované k rozměrům tělesa, jinými slovy relativní prodloužení. Nejjednodušším případem prodloužení je natahování tyče v jejím podélném směru, kdy se vlivem působení síly F prodlouží její délka o Δu . Relativní prodloužení ε je definované poměrem

$$\varepsilon = \frac{\Delta u}{x}$$



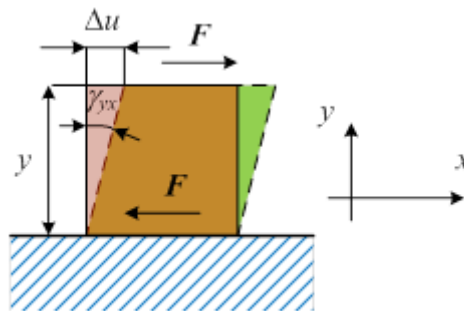
Obrázek 2.7: Natahování tyče v podélném směru

Bude-li mít síla F tangenciální směr, a působit na krychli o výšce y , dojde u horního okraje k posuvu, který opět označíme Δu . Výsledkem bude sklonění krychle o úhel γ_{yx} , pro který platí

$$\operatorname{tg} \gamma_{yx} = \frac{\Delta u}{y}$$

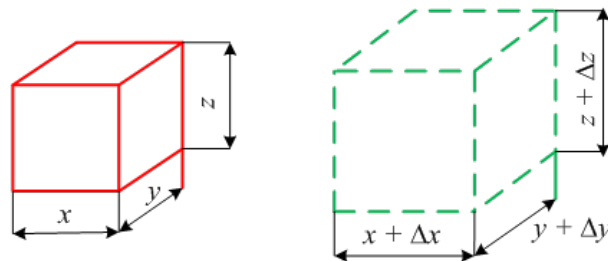
Protože tato hodnota je obvykle dosti malá, můžeme s přijatelnou chybou zanedbat tangentu úhlu γ_{yx} a psát

$$\operatorname{tg} \gamma_{yx} \approx \gamma_{yx} = \frac{\Delta u}{y}$$



Obrázek 2.8: Smykové namáhání krychle

Třetím typem deformace je relativní změna objemu. Uvažujme kontinuální krychli o rozměrech x, y, z , která se vlivem působícího napětí transformuje do rozměrů $x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$.



Obrázek 2.9: Relativní změna objemu

Relativní změna objemu je daná vztahem

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{V' - V}{V} = \frac{V'}{V} - 1 = \frac{(x + \Delta x)(y + \Delta y)(z + \Delta z)}{xyz} - 1 = \\ &= \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \left(1 + \frac{\Delta y}{y}\right) \left(1 + \frac{\Delta z}{z}\right) - 1 = (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) - 1 \approx \end{aligned}$$

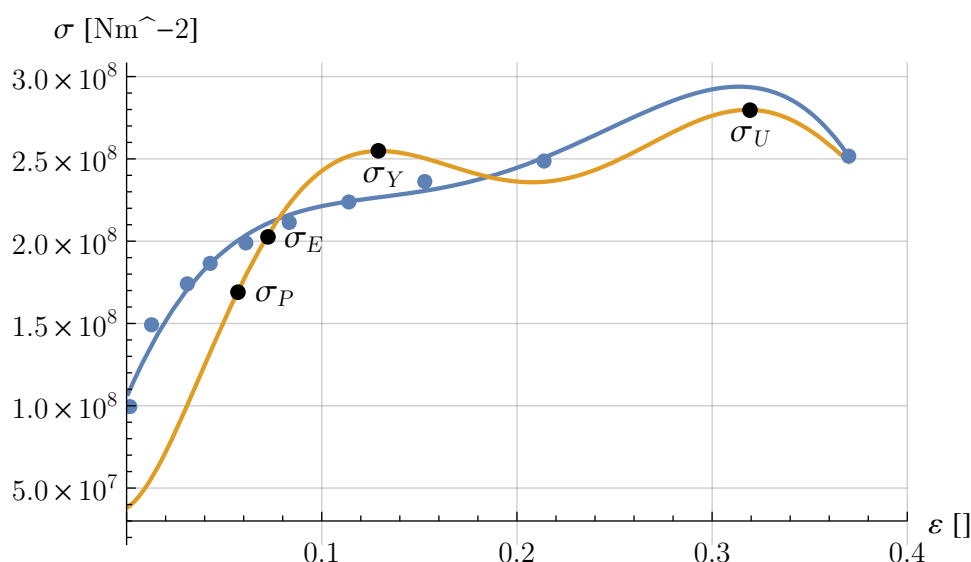
$$\approx 1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z - 1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

Přičemž jsme za cenu zanedbatelné nepřesnosti vynechali všechny členy druhého a třetího řádu, tedy $\varepsilon_x\varepsilon_y$, $\varepsilon_x\varepsilon_z$, $\varepsilon_y\varepsilon_z$ a $\varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z$.

2.4.2 Hookův zákon

Zatím jsme hovořili pouze o různých typech deformací, pro popis chování a typu materiálu je ale rozhodující takzvaný pracovní diagram, dávající do souvislosti relativní prodloužení s mechanickým napětím. Jeho typický průběh, spolu s diagramem pro měděný vodič, změřený autorem v rámci předměty "Materiály pro elektrotechniku", je na následujícím obrázku. V diagramu jsou zvýrazněny také následující body:

- σ_P - mez úměrnosti, neboli oblast do níž má závislost lineární průběh
- σ_E - mez, do níž je deformace materiálu elastická (po uvolnění napětí se materiál vrátí do svého původního stavu)
- σ_Y - mez kluzu, po jejímž překročení se prodloužení zvětšuje, aniž by se přitom zvyšovala hodnota napětí; po jeho uvolnění už se ovšem materiál do původního stavu nevrátí
- σ_U - mez pevnosti - překročením meze dochází k přetržení materiálu



Obrázek 2.10: Typický průběh pracovního diagramu

2.4.3 Zobecněný Hookův zákon

Uvažujme krychlový element, na něž působí tři normálová napětí σ_x , σ_y a σ_z . Celkové relativní prodloužení ve směru osy x je potom dané vztahem

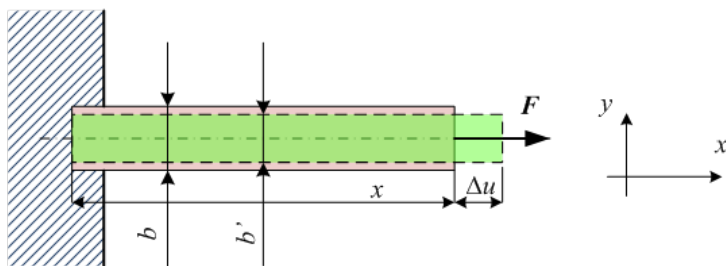
$$\varepsilon_{cx} = \varepsilon_x - \nu\varepsilon_y - \nu\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) \quad (2.22)$$

a analogicky i pro osy y a z

$$\varepsilon_{cy} = \varepsilon_y - \nu\varepsilon_z - \nu\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)) \quad (2.23)$$

$$\varepsilon_{cz} = \varepsilon_z - \nu\varepsilon_x - \nu\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)) \quad (2.24)$$

kde parametr ν je takzvané Poissonovo číslo popisující příčnou kontrakci tělesa. To je jev, který nastává ve směru osy x, jak je ilustrováno na obrázku.



Obrázek 2.11: Znázornění příčné kontrakce tělesa

Tato kontrakce má pro izotropní materiály ve všech směrech stejnou velikost, danou vztahem

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x = -\nu\frac{\sigma_x}{E}$$

Hodnota Poissonova čísla se pro všechny materiály nachází mezi nulou a jednou polovinou, a jeho velikost je pro každý materiál nutné stanovit experimentálně. Rovnice 2.22, 2.23 a 2.24 se pak označují jako zobecněný Hookův zákon.

2.4.4 Lamého rovnice

Uvažujme elementární krychli zobrazenou ve dvoudimenzionální projekci na čtyřúhelník ABCD, který působením externích sil přechází na tvar A'B'C'D'. Tato posunutí se odehrávají ve směru u, v a w, kde $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$ a $w = w(x, y, z)$. Posunutí bodu A do bodu A' popisují rovnice

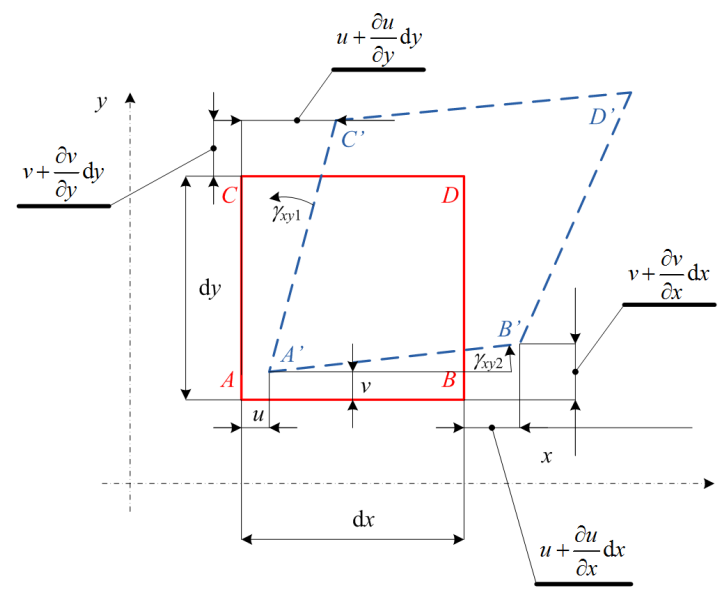
$$u_A = u; \quad v_A = v; \quad w_A = w$$

Pro rovnice popisující transformaci bodu B budeme uvažovat pouze první členy Taylova rozvoje, čímž pádem platí

$$u_B = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx; \quad v_B = v + \frac{\partial v}{\partial x} dx; \quad w_B = w + \frac{\partial w}{\partial x} dx$$

a analogicky pro transformaci bodu C na C'

$$u_C = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx; \quad v_C = v + \frac{\partial v}{\partial x} dx; \quad w_C = w + \frac{\partial w}{\partial x} dx$$



Obrázek 2.12: Elementární krychle a její deformace vlivem externích sil

Pro deformaci ε_{cx} ve směru osy x platí

$$\varepsilon_{cx} = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

a analogicky pro osy y a z:

$$\varepsilon_{cy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_{cz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

Zkosení v rovině xy je dané součtem zkosení hrany A'B' a A'C'

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy1} + \gamma_{xy2}$$

kde

$$\gamma_{xy1} \approx \text{tg } \gamma_{xy1} = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial y} dy - u}{dy + v + \frac{\partial v}{\partial y} dy - v} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{1 + \frac{\partial v}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{1 + \varepsilon_{cy}}$$

a

$$\gamma_{xy2} \approx \text{tg } \gamma_{xy2} = \frac{v + \frac{\partial v}{\partial x} dx - v}{dy + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \varepsilon_{cx}}$$

Vzhledem k tomu, že $\varepsilon_{cx}, \varepsilon_{cy} \ll 1$, můžeme jejich vliv zanedbat a oba zlomky zjednodušit

$$\gamma_{xy1} \approx \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \gamma_{xy2} \approx \frac{\partial v}{\partial x} \implies \gamma_{xy} \approx \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Stejným způsobem odvodíme i zkosení v rovinách xz a yz

$$\gamma_{xz} \approx \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} \approx \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

Vrátíme-li se k rovnicím popisující tangenciální napětí, dostaneme

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} = G \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz} = G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2.25)$$

Pro jednotlivá normálová napětí platí zobecněný Hookův zákon

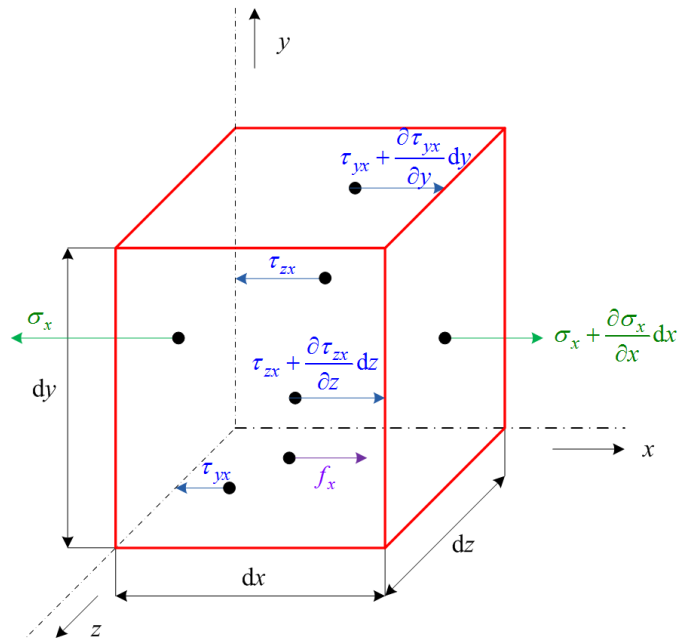
$$\varepsilon_{cx} = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)); \quad \varepsilon_{cy} = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)); \quad \varepsilon_{cz} = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)) \quad (2.26)$$

Řešením této soustavy rovnic dostaneme napětí pro jednotlivé složky

$$\sigma_x = \frac{E}{1 + \nu} \left(\varepsilon_{cx} + \frac{\omega \nu}{1 - 2\nu} \right); \quad \sigma_y = \frac{E}{1 + \nu} \left(\varepsilon_{cy} + \frac{\omega \nu}{1 - 2\nu} \right); \quad \sigma_z = \frac{E}{1 + \nu} \left(\varepsilon_{cz} + \frac{\omega \nu}{1 - 2\nu} \right)$$

kde $\omega = \varepsilon_{cx} + \varepsilon_{cy} + \varepsilon_{cz}$. Protože se v této soustavě rovnice vyskytuje celkem devět proměnných, potřebujeme k jejich vyřešení potřeba dodat ještě další tři rovnice. Ty budou odvozené v další sekci z podmínky rovnováhy sil působících na těleso

2.4.5 Rovnice popisující rovnováhu sil působících na těleso



Obrázek 2.13: K odvození rovnic popisujících rovnováhu sil působících na objemový element

Zde opět vyjdeme z objemového elementu představujícího kontinuum, jak je naznačeno na obrázku. Pro rovnováhu sil ve směru osy x musí platit vztah

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dydz - \sigma_x dydz + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} dy\right) dx dz - \tau_{yx} dx dz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz\right) dx dy - \tau_{zx} dx dy + f_x dx dy dz = 0$$

kde f_x značí složku elektromagnetické, termoelastické, gravitační nebo jiné síly působící ve směru osy x. Tento výraz je možné zjednodušit

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x = 0 \quad (2.27)$$

a stejný tvar budou mít i rovnice ve dvou ostatních směrech

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + f_y = 0; \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + f_z = 0$$

Do rovnice 2.27 dosadíme za σ_x, τ_{xy} a τ_{xz} z 2.25 a 2.26

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{cx} + \frac{\omega \nu}{1-2\nu} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) + f_x = 0$$

A pokud dosadíme za $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ dostaneme

$$\frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial}{\partial x} \left(2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{(1-2\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + f_x = 0$$

což můžeme dále využít, pokud jednotlivá posunutí sjednotíme do funkce $\mathbf{p} = (u, v, w)$. Tím

rovnice přejde na tvar.

$$\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial(\operatorname{div} \mathbf{p})}{\partial x} + \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f_x = 0$$

Členy $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ respektive $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ můžeme nahradit operátorem div respektive Δ a rovnici zapsat v kompaktnějším tvaru

$$\left(\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{E}{2(1+\nu)} \right) \frac{\partial(\operatorname{div} \mathbf{p})}{\partial x} + \frac{E}{2(1+\nu)} \Delta u + f_x = 0$$

příčemž pro oba zbývající směry dostaneme analogické rovnice

$$\left(\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{E}{2(1+\nu)} \right) \frac{\partial(\operatorname{div} \mathbf{p})}{\partial y} + \frac{E}{2(1+\nu)} \Delta v + f_y = 0$$

$$\left(\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{E}{2(1+\nu)} \right) \frac{\partial(\operatorname{div} \mathbf{p})}{\partial z} + \frac{E}{2(1+\nu)} \Delta w + f_z = 0$$

A konečně sloučením těchto složek do vektorů \mathbf{p} a \mathbf{f} dostaneme finální rovnici popisující termoelastické pole, takzvanou **Lamého rovnici**

$$\left(\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{E}{2(1+\nu)} \right) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{p}) + \frac{E}{2(1+\nu)} \Delta \mathbf{p} + \mathbf{f} = 0$$

Na rozdíl od elektromagnetického nebo teplotního pole zde ale jednotlivé členy nemají přesně daný fyzikální význam, a proto je rovnici možné interpretovat pouze tak, že

- první dva členy popisují posuv v termoelastickém poli

- člen \mathbf{f} představuje sílu, jejíž původ může být z elektromagnetického (Lorentzova), gravitačního, termoelastického, případně dalšího pole.

Kapitola 3

Volba metody pro numerický model

3.1 Demonstrativní příklad a jeho analytické řešení

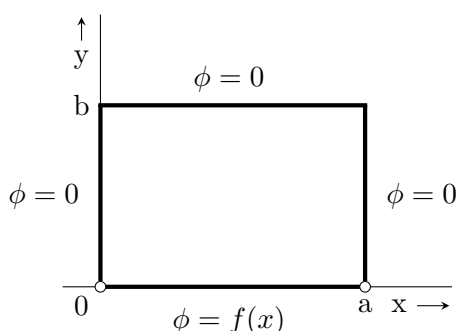
Přestože se tato práce elektrostatickým polem nezabývá, rozhodl jsem se využít jeho vlastností pro výklad principů metody konečných prvků, například proto, že pro některé jednodušší geometrie je možné ověřit správnost metody konečných prvků srovnáním s analytickým řešením, ale také například kvůli popisu variační formulace v literatuře, o níž se zmíním dále v souvislosti s takzvanou slabou formulací.

Vezměme si tedy jednoduchý problém - chceme znát rozložení potenciálu stacionárního elektrického pole v dutině dlouhé uzemněné elektrody, izolované od "podstavy" (viz obrázek), na které je potenciál zadán spojitou funkcí $\phi = f(x)$ souřadnice x . To popisuje Laplaceova rovnice

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{pro } 0 < x < a; \quad 0 < y < b$$

pro kterou jsme zadali okrajové podmínky

$$\begin{aligned} \phi(0, y) = 0; \quad \phi(x, b) = 0; \quad \phi(a, y) = 0 \\ \phi(x, 0) = f(x), \quad \text{tak, aby } f(0) = 0 \quad \text{a} \quad f(a) = 0 \end{aligned}$$



3.1.1 Metoda separace proměnných

Řešení hledáme ve tvaru

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

Toto řešení dosadíme do Laplaceovy rovnice a zderivujeme

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0$$

Přenásobením dostaneme rovnici se separovanými proměnnými

$$-\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2}$$

Protože levá strana obsahuje pouze proměnné x , a pravá strana pouze y , může rovnice platit jen pokud budou obě strany rovné stejné reálné konstantě λ . Tím se problém převede na dvě obyčejné diferenciální rovnice pro funkce X a Y

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda X = 0; \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} + \lambda Y = 0$$

což jsou lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty a charakteristickými polynomy $p^2 + \lambda = 0$ a $p^2 - \lambda = 0$.

V závislosti na parametru λ platí

- je-li $\lambda > 0$, budou $p_{1,2} = \pm jk$ a $p_{1,2} = \pm k$, kde $k = \sqrt{\lambda}$ kořeny charakteristického polynomu a rovnice * mají řešení

$$X = A \cos kx + B \sin kx; \quad Y = C e^{ky} + D e^{-ky}$$

- je-li $\lambda < 0$ a označíme-li $k = \sqrt{|\lambda|}$, dostaneme obdobným způsobem řešení

$$X = A e^{kx} + B e^{-kx}; \quad Y = C \cos ky + D \sin ky$$

- je-li $\lambda = 0$, mají rovnice () řešení

$$X = Ax + B; \quad Y = Cy + D$$

A, B, C, D jsou ve všech třech případech konstanty.

3.1.2 Fourierova metoda

Často ale nelze všechny okrajové podmínky splnit jediným partikulárním řešením. V takovém případě lze použít Fourierovu metodu, která hledá řešení ve tvaru

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n$$

kde φ_n jsou partikulární řešení určená metodou separace proměnných. S využitím předchozích vztahů a rovnosti $Y = C e^{ky} + D e^{-ky} = E \cosh ky + F \sinh ky$, kde E a F jsou konstanty, očekáváme partikulární řešení ve tvaru

$$\varphi_n = X_n Y_n = (A_n \cos kx + B_n \sin kx)(E_n \cosh ky + F_n \sinh ky) \quad (3.1)$$

kde $k > 0, n = 1, 2, 3, \dots$. Integrační konstanty A_n, B_n, C_n , a D_n určíme ze zadaných okrajových podmínek. První z nich vyžaduje, aby bylo $X_n(0) = 0$, což je možné splnit jen pokud

$$A_n = 0 \quad \text{čili} \quad X_n = B_n \sin kx$$

Třetí z okrajových podmínek požaduje rovnost

$$X_n(a) = B_n \sin ka = 0$$

z čehož vyplývá, že musí platit

$$k = \frac{n\pi}{a}; \quad \text{pro} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Aplikováním okrajové podmínky 3.1 na tvar řešení 3.1 získáme

$$\varphi_n = (K_n \cosh ky + L_n \sinh kx) \sin kx$$

kde jsme použili substituci $K_n = B_n E_n$ a $L_n = B_n F_n$, a řešení přejde na tvar

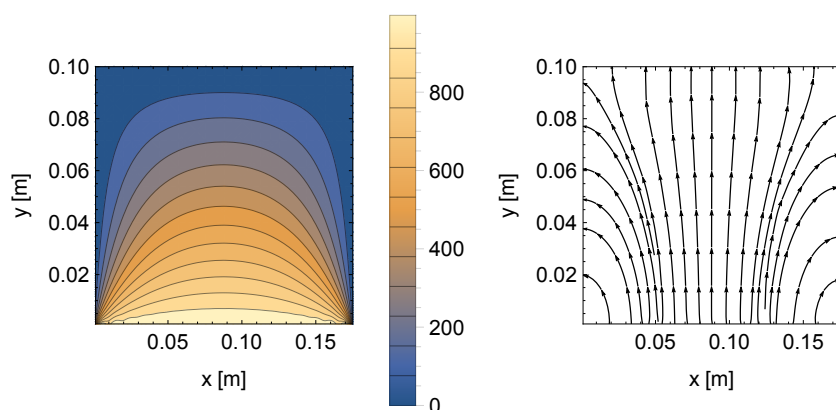
$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} (K_n \cosh ky + L_n \sinh kx) \sin kx$$

Abychom splnili druhou okrajovou podmínku, musí pro každé $x \in \langle 0, a \rangle$ platit

$$\varphi(x, b) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} (K_n \cosh ky + L_n \sinh kx) \sin kx = 0$$

což lze splnit, jen když

$$K_n \cosh kb + L_n \sinh kb = 0 \quad \Rightarrow \quad L_n = -K_n \frac{\cosh kb}{\sinh kb}$$



Obrázek 3.1: analytické řešení modelového příkladu

Podle poslední okrajové podmínky má být

$$\varphi(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \sin kx = f(x)$$

což je ovšem formálně stejný tvar jaký má Fourierova řada vzhledem k systému funkcí kx :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi}{a} x \Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin kx \quad \text{jelikož} \quad k = \frac{n\pi}{a}$$

kde

$$a_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi}{a} x \, dx$$

Tím jsme určili poslední konstantu

$$K_n = a$$

a také hledané řešení

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\cosh ky - \frac{\cosh kb}{\sinh kb} \sinh ky \right] \sin kx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sinh k(b-y)}{\sinh kb} \sin kx$$

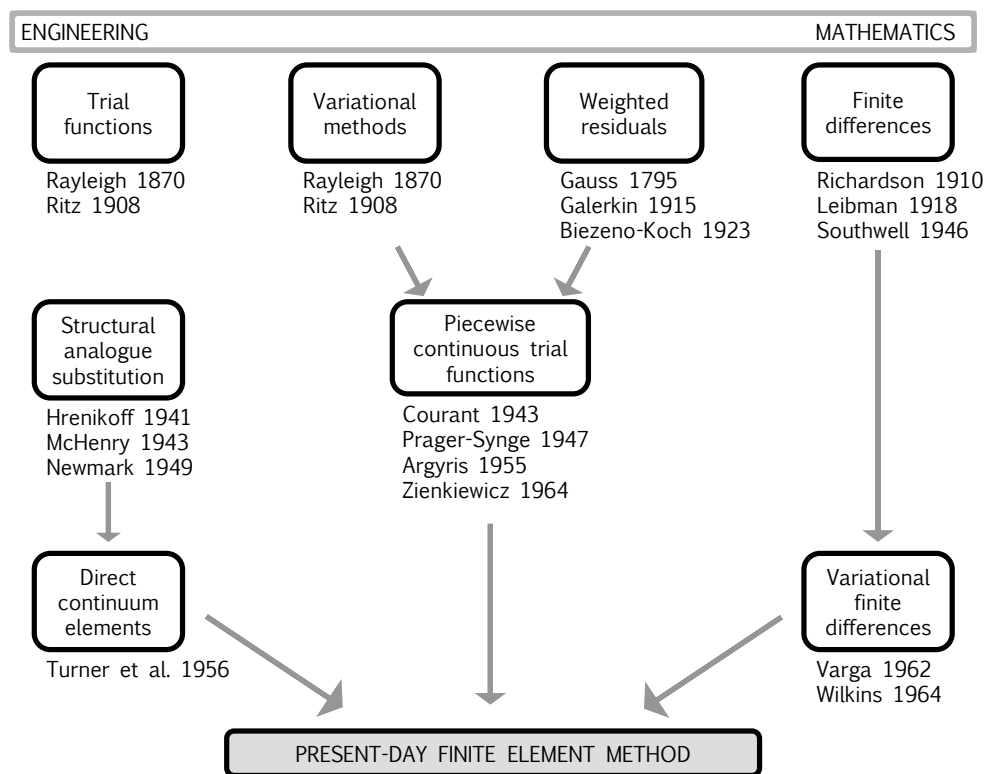
Ve speciální případě, je-li φ , je pro lichá n a pro sudá n , takže se řešení zredukuje na tvar

$$\varphi = \frac{4\varphi_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\sinh k(b-y)}{\sinh kb} \sin kx \quad \text{pro } n = 1, 3, 5, \dots$$

Tím jsme se zároveň mohli přesvědčit, že i takto "triviální" příklad má velmi komplikované analytické řešení, a jen o něco složitější uspořádání nemusí být řešitelné vůbec.

3.1.3 Metoda konečných prvků

Metoda konečných prvků patří v současné době k jedné z nejpoužívanějších metod pro řešení parciálních diferenciálních rovnic, a to nejen pro úlohy z oblasti elektromagnetismu, ale také, nebo především k simulaci problémů strukturální analýzy, přestupu tepla, proudění tekutin, akustického pole a dalších. Přestože se za její počátky považují 40. léta 20. století, respektive článek německého matematika Richarda Couranta "Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations" z roku 1943, a dále pak práce Waltera Ritze a Borise Galerkina, souvisí její vývoj s výsledky řady dalších vědců, jak je ukázáno v obrázku níže. Zájemce o hlubší pochopení odkazují na zajímavý článek [10], který se věnuje nejen historickému přehledu, ale vzhledem k ilustraci řady příkladů ukazuje i řadu zajímavých souvislostí provázejících vznik metody konečných prvků.



Obrázek 3.2: Historie aproximačních metod

Jak bylo zmíněno v kapitole o parciálních diferenciálních rovnicích, existují i alternativní metody jejich řešení, například metoda konečných diferencí, která bývá uváděna v řadě publikací věnujících se řešení elektromagnetických polí. Oproti ní se metoda konečných prvků může zdát jako zbytečně komplikovaná, na druhou stranu ale umožňuje řešení velkého spektra úloh, lépe aproximuje zadanou oblast a nabízí další možnosti modifikace. Vzhledem k tomu dnes existuje řada komerčních i otevřených programů, respektive knihoven, umožňujících řešit i poměrně náročné problémy.

Pro první přiblížení můžeme metodu konečných prvků rozdělit do několika kroků

1. diskretizace definiční oblasti
2. určení rozložení potenciálu uvnitř konečných prvků
3. stanovení energetického funkcionálu, respektive tzv. slabé formulace úlohy
4. minimalizace energetického funkcionálu
5. sestavení takzvané matice tuhosti
6. vyřešení dané soustavy rovnic

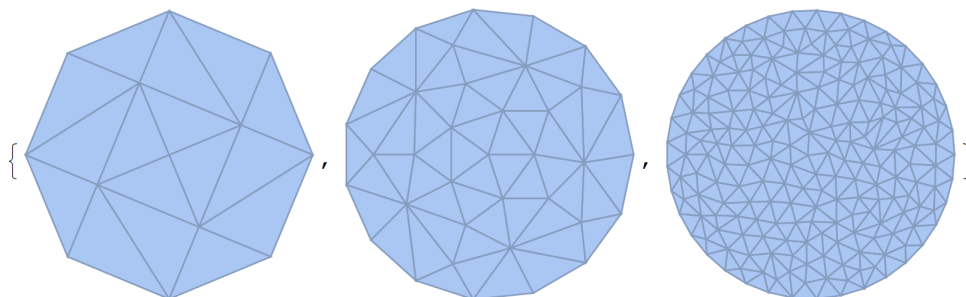
3.1.4 Diskretizace definiční oblasti

Dalším poměrně zásadním krokem je aproximace definiční oblasti Ω trojúhelníkovou sítí, neboli takzvaná triangulace. Triangulace musí být provedena tak, aby libovolné dva trojúhelníky buď: (a) byly disjunktní (to znamená neměly žádný společný bod), (b) měly společnou celou jednu stranu, nebo (c) měly společný jeden vrchol. Žádný z konečných prvků také nesmí protínat jednotlivá rozhraní. Rigoróznější matematický zápis zní:

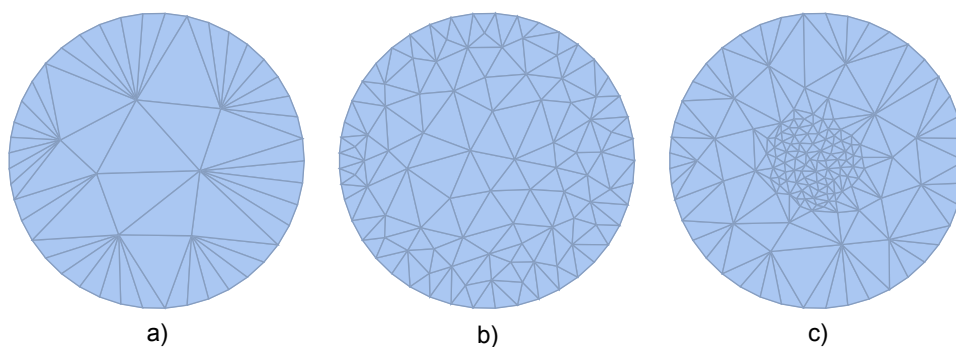
Triangulace oblasti. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je omezená polygonální oblast a nechť τ_h je triangulace oblasti Ω s následujícími vlastnostmi:*

1. *Triangulace τ_h je tvořena konečným počtem uzavřených trojúhelníků K .*
2. $\bar{\Omega}_h = \bigcup_{K \in \tau_h} K$
3. *Pro $K_i, K_j \in \tau_h, K_i \neq K_j$, je buď $K_i \cap K_j = \emptyset$ nebo je průnik $K_i \cap K_j$ tvořen společným vrcholem nebo $K_i \cap K_j$ je tvořen společnou stranou K_i a K_j .*

Splnění těchto podmínek je sice nutné, ale samo o sobě ještě není postačující pro získání dostatečně kvalitní sítě. Na obrázku níže vidíme tři korektní triangulace jedné oblasti, nicméně první z nich by nebyla pro praktické výpočty vhodná - její síť nejen, že není příliš hustá, ale také je vytvořena tak, že dlouhé strany trojúhelníků mají aproximovat funkci ve směru, v němž očekáváme velké změny jejího průběhu, a takto bychom se zcela zbytečně dopouštěli nepřesností. Třetí síť uvádím spíše jako ukázkou adaptivity, což je schopnost výpočetního programu pracovat s nesterjně hustou sítí, definovanou uživatelem nebo automaticky, na různých částech vyšetřované oblasti. Obecně je nutné síť zjemňovat především v oblasti ostrých hran a nespojitostí, proto bychom pravděpodobně jejím použitím uprostřed kruhové oblasti naše výpočty příliš nezpřesnili. Jako nejrozumnější kompromis se proto obecně zdá být volba střední sítě.



Obrázek 3.3: Aproximace kruhu různě jemnými diskretizačními sítěmi

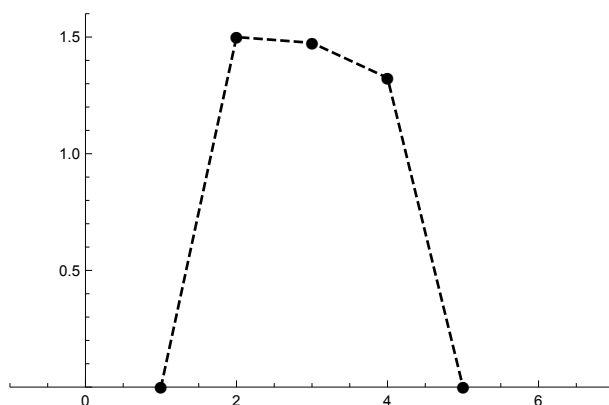


Obrázek 3.4: Nutné podmínky pro korektní triangulaci ještě nezajišťují dostatečně kvalitní síť

Přestože je problematika triangulace zajímavá, s její tvorbou už řadu let nepřichází běžný uživatel metody konečných prvků do styku, respektive je tato funkce integrovaná ve většině v současnosti používaných programů, především komerčních. V případě používání nekomerčních řešičů bývá občas nutnost dodat síť z externího zdroje. Mezi nejčastěji používané programy pro tvorbu diskretizační sítě patří Gmsh, Netgen nebo Tetgen.

3.1.5 Aproximace potenciálu uvnitř konečných prvků

Dalším krokem při realizaci metody konečných prvků je volba takzvané funkce tvaru. Tento myšlenkový koncept vysvětlím nejdříve na jednodimenzionálním příkladu - řekněme, že řešíme obyčejnou diferenciální rovnici na zadaném intervalu $x \in \langle 0; t \rangle$ tak, aby byly splněny okrajové podmínky $x(0) = x_0, x(t) = x_t$ a dále hledáme takovou funkci, která by toto řešení aproximovala. K tomu je možné použít tři alternativní postupy - metodu bodových kolokací, metodu vážených reziduálů a metodu nejmenších čtverců, ty se ale neobejdou bez znalosti exaktního řešení, nebo příslušného funkcionálu, které ale obecně znát nemusíme. Ani poté nebudeme schopni aproximovat skutečný průběh více než orientačně. Jedním z řešení je zvýšení řádu aproximačního polynomu, ještě efektivnější ale je rezignovat na hledání jednoho funkčního předpisu, a funkci rozdělit na více částí, na kterých mnohdy stačí hledat aproximaci v lineárním tvaru.



Obrázek 3.5: Lineární elementy v jedné dimenzi

...

Vyjdeme ze známého tvaru pro rovnici přímky

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

který upravíme tak, abychom osamostatnili y_1 a y_2 :

$$\frac{y}{x - x_1} - \frac{y_1}{x - x_1} = \frac{y_2}{x_2 - x_1} - \frac{y_1}{x_2 - x_1}$$

Po převedení na společného jmenovatele dostaneme:

$$\frac{y}{x - x_1} = \frac{y_1(x_2 - x)}{(x - x_1)(x_2 - x_1)} + \frac{y_2}{x_2 - x_1}$$

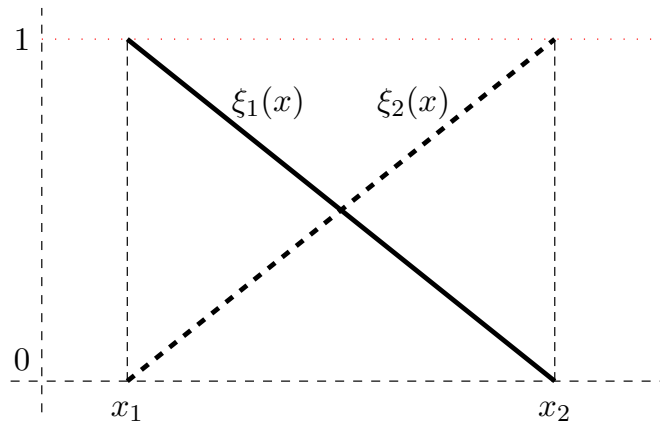
Po přenásobení

$$y = y_1 \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + y_2 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Kde funkce

$$\xi_1(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \quad a \quad \xi_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

jsou takzvané funkce tvaru.



Obrázek 3.6: Funkce tvaru jednodimenzionálního konečného prvku

Pro funkce tvaru jsou charakteristické tyto vlastnosti:

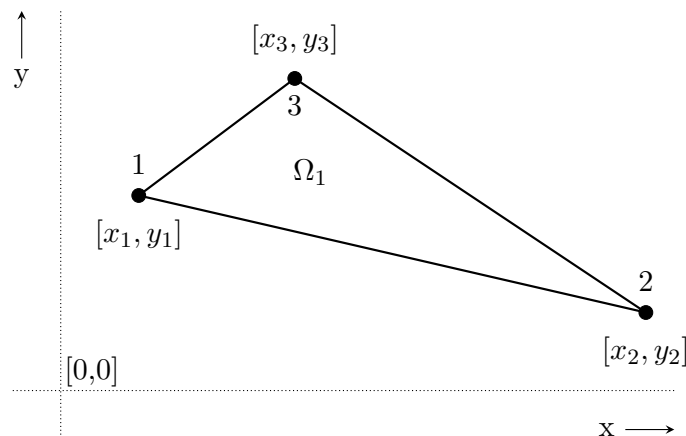
$$\xi_i(x_j) = \delta_{ij} \quad (\delta_{ij} \text{ značí Kroneckerovo delta})$$

$$\sum_{i=1}^2 \xi_i = 1 \quad \text{pro každé } x \in \langle x_1, x_2 \rangle$$

Funkci y nyní můžeme zapsat jako

$$y = y_1 \xi_1(x) + y_2 \xi_2(x)$$

a stejný předpis budou mít tvarové funkce i na dalších intervalech. Tento koncept aplikujeme i ve dvoudimenzionální oblasti, kde si jako referenční tvar zvolíme obecný trojúhelník o souřadnicích 1,2,3.



Obrázek 3.7: Obecný trojúhelník

Dále budeme předpokládat, že na dané oblasti je definovaná nějaká funkce $z = z(x, y)$, kterou budeme pro jednoduchost opět aproximovat lineárním polynomem. (Zde se již budu držet označení ϕ místo neznámé funkce z .)

$$\phi_p(x, y) = a + bx + cy \quad (3.2)$$

kde a, b, c jsou zatím neznámé konstanty, pro které platí rovnost

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

kde $\phi_1(x_1, y_1), \phi_2(x_2, y_2), \phi_3(x_3, y_3)$ jsou potenciály ve vrcholech trojúhelníka. Přenásobením dostaneme

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}$$

Výsledný tvar inverzní matice, která se v rovnici vyskytuje, je ovšem značně nepřehledný. Abychom mohli rozumně provádět další úpravy, pomůže si následujícím označením

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & (y_2 - y_3)x & (x_3 - x_2)y \\ x_3y_1 - x_1y_3 & (y_3 - y_1)x & (x_1 - x_3)y \\ x_1y_2 - x_2y_1 & (y_1 - y_2)x & (x_2 - x_1)y \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

kde Δ je obsah trojúhelníka

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} x_3 (y_1 - y_2) + x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1)$$

Díky tomu můžeme vypočtené konstanty dosadit do rovnice 3.2 a zapsat jako

$$\phi_p = \alpha_1(x, y)\phi_1 + \alpha_2(x, y)\phi_2 + \alpha_3(x, y)\phi_3 \quad (3.4)$$

Z rovnice nyní můžeme určit potenciál *kteřéhokoliv* bodu uvnitř trojúhelníka, což je hlavní rozdíl oproti diferenčním metodám, které počítají *pouze* s hodnotami v jednotlivých uzlech. Dále bychom se dosazením mohli přesvědčit, že pro funkce $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ platí:

- v uzlu i je $\alpha_i = 1$ a ve zbývajících dvou uzlech $\alpha_i = 0$
- v uzlu i je $\alpha_i = 1$ a ve zbývajících dvou uzlech $\alpha_i = 0$

– v uzlu i je $\alpha_3 = 1$ a ve zbývajících dvou uzlech $\alpha_3 = 0$

Dále platí, že v kterémkoliv bodu uvnitř trojúhelníku, respektive na jeho hranici bude:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$$

Při řešení třídimenzionálních úloh se pak nejběžněji počítá s konečnými prvky ve tvaru čtyřstěnů. V této práci jsem nicméně nucený omezit se pouze na dvě dimenze, proto se již jejich popisem nezabývám.

3.1.6 Rovnice pro popis pole

b) Pomocí slabé formulace

Používání funkcionalů s sebou ovšem přináší některé problémy. Předně, jejich odvození nebývá jednoduché, respektive v některých případech ani nemusí být známé. Další problém představují přechody mezi rozhraními způsobující nespojitost derivací, a neméně podstatným faktorem je také snadná algoritmizace jednotlivých úloh. Například obecný tvar rovnice pro popis skalárního potenciálu

$$-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) = f$$

se nevyskytuje pouze v elektrostatice, ale formálně stejný tvar má i rovnice stacionárního teplotního pole nebo napjaté membrány. Pro odvození pojmu slabé formulace si nejdříve vezmeme ten nejjednodušší problém - jednodimenzionální okrajovou úlohu, například na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, se zadanými hodnotami $\varphi(0)$ a $\varphi(1)$. Ten popisují rovnice

$$\mathbf{E}(x) = -\frac{d\varphi(x)}{dx}$$

$$\frac{d\mathbf{E}(x)}{dx} = 0$$

ze kterých po dosazení dostaneme

$$\frac{1}{dx} \left(-\frac{d\varphi(x)}{dx} \right) = 0$$

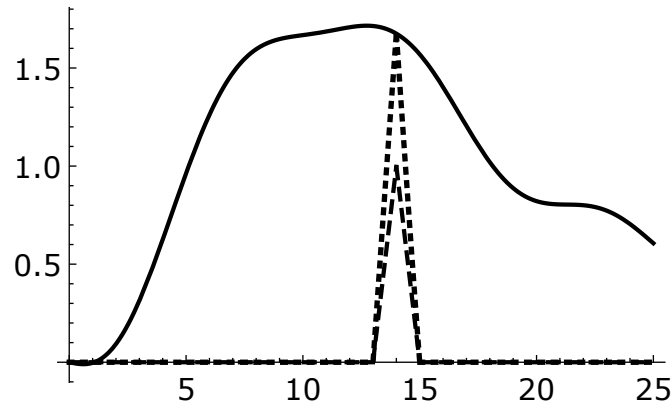
Základní motivace pro zavedení slabého řešení bylo převedení diferenciální rovnice na rovnici integrální, díky čemuž bychom se zbavili problémů s jejich vyhodnocováním. Nejjednodušší cestou se zdá být integrování rovnice na celém intervalu

$$\int_0^1 \frac{d\mathbf{E}(x)}{dx} dx = 0$$

Tím, že požadujeme pouze průměrnou hodnotu na celém intervalu, nikoliv v každém bodě jako v případě derivate, ovšem snižujeme své požadavky na funkci $\mathbf{E}(x)dx$, což musíme nějak vykompenzovat. Jedna z možností je využít součtové pravidlo a integrovat na menších intervalech, například

$$\int_0^{0.01} \frac{d\mathbf{E}(x)}{dx} dx = 0, \int_{0.01}^{0.02} \frac{d\mathbf{E}(x)}{dx} dx = 0, \dots, \int_{0.99}^1 \frac{d\mathbf{E}(x)}{dx} dx = 0$$

Pracovat s mnoha integrály není příliš výhodné, stejný krok však můžeme udělat alternativní metodou - budeme násobit rovnici takzvanými váhovými funkcemi v , což jsou funkce zvolené tak, aby jejich nenulové hodnoty ležely pouze v úzkém intervalu, čímž postupně získáme všechny části hledané funkce, jak je ukázáno na obrázku.



Obrázek 3.8: Plná čára - hledaný průběh funkce, tečkovaná čára - váhová funkce, přerušovaná čára - výsledný průběh

Tak jsme vlastně jinou cestou došli k stejnému požadavku, jaký jsme formulovali v části o funkcích tvaru. Nyní touto testovací funkcí přenásobíme rovnici pole a zintegrujeme na oblasti Ω . Pro náš okrajový problém to bude

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) \cdot v \, d|\Omega| = \int_{\Omega} f \cdot v \, d|\Omega|$$

Dále využijeme takzvanou Gaussovu větu, která dává do souvislosti tok vektorového pole skrze uzavřenou plochu s jeho vlastnostmi uvnitř této plochy.

Gaussova věta. *Nechť Ω je spojitá oblast v \mathbb{R}^3 a Γ její po částech spojitá hranice. Je-li vektorové pole \mathbf{p} spojitě diferencovatelné na $\Omega \cup \Gamma$, pak platí*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} p \, d\Omega = \oint_{\Gamma} p \cdot \mathbf{n}_0 \, dS$$

kde \mathbf{n}_0 označuje vnější normálový vektor hranice Γ

V našem případě bude

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(v \operatorname{grad} u) \, d|\Omega| = \oint_{\Gamma} v \operatorname{grad} u \cdot \mathbf{n}_0 \, d|\Gamma| = \oint_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} \, d|\Gamma| \quad (3.5)$$

Na vektorovou funkci potom $\mathbf{F} = \operatorname{grad} u$ aplikujeme identitu $\operatorname{div}(v)$, čímž dostaneme

$$\operatorname{div}(v \operatorname{grad} u) = v \Delta u + \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v$$

respektive

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(v \operatorname{grad} u) \, d|\Omega| = \int_{\Omega} (v \Delta u + \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v) \, d|\Omega| \quad (3.6)$$

Po dosazení 3.6 do 3.5 dostáváme takzvanou I. Greenovu formuli pro Laplaceův operátor Δ

$$\int_{\Omega} (v \Delta u + \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v) \, d|\Omega| = \oint_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} \, d|\Gamma|$$

Analogicky můžeme aplikovat identitu $\operatorname{div}(v\mathbf{F}) = v \operatorname{div} \mathbf{F} + \mathbf{F} \operatorname{grad} v$ na vektorovou funkci $\mathbf{F} = p \operatorname{grad} u$. Po integraci přes Ω s použitím Gaussovy věty dostaneme I. Greenovu formuli pro operátor $\operatorname{div}(p \operatorname{grad})$:

$$\int_{\Omega} Au \, d|\Omega| = a(u, v) - \oint_{\Gamma} p \frac{\partial u}{\partial n} v \, d|\Gamma|$$

kde jsme pro zjednodušení zavedli substituci $Au = -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u)$, respektive A jako diferenciální operátor $A = -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u)$ a $a(u, v) = \int_{\Omega} p \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, d|\Omega|$ je takzvaná bilineární forma. Protože $v = 0$ na Γ_1 , je

$$\int_{\Gamma} p \frac{\partial u}{\partial n} v \, d|\Gamma| = \int_{\Gamma_{II}} p \frac{\partial u}{\partial n} v \, d|\Gamma|.$$

Dosažením se dostáváme ke konečnému tvaru

$$a(u, v) - \oint_{\Gamma_{II}} p \frac{\partial u}{\partial n} v \, d|\Gamma| = \int_{\Omega} f v \, d|\Omega|$$

čili

$$a(u, v) = \int_{\Omega} f v \, d|\Omega| + \oint_{\Gamma_{II}} p \frac{\partial u}{\partial n} v \, d|\Gamma|$$

a) Pomocí energetického funkcionálu

Řešení našeho problému je také možné provést na základě takzvaného variačního principu: ze všech funkcí $\varphi(x, y)$, splňujících okrajové podmínky na hranici Γ oblasti Ω , existuje právě jedna funkce, pro kterou výraz

$$F_p = \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega_p} (\text{grad } \varphi_p)^2 \, dx dy \quad (3.7)$$

v případě elektrostatického pole, nabývá svého minima. Zatímco každá funkce přiřazuje každému číslu z jejího definičního oboru právě jednu hodnotu, funkcionál přiřazuje hodnotu každé funkci - je tedy zobecněním pojmu funkce. Výraz 3.7 jsme přitom získali ze vztahu pro energii elektrostatického pole

$$W_p = \frac{1}{2} \int_{\Omega_p} \varepsilon \mathbf{E}^2 \, dx dy$$

což je i funkcionál p-tého trojúhelníka

$$\mathcal{F}_p\{\varphi(x, y)\} = W_p$$

Pro lineární dielektrikum bude $\varepsilon = \text{konst.}$, takže použitím vztahu $\mathbf{E} = -\text{grad } \phi$ dostaneme funkcionál ve tvaru, v němž ho budeme dále minimalizovat.

$$\mathcal{F}_p = \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega_p} \mathbf{E}^2 \, dx dy = \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega_p} (\text{grad } \phi_p)^2 \, dx dy = \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega_p} \left[\left(\frac{\partial \varphi_p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_p}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

Spočítáme derivaci potenciálů pro funkci 3.4

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_p(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \varphi_{pi} + \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} \varphi_{pj} + \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} \varphi_{pk} \\ \frac{\partial \varphi_p(x, y)}{\partial y} &= \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \varphi_{pi} + \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} \varphi_{pj} + \frac{\partial \alpha_k}{\partial y} \varphi_{pk} \end{aligned}$$

kde jednotlivé členy $\alpha_{1,2,3}$ jsou dané rovnicí 3.3, a jejich derivace budou

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} &= \frac{1}{2\Delta} (y_2 - y_3); & \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} &= \frac{1}{2\Delta} (y_3 - y_1); & \frac{\partial \alpha_3}{\partial x} &= \frac{1}{2\Delta} (y_1 - y_2) \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} &= \frac{1}{2\Delta} (y_3 - y_2); & \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} &= \frac{1}{2\Delta} (y_1 - y_3); & \frac{\partial \alpha_3}{\partial y} &= \frac{1}{2\Delta} (y_2 - y_1) \end{aligned}$$

Pro další odvozování zavedeme ještě toto označení:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= x_2 y_3 - x_3 y_2; & \beta_2 &= x_3 y_1 - x_1 y_3; & \beta_3 &= x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ \gamma_1 &= y_2 - y_3; & \gamma_2 &= y_3 - y_1; & \gamma_3 &= y_1 - y_2 \\ \delta_1 &= x_3 - x_2; & \delta_2 &= x_1 - x_3; & \delta_3 &= x_2 - x_1 \end{aligned}$$

Po jehož dosazení získají rovnice 3.2 a 3.4 kompaktnější tvar

$$\varphi_p(x, y) = \frac{1}{2\Delta} = \sum_{i=1,2,3} (\beta_i - \gamma_i x - \delta_i y)$$

$$\frac{\partial \varphi_p(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta} \sum_{i=1,2,3} \gamma_i \varphi_i; \quad \frac{\partial \varphi_p(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{2\Delta} \sum_{i=1,2,3} \delta_i \varphi_i$$

Nyní zbývá zminimalizovat energetický funkcionál. Jak vyplývá z podstaty metody konečných prvků, bude se celkový funkcionál rovnat součtu funkcionálů v jednotlivých prvcích (trojúhelnících), jejichž celkový počet je M .

$$\mathcal{F}\{\varphi(x, y)\} = \sum_{p=1}^M \mathcal{F}_p$$

Funkcionál \mathcal{F}_p vyjádříme vzhledem k předešlým úpravám jako

$$\mathcal{F}_p = \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega_p} \left[\left(\sum_{i=1,2,3} \frac{1}{2\Delta} \gamma_i \varphi_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1,2,3} \frac{1}{2\Delta} \delta_i \varphi_i \right)^2 \right] dx dy =$$

$$= \frac{\varepsilon}{8\Delta} \left[(\gamma_1 \varphi_1 + \gamma_2 \varphi_2 + \gamma_3 \varphi_3)^2 + (\delta_1 \varphi_1 + \delta_2 \varphi_2 + \delta_3 \varphi_3)^2 \right]$$

Minimalizujeme ho derivováním podle jednotlivých potenciálů, a tyto derivace položíme rovné nule. V maticovém vyjádření to bude

$$\frac{\varepsilon}{4\Delta} \begin{pmatrix} \gamma_1 \gamma_1 + \delta_1 \delta_1 & \gamma_1 \gamma_2 + \delta_1 \delta_2 & \gamma_1 \gamma_3 + \delta_1 \delta_3 \\ \gamma_2 \gamma_1 + \delta_2 \delta_1 & \gamma_2 \gamma_2 + \delta_2 \delta_2 & \gamma_2 \gamma_3 + \delta_2 \delta_3 \\ \gamma_3 \gamma_1 + \delta_3 \delta_1 & \gamma_3 \gamma_2 + \delta_3 \delta_2 & \gamma_3 \gamma_3 + \delta_3 \delta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}_p}{\partial \varphi_1} \\ \frac{\partial \mathcal{F}_p}{\partial \varphi_2} \\ \frac{\partial \mathcal{F}_p}{\partial \varphi_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nebo zkráceně

$$G_p \varphi = 0$$

Tyto rovnice pro jednotlivé prvky nakonec seskupíme, a sestavíme matice ve tvaru

$$G \varphi = 0$$

kde $\varphi = [\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n]^T$ jsou potenciály v jednotlivých uzlech sítě, a G je symetrická matice o rozměru $n \times n$ odpovídající jednotlivým uzlům.

3.2 Techniky numerické integrace

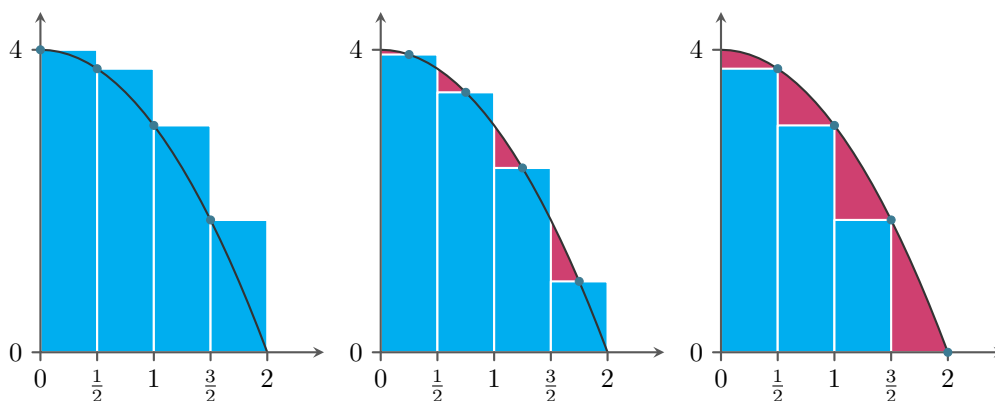
Dále je potřeba vyčíslit integrály, které se objevily v dříve odvozených výrazech. Protože úlohu algoritmizujeme pro co nejširší spektrum případů, je potřeba vypořádat se jednak se situací, ve které analytické řešení teoreticky nemusí existovat, a vzhledem k množství počítaných integrálů tento proces dostatečně zoptimalizovat. Řešení je v obou případech použitím vhodné metody numerické integrace.

Máme tedy nějaký obecný integrál

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx,$$

který je třeba spočítat. Cílem je aproximovat tento určitý integrál funkce $f(x)$ na intervalu (a,b) spočtením $f(x)$ v konečně mnoha bodech. Základní úvaha, ze které můžeme vyjít, je velmi podobná Riemannově definici určitého integrálu, v níž se určuje horní a dolní odhad pomocí aproximace funkce obdélníky, respektive, pokud bychom vzali jen jeho dolní odhad, mohli bychom řešení zapsat ve tvaru

$$\int_a^b f(x) dx = Q(f) + E(f)$$



Obrázek 3.9: Geometrická interpretace Riemannova integrálu

kde $Q(f)$ je aproximující výraz a $E(f)$ vzniklá chyba. To je skutečně jedna z možností numerické kvadratury, otázka, kterou se budu dále zabývat ovšem zní, jestli není možné zvolit nějaký "chytřejší" postup, například vzhledem k předpokládanému průběhu integrované funkce. Protože se vzniklou chybou zatím blíže zabývat nebudu (přesněji budu ji pouze považovat za dostatečně malou), omezím se pouze na vlastnosti $Q(f)$ jako aproximace integrálu. Ta bude mít, ve shodě s předešlou úvahou, následující tvar

$$\int_a^b g(y) dy \approx \sum_{k=0}^n A_{n,k} g(y_{n,k}) = A_1 g(y_{1,k}) + A_2 g(y_{2,k}) + \dots + A_n g(y_{n,k}) \quad (3.8)$$

kde symboly $A_{n,k}$, $y_{n,k}$ $k = 0, 1, \dots, n$ značí kvadraturní koeficienty, respektive jednotlivé, navzájem od sebe odlišné uzly. Pro další postup nechť je

$$y = cx + d, \quad c = \frac{b-a}{2}, \quad d = \frac{b+a}{2}$$

Po této transformaci budou integrační meze od -1 do 1, což zpřehlední další postup. Rovnice 3.8 bude:

$$\int_a^b g(y) dy = \int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n w_{n,k} f(x_{n,k}) \quad (3.9)$$

kde $f(x) = g(cx + d)$ a $w_{n,k} = A_{n,k}/c$ jsou takzvané váhové koeficienty. Pro stanovení vhodné váhové funkce a uzlů existuje celá řada možností, z nichž konkrétní variantu vybereme tak, abychom pro určitou funkci dostali přesné výsledky. Zde zmíním pouze takzvanou Gaussovou kvadraturu, protože ta se v praxi ukázala pro podobné úlohy jako velmi výhodná. Před popisem jednotlivých algoritmů uvedu definici pojmu stupně přesnosti, s nímž budu dále pracovat

Definice. *Stupněm přesnosti kvadraturního vzorce označujeme kladné číslo n , pro něž platí $E(P_i) = 0$ pro všechny polynomy $P_i(x)$ stupně $i \leq n$ a zároveň $E(P_{n+1}) \neq 0$ pro některé polynomy $P_{n+1}(x)$ stupně $n + 1$*

První způsob jak nalézt jednotlivé váhy a body bychom mohli nazvat hrubou silou, a jeho podstata je řešení soustavy rovnic, obecně nelineární. Jednotlivé kroky uvedu pro případ $n=2$, pro který bude platit

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$$

Máme tedy čtyři neznámé, pro jejichž získání tím pádem musíme definovat soustavu čtyř rovnic. V případě Gaussovy kvadratury volíme váhy i souřadnice tak, aby kvadratura dávala dobré výsledky pro polynomiální funkce. Budeme proto volit $f(x)$ tak, aby přesný výpočet platil pro $f(x) = x^0, x^1, x^2, x^3$. To vede na soustavu rovnic.

$$f(x) = 1 \implies \int_{-1}^1 1 dx = 2 = w_1 + w_2$$

$$f(x) = x \implies \int_{-1}^1 x dx = 0 = w_1 x_1 + w_2 x_2$$

$$f(x) = x^2 \implies \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3} = w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2$$

$$f(x) = x^3 \implies \int_{-1}^1 x^3 dx = 0 = w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3$$

Po jejím zadání do některého z matematických programů získáme dvě ekvivalentní řešení:

$$\left\{ \left\{ w_1 \rightarrow 1, w_2 \rightarrow 1, x_1 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}, x_2 \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} \right\}, \left\{ w_1 \rightarrow 1, w_2 \rightarrow 1, x_1 \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}}, x_2 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \right\} \right\}$$

Pro hledaný integrál tedy bude platit

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Pro vyšší stupně už bychom dostali příliš komplikované soustavy rovnic, takže je výhodnější použít alternativní postup, a sice dosazení do vzorce, který vzhledem k náročnému a pouze teoretickému odvození uvedu přímo.

$$w_{n,k} = \frac{2}{(1 - x_{n,k}^2)[L'_n(x_{n,k})]^2}$$

Kde $L'_n(x_{n,k})$ jsou takzvané Legendrovy polynomy. Pro ilustraci uvedu předpis a průběh prvních pěti stupňů.

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

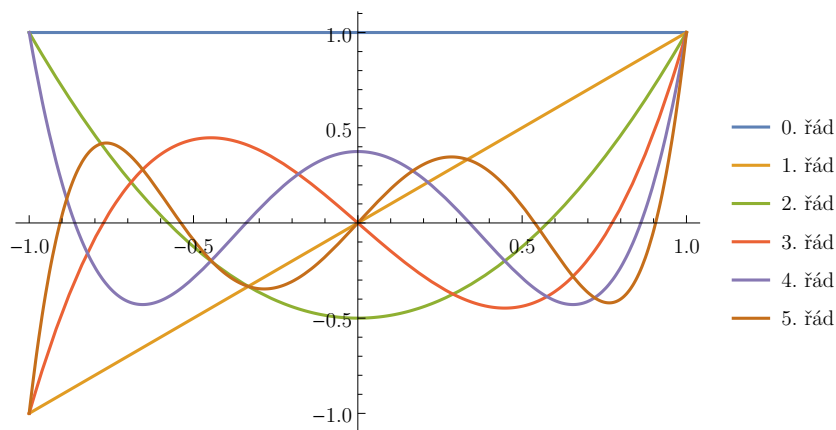
$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

$$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$$



Obrázek 3.10: První pět řádů Legendreových polynomů

Hodnoty dalších je opět nejsnáze získat z některého matematického programu, případně z následujícího integrálu.

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint (1 - 2tz + t^2)^{-1/2} t^{-n-1} dt$$

Nyní se ještě podíváme na přesnost Gaussovy kvadratury, kterou otestujeme například na funkci te^{2t} a intervalu $\langle 0, 4 \rangle$. Abychom měli srovnání, vypočítáme integrál, respektive jeho hodnotu, nejdříve analyticky

```
>> Integrate[t * E^(2t), {t, 0, 4}]
```

```
>> 1/4 (1 + 7e^8)
```

```
>> Integrate[t * E^(2t), {t, 0, 4}]/N
```

```
>> 5216.93
```

Nyní provedeme transformaci integračních mezí tak, že vyjádříme t a dt pomocí nové proměnné x :

$$t = cx + d = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2} = 2x + 2$$

$$t' = \frac{dt}{dx} \implies dt = 2 dx$$

a dosadíme do integrálu

$$I = \int_0^4 te^{2t} dt = \int_{-1}^1 (4x + 4) e^{4x+4} dx = \int_{-1}^1 f(x) dx$$

Můžeme se ještě přesvědčit, že i po provedené transformaci se oba integrály rovnají

```
>> Integrate[(4x + 4)E^(4x + 4), {x, -1, 1}] == Integrate[t * E^(2t), {t, 0, 4}]
```

>> True

Dále postupujeme podle původní rovnice 3.9, do které dosadíme podle tabulek 3.1, 3.2 a 3.3, takže dostaneme

$$I_2 = \int_{-1}^1 f(x) dx = f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(4 - \frac{4}{\sqrt{3}}\right) e^{4 - \frac{4}{\sqrt{3}}} + \left(4 + \frac{4}{\sqrt{3}}\right) e^{4 + \frac{4}{\sqrt{3}}}$$

$$= 9.168 + 3468.376 = 3477.544 \implies \varepsilon = \mathbf{33.34\%}$$

$$I_3 = \int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{5}{9}f\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)$$

$$= \frac{5}{9}\left(4 - 4\frac{\sqrt{15}}{5}\right)e^{4 - \frac{\sqrt{15}}{5}} + \frac{8}{9}(4)e^4 + \frac{5}{9}\left(4 + 4\frac{\sqrt{15}}{5}\right)e^{4 + \frac{\sqrt{15}}{5}}$$

$$\frac{5}{9}(2.221) + \frac{8}{9}(218.392) + \frac{5}{9}(8589.143) = 4967.107 \implies \varepsilon = \mathbf{4.79\%}$$

$$I_4 = \int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{18 - \sqrt{30}}{36} \left[f\left(-\frac{\sqrt{525 + 70\sqrt{30}}}{35}\right) + f\left(\frac{\sqrt{525 + 70\sqrt{30}}}{35}\right) \right]$$

$$+ \frac{18 + \sqrt{30}}{36} \left[f\left(-\frac{\sqrt{525 - 70\sqrt{30}}}{35}\right) + f\left(\frac{\sqrt{525 - 70\sqrt{30}}}{35}\right) \right] = 5197.544 \implies \varepsilon = \mathbf{0.37\%}$$

Pro dva, tři a čtyři body respektive. Vidíme tedy, že vzniklá relativní chyba rychle klesá, a již použití čtyř bodů dává výsledky, s nimiž se v praxi můžeme spokojit.

Tabulka 3.1: Parametry Gaussovy kvadratury, n=2

bod číslo	souřadnice x	váha
1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1

Tabulka 3.2: Parametry Gaussovy kvadratury, n=3

bod číslo	souřadnice x	váha
1	$-\frac{\sqrt{15}}{5}$	$\frac{5}{9}$
2	0	$\frac{8}{9}$
3	$\frac{\sqrt{15}}{5}$	$\frac{5}{9}$

3.2.1 Numerická integrace na trojúhelníku

Pro většinu úloh ovšem musíme integrovat ve dvou dimenzích. Zde uděláme stejnou úvahu, nicméně postup bude o něco složitější. Uvažujme trojúhelník Ω v rovině u,v a funkci $f(u,v)$ definovanou na tomto trojúhelníku, od níž předpokládáme spojitost na Ω_1 . Pro

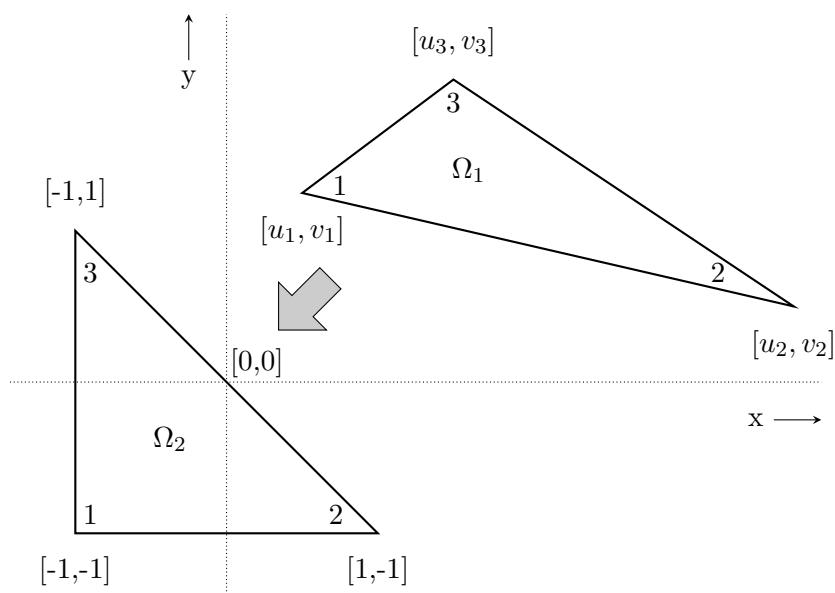
Tabulka 3.3: Parametry Gaussovy kvadratury, n=4

bod číslo	souřadnice x	váha
1	$-\frac{1}{35}\sqrt{525+70\sqrt{30}}$	$\frac{1}{36}(18-\sqrt{30})$
2	$-\frac{1}{35}\sqrt{525-70\sqrt{30}}$	$\frac{1}{36}(18+\sqrt{30})$
3	$\frac{1}{35}\sqrt{525-70\sqrt{30}}$	$\frac{1}{36}(18+\sqrt{30})$
4	$\frac{1}{35}\sqrt{525+70\sqrt{30}}$	$\frac{1}{36}(18-\sqrt{30})$

algoritmizovatelné vyčíslení integrálu

$$I = \int_{\Omega_1} f(u, v) dS$$

Využijeme transformaci. Její matematické vyjádření je



Obrázek 3.11: Transformace obecného trojúhelníku v rovině na referenční trojúhelník

$$u = a_1x + b_1y + c_1, \quad v = a_2x + b_2y + c_2$$

Tato transformace nám zjednoduší systém rovnic

$$u_1 = -a_1 - b_1 + c_1,$$

$$u_2 = a_1 - b_1 + c_1,$$

$$u_3 = -a_1 + b_1 + c_1,$$

$$v_1 = -a_2 - b_2 + c_2,$$

$$v_2 = a_2 - b_2 + c_2,$$

$$v_3 = -a_2 + b_2 + c_2$$

jejichž řešení je

$$a_1 = \frac{u_2 - u_1}{2}, \quad b_1 = \frac{u_3 - u_1}{2}, \quad c_1 = \frac{u_3 + u_2}{2}$$

$$a_2 = \frac{v_2 - v_1}{2}, \quad b_2 = \frac{v_3 - v_1}{2}, \quad c_2 = \frac{v_3 + v_2}{2}$$

Jakobián tohoto zobrazení je

$$J = \left| \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \right| = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \frac{1}{4} [(u_2 - u_1)(v_3 - v_1) - (u_3 - u_1)(v_2 - v_1)] = \frac{1}{4} \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \right| = \frac{S}{2}$$

Kde S je obsah původního trojúhelníka. Nyní můžeme psát

$$\begin{aligned} I_{\Omega_1} &= \int_{\Omega_1} f(u, v) \, dS = \int_{\Omega_2} g(x, y) J \, dS = J \int_{\Omega_2} g(x, y) \cdot dS = \frac{S}{2} \int_{\Omega_2} g(x, y) \cdot dS \\ &= \frac{S}{2} \int_{x=-1}^1 \int_{y=-1}^{-x} g(x, y) \, dx dy \end{aligned}$$

kde

$$g(x, y) = f(a_1 x + b_1 y + c_1, a_2 x + b_2 y + c_2)$$

Aproximaci Gaussovou kvadraturou budeme hledat ve stejném tvaru jako pro jednodimenzionální případ

$$\int_{x=-1}^1 \int_{y=-1}^{-x} g(x, y) \approx \sum_{i=1}^m g(x_i, y_i) w_i \quad (3.10)$$

zde ovšem m je počet integračních bodů, který už ovšem neodpovídá řádu polynomu, jako v předchozím případě. Odvození opět předvedu pro lineární polynom tvaru

$$g(x, y) = a + bx + cy$$

pro který dostaneme na levé straně rovnice 3.10

$$\int_{x=-1}^1 \int_{y=-1}^{-x} g(x, y) = \frac{2}{3}(3a - b - c)$$

a na pravé straně bude pouze jediný člen

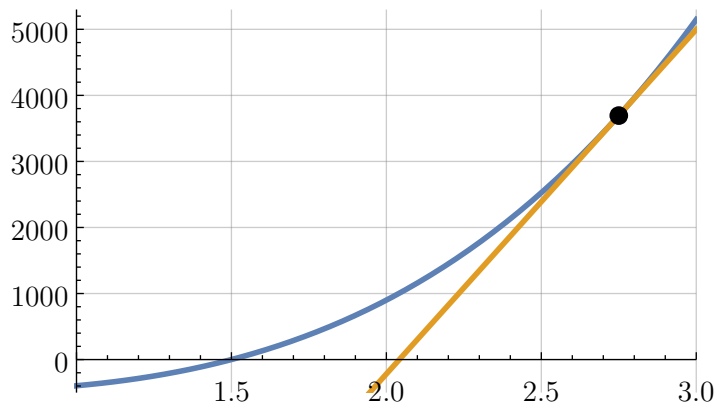
$$\sum_{i=1}^m g(x_i, y_i) w_i = w_1(a + bx_1 + cy_1)$$

proto můžeme z výsledné rovnice rovnou určit váhový koeficient a souřadnice bodů

$$\frac{2}{3}(3a - b - c) = w_1(a + bx_1 + cy_1) \implies w_1 = 2, x_1 = -\frac{1}{3}, y_1 = -\frac{1}{3}$$

3.3 Newton-Raphsonova metoda

Jako poslední krok je potřeba vyřešit danou soustavu rovnic. Ta ale bývá obecně nelineární, a její analytické řešení nemusí být možné. Jednou z řady numerických metod, s nimiž lze řešit soustavy rovnic, je Newton-Raphsonova metoda, označovaná také jako metoda tečen. Její základní myšlenku ilustruje následující obrázek:



Obrázek 3.12: Aproximace funkce její tečnou v daném bodě

Předpokládejme, že hledáme kořen funkce, která je na celém intervalu spojitě diferencovatelná. Vyjdeme z nějakého počátečního bodu, který si sami určíme, a v tomto bodě aproximujeme funkci její tečnou, která je daná rovnicí

$$y = f'(x)$$

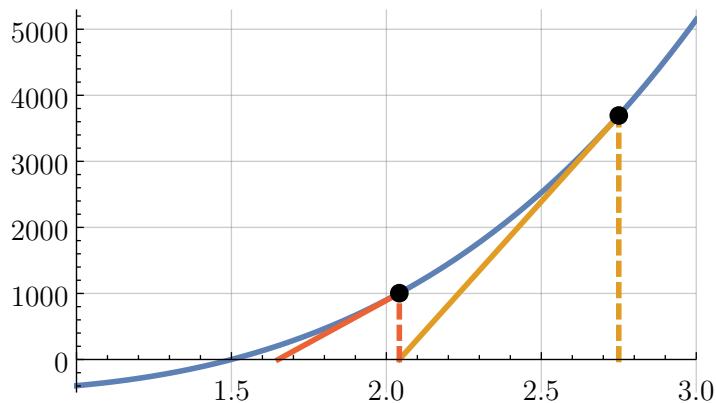
Kořen této rovnice najdeme poměrně jednoduše tak, že položíme $y = 0$

$$0 = f'(x_n)(x_{n+1}) - f'(x_n)(x_n) \quad (3.11)$$

V této rovnici osamostatníme člen x_{n+1}

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (3.12)$$

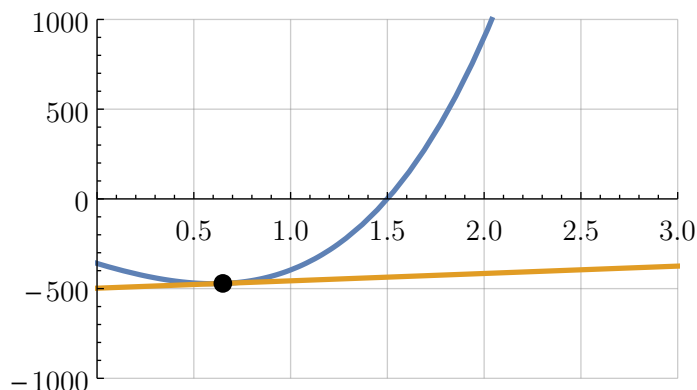
Další iteraci provedeme tak, že z této rovnice dosadíme do 3.13, přičemž index x_{n+1} nahradíme indexem x_n a hledáme nové $x_n + 1$. První dvě iterace jsou znázorněny na obrázku.



Obrázek 3.13: Ukázka prvních dvou iterací Newton-Raphsonovy metody

Cyklus opakujeme tak dlouho, dokud nenalezneme kořen s přesností větší než požadovaná tolerance, respektive dokud nedosáhneme maximálního počtu iterací. Nevýhodou

Newton-Raphsonovy metody je totiž fakt, že můžeme její konvergenci znemožnit nevýhodným výběrem počátečního bodu. Dobrý algoritmus by proto měl v takovém případě řešení přerušit, a zvolit jiný počáteční odhad.



Obrázek 3.14: Následek nevhodně zvoleného počátečního bodu

Pro soustavu dvou rovnic dvou proměnných

$$f \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{bmatrix}$$

se rovnice 3.12 rozšíří na tvar

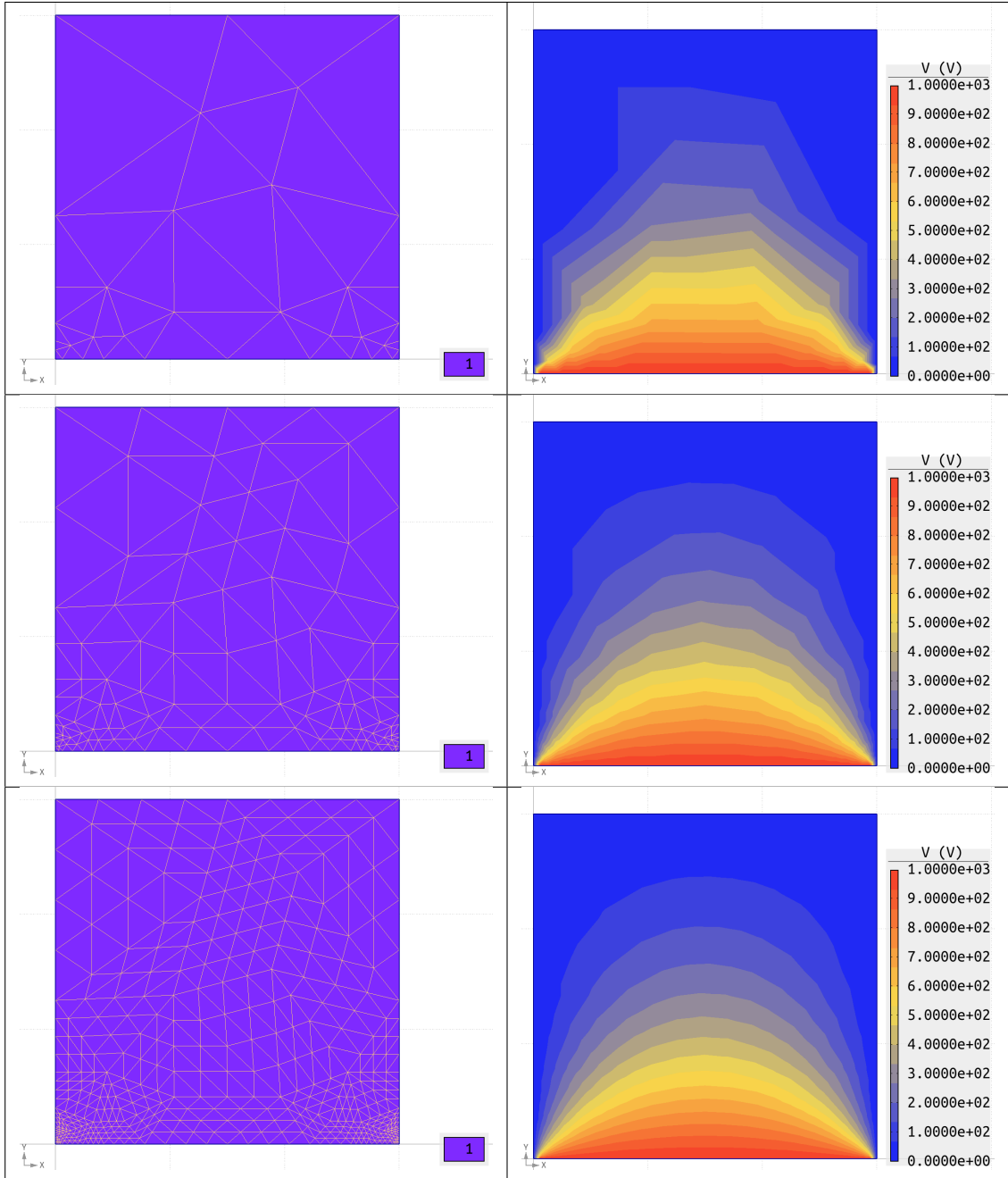
$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x_n, y_n)}^{-1} * f \left(\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \right)$$

který je snadné rozšířit pro libovolný počet proměnných x_1, x_2, \dots, x_n

$$\begin{bmatrix} x_{1(n+1)} \\ x_{2(n+1)} \\ \vdots \\ x_{n(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1(n)} \\ x_{2(n)} \\ \vdots \\ x_{n(n)} \end{bmatrix} - J^{-1} * f \left(\begin{bmatrix} x_{1(n)} \\ x_{2(n)} \\ \vdots \\ x_{n(n)} \end{bmatrix} \right)$$

J přitom označuje takzvanou Jakobiho matici.

Nyní se můžeme vrátit k modelové úloze řešené analyticky, a srovnat ji s výsledky metody konečných prvků v závislosti na různé jemnosti diskretizační sítě:



Kapitola 4

Realizace numerického modelu

Nyní se již konečně dostáváme k praktické části této práce. Zde bude jako první diskutovaná volba vhodného softwarového prostředí. Ještě předtím uvedeme, že řešení multifyzikálních úloh se v zásadě skládá ze tří částí:

- Preprocessing, který spočívá v definici geometrického uspořádání, materiálových vlastností a okrajových podmínek. Do části preprocessingu se řadí také vytvoření diskretizační sítě.
- Processing, což je vlastní řešení úlohy, tedy de facto sestavení příslušných matic a vyřešení soustavy rovnic
- Postprocessing, neboli interpretace získaných výsledků. Obvyklé bývá zobrazení veličin buď ve třech rozměrech, nebo v jednotlivých řezech, dále sledování průběhu jednotlivých veličin v daných bodech, křivkách nebo oblastech

Tyto tři části mohou, ale také nemusí být součástí jednoho celistvého programu. Pro uživatele bývá nicméně lepší první možnost.

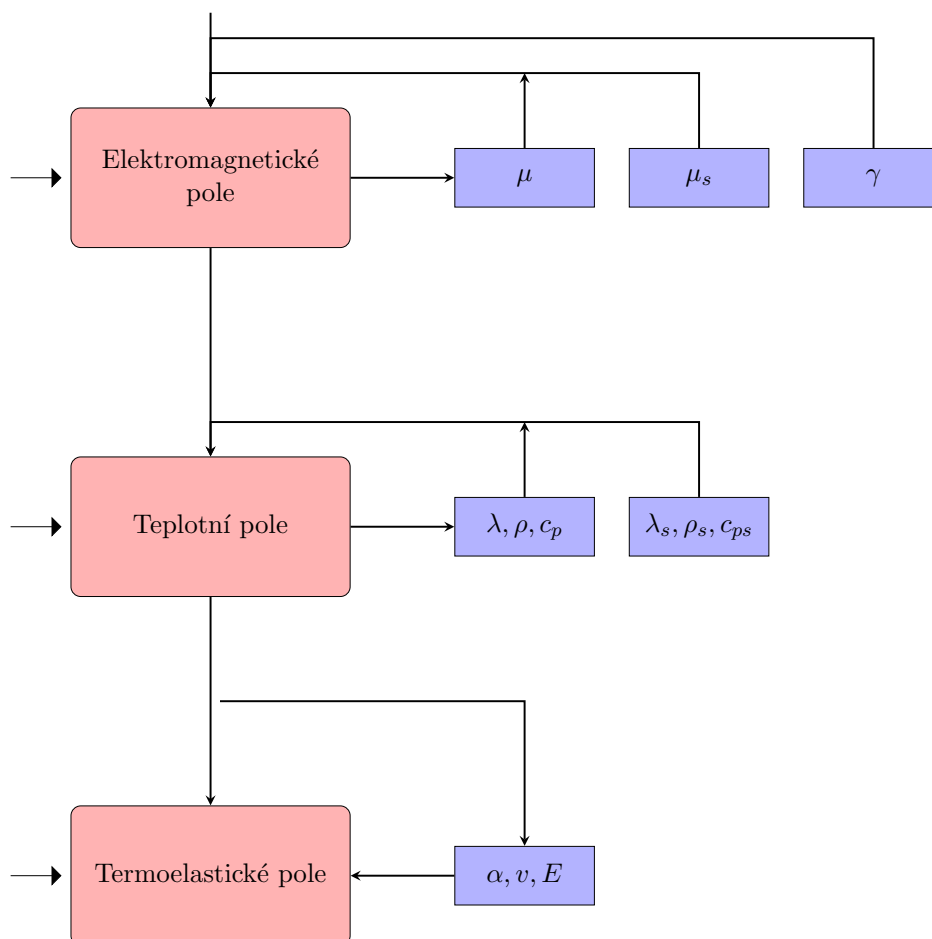
V současné době existuje celá řada programů pro řešení multifyzikálních úloh, v nichž nemusí být jednoduché se na první pohled orientovat. Stručný přehled nejpoužívanějších z nich proto uvádím v příloze. Pro účely této práce jsem si při výběru softwaru stanovil následující kritéria:

- Přestože komerčně používané programy obecně přinášejí vyšší komfort, měl by být použitý software nekomerční, ideálně s otevřeným kódem, čímž odpadnou veškeré problémy s licencemi a jeho používání; druhý důvod pro volbu nekomerčního softwaru je jeho potenciální přizpůsobení na míru dané aplikaci, což sice značně překračuje rámec diplomové práce, nicméně může být využitelné do budoucna
- Program musí být schopný řešit sdružené úlohy, pokud možno v silném sdružení
- Program by měl pokrýt všechny tři etapy řešení, tedy preprocessing, processing a postprocessing
- Program by měl mít vlastní grafické rozhraní, ideálně s možností využití skriptování
- Program by ideálně měl řešit třídímní úlohy
- Program by měl nabízet co nejširší možnosti exportu výsledků pro jejich další zpracování a publikaci
- Program by měl být co nejlépe zdokumentovaný a s dostatečnou základnou jeho uživatelů

Po zvážení všech těchto kritérií jsem se rozhodl pro program Agros2D, používaný a vyvíjený skupinou docenta Pavla Karbana na Zápočeské univerzitě v Plzni. Jak napovídá jeho název, program sice není schopný řešit třídímní úlohy ¹, a jeho další nevýhodou je pouze

¹toto rozšíření se nicméně v dohledné době plánuje

slabé sdružení jednotlivých polí. Při tomto typu sdružení nejsou rovnice pro jednotlivá pole řešeny současně, ale k ovlivnění dochází pouze nepřímo, viz jeho grafické znázornění, což vede k určitému zkreslení výsledků. V ostatních parametrech ale dosahuje velmi dobrých výsledků. Předně obsahuje velmi intuitivní editor pro tvorbu geometrie a zadávání ostatních parametrů, v oblasti processingu pak díky využití knihovny Deal.II a adaptivních metod dosahuje v některých případech dokonce výsledků, než řada komerčně používaných programů. V oblasti postprocessingu pak nabízí možnost vizualizace výsledků ve dvou i třídímním zobrazení, a kromě toho také zobrazení a export hodnot proměnných podle zadané křivky, či výpočet plošných nebo objemových integrálů.



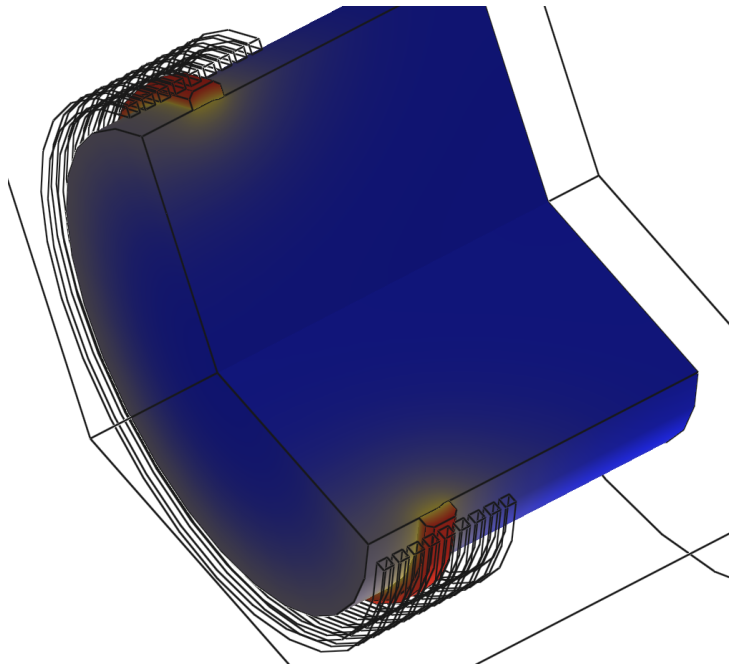
Obrázek 4.1: Grafické schéma řešení slabě sdružených polí

4.0.1 Geometrické uspořádání

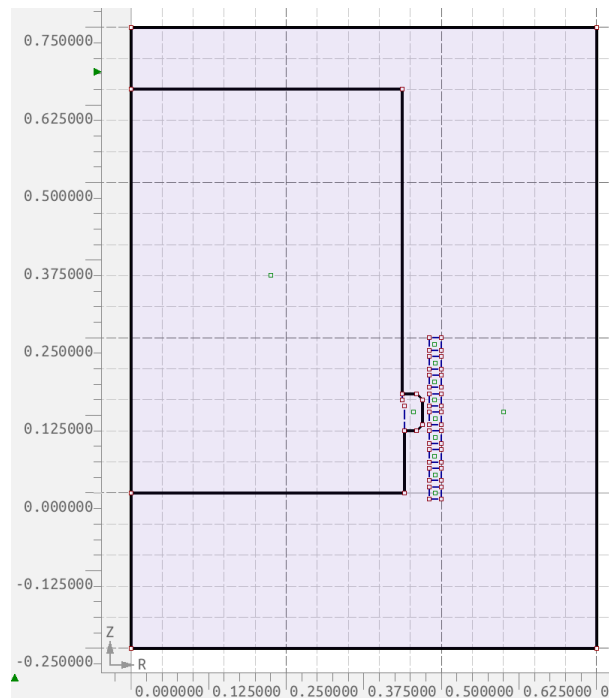
Celkové spořádání je asi nejlépe patrné z jeho třídímní vizualizace, viz obrázek. Zde je rotor, o celkové průměru 88 cm, zjednodušený na masivní válec, především modré barvy, na němž je nasazená 3 cm tlustá obruč, znázorněná červeno-žlutě. Okolo ní je devět vodičů o průměru 2 cm tvořících induktor, na obrázku reprezentovaný drátovým modelem. Celkové rozměry i tvar obruče byly oproti skutečně realizovanému ohřevu, z něhož mám k dispozici naměřená data, randomizované, nicméně jejich hodnoty jsem ponechal řádově stejné. Rozměry rotoru v podélném směru neodpovídají skutečnosti, ale jsou výsledkem kompromisu mezi dostatečnou homogenitou pole a maximální úsporností modelu.

4.0.2 Vstupní data a okrajové podmínky

Nyní uvedu okrajové podmínky a materiálové vztahy pro jednotlivá pole tak jak byla zadaná do modelu. Nevypisují přitom všechny parametry, které je možno zadat, ale pouze ty, u nichž



Obrázek 4.2: Prostorové znázornění celkového uspořádání

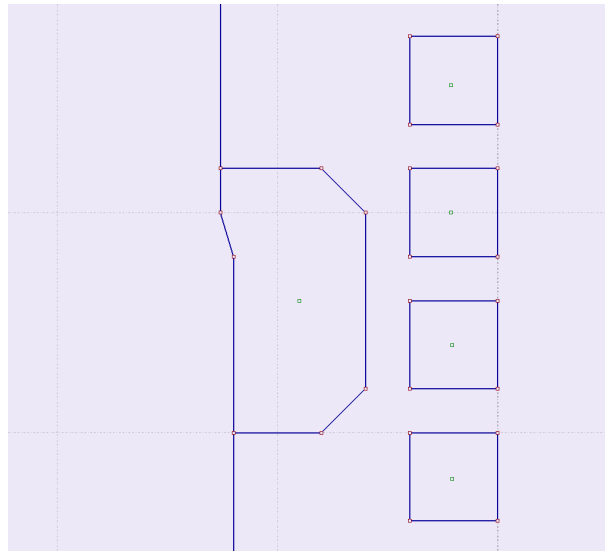


Obrázek 4.3: Celkový pohled na dvoudimenzionální uspořádání

byla změněna přednastavená hodnota, respektive ty, které uvažujeme.

Elektromagnetické pole

Pro magnetické pole vystačíme pouze s jednou okrajovou podmínkou, přepisující $A=0$ v dostatečné vzdálenosti od induktoru. Za tuto oblast volím vnější hranici podle obrázku 4.3. V oblasti materiálových vztahů hraje největší roli nelineární chování relativní permeability. Vzhledem k obecně neznámému složení rotoru a rotorové obruče, a také relativnímu nedostatku dat vycházím z průběhu naměřeného pro ocel 12040 podle ČSN, s tím, že skutečný průběh se mu bude více či méně přibližovat.

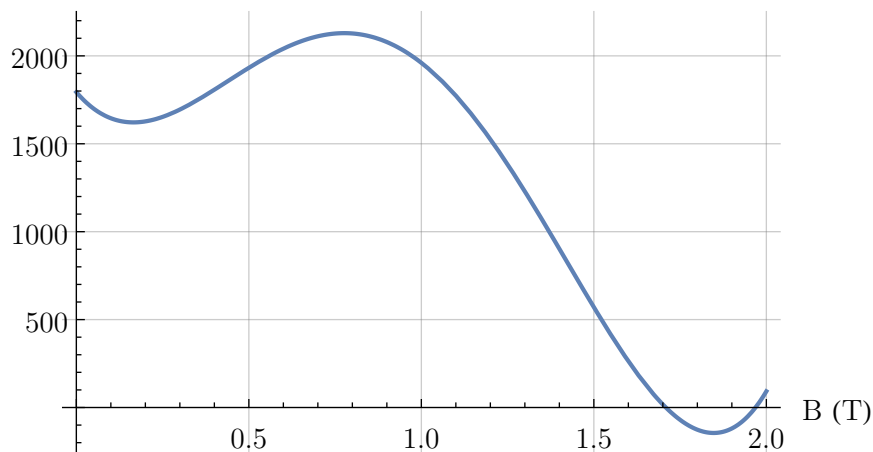


Obrázek 4.4: Pohled na detail obruče

Rotor

Předpokládáme, že rotor je tvořený ocelí 12040 podle ČSN. Kromě toho zadáme elektrickou vodivost $\gamma = 10^6 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$.

Relativní permeabilita (-)



Obrázek 4.5: Závislost relativní permeability rotorové oceli na magnetické indukci

Obruč

Pro obruč předpokládáme stejný průběh relativní permeability jako v případě rotoru. Elektrická vodivost γ by měla mít hodnotu okolo $5 \cdot 10^6 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$

Cívka

U cívky induktoru pouze předepisují celkový proud I , který jí bude protékat, a který bude mít velikost 2500 A a frekvenci 100 Hz po celou dobu, kterou vzhledem k předchozím zkušenostem stanovíme na 18 minut. Dále zadáme $\mu_r = 1$. Tím pádem se nestarám o ztráty, které by ve skutečném vodiči vznikly, a neuvažuji ani takzvaný skin efekt, jehož vlivem by proudová hustota byla o něco vyšší blíže povrchu, než v jeho středu. Nutno říci, že se tím nedopouštím žádné chyby - teplota vodiče totiž bývá udržovaná na víceméně konstantní hodnotě pomocí vodního chlazení, a výsledné magnetické pole bude stejné bez ohledu na rozložení proudové hustoty ve vodiči. Uvedená zjednodušení mají tedy vliv především na ušetření části výpočetního času.

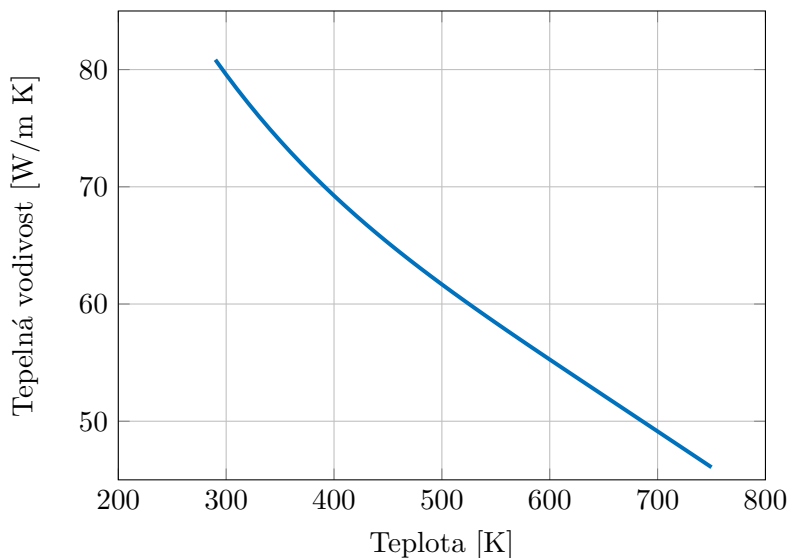
Vzduch

Okolní prostředí nemá na rozložení magnetického pole prakticky žádný vliv, je tedy pouze potřeba zadat relativní permeabilitu vzduchu $\mu_r = 1$

Teplotní pole

Pro teplotní pole zadáme následující okrajové podmínky - ve středu osy symetrie (viz obrázek 4.3) bude teplotní tok q nulový, a na hranici vyšetřované oblasti stanovíme pevnou teplotu okolí $T = 293$ K. Na okraji rotoru a obruče bude docházet k přestupu tepla do okolí vlivem konvekce a radiace, které charakterizujeme následujícími parametry: koeficient přestupu tepla $\alpha = 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ a emisivitu $\varepsilon = 0.2$. Jak se zmiňují v části o teplotním poli, je teoretické stanovení těchto parametrů prakticky nemožné. Jejich hodnoty proto vychází z praktických zkušeností. Naopak parametry jednotlivých materiálů, ať se jedná konstanty či funkční závislosti, lze získat poměrně snadno, například z Jahm databáze, proto je uvádím pouze přehledově:

Rotor



Obrázek 4.6: Závislost tepelné vodivosti rotoru na teplotě

Obruč Závislost hustoty a tepelné kapacity je stejná jako u rotoru, v případě tepelní vodivosti počítám s konstantní hodnotou $\lambda = 15 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

Cívka

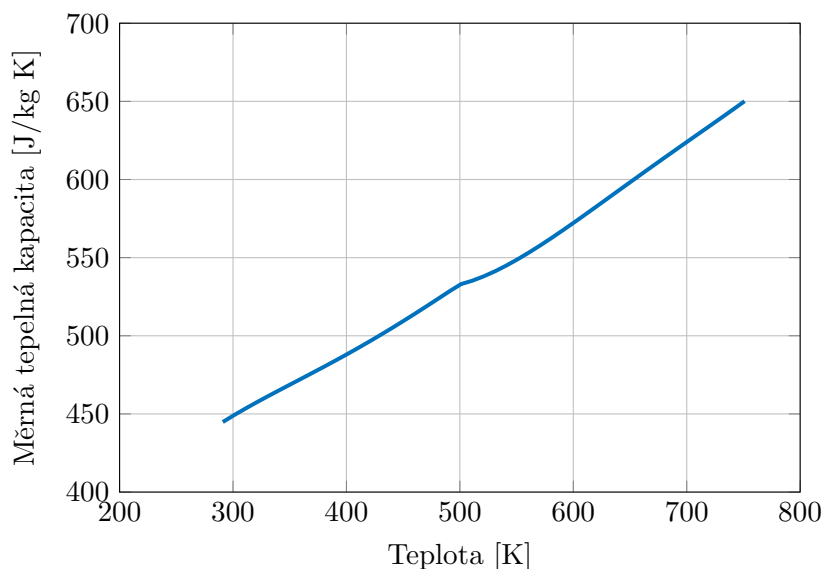
Tabulka 4.1: Materiálové parametry pro vodič

Tepelná vodivost	$\lambda = 400 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Hustota	$\rho = 7500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Tepelná kapacita	$c_p = 385 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

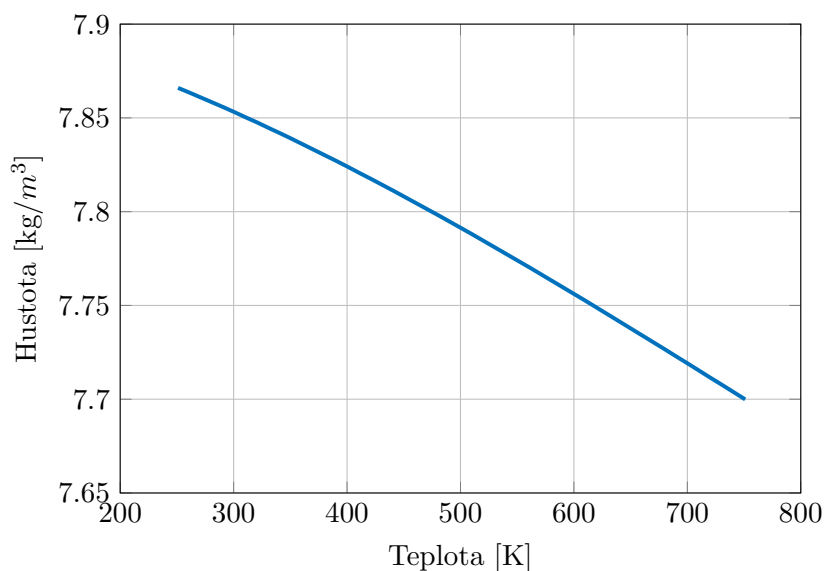
Vzduch

Termoelastické pole

Pro termoelastické pole stanovíme následující okrajové podmínky - vzhledem k tomu, střed symetrie (opět viz obrázek 4.3) musí zůstat nehybný, zvolíme zde podmínku typu fixace-fixace,



Obrázek 4.7: Závislost tepelné kapacity rotoru na teplotě



Obrázek 4.8: Závislost hustoty rotoru na teplotě

Tabulka 4.2: Materiálové parametry pro vzduch

Tepelná vodivost	$\lambda = 0.02587 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Hustota	$\rho = 1.275 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Tepelná kapacita	$c_p = 1.005 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

tedy pevné umístění vzhledem k oběma osám. Naopak na obvodu obruče a rotoru očekáváme dilataci, zvolíme proto podmínku typu volná-volná (můžeme také zvolit typ volná-fixace a neuvažovat prodloužení, k němuž by mohlo dojít v podélném směru). Materiálové vlastnosti rotoru a obruče opět nalezneme například v Jahm databázi.

Rotor
Obruč

Tabulka 4.3: Materiálové parametry těleso rotoru

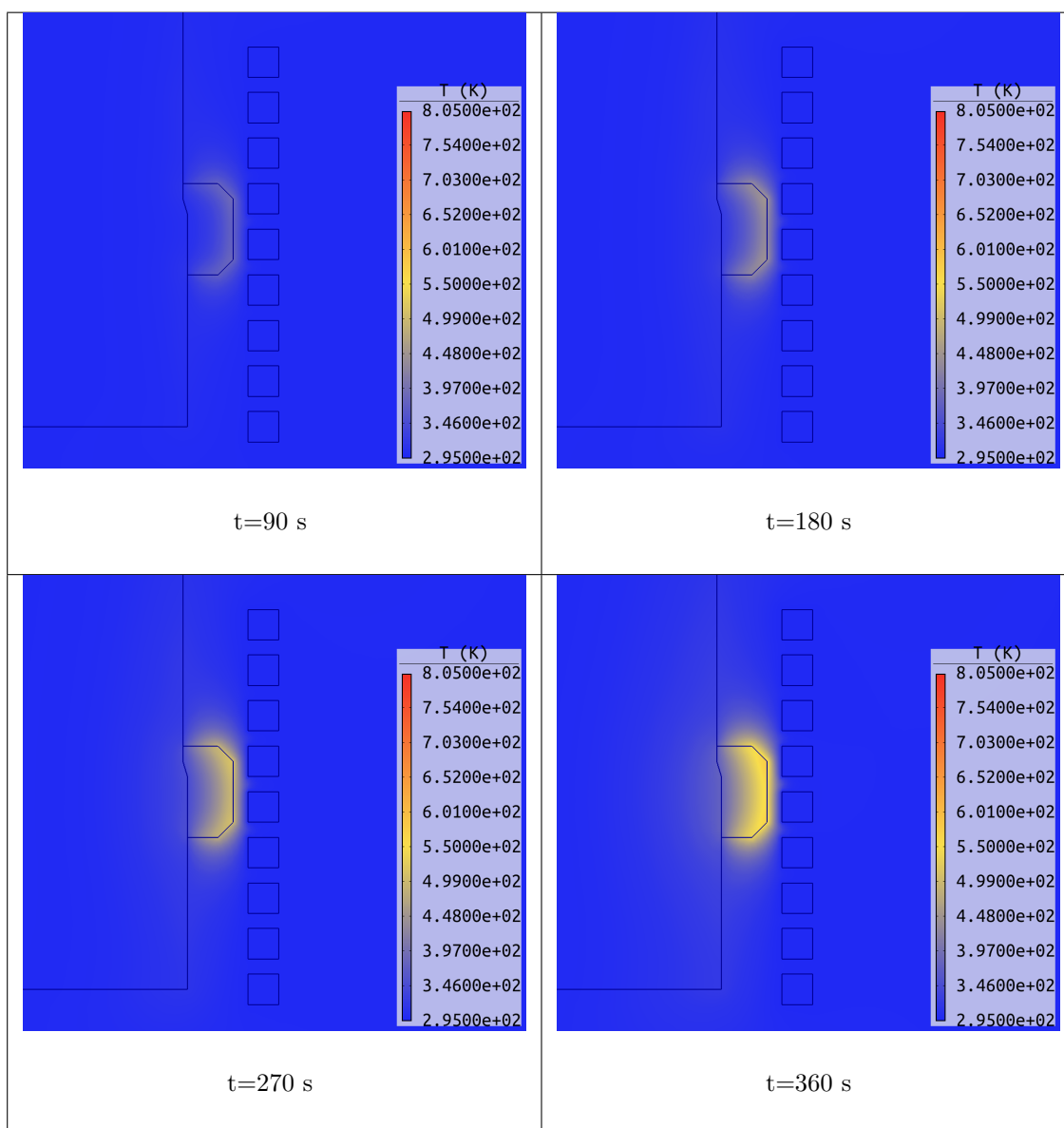
Youngův modul	$E = 210 \text{ GPa}$
Poissonovo číslo	$\nu = 0.3$
Koeficient teplotní roztažnosti	$\alpha = 1 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$
Referenční teplota	$T_{ref} = 293 \text{ K}$

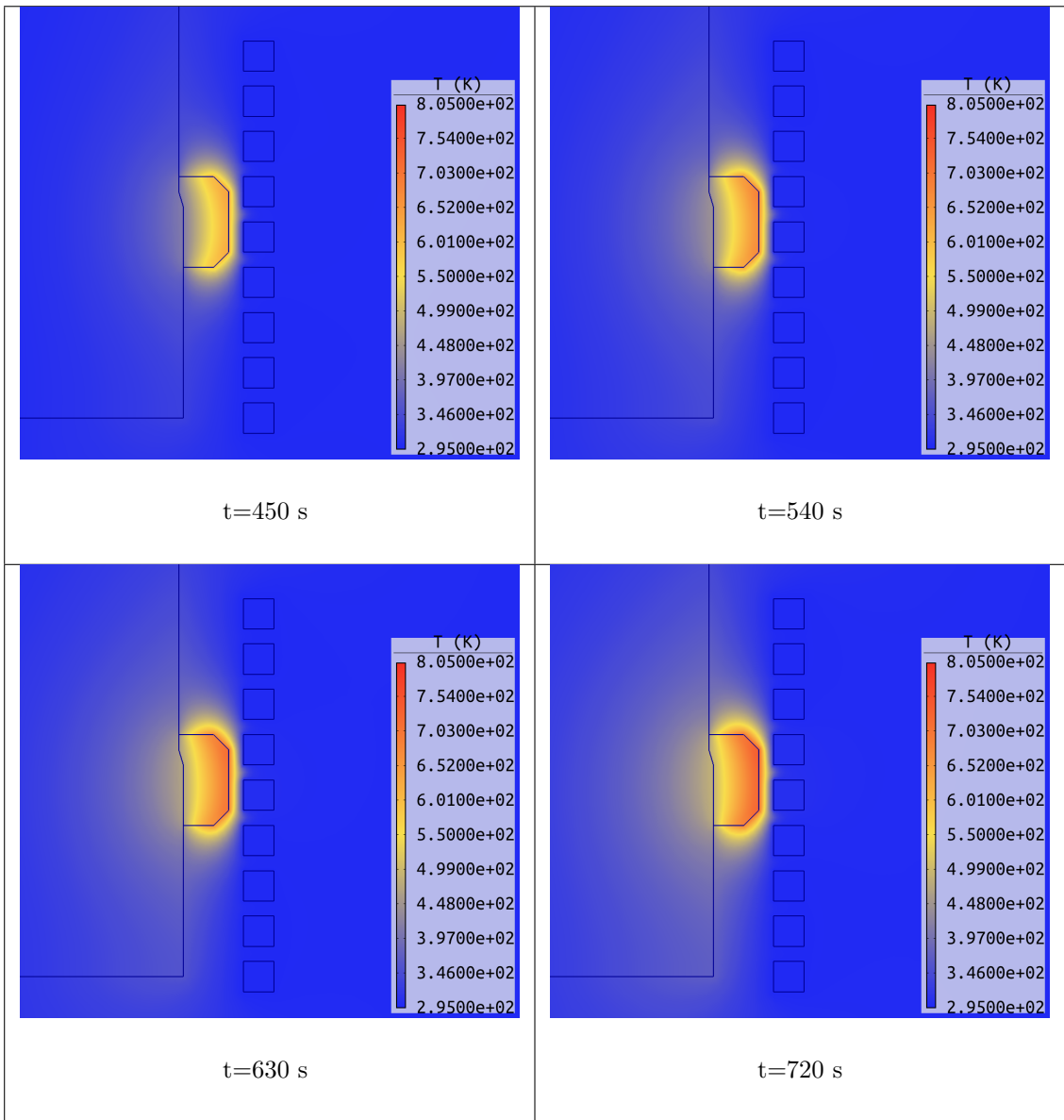
Tabulka 4.4: Materiálové parametry rotorové obruče

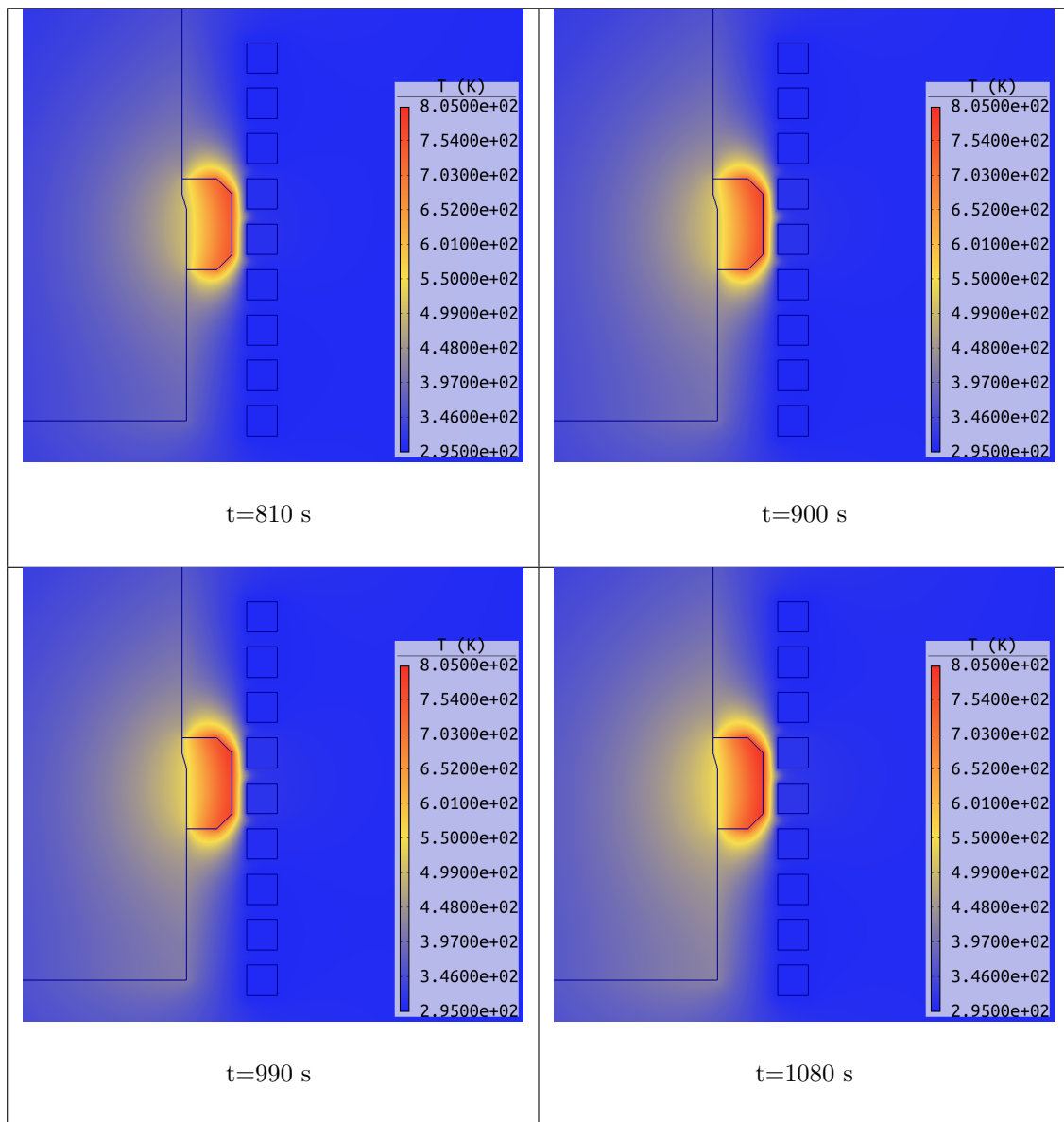
Youngův modul	$E = 210 \text{ GPa}$
Poissonovo číslo	$\nu = 0.3$
Koeficient teplotní roztažnosti	$\alpha = 1.95 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$
Referenční teplota	$T_{ref} = 293 \text{ K}$

4.0.3 Získané výsledky

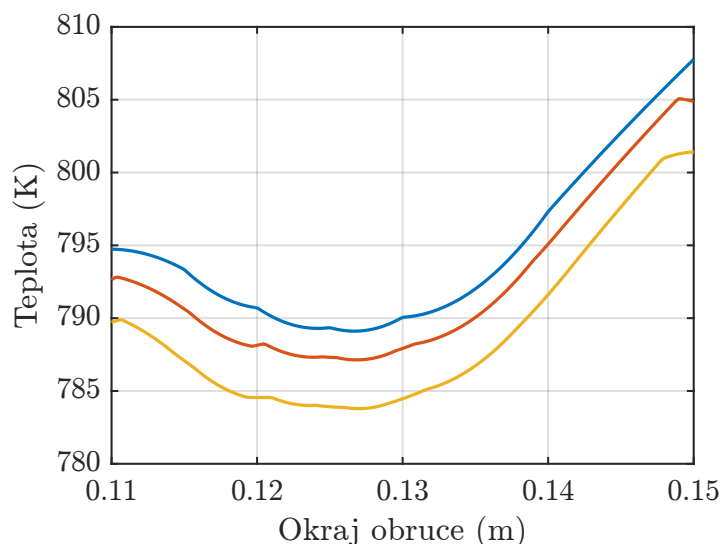
Nyní se podíváme na získané výsledky. Hlavní parametr, podle kterého můžeme ověřit věrohodnost modelu je rozložení teploty v obruči v závislosti na čase. Ta bude podle očekávání postupně narůstat, až dosáhne teploty okolo 800 K, při níž se obruč dostatečně roztáhne.





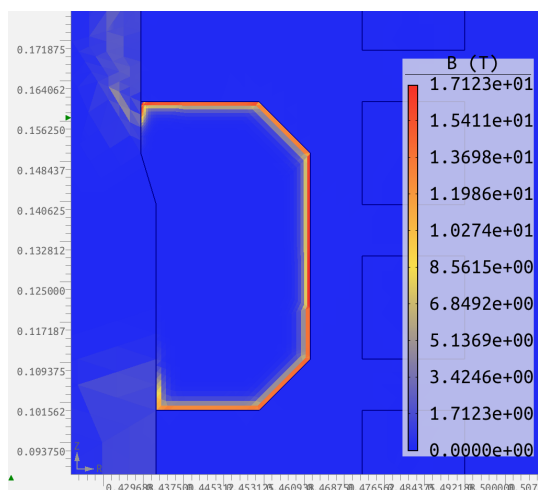


Pro poslední krok ohřevu se ještě podívejme na průběh teploty podél povrchu obruče, respektive 1 a 2 mm pod povrchem, znázorněné na obrázku 4.10. Osa x na příslušném grafu proto představuje tyto úsečky, pro něž jsme nechali průběhy vykreslit, a sice ve směru stejný s osou z zdola nahoru.

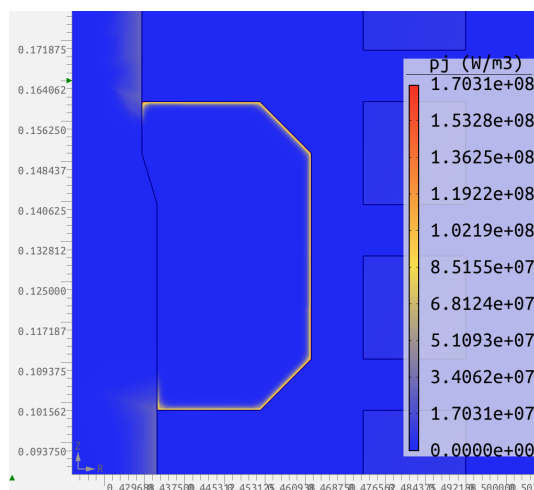


Obrázek 4.9: Průběh teplotního profilu v jednotlivých hloubkách

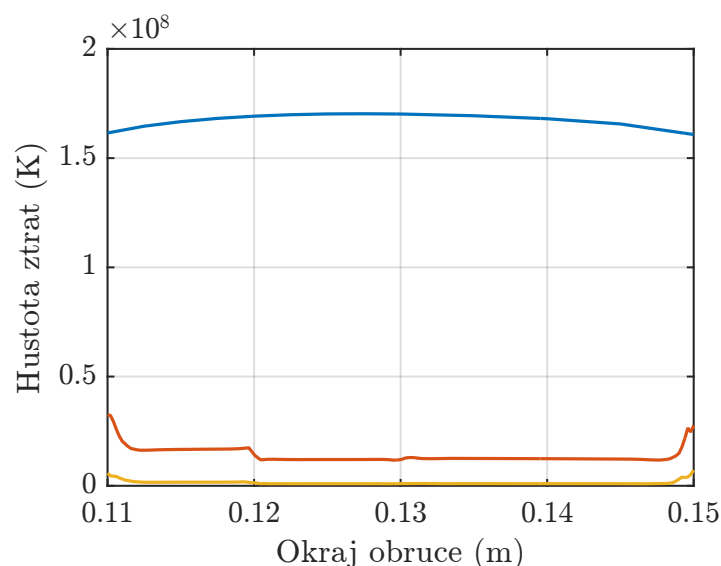
V oblasti elektromagnetického pole nás bude zajímat průběh magnetické indukce a měrných ztrát. Jejich průběhy byly spočítány pro začátek ohřevu v upraveném modelu, z něhož bylo odstraněné teplotní a termoelastické pole, a oblast obruče maximálně zjemněná. Ani tak se bohužel nepodařilo získat dostatečně jemný průběh, jelikož řešení pro vyšší stupně nekonvergovalo. Výsledky, které se podařilo získat nicméně odpovídají očekávání. V případě měrných ztrát ještě uvádím jejich průběh na povrchu obruče, respektive v hloubce 1 a 2 mm pod ním, ve stejném smyslu jako byly uvedeny průběhy teplot.



”Průběh magnetické indukce”

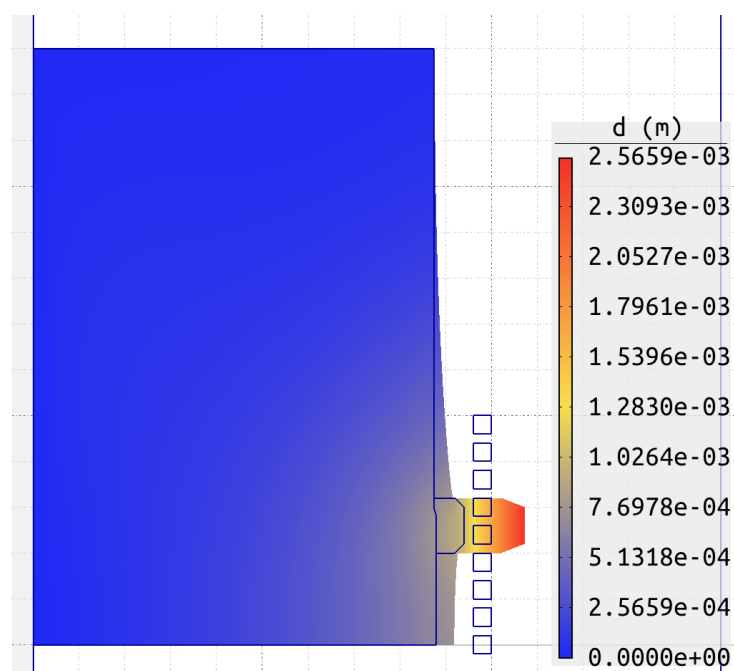


”Průběh hustoty ztrát”



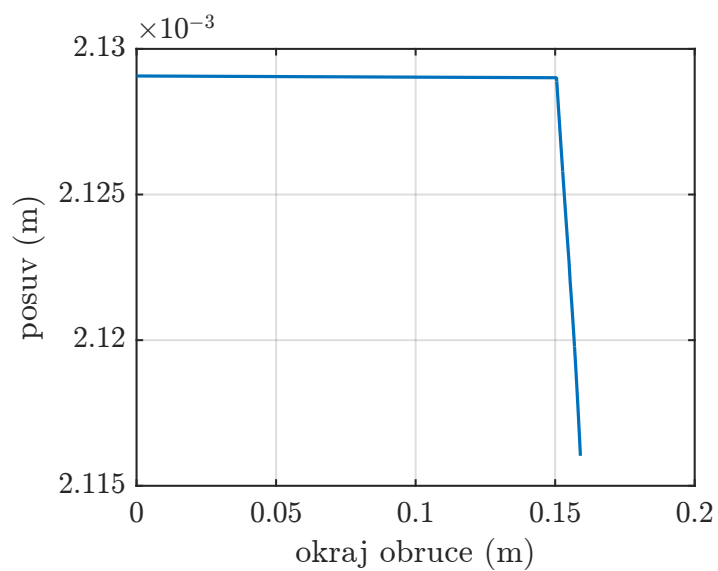
Obrázek 4.10: Průběh hustoty ztrát v jednotlivých hloubkách

Jako poslední nás budou zajímat průběhy veličin termoelastického pole. Ten nejlépe ilustruje obrázek 4.12, zobrazující intenzitu a celkový směr posuvu. Výsledný tvar rotoru a obruče nicméně není ve správném měřítku, proto je nutné brát toto zobrazení jen jako ilustrační.



Obrázek 4.11: Schematické znázornění dilatované obruče

Přesné hodnoty roztažení obruče vzhledem k rotoru získáme vykreslením průběhu posuvu v malé vzdálenosti kolmo od kritického místa (což je oblast obruče, která musí po svém roztažení překonat výstupek) nejdříve ve směru od, a poté do středu symetrie. Jejich odečtením získáme hledaný průběh, který uvádím na obrázku. Vidíme, že hodnoty se pohybují v oblasti vyšší než 2 mm, lze tedy na závěr prohlásit, že bychom měli být schopní obruč i s určitou rezervou sundat.



Obrázek 4.12: Vypočítaný průběh roztažení obruče v kritickém místě

Kapitola 5

Závěr

Předkládaná práce se zabývala modelováním indukčního ohřevu pro manipulaci s rotorovými obručemi. V úvodu práce byla uvedena motivace vedoucí k výběru této konkrétní úlohy a cíl, kterým bylo vytvoření numerického modelu tohoto procesu, využitelného k predikci průběhu ohřívání konkrétních obručí. Ve druhé kapitole byly odvozeny základní vztahy pro spojitě modely elektromagnetického, teplotního a termoelastického pole. Dále jsem se stručně zmínil o možných metodách řešení těchto rovnic, a o některých výhodách použití metody konečných prvků. Její základní principy, spolu s přidruženými tématy jako numerická integrace nebo řešení nelineární soustavy rovnic jsem popsal v následující kapitole. V poslední části jsem potom nastínil základní princip slabého sdružení, a diskutoval volbu vhodného softwarového prostředí. V závěru práce jsem popsal geometrické uspořádání úlohy, materiálové vlastnosti a okrajové podmínky, a prezentoval vybrané výsledky řešení pro jednotlivá pole.

V praktické části bylo ověřeno, že se rotorová obruč při napájení induktoru proudem o velikosti 2500 A a frekvenci 100 Hz po dobu 18 minut ohřeje až na teplotu okolo 800 K, což s určitou rezervou způsobí její dilataci o požadovanou délku.

V průběhu psaní práce také postupně vyvstala řada problémů, v jejichž řešení by bylo dobré dále pokračovat. Především jde o další verifikaci modelu, kterou bude možné provést po dodání co nejpřesnějších parametrů u již realizovaných ohřevů a následné porovnání teoretických výsledků s praktickými. Další poměrně rozsáhlou oblastí by mohlo být vytvoření určitého rozhraní, pomocí něhož by bylo možné snadno měnit geometrické uspořádání, spolu s automatizovaným zpracováním některých výsledků, aby mohli výpočet provádět i uživatelé zvyklí pracovat s jinými výpočetními programy. V neposlední řadě se pak nabízí pokusit se o optimalizaci celého procesu.

Použitá literatura a zdroje

- [1] POLÁK, Josef. *Variační principy a metody teorie elektromagnetického pole*. Praha: Academia, 1988
- [2] MAYER, Daniel. *Aplikovaný elektromagnetismus: úvod do makroskopické teorie elektromagnetického pole pro elektrotechnické inženýry*. České Budějovice: Nakladatelství Kopp, 2012. ISBN 978-80-7232-436-1.
- [3] DOLEŽEL, Ivo, Pavel KARBAN a Pavel ŠOLÍN. *Integral methods in low-frequency electromagnetics*. Hoboken: Wiley, c2009. ISBN 978-0-470-19550-5.
- [4] SVÁČEK, Petr a Miloslav FEISTAUER. *Metoda konečných prvků*. Praha: Nakladatelství ČVUT, 2006. ISBN 80-01-03522-0.
- [5] LANGER, Emil. *Teorie indukčního a dielektrického tepla*. 2. přep. a dop. vyd. Praha: Academia, 1979, 319 s.
- [6] RADA, Josef. *Elektrotepelná technika*. 1. vyd. Praha: SNTL, 1985, 344 s. ISBN 80-707-8874-7
- [7] ZIENKIEWICZ, O. C., Robert L. TAYLOR a J. Z. ZHU. *The finite element method: its basis and fundamentals*. 6th ed. Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005. ISBN 0-7506-6320-0.
- [8] KARBAN, P., MACH, F., KŮS, P., PÁNEK, D., DOLEŽEL, I. Numerical solution of coupled problems using code Agros2D. *COMPUTING*, 2013, roč. 95, č. 1, s. 381-408., ISSN: 0010-485X
- [9] KOTLAN, V., ULRYCH, B., DOLEŽEL, I. Induction Shrink Fits for Connecting Disks and Shafts. *Computational Problems of Electrical Engineering*, 2012, roč. 2, č. 2, s. 47-54. ISSN: 2224-0977
- [10] KARBAN, Pavel, Ivo DOLEŽEL a Martina DONÁTOVÁ. Integrodifferential approach to modelling of continual induction heating of nonmagnetic cylindrical bodies. *Acta Technica CSAV*. 2008, 53, 173-192. ISSN 0001-7043.
- [11] STEIN Erwin. Milestones of Direct Variational Calculus and its Analysis from the 17th Century until today and beyond – Mathematics meets Mechanics – with restriction to linear elasticity. [online] Polish Academy of Sciences, 2012 [vid. 2016-05-26]. Dostupné z: http://comes.ippt.gov.pl/pdf/CAMES_19_1_3.pdf
- [12] Temperature Dependent Elastic and Thermal Properties Database. [online] [vid. 2016-05-26] www.jahm.com
- [13] DOLEŽEL Ivo. *Materiály k přednáškám*
- [14] Interní materiály společnosti BRUSH SEM s.r.o.

.1 Přehled nepoužívanějších programů pro řešení multifyzikálních úloh

Tabulka 1: Přehled nepoužívanějších programů pro řešení multifyzikálních úloh; Zdroj: Pavel Karban

Produkt	Geo- metrie	Sdružení	Podpora platformy	Popis
ANSYS	2D/3D	silné, slabé	Windows, Linux (č), MacOSX (č)	Univerzální program pro řešení fyzikálních polí, optimalizační modul
Maxwell	2D/3D	-	Windows, Linux	Řešení elektromagnetických a elektromechanických systémů
COMSOL Multiphysics	2D/3D	silné, slabé	Windows, Linux, MacOSX	Univerzální program pro řešení fyzikálních polí, optimalizační modul
Opera	2D/3D	slabé	Windows, Linux	Multifyzikální program zaměřený na elektromagnetické pole
Flux	2D/3D	silné	Windows	Elektromagnetické a tepelné výpočty
MagNet, ElecNet, ThermNet, OptiNet	2D/3D	-	Windows	Multifyzikální program, optimalizační modul
CST Studio Suite	2D/3D	slabé	Windows	Multifyzikální program zaměřený na nf a vf elektromagnetické pole
Mafia 4	2D/3D	-	Unix (HP-UX, Solaris, DEC OSF1), Windows	Multifyzikální program zaměřený na elektromagnetické pole, lineární problémy, optimalizace
GetFem++	2D/3D	slabé (?)	Unix, Windows, MacOSX	Nekomerční multifyzikální program, nelineární problémy, ovládání přes Python, Matlab nebo Scilab
Onelab	2D/3D	slabé (?)	Windows, Linux, MacOSX, Android, iOS	Nadstavba řešiče GetDP a programu Gmsh; ukázkové příklady z oblasti indukčního ohřevu
Quickfield	2D	slabé	Windows	Multifyzikální program pro řešení fyzikálních polí, lineární i nelineární problémy, optimalizace
Agros2D	2D	slabé	Windows, Linux, MacOSX	Řešení fyzikálních polí založená na knihovně Hermes2D pro hp-FEM, resp. Deal.II