

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ



BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Identifikace a řízení dynamických systémů
založené na modelech

Praha, 2014

Autor: Jiří Těžký

Prohlášení autora práce

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

V Praze dne _____

_____ podpis

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student: Jiří Těžký
Studijní program: Kybernetika a robotika (bakalářský)
Obor: Robotika
Název tématu: Identifikace a řízení dynamických systémů založené na modelech

Pokyny pro vypracování:

1. Seznamte se s metodami odhadování parametrů modelů dynamických systémů.
2. Vybrané metody implementujte a otestujte na datech z reálného procesu, které dodá vedoucí práce.
3. Seznamte se s principy pokročilých regulátorů založených na modelu.
4. Vybraný typ regulátoru implementujte a otestujte se získaným modelem na simulacích.

Seznam odborné literatury:

- [1] Y. Zhu: Multivariable system identification for process control. Elsevier, 2001.
- [2] E.F. Camacho, C. Bordons: Model predictive control. Springer, 2004.
- [3] Model Predictive Control course - materiály k přednáškám. ETH Zurich, 2013.

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Matej Pčolka

Platnost zadání: do konce letního semestru 2014/2015

L.S.

doc. Dr. Ing. Jan Kybic
vedoucí katedry

prof. Ing. Pavel Ripka, CSc.
děkan

V Praze dne 10. 1. 2014

Poděkování

Chtěl bych poděkovat vedoucímu své bakalářské práce Ing. Mateji Pčolkovi za vedení práce, trpělivost, cenné rady a odborný dohled. Dále chci poděkovat za cenné rady také Ing. Evě Žáčkové. Také chci poděkovat své rodině a přátelům za podporu.

Abstrakt

Bakalářská práce se zabývá identifikací teplotního modelu reálné místnosti a vytápěním dané místnosti řízené prediktivní regulací založené na modelu. Rozebírá odhad parametrů modelu s využitím metody nejmenších čtverců z naměřených a upravených dat. Práce se věnuje také možnosti odhadu parametrů s omezením pomocí funkce *quadprog* programu Matlab. Po převodu odhadnutého modelu do stavového popisu je systém řízen prediktivní regulací s cílem optimalizovat energetický výdej na vytápění dle zadaných požadavků a referencí. Součástí je porovnání regulace s tvrdými a měkkými omezeními. K optimalizaci se využívá krátkodobá předpověď venkovní teploty. Jako další možnost se uvažuje využití známých predikcí teplot okolních místností. Závěr práce se věnuje prediktivnímu řízení na základě nelineárního modelu systému s využitím funkce *fmincon* programu Matlab. Funkčnost navržených prediktivních regulátorů založených na modelu místnosti je ověřena simulací s pomocí naměřených dat.

Klíčová slova

Identifikace, metoda nejmenších čtverců, vytápění, řízení na základě modelu, MPC, NMPC, *quadprog*, *fmincon*

Abstract

The bachelor thesis deals with identification of the thermal model of the real room and heating control by a model predictive control of this room. It analyzes the model parameter estimation using the least squares method from the measured and adjusted data. The thesis also deals with the possibilities of model estimation with constraints by *quadprog* function of Matlab. After transformation estimated model into state space, the system is controlled by model predictive control to optimize and minimize energy consumption for heating according to the given requirements and references. It includes comparison of results using hard and soft constrained model predictive control. The controller uses short-term outside temperature forecast and also prediction of surrounding rooms temperature. The final part is devoted to non-linear model predictive control utilizing *fmincon* function of Matlab. Functionality of the above formed model predictive controllers of the room heating is verified by simulation with measured data.

Keywords

Identification, least square method, heating, model predictive control, MPC, NMPC, *quadprog*, *fmincon*

Obsah

Seznam obrázků	viii
Seznam tabulek	ix
1 Úvod	1
1.1 Struktura textu	1
2 Popis zadání	3
2.1 Popis místnosti	4
2.2 Příprava dat	5
2.2.1 Filtrace dat	5
2.2.1.1 Výsledek filtrace	6
2.3 Převzorkování dat	8
3 Identifikace	9
3.1 Metoda nejmenších čtverců	9
3.1.1 Použití metody nejmenší čtverců pro identifikaci	10
3.2 Model místnosti	11
3.2.1 Identifikace pomocí metody nejmenších čtverců	11
3.2.1.1 Kritérium kvality odhadu	12
3.2.1.2 Výsledek identifikace metodou nejmenších čtverců	13
3.3 Identifikace s omezením	14
3.3.1 Přenosová funkce modelu	14
3.3.2 Funkce <i>quadprog</i>	15
3.3.3 Formulace problému	16
3.3.3.1 Formulace omezení	16
3.3.4 Výsledek identifikace s omezením	17
3.4 Stavový popis systému	18

4	Řízení na základě modelu	20
4.1	MPC	20
4.1.1	Posuvný predikční horizont	21
4.1.2	Optimalizace	22
4.2	Vytápění v místnosti	23
4.2.1	Požadavky na regulaci	23
4.2.2	Optimalizace	23
4.3	Řízení vytápění pomocí lineárního MPC	24
4.3.1	Formulace MPC	24
4.3.2	MPC regulace s tvrdým omezením	25
4.3.2.1	Výsledek simulace regulace	26
4.3.3	MPC regulace s měkkým omezením	27
4.3.3.1	Optimalizace s měkkým omezením	28
4.3.3.2	Výsledek simulace regulace	29
4.4	Řízení vytápění pomocí nelineárního MPC	33
4.4.1	Formulace NMPC	33
4.4.2	Optimalizace	34
4.4.3	Funkce <i>fmincon</i>	35
4.4.4	NMPC regulace s měkkým omezením	35
4.4.4.1	Výsledek simulace regulace	36
5	Závěr	38
	Literatura	41
A	Obsah příloženého CD	I

Seznam obrázků

2.1	Představa jednotlivých místností. Převzato a upraveno z [1].	4
2.2	Teplota ve východní místnosti - filtrace dat	6
2.3	Teplota místnosti, měřeno senzorem a - filtrace dat	7
2.4	Teplota místnosti, měřeno senzorem b - filtrace dat	7
2.5	Teplota místnosti, průměr z obou senzorů - filtrace dat	8
3.1	Výsledek identifikace	13
3.2	Výsledek identifikace s omezením $DC_{gain}(i) \geq 0$	17
4.1	Průběh MPC s RHC. Převzato a upraveno z [2]	22
4.2	MPC s RHC tvrdé omezení	27
4.3	MPC s RHC, měkké omezení, známé predikce teploty T_O	30
4.4	Průběh proměnné ε u MPC s RHC a měkkým omezením	31
4.5	MPC s RHC, měkké omezení, známé predikce teplot	32
4.6	Časová náročnost MPC s RHC, měkké omezení, známé predikce teplot	32
4.7	Nelineární MPC s RHC, měkké omezení	37

Seznam tabulek

2.1	Vstupní veličiny	5
2.2	Výstupní veličina	5

Kapitola 1

Úvod

S určitou formou vytápění se dnes počítá téměř u každé stavby. Ne vždy je ale přítomna optimální forma regulace. Přitom správně zvolená regulace může v konečném důsledku významně ušetřit náklady na vytápění.

V této práci se budeme věnovat prediktivnímu řízení vytápění reálné místnosti. Jelikož se jedná o řízení na základě modelu, budeme se zabývat také identifikací parametrů dynamického systému, který představuje právě námi vytápěná místnost. V dnešní době výstavby úsporných nízkoenergetických budov a snižování nákladů na vytápění je toto téma velmi aktuální.

Počátky prediktivního řízení sahají do 70. let 20. století [3] a s rozvojem výpočetní techniky se oblast uplatnění dále rozšiřuje [4]. Regulátor plánuje (optimalizuje) budoucí kroky regulace až do výše predikčního horizontu, na základě chování modelu systému. Matematický model řízeného systému můžeme získat modelováním s využitím fyzikálních znalostí nebo identifikací z naměřených dat.

1.1 Struktura textu

Popis zadání V této kapitole je upřesněna úloha, kterou se práce zabývá. Jedná se o popis vytápěné místnosti a jejího okolí včetně rozmístění jednotlivých senzorů, ze kterých jsou získána data. Následuje zpracování naměřených dat, které obnáší filtraci a převzorkování.

Identifikace Tato kapitola je věnovaná metodě nejmenších čtverců a jejímu použití pro identifikaci teplotního modelu místnosti. Dále se zabývá identifikací parametrů modelu s požadovanými reálnými fyzikálními vlastnostmi modelu.

Řízení V této části se práce zabývá formulaci prediktivního regulátoru pro vytápění dané místnosti, a to na základě zjednodušeného lineárního, a následně i nelineárního modelu. Je zde diskutován regulátor s tvrdě nastaveným omezením, ale také varianta v podobě měkkých omezení. Funkčnost regulace je ověřena simulací.

Veškeré výpočty a práce je prováděna v programu Matlab. Nejsou zde uváděny žádné zdrojové kódy nebo skripty. Ty se nacházejí na přiloženém CD formou přílohy.

Kapitola 2

Popis zadání

Cílem práce je odhad parametrů modelu dynamického systému, v tomto případě jej představuje termodynamický model místnosti, a následná implementace pokročilého řízení vytápění na základě tohoto modelu. K dosažení cíle je nutné se seznámit s metodami odhadování parametrů modelů dynamických systémů a s principy pokročilé regulace.

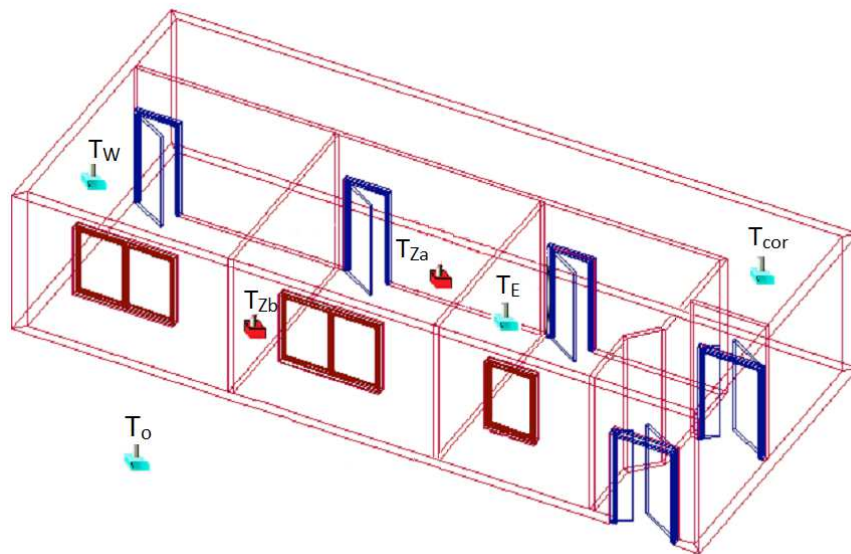
Kvalita regulátorů založených na modelu velmi závisí na přesnosti modelu regulovaného systému. Proto je nutné věnovat velkou pozornost právě modelu systému. Samotný termodynamický model místnosti přesně odpovídající reálnému chování je ve skutečnosti velice složitý. Důvodem je, že na vývoj teploty v místnosti mají vliv i faktory, které nejsou součástí naměřených dat nebo je nelze jednoduše měřit. Jedná se například o měnící se parametry budovy, intenzitu slunečního záření nebo vliv vnějších povětrnostních podmínek (vlhkost vzduchu, rychlost větru). Následné přesnější řízení je potom ztíženo nelineární dynamikou budovy, resp. místnosti.

Pro celou implementaci a simulaci odhadu parametrů i následného řízení jsou použita reálná naměřená data z místnosti.

2.1 Popis místnosti

Místnost se nachází v Lakeshore Center Michigan Technological University [1]. Celá budova je vybavena systémem HVAC¹, který má udržovat stanovené klimatické podmínky v budově. Z hlediska vytápění umožňuje vytápět individuálně každou zónu, resp. místnost [1]. Vzduchotechnika slouží nejen na udržování teploty, ale také kvality vzduchu.

Naměřená data, která byla dodána, pochází z několika teplotních senzorů, které jsou součástí BMS² systému budovy. Teplota v místnosti, které se věnujeme, je navíc zaznamenána teplotním dataloggerem. Naměřená data z místnosti tedy obsahují hodnoty ze dvou různých senzorů označených³ T_{Z_a} a T_{Z_b} . Modelovanou místnost obklopují další dvě místnosti a chodba. V západní místnosti je umístěn senzor s označením T_W , ve východní T_E a na chodbě T_{cor} . Senzor venkovní teploty má označení T_O . Místnost je vytápěna přívodem vzduchu z ventilační jednotky HVAC, jehož teplota je označena T_S a hmotnostní průtok \dot{m} . Rozlišovací schopnost senzorů v rámci systému BMS je $\pm 0.2^\circ\text{C}$ a rozlišení dataloggeru $\pm 0.8^\circ\text{C}$ [1].



Obrázek 2.1: Představa jednotlivých místností. Převzato a upraveno z [1].

¹HVAC (Heating, Ventilation, and Air Conditioning), jedná se o označení klimatických systémů zajišťující vytápění, větrání a klimatizaci v budovách [5].

²BMS (Building Management System), jedná se o soubor technických prostředků pro správu, řízení a monitoring zařízení budovy [6].

³ $T_{Z, W, E, Cor, O, S}$ jsou zkratky z výrazů „Zone, West, East, Corridor, Outdoor, Supply“

2.2 Příprava dat

Naměřená data jsou vzorkovaná s periodou 1 minuty. K dispozici je 20160 vzorků, které odpovídají délce měření 14 dnů v období od 11. 1. 2013 0:00 do 24. 1. 2013 23:59. Před dalším použitím je třeba data dále zpracovat.

Tabulka 2.1: Vstupní veličiny

Veličina	Označení	Jednotka
Teplota východní místnosti	T_E	°C
Teplota chodby	T_{cor}	°C
Teplota západní místnosti	T_W	°C
Teplota venkovní	T_O	°C
Teplota přiváděného vzduchu	T_S	°C
Hmotnostní průtok vzduchu	\dot{m}	kg s ⁻¹

Tabulka 2.2: Výstupní veličina

Veličina	Označení	Jednotka
Teplota místnosti, měřená senzorem a	T_{Z_a}	°C
Teplota místnosti, měřená senzorem b	T_{Z_b}	°C

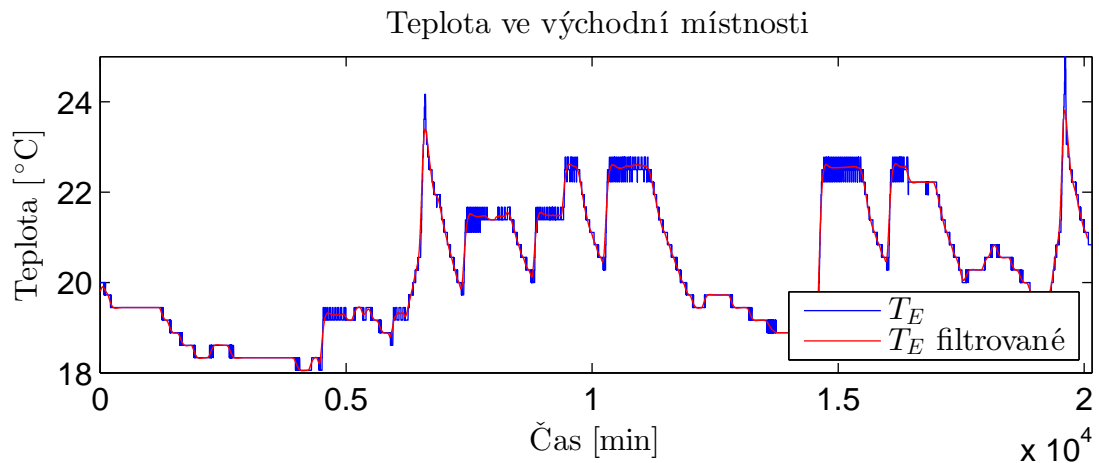
2.2.1 Filtrace dat

Naměřená data musela být zkontrolována a vyloučeny chyby vznikající omezenou citlivostí, případně rušivé vlivy. To je provedeno přefiltrováním. Pro všechny naměřené průběhy, které budou filtrovány (T_E , T_{cor} , T_W , T_O a T_Z), byl použit IIR (Infinite Impulse Response) dolnoproputní Butterworthův filtr [7] 2. řádu s normovanou dolní mezní frekvencí $\omega_n \in (0, 1)$, kde 1 odpovídá polovině vzorkovací frekvence, tedy horní hranici přenášeného pásma [8], která je známá také jako Nyquistova frekvence.

Zbývající průběhy nebylo třeba filtrovat. Jedná se o teplotu přiváděného vzduchu T_S , jejíž hodnoty se velice rychle mění s velkým rozdílem teplot. Správcem budovy bylo potvrzeno, že průběh odpovídá realitě. Dále hmotnostní průtok přiváděného vzduchu \dot{m} nabývá jen dvou konstantních hodnot, a to nulové v případě vypnutého stavu a maximální hodnotě průtoku 0.52 kg s⁻¹.

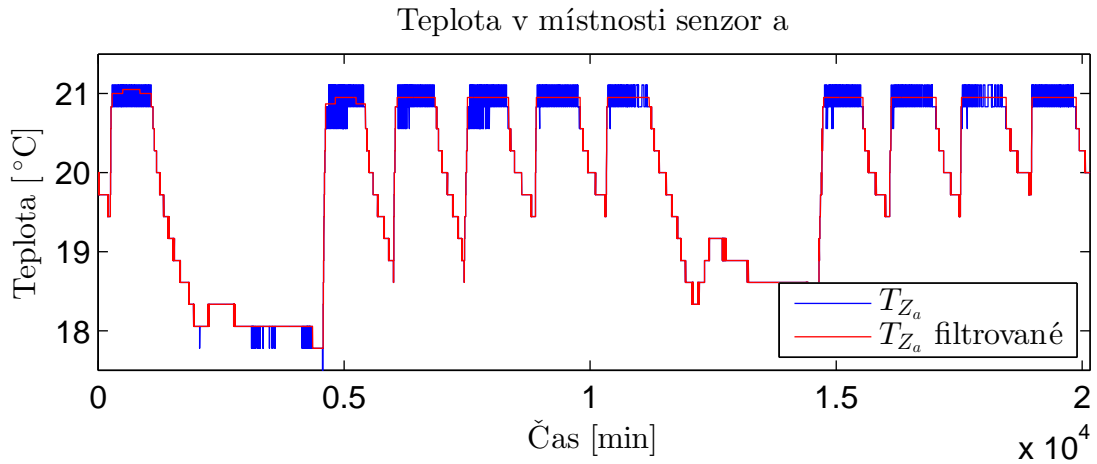
2.2.1.1 Výsledek filtrace

Výsledek filtrace naměřeného průběhu teploty T_E je vidět na obrázku 2.2. Obdobně proběhla filtrace u průběhů T_{cor} , T_W , T_O . S ohledem na rychlost změny teploty byl po vizuálním porovnání s původním průběhem zvolen mezní kmitočet $\omega_n = 0.008$.



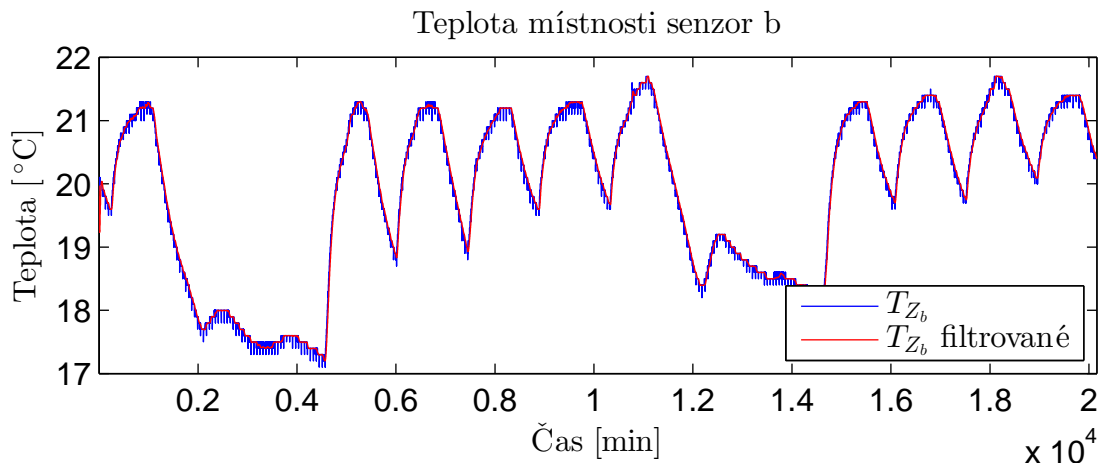
Teplota místnosti T_Z

T_{Z_a} Tento průběh byl naměřen prvním senzorem. Naměřené hodnoty byly korigovány pouze v místech, kde díky malé citlivosti senzoru se naměřená hodnota pohybovala mezi dvěma polohami, danými rozlišením senzoru. V těchto oblastech byl průběh nahrazen fixní průměrnou hodnotou.



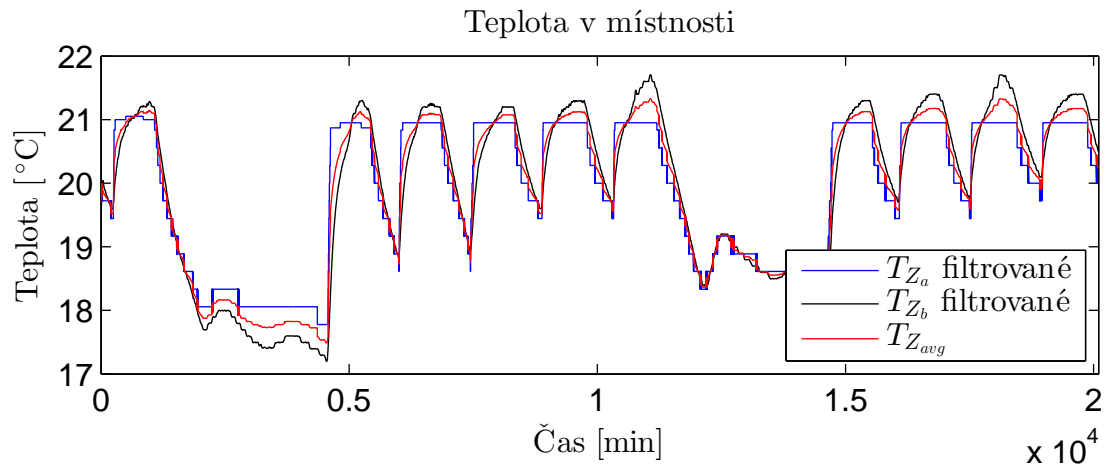
Obrázek 2.3: Teplota místnosti, měřeno senzorem a - filtrace dat

T_{Z_b} Pro filtraci průběhu teploty v místnosti naměřeném druhým senzorem byl opět použit Butterworth filtr. Výsledek je vidět na následujícím obrázku 2.4.



Obrázek 2.4: Teplota místnosti, měřeno senzorem b - filtrace dat

Zprůměrování signálu Je vidět, že senzory mají různou charakteristiku, protože jsou umístěné na různých místech. Pro zpřesnění skutečného průběhu je užitečné použít data z obou senzorů, například aritmetickým průměrem dvojice vzorků, který označíme $T_{Z_{avg}}$. Porovnání s původními průběhy je zobrazeno na obrázku 2.5.



Obrázek 2.5: Teplota místnosti, průměr z obou senzorů - filtrace dat

Tento signál T_{avg} budeme používat pro další práci.

2.3 Převzorkování dat

Vzhledem k pomalým teplotním změnám jsou data vzorkována s malou periodou. Navíc výpočetní náročnost roste s objemem dat, která zpracováváme. Je tedy výhodné data převzorkovat. Zcela postačující je vzorkovací perioda 5 minut místo původní 1 minuty. Jednoduché převzorkování je provedeno uložení každého pátého vzorku a vypuštěním zbývajících. Tím je dosaženo v tomto případě kvalitnějšího převzorkování než-li pomocí funkce *resample* v Matlabu. Nevznikají tak přechodové jevy u ostrých hran, například u konstantního hmotnostního průtoku.

Kapitola 3

Identifikace

Identifikace modelu je jedna z důležitých částí prediktivní regulace. Existuje mnoho metod, jak identifikovat parametry modelu [9]. V této práci se díky struktuře modelu nabízí identifikace pomocí metody nejmenších čtverců [10].

3.1 Metoda nejmenších čtverců

Metoda nejmenších čtverců¹ se používá pro aproximaci funkcí [10], tedy lze ji použít pro stanovení nebo odhadu neznámých parametrů matematického modelu, například nějakého funkčního předpisu, za pomoci známých funkčních hodnot a argumentů funkce. Tyto hodnoty jsou nejčastěji získané měřením. Při tomto odhadu parametrů se minimalizuje součet kvadrátů chyb rozdílů hodnoty skutečné (změřené) a odhadnuté.

Pro příklad poslouží diskretní matematický model vyjádřený rovnicí [11]:

$$y(k) = x_1(k)\theta_1 + x_2(k)\theta_2 + \cdots + x_n(k)\theta_n, \quad k = 1 \cdots N. \quad (3.1)$$

Kde k je diskretní čas, ve kterém jsme prováděli měření funkčních hodnot $y(k)$ a argumentů $x_1(k), x_2(k), \cdots, x_n(k)$ s počtem vzorků N . Neznámými parametry jsou $\theta_1, \cdots, \theta_n$. Zápis 3.1 lze pro N naměřených vzorků přepsat do maticové rovnosti:

$$\mathbf{y} = \mathbf{\Phi}\boldsymbol{\theta}, \quad (3.2)$$

¹Někdy se také nazývá lineární regrese.

kde:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} x_1(1) & x_2(1) & \cdots & x_n(1) \\ x_1(2) & x_2(2) & \cdots & x_n(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1(N) & x_2(N) & \cdots & x_n(N) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Označíme-li $\hat{\mathbf{y}}$ odhad \mathbf{y} , jenž představuje známé (naměřené) hodnoty, můžeme zavést chybu odhadu $\boldsymbol{\varepsilon}$. Ta představuje nepřesnost, které jsme se při odhadování dopustili:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon(1) \\ \varepsilon(2) \\ \vdots \\ \varepsilon(N) \end{bmatrix} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \Phi \hat{\boldsymbol{\theta}}. \quad (3.4)$$

Pro dosažení nejlepšího výsledku odhadu parametrů $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ je třeba tuto chybu minimalizovat. Proto je třeba zavést ztrátovou funkci. Metoda nejmenších čtverců minimalizuje ztrátovou funkci, která představuje sumu kvadrátů této chyby, neboli residuální sumu čtverců [12]:

$$f_{LS} = \sum_{k=1}^N \varepsilon(k)^2 = \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{y} - \Phi \hat{\boldsymbol{\theta}})^T (\mathbf{y} - \Phi \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \Phi^T \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \Phi \hat{\boldsymbol{\theta}} + \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \Phi^T \Phi \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (3.5)$$

Pro nalezení minima ztrátové funkce f_{LS} na množině parametrů θ je třeba provést parciální derivaci podle θ a položit ji rovno nule.

$$\left. \frac{\partial f_{LS}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} = -2\Phi^T \mathbf{y} + 2\Phi^T \Phi \hat{\boldsymbol{\theta}} = 0$$

$$\Phi^T \Phi \hat{\boldsymbol{\theta}} = \Phi^T \mathbf{y}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{y} \quad (3.6)$$

Výraz 3.6 dává odhad parametrů $\hat{\boldsymbol{\theta}}$.

3.1.1 Použití metody nejmenší čtverců pro identifikaci

Metodu nejmenších čtverců lze použít pro odhad parametrů modelu lineárního dynamického systému [11] s vhodnou strukturou z naměřených dat. Velmi často se používá pro ARX (AutoRegresive model with eXternal input) [13] strukturu, kterou lze popsat

diskrétní systém. Je specifická tím, že její výstup závisí lineárně na předchozích hodnotách výstupu a vstupů. Příklad ARX SISO (Single-Input Single-Output) struktury:

$$y(k) = \sum_{i=1}^{n_a} a_i y(k-i) + \sum_{i=0}^{n_b} b_i u(k-i) + e(k) \quad (3.7)$$

Často však neznáme apriori n_a , n_b (skutečnou strukturu), a proto je tento počet také předmětem odhadu. V případě odhadu z dat se šumem, který může být způsobený například nedokonalostmi sensorů, je u takovýchto dat třeba vhodně volit počet parametrů, neboť jejich vysoký počet může mít za následek snahu modelovat i nežádoucí šum. Proto je nutné data nejdříve upravit vhodným filtrem. Jednou z možností, jak odhadnout nejlepší počet parametrů, je sestavit metriku pro hodnocení kvality odhadu a postupně zkoušet kombinace počtu těchto parametrů. Počet, pro který vyjde odhad nejlépe, bude poté brán jako nejpravděpodobnější.

3.2 Model místnosti

Identifikace modelu místnosti je založená na diskretní struktuře 3.8, která odpovídá termodynamice budovy a byla pro modelování podobné budovy použita například v [14].

$$\begin{aligned} T_Z(k) &= \sum_{i=1}^{n_a} a_i T_Z(k-i) + \sum_{i=1}^{n_b} b_i (T_E(k-i) - T_Z(k-i)) \\ &+ \sum_{i=1}^{n_c} c_i (T_{cor}(k-i) - T_Z(k-i)) + \sum_{i=1}^{n_d} d_i (T_W(k-i) - T_Z(k-i)) \\ &+ \sum_{i=1}^{n_e} e_i (T_O(k-i) - T_Z(k-i)) + f \dot{m}(k-1) (T_S(k-1) - T_Z(k-1)) \end{aligned} \quad (3.8)$$

3.2.1 Identifikace pomocí metody nejmenších čtverců

Strukturu 3.8 lze přepsat do následujícího maticového zápisu, který platí pro $k > \max(n_a, n_b, n_c, n_d, n_e)$:

$$T_Z(k) = \varphi(k)\theta, \quad (3.9)$$

kde :

$$\boldsymbol{\theta} = \left[a_1 \quad \cdots \quad a_{n_a} \quad b_1 \quad \cdots \quad b_{n_b} \quad c_1 \quad \cdots \quad c_{n_c} \quad d_1 \quad \cdots \quad d_{n_d} \quad e_1 \quad \cdots \quad e_{n_e} \quad f \right]^T, \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}(k) = & [T_Z(k-1), \quad \cdots \quad T_Z(k-n_a), \quad T_E(k-1) - T_Z(k-1), \quad \cdots \quad T_E(k-n_b) - T_Z(k-n_b), \\ & T_{cor}(k-1) - T_Z(k-1), \quad \cdots \quad T_{cor}(k-n_c) - T_Z(k-n_c), \\ & T_W(k-1) - T_Z(k-1), \quad \cdots \quad T_W(k-n_d) - T_Z(k-n_d), \\ & T_O(k-1) - T_Z(k-1), \quad \cdots \quad T_O(k-n_e) - T_Z(k-n_e), \\ & \dot{m}(k-1)(T_S(k-1) - T_Z(k-1))]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Neznámé parametry stanovíme následujícím vztahem 3.12.

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi})^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{T}_Z \quad (3.12)$$

Maticová forma zápisu obsahuje již zpracovaná data, ze kterých se provádí identifikace parametrů. Matice $\boldsymbol{\Phi}$ a \boldsymbol{T}_Z jsou sestaveny následovně:

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}(k) \\ \boldsymbol{\varphi}(k+1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varphi}(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_Z(k-1), & \cdots & T_Z(k-n_a), & T_E(k-1) - T_Z(k-1), & \cdots & \dot{m}(k-1)(T_S(k-1) - T_Z(k-1)) \\ T_Z(k), & \cdots & T_Z(k+1-n_a), & T_E(k) - T_Z(k), & \cdots & \dot{m}(k)(T_S(k) - T_Z(k)) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_Z(N-1), & \cdots & T_Z(N-n_a), & T_E(N-1) - T_Z(N-1), & \cdots & \dot{m}(N-1)(T_S(N-1) - T_Z(N-1)) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{T}_Z = \begin{bmatrix} T_Z(k) \\ T_Z(k+1) \\ \vdots \\ T_Z(N) \end{bmatrix}.$$

3.2.1.1 Kritérium kvality odhadu

Jelikož počet parametrů n_a, n_b, n_c, n_d, n_e není apriori známý, vyzkoušíme identifikaci parametrů $\boldsymbol{\theta}$ pro všechny možné kombinace jejich počtu v rozmezí $1 \leq n_x \leq 5$. Aby bylo možné vyhodnotit, který konkrétní počet parametrů je nejlepší možný, je třeba sestavit hodnotící kritérium odhadu. Pro tento účel slouží suma absolutních hodnot váhovaných odchylek signálů naměřeného a vygenerovaného z odhadnuté struktury.

$$Q = \frac{\sum_{k=1}^N \left| \frac{y(k) - \hat{y}(k)}{y(k)} \right|}{N} \quad (3.13)$$

Tato suma je navíc váhována celkovým počtem vzorků. Tím jsme eliminovali závislost výsledku na úrovni signálu a celkovém počtu vzorků. Čím je Q menší, tím je odhad kvalitnější.

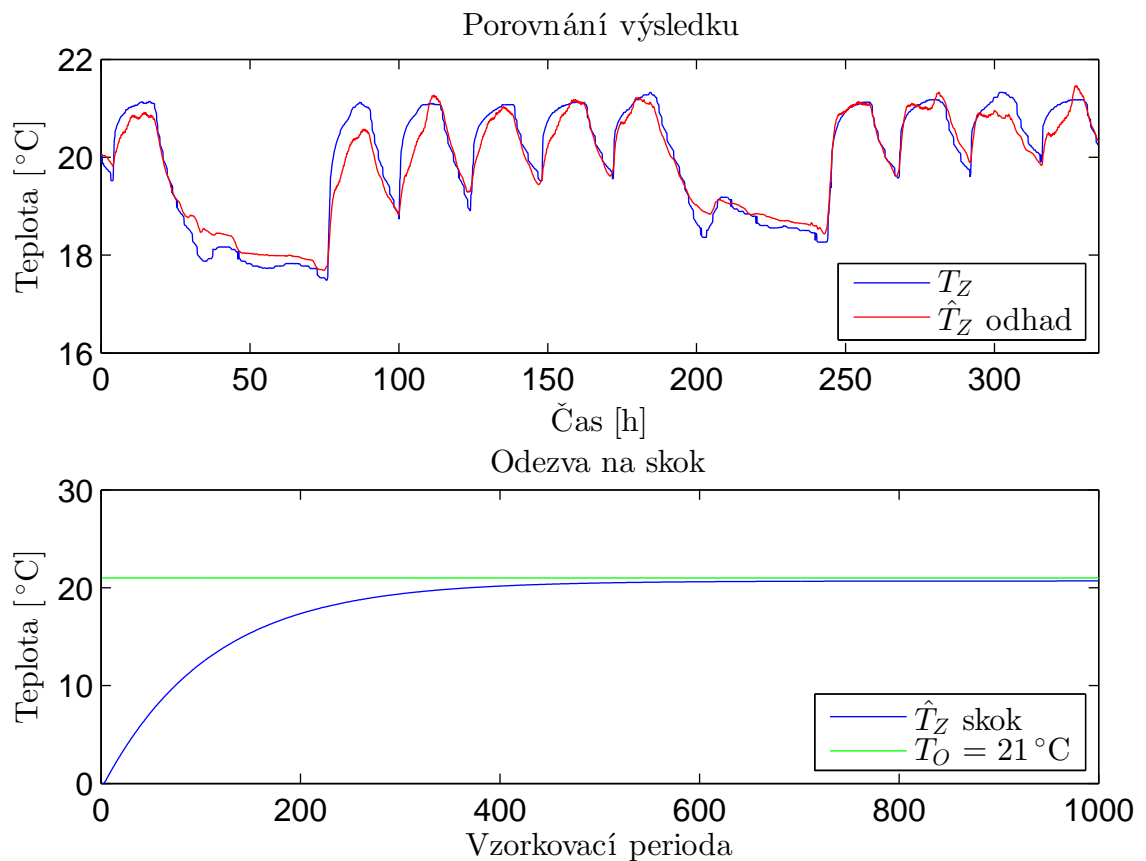
3.2.1.2 Výsledek identifikace metodou nejmenších čtverců

Za pomoci připravených dat jsme realizovali identifikační algoritmus. Ten prochází pole všech možných kombinací počtu parametrů n_x . Pro každou kombinaci je proveden odhad parametrů θ a výsledek je hodnocen dle zavedeného kritéria 3.13. Nejlepší výsledek byl vyhodnocen pro počet parametrů $n_a = n_b = n_c = n_d = 2$, $n_e = 3$:

$$\theta = [a_1 \ a_2 \ b_1 \ b_2 \ c_1 \ c_2 \ d_1 \ d_2 \ e_1 \ e_2 \ e_3 \ f]^T \quad (3.14)$$

$$\theta = [1.9588 \ -0.9585 \ 0.1223 \ -0.1201 \ 0.5014 \ -0.5043 \ 0.1838 \ -0.1778 \ 0.0478 \ -0.0947 \ 0.0470 \ 0.0053]^T$$

Na následujícím grafu lze vidět porovnání vygenerovaného průběhu teploty v místnosti \hat{T}_Z pomocí odhadnuté struktury z naměřených dat a skutečný naměřený vývoj teploty v místnosti T_Z .



Obrázek 3.1: Výsledek identifikace

Na druhém grafu je vykreslena skoková odezva odhadnutého systému pro konstantní vstupní hodnoty $T_E = 20^\circ\text{C}$, $T_{cor} = 20^\circ\text{C}$, $T_W = 20^\circ\text{C}$, $T_O = 21^\circ\text{C}$, $T_S = 20^\circ\text{C}$, $\dot{m} = 0.5 \text{ kg s}^{-1}$, $T_Z(0) = 0^\circ\text{C}$. Z této odezvy je možné pozorovat chování systému.

Například je logické aby při těchto vstupních hodnotách teplota v místnosti nevzrostla přes 21 °C, pokud je výsledek opačný, je zřejmé, že odhad není správný.

3.3 Identifikace s omezením

Při identifikaci reálných systémů je důležitá nejen přesnost v porovnání odhadnutých a naměřených výstupů systému, ale také je třeba ošetřit vlastnosti výsledného modelu systému. Tato podkapitola je věnovaná odhadu parametrů modelu místnosti při určitých omezeních. Je požadováno, aby výsledný model splňoval reálné fyzikální vlastnosti. Zárukou toho je, aby vnitřní teplota místnosti neklesala pod úroveň teploty venkovní a teplot okolních místností, nemá-li k tomu důvod. A zároveň také bez příslušných hodnot na vstupech by teplota neměla růst nad mez, která neodpovídá fyzikálním zákonům. To lze například zaručit omezením statického zesílení systému.

3.3.1 Přenosová funkce modelu

Statické zesílení neboli DC_{gain} je možné určit z přenosové funkce, kterou si vyjádříme ze struktury 3.8. Pro zjednodušení budeme uvažovat poslední člen struktury $\dot{m}(T_S - T_Z)$ jako vstup. Celou strukturu přepíšeme pomocí \mathcal{Z} -transformace $\mathcal{Z}\{f(k - i)\} = z^{-i}F(z)$, kde $z \in \mathbb{C}$ je komplexní proměnná.

$$T_Z(z) = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n_b} b_i z^{-i} \\ \sum_{i=1}^{n_c} c_i z^{-i} \\ \sum_{i=1}^{n_d} d_i z^{-i} \\ \sum_{i=1}^{n_e} e_i z^{-i} \\ f z^{-1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} T_E \\ T_{cor} \\ T_W \\ T_O \\ \dot{m}(T_S - T_Z) \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

kde:

$$h = 1 - \sum_{i=1}^{n_a} a_i z^{-i} + \sum_{i=1}^{n_b} b_i z^{-i} + \sum_{i=1}^{n_c} c_i z^{-i} + \sum_{i=1}^{n_d} d_i z^{-i} + \sum_{i=1}^{n_e} e_i z^{-i}.$$

Jelikož se jedná o MISO (Multiple-Input Single-Output) systém, bude přenosová funkce tvořena dílčími přenosovými funkcemi pro jednotlivé vstupy.

Výsledná přenosová funkce vstupu na výstup je tedy:

$$H(z) = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n_b} b_i z^{-i} \\ \sum_{i=1}^{n_c} c_i z^{-i} \\ \sum_{i=1}^{n_d} d_i z^{-i} \\ \sum_{i=1}^{n_e} e_i z^{-i} \\ f z^{-1} \end{bmatrix}^T. \quad (3.16)$$

Statické zesílení získáme z přenosové funkce dosazením $z = 1$. Je to tedy hodnota přenosu na nulové frekvenci.

$$DC_{gain} = H(z = 1) = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^{n_a} a_i + \sum_{i=1}^{n_b} b_i + \sum_{i=1}^{n_c} c_i + \sum_{i=1}^{n_d} d_i + \sum_{i=1}^{n_e} e_i} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n_b} b_i \\ \sum_{i=1}^{n_c} c_i \\ \sum_{i=1}^{n_d} d_i \\ \sum_{i=1}^{n_e} e_i \\ f \end{bmatrix}^T \quad (3.17)$$

Výraz použijeme pro pozdější formulaci omezení identifikace.

3.3.2 Funkce *quadprog*

Funkce *quadprog* v Matlabu řeší optimalizační úlohu s omezením [15], přesněji optimalizační úlohu, ve které je účelová funkce kvadratická a omezující podmínky jsou lineární. Tato úloha se nazývá kvadratické programování [16]. Funkce nabízí několik možností, jak definovat omezení. Pro naši úlohu postačí následující zadání optimalizačního problému:

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{f}^T \mathbf{x}, \quad \text{za podmínek} \quad \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{lb} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{ub} \quad (3.18)$$

kde \mathbf{H}, \mathbf{A} jsou matice a $\mathbf{f}, \mathbf{b}, \mathbf{x}$ jsou vektory.

Funkce nabízí pro řešení úloh kvadratického programování 3 možné algoritmy. Standardně funkce využívá algoritmus *interior-point-convex*. Tato iterační metoda využívá lineární algebry a řeší pouze konvexní problém. Je vhodná pro složité optimalizační problémy, neboť je rychlejší. Dává však méně přesný výsledek než například algoritmus *active-set*, který řeší i nekonvexní optimalizační problémy [15]. Posledním algoritmem je *trust-region-reflective*, který nelze použít na náš optimalizační problém, jelikož akceptuje

pouze nerovnostní podmínky nebo pouze meze výstupních hodnot. Dále je možné nastavit maximální počet iterací, které algoritmus provádí. Po překročení limitní hodnoty algoritmus vrátí dosud nejlepší možné řešení, avšak není zaručeno, že je také optimální. V průběhu celé práce budeme využívat algoritmus *active-set* se standardně nastaveným počtem maximálních iterací.

3.3.3 Formulace problému

Abychom mohli využít funkce *quadprog* pro identifikaci parametrů, je nejprve třeba převést problém identifikace do odpovídajícího tvaru 3.18 pro funkci *quadprog*. Budeme vycházet z metody nejmenších čtverců 3.5. Opět budeme minimalizovat residuální sumu čtverců na množině parametrů $\hat{\theta}$.

$$\min_{\hat{\theta}} (\mathbf{T}_Z - \Phi \hat{\theta})^T (\mathbf{T}_Z - \Phi \hat{\theta}) \quad (3.19a)$$

$$\min_{\hat{\theta}} \mathbf{T}_Z^T \mathbf{T}_Z - \hat{\theta}^T \Phi^T \mathbf{T}_Z - \mathbf{T}_Z^T \Phi \hat{\theta} + \hat{\theta}^T \Phi^T \Phi \hat{\theta}$$

$$\min_{\hat{\theta}} \hat{\theta}^T \Phi^T \Phi \hat{\theta} - 2\mathbf{T}_Z^T \Phi \hat{\theta}$$

$$\min_{\hat{\theta}} \frac{1}{2} \hat{\theta}^T \Phi^T \Phi \hat{\theta} - \mathbf{T}_Z^T \Phi \hat{\theta} \quad (3.19b)$$

Porovnáním s 3.18 získáme potřebné parametry, tedy $\mathbf{x} = \hat{\theta}$, $\mathbf{H} = \Phi^T \Phi$, $\mathbf{f} = -\mathbf{T}_Z^T \Phi$.

3.3.3.1 Formulace omezení

Pro omezení statického zesílení přenosové funkce bude stačit nadefinovat $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$.

Nezáporné statické zesílení Jelikož v případě předchozí identifikace vyšly některé parametry dílčích přenosů od okolních teplot záporně (což je nežádoucí), je třeba odhad provést tak, aby jednotlivé přenosy měly kladné statické zesílení. Poslední dílčí přenosovou funkci nebudeme omezovat. Chceme tedy, aby platila rovnice 3.20:

$$\frac{1}{1 - \sum_{i=1}^{a_n} a_i + \sum_{i=1}^{b_n} b_i + \sum_{i=1}^{c_n} c_i + \sum_{i=1}^{d_n} d_i + \sum_{i=1}^{e_n} e_i} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{b_n} b_i \\ \sum_{i=1}^{c_n} c_i \\ \sum_{i=1}^{d_n} d_i \\ \sum_{i=1}^{e_n} e_i \end{bmatrix}^T \geq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Tuto rovnici je třeba převést na $\mathbf{A}\boldsymbol{\theta} \leq \mathbf{b}$:

$$\begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^{b_n} b_i \\ -\sum_{i=1}^{c_n} c_i \\ -\sum_{i=1}^{d_n} d_i \\ -\sum_{i=1}^{e_n} e_i \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \cdots 0 & -1 \cdots -1 & 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 & -1 \cdots -1 & 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 & -1 \cdots -1 & 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 & -1 \cdots -1 & 0 \cdots 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\theta} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

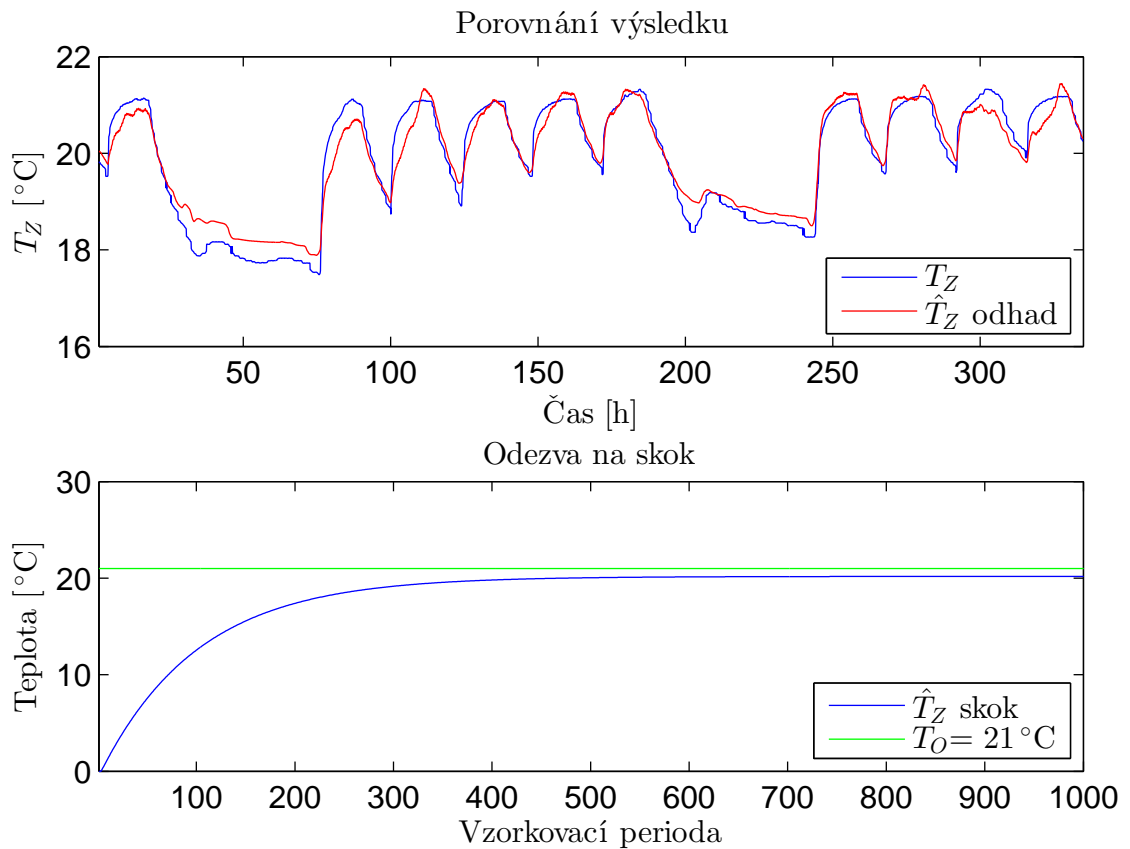
3.3.4 Výsledek identifikace s omezením

Stejným algoritmem, jako v případě použití metody nejmenších čtverců, jsme dle 3.13 získali nejlepší výsledek s počtem parametrů $n_a = 3$, $n_b = 2$, $n_c = 3$, $n_d = 2$, $n_e = 1$:

$$\boldsymbol{\theta} = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ b_1 \ b_2 \ c_1 \ c_2 \ c_3 \ d_1 \ d_2 \ e_1 \ f]^T \quad (3.21)$$

$$\boldsymbol{\theta} = [3.3178 \ -3.7187 \ 1.4010 \ 0.1066 \ -0.1049 \ 1.9736 \ -3.5148 \ 1.5412 \ 0.1486 \ -0.1451 \ 0.0001 \ 0.0049]^T$$

Na následujících grafech můžeme vidět stejnou demonstraci výsledku jako v případě předchozí metody, tedy vývoj odhadnuté a změřené teploty v místnosti a také skokovou odezvu na konstantní vstupní hodnoty. Nárůst teploty by i v tomto případě neměl překročit mezních 21 °C.



Obrázek 3.2: Výsledek identifikace s omezením $DC_{gain}(i) \geq 0$

Statické zesílení systému, dle jednotlivých přenosových funkcí určených vstupy v pořadí $[T_E \ T_{cor} \ T_W \ T_O \ \dot{m}(T_S - T_Z)]$ je:

$$DC_{gain} = [0.3277 \ 0 \ 0.6718 \ 0.0143 \ 0.9433]$$

Další omezující požadavky na statické zesílení přenosu již nejsou třeba, neboť tento odhad parametrů neodporuje fyzikálním zákonům.

Tento výsledek odhadů parametrů struktury modelu budeme používat po zbytek práce věnované prediktivnímu řízení založeného na modelu.

3.4 Stavový popis systému

Návrh prediktivního regulátoru založeného na modelu je daleko jednodušší pro systém vyjádřený ve formě stavového popisu. Proto ARX strukturu 3.8 s identifikovanými parametry 3.21 převedeme do stavového popisu.

Vstupně-výstupní zápis odhadnuté struktury je:

$$T_Z(k+1) = z_1(k)T_Z(k) + z_2T_Z(k-1) + z_3T_Z(k-2) + b_1T_E(k) + b_2T_E(k-1) + c_1T_{cor}(k) + c_2T_{cor}(k-1) + c_3T_{cor}(k-2) + d_1T_W(k) + d_2T_W(k-1) + e_1T_O(k) + f\dot{m}(k)T_S(k) \quad (3.22)$$

kde:

$$z_1(k) = a_1 - b_1 - c_1 - d_1 - e_1 - f\dot{m}(k)$$

$$z_2 = a_2 - b_2 - c_2 - d_2$$

$$z_3 = a_3 - c_3$$

Ve stavovém popisu bude za vstup považována teplota přiváděného vzduchu T_S a jeho hmotnostní průtok \dot{m} , výstup pak představuje teplota v dané místnosti T_Z . Teploty okolních místností T_E , T_{cor} , T_W a venkovní teplota T_O budou brány jako poruchové veličiny.

Stavový popis definujeme následovně:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) + \mathbf{B}_d \mathbf{d}(k) \quad (3.23a)$$

$$T_Z(k) = \mathbf{C} \mathbf{x}(k) \quad (3.23b)$$

kde $\mathbf{u}(k)$ je vstup systému a $\mathbf{x}(k)$ stavový vektor:

$$\mathbf{u}(k) = \begin{bmatrix} T_S(k) \\ \dot{m}(k) \end{bmatrix} \quad (3.24a)$$

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} T_Z(k) \\ T_Z(k-1) \\ T_Z(k-2) \end{bmatrix} \quad (3.24b)$$

Takto zavedené zpožděné stavy nám umožní jednoduchý převod struktury do stavového popisu, přičemž vektor poruchových veličin definujeme:

$$\mathbf{d}(k) = \begin{bmatrix} T_E(k) & T_E(k-1) & T_{cor}(k) & T_{cor}(k-1) & T_{cor}(k-2) & T_W(k) & T_W(k-1) & T_O(k) \end{bmatrix}^T. \quad (3.25)$$

Bilineární člen stavového zápisu funkce $\mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))$ vypadá následovně:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) = \mathbf{F}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}(k)T_S(k), \quad (3.26)$$

kde:

$$\mathbf{F}(k) = \begin{bmatrix} z_1(k) & z_2 & z_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}(k) = \begin{bmatrix} f\dot{m}(k) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

Dle výše definovaného stavového a poruchového vektoru, lze odvodit podobu matic \mathbf{C} a \mathbf{B}_d :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & c_1 & c_2 & c_3 & d_1 & d_2 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

Proměnný hmotnostní průtok \dot{m} přiváděného vzduchu T_S , který způsobuje nelinearitu struktury 3.22 a zavádí do stavového popisu bilineární člen 3.26, budeme pro regulátor pracující s lineárním modelem považovat za konstantní s hodnotou $\dot{m} = 0.52 \text{ kg s}^{-1}$. Tato hodnota je převzata z naměřených dat a odpovídá maximální hodnotě průtoku. Tím se nám zjednoduší stavový zápis do klasické lineární podoby 3.29.

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}T_S(k) + \mathbf{B}_d\mathbf{d}(k) \quad (3.29a)$$

$$T_Z(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \quad (3.29b)$$

kde:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad z_1 = a_1 - b_1 - c_1 - d_1 - e_1 - f\dot{m}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} f\dot{m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

Ostatní proměnné a matice zůstávají stejné.

Kapitola 4

Řízení na základě modelu

Rozšířením číslicové techniky v oblasti řízení a popisem procesů v diskrétní podobě se začala rozvíjet oblast řízení na základě modelu [4]. Regulátor pracuje s matematickým modelem řízeného systému. Díky tomu může regulátor předvídat budoucí chování regulovaného systému a optimalizovat akční zásahy do systému. Tuto oblast nazýváme prediktivním řízením [4]. Jedná se tedy o pokročilou regulační metodu, v porovnání například s klasickým PID řízením, jenž bere v úvahu jen současné a minulé hodnoty vstupů, výstupů. Regulace na základě modelu reaguje navíc na predikovanou budoucí hodnotu regulačních odchylek, které získá z modelu. Dnes již s růstem výpočetního výkonu lze využívat naplno těchto možností pro řízení v reálném čase. V případě vytápění budov může takovýto regulátor představovat významnou úsporu energie až v rozsahu několika desítek procent [17].

Prediktivní regulátory mohou pracovat s lineárním i nelineárním modelem řízeného systému. Zatímco v případě lineárního modelu řeší regulátor konvexní optimalizační problém, u nelineární varianty modelu již konvexní není a musíme se spoléhat na numerické metody výpočtu, které jsou výpočetně náročné a nestabilní [3].

4.1 MPC

Výrazem MPC¹ se označují jakékoliv metody řízení, které pracují s matematickým modelem řízené soustavy a na jehož základě se snaží nalézt optimální regulační zásahy [17]. Výpočet optimálních zásahů do systému se provádí na základě účelové funkce, jejíž hod-

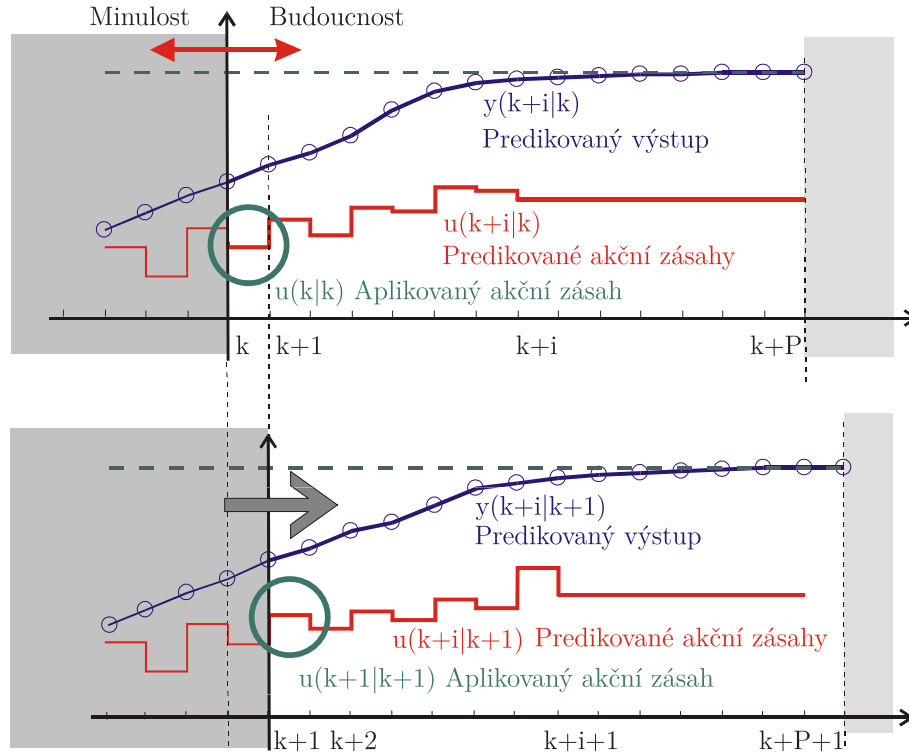
¹MPC (Model Predictive Control), v překladu „Prediktivní řízení na základě modelu“.

nota se optimalizuje s ohledem na jakékoliv omezení, která lze definovat (například omezení na veličiny vstupní, výstupní, stavové, ale také fyzikální vlastnosti systému) a která jsou již při hledání optimální hodnoty účelové funkce respektována. V každém kroku regulace je vyřešen optimalizační problém v konečném horizontu až do výše predikčního horizontu, který budeme značit P . Výsledkem je posloupnost akčních zásahů, které jsou pak následně aplikovány na systém. MPC je od začátku koncipováno jako mnohazměrové, je schopné pracovat s větším počtem akčních a regulovaných veličin [4].

Co se však stane v případě, kdy není model zcela přesný, nebo když se objeví neočekávané události, které nelze předvídat, není stanoveno. Tato strategie klade důraz na velmi přesný model řízeného systému a nemůže brát v potaz jevy, jenž se mohou objevit až po vypočtení optimální posloupnosti akčních zásahů. Z tohoto důvodu je vhodné zavést zpětnou vazbu v podobě MPC s posuvným predikčním horizontem [18].

4.1.1 Posuvný predikční horizont

Algoritmus MPC s posuvným predikčním horizontem opět řeší v každém kroku optimalizační problém v konečném horizontu, avšak z vypočtené posloupnosti akčních zásahů na systém aplikuje vždy jen první. Zbytek sekvence se nijak neuplatní. V dalším regulačním kroku následuje změření aktuálních stavů a výstupů systému a provede se nová optimalizace řídicích zásahů. Výhoda je zjevná, po jednotlivém aplikovaném zásahu můžeme změřit skutečnou reakci systému (jeho skutečný výstup a stav) a tu potom zahrnout do další optimalizace posloupnosti řídicích zásahů. Tím získáme zpětnou vazbu, díky které můžeme reagovat na poruchové události a korigovat nepřesnosti v použitém modelu. Regulátor s tímto chováním značíme RHC (Receding Horizon Control). Průběh algoritmu je znázorněn na následujícím obrázku 4.1:



Obrázek 4.1: Průběh MPC s RHC. Převzato a upraveno z [2]

Používaný zápis $x(k+i|k)$ představuje predikovaný stav v čase $k+i$ vytvořený v čase k . Obdobně pro akční zásah u .

4.1.2 Optimalizace

Matematický výpočet optimálních akčních zásahů \mathbf{u} je realizován minimalizací ztrátové funkce 4.1 na množině \mathbf{u} přes konečný predikční horizont P . Tuto funkci je třeba nadefinovat tak, aby charakterizovala naše požadavky na regulaci. Například dle toho, chceme-li sledovat zadanou referenci nebo jakkoli regulovat systém.

$$LS = \sum_{i=0}^{P-1} ls(\mathbf{x}(k+i|k), \mathbf{u}(k+i|k)) \quad (4.1a)$$

$$\min_{\mathbf{u}} LS \quad (4.1b)$$

4.2 Vytápění v místnosti

MPC regulátor budeme demonstrovat na dynamickém systému v podobě teplotního modelu místnosti, který jsme si vytvořili v Kapitole 3. Místnost je vytápěná přívodem teplého vzduchu T_S s hmotnostním průtokem \dot{m} .

4.2.1 Požadavky na regulaci

Je energeticky výhodnější udržovat teplotu v místnosti T_Z v daném rozmezí, než-li sledovat přesně zadanou referenci. Člověk velmi malé rozdíly teplot nevnímá [19]. V určité době, kdy se nepředpokládá přítomnost osob, můžeme změnit (zmírnit) teplotní nároky.

Tyto omezující podmínky je nutné zahrnout do MPC regulace. Konkrétní podoba omezujících podmínek, které použijeme při regulaci jsou následující:

$$T_{Z_{min}1} \leq T_Z \leq T_{Z_{max}1} \quad \text{v době od } 8^{00} \text{ do } 18^{00} \quad (4.2a)$$

$$T_{Z_{min}2} \leq T_Z \leq T_{Z_{max}2} \quad \text{v jiný čas} \quad (4.2b)$$

$$T_{S_{min}} \leq T_S \leq T_{S_{max}} \quad (4.2c)$$

Dané hodnoty mezí, v době kdy se předpokládá přítomnost osob v místnosti, jsme pro regulaci zvolili tak, aby teplota odpovídala komfortnímu prostředí pro většinu osob [19]: $T_{Z_{min}1} = 20^\circ\text{C}$, $T_{Z_{max}1} = 24^\circ\text{C}$. Druhé teplotní rozmezí rozšíříme: $T_{Z_{min}2} = 18^\circ\text{C}$, $T_{Z_{max}2} = 26^\circ\text{C}$. Teplota přívodního vzduchu T_S může nabývat pouze omezených hodnot $T_{S_{min}} = 15^\circ\text{C}$, $T_{S_{max}} = 40^\circ\text{C}$.

4.2.2 Optimalizace

Budeme předpokládat, že vzduchotechnika starající se o větrání a vytápění místnosti cirkuluje a ohřívá primárně vzduch zevnitř místnosti. Při poklesu kvality vzduchu je přiváděn vzduch venkovní. Tím se sníží energetický výdej na topení, který bude úměrný rozdílu teploty přiváděného vzduchu T_S a teploty uvnitř místnosti T_Z , násobeným hmotnostním průtokem \dot{m} . To také znamená, že nechceme, aby teplota dodávaného vzduchu byla nižší než v místnosti. Tuto hodnotu budeme při regulaci optimalizovat:

$$\min_{\dot{m}, T_S} \dot{m}(T_S - T_Z). \quad (4.3)$$

A zároveň budeme chtít udržovat teplotu v daném rozmezí 4.2. Tento vztah 4.3 je výhodnější než minimalizovat rozdíl teploty v místnosti a teploty venkovní $T_Z - T_O$,

neboť například pro případ $T_Z > T_O$ a $T_{Z_{min1}} > T_{Z_{min2}}$ budeme při širším rozsahu teplot chladit, tzn. při omezení v podobě $T_{Z_{min2}}$, a následně při přechodu na $T_{Z_{min1}}$ zbytečně ochlazený vzduch ohřívat.

Pro případ práce s lineárním modelem, kde \dot{m} je konstantní. Budeme optimalizovat pouze rozdíl teplot:

$$\min_{T_S} T_S - T_Z. \quad (4.4)$$

4.3 Řízení vytápění pomocí lineárního MPC

Regulátor bude pracovat s lineárním modelem řízeného systému 3.29.

4.3.1 Formulace MPC

Vývoj modelu systému ve stavovém prostoru v rámci predikčního horizontu P můžeme vektorizovat [18]:

$$\mathbf{X} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(k|k) + \bar{\mathbf{B}}T_S + \bar{\mathbf{B}}_d\bar{\mathbf{d}}, \quad (4.5a)$$

$$\mathbf{T}_Z = \bar{\mathbf{C}}\mathbf{X}, \quad (4.5b)$$

kde:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k|k)^T & \mathbf{x}(k+1|k)^T & \cdots & \mathbf{x}(k+P-1|k)^T \end{bmatrix}^T, \\ \mathbf{T}_S &= \begin{bmatrix} T_S(k|k) & T_S(k+1|k) & \cdots & T_S(k+P-1|k) \end{bmatrix}^T, \\ \mathbf{T}_Z &= \begin{bmatrix} T_Z(k|k) & T_Z(k+1|k) & \cdots & T_Z(k+P-1|k) \end{bmatrix}^T, \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}^{P-1} \end{bmatrix}, & \bar{\mathbf{B}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{AB} & \mathbf{B} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}^{P-2}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{AB} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \\ \bar{\mathbf{B}}_d &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_d & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{AB}_d & \mathbf{B}_d & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}^{P-2}\mathbf{B}_d & \cdots & \mathbf{AB}_d & \mathbf{B}_d & \mathbf{0} \end{bmatrix}, & \bar{\mathbf{C}} &= \text{diag}(\mathbf{C} \ \cdots \ \mathbf{C}). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Podobu matice $\bar{\mathbf{d}}$ můžeme pojmut několika způsoby podle toho, jak budeme nahlížet na možné známe predikce poruchových veličin, které představují teploty okolních místností a venkovní teplota.

Nejednoduší interpretace předpokládá, že tyto veličiny nelze v rámci predikčního horizontu nikterak ovlivnit a neumíme je predikovat. V tomto případě je považujeme po celou dobu predikčního horizontu za konstantní:

$$\bar{\mathbf{d}}_{konst.} = \left[\mathbf{d}(k)^T \quad \mathbf{d}(k)^T \quad \cdots \quad \mathbf{d}(k)^T \right]^T. \quad (4.8)$$

Na druhou stranu vývoj venkovní teploty lze v krátkodobém horizontu získat meteorologickou předpovědí, proto můžeme tuto skutečnost zahrnout do formulace MPC:

$$\bar{\mathbf{d}}_{pred.} = \left[\mathbf{d}(k|k)^T \quad \mathbf{d}(k+1|k)^T \quad \cdots \quad \mathbf{d}(k+P-1|k)^T \right]^T, \quad (4.9)$$

kde pro $i = 0 \cdots P-1$:

$$\mathbf{d}(k+i|k) = \left[T_E(k) \quad T_E(k-1) \quad T_{cor}(k) \quad \cdots \quad T_W(k-1) \quad T_O(k+i|k) \right]^T. \quad (4.10)$$

Naskýtá se také možnost implementovat stejné algoritmy řízení i pro okolní místnosti. V rámci spolupráce bychom potom mohli využít i predikce teplot okolních místností. V tomto případě by měl vektor poruchových veličin tvar:

$$\mathbf{d}(k+i|k) = \left[T_E(k+i|k) \quad T_E(k+i-1|k) \quad T_{cor}(k+i|k) \quad \cdots \quad T_W(k+i-1|k) \quad T_O(k+i|k) \right]^T. \quad (4.11)$$

Téměř vždy můžeme získat krátkodobou předpověď vývoje venkovní teploty, a proto se budeme věnovat pouze posledním dvěma případům.

4.3.2 MPC regulace s tvrdým omezením

Na začátku 4.2.2 jsme si zdůvodnili, proč budeme v rámci regulace optimalizovat rozdíl teplot T_S a T_Z . Nyní si nadefinujeme ztrátovou funkci pomocí vektorizovaných veličin 4.6, kterou budeme optimalizovat v rámci predikčního horizontu P :

$$\min_{\mathbf{T}_S} (\mathbf{T}_S - \mathbf{T}_Z)^T \mathbf{Q} (\mathbf{T}_S - \mathbf{T}_Z) \quad (4.12)$$

kde $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T$, $\mathbf{Q} > \mathbf{0}$ je váhová diagonální matice. Tento výraz budeme řešit za podmínek 4.2 pomocí funkce *quadprog* 3.18. Vyjádřením teploty v místnosti \mathbf{T}_Z :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_Z &= \bar{\mathbf{C}} \mathbf{X} \\ \mathbf{T}_Z &= \bar{\mathbf{C}} (\bar{\mathbf{A}} \mathbf{x}(k|k) + \bar{\mathbf{B}} \mathbf{T}_S + \bar{\mathbf{B}}_d \bar{\mathbf{d}}) \end{aligned} \quad (4.13)$$

a dosazením do 4.12 odvodíme tvar optimalizačního problému pro funkci *quadprog*:

$$\frac{1}{2} \mathbf{T}_S^T \mathbf{H} \mathbf{T}_S + \mathbf{f}^T \mathbf{T}_S, \quad (4.14)$$

kde:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{Q} - \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{C}}^T \mathbf{Q} - \mathbf{Q} \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{C}}^T \mathbf{Q} \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{B}}, \\ \mathbf{f}^T &= \mathbf{x}(k|k)^T \bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{C}}^T \mathbf{Q} \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{B}} - \mathbf{x}(k|k)^T \bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{C}}^T \mathbf{Q} + \bar{\mathbf{d}}^T \bar{\mathbf{B}}_d^T \bar{\mathbf{C}}^T \mathbf{Q} \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{B}} - \bar{\mathbf{d}}^T \bar{\mathbf{B}}_d^T \bar{\mathbf{C}}^T \mathbf{Q}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

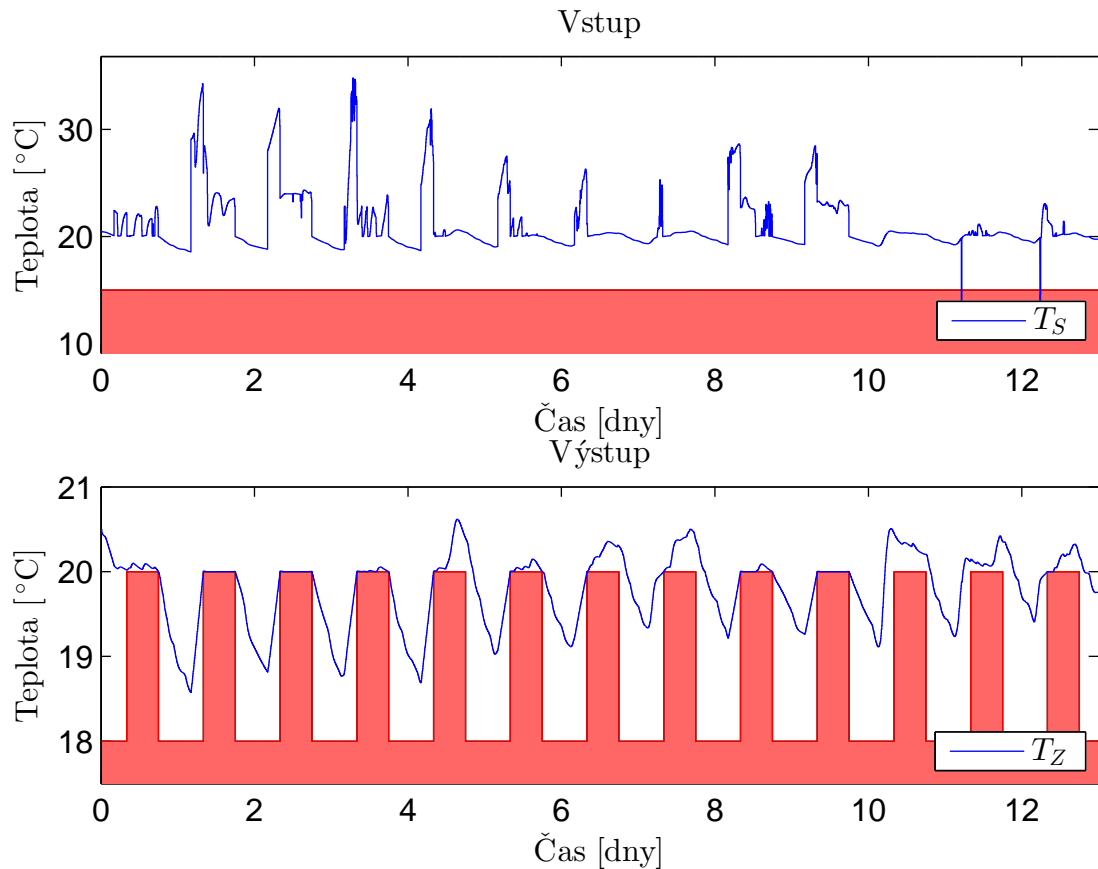
Omezující podmínky regulace zadáme funkci *quadprog* pevně formou vstupních parametrů \mathbf{c} a \mathbf{b} . $\mathbf{T}_{Z_{min}} \leq \mathbf{T}_Z \leq \mathbf{T}_{Z_{max}}$ převedeme dle 4.13 do tvaru $\mathbf{c} \mathbf{T}_S \leq \mathbf{b}$:

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{B}} \\ -\bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{B}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{Z_{max}} - \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{A}} \mathbf{x}(k|k) - \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{B}}_d \bar{\mathbf{d}} \\ -\mathbf{T}_{Z_{min}} + \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{A}} \mathbf{x}(k|k) + \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{B}}_d \bar{\mathbf{d}} \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

Podmínky $\mathbf{T}_{S_{min}} \leq \mathbf{T}_S \leq \mathbf{T}_{S_{max}}$ zadáme funkci *quadprog* jako meze optimalizovaných parametrů \mathbf{T}_S : $\mathbf{l} \mathbf{b} = \mathbf{T}_{S_{min}}$ a $\mathbf{u} \mathbf{b} = \mathbf{T}_{S_{max}}$.

4.3.2.1 Výsledek simulace regulace

Funkčnost výše definovaného MPC regulátoru s posuvným predikčním horizontem odpovídajícím 4 hodinám jsme ověřili simulací. Využili jsme zde znalost předpovědi venkovní teploty T_O v rámci predikčního horizontu P . Predikci venkovní teploty jsme získali z naměřených dat. Stejně tak průběh poruchových veličin byl získán z již dříve použitých naměřených dat. Simulace probíhala v délce 13 dnů. Výsledek lze vidět na obrázku 4.2. Na prvním grafu lze vidět vývoj vstupní teploty dodávaného vzduchu T_S a na druhém grafu vývoj teploty v místnosti T_Z . Červená oblast značí zadané omezení a ohraničuje oblast, ve které by se teplota měla pohybovat.



Obrázek 4.2: MPC s RHC tvrdé omezení

Takto definované MPC s pevně daným omezením může být numericky nestabilní. Což vede k nepředvídatelným událostem v závislosti na použitém algoritmu funkce *quadprog*. Není totiž stanoveno, jak se má optimalizační algoritmus zachovat v případě, kdy je problém neřešitelný za daných omezení a může dojít k jejich porušení. Proto se používá varianta MPC s měkkým omezením [20].

4.3.3 MPC regulace s měkkým omezením

Vlivem poruchových vstupů, které nelze předpovídat nebo použitím velmi přísných regulačních omezení, pro stavové, vstupní a výstupní veličiny, se může stát problém pro optimalizační algoritmus neproveditelný. V těchto případech se některé ze zadaných omezení poruší, což vede k nepředvídatelným událostem.

Tomu lze zabránit změkčením omezení s použitím tzv. volné proměnné², která charak-

²Slack variable

terizuje velikost porušení našich požadavků. Tato proměnná se zahrne do ztrátové funkce tedy i do optimalizačního problému. Díky tomu se algoritmus bude tuto proměnnou snažit optimalizovat neboli minimalizovat a za normálních podmínek bude rovná nule. Výsledek poté bude stejný jako v případě tvrdého omezení. Avšak dostane-li se systém do stavu, kdy je nevyhnutelné porušit zadané omezení, bude proměnná a také její příspěvek do ztrátové funkce adekvátně narůstat. To nám zaručí řešitelnost i v případech kdy se stav systému dostane do, pro optimalizační algoritmus, neřešitelných hodnot [20].

4.3.3.1 Optimalizace s měkkým omezením

Regulace bude opět založená na optimalizaci 4.12, avšak navíc budeme minimalizovat velikost volné proměnné, kterou označíme ε . Optimalizační problém v průběhu predikčního horizontu P má následující maticový tvar:

$$\min_{\mathbf{T}_S, \varepsilon} (\mathbf{T}_S - \mathbf{T}_Z)^T \mathbf{Q} (\mathbf{T}_S - \mathbf{T}_Z) + \varepsilon^T \mathbf{R} \varepsilon, \quad (4.17)$$

kde $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T$, $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T$, $\mathbf{Q} > \mathbf{0}$, $\mathbf{R} > \mathbf{0}$ jsou diagonální váhové matice a

$$\varepsilon = \left[\varepsilon(k|k)^T \quad \varepsilon(k+1|k)^T \quad \dots \quad \varepsilon(k+P-1|k)^T \right]^T$$

je průběh volné proměnné ε v rámci predikčního horizontu P .

Rozdílným nastavením váhových matic můžeme volit s jakou váhou budou omezení respektována, na úkor energetické spotřeby. Aby regulace s měkkými omezeními dostatečně respektovala zadané omezení, je nutné volit váhové matice řádově $\mathbf{R} \gg \mathbf{Q}$. Je možné nalézt i přesné hodnoty \mathbf{R} , při kterých se výsledky regulace s tvrdým a měkkým omezením shodují v případě, že je optimalizační problém proveditelný viz [20].

Omezení 4.2 přepíšeme s pomocí ε , tak aby představovala velikost porušení těchto podmínek. Měkké omezení budeme zavádět pouze na požadovanou teplotu v místnosti T_Z , jelikož meze teploty přiváděného vzduchu T_S 4.2c jsou většinou pevně dané konstrukcí vytápěcí soustavy. Měkké omezující podmínky tedy definujeme následovně³:

$$\mathbf{T}_{Z_{min}} - \varepsilon \leq \mathbf{T}_Z \leq \mathbf{T}_{Z_{max}} + \varepsilon \quad (4.18)$$

Takto pojaté volné proměnné musí splňovat podmínku $\varepsilon \geq \mathbf{0}$.

³Horní mez výstupní teploty bychom mohli zadat jako tvrdé omezení, použité v předchozím případě. Jelikož se nepředpokládá, při vytápění a minimalizaci energetické spotřeby, problém s horní teplotní mezí.

Optimalizační úloha v případě minimalizace \mathbf{T}_S a ε je následující:

$$\min_U \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \bar{\mathbf{H}} \mathbf{U} + \bar{\mathbf{f}}^T \mathbf{U}, \quad (4.19)$$

za podmínek:

$$\bar{\mathbf{c}} \mathbf{U} \leq \bar{\mathbf{b}}, \quad (4.20)$$

kde:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_S \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

Matice \mathbf{H} a \mathbf{f} jsou stejné jako v 4.15. Matice $\bar{\mathbf{c}}$ a $\bar{\mathbf{b}}$ odvodíme z podmínek 4.18 s dosazením 4.13:

$$-\bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{B}}\mathbf{T}_S - \varepsilon = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}_{k|k} + \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{B}}_d\bar{\mathbf{d}} - \mathbf{T}_{Z_{min}}, \quad (4.22a)$$

$$\bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{B}}\mathbf{T}_S - \varepsilon = -\bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}_{k|k} - \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{B}}_d\bar{\mathbf{d}} + \mathbf{T}_{Z_{max}}, \quad (4.22b)$$

$$\bar{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{B}} & -\mathbf{I} \\ \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{B}} & -\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}_{k|k} + \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{B}}_d\bar{\mathbf{d}} - \mathbf{T}_{Z_{min}} \\ -\bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}_{k|k} - \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{B}}_d\bar{\mathbf{d}} + \mathbf{T}_{Z_{max}} \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

Omezení $\mathbf{T}_{S_{min}} \leq \mathbf{T}_S \leq \mathbf{T}_{S_{max}}$ a $\mathbf{0} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{max}$ zadáme funkci *quadprog* přímo jako vstupní parametry \mathbf{lb} a \mathbf{ub} :

$$\mathbf{lb} \leq \mathbf{U} \leq \mathbf{ub}, \quad (4.24)$$

kde:

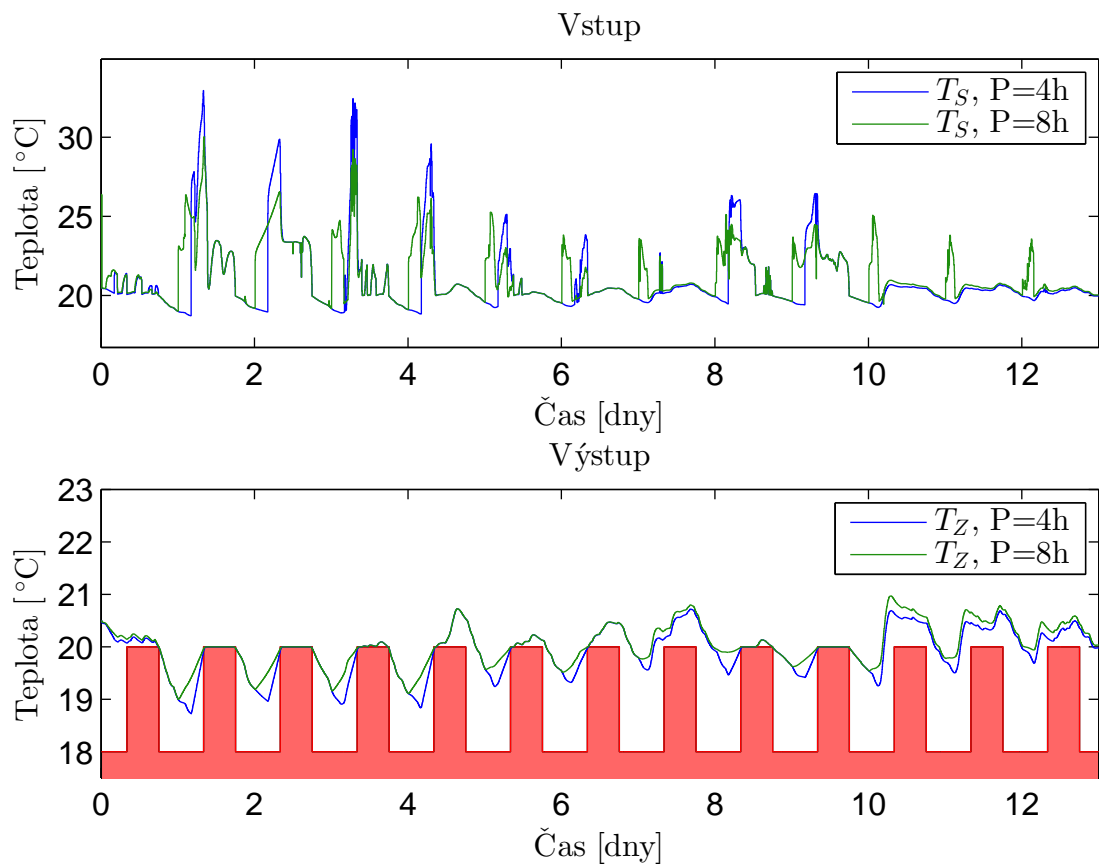
$$\mathbf{lb} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{S_{min}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{ub} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{S_{max}} \\ \varepsilon_{max} \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

Proměnnou ε nemusíme omezovat, formálně její omezení znamená maximální možné porušení zadaných podmínek. Pro úplnost omezíme ε hodnotou ε_{max} .

4.3.3.2 Výsledek simulace regulace

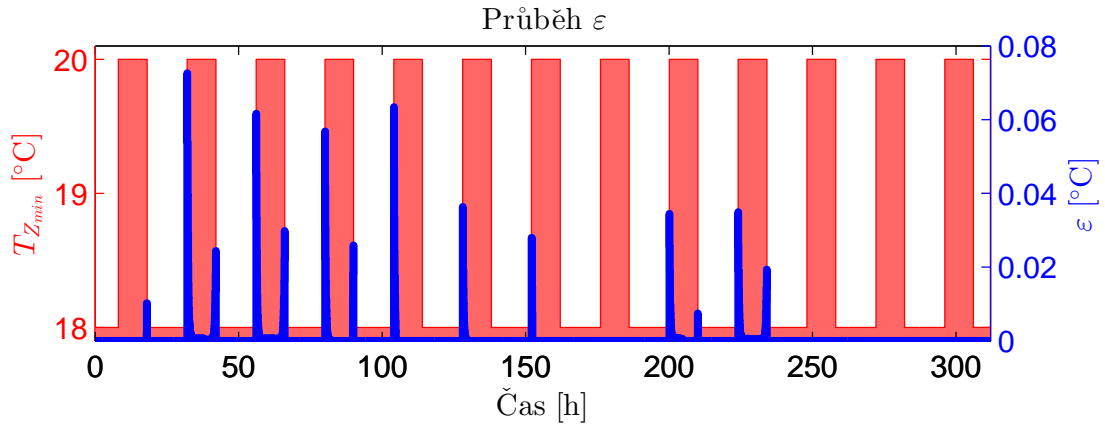
Opět jsme provedli simulaci výše definovaného MPC regulátoru s posuvným predikčním horizontem. Nyní navíc se zavedeným měkkým omezením.

S předpovědí venkovní teploty Výsledek simulace s použitím měkkých omezení a známé meteorologické predikce venkovní teploty T_O lze vidět na následujícím obrázku 4.3, který obsahuje vývoj vstupní teploty T_S a výstupní T_Z . Regulátor byl simulován pro porovnání s predikčním horizontem 4 a 8 hodin. Delší predikční horizont při regulaci dává jednoznačně lepší výsledky, neboť regulátor zná delší budoucí průběhy omezení, predikovaných stavů modelu a delší horizont předpovědi venkovní teploty. Začíná tedy topit dříve. S delším predikčním horizontem však roste velikost výše definovaných matic a s tím výpočetní náročnost.



Obrázek 4.3: MPC s RHC, měkké omezení, známé predikce teploty T_O

Průběh proměnné ε během regulace je znázorněn na grafu 4.4.

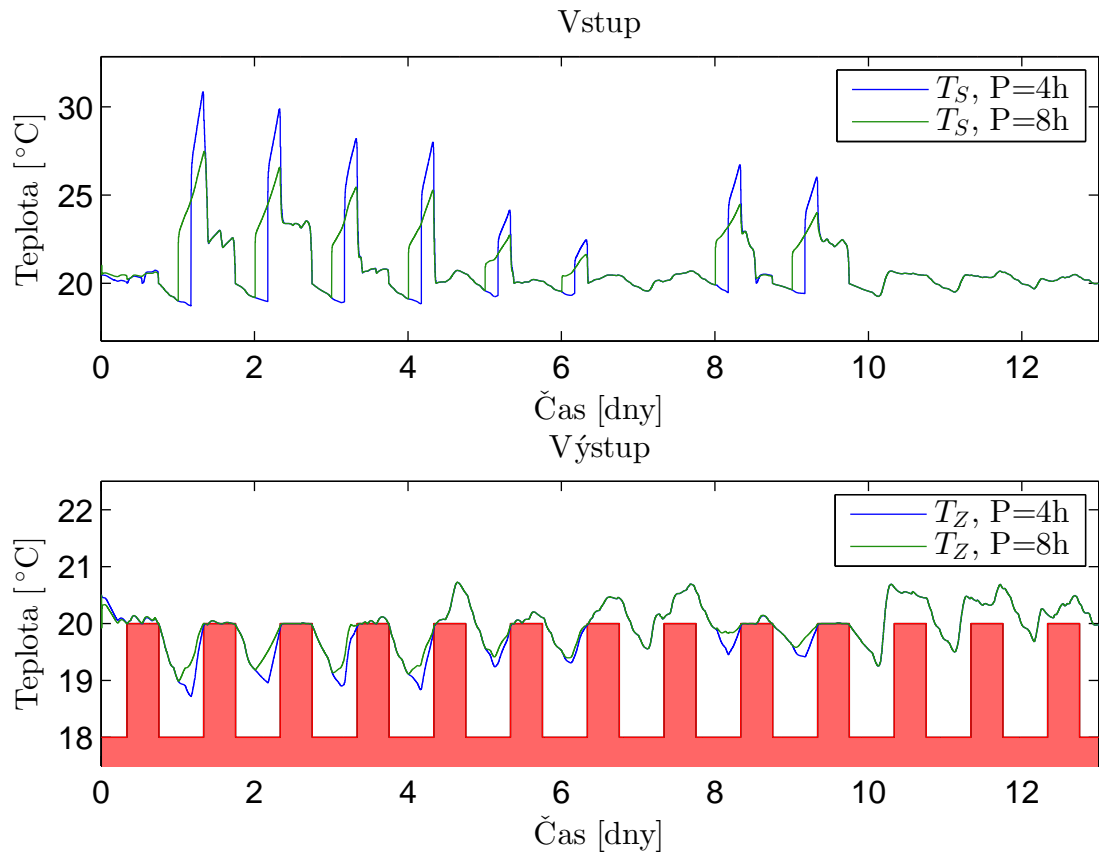


Obrázek 4.4: Průběh proměnné ε u MPC s RHC a měkkým omezením

Je vidět, že velikost ε narůstá v časech, kdy se mění omezující podmínky. Vliv na velikost má mimo jiné také vývoj poruchových veličin, které nelze predikovat. Tím dělají optimalizaci složitější, což se také projeví nárůstem ε při jejich nečekané změně.

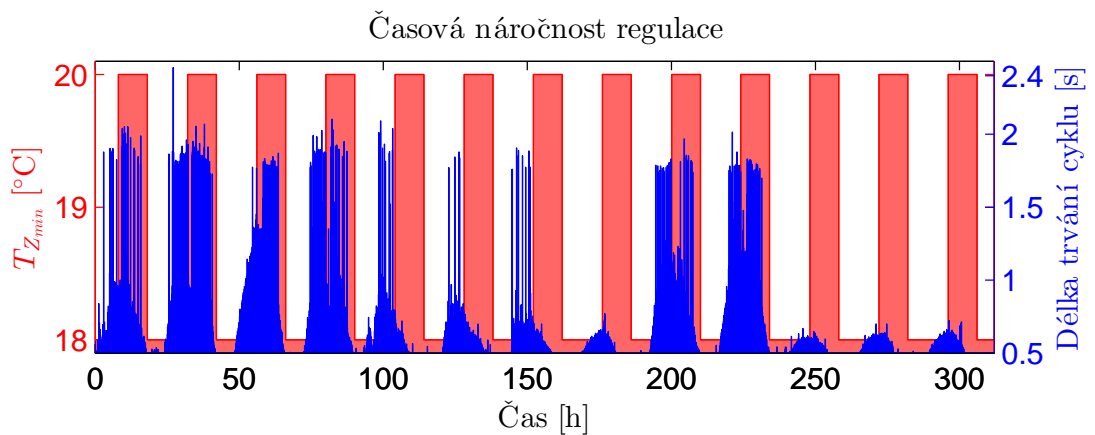
S předpovědí venkovní teploty a predikcí teplot okolních místností Zvýšení predikčního horizontu získáme o něco lepší výsledky, ale stále regulátor nemůže předvídat vývoj poruchových veličin. Daleko lepších výsledků docílíme, získáme-li predikci teplotního vývoje v okolních místnostech. Abychom mohli nasimulovat tento případ, využili jsme naměřených dat, která budeme pokládat za predikovaná. Výsledek simulace s využitím známých predikcí teplot okolních místností a teploty venkovní, je vidět na obrázku 4.5. Opět je simulace vypočtena pro dva predikční horizonty 4h a 8h.

Vývoj teploty T_S je hladký, bez výrazných špiček, které by eventuálně mohly být pro uživatele, který se nachází v místnosti, nepříjemné.



Obrázek 4.5: MPC s RHC, měkké omezení, známé predikce teplot

Orientační časová náročnost jednotlivých regulačních kroků posledního uvažovaného příkladu, pro predikční horizont 8 hodin, je zobrazena na obrázku 4.6.



Obrázek 4.6: Časová náročnost MPC s RHC, měkké omezení, známé predikce teplot

Z grafu lze vidět, že výpočetní náročnost vzroste ve chvíli, kdy regulátor predikčním horizontem obsáhne oblast přísnějšího omezení 4.2a, které zužuje rozmezí, ve kterém se může teplota v místnosti pohybovat.

V případě použití MPC, které pracuje s lineárním modelem, můžeme bez problému uvažovat predikční horizont v řádu několika hodin, až jednoho dne. Záleží na výpočetním výkonu, jenž je k dispozici pro regulaci.

4.4 Řízení vytápění pomocí nelineárního MPC

Nelineární MPC budeme značit NMPC. Při použití nelineárního modelu se již nejedná o optimalizační úlohu kvadratického programování. Samotný optimalizační algoritmus je založený na numerické metodě, jejíž výpočetní náročnost je závislá na složitosti modelu a velikosti predikčního horizontu.

4.4.1 Formulace NMPC

Budeme vycházet z nelineárního stavového zápisu modelu 3.23, který vektorizujeme. K již zavedeným veličinám \mathbf{X} , \mathbf{T}_S , \mathbf{T}_Z 4.6 přidáme hmotnostní průtok $\dot{\mathbf{m}}$ v rámci predikčního horizontu P :

$$\dot{\mathbf{m}} = \left[\dot{m}(k|k) \quad \dot{m}(k+1|k) \quad \cdots \quad \dot{m}(k+P-1|k) \right]^T. \quad (4.26)$$

Vektorizovaný stavový zápis v průběhu predikčním horizontu P má následující tvar:

$$\mathbf{X} = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(k|k), \mathbf{T}_S, \dot{\mathbf{m}}, \bar{\mathbf{B}}_d, \bar{\mathbf{d}}) \quad (4.27a)$$

$$\mathbf{T}_Z = \bar{\mathbf{C}}\mathbf{X}. \quad (4.27b)$$

Funkce $\bar{\mathbf{f}}$ je definována následovně:

$$\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(k|k), \mathbf{T}_S, \dot{\mathbf{m}}, \bar{\mathbf{B}}_d, \bar{\mathbf{d}}) = \bar{\mathbf{F}}\mathbf{x}(k|k) + \bar{\mathbf{G}}\mathbf{T}_S + \bar{\mathbf{B}}_d\bar{\mathbf{d}}, \quad (4.28)$$

kde:

$$\bar{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{F}(k|k) \\ \mathbf{F}(k+1|k)\mathbf{F}(k|k) \\ \vdots \\ \mathbf{F}(k+P-1|k) \cdots \mathbf{F}(k+1|k)\mathbf{F}(k|k) \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}(k|k) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{F}(k+1|k)\mathbf{B}(k|k) & \mathbf{B}(k+1|k) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \mathbf{F}(k+2|k)\mathbf{B}(k+1|k) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{F}(k+P-2|k)\cdots\mathbf{F}(k+1|k)\mathbf{B}(k|k) & \cdots & \mathbf{F}(k+P-2|k)\mathbf{B}(k+P-3|k) & \mathbf{B}(k+P-2|k) & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{B}}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_d & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{F}(k+1|k)\mathbf{B}_d & \mathbf{B}(k+1|k) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \mathbf{F}(k+2|k)\mathbf{B}_d & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{F}(k+P-2|k)\cdots\mathbf{F}(k+1|k)\mathbf{B}_d & \cdots & \mathbf{F}(k+P-2|k)\mathbf{B}_d & \mathbf{B}_d & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Maticе $\bar{\mathbf{d}}$, \mathbf{B}_d jsou stejné jako v případě lineárního MPC. Matici $\bar{\mathbf{d}}$ volíme dle predikcí, které uvažujeme. Například počítáme-li pouze s předpovědí venkovní teploty nebo navíc se známým průběhem teplot okolních místností (viz část 4.3.1). Proměnné matice $\mathbf{F}(k+i|k)$, $\mathbf{G}(k+i|k)$ pro $i = 0 \dots P-2$ jsou:

$$\mathbf{F}(k+i|k) = \begin{bmatrix} z_1(k+i|k) & z_2 & z_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad z_1(k+i|k) = a_1 - b_1 - c_1 - d_1 - e_1 - f\dot{m}(k+i|k),$$

$$\mathbf{G}(k+i|k) = \begin{bmatrix} f\dot{m}(k+i|k) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4.4.2 Optimalizace

V nelineárním modelu systému máme dvě vstupní veličiny. Jedná se o teplotu přiváděného vzduchu T_S a jeho hmotnostní průtok \dot{m} . Tyto dvě veličiny budeme chtít při řízení optimalizovat. Budeme vycházet ze ztrátové funkce 4.3, kterou jsme používali při práci s lineárním modelem.

Mohli bychom optimalizovat přímo zmíněnou funkci, avšak optimalizace v tomto tvaru by byla výpočetně náročná. Ztrátovou funkci si proto upravíme do tvaru 4.29, který je pro následnou optimalizaci jednodušší a zároveň je také korektní [18]. Budeme chtít zachovat zavedené měkké omezující podmínky 4.18, proto budeme optimalizovat také volnou proměnnou ε .

$$\min_{\mathbf{T}_S, \dot{m}, \varepsilon} (\mathbf{T}_S - \mathbf{T}_Z)^T \mathbf{Q} (\mathbf{T}_S - \mathbf{T}_Z) + \dot{m}^T \mathbf{L} \dot{m} + \varepsilon^T \mathbf{R} \varepsilon \quad (4.29)$$

Kde $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T$, $\mathbf{L} = \mathbf{L}^T$, $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T$, $\mathbf{Q} > \mathbf{0}$, $\mathbf{L} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{R} > \mathbf{0}$ jsou diagonální váhové matice. Rozdílným nastavením váhových matic volit můžeme váhu, s jakou budou ome-

zení respektována, na úkor energetické spotřeby. A navíc hodnotami matic \mathbf{Q} a \mathbf{L} máme možnost nastavit preferenci minimalizace rozdílu teplot $T_S - T_Z$ nebo velikosti hmotnostního průtoku \dot{m} . Aby regulace s měkkými omezeními respektovala dostatečně zadané omezení, je nutné volit hodnotu váhové matice \mathbf{R} řádově vyšší: $\mathbf{R} \gg \mathbf{Q}, \mathbf{L}$.

Pro optimalizační výpočet budeme používat funkci *fmincon*, která je součástí optimalizačního toolboxu Matlabu.

4.4.3 Funkce *fmincon*

Funkce *fmincon* v Matlabu hledá minimum nelineárně omezené nelineární funkce více proměnných [21]. Stejně jako v případě funkce *quadprog* budeme používat algoritmus *active-set*, který využívá sekvenční kvadratické programování SQP (Sequential Quadratic Programming). Což znamená, že v každé iteraci řeší podúlohu kvadratického programování, čímž se snaží postupně přiblížit našemu řešení. Optimalizační problém je definován:

$$\min_{\mathbf{U}} f(\mathbf{U}) \quad \text{za podmíněk} \quad \mathbf{c}(\mathbf{U}) \leq \mathbf{0}, \quad \mathbf{lb} \leq \mathbf{U} \leq \mathbf{ub}, \quad (4.30)$$

kde \mathbf{U} , \mathbf{lb} , \mathbf{ub} jsou vektory a $f(\mathbf{U})$, $\mathbf{c}(\mathbf{U})$ jsou nelineární funkce.

4.4.4 NMPC regulace s měkkým omezením

Jak už bylo řečeno, pro optimalizační jádro NMPC regulace použijeme funkci *fmincon*. Formulace optimalizační úlohy ve formě parametru pro funkci 4.30 je následující:

$$f(\mathbf{U}) = (\mathbf{T}_S - \mathbf{T}_Z)^T \mathbf{Q} (\mathbf{T}_S - \mathbf{T}_Z) + \dot{m}^T \mathbf{L} \dot{m} + \varepsilon^T \mathbf{R} \varepsilon, \quad (4.31)$$

kde:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_S \\ \dot{m} \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_Z = \bar{\mathbf{C}} \mathbf{X} = \bar{\mathbf{C}} (\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(k|k), \mathbf{T}_S, \dot{m}, \bar{\mathbf{B}}_d, \bar{\mathbf{d}})). \quad (4.32)$$

Omezení optimalizovaných veličin \mathbf{T}_S , \dot{m} a ε zadáme funkci *fmincon* přímo jako vstupní parametry \mathbf{lb} a \mathbf{ub} ve tvaru:

$$\mathbf{lb} \leq \mathbf{U} \leq \mathbf{ub}, \quad (4.33)$$

kde:

$$\mathbf{lb} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{S_{min}} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{ub} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{S_{max}} \\ \dot{m}_{max} \\ \varepsilon_{max} \end{bmatrix}. \quad (4.34)$$

Omezení hmotnostního průtoku vzduchu nastavíme na maximální hodnotu, kterou je systém schopný poskytnout. Ta odpovídá hodnotě $\dot{m}_{max} = 0.52 \text{ kg s}^{-1}$. Ostatní meze ponecháme stejné jako v případě lineární MPC regulace.

Vzhledem k výpočetní náročnosti při práci s nelineárním modelem, budeme omezovat pouze dolní teplotní mez T_Z , jelikož se nepředpokládá chlazení. Omezení $\mathbf{T}_{Z_{min}} - \varepsilon \leq \mathbf{T}_Z$ zadáme formou nelineární funkce $\mathbf{c}(\mathbf{U})$:

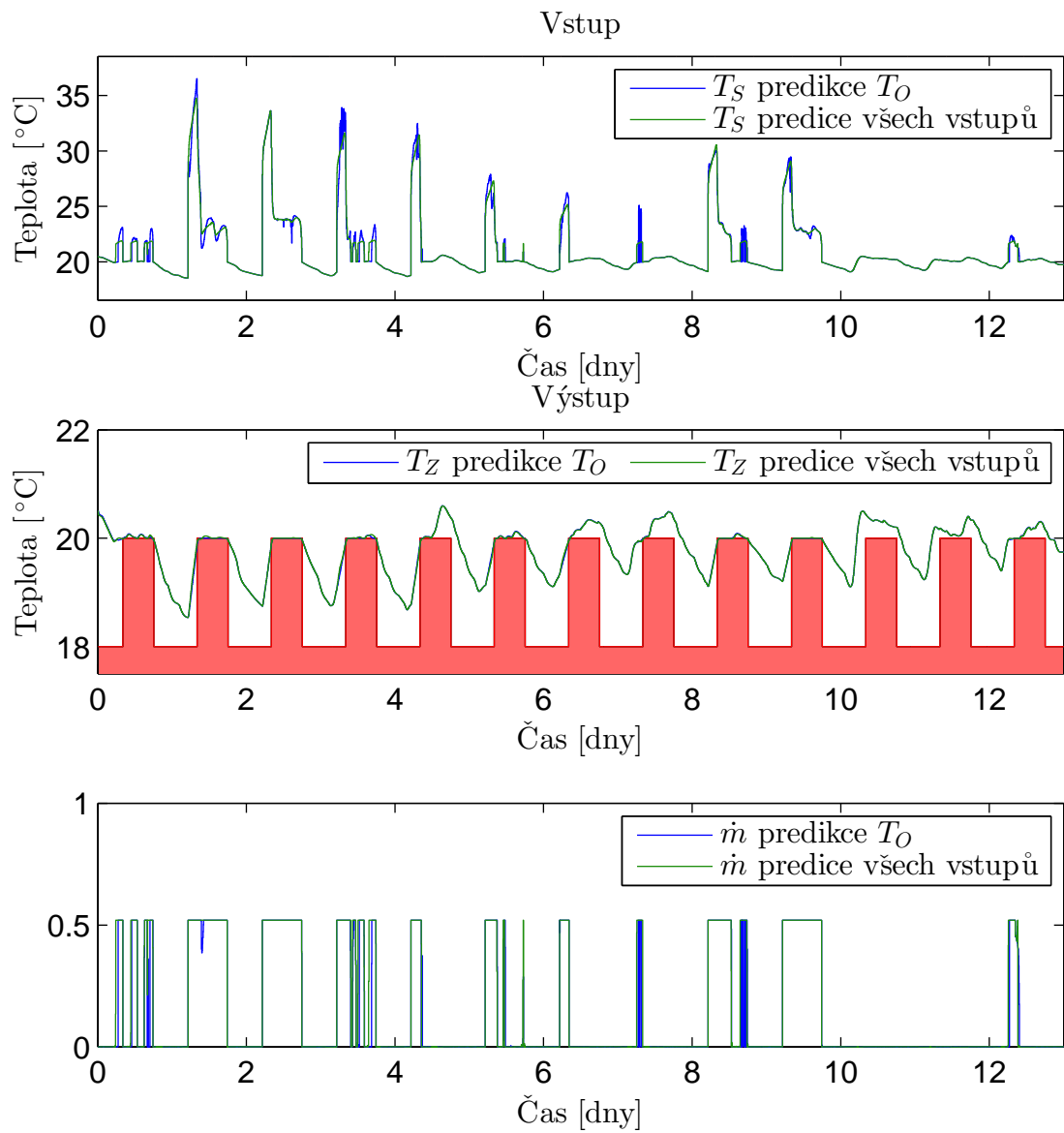
$$\mathbf{c}(\mathbf{U}) = -\bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{F}}\mathbf{x}(k|k) - \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{G}}\mathbf{T}_S - \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{B}}_d\bar{\mathbf{d}} + \mathbf{T}_{Z_{min}} - \varepsilon \leq \mathbf{0}. \quad (4.35)$$

4.4.4.1 Výsledek simulace regulace

Obrázek 4.7 zobrazuje simulaci regulace s 3 hodinovým predikčním horizontem. Opět můžeme pozorovat porovnání regulace se známou predikcí venkovní teploty T_O a také variantu, kdy uvažujeme známý vývoj teplot v okolních místnostech.

Výsledek velmi závisí na naší volbě preference při optimalizaci nastavením váhových matic. Uvedený výsledek je vypočten s nastavením váhových matic $\mathbf{Q} < \mathbf{L} \ll \mathbf{R}$. Zvolením $\mathbf{L} = \mathbf{0}$ bychom dostali téměř shodný výsledek jako v případě lineárního MPC. Lze vidět, že teplota dodávaného vzduchu se pohybuje ve vyšších hodnotách, než-li v případě lineárního MPC, jelikož optimalizujeme také hmotnostní průtok. Míra predikce poruchových veličin se zde ukázala jako zanedbatelná.

Při práci s nelineárním modelem je výpočetní náročnost v tomto případě tak vysoká, že je možné počítat s predikčním horizontem pouze v jednotkách hodin.



Obrázek 4.7: Nelineární MPC s RHC, měkké omezení

Kapitola 5

Závěr

Práce se zabývá identifikací parametrů teplotního modelu reálné místnosti a následnou implementací regulace vytápění na základě identifikovaného modelu.

Na začátku práce proběhlo seznámení s místností, pro kterou jsme navrhovali regulátor. Dodaná naměřená data bylo nutné zpracovat, přefiltrováním a převzorkováním. Takto jsme odstranili nedokonalosti vzniklé měřením a snížili objem zpracovávaných dat. Teplota v místnosti byla měřena dvěma odlišnými senzory s viditelně rozdílnými charakteristikami, byla uvažována průměrná hodnota z dat obou senzorů. Zpracovaná data byla použita v průběhu celé práce.

Dále jsme se seznámili s metodou nejmenších čtverců a jejím použitím pro identifikaci parametrů struktur dynamických systémů z naměřených dat. Po sestavení identifikačního algoritmu a hodnotícího kritéria, které sloužilo pro správnou identifikaci parametrů a jejich počtu, jsme identifikovali model řízené místnosti. Simulovaný výstup modelu s odhadnutými parametry se velice dobře shodoval s naměřenými daty, dle definovaného hodnotícího kritéria. Avšak neodpovídal fyzikálním zákonům. Bylo třeba zavést omezení na podobu výsledného modelu. K tomuto účelu jsme využili funkci *quadprog*, která řeší zadanou optimalizační úlohu s danými omezeními. Díky tomu jsme dostali identifikovaný model řízené místnosti, který již neodporuje fyzikálním zákonům. Výsledný model jsme převedli do nelineárního stavového popisu, který jsme následně zjednodušili. Tím jsme dostali systém v lineárním stavovém popisu, který je pro implementaci prediktivní regulace schůdnější.

Po nastudování problematiky regulace založené na modelu, jsme se věnovali regulaci, která pracuje s lineárním a nelineárním modelem. Řízená veličina byla teplota dodávaného vzduchu do místnosti a jeho hmotnostní průtok. Při implementaci a následné simulaci regulátoru s pevně zadanými omezeními na regulaci, jsme si ověřili nepředvídatelné chování

a numerickou nestabilitu optimalizačního algoritmu funkce *quadprog*. Nestabilita nastává v případě, kdy je problém pro optimalizační algoritmus neproveditelný. Proto jsme zavěli variantu s měkkými omezeními, která nám dává za normálních okolností stejný výsledek, jako v případě tvrdě omezeného regulátoru. Při regulaci jsme brali v úvahu možnost známé teplotní předpovědi venkovní teploty a také případ, kdy navíc známe predikce teplot okolních místností. Výsledek je doložen grafickým výstupem pro různé hodnoty predikčních horizontů a míru predikce. S růstem predikčního horizontu a mírou uvažované predikce teplot lze pozorovat jemnější regulační zásahy v podobě změny teploty dodávaného vzduchu.

Dále jsme vyzkoušeli implementovat regulátor, který pracuje s nelineárním modelem řízeného systému. Pro optimalizaci byla použita funkce *fmincon*. Optimalizovali jsme regulační zásahy, které představují teplota přiváděného vzduchu a jeho hmotnostní průtok. Zde se již projevila obrovská výpočetní náročnost, díky které lze počítat s predikčním horizontem pouze v řádu několika hodin.

Navržené prediktivní regulátory, které používají námi identifikovaný model místnosti, lze dle simulací pokládat za funkční a realizovatelné. Pro skutečné ověření funkčnosti by bylo vhodné regulátory vyzkoušet v praktickém nasazení.

Literatura

- [1] MAASOUMY, Mehdi a Alberto SANGIOVANNI-VINCENTELLI. *Online Simultaneous State Estimation and Parameter Adaptation for Building Predictive Control*. In *Dynamic System and Control Conference (DSCC 2013), Stanford, CA, USA.*, 2013.
- [2] BORRELLI, Francesco. *Model Predictive Control for Linear and Hybrid Systems*. University Lecture. University of California Berkeley, USA, 2011.
- [3] CAMACHO, Eduardo F. a Carlos BORDONS. *Model predictive control*. New York: Springer, 1999. ISBN 35-407-6241-8.
- [4] HLAVA, Jaroslav. *Prediktivní řízení založené na modelu: hlavní principy*. Přednáška. Technická univerzita v Liberci, 2013.
- [5] PETRÁK, Jiří. Inteligentní systémy pro správu energií aneb HVAC v budovách. In: [online]. Březen, 2013 [cit. 2014-05-01]. Dostupné z: <http://inbudovy.cz/artikul/article/inteligentni-systemy-pro-spravu-energii-aneb-hvac-v-budovach/>
- [6] TESARŮ, Radek. *INELS jako building management system s využitím Foxtrot*. Vysoké učení technické v Brně, 2010. Diplomová práce. Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií.
- [7] Matlab tutorial. *Noise Cancellation, simple butterworth filter design* [online]. Duben, 2010 [cit. 2013-12-09]. Dostupné z: http://www.eeprogrammer.com/tutorials/Matlab/Noise_Cancellation.html
- [8] Číslicové filtry s nekonečnou impulsovou odezvou. NOVOTNÝ, Jan. *Úvod do číslicového zpracování signálů* [online]. 2001 [cit. 2014-01-15]. Dostupné z: <http://noel.feld.cvut.cz/vyu/ucz/cv3/>

- [9] LJUNG, Lennart. *System identification: Theory for the User*. 2nd ed. Upper Saddle River: Prentice Hall PTR, 1999. ISBN 01-365-6695-2.
- [10] SÖDERSTRÖM, Torsten a Petre STOICA. *System identification*. New York: Prentice Hall, 1989. ISBN 01-388-1236-5.
- [11] ZHU, Yucui. *Multivariable system identification for process control*. 1st ed. Oxford: Pergamon, 2001. ISBN 00-804-3985-3.
- [12] IASTAT - Interaktivní učebnice statistiky. ŘEZANKOVÁ, Hana, Luboš MAREK a Michal VRABEC. VŠE, Praha. Regrese [online]. 2001 [cit. 2014-05-22]. Dostupné z: <http://iastat.vse.cz/regrese/Regrese4.htm>
- [13] HAVLENA, Vladimír a Jan ŠTECHA. *Moderní teorie řízení*. ČVUT, Praha, 1999.
- [14] MA, Yudong. *Model Predictive Control for Energy Efficient Buildings*. University of California, Berkeley, 2013.
- [15] Matlab Documentation: quadprog [online]. [cit. 2014-05-22]. Dostupné z: <http://www.mathworks.com/help/optim/ug/quadprog.html>
- [16] BOYD, Stephen P a Lieven VANDENBERGHE. *Convex optimization*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. ISBN 978-0-521-83378-3.
- [17] CIGLER, Jiří. *Problematika prediktivního řízení budov: IV. symposium Integrované navrhování a hodnocení budov*. Univerzitní centrum energeticky efektivních budov, Praha, 2013.
- [18] LÖFBERG, Jogan, Helfried PEYRL a Miroslav BARIĆ. *Part II. Model Predictive Control*. University Lecture. The Automatic Control Laboratory, ETH Zurich, Switzerland.
- [19] BRADSHAW, Vaughn. *The building environment: active and passive control systems*. 3rd ed. Hoboken: John Wiley, 2006. ISBN 04-716-8965-3.
- [20] Kerrigan, Eric C. a Jan M. Maciejowski. *Soft constraints and exact penalty functions in model predictive control*. In *Control 2000 Conference, Cambridge*, 2000.
- [21] Matlab Documentation: fmincon [online]. [cit. 2014-05-22]. Dostupné z: <http://www.mathworks.com/help/optim/ug/fmincon.html>

Příloha A

Obsah přiloženého CD

K této práci je přiloženo CD, na kterém jsou uloženy zdrojové kódy a elektronická verze práce ve formátu pdf.

Adresářová struktura přiloženého CD:

- `.\bakalarska_prace_tezkyjir.pdf`
- `.\zdrojove_kody:`
 - `.\Zpracovani_dat`: Adresář obsahuje skripty a funkce sloužící po úpravu dat.
 - `.\Identifikace`: Adresář obsahuje funkce a skripty, které slouží k identifikaci parametrů modelu místnosti pomocí metody nejmenších čtverců a také pomocí funkce *quadprog*.
 - `.\Regulace`: Adresář obsahuje skripty a funkce pro simulaci prediktivní regulace s použitím tvrdých měkkých omezení a lineárního, nelineárního modelu.