

České vysoké učení technické v Praze

Fakulta elektrotechnická

Disertační práce

srpen, 2013

Ing. Jan Mikeš

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická
Katedra *elektroenergetiky*

IMPULZNÍ INTERAKCE VE VINUTÍCH VÝKONOVÝCH TRANSFORMÁTORŮ

Disertační práce

Ing. Jan Mikeš

Praha, srpen, 2013

Doktorský studijní program: Elektrotechnika a informatika

Studijní obor: Elektroenergetika

Školitel: Doc. Ing. Vladislav Kvasnička, CSc.

Školitel specialista: Ing. Vítězslav Pankrác, CSc.

Obsah

Anotace.....	5
Klíčová slova	7
Key words	7
1 Cíle práce.....	8
2 Úvod do studované problematiky	8
2.1 Současný stav řešené problematiky	10
2.2 Vymezení předmětu studia.....	12
2.3 Metodologie a metodika	13
2.4 Formulace problému	14
3 Konstrukční popis sledovaného objektu	15
3.1 Používané typy trojfázových transformátorových vinutí	15
3.2 Odolnost vinutí vůči přepětí.....	18
3.2.1 Integrovaný kapacitní štít kolem VN vinutí.....	19
4 Trojfázový dvojinuťový transformátor.....	23
4.1 Geometrický popis souvislostí – analogie s jednovrstvou cívkou.....	23
4.1.1 Analytická formulace problému – princip zjednodušení pro jednovrstvou cívku ..	24
4.1.2 Analytická formulace problému – přenesení odvozených vlastností jednovrstvé cívky na vinutí trojfázového transformátoru	28
4.2 Metoda konečných diferencí pro výpočet rozložení napětí podél vinutí transformátoru – zjednodušený výpočet bez uvažování kapacitních vazeb se zbývajících fázemi a se zanedbáním rozdílu mezi M_1 a M_2	32
4.2.1 Popis uvažovaného systému.....	32
4.2.2 Použitá numerická metoda.....	33
4.2.3 Rozklad matice \mathbb{A} a definování nového problému.....	33
4.2.4 Konkrétní formulace úlohy.....	35
4.2.5 Řetězení jednovrstvé cívky.....	37
4.3 Impulzní namáhání transformátoru s nehomogenně rozloženými parametry a s uvažováním vzájemné induktivní vazby mezi jednotlivými závity.....	37
4.4 Impulzní namáhání trojfázového transformátoru.....	41
4.4.1 Jednopolový a trojpolový náraz trojfázového transformátoru	41
4.4.2 Jednopolový náraz trojfázového transformátoru zapojeného do hvězdy s izolovaným uzlem nebo zapojení do trojúhelníku.....	47
4.4.3 Trojpolový náraz trojfázového transformátoru zapojeného do hvězdy s izolovaným uzlem nebo zapojení do trojúhelníku.....	50
4.5 Úprava pro vícevrstvé vinutí	53

4.5.1	Zjištěné skutečnosti – nekeitající polohová vinutí	72
5	Determinace vstupních parametrů modelu	74
5.1	Určení vlastní a vzájemné indukčnosti cívky.....	74
5.2	Stanovení rezistance vinutí	75
5.3	Stanovení kapacit transformátoru.....	75
5.4	Výpočet kapacity vinutí vůči jádru transformátoru.....	76
5.5	Výpočet vzájemné kapacity primárního a sekundárního vinutí a kapacity vinutí vůči štítu	78
5.6	Výpočet kapacity vinutí vůči plášti transformátoru	79
5.7	Mezizávitová kapacita (podélná kapacita)	80
5.8	Výpočet kapacit u polohových vinutí.....	81
6	Iterace atmosférického přepětí vzniklého účinkem bleskového výboje pomocí matematického modelu	83
7	Výpočet numerické chyby prostřednictvím Richardsonovy extrapolace	87
8	Závěr.....	91
9	Resumé.....	94
9.1	Impulse interactions in power transformer windings	94
9.2	Impulsinteraktionen in den Wicklungen von Leistungstransformatoren.....	97
9.3	Les pulsations dans les enroulement des transformateurs de puissance	100
10	Výběrový seznam použité literatury	103
10.1	Odborné monografie k problematice impulzního namáhání.....	103
10.2	Odborné monografie k problematice aplikovaného numerického řešení.....	103
10.3	Odborné původní časopisecké příspěvky	104
10.4	Kvalifikační práce	108
10.5	Patenty, normy, zkušební postupy.....	108
11	Soupisy.....	110
11.1	Soupis obrázků	110
11.2	Soupis tabulek.....	111

Anotace

Dynamické interakce ve vinutí transformátorů sledují buďto rozložení elektrického pole a přepětové jevy ve vinutí při vstupu impulzu, anebo rozložení silového pole a mechanické chování vinutí transformátorů při různých druzích zkratu. První označujeme jako rychlé, druhé jako pomalé. Práce se zabývá prvním typem interakcí.

Vyšetřování přepětových poměrů ve vinutí transformátorů bylo předmětem nesčetného počtu prací. Rozvíjející se poznatky v oblasti matematické analýzy a numerické matematiky umožnily postupné zpřesňování řešeného fyzikálního modelu. První práce vycházely z modelu jednovrstvé cívky bez železa (K. W. Wagner), který umožnil provádět jisté predikce analytickou cestou. Další studie (viz seznam literatury) pak pokračovaly ve složitějších fyzikálních modelech, k jejichž chování byly postupně zapojovány numerické metody. Avšak i moderní práce vycházejí z poměrně zjednodušené konfigurace fyzikálního modelu.

Předložená disertační práce se zabývá interakcí rychlých přepětových jevů odehrávajících se při přímém zásahu vinutí, respektive jeho části, bleskovým proudem nebo přepětím vzniklým v jeho důsledku. Analýza je provedena na modelech třífázových distribučních transformátorů.

Hlavním cílem mé disertační práce je sestavení přesnějšího matematického modelu, který by respektoval důsledněji souvislosti uvnitř transformátoru, přenesl získané vlastnosti jedné cívky na trojfázový dvojvinutový transformátor, respektoval skutečnou geometrickou konfiguraci cívek a dokázal řešit jejich vrstvení.

Annotation

Dynamic interactions in transformer winding follow either the distribution of the electric field and overvoltage phenomena in the winding, at the entry of the surge, or the distribution of the power field and the mechanical behaviour of transformer winding during various types of short-circuit. The first type is designated as fast, the other one as slow. The study deals with the first type of interactions. Examination of overvoltage relations in the transformer winding has been the subject of innumerable studies. Modern findings in the field of mathematical analysis and numerical mathematics have facilitated specification of the physical model under scrutiny.

The problems concerning a substitution transformer diagram cover its discrete model analogous, in circuit models, to electric wiring where longitudinal capacitance, eventually resistivity of the conductor used (that is, however, frequently ignored) operates between the turns. This fundamental model was published in 1915 by K. W. Wagner and all the subsequent theories proceed therefrom.

The submitted thesis deals with the interactions of rapid surge events taking place when a winding, or parts thereof, is directly struck by a lightning current or surges arising as a result of it. The analysis is performed on models of three-phase distribution transformers.

The main aim of my thesis is to construct an accurate mathematical model that respects more consistent linkages inside the transformer, transfers the acquired properties of a single winding to a three-phase dual-winding transformer, respects the real geometrical configuration of the winding and resolves its layering.

Klíčová slova

vysokonapěťové transformátory, ochrana výkonových transformátorů, transformátorová vinutí, atmosférický výboj, rozložení napětí, podélná kapacita transformátorových vinutí, příčná kapacita transformátorových vinutí, přepětí, impulzní namáhání, numerické řešení, hyperbolická parciální diferenciální rovnice, metoda sítí

Key words

high voltage transformers, power transformer protection, transformer windings, atmospheric discharge, voltage distribution, longitudinal capacitance of transformer winding, lateral capacitance of transformer winding, overvoltage, surge phenomenon, numerical solution, hyperbolic partial differential equations, finite difference method

1 Cíle práce

1. Sestavení vhodného fyzikálního modelu interiéru třífázového distribučního transformátoru, který by byl přesnější než modely dosavadní (např. respektuje 3D konfiguraci vinutí, vliv reálného rozložení vinutí, působení zbývajících zasažených i nezasazených fází vinutí, akceptuje magnetické a kapacitní vazby s ostatními fázemi transformátoru, apod.).
2. Sestavení příslušného matematického modelu a nasazení vhodné efektivní numerické metody jeho řešení.
3. Provedení teoretické analýzy včetně predikce týkající se kvality napěťové (resp. potenciálové) odezvy při různých konfiguracích vinutí (jednovrstvé a vícevrstvé vinutí).
4. Dovedení dosažených výsledků až k praktickým závěrům, které by byly užitečné pro projektanty vinutí transformátorů, tj. zobrazovat průběh napětí podél vinutí v kterékoliv části vinutí.

2 Úvod do studované problematiky

V posledních desetiletích se u elektroenergetických výrobních i distribučních systémů setkáváme se stále větším podílem výkonové i signální elektroniky na samotném fundamentálním zařízení. Elektronika se stala integrální součástí nejenom koncových připojených zařízení, ale především tvoří v převážné většině i ochranné a řídicí prvky samotného řetězce výroba – přenos – distribuce elektrické energie. Elektrické stroje jsou vystavovány použití ve stále extrémnějších podmínkách, které vedly často podle zkušeností poslední dekády 21. století k jejich selhání.

Jeden z dosud nejčastějších a obtížně eliminovatelných vlivů na zvýšenou poruchovost má význam indukovaného přepětí, respektive přímý úder blesku do aktivních částí samotného stroje. Faktem zůstává, že tento vliv nabývá velkého významu u strojů velkých výkonů, kde je kladen s rozvojem elektroenergetických soustav stále větší důraz na spolehlivost a kde selhání takového systému znamená fatální technické a ekonomické důsledky. Transformátory tvoří největší podíl pracujících zařízení v elektroenergetické soustavě. Konstruují se na stále vyšší napěťové hladiny, vyšší převodové poměry a jednotkové výkony a stávají se tak z hlediska přímého i nepřímého účinku bleskových proudů mnohem zranitelnějšími.

Současné tendence uvědomovat si význam kvality elektrické energie, spolehlivosti dodávky a eliminace sekundárních vlivů na koncová zařízení přenáší důsledky vlivu přepětí i na

řetězec distribučních prvků. Právě i na tuto problematiku, která je dosud po praktické stránce často opomíjena, se zaměřuje moje disertační práce. Tyto okolnosti si vynucují provádění co možná nejpřesnější analýzy rozložení impulzního namáhání ve vinutí, jakožto jednoho z přímých a důležitých podkladů pro návrh vinutí těchto transformátorů.

Dosud velmi opomíjenou stránkou bylo nejenom stanovení rozložení a utlumení impulzního přepětí v zasaženém vinutí, ale také v ostatních vinutích, která jsou se zasaženým v induktivní a kapacitní vazbě. Jenom přesným studiem často vždy konkrétního případu lze výpočetními metodami a precizním měřením učinit konstrukční závěry, které reflektují dimenzování zařízení s ohledem na možné sekundární oscilace a optimalizace koordinace izolace u ostatních připojených zařízení. Studium trojfázového distribučního transformátoru, které se stalo předmětem mé disertační práce, si však neklade za cíl být vyčerpávající studií v této problematice.

Z pohledu domácí i světové odborné literatury je tato problematika stále nová a je v centru odborného zájmu. Její první formulace se objevily na počátku 20. století a k hlubšímu rozvoji došlo v 50. letech 20. století [4, 57]. Následná období tuto problematiku do důsledku nevyřešila. I na počátku 21. století tvoří stále plodnou odbornou oblast. Při rozsahu vlivů, které je potřeba při precizním návrhu respektovat, není zdaleka možné jednou studií pokrýt celou problematiku. Snahou disertační práce je představit dosud často opomíjené souvislosti uvnitř interiéru třífázového transformátoru, které mají nezanedbatelný podíl na šíření přepětí v ostatních částech vinutí a představit numerickou metodu výpočtu rozložení napětí podél vinutí transformátoru respektující skutečnou geometrii transformátoru.

Analýza impulzního namáhání v obvodech s rozprostřenými parametry vede ke značně komplikovaným vztahům a při akceptování vzájemně vázaných prvků se stává výpočet velmi obtížný i pro uvažování elementární struktury. Toto má přímý dopad nejenom na validitu získaných výsledků, ale také na možnost zahrnout do výpočtu všechny sledované parametry.

Obvody, které by bylo potřeba v praxi analyzovat, jsou tak mnohem složitější a liší se od idealizovaných především tím, že jejich parametry L , M , C , K , R nejsou konstantní pro celé sledované zařízení. Často především u zařízení VVN se vyskytují transformátory, kde i cívky jednoho vinutí mohou mít různé parametry. Je téměř jisté, že nelze stanovit univerzální metodu výpočtu, která by dokázala pokrýt v tak složitých strukturách sledovaný jev a přinést uspokojivé přenositelné výsledky.

Jednou z nejučinnějších metod řešení takových obvodů je jejich idealizace do konečného počtu elementů, které tvoří obvody se soustřednými parametry a provedení analýzy v tomto konečnědimenzionálním prostoru za použití vhodné numerické metody. V případě řešení impulzního namáhání vinutí transformátoru to znamená, uvažovat každou cívku/dvojcívku diskového (kotoučového) vinutí nebo polohu válcového vinutí jako samostatný element, vypočítat jeho parametry, sestavit náhradní schéma z těchto elementů a v takto postaveném obvodu vypočítat napěťovou odezvu na vstupní přepěťový impulz.

2.1 Současný stav řešené problematiky

Impulznímu namáhání elektrických strojů je dlouhodobě věnována výrazná pozornost v odborné literatuře. Vývojově na dostupných matematických teoriích (od počátku 20. století) byly vytvářeny přesnější, výpočtově složitější, ale i méně náročné a zároveň méně přesné matematické modely [4, 57]. Vzhledem k často nepřesnému a málo věrohodnému stanovení vstupních parametrů vinutí v modelu vznikají nejrůznější zjednodušené představy o rozložení napětí v transformátoru. Častěji je problematika řešena na příkladu jednopohové cívky. Výsledky řešení jsou pak rozšířeny na celá vinutí i vícevinutových transformátorů. Transformátorová více-pohová cívka je z pohledu rozložení napětí bez dostatečně přesné znalosti jejích parametrů natolik komplexní úloha, že se dá předpokládat velmi malá shoda v případě jejich zanedbávání.

Bývalé Československo (od 50. let 20. století do roku 1989) patřilo k vůdčím státům, které vytvářely hodnotné matematické modely jedno i více-pohových cívek – viz práce A. Veverky, B. Hellera, Š. Matěny [4, 45]. Před rokem 1989 nemohly být tyto práce dostatečně rozšířeny v zahraničí (i přesto, že studie A. Veverky a B. Hellera [4] vyšla v roce 1968 v omezeném nákladu v anglickém jazyce), proto je to k tématu cenná a zahraničím i v současné době reflektovaná bibliografie.

V posledním desetiletí se však k problematice impulzního namáhání stále vracejí jak akademická, tak podnikatelská a praktická pracoviště [1, 3, 7]. Snahou velkých výrobců transformátorů a tlumivek je mít prediktivní výpočtovou možnost, kterou by mohli před návrhem transformátoru deklarovat jeho odolnost před impulzním namáháním (nejčastěji impulzem $1,2/50\mu\text{s}$, ale i spínacím impulzem, či useknutým impulzem v týlu). Dosud se odolnost ověřuje pouze prostřednictvím sejmuté osciloskopické odezvy z odboček vinutí transformátoru při přivedení impulzu na jeho vstupní svorku. Vzniká tak časoprostorový průběh vlny napětí, ve kterém se sleduje místo maximálního namáhání cívky. Tato metoda se dá aplikovat pouze na sestavený transformátorový celek [67–70].

Vzhledem k omezené možnosti vypočítat všechny parametry vinutí, počítat přesně v modelu s vlastní i vzájemnou indukčností a respektovat vliv parametrů okolních cívek, jsem se rozhodl ověřit platnost numerického řešení přesného modelu pouze při respektování zjednodušeného výpočtu těchto parametrů. Pro jejich výpočet jsem čerpal především ze vztahů uvedených v literatuře [1, 3, 5–7, 9, 11]. Pro výpočet kapacitních vazeb potom v člancích [29, 30, 32, 36, 43, 44, 53] a pro respektování induktivních souvislostí v [28, 35]. Tímto modelem bych chtěl upozornit na nutnost dbát velké opatrnosti při vytváření závěru z nekompletních či velmi málo validních obvodů, které reprezentují jen omezené vlastnosti přenesené na celá vinutí, resp. na vícevinutové systémy – třífázových transformátorů s respektováním vlivu všech vzájemných vazeb, a tím i na obvody, které reflektují zjednodušené výpočty parametrů L , M , C , K , R .

Při příchodu napěťového impulzu na vinutí transformátoru lze uvést, že rozložení napětí podél vinutí je závislé pouze na kapacitních poměrech ve vinutí, neboť indukčnost v čase blízkém nule lze zanedbat. Zcela zásadní roli na počáteční rozložení napětí mají konstrukční parametry cívek samotného transformátoru. Za předpokladu, že známe počáteční a koncové rozložení napětí na vinutí transformátoru, lze určit obálku volných kmitů, která představuje teoretické maximální napěťové namáhání izolace v libovolném bodě vinutí. Výpočtům samotných parametrů podélné a příčné kapacity a vlastní a vzájemné indukčnosti cívek transformátorů byla věnována mnohem menší pozornost [28], než například samotným teoriím výpočtu a návrhu řešení vlnových jevů ve vinutí [31–34, 37–42, 45–52, 54–59]. Takovýto model má objektivnější výsledky, než snaha postihnout současně všechny vlivy uvnitř transformátoru.

V odborné literatuře lze vysledovat dva přístupy k řešené problematice rozložení impulzního napětí v transformátoru. Jedním z nich je konstrukce modelu se soustřednými parametry, druhým pak sledování významu rozprostřených parametrů.

Autoři v [40] rozlišují modely na *Fast transient overvoltages* (FTO) a na *Very fast transient overvoltage* (VFTO) [34, 42, 49, 50, 55, 58, 59]. V případě modelů FTO, kde se předpokládá frekvence v rozsahu $10 \text{ kHz} \leq f \leq 1 \text{ MHz}$, bylo publikováno mnoho modelů založených na teorii dvojbranů [37, 41], které jsou řazeny do kaskád a počítány příslušnými výpočetními prostředky. Pro modely VFTO, tedy modely s frekvencí nad 1 MHz, je již nemožné zanedbávat vlnovou délku vstupního vysokofrekvenčního impulzu a obvody se řeší pomocí rozprostřených parametrů – těchto modelů je již omezený počet, neboť jejich hlavním úskalím je obtížné numerické řešení parciálních diferenciálních rovnic hyperbolického typu [33, 49–52] – nejčastějšími způsoby jsou potom hybridní způsoby výpočtu, kdy části vinutí

jsou vypočítány jako soustředné – například pro nižší frekvence, kdy převládá vliv indukčnosti a jako rozprostřené pro okamžiky, kdy v obvodu má explicitní význam kapacita [35, 39]. Modely se soustřednými parametry omezují výpočet pouze na předem determinovaná místa ve vinutí, není možné sledovat průběh napětí v libovolném místě vinutí.

Samotné typy používaných vinutí mají také velký vliv na konstrukci příslušných modelů – nejčastěji bývá použita zjednodušená cesta přes jednoduché jednovrstvé cívky, avšak vinutí transformátorů bývají mnohem složitější. Často jsou použita vícevrstvá vinutí kotoučová, válcová, respektive bývají aplikovány speciální úpravy například prokládaným vinutím, avšak ty jsou používány pro vyšší napěťové hladiny. Příkladem studií, které se zabývají těmito tématy, jsou [35, 39]. Posledním přístupem v modelování odolných transformátorů je aplikace nejrůznějších omezovacích prvků, svodičů přepětí, respektive použití staršího způsobu napěťově závislých laků [31, 38].

2.2 Vymezení předmětu studia

Předmětem studia impulzního namáhání je v mé disertační práci trojfázový dvojinuťový jádrový distribuční transformátor. Tento typ objektu jsem zvolil především z důvodu ověřitelnosti získaných výsledků – možnosti porovnat namodelované průběhy s reálným měřením na objektu. Výpočtová metoda je přenositelná na jakýkoliv druh transformátoru, u kterého jsou správně determinovány vstupní parametry. Shrnutí porovnání modelu a měření na reálném objektu je precizováno v příslušné kapitole případových studií.

Nejčastějším problémem ověření validity mezi modelem a reálným transformátorem je obtížná přístupnost k částem vinutí, často již v kompaktním provedení není přístupná nízkonapěťová cívka, nebo jiné části, které jsou nezbytné pro ověření. V častých odborných pracích jsou tak publikována zjednodušená měření založená na zanedbání mnohých reálných vlivů uvnitř transformátoru (například není vinutí ponořeno v oleji, má části, které nejsou bandážovány izolací, má odpojené propojky pro spojení do znaku vinutí, velmi často je vinutí vytaženo z nádoby, atd...) [4–7, 9, 11]. Všechny tyto vlivy se podílejí na značném zkreslení získaných průběhů impulzního namáhání vinutí.

2.3 Metodologie a metodika

Principiálně je každé i sériově konstruované zařízení použité v elektroenergetické soustavě zařízením zcela individuálním. Tuto skutečnost ovlivňují především vyšší hladiny provozního napětí, exteriérová umístění zařízení, vystavení nepříznivým klimatickým podmínkám, poruchové stavy v soustavě, které mohou mít přímý nebo přenesený dopad na mnoho dalších faktorů. Z tohoto pohledu se velmi obtížně konstruují zařízení, která by odolávala za všech okolností a ve všech případech uvedeným vlivům. Velmi identické je to s odolností zařízení vůči přepětí. Transformátorové vinutí je namáháno jak vnitřním, tak vnějším přepětím. Vnější je vyvoláno atmosférickými výboji a je omezeno bezpečnostními ochrannými prvky (omezovači, bleskojistkami, přepětovými ochranami). I tak však ohrožuje izolaci vinutí proti zemi stejně jako mezizávitovou izolaci vinutí. Vnitřní přepětí může způsobit náhlá změna parametrů soustavy a je závislé na provozním napětí. Každá transformátorová cívka se ve vztahu k přepětí chová jako velmi složité seskupení kapacit a indukčností.

Na základě těchto skutečností jsem stanovil následující hypotézy:

- 1) Jakým způsobem lze matematicky a fyzikálně popsat většinu souvislostí, které konstrukčně definují trojfázový transformátor odolný proti vlivu přepětí?
- 2) Do jaké míry existuje shoda mezi matematickým modelem a reálným objektem?
- 3) Jak zpřesňování samotného modelu po stránce výpočtové metody ovlivňuje získané výsledky?
- 4) Do jaké míry je užitečné tento model zpřesňovat, a jaký to má vliv na praktické konstrukční důsledky?

Z metodického hlediska lze rozlišit dvě přístupové cesty při fyzikálně-matematickém popisu přepětových jevů.

První spočívá v sestavení tzv. *polního modelu*, tj. ve formulaci elektromagnetického pole v oblasti vinutí, jakožto okrajové úlohy pro parciální diferenciální rovnice typu vlnových rovnic, v nichž jako neznámá veličina nejčastěji figuruje vektorový magnetický potenciál, méně často jako vektorový elektrický potenciál. Vlastní řešení této 3D, případně 2D úlohy, lze z numerického hlediska dobře zvládnout aplikací vhodného komerčního programu (zřejmě založeného na metodě konečných prvků), avšak není snadné určení příslušných okrajových podmínek.

Druhá koncepce je založena na sestavení tzv. *obvodářského modelu*, tj. formulaci soustavy obyčejných diferenciálních rovnic pro lokálně diskretizovaný obvod obsahující prvky L , M , C , K , R obvodových parametrů, k jejichž numerickému řešení lze použít některou standardní numerickou metodu. U tohoto způsobu řešení je problémem přesného určení parametru L , M , C , K , R a také sestavení 3D obvodářského modelu naráží na jistá úskalí. Vlastní numerické řešení je ovšem u obou způsobů doprovázeno nutností vypořádat se s věrohodností získaných výsledků řešení (zejména stabilita, konvergence apod.).

2.4 Formulace problému

V mé disertační práci uvažuji transformátor jako model sestavený s diskretních prvků (označených dále L , M , C , K , R), jejich význam bude dále precizován, a vycházející z teorie patentované v roce 1915 [57]. K. W. Wagner využil při sestavování modelu analogie s náhradním schématem bezeztrátového vedení, které doplnil mezizávitovými kapacitami. I tak přinesl Wagnerův model mnohé restriktce. Jednou z nejdůležitějších bylo uvažování celé cívky jako jednoho délkového elementu a druhou byla absence vzájemných magnetických vazeb, o kterých se K. W. Wagner domníval, že jsou integrovány do samotného členu L .

Na rozdíl od vedení je však každý závit svázán s ostatními prostřednictvím zbývajících elektrostatickou, respektive elektromagnetickou vazbou. Při vyšetřování rozložení přepětí podél vinutí rozdělil Wagner celý proces do tří samostatných vzájemně navazujících okamžiků: a) počátečního okamžiku, kdy je určitá část vinutí zasažena přepětíovou vlnou, b) okamžiku, kdy dojde k vzájemnému elektromagnetickému vyrovnávání – dojde ke vzniku volných oscilací a c) do okamžiku, kdy dojde ustálení, respektive odeznění přechodného jevu.

Chybnou domněnkou Wagnerova modelu [57] byl předpoklad, že vzájemné elektromagnetické vazby jsou integrovány do celkové indukčnosti sledovaného elementu, respektive často zanedbávány. Tento předpoklad byl postupně teoreticky vyvrácen pracemi Blume a Boyajiana. Odlišné postupy použili Heller a Veverka a Abetti [4–6, 57]. V polovině 50. let 20. století byla Abettim představena metoda pro determinaci impulzního namáhání cívek jak v primárním, tak sekundárním vinutí [4–6, 57] (za předpokladu vzduchového uspořádání).

3 Konstrukční popis sledovaného objektu

3.1 Používané typy trojfázových transformátorových vinutí

V současnosti je konstrukce a výroba transformátorů velmi různorodá a odvislá od cíle použití.

Základem každého vinutí je *závit*, *cívka* a *vrstva* nebo *deska*. *Závit* tvoří jeden nebo více paralelně izolovaných vodičů. *Cívka* je složena ze sériově zapojených závitů a utváří nerozebíratelný celek. Ostatní závity přibývající ve směru osy vinutí vytvářejí *vrstvu*. Vrstvy složené v jedné rovině kolmo k ose vinutí realizují *desku*.

Konstrukce a výroba transformátorů v sobě odráží jak požadavky na nárůst výkonu elektrotechnických a energetických systémů, tak rozličné technické aplikace, pro které jsou transformátory konstruovány. Primárně jsou těmito požadavky ovlivněna jednotlivá použitelná vinutí. Záleží na hlavních veličinách, které charakterizují vyráběný druh transformátoru. Těmi jsou jmenovitý proud a napětí transformátoru. Zvláště to má vliv na volbu konstrukce izolace, a to mezi závity, mezi cívkami a mezi jednotlivými částmi vinutí a ostatními vodivými částmi celého transformátoru. Podle úrovně jmenovitého proudu se stanovuje průřez použitého vodiče a v případě potřeby i počet paralelních větví. Používají se vodiče kruhového, čtvercového nebo obdélníkového průřezu. Nejmoderněji na straně nižšího napětí i vodiče pásového průřezu.

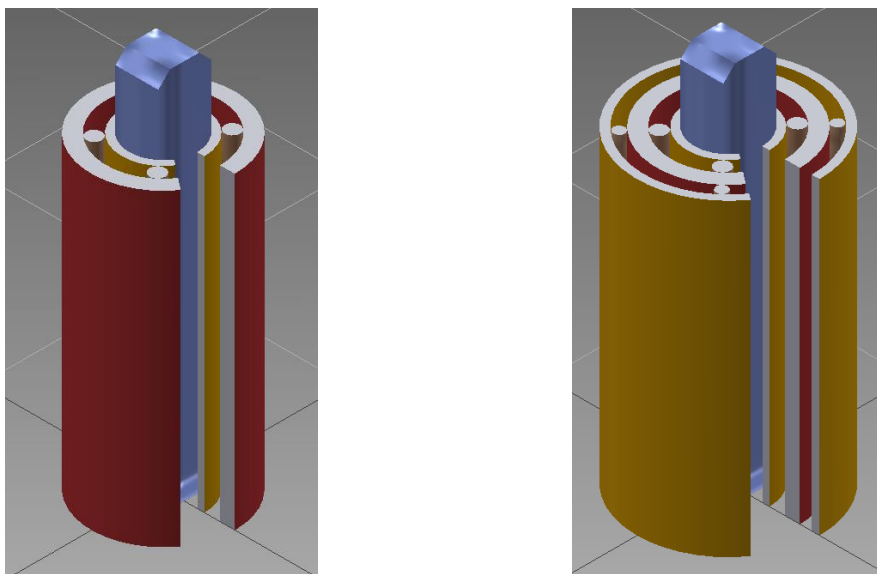
Transformátory jsou nejčastěji konstrukčně podle vzájemné polohy vinutí nižšího a vinutí vyššího napětí vyráběny s **válcovým** (souosým) nebo **kotoučovým** (prostřídáním) vinutím. Souosá vinutí mohou být rozdělena na jednovrstvá a vícevrstvá. Vícevrstvných vinutí je dosaženo navinutím několika paralelních vodičů v jedné vrstvě. Pro rovnoměrné rozložení parametrů transformátoru je nutné provést u vícevrstvných vinutí transpozici jednotlivých vodičů po úsecích. To však znamená zhoršení elektrické pevnosti v určitých místech vinutí transformátoru. Mnohovrstvá vinutí se používají nejčastěji jako vinutí vyššího napětí, a to do 35 kV a podílejí se za použití specifického stínění na linearizaci vzniklého přepětí.

Vysokonapěťové (VN) vinutí je osově symetricky adjustováno kolem nízkonapěťového (NN) vinutí. Nízkonapěťové vinutí bývá rozděleno na dvě části a je uloženo z obou stran vysokonapěťového vinutí, proto je označováno jako vinutí bikoncentrické (dvojitě).

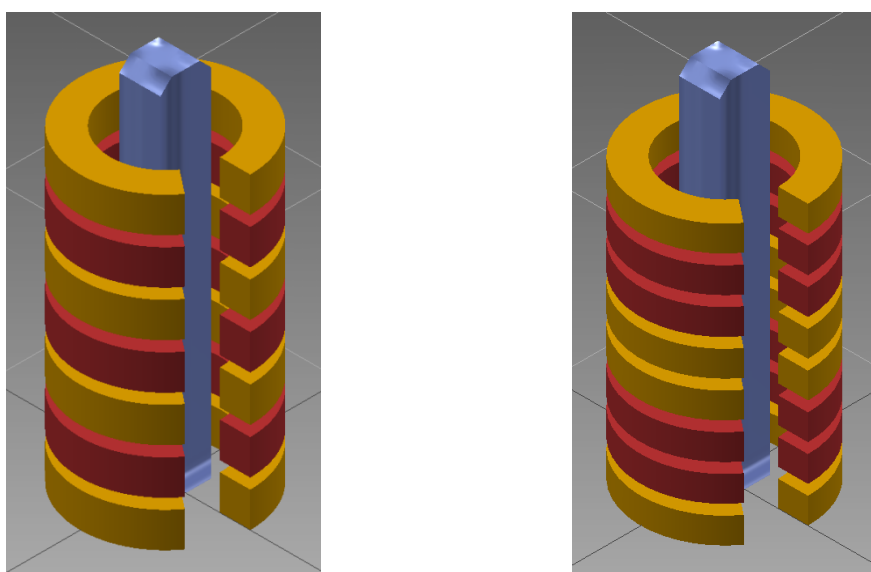
Kotoučovému vinutí, tj. druhému typu, se po celé délce jádra transformátoru střídají cívky nízkonapěťového vinutí s cívkami vinutí vysokonapěťového. Vzniklá vinutí jsou buď

souměrná, nebo nesouměrná a jsou tvořena deskovými nebo dvou-deskovými cívkami. Vzniklá konstrukce má izolačně komplikované spoje, vyžaduje rozměrnější uložení a celkově je náchylnější k elektrickému průrazu [5, 6, 64].

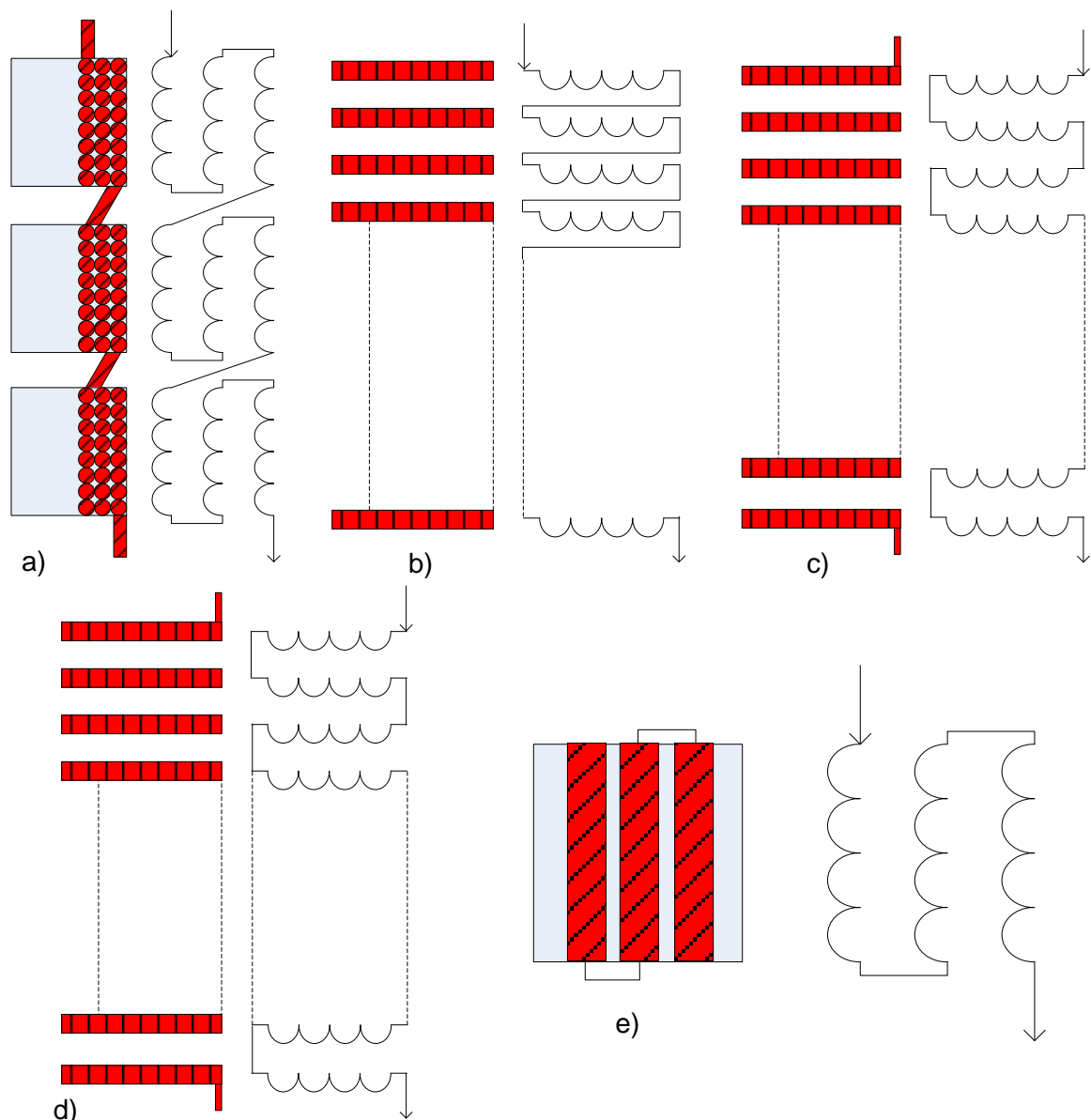
Kromě těchto základních typů vinutí existují například dělená souosá válcová vinutí. Výstupní vinutí je pak rozděleno na dvě části tak, aby se obě dvě části navzájem kompenzovaly. Vliv magnetomotorického napětí vzniklého díky výstupnímu vinutí každé části nebude významně ovlivňovat (VN) vinutí, neboť dojde ke vzájemné kompenzaci.



Obrázek 1 – Hlavní druhy válcových vinutí transformátorů: a) válcové koncentrické, b) válcové bikoncentrické



Obrázek 2 – Hlavní druhy kotoučových vinutí transformátorů: a) kotoučové souměrné, b) kotoučové nesouměrné



Obrázek 3 – Polohy válcových vinutí transformátorů podle provedení: a) cívkové z válcových cívek, b) cívkové z deskových cívek, c) cívkové z dvojdeskových cívek, d) plynulé, e) polohové

VN vinutí transformátoru se nejčastěji umísťuje jako vnější. NN vinutí se nachází mezi VN vinutím a jádrem transformátoru. Tato podmínka je nutná, aby bylo VN vinutí lépe elektricky izolováno od magnetického obvodu jádra. U NN vinutí jsou i v případě působení napěťového impulsu přítomny menší hodnoty napětí, než na VN vinutí, a tedy izolace nízkonapěťového vinutí bude vlivem elektrického namáhání méně ohrožena. V případě NN vinutí obklopujícího jádro transformátoru bude jeho zemní kapacita vzhledem k VN vinutí větší, avšak velikost amplitudy volných kmitů bude vzhledem k tloušťce použité izolace přijatelná.

Z podobných důvodů se raději volí pro transformátor vinutí polohové bikocentrické, u něhož je vinutí vyššího napětí umístěno uprostřed NN vinutí, a proto jsou požadavky na konstrukci izolace nižší. Zemní kapacita ve vinutí je tvořena několika složkami, a to kapacitou mezi jádrem a vinutím, vinutím a nádobou (respektive NN a VN vinutím a stranou nádoby) a kapacitou mezi jednotlivými fázovými vinutími. Vlivem bikocentrického vinutí dojde k většímu omezení zemní kapacity na VN vinutí, než v případě koncentrického vinutí.

Kotoučové vinutí se používá především u transformátorů s nesouměrným vinutím, jako jsou například odbočkové transformátory. Nesouměrnost vinutí se projevuje jednak ve zvětšení rozptylu, a tím zvětšení napětí nakrátko, a jednak při zkratu zvětšením axiální složky dynamické síly, která se obtížně zachycuje u válcového vinutí [5, 6].

3.2 Odolnost vinutí vůči přepětí

Z důvodu optimalizace ochrany transformátoru proti nebezpečným přepětím objevujícím se po zásahu vstupní svorky impulzem bylo vyvinuto mnoho metod úprav vinutí, které zabraňují jejich poškození. Patří k nim například:

- a) zesílená izolace po celé délce vinutí,
- b) odstupňovaná izolace po celé délce vinutí,
- c) kapacitní a odporové děliče připojené po celé délce vinutí,
- d) omezovače přepětí na vstupu transformátoru,
- e) specifické úpravy vinutí (prokládané),
- f) stínění vinutí kapacitní vložkou,
- g) vícepolohová vinutí.

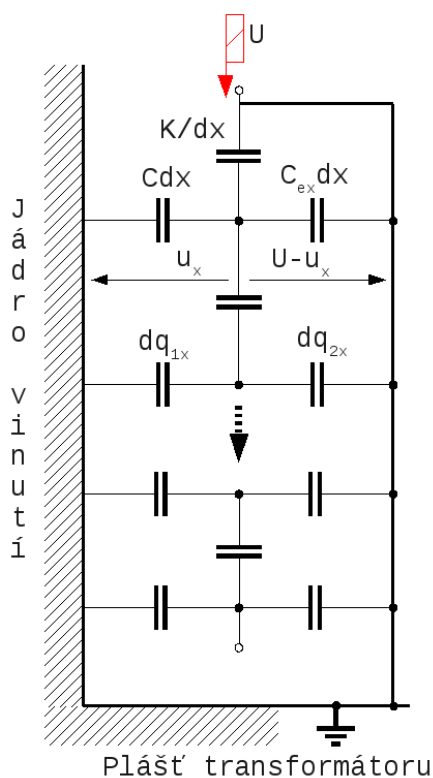
Mnohé z nich se přestaly používat především v důsledku jejich komplikovaného provedení a také z důvodu přímého ovlivnění ostatních vlastností parametrů transformátoru. K nejstarším patří zesílení izolace po celé délce vinutí (respektive izolace vinutí tak, aby v každém místě odpovídala příslušnému elektrickému namáhání), tato metoda není konstrukčně proveditelná u složitých cívkových struktur, zvětšuje rozměry stroje (především dojde k rozšíření prostorové mezery mezi závity – sníží se mezizávitová kapacita a často se zvýší i elektrické namáhání), a tím ovlivňuje ostatní parametry. Návaznými metodami byly aplikovány řetězce odporových a kapacitních děličů za předpokladu $C_{ex} \geq 10CL$. Tyto metody se dnes používají prakticky jenom u zařízení velmi malých výkonů. Častěji je přepětí redukováno hned na vstupu za působení omezovačů a bleskojistek, respektive napěťově závislých odporů [38]. Velikost obou kapacit lze ovlivnit také změnou rozměrů

vinutí [4, 5]. Vinutí široká a nevysoká mají výhodná počáteční rozložení [3, 5, 7]. Dále můžeme pozitivně ovlivnit namáhání vinutí napětím přivedeným doprostřed výšky vinutí. Počáteční rozložení je v tomto případě lineárnější, než u vinutí napájených na jednom konci vinutí.

Společným cílem všech uvedených metod je zvětšit mezizávitovou kapacitu K a zmenšit zemní kapacitu C , popřípadě utlumit přepětovou vlnu hned na vstupu transformátoru. K dosud používaným metodám patří méně často metody transponovaného vinutí, avšak obvykle metody stínění a rozdělení vinutí do většího počtu cívek spojovaných do jedno- a více- polohových vinutí. U jádrových transformátorů se často používají válcová vinutí, kde se zemní kapacita C kompenzuje kapacitní vložkou, nevýhodou je opět změna rozměrů transformátoru a tím dopad na ostatní provozní vlastnosti.

3.2.1 Integrovaný kapacitní štít kolem VN vinutí

Kapacitní štít umístěný kolem obvodu vinutí je obvyklá metoda řešení stínění vinutí transformátoru [5]. Stínidlo je připojeno na vstupní svorku vysokonapětového vinutí transformátoru a je navlečeno na vinutí. Díky tomuto geometrickému uspořádání vznikne dodatečná kapacita C_{ex} , která eliminuje působení zemní kapacity vinutí C . Schematicky je význam externí kapacity patrný z obrázku číslo 4.



C – celková zemní kapacita paralelního spojení všech zemních kapacit vinutí

C_{ex} – celková kapacita paralelního spojení všech kapacit mezi vinutím a stínidlem

d_x – element jednotkové délky vinutí

K – celková kapacita sériového spojení všech závitů

Obrázek 4 – Náhradní schéma vlivu kapacitního štítu vně vinutí

V tomto případě poteče při vhodné volbě velikosti kapacity C_{ex} , kapacitní proud štítem na místo vinutím. Přes sériovou kapacitu K nyní poteče proud tekoucí pouze přes uzemněný konec vinutí do země. Aby se dosáhlo shody v počátečním a konečném rozložení, je nutné kompletně kompenzovat zemní proudy v celém vinutí. K úplné kompenzaci dojde, bude-li kapacita C_{ex} , při napětí $(U - u_x)$ vázat stejný náboj dq_x jako zemní kapacita C při napětí u_x :

$$C dx \cdot u_x = C_{ex} dx \cdot (U - u_x), \quad (3.1)$$

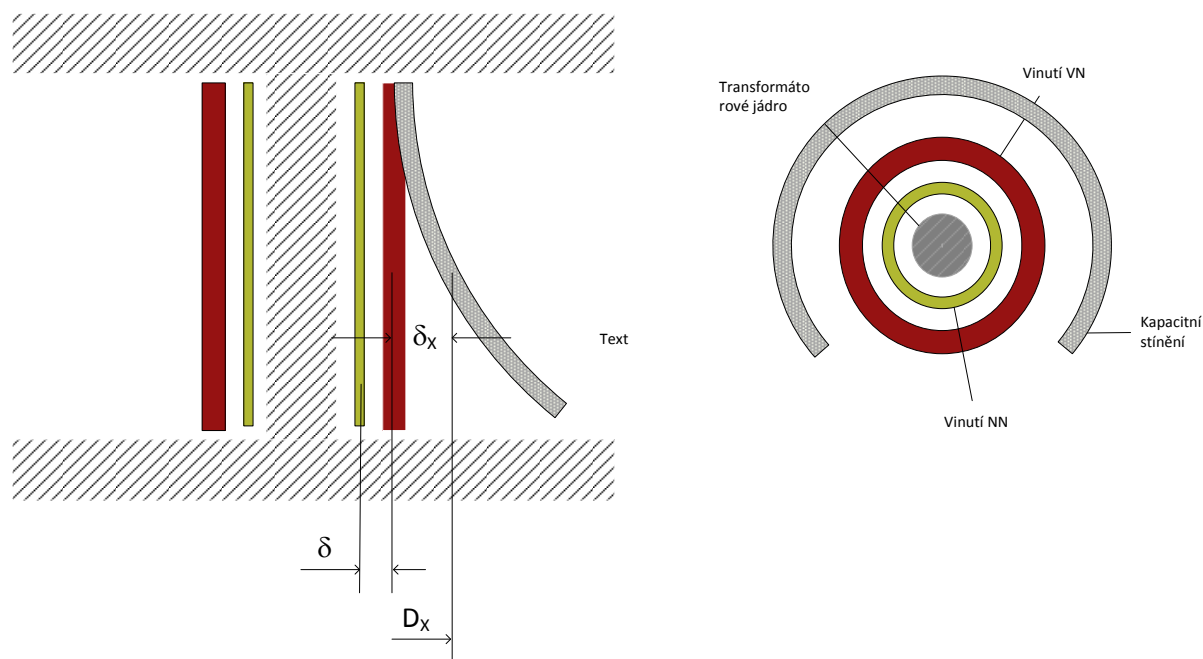
$$\frac{C_{ex}}{C} = \frac{u_x}{U - u_x}. \quad (3.2)$$

Při splnění podmínky (3.2) se kapacity vzájemně kompenzují a nemají žádný vliv na rozložení náboje v řetězci podélných kapacit K . Jsou-li všechny kapacity K stejné, bude rozložení napětí přímkové (budou odstraněny vlastní kmity vinutí) [5]. Velikost kapacity stínidla C_{ex} lze vypočítat v závislosti na velikosti zemní kapacity C a vzdálenosti od vstupní svorky x jako [4]:

$$C_{ex} = \frac{C}{l} \cdot \frac{l}{x} - 1. \quad (3.3)$$

kde l představuje délku vinutí. Při praktické úpravě se tento vztah často nerespektuje a z konstrukčních důvodů (kapacitní štít značně ovlivňuje velikost transformátoru) se navrhnou stínidla s konstantní velikostí kapacity C_{ex} . Další aspekt ovlivňující celkovou velikost kapacity C_{ex} je, že štít nemůže pokrývat celý obvod vinutí, ale pouze jeho část:

$$\frac{\phi}{360^\circ}, \quad (3.4)$$



Obrázek 5 – Externí stínění pomocí kapacitního štítu vně vinutí

V případě nutnosti korekce celkových rozměrů transformátoru je možné volit různou velikost stínící elektrody. Za předpokladu, že šířku rozptylového kanálu označíme δ a vzdálenost stínění v libovolném bodě x od vinutí δ_x a považujeme kapacity C_{ex} a C za ploché kondenzátory o stejné dielektrické konstantě, dostaneme [5]:

$$\frac{C_{ex}}{C} \approx \frac{\phi}{360^\circ} \cdot \frac{\delta}{\delta_x} \cdot \frac{D_x}{D}, \quad (3.5)$$

kde D_x je průměr odpovídající střední vzdálenosti stínění od vinutí ve výšce x a D je střední průměr rozptylového kanálu. Jelikož rozložení ve stíněném transformátoru má být přímkové ($u_x = xU$), tak srovnáním pravých stran rovnice (3.2) a (3.5) dostaneme pro δ_x :

$$\frac{\delta_x}{\delta} = \frac{D_x}{D} \cdot \frac{\phi}{360^\circ} \cdot \frac{1-x}{x} \approx \frac{D_{sr}}{D} \cdot \frac{\phi}{360^\circ} \cdot \frac{1}{x} - 1, \quad (3.6)$$

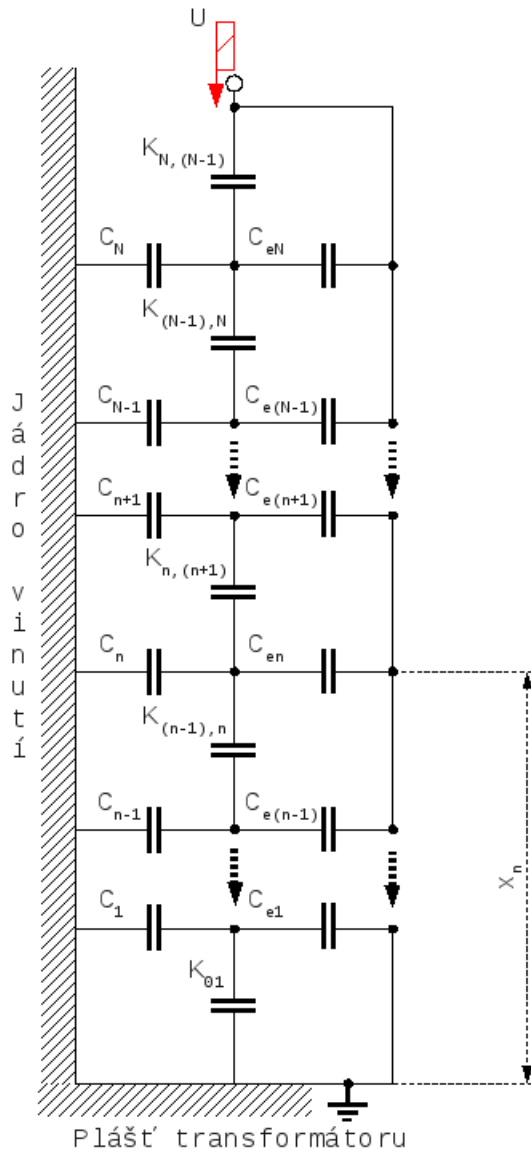
kde D_{sr} představuje vnější průměr vinutí. Rovnice (3.6) je rovnicí hyperboly pro $x = 1$, $\delta_x = 0$ se stínění dotýká vinutí, pro $x = 0$ se $\delta_x = \infty$ a k dotyku vinutí nedojde. Z tohoto vyplývá, že ideální stínění je rotační hyperboloid, jehož vzdálenost od vinutí v polovině výšky jádra se jen málo liší od šířky kanálu mezi vinutím δ .

Je-li použito jen částečné stínění $\phi \neq 360^\circ$, je nutné dát pozor na průběh napětí v oblasti, kde stínění končí. V této části se objevují velká mezicívková přepětí. Tomuto jevu lze předejít návrhem vhodné délky stíněné oblasti l_{ue} . Je nutné předpokládat, aby přímkové rozložení napětí stíněné části bylo tangenciální k exponenciálnímu rozložení napětí nestíněné části o délce l_{ur} . Označíme-li veličiny náležící k nestíněné části indexy r , lze pak optimální délku stíněné l_u oblasti vypočítat jako [5]:

$$l_u = l_{ue} + \frac{l_{ur}}{\gamma_r}. \quad (3.7)$$

Tuto optimální délku jsem využil při výpočtu délky stíněné oblasti.

Problém při návrhu kapacitního štítu nastane, nemá-li transformátor homogenní vinutí (např. při odstupňované izolaci). V tomto případě musíme počítat kapacitu štítu jako součet řady kapacit jednotlivých elementů vinutí dle schématu na obrázku číslo 5. Kapacity C_1, C_2, \dots, C_n představují kapacity jednotlivých cívek proti zemi, $C_{e1}, C_{e2}, \dots, C_{en}$ kapacity jednotlivých cívek proti stínění, $K_{1,2}, K_{2,3}, \dots, K_{(n-1),n}$ mezicívkové kapacity. Ze zákona o rovnováze nábojů a pro n -tou cívkou musí platit, že rozdíl nábojů na sériových kapacitách C_n a C_{en} sečtený s rozdílem dvou po sobě jdoucích mezizávitových kapacit $K_{(n-1),n}$ a $K_{n,(n+1)}$ se musí rovnat nule [5].



Obrázek 6 – Externí stínění pomocí kapacitního štítu vně vinutí s nehomogenními parametry

$$C_n \cdot u_N - C_{en} \cdot (U - u_n) + K_{(n-1),n} \cdot (u_n - u_{n-1}) - K_{n,(n+1)} \cdot (u_{n+1} - u_n), \quad (3.8)$$

$$u_{n-1} = U \cdot x_{n-1} \quad u_n = U \cdot x_n \quad u_{n+1} = U \cdot x_{n+1}. \quad (3.9)$$

Z podmínky přímkového rozložení napětí musí být střední potenciál libovolné cívky úměrný střední vzdálenosti x_n cívky od nulového bodu [5].

Dosazením (3.8) do (3.9):

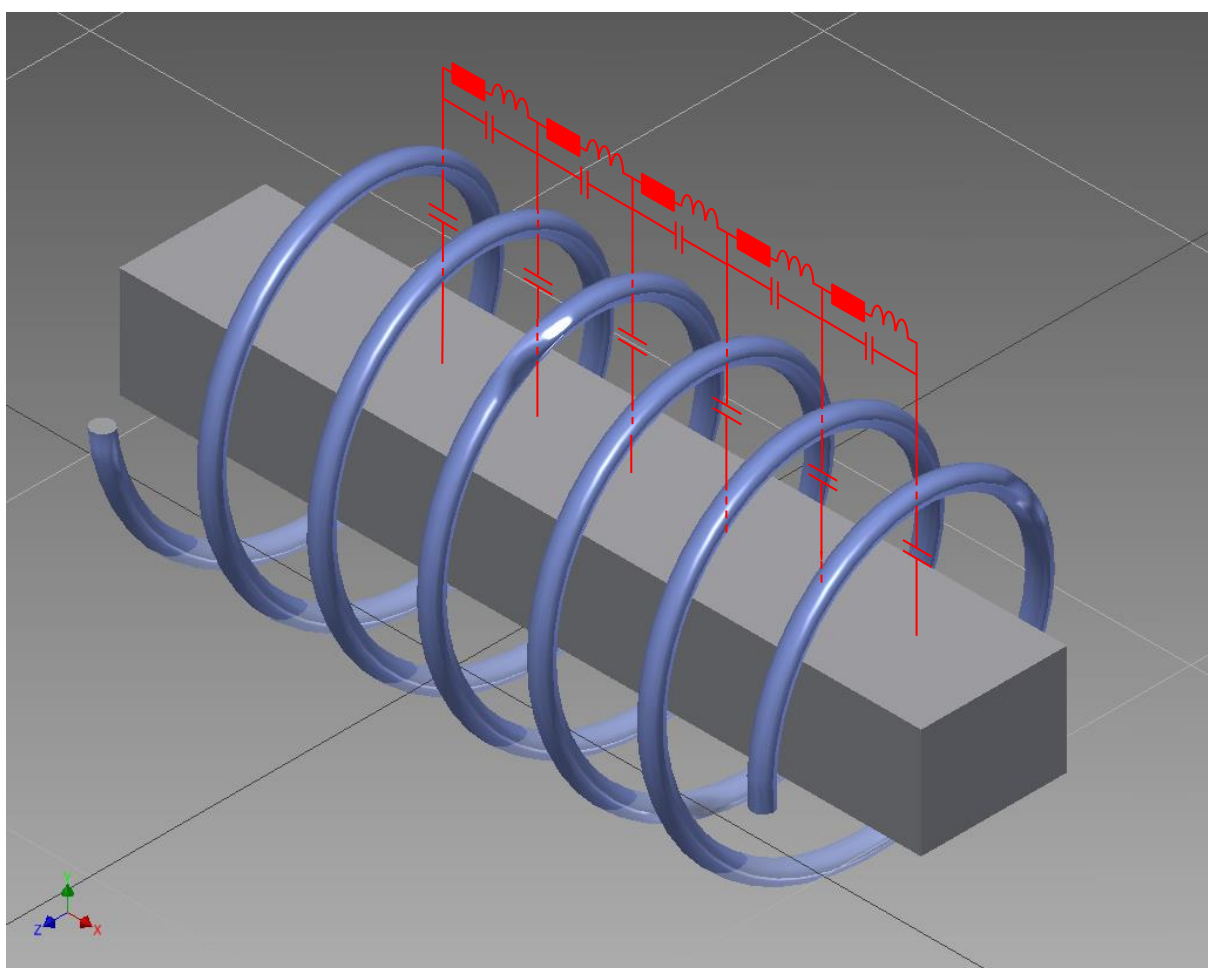
$$C_{en} = \frac{x_n}{1-x_n} \cdot C_n + \frac{x_n - x_{n-1}}{1-x_n} \cdot K_{(n-1),n} - \frac{x_{n+1} - x_n}{1-x_n} \cdot K_{n,(n+1)} \quad (3.10)$$

Pomocí tohoto vztahu můžeme postupně vypočítat velikost ideálního stínění pro každý element a posuzovat vliv stínění na linearizaci rozložení napětí.

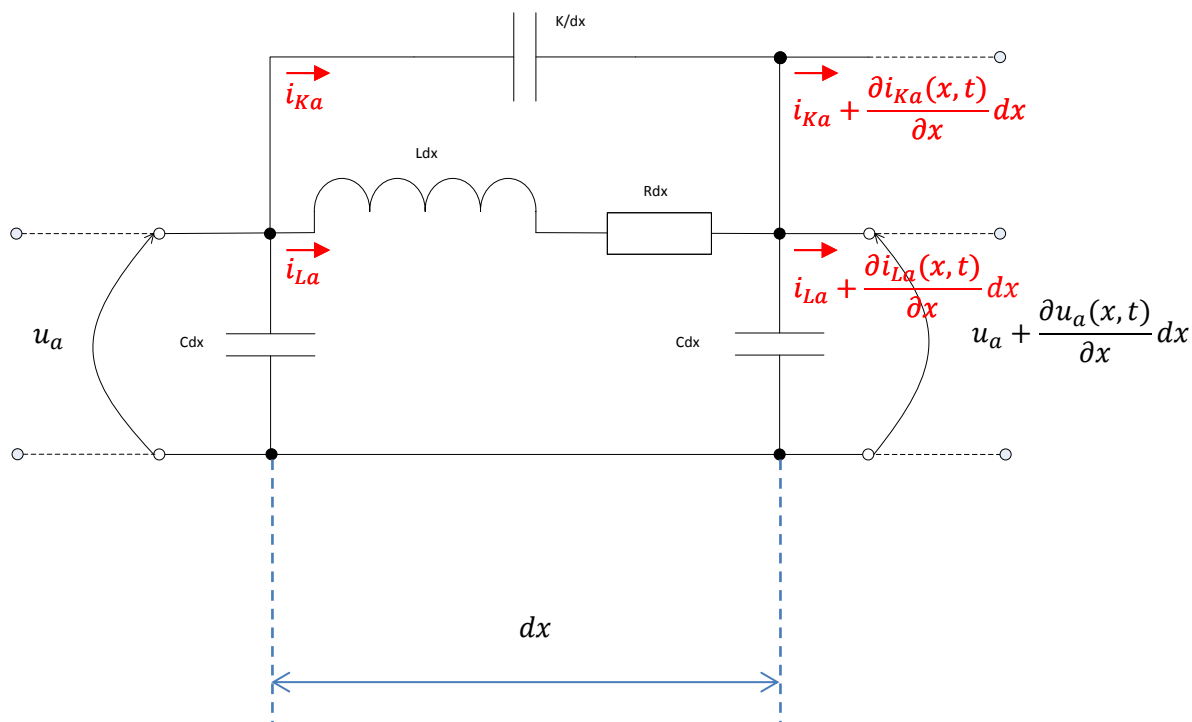
4 Trojfázový dvojvinut'ový transformátor

4.1 Geometrický popis souvislostí – analogie s jednovrstvou cívkou

Jednovrstvou cívkou lze v nejjednodušším případě modelovat pomocí náhradního schématu uvedeného na obrázku číslo 7. Prostorový element dx by měl být volen optimálně vzhledem k celkové délce cívky. Navržená numerická metoda umožňuje volbu menší, než je jeden závit cívky. Parametry uvedené ve schématu odpovídají (srovnej obrázek číslo 7 a 8): L (H/m) – indukčnosti délkového elementu cívky, R (Ω/m) – rezistivitě délkového elementu, C (F/m) – kapacitě mezi délkovým elementem cívky a zemí, K (F/m) – mezizávitové kapacitě délkového elementu cívky.



Obrázek 7 – Analogie mezi skutečnou jednovrstvou cívkou a náhradním modelem



Obrázek 8 – Ekvivalentní schéma délkového elementu jednovrstvé cívky

4.1.1 Analytická formulace problému – princip zjednodušení pro jednovrstvou cívku

V literatuře [4, 33] byl popsán model transformátorového vinutí sestaveného na základě elementárního segmentu definovaného K. W. Wagnerem soustavou analytických rovnic, a to pouze pro jednofázovou jednoduchou cívku s jednou vrstvou závitů. Wagnerova teorie neumožňovala posuzovat detaily cívky a za nejmenší element považovala sebe samotnou.

$$i_K + \frac{\partial i_K}{\partial x} dx + i_L + \frac{\partial i_L}{\partial x} dx + C dx \frac{\partial u}{\partial t} = i_K + i_L \quad (4.1)$$

$$\frac{-\partial i_K}{\partial x} dx - \frac{\partial i_L}{\partial x} dx = C \frac{\partial u}{\partial t} dx \quad (4.2)$$

$$\frac{K}{dx} \frac{\partial}{\partial t} \left[u - \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) \right] = i_K \quad (4.3)$$

$$-K \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = i_K \quad (4.4)$$

$$u - \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) = -L dx \frac{\partial i_L}{\partial t} \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx = -L \frac{\partial i_L}{\partial t} dx \quad (4.6)$$

Matematickými úpravami (derivace rovnice (4.2) podle času a rovnice (4.4) podle prostorové proměnné x) a sloučením rovnic (4.2, 4.4, 4.6) dostaneme:

$$\frac{-\partial^2 i_K}{\partial t \partial x} - \frac{\partial^2 i_L}{\partial t \partial x} = C \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4.7)$$

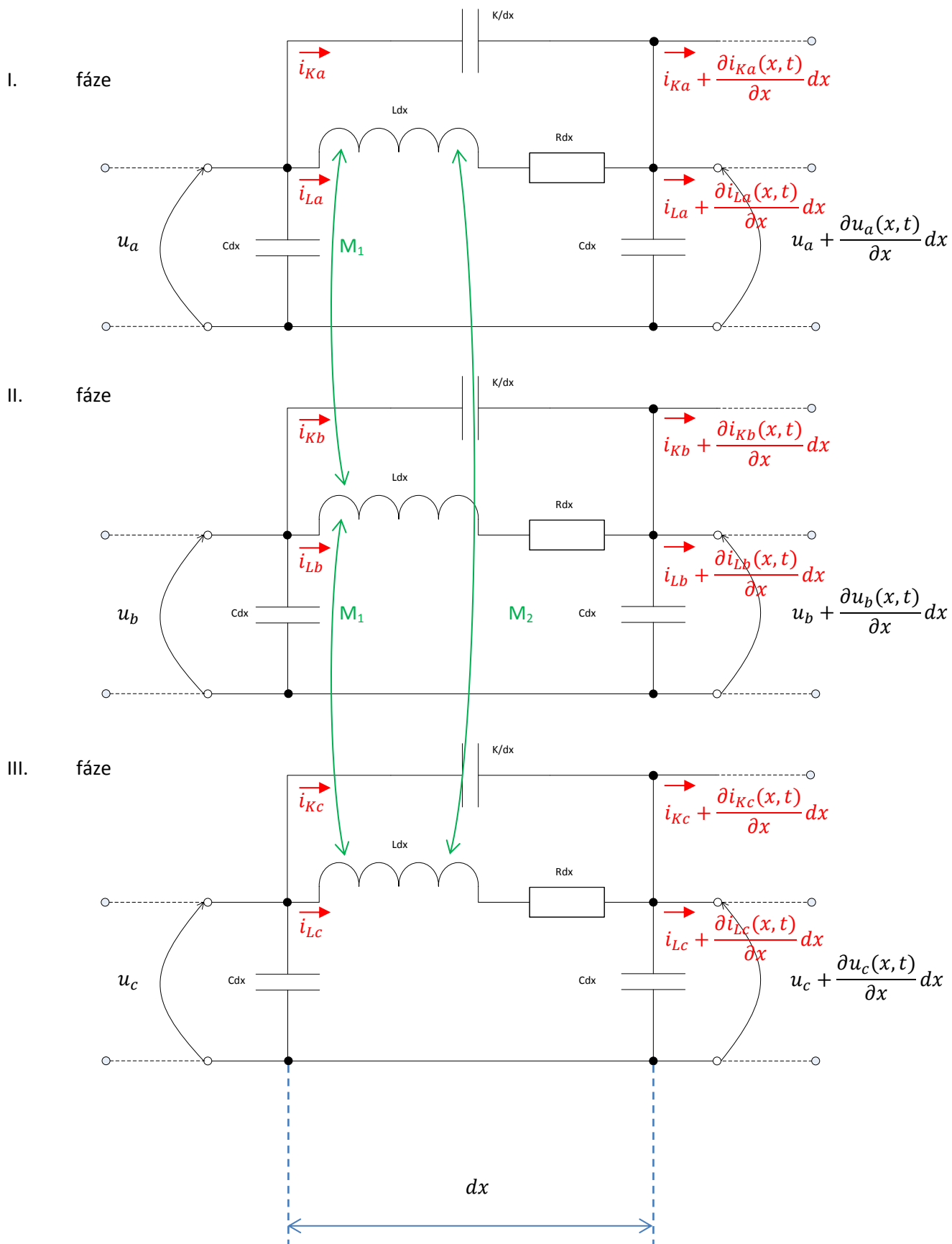
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -L \frac{\partial^2 i_L}{\partial t \partial x} \quad (4.8)$$

Výslednou formu můžeme zapsat po sloučení rovnic (4.4 a 4.8) do rovnice (4.7):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + LK \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} - LC \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (4.9)$$

Wagnerova teorie popsaná rovnicí (4.9) naráží na mnohé restriktce, které byly přijaty pro snazší způsob výpočtu. Rovnice (4.9) je i v této podobě velmi obtížně analyticky i numericky řešitelná, zanedbává vzájemnou indukčnost mezi jednotlivými závity, zanedbává magnetickou vazbu k ostatním částem vinutí, nerespektuje tlumící rezistivitu vinutí. V literatuře [4] je popsána neshoda s Wagnerovou teorií především v důsledku značného podílu vzájemné indukčnosti na amplitudě a frekvenci rozložení napětí, bez uvažování rezistivity vinutí. Lze očekávat pouze přibližné konečné nelinearizované rozložení napětí podél vinutí transformátoru (pseudofinální). Parametry L , C , K považuji v prvním přiblížení za konstanty odpovídající L (H/m) – indukčnosti délkového elementu cívky, C (F/m) – kapacita mezi délkovým elementem cívky a zemí, K (F/m) – mezizávitová kapacita délkového elementu cívky.

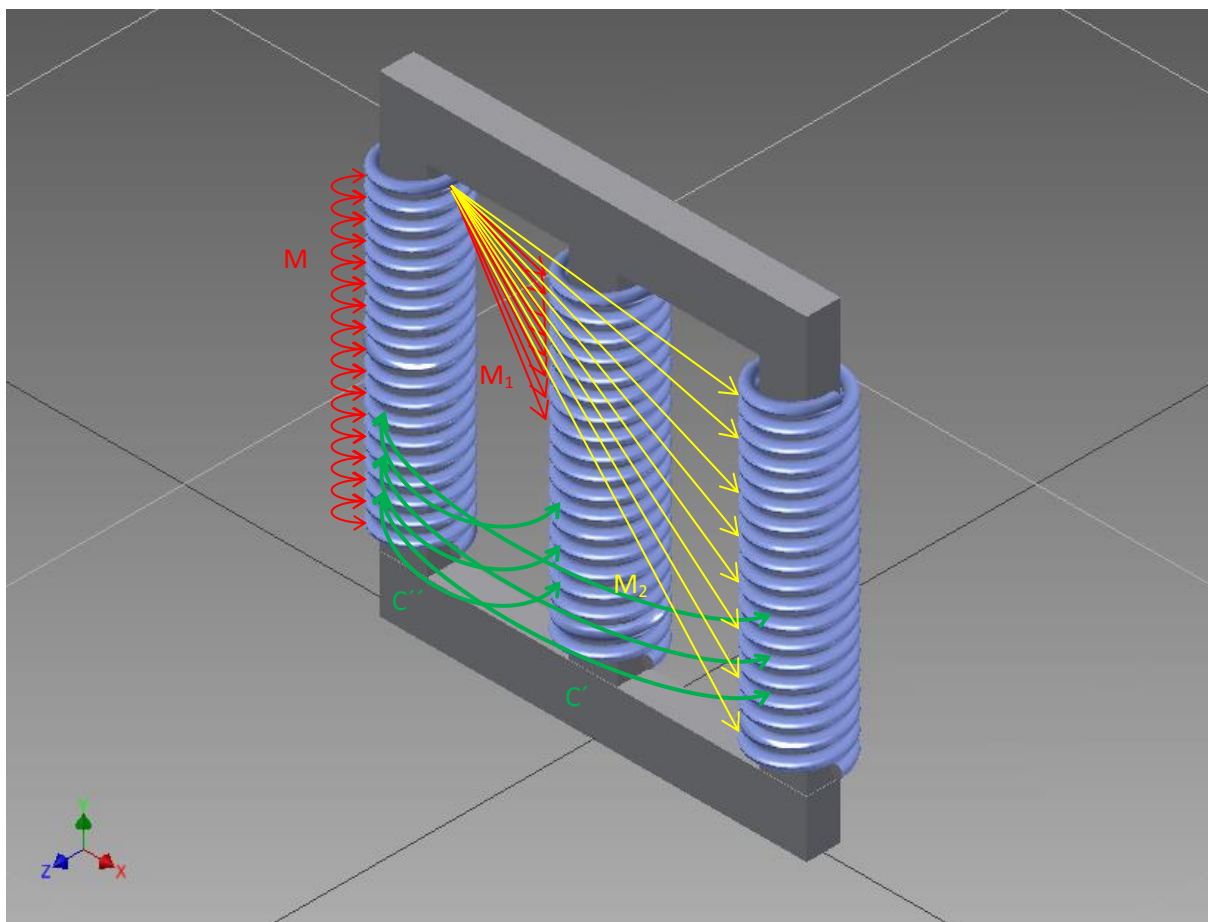
V rámci disertační práce jsem upravil Wagnerovu představu o elementu vinutí tak, aby více odpovídala reálnému trojfázovému transformátoru. Vzájemnou indukčnost mezi jednotlivými elementy vlastního vinutí jsem vyjádřil v závislosti na vzdálenosti elementů na základě vztahů uvedených v [4]. Vzájemnou indukčnost mezi jednotlivými cívkami potom respektuji indukčností označenou ve schématu \mathbf{M}_1 a \mathbf{M}_2 . Detailní význam jednotlivých složek je patrný z obrázků číslo 8 a 9.



Obrázek 9 – Rozšířené ekvivalentní schéma délkového elementu jednovrstvé cívky při respektování vzájemných induktivních vazeb mezi jednotlivými fázemi

Zaměnit za samostatný obrázek číslo 6

4.1.2 Analytická formulace problému – přenesení odvozených vlastností jednovrstvé cívký na vinutí trojfázového transformátoru



Obrázek 10 – Ekvivalentní parametry jednovrstvé cívký

Pro jednotlivé fáze trojfázového transformátoru označené a , b , c lze napsat následující předpisy rovnic (souvislosti uvnitř transformátoru jsou patrné z obrázku číslo 10, případně ze soupisu použitých zkratek):

$$-K \frac{\partial^2 u_a(x,t)}{\partial x \partial t} = i_{ka}(x,t) \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial u_a(x,t)}{\partial x} = -L \frac{\partial i_{La}(x,t)}{\partial t} - M_1 \frac{\partial i_{Lb}(x,t)}{\partial t} - M_2 \frac{\partial i_{Lc}(x,t)}{\partial t} - Ri_{La}(x,t) \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial i_a(x,t)}{\partial x} = -C \frac{\partial u_a(x,t)}{\partial t} - C' \frac{\partial [u_a(x,t) - u_c(x,t)]}{\partial t} - C'' \frac{\partial [u_a(x,t) - u_b(x,t)]}{\partial t} \quad (4.12)$$

$$i_a(x,t) = i_{La}(x,t) + i_{ka}(x,t) \quad (4.13)$$

Derivací rovnice (4.11) podle podélné proměnné x získáme:

$$\frac{\partial^2 u_a(x,t)}{\partial x^2} = -L \frac{\partial^2 i_{La}(x,t)}{\partial x \partial t} - M_1 \frac{\partial^2 i_{Lb}(x,t)}{\partial x \partial t} - M_2 \frac{\partial^2 i_{Lc}(x,t)}{\partial x \partial t} - R \frac{\partial i_{La}(x,t)}{\partial x} \quad (4.14)$$

Derivováním rovnice (4.10) a (4.13) podle prostorové proměnné x a dosazením do rovnice (4.12) získáme následující tvar:

$$\frac{\partial i_{La}(x,t)}{\partial x} = -C \frac{\partial u_a(x,t)}{\partial t} + K \frac{\partial^3 u_a(x,t)}{\partial x^2 \partial t} - C' \frac{\partial}{\partial t} [u_a(x,t) - u_c(x,t)] - C'' \frac{\partial}{\partial t} [u_a(x,t) - u_b(x,t)] \quad (4.15)$$

Výsledný výraz po dosazení do rovnice (4.14) je možné zapsat ve tvaru:

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial^2 u_a(x,t)}{\partial x^2} - L \left(-C \frac{\partial^2 u_a(x,t)}{\partial t^2} + K \frac{\partial^4 u_a(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} - C' \frac{\partial^2 (u_a(x,t) - u_c(x,t))}{\partial t^2} - C'' \frac{\partial^2 (u_a(x,t) - u_b(x,t))}{\partial t^2} \right) - \\ & - M_1 \left(-C \frac{\partial^2 u_b(x,t)}{\partial t^2} + K \frac{\partial^4 u_b(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} - C' \frac{\partial^2 (u_b(x,t) - u_c(x,t))}{\partial t^2} - C'' \frac{\partial^2 (u_b(x,t) - u_a(x,t))}{\partial t^2} \right) - \\ & - M_2 \left(-C \frac{\partial^2 u_c(x,t)}{\partial t^2} + K \frac{\partial^4 u_c(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} - C' \frac{\partial^2 (u_c(x,t) - u_a(x,t))}{\partial t^2} - C'' \frac{\partial^2 (u_c(x,t) - u_b(x,t))}{\partial t^2} \right) - \\ & - R \left(C \frac{\partial u_a(x,t)}{\partial t} - K \frac{\partial^3 u_a(x,t)}{\partial x^2 \partial t} + C' \frac{\partial (u_a(x,t) - u_c(x,t))}{\partial t} + C'' \frac{\partial (u_a(x,t) - u_b(x,t))}{\partial t} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Po úpravě:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_a(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\begin{aligned} & u_a(x,t) \cdot (-LC - LC' - LC'' + M_1 C'' + M_2 C') \\ & u_b(x,t) \cdot (LC'' - M_1 C - M_1 C' - M_1 C'' + M_2 C'') \\ & u_c(x,t) \cdot (LC' + M_1 C' - M_2 C - M_2 C' - M_2 C'') \end{aligned} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial t} (-RCu_a(x,t) - RC'u_a(x,t) + RC'u_c(x,t) - RC''u_a(x,t) + RC''u_b(x,t)) + \\ & + \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} (RKu_a(x,t)) + \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial x^2} (LKu_a(x,t) + M_1 Ku_b(x,t) + M_2 Ku_c(x,t)) = 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Pokud bychom neuvažovali subtraktivní členy kapacitní vazby mezi vinutími b a c

$-C' \frac{\partial}{\partial t} [u_a(x,t) - u_c(x,t)] - C'' \frac{\partial}{\partial t} [u_a(x,t) - u_b(x,t)]$, potom se rovnice zjednoduší do tvaru:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_a(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} [LCu_a(x,t) + M_1 Cu_b(x,t) + M_2 Cu_c(x,t)] \\ & + K \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} [Lu_a(x,t) + M_1 u_b(x,t) + M_2 u_c(x,t)] - RC \frac{\partial u_a(x,t)}{\partial t} + RK \frac{\partial^3 u_a(x,t)}{\partial x^2 \partial t} = 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

Formálně lze zcela stejně zapsat rovnice pro zbývající dvě fáze *b* a *c*:

Pro fázi *b* platí:

$$\frac{\partial^2 u_b(x,t)}{\partial x^2} = -L \frac{\partial^2 i_{Lb}(x,t)}{\partial x \partial t} - M_1 \frac{\partial^2 i_{Lc}(x,t)}{\partial x \partial t} - M_2 \frac{\partial^2 i_{La}(x,t)}{\partial x \partial t} - R \frac{\partial i_{Lb}(x,t)}{\partial x} \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial i_{Lb}(x,t)}{\partial x} = -C \frac{\partial u_b(x,t)}{\partial t} + K \frac{\partial^3 u_b(x,t)}{\partial x^2 \partial t} - C' \frac{\partial}{\partial t} [u_b(x,t) - u_c(x,t)] - C'' \frac{\partial}{\partial t} [u_b(x,t) - u_a(x,t)] \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial^2 u_b(x,t)}{\partial x^2} - L \left(-C \frac{\partial^2 u_b(x,t)}{\partial t^2} + K \frac{\partial^4 u_b(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} - C' \frac{\partial^2 (u_b(x,t) - u_c(x,t))}{\partial t^2} - C'' \frac{\partial^2 (u_b(x,t) - u_a(x,t))}{\partial t^2} \right) - \\ & - M_1 \left(-C \frac{\partial^2 u_c(x,t)}{\partial t^2} + K \frac{\partial^4 u_c(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} - C' \frac{\partial^2 (u_c(x,t) - u_a(x,t))}{\partial t^2} - C'' \frac{\partial^2 (u_c(x,t) - u_b(x,t))}{\partial t^2} \right) - \\ & - M_2 \left(-C \frac{\partial^2 u_a(x,t)}{\partial t^2} + K \frac{\partial^4 u_a(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} - C' \frac{\partial^2 (u_a(x,t) - u_c(x,t))}{\partial t^2} - C'' \frac{\partial^2 (u_a(x,t) - u_b(x,t))}{\partial t^2} \right) + \\ & + R \left(C \frac{\partial u_a(x,t)}{\partial t} - K \frac{\partial^3 u_a(x,t)}{\partial x^2 \partial t} + C' \frac{\partial (u_a(x,t) - u_c(x,t))}{\partial t} + C'' \frac{\partial (u_a(x,t) - u_b(x,t))}{\partial t} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_b(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\begin{aligned} & u_a(x,t) \cdot (LC'' + M_1 C' - M_2 C - M_2 C' - M_2 C'') + \\ & + u_b(x,t) \cdot (-LC - LC' - LC'' - M_2 C' - M_2 C'') + \\ & + u_c(x,t) \cdot (LC' + M_1 C - M_1 C' - M_1 C'' - M_2 C') + \end{aligned} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial t} (-RCu_b(x,t) - RC'u_b(x,t) + RC'u_c(x,t) - RC''u_b(x,t) + RC''u_a(x,t)) + \\ & + \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} (RKu_b(x,t)) + \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial x^2} (LKu_b(x,t) + M_1 Ku_c(x,t) + M_2 Ku_a(x,t)) = 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

Zjednodušení bez subtraktivních členů přímé kapacitní vazby mezi zbývajícími fázemi *a* a *c*:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_b(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} [M_1 Cu_a(x,t) + LCu_b(x,t) + M_2 Cu_c(x,t)] \\ & + K \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} [M_2 u_a(x,t) + Lu_b(x,t) + M_1 u_c(x,t)] - RC \frac{\partial u_b(x,t)}{\partial t} + RK \frac{\partial^3 u_b(x,t)}{\partial x^2 \partial t} = 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

Pro fázi *c* platí:

$$\frac{\partial^2 u_c(x,t)}{\partial x^2} = -L \frac{\partial^2 i_{Lc}(x,t)}{\partial x \partial t} - M_1 \frac{\partial^2 i_{La}(x,t)}{\partial x \partial t} - M_2 \frac{\partial^2 i_{Lb}(x,t)}{\partial x \partial t} - R \frac{\partial i_{Lc}(x,t)}{\partial x} \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial i_{Lc}(x,t)}{\partial x} = -C \frac{\partial u_c(x,t)}{\partial t} + K \frac{\partial^3 u_c(x,t)}{\partial x^2 \partial t} - C' \frac{\partial}{\partial t} [u_c(x,t) - u_a(x,t)] - C'' \frac{\partial}{\partial t} [u_c(x,t) - u_b(x,t)] \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial^2 u_c(x,t)}{\partial x^2} - L \left(-C \frac{\partial^2 u_c(x,t)}{\partial t^2} + K \frac{\partial^4 u_c(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} - C' \frac{\partial^2 (u_c(x,t) - u_a(x,t))}{\partial t^2} - C'' \frac{\partial^2 (u_c(x,t) - u_b(x,t))}{\partial t^2} \right) - \\
& - M_1 \left(-C \frac{\partial^2 u_a(x,t)}{\partial t^2} + K \frac{\partial^4 u_a(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} - C' \frac{\partial^2 (u_a(x,t) - u_c(x,t))}{\partial t^2} - C'' \frac{\partial^2 (u_a(x,t) - u_b(x,t))}{\partial t^2} \right) - \\
& - M_2 \left(-C \frac{\partial^2 u_b(x,t)}{\partial t^2} + K \frac{\partial^4 u_b(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} - C' \frac{\partial^2 (u_b(x,t) - u_c(x,t))}{\partial t^2} - C'' \frac{\partial^2 (u_b(x,t) - u_a(x,t))}{\partial t^2} \right) + \\
& + R \left(C \frac{\partial u_c(x,t)}{\partial t} - K \frac{\partial^3 u_c(x,t)}{\partial x^2 \partial t} + C' \frac{\partial (u_c(x,t) - u_a(x,t))}{\partial t} + C'' \frac{\partial (u_c(x,t) - u_b(x,t))}{\partial t} \right) = 0
\end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 u_c(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\begin{aligned} & u_a(x,t) \cdot (LC' + M_1 C - M_1 C' - M_1 C'' - M_2 C'') + \\ & + u_b(x,t) \cdot (LC'' + M_1 C'' - M_2 C - M_2 C' - M_2 C'') + \\ & + u_c(x,t) \cdot (-LC - LC' - LC'' + M_1 C' - M_2 C') + \end{aligned} \right) + \\
& + \frac{\partial}{\partial t} (-RCu_c(x,t) - RC'u_c(x,t) - RC''u_c(x,t) + RC'u_a(x,t) + RC''u_b(x,t)) + \\
& + \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} (RKu_c(x,t)) + \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} (LKu_c(x,t) + M_1 Ku_a(x,t) + M_2 Ku_b(x,t)) = 0
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Zjednodušení bez subtraktivních členů přímé kapacitní vazby mezi zbývajícími fázemi *a* a *b*:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 u_c(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} [M_1 Cu_a(x,t) + M_2 Cu_b(x,t) + LCu_c(x,t)] \\
& + K \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} [M_1 u_a(x,t) + M_2 u_b(x,t) + Lu_c(x,t)] - RC \frac{\partial u_c(x,t)}{\partial t} + RK \frac{\partial^3 u_c(x,t)}{\partial x^2 \partial t} = 0
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Výsledné rovnice se dají vyjádřit maticově jako:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{bmatrix} u_a(x,t) \\ u_b(x,t) \\ u_c(x,t) \end{bmatrix} + \\
& + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{bmatrix} -LC - LC' - LC'' + M_1 C'' + M_2 C'; & LC'' - M_1 C - M_1 C' - M_1 C'' + M_2 C''; & LC' + M_1 C' - M_2 C - M_2 C' - M_2 C'' \\ LC'' + M_1 C' - M_2 C - M_2 C' - M_2 C''; & -LC - LC' - LC'' - M_2 C' - M_2 C''; & LC' + M_1 C - M_1 C' - M_1 C'' - M_2 C' \\ LC' + M_1 C - M_1 C' - M_1 C'' - M_2 C''; & LC'' + M_1 C'' - M_2 C - M_2 C' - M_2 C''; & -LC - LC' - LC'' + M_1 C' - M_2 C' \end{bmatrix} \cdot \\
& \cdot \begin{bmatrix} u_a(x,t) \\ u_b(x,t) \\ u_c(x,t) \end{bmatrix} + K \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} \begin{bmatrix} L & M_1 & M_2 \\ M_2 & L & M_1 \\ M_1 & M_2 & L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_a(x,t) \\ u_b(x,t) \\ u_c(x,t) \end{bmatrix} + \\
& + R \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} -C - C' - C'' & C'' & C' \\ C'' & -C - C' - C'' & C' \\ C' & C'' & -C - C' - C'' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_a(x,t) \\ u_b(x,t) \\ u_c(x,t) \end{bmatrix} + RK \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \begin{bmatrix} u_a(x,t) \\ u_b(x,t) \\ u_c(x,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Maticový zápis po zjednodušení bez subtraktivních členů přímé kapacitní vazby mezi zbývajícími fázemi *a* a *b* za předpokladu rovnosti M_1 a M_2 :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{bmatrix} u_a(x,t) \\ u_b(x,t) \\ u_c(x,t) \end{bmatrix} - C \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{bmatrix} L & M & M \\ M & L & M \\ M & M & L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_a(x,t) \\ u_b(x,t) \\ u_c(x,t) \end{bmatrix} + K \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} \begin{bmatrix} L & M & M \\ M & L & M \\ M & M & L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_a(x,t) \\ u_b(x,t) \\ u_c(x,t) \end{bmatrix} - \\ & - RC \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} u_a(x,t) \\ u_b(x,t) \\ u_c(x,t) \end{bmatrix} + RK \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \begin{bmatrix} u_a(x,t) \\ u_b(x,t) \\ u_c(x,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Matematický popis diskretizovaného vinutí je tvořen systémem parciálních diferenciálních rovnic hyperbolického typu čtvrtého řádu. V mé disertační práci předpokládám transformátor, který je osově symetrický. Elektromagnetické vazby mezi jednotlivými fázemi označené M vytvoří systém symetrických nediagonálních matic.

4.2 Metoda konečných diferencí pro výpočet rozložení napětí podél vinutí transformátoru – zjednodušený výpočet bez uvažování kapacitních vazeb se zbývajícími fázemi a se zanedbáním rozdílu mezi M_1 a M_2

4.2.1 Popis uvažovaného systému

Uvažovaný problém rozložení napětí podél vinutí cívky transformátoru lze popsat systémem parciálních diferenciálních rovnic (4.30), dále jen:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{U} - C\mathbb{A} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{U} + K\mathbb{A} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} \mathbf{U} - RC \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + RK \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \mathbf{U} = 0 \quad (4.31)$$

v $(0,T) \times (0,D)$, kde C , K a R jsou konstanty,

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} L & M & M \\ M & L & M \\ M & M & L \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

je konstantní matice a $\mathbf{U}(t,x) : (0,T) \times (0,D) \rightarrow \mathbb{R}^3$ je neznámá funkce napětí.

Systém doplníme o Dirichletovy okrajové podmínky:

$$\mathbf{U}(t,0) = \mathbf{U}_0(t) \times (0,D), \quad v \quad (0,T),$$

$$\mathbf{U}(t,D) = 0, \quad v \quad (0,T), \quad (4.33)$$

kde \mathbf{U}_0 reprezentuje vstupní impulz a podmínka $\mathbf{U}(t,0) = \mathbf{U}_0(t, D) = 0$ je důsledkem uzemnění vodiče, a o počáteční podmínky:

$$\mathbf{U}(0,x) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U}_0(0,x) = 0, \quad v \quad (0,D). \quad (4.34)$$

4.2.2 Použitá numerická metoda

Rovnici (4.31) diskretizujeme pomocí metody konečných diferencí [12–27]. Buď $h > 0$ prostorový a $\tau > 0$ časový krok na výpočetní oblasti $(0, T) \times (0, D)$, $x_i = ih$, $i = 0, \dots, N_x$ prostorové uzly a $t_k = k\tau$, $k = 0, \dots, M_t$, časové uzly. V dalším označíme aproximaci $\mathbf{U}_i^k \approx \mathbf{U}(t_k, x_i)$. Jednotlivé členy z rovnice (4.31) v bodě (t_k, x_i) aproximujeme pomocí diferencí následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{U}_i^k &\approx \frac{1}{h^2} (\mathbf{U}_{i-1}^k - 2\mathbf{U}_i^k + \mathbf{U}_{i+1}^k), \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{U}_i^k &\approx \frac{1}{\tau^2} (\mathbf{U}_i^k - 2\mathbf{U}_i^{k-1} + \mathbf{U}_i^{k-2}), \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U}_i^k &\approx \frac{1}{\tau} (\mathbf{U}_i^k - \mathbf{U}_i^{k-1}), \\ \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \mathbf{U}_i^k &\approx \frac{1}{\tau} \left[\frac{1}{h^2} (\mathbf{U}_{i-1}^k - 2\mathbf{U}_i^k + \mathbf{U}_{i+1}^k) - \frac{1}{h^2} (\mathbf{U}_{i-1}^{k-1} - 2\mathbf{U}_i^{k-1} + \mathbf{U}_{i+1}^{k-1}) \right], \\ \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} \mathbf{U}_i^k &\approx \frac{1}{\tau^2} \left[\frac{1}{h^2} (\mathbf{U}_{i-1}^k - 2\mathbf{U}_i^k + \mathbf{U}_{i+1}^k) - \frac{2}{h^2} (\mathbf{U}_{i-1}^{k-1} - 2\mathbf{U}_i^{k-1} + \mathbf{U}_{i+1}^{k-1}) + \frac{1}{h^2} (\mathbf{U}_{i-1}^{k-2} - 2\mathbf{U}_i^{k-2} + \mathbf{U}_{i+1}^{k-2}) \right], \end{aligned} \quad (4.35)$$

kde $i = 1 \dots N_x - 1$ a $k = 2 \dots M_t$.

Dosazením aproximace do (4.30), dostaneme pro každé $k = 2 \dots M_t$, $i = 1 \dots N_x - 1$ lineární soustavu:

$$d_{i-1}^k \mathbf{U}_{i-1}^k + d_i^k \mathbf{U}_i^k + d_{i+1}^k \mathbf{U}_{i+1}^k = F(\mathbf{U}_{i-1}^{k-1}, \mathbf{U}_i^{k-1}, \mathbf{U}_{i+1}^{k-1}, \mathbf{U}_{i-1}^{k-2}, \mathbf{U}_i^{k-2}, \mathbf{U}_{i+1}^{k-1}), \quad (4.36)$$

kde d_{i-1}^k , d_i^k a d_{i+1}^k jsou matice koeficientů a F je vektorová funkce (závislá na předchozích časových vrstvách). Soustavu lze řešit vhodnou metodou pro řešení soustav lineárních rovnic (například Gaussovou eliminační metodou).

4.2.3 Rozklad matice \mathbb{A} a definování nového problému

Roznásobením matice \mathbb{A} a vektoru neznámých \mathbf{U} dostaneme z (4.31) 3 rovnice obsahující všechny 3 složky neznámé funkce \mathbf{U} v každé rovnici. Pokud rozložíme matici \mathbb{A} jako $\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{E}\mathbb{Q}^{-1}$, kde \mathbb{E} je diagonální matice s vlastními čísly \mathbb{A} na diagonále a \mathbb{Q} je matice rotace vytvořená z vlastních vektorů \mathbb{A} , půjde systém rovnic (4.31) po vynásobení maticí \mathbb{Q}^{-1} zleva rozepsat do tří rovnic, jenž každá bude obsahovat jen jednu složku neznámé funkce \mathbf{U} , tj. každá rovnice půjde řešit zvlášť. Vlivem této vlastnosti půjde v kontextu zvolené numerické

metody rozepsat systém (4.36) do tří rovnic, kde každá z nich bude obsahovat pouze jednu složku neznámé funkce \mathbf{U} .

Rozklad matice \mathbb{A} :

Vlastní čísla matice \mathbb{A} jsou:

$$\lambda_{1,2} = L - M \text{ a } \lambda_3 = L + 2M$$

a odpovídající vlastní vektory jsou:

$$\mathbf{v}_1 = (-1, 1, 0)^T, \mathbf{v}_2 = (0, 1, -1)^T, \mathbf{v}_3 = (1, 1, 1)^T \quad (4.37)$$

Potom platí:

$$\mathbb{A} = \mathbb{Q} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \mathbb{Q}^{-1}, \text{ kde} \quad (4.38)$$

$$\mathbb{Q} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \quad (4.39)$$

přičemž sloupce matice \mathbb{Q} jsou tvořeny ortonormalizovanými vlastními vektory.

V dalším textu budu značit:

$$\mathbb{E} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Nyní vynásobíme soustavu (4.31) maticí \mathbb{Q}^{-1} zleva a dostaneme:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbb{Q}^{-1} \mathbf{U} - C\mathbb{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbb{Q}^{-1} \mathbf{U} + K\mathbb{E} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} \mathbb{Q}^{-1} \mathbf{U} - RC \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{Q}^{-1} \mathbf{U} + RK \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \mathbb{Q}^{-1} \mathbf{U} = 0 \quad (4.41)$$

Zadefinoval jsem novou neznámou $\mathbf{W} := \mathbb{Q}^{-1} \mathbf{U}$, pro kterou platí následující rovnice:

$$\mathbf{W} = (W_1, W_2, W_3) \quad (4.42)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} W_1 - C(L - M) \frac{\partial^2}{\partial t^2} W_1 + K(L - M) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} W_1 - RC \frac{\partial}{\partial t} W_1 + RK \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} W_1 = 0 \quad (4.43)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} W_2 - C(L - M) \frac{\partial^2}{\partial t^2} W_2 + K(L - M) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} W_2 - RC \frac{\partial}{\partial t} W_2 + RK \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} W_2 = 0 \quad (4.44)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} W_3 - C(L + M) \frac{\partial^2}{\partial t^2} W_3 + K(L + M) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} W_3 - RC \frac{\partial}{\partial t} W_3 + RK \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} W_3 = 0 \quad (4.45)$$

v $(0, T) \times (0, D)$, doplněné o počáteční a okrajové podmínky:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(t, 0) &= \mathbb{Q}^{-1} \mathbf{U}_0(t) & \text{v } (0, T) \\ \mathbf{W}(t, D) &= 0 & \text{v } (0, T) \\ \mathbf{W}(0, x) &= \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{W}(0, x) = 0 & \text{v } (0, D) \end{aligned} \quad (4.46)$$

4.2.4 Konkrétní formulace úlohy

Dosadíme aproximace (4.35) do rovnic (4.45–4.47) a pro $k = 2, \dots, M_t$ a $i = 1, \dots, N_x - 1$ a $\alpha = 1, 2, 3$ dostaneme tridiagonální soustavu:

$$d_\alpha^0 W_{\alpha, i-1}^k + d_\alpha^1 W_{\alpha, i}^k + d_\alpha^0 W_{\alpha, i+1}^k = \beta_{\alpha, i}^k \quad (4.47)$$

kde:

$$d_\alpha^0 = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h^2} \frac{1}{\tau} K(L - M) + \frac{1}{h^2} \frac{1}{\tau} RK \quad \alpha = 1, 2 \quad (4.48)$$

$$d_\alpha^1 = -\frac{2}{h^2} - \frac{1}{\tau^2} C(L - M) - \frac{2}{h^2} \frac{1}{\tau} K(L - M) - \frac{1}{\tau} RC - \frac{2}{h^2} \frac{1}{\tau} RK \quad \alpha = 1, 2 \quad (4.49)$$

$$d_3^0 = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h^2} \frac{1}{\tau} K(L + 2M) + \frac{1}{h^2} \frac{1}{\tau} RK \quad \alpha = 1, 2 \quad (4.50)$$

$$d_3^1 = -\frac{2}{h^2} - \frac{1}{\tau^2} C(L + 2M) - \frac{2}{h^2} \frac{1}{\tau} K(L + 2M) - \frac{1}{\tau} RC - \frac{2}{h^2} \frac{1}{\tau} RK$$

$$\beta_{\alpha, i}^k = -W_{\alpha, i-1}^{k-1} \left(-\frac{2}{h^2} \frac{1}{\tau^2} K(L - M) - \frac{1}{h^2} \frac{1}{\tau} RK \right)$$

$$-W_{\alpha, i}^{k-1} \left(\frac{2}{\tau^2} C(L - M) + \frac{4}{h^2} \frac{1}{\tau^2} K(L - M) + \frac{1}{\tau} RC + \frac{2}{h^2} \frac{1}{\tau} RK \right)$$

$$-W_{\alpha, i+1}^{k-1} \left(-\frac{2}{h^2} \frac{1}{\tau^2} K(L - M) - \frac{1}{h^2} \frac{1}{\tau} RK \right)$$

$$-W_{\alpha, i-1}^{k-2} \left(\frac{1}{h^2} \frac{1}{\tau^2} K(L - M) \right)$$

$$\begin{aligned}
& -W_{\alpha,i}^{k-2} \left(-\frac{1}{\tau^2} C(L-M) - \frac{2}{h^2} \frac{1}{\tau^2} K(L-M) \right) \\
& -W_{\alpha,i+1}^{k-2} \left(\frac{1}{h^2} \frac{1}{\tau^2} K(L-M) \right) \qquad \qquad \qquad \alpha = 1,2 \\
\beta_{3,i}^k &= -W_{3,i-1}^{k-1} \left(-\frac{2}{h^2} \frac{1}{\tau^2} K(L+2M) - \frac{1}{h^2} \frac{1}{\tau} RK \right) \\
& -W_{3,i}^{k-1} \left(\frac{2}{\tau^2} C(L+2M) + \frac{4}{h^2} \frac{1}{\tau^2} K(L+2M) + \frac{1}{\tau} RC + \frac{2}{h^2} \frac{1}{\tau} RK \right) \\
& -W_{3,i+1}^{k-1} \left(-\frac{2}{h^2} \frac{1}{\tau^2} K(L+2M) - \frac{1}{h^2} \frac{1}{\tau} RK \right) \\
& -W_{3,i-1}^{k-2} \left(\frac{1}{h^2} \frac{1}{\tau^2} K(L+2M) \right) \\
& -W_{3,i}^{k-2} \left(-\frac{1}{\tau^2} C(L+2M) - \frac{2}{h^2} \frac{1}{\tau^2} K(L+2M) \right) \\
& -W_{3,i+1}^{k-2} \left(\frac{1}{h^2} \frac{1}{\tau^2} K(L+2M) \right)
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Celkem dostanu pro každé $\alpha = 1,2,3$ a pro každou časovou vrstvu $k = 2, \dots, M_t$ soustavu lineárních rovnic. Rovnici (4.41) jsem přepsal v maticovém tvaru a řešil Gaussovou eliminační metodou.

$$\begin{bmatrix} d_\alpha^1 & d_\alpha^0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ d_\alpha^0 & d_\alpha^1 & d_\alpha^0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d_\alpha^0 & d_\alpha^1 & d_\alpha^0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & d_\alpha^0 & d_\alpha^1 & d_\alpha^0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & d_\alpha^0 & d_\alpha^1 & d_\alpha^0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & d_\alpha^0 & d_\alpha^1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} W_{\alpha,1}^k \\ W_{\alpha,2}^k \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ W_{\alpha,N-1}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{\alpha,1}^k - d_\alpha^0 W_{\alpha,0}^k \\ \beta_{\alpha,2}^k \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \beta_{\alpha,N-1}^k \end{bmatrix} \tag{4.52}$$

Po vyřešení této soustavy zbývá rekonstruovat napětí \mathbf{U} z vypočítaného řešení \mathbf{W} pomocí identity $\mathbf{U} = \mathbb{Q}\mathbf{W}$, což v diskrétní formě znamená, že aproximace \mathbf{U} v bodě (t_k, x_i) je dána součinem \mathbb{Q} a vektoru \mathbf{W} v bodě (t_k, x_i) .

4.2.5 Řetězení jednovrstvé cívký

Jedná se o identický problém jako v případě řešení rozložení napětí podél axiální osy vinutí transformátoru, tj. formulace i řešení jsou ve všech ohledech stejné. Jedinou výjimku tvoří konstanty L , M , C , K , R vystupující v rovnici, které nyní uvažuji jako po částech konstantní funkce (tj. nespojitě). Stejným způsobem jsem použil numerickou aproximaci (4.35), rozklad matice \mathbb{A} a převedl jsem tak úlohu na rovnice (4,43–4,45) jako u jednoduché cívký.

Identickým způsobem dostanu rovnici:

$$d_{\alpha}^0 W_{\alpha,i-1}^k + d_{\alpha}^1 W_{\alpha,i}^k + d_{\alpha}^0 W_{\alpha,i+1}^k = \beta_{\alpha,i}^k, \quad (4.53)$$

kde uvedené koeficienty jsou po částech konstantní funkce. Body prostorové diskretizace ležící v první cívký budou násobeny koeficienty odpovídající první cívký a analogicky tak pro body druhé cívký, atd. Musí se pouze zajistit, aby nespojitost v koeficientech nevycházela přesně do některého prostorového uzlu.

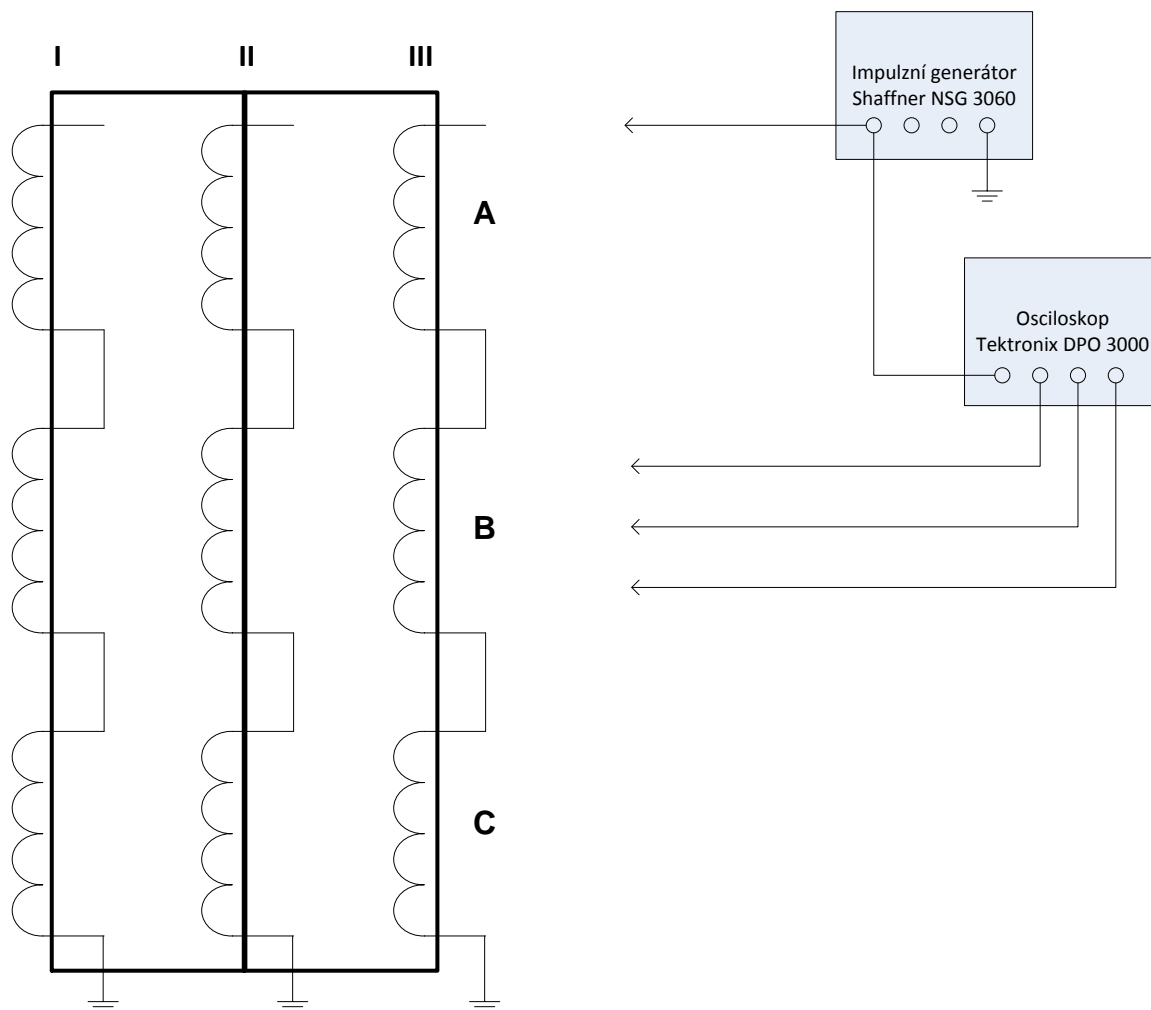
4.3 Impulzní namáhání transformátoru s nehomogenně rozloženými parametry a s uvažováním vzájemné indukční vazby mezi jednotlivými závity

Analýza impulzního namáhání transformátorových vinutí je velmi individuální záležitostí a dotýká se konkrétní aplikace, pro kterou je daný typ transformátoru určený. Obecně však je možné uvést, že v prvním okamžiku při příchodu napěťového impulsu na vstupní svorku transformátoru je rozložení napětí podél axiální osy transformátoru závislé na převládajících kapacitních poměrech uvnitř vinutí (indukčnost v čase blízkém nule můžeme zanedbat), naopak v konečné fázi a průběhu přechodného děje se indukčnost vinutí podílí na vzniku volných kmitů, které svými maximy ohrožují izolaci.

Při impulzním namáhání cívký působí u jednovrstvého vinutí zemní kapacita (příčná) \mathbf{C} nelineární rozložení napětí, opačně zvětšení sériové (podélné) kapacity \mathbf{K} má za následek postupné linearizování počátečního rozložení napětí. Logickým důsledkem je fakt, že každé zmenšení zemní kapacity \mathbf{C} a současné zvětšení podélné \mathbf{K} vede k lineárnějšímu rozložení napětí.

Numericky namodelované výsledky jsem ověřil na *Technische Universität Ilmenau* v Německu, kde se v rámci spolupráce podařilo zkonstruovat trojfázový model transformátoru s tabelizovanými parametry (tabulka číslo 1).

Měření na modelu byla prováděna pomocí impulzního generátoru Schaffner NSG 3060 nejčastěji na hladině 1 kV, osciloskopu Tektronix DPO 3000 a sondami Micronix HV 40. Měření jsem vzhledem k omezenému počtu kanálu osciloskopu realizoval vždy za opakovaného impulsu a snímání v bodech, které odpovídaly jednomu závitu cívký a spoje mezi cívkami. Z tohoto důvodu byl jeden kanál osciloskopu připojen vždy na výstupní svorku impulzního generátoru. Měření byla realizována i pro ostatní fáze.



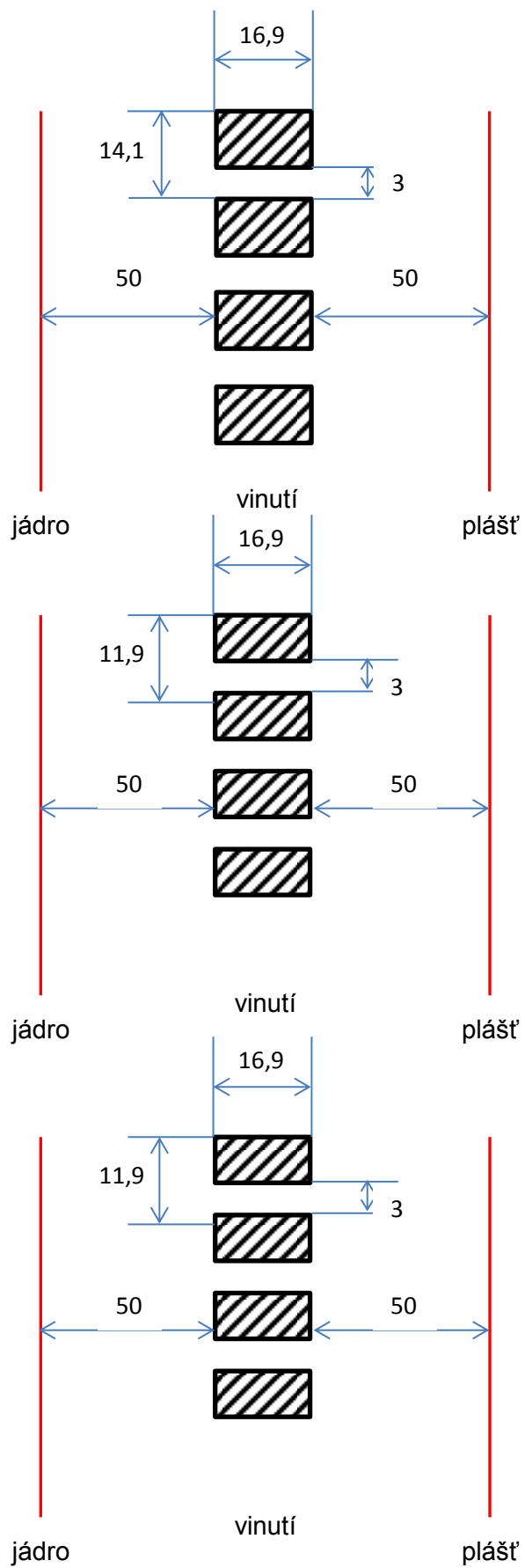
Obrázek 11 – Schematické znázornění měřicího stanoviště

Parametry modelu transformátorového vinutí sekce A:	
Délka vodiče	$l = 15 \text{ m}$
Počet závitů	$N = 10$
Permitivita izolace	$\epsilon_r = 4$
Rychlost šíření vlny	$v_s = 150 \frac{\text{m}}{\mu\text{s}}$
Sériová kapacita	$K = 200 \frac{\text{pF}}{\text{m}}$
Paralelní kapacita	$C = 10 \frac{\text{pF}}{\text{m}}$
Ekvivalentní indukčnost	$L = 1,2 \frac{\mu\text{H}}{\text{m}}$
Rezistance vinutí	$R = 0,149 \frac{\Omega}{\text{m}}$
Vzájemná indukčnost mezi cívkami	$M = 3,2 \frac{\mu\text{H}}{\text{m}}$
Dielektrický ztrátový činitel	$\tan\delta = 0,02$
Vodivost vodiče	$\sigma = 5 \cdot 10^7 \frac{\text{S}}{\text{m}}$
Síla izolace vodiče	$d = 3 \text{ mm}$
Permeabilita	$\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$
Rozměry vodiče	$a = 0,0169 \text{ m}, b = 0,0111 \text{ m}$

Parametry modelu transformátorového vinutí sekce B:	
Délka vodiče	$l = 15 \text{ m}$
Počet závitů	$N = 10$
Permitivita izolace	$\varepsilon_r = 4$
Rychlost šíření vlny	$v_s = 150 \frac{\text{m}}{\mu\text{s}}$
Sériová kapacita	$K = 200 \frac{\text{pF}}{\text{m}}$
Paralelní kapacita	$C = 10 \frac{\text{pF}}{\text{m}}$
Ekvivalentní indukčnost	$L = 1,2 \frac{\mu\text{H}}{\text{m}}$
Rezistance vinutí	$R = 0,149 \frac{\Omega}{\text{m}}$
Vzájemná indukčnost mezi cívkami	$M = 3,2 \frac{\mu\text{H}}{\text{m}}$
Dielektrický ztrátový činitel	$\tan\delta = 0,02$
Vodivost vodiče	$\sigma = 5 \cdot 10^7 \frac{\text{S}}{\text{m}}$
Síla izolace vodiče	$d = 3 \text{ mm}$
Permeabilita	$\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$
Rozměry vodiče	$a = 0,0169 \text{ m}, b = 0,0111 \text{ m}$

Parametry modelu transformátorového vinutí sekce C:	
Délka vodiče	$l = 15 \text{ m}$
Počet závitů	$N = 10$
Permitivita izolace	$\varepsilon_r = 4$
Rychlost šíření vlny	$v_s = 150 \frac{\text{m}}{\mu\text{s}}$
Sériová kapacita	$K = 200 \frac{\text{pF}}{\text{m}}$
Paralelní kapacita	$C = 10 \frac{\text{pF}}{\text{m}}$
Ekvivalentní indukčnost	$L = 1,2 \frac{\mu\text{H}}{\text{m}}$
Rezistance vinutí	$R = 0,137 \frac{\Omega}{\text{m}}$
Vzájemná indukčnost mezi cívkami	$M = 1,7 \frac{\mu\text{H}}{\text{m}}$
Dielektrický ztrátový činitel	$\tan\delta = 0,02$
Vodivost vodiče	$\sigma = 5 \cdot 10^7 \frac{\text{S}}{\text{m}}$
Síla izolace vodiče	$d = 3 \text{ mm}$
Permeabilita	$\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$
Rozměry vodiče	$a = 0,0169 \text{ m}, b = 0,0091 \text{ m}$

Tabulka 1 – Parametry modelu trojfázového transformátoru pro jednotlivé sekce **A, B, C**



Obrázek 12 – Nejdůležitější geometrická konfigurace transformátorového modelu

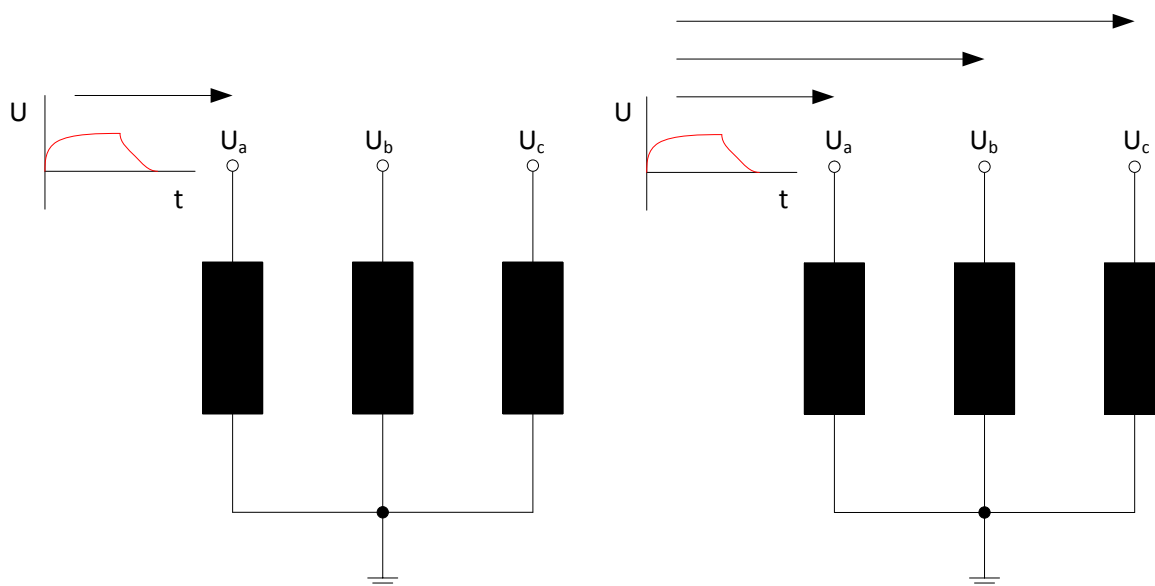
4.4 Impulzní namáhání trojfázového transformátoru

Při zkoumání impulzních dějů v trojfázových transformátorech je nutné respektovat způsob zapojení vinutí (do hvězdy nebo do trojúhelníku). Je-li uzel trojfázového transformátoru uzemněn, je možné na transformátor pohlížet jako na tři samostatné fáze (svázané induktivními a kapacitními vazbami) a aplikovat výsledky dosažené v předchozích kapitolách. Pokud zůstane uzel transformátoru izolovaný, bude odlišný průběh pro jednopólový a trojpólový náraz.

Navržená metoda byla naprogramována ve vývojovém prostředí programu MATLAB R2012b. Po numerickém řešení problému přináší model velmi dobré výsledky, které jsou však omezeny vstupními daty a reálným pohledem na cívku, jako objekt složený pouze z jedné vrstvy bez uvažování další vazby k nádobě transformátoru. Pro potřeby reálnějšího pohledu na problém jsem doplnil navržený algoritmus o možnost řetězení jednovrstvých cívek do série (opět s uvažováním jejich interakce s další cívkou druhé a třetí fáze transformátoru). Model umožňuje zobrazení průběhu napětí každé fáze v čase a prostoru.

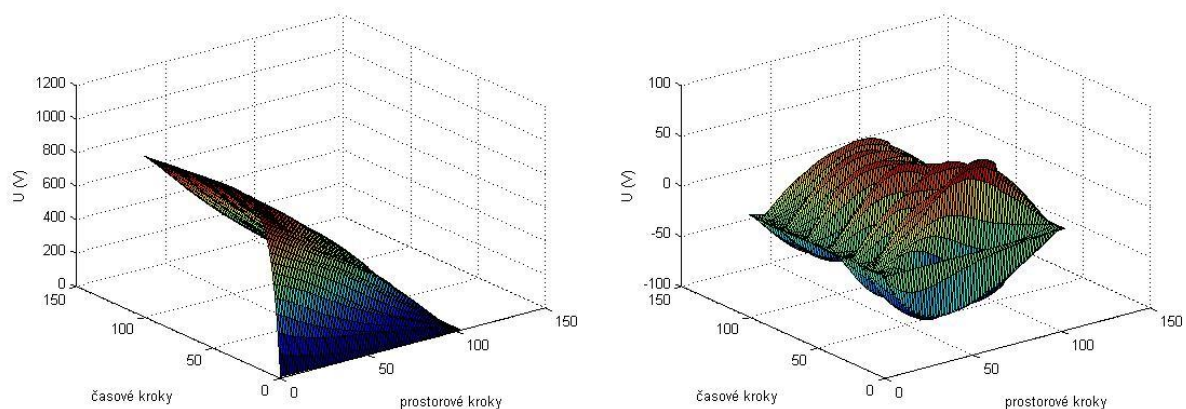
4.4.1 Jednopólový a trojpólový náraz trojfázového transformátoru

Pro vinutí zapojené do hvězdy s uzemněným uzlem vinutí lze při zkoumání průběhu rozložení napětí aplikovat vztah (4.41). Jeho řešením dostaneme průběh napětí v zasažené fázi *a* a indukované přepětí ve fázi *b* a *c*.

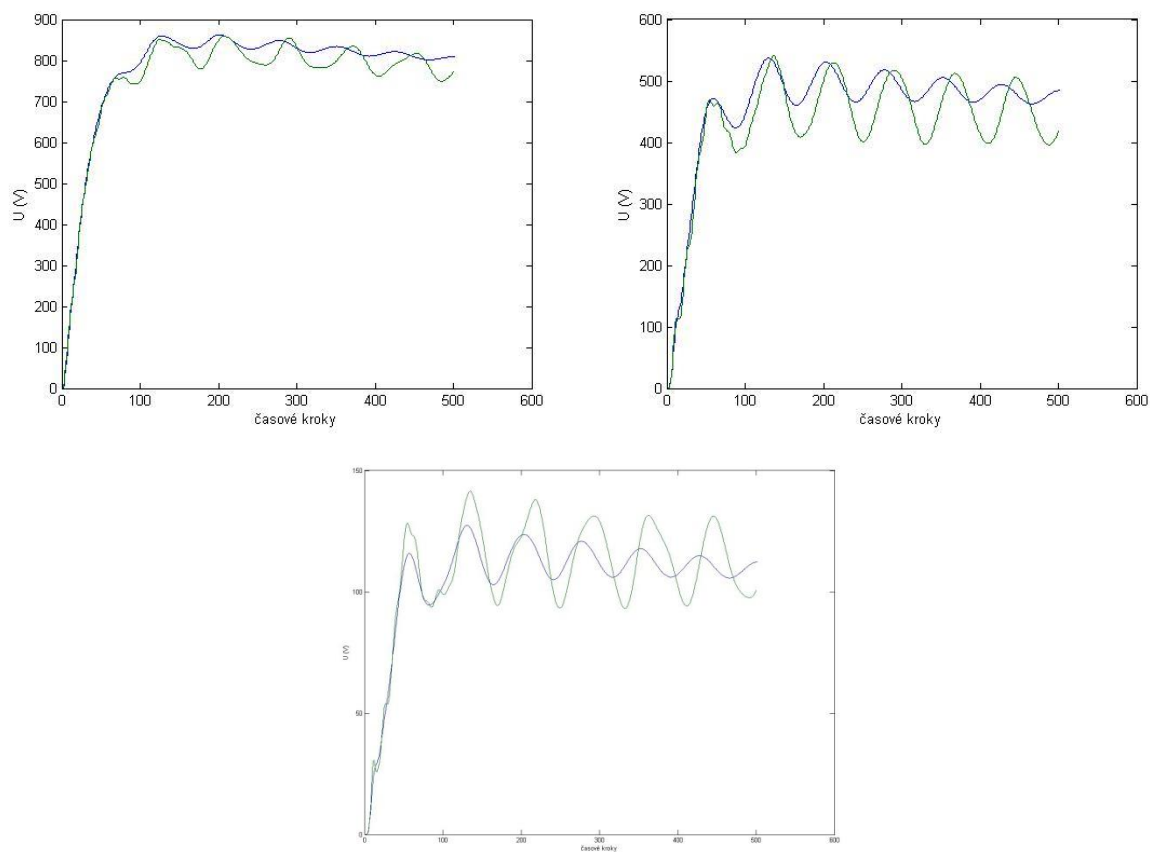


Obrázek 13 – Jednopólový a trojpólový náraz u trojfázového transformátoru zapojeného do hvězdy s uzemněným uzlem vinutí

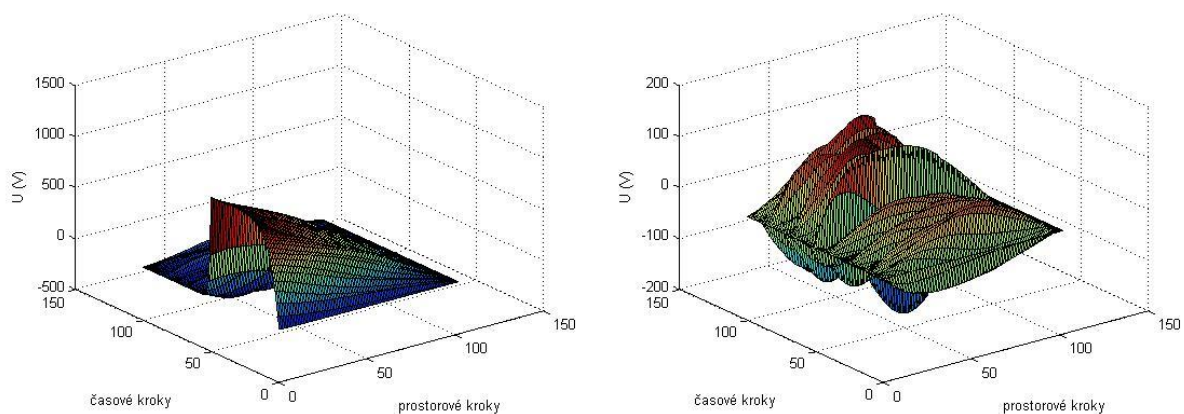
Pro zvolené hodnoty trojfázového transformátoru s uzemněným uzlem vinutí jsem získal tato rozložení napětí:



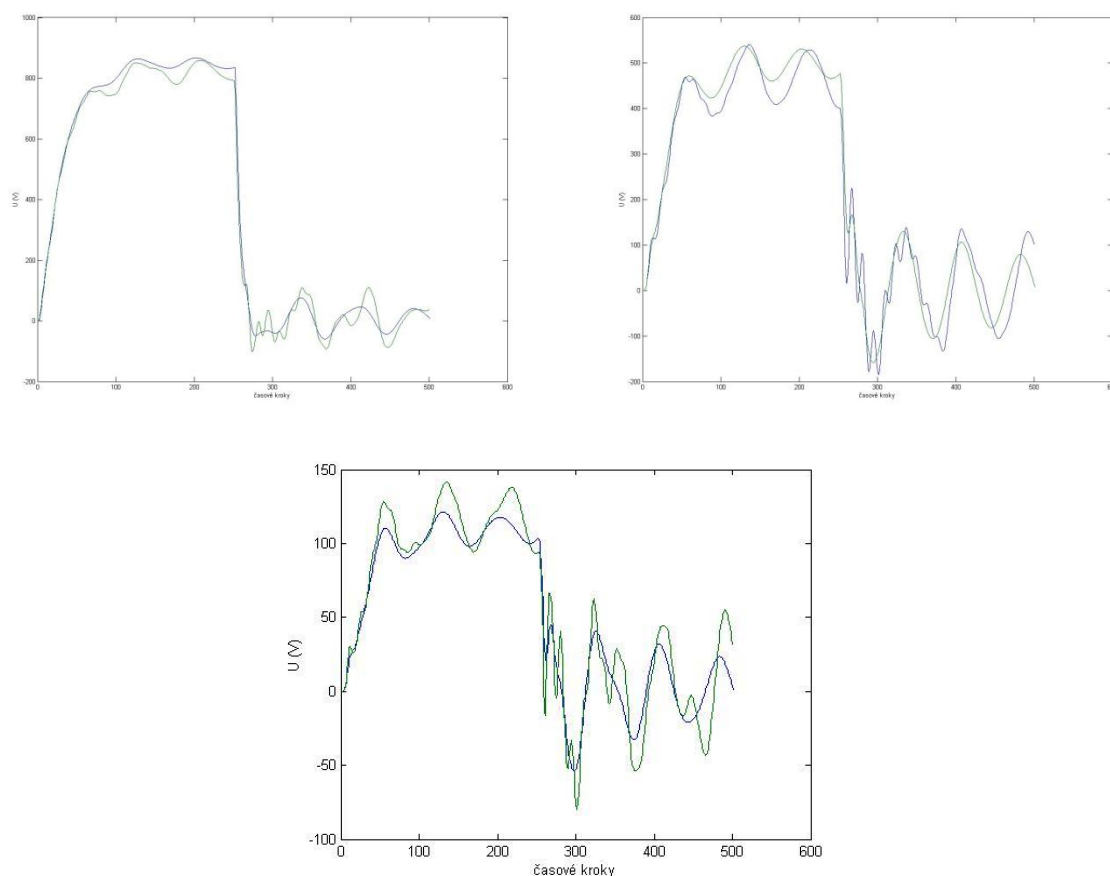
Obrázek 14 – Jednopolový náraz plným impulzem $1,2/50 \mu s$ u trojfázového transformátoru zapojeného do hvězdy s uzemněným uzlem vinutí do fáze U_a , indukované napětí ve fázi U_b a U_c



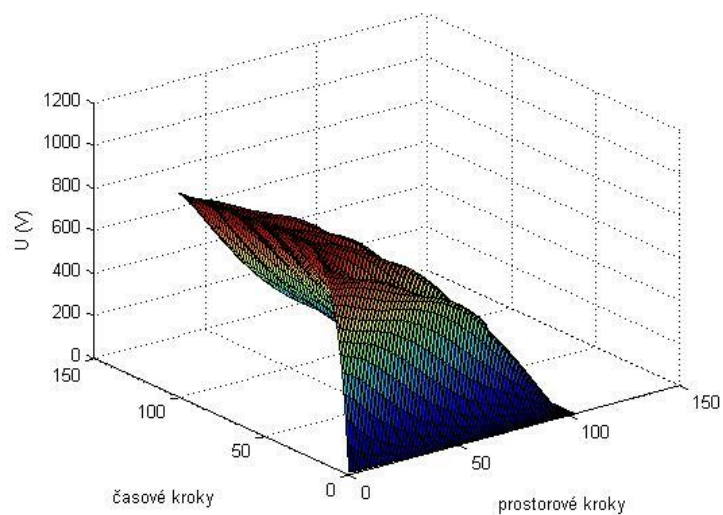
Obrázek 15 – Jednopolový náraz plným impulzem $1,2/50 \mu s$ u trojfázového transformátoru zapojeného do hvězdy s uzemněným uzlem vinutí do fáze U_a – zeleně namodelované výsledky, modře naměřené (měřeno v 6tém, 18tém a 30tém závitu)



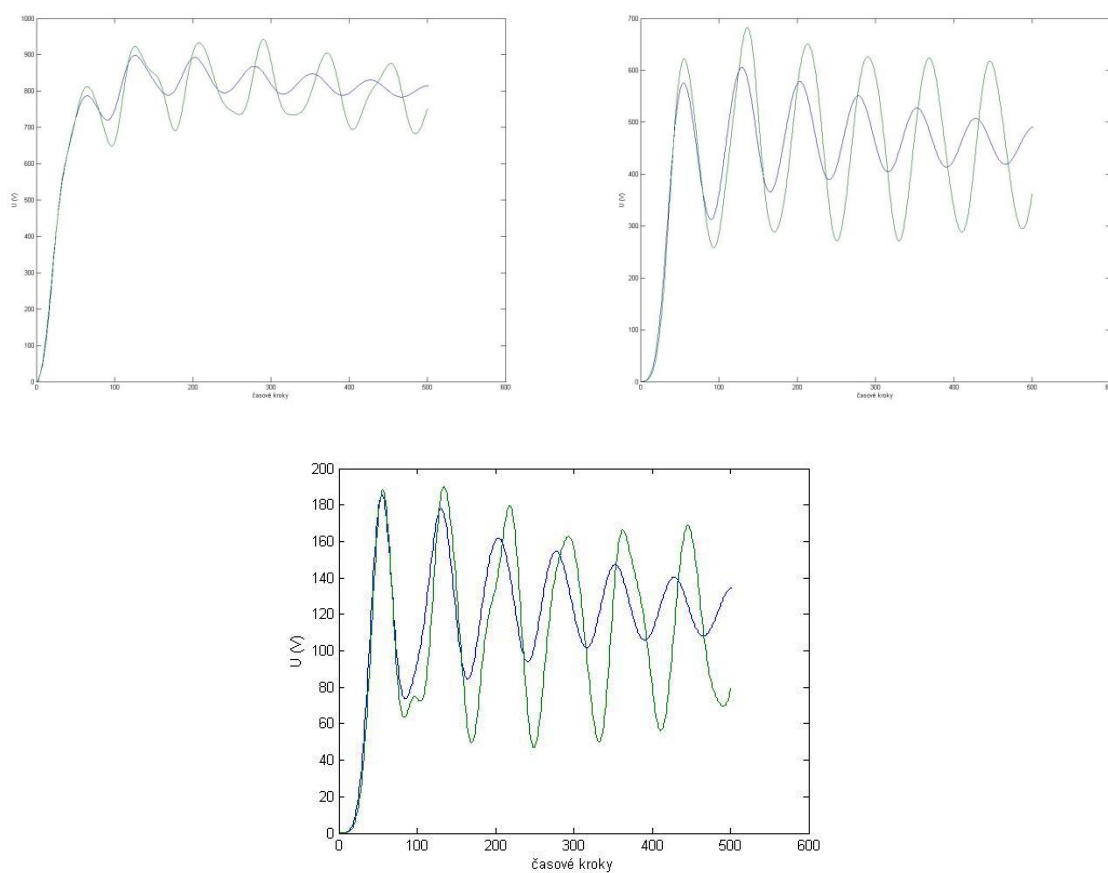
Obrázek 16 – Jednopolový náraz useknutým impulzem $1,2/50 \mu\text{s}$ v čase $3 \mu\text{s}$ u trojfázového transformátoru zapojeného do hvězdy s uzemněným uzlem vinutí do fáze U_a , indukované napětí ve fázi U_b , U_c



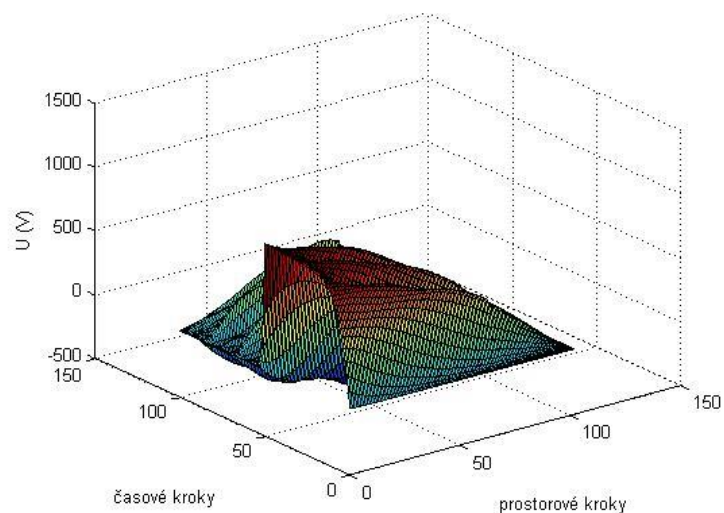
Obrázek 17 – Jednopolový náraz useknutým impulzem $1,2/50 \mu\text{s}$ v čase $3 \mu\text{s}$ u trojfázového transformátoru zapojeného do hvězdy s uzemněným uzlem vinutí do fáze U_a – zeleně namodelované výsledky, modře naměřené (měřeno v 6tém, 18tém a 30tém závitu)



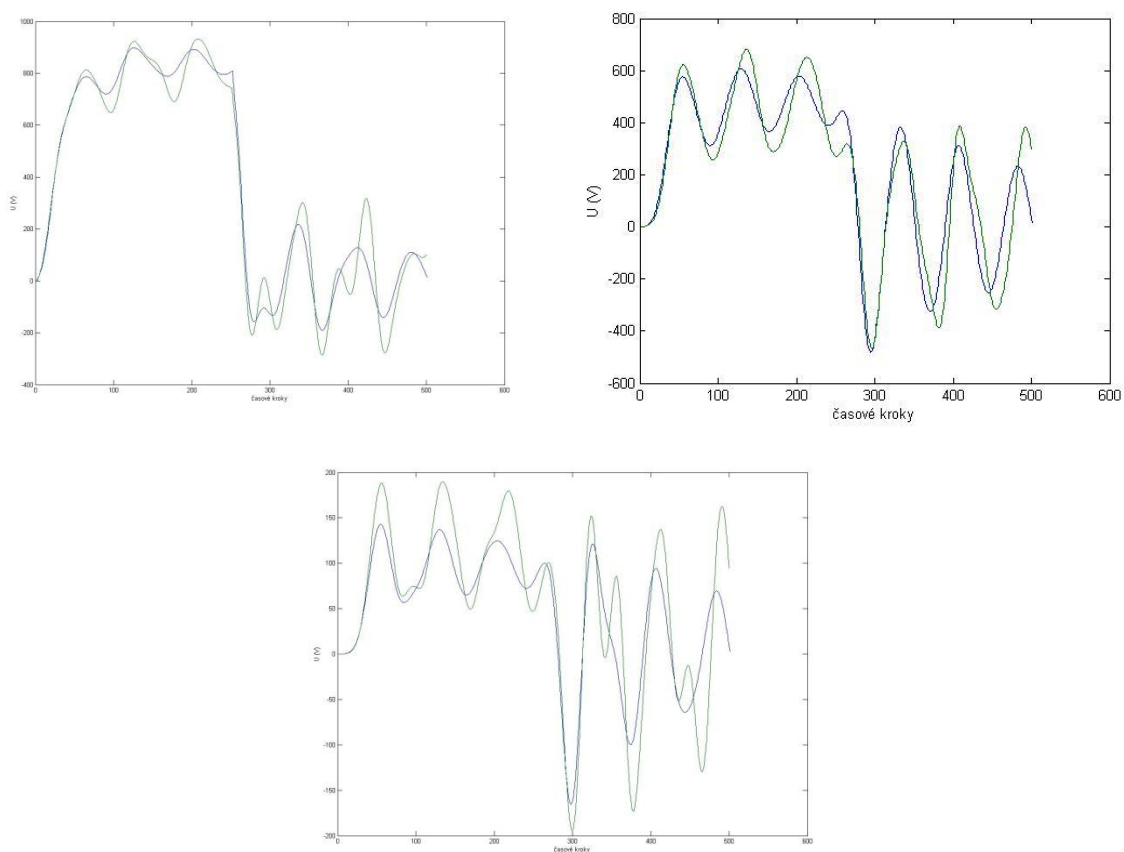
Obrázek 18 – Trojpólový náraz plným impulzem $1,2/50 \mu s$ u trojfázového transformátoru zapojeného do hvězdy s uzemněným uzlem vinutí, pro zbývající fáze jsou průběhy identické



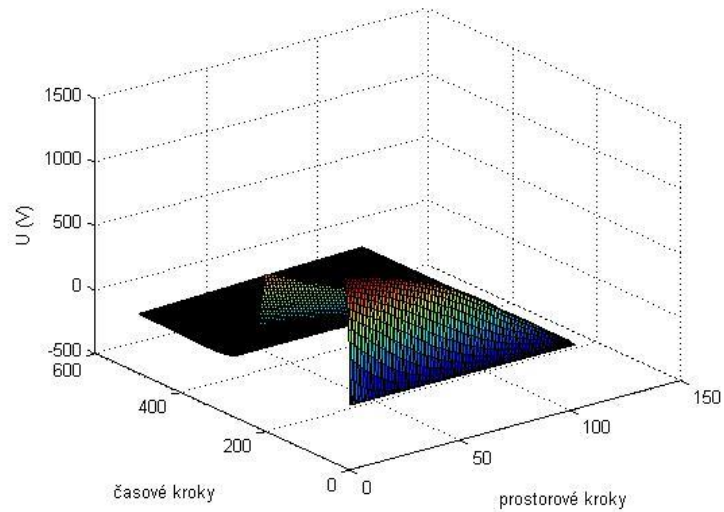
Obrázek 19 – Trojpólový náraz plným impulzem $1,2/50 \mu s$ u trojfázového transformátoru zapojeného do hvězdy s uzemněným uzlem vinutí – zeleně namodelované výsledky, modře naměřené (měřeno v 6tém, 18tém a 30tém závitě)



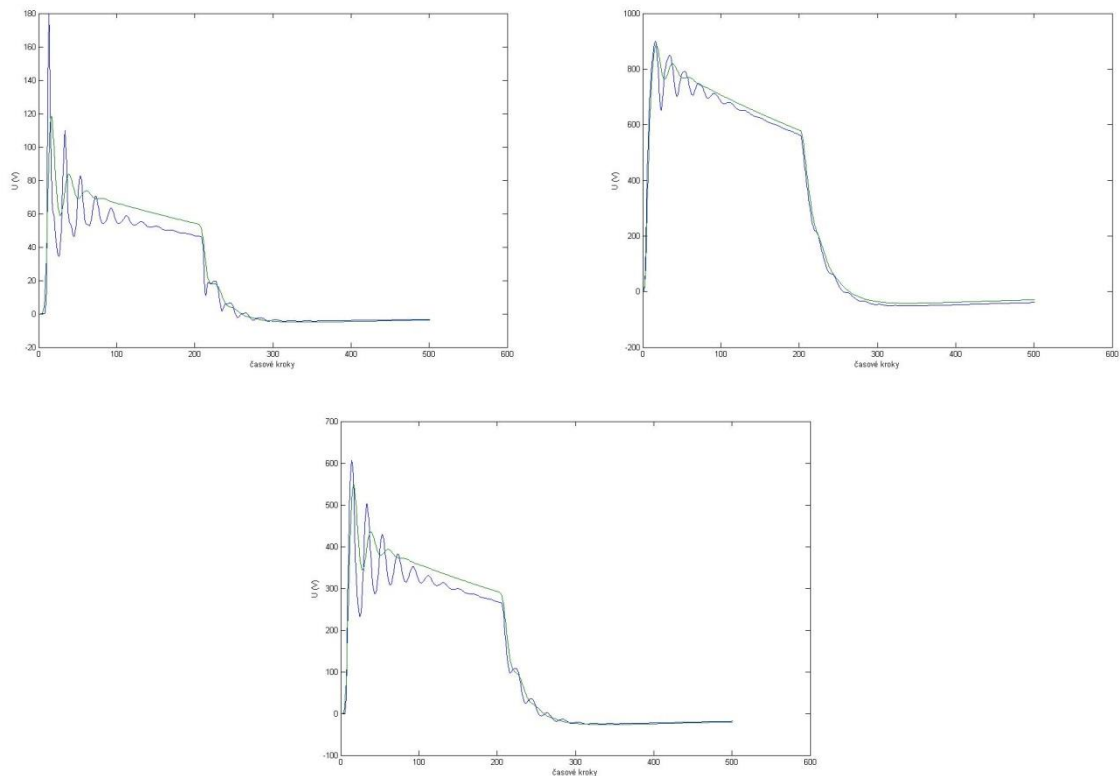
Obrázek 20 – Trojpólový náraz useknutým impulzem $1,2/50 \mu s$ v čase $3 \mu s$ u trojfázového transformátoru zapojeného do hvězdy s uzemněným uzlem vinutí, pro zbývající fáze jsou průběhy identické



Obrázek 21 – Trojpólový náraz useknutým impulzem $1,2/50 \mu s$ v čase $3 \mu s$ u trojfázového transformátoru zapojeného do hvězdy s uzemněným uzlem vinutí – zeleně namodelované výsledky, modře naměřené (měřeno v 6tém, 18tém a 30tém závitu)



Obrázek 22 – Trojpólový náraz plným spínacím impulzem 1000/1050 μ s u trojfázového transformátoru zapojeného do hvězdy s uzemněným uzlem vinutí



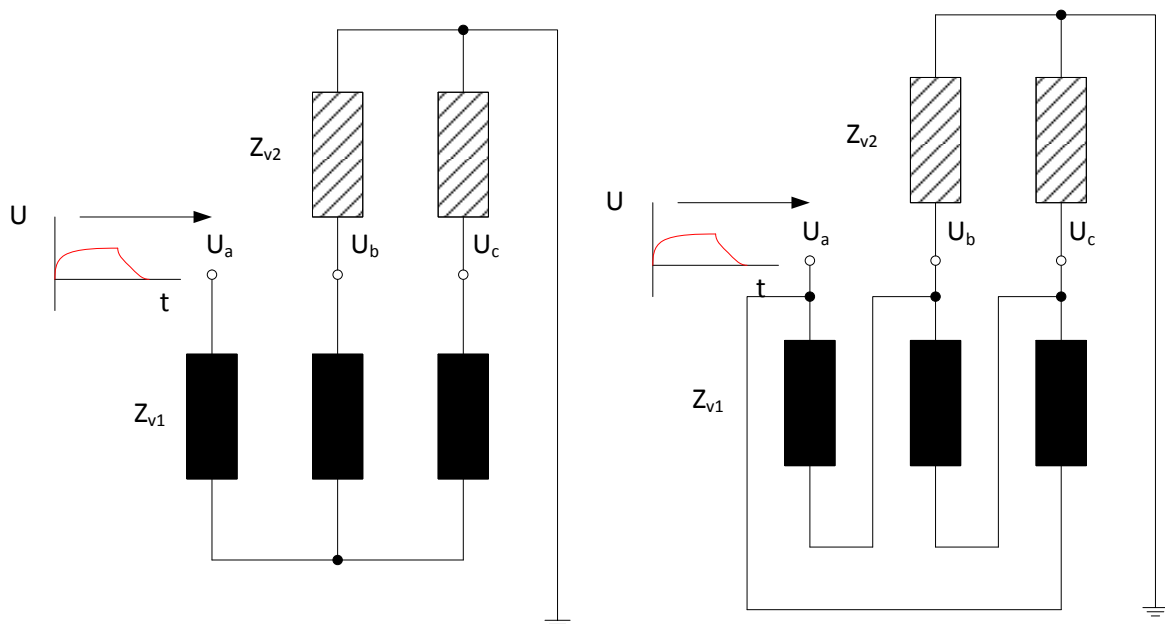
Obrázek 23 – Trojpólový náraz plným spínacím impulzem 1000/1050 μ s u trojfázového transformátoru zapojeného do hvězdy s uzemněným uzlem vinutí – zeleně namodelované výsledky, modře naměřené (měřeno v 6tém, 18tém a 30tém závitě)

4.4.2 Jednopolový náraz trojfázového transformátoru zapojeného do hvězdy s izolovaným uzlem nebo zapojení do trojúhelníku

Při jednopolovém nárazu jsou nezasažené fáze spojeny paralelně se zemí přes vlnový odpor Z_{v2} přípojných vedení. Vlnový odpor vedení je v sérii s velkým vlnovým odporem vinutí Z_{v1} . Řádově je vlnový odpor připojených vedení 1000x menší, než vlnový odpor vinutí.

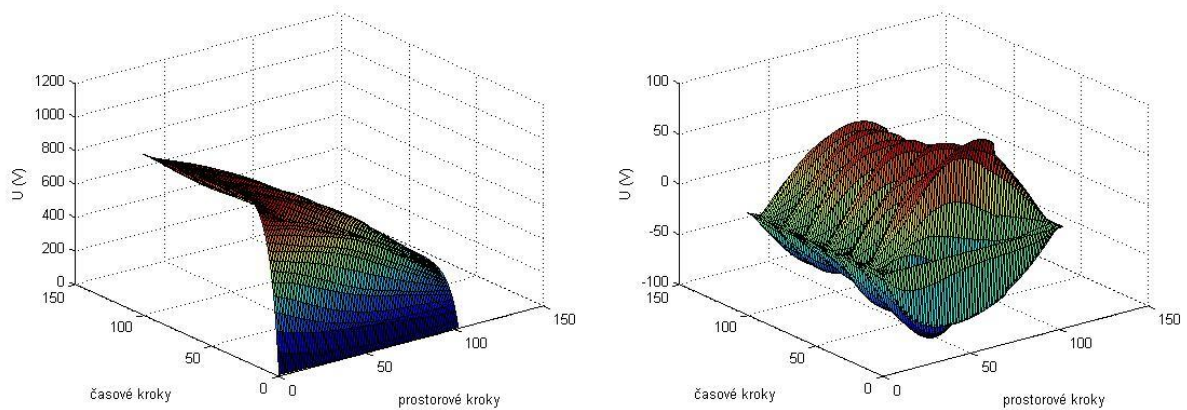
$$Z_{v2} \ll Z_{v1} \quad (4.54)$$

Za tohoto přiblížení předpokládám, že obě nepostižené fáze jsou přímo propojeny se zemí. Konečné rozložení napětí při impulzním namáhání se pak rozdělí v poměru obou impedancí. Vzhledem k tomu, že po přivedení impulzu na svorku *a* budou zbývající dvě fáze zapojeny paralelně, bude výsledná hodnota impedance rovna polovině vlnového odporu jedné z nich [4].

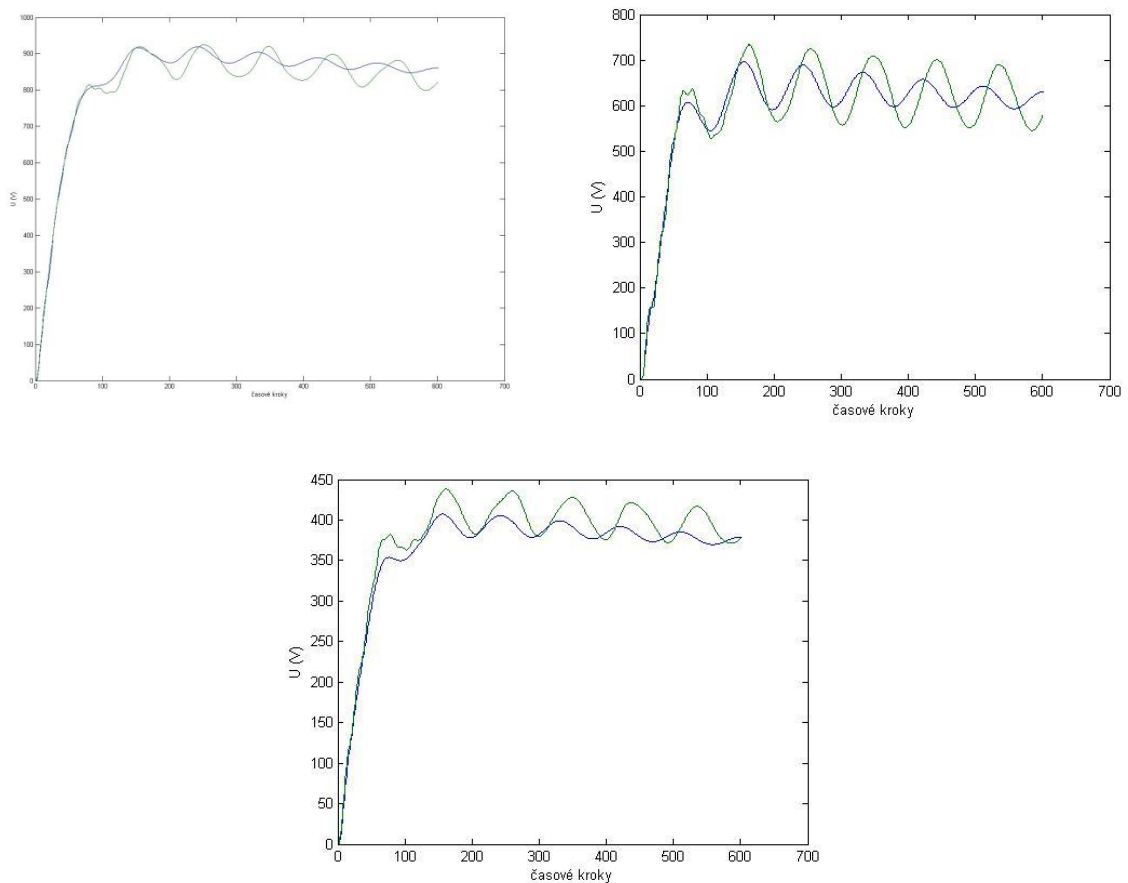


Obrázek 24 – Jednopolový náraz u trojfázového transformátoru zapojeného do hvězdy s izolovaným uzlem vinutí nebo do trojúhelníku

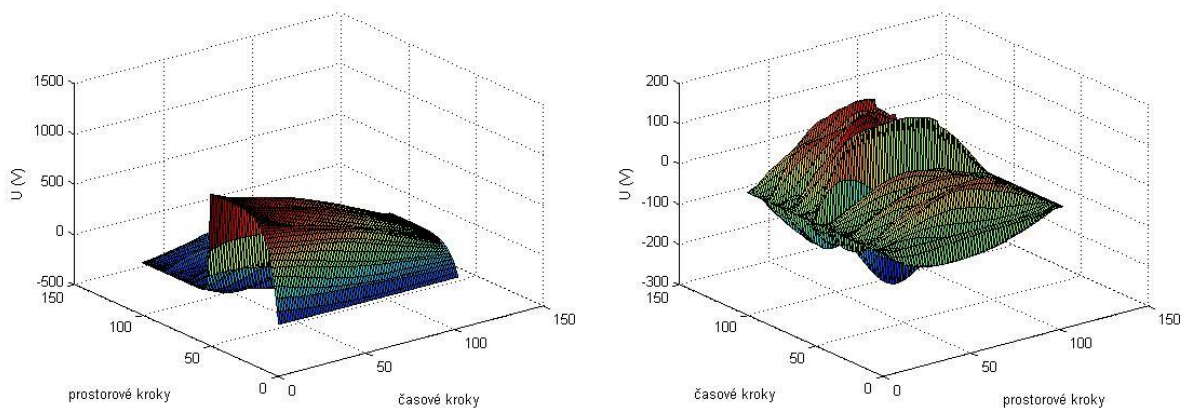
Pro zvolené hodnoty trojfázového transformátoru s izolovaným uzlem vinutí jsem získal tato rozložení napětí:



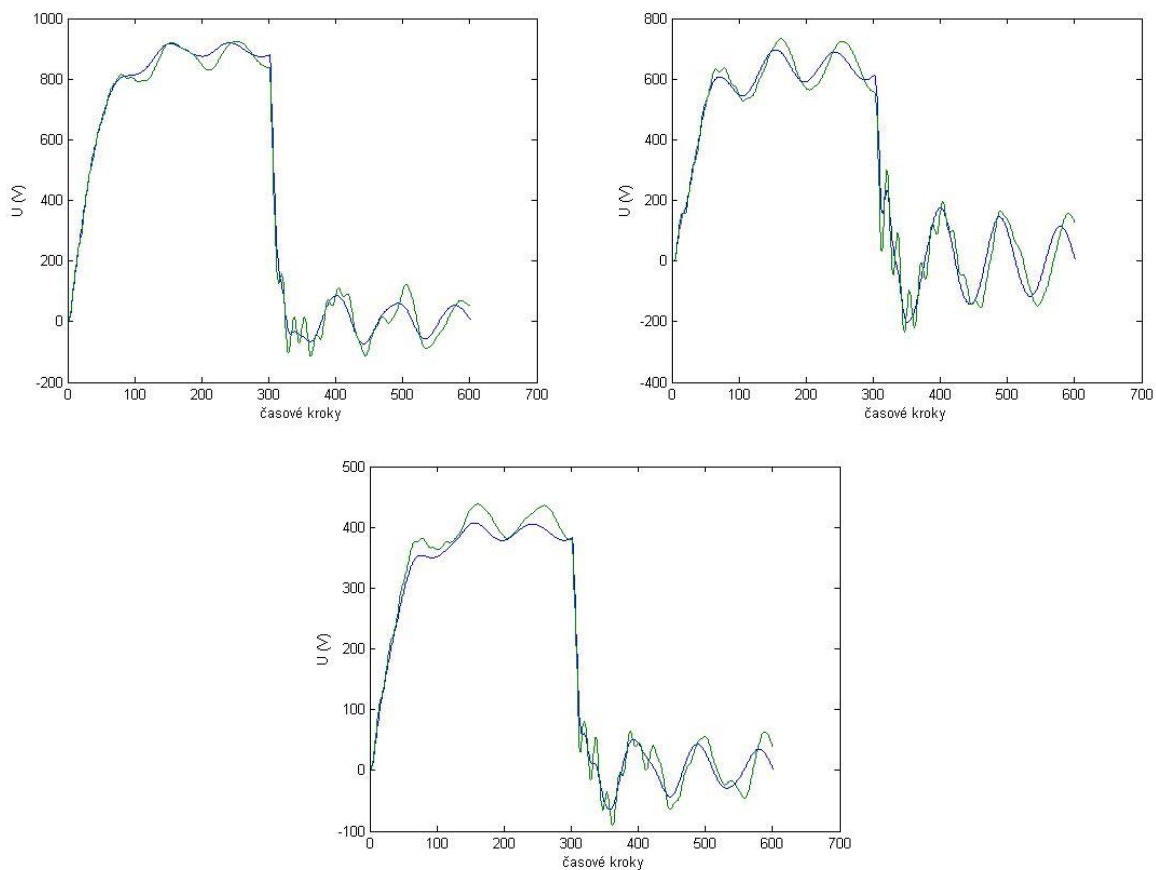
Obrázek 25 – Jednopolový náraz plným impulzem $1,2/50 \mu\text{s}$ v čase $3 \mu\text{s}$ u trojfázového transformátoru zapojeného do hvězdy s uzemněným uzlem vinutí do fáze U_a , indukované napětí ve fázi U_b a U_c



Obrázek 26 – Jednopolový náraz plným impulzem $1,2/50 \mu\text{s}$ v čase $3 \mu\text{s}$ u trojfázového transformátoru zapojeného do hvězdy s uzemněným uzlem vinutí do fáze U_a – zeleně namodelované výsledky, modře naměřené (měřeno v 6tém, 18tém a 30tém závitu)



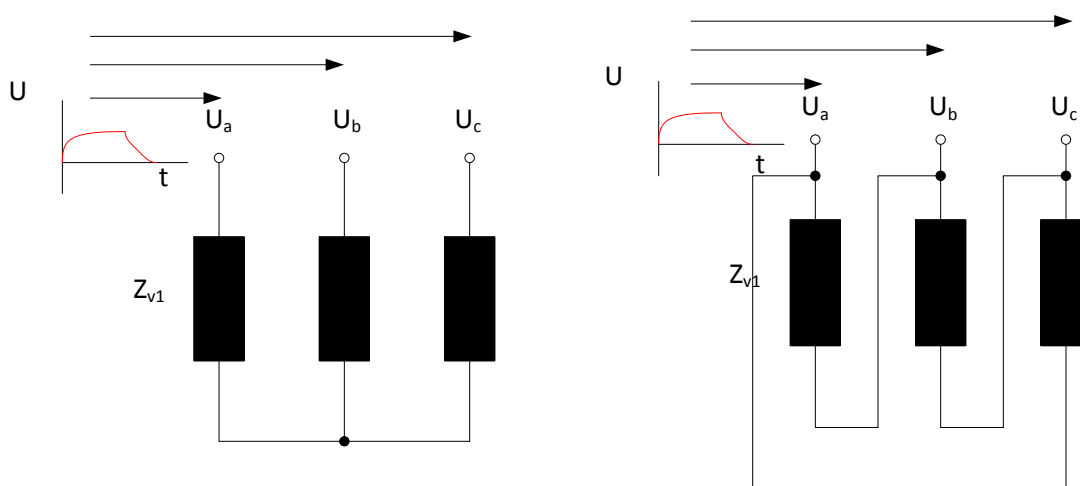
Obrázek 27 – Jednopolový náraz useknutým impulzem $1,2/50 \mu\text{s}$ u trojfázového transformátoru zapojeného do hvězdy s izolovaným uzlem vinutí do fáze U_a , indukované napětí ve fázi U_b a U_c



Obrázek 28 – Jednopolový náraz useknutým impulzem $1,2/50 \mu\text{s}$ u trojfázového transformátoru zapojeného do hvězdy s izolovaným uzlem vinutí do fáze U_a , – zeleně namodelované výsledky, modře naměřené (měřeno v 6tém, 18tém a 30tém závitě)

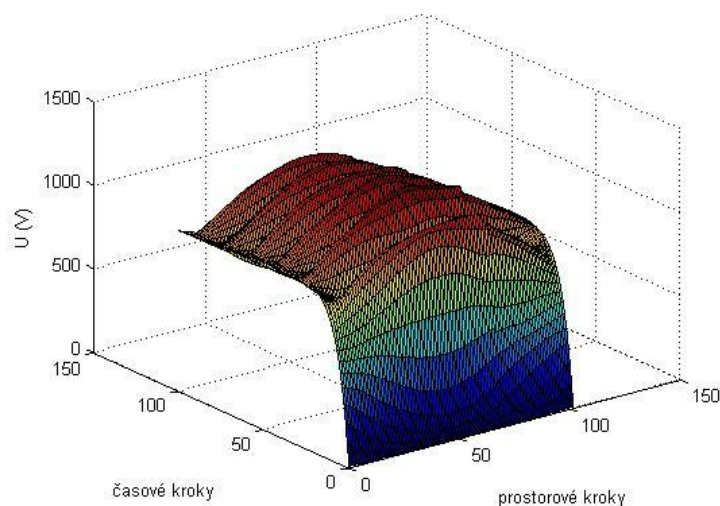
4.4.3 Trojpólový náraz trojfázového transformátoru zapojeného do hvězdy s izolovaným uzlem nebo zapojení do trojúhelníku

V případě trojpólového nárazu vinutí zapojeného do hvězdy dojde ke stejnému případu, jako u jednofázového vinutí zasaženého v jedné fázi bez uzemněného uzlu vinutí. Při trojpólovém nárazu vinutí zapojeného do trojúhelníku, je každá fáze vinutí zasažena z obou konců.

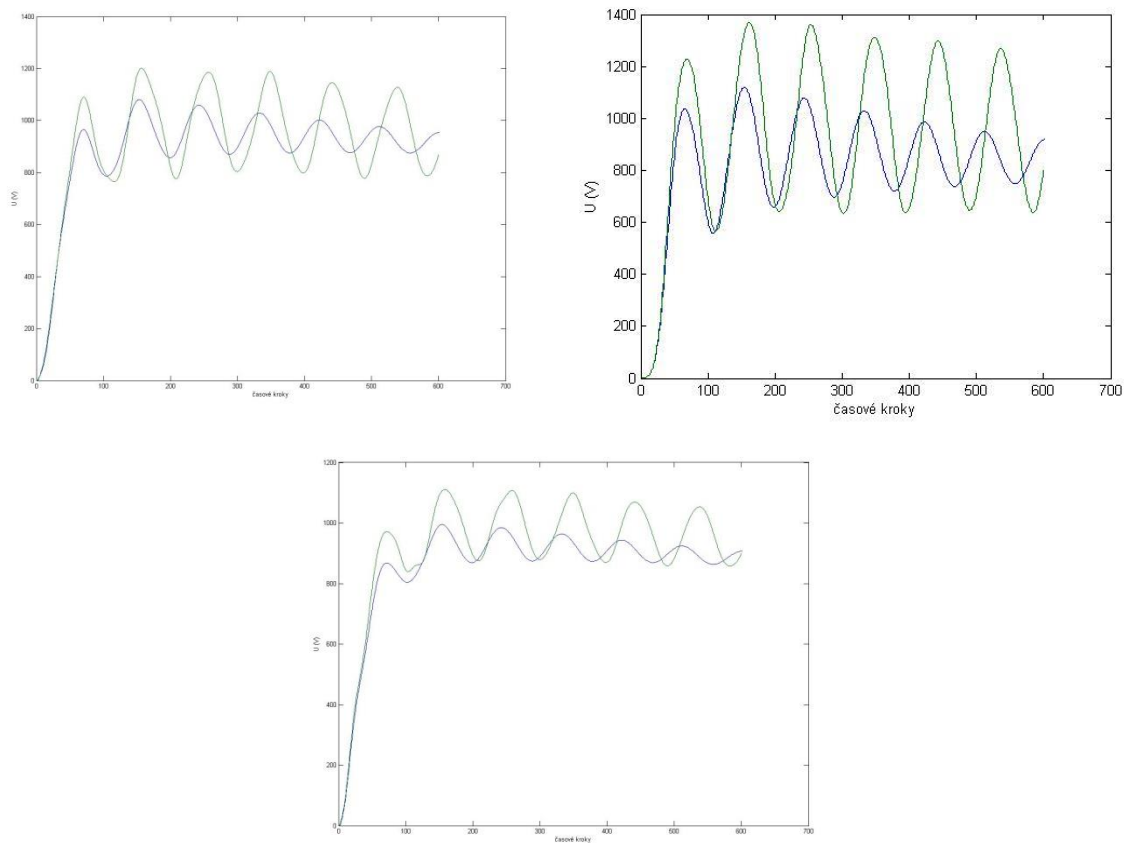


Obrázek 29 – Trojpólový náraz u trojfázového transformátoru zapojeného do hvězdy s izolovaným uzlem vinutí nebo do trojúhelníku

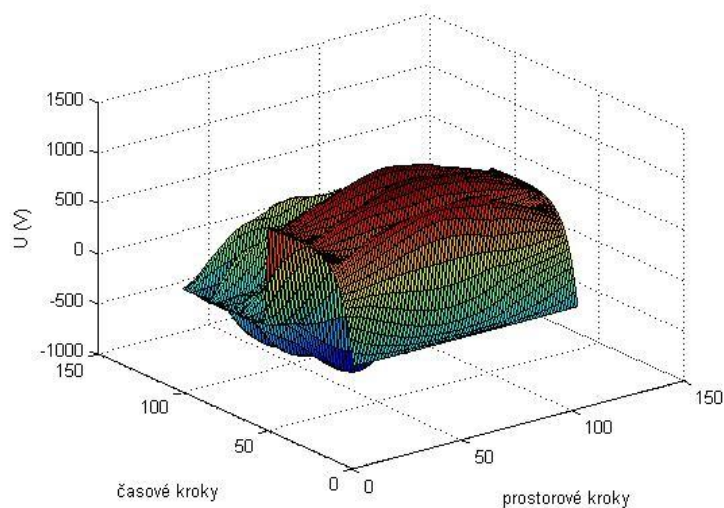
Pro zvolené hodnoty trojfázového transformátoru s uzemněným uzlem vinutí jsem získal tato rozložení napětí:



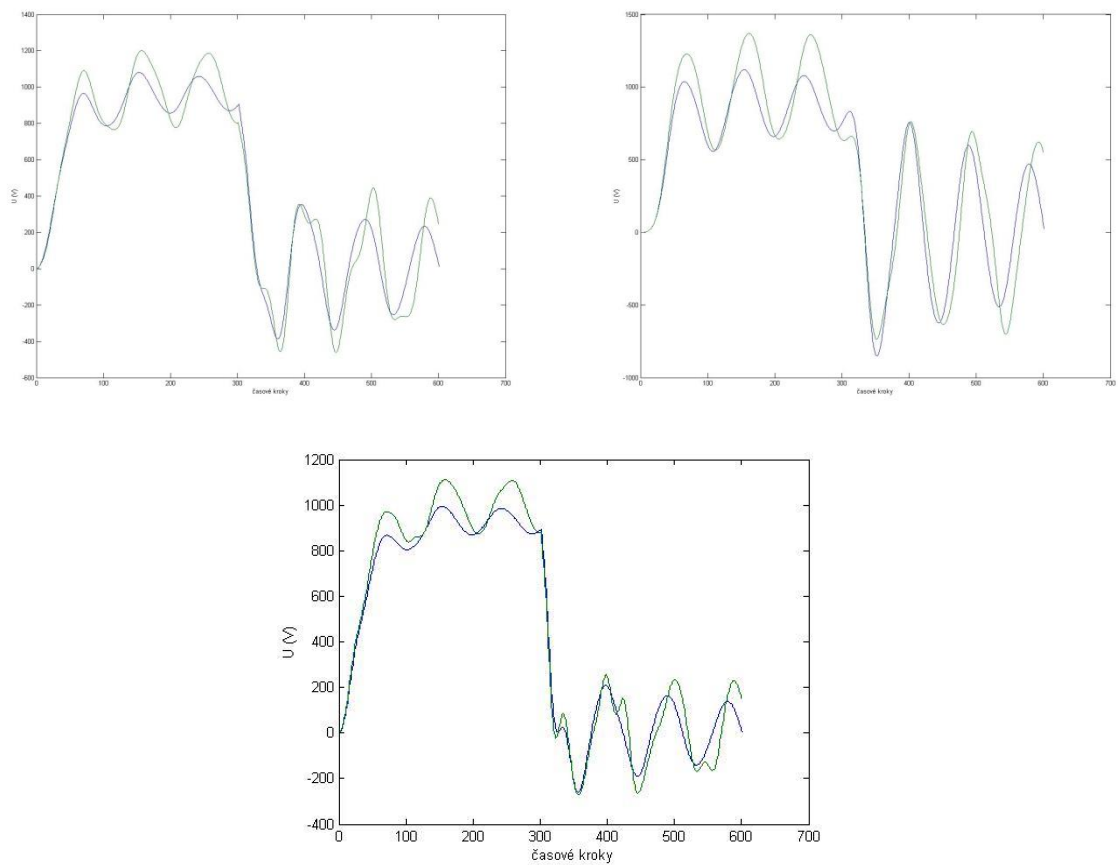
Obrázek 30 – Trojpólový náraz plným impulzem $1,2/50 \mu\text{s}$ u trojfázového transformátoru zapojeného do hvězdy s izolovaným uzlem vinutí do fáze U_a , identický průběh fáze U_b a fáze U_c



Obrázek 31 – Trojpólový náraz plným impulzem $1,2/50 \mu\text{s}$ u trojfázového transformátoru zapojeného do hvězdy s izolovaným uzlem vinutí zobrazena fáze U_a – zeleně namodelované výsledky, modře naměřené (měřeno v 6tém, 18tém a 30tém závitu)



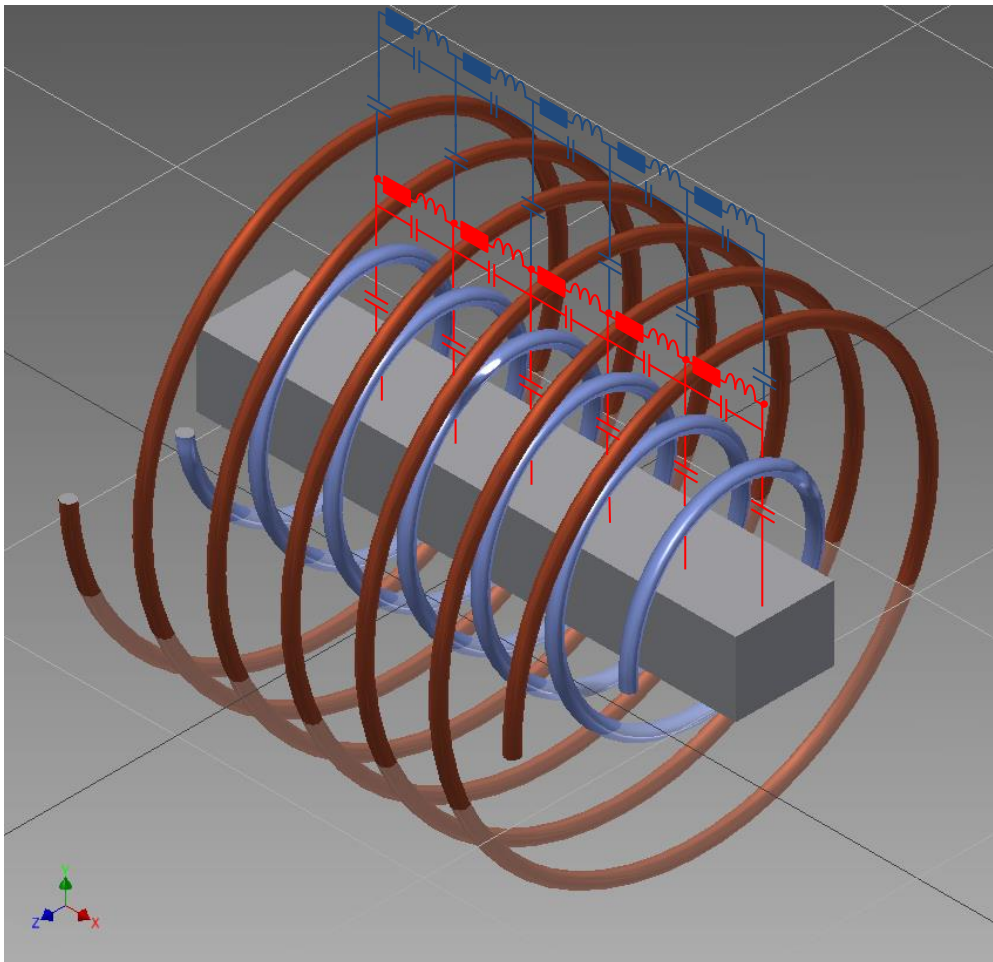
Obrázek 32 – Trojpólový náraz useknutým impulzem $1,2/50 \mu\text{s}$ v čase $3 \mu\text{s}$ u trojfázového transformátoru zapojeného do hvězdy s izolovaným uzlem vinutí do fáze U_a , identický průběh fáze U_b a fáze U_c



Obrázek 33 – Trojpólový náraz useknutým impulzem $1,2/50 \mu\text{s}$ v čase $3 \mu\text{s}$ u trojfázového transformátoru zapojeného do hvězdy s izolovaným uzlem vinutí zobrazena fáze U_a – zeleně namodelované výsledky, modře naměřené (měřeno v 6tém, 18tém a 30tém závitě)

4.5 Úprava pro vícevrstvé vinutí

Reálná cívka transformátorového vinutí je charakteristická větším počtem závitů, které tvoří s první vrstvou nerozebíratelný celek. Pro takovou cívku byla ve studiích [4–6] uvažována značná zjednodušení, často byla celá cívka chápána jako jeden celek tvořící délkový element dx . Vzhledem k omezeným výpočetním prostředkům byla nejčastěji řešena soustava rovnic vyplývajících z rovnice (4.30), ve které se neuvažovaly vzájemné vazby mezi vinutími M a absentoval tlumící odpor vinutí R . Takto vzniklá soustava byla řešena pro vstupní jednotkový impulz (nikoliv pro zkušební atmosférický nebo spínací impulz, ani pro useknutý impulz) a výsledky byly interpretovány pro počáteční a koncové rozložení napětí. Řešení neposkytovalo informaci o volných kmitech tvořících se uvnitř vinutí a přinášela velmi orientační výsledky, které jen zřídka pomohly při návrhu vinutí. Na základě úspěšného řešení vztahů (4.30) pomocí numerické metody sítí jsem rozšířil představu o reálné cívce za pomoci jejích jednotlivých vrstev. Popis rovnic vychází z obrázku číslo 35.



Obrázek 34 – Intuitivní představa o vzájemných vazbách ve vícevrstvěm vinutí

Obrázek 35 – Náhradní schéma vícevrstvého vinutí

Pro proud v r-té vrstvě a jeho derivaci podle prostorové proměnné x platí:

$$-K \frac{\partial^2}{\partial t} \left(u_{ar}(x,t) - \frac{\partial u_{ar}(x,t)}{\partial x} \right) = -K \frac{\partial^2 u_{ar}(x,t)}{\partial x \partial t} = i_{kar}(x,t) \quad (4.55)$$

$$-K \frac{\partial^3 u_{ar}(x,t)}{\partial x^2 \partial t} = \frac{\partial i_{kar}(x,t)}{\partial x} \quad (4.56)$$

Podle obrázku číslo 34 lze zapsat pro označenou smyčku:

$$\frac{\partial u_{ar}(x,t)}{\partial x} = -L \frac{\partial i_{Lar}(x,t)}{\partial t} - M_1 \frac{\partial i_{Lbr}(x,t)}{\partial t} - M_2 \frac{\partial i_{Lcr}(x,t)}{\partial t} - Ri_{Lar}(x,t) \quad (4.57)$$

Derivací rovnice (4.54) podle podélné prostorové proměnné x získáme

$$\frac{\partial^2 u_{ar}(x,t)}{\partial x^2} = -L \frac{\partial^2 i_{Lar}(x,t)}{\partial x \partial t} - M_1 \frac{\partial^2 i_{Lbr}(x,t)}{\partial x \partial t} - M_2 \frac{\partial^2 i_{Lcr}(x,t)}{\partial x \partial t} - R \frac{\partial i_{Lar}(x,t)}{\partial x} \quad (4.58)$$

Pro proud v uzlu označeném v obrázku číslo 34 platí:

$$\begin{aligned} i_{kar} + i_{Lar} &= i_{kar} + \frac{\partial i_{kar}(x,t)}{\partial x} + i_{Lar} + \frac{\partial i_{Lar}(x,t)}{\partial x} + C_1 \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(u_{ar}(x,t) + \frac{\partial u_{ar}(x,t)}{\partial x} \right) - \left(u_{ar+1}(x,t) - \frac{\partial u_{ar+1}(x,t)}{\partial x} \right) \right] + \\ &+ C_2 \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(u_{ar}(x,t) + \frac{\partial u_{ar}(x,t)}{\partial x} \right) - \left(u_{ar-1}(x,t) - \frac{\partial u_{ar-1}(x,t)}{\partial x} \right) \right] + \\ &+ C' \frac{\partial}{\partial t} [u_{ar}(x,t) - u_{cr}(x,t)] - C'' \frac{\partial}{\partial t} [u_{ar}(x,t) - u_{br}(x,t)] = 0 \end{aligned} \quad (4.59)$$

Po úpravě jednotlivých členů:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial i_{kar}(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial i_{Lar}(x,t)}{\partial x} + C_1 \frac{\partial u_{ar}(x,t)}{\partial t} + C_2 \frac{\partial u_{ar}(x,t)}{\partial t} + C_1 \frac{\partial^2 u_{ar}(x,t)}{\partial x \partial t} + C_2 \frac{\partial^2 u_{ar}(x,t)}{\partial x \partial t} - C_1 \frac{\partial u_{ar+1}(x,t)}{\partial t} - \\ &- C_2 \frac{\partial u_{ar+1}(x,t)}{\partial t} - C_1 \frac{\partial^2 u_{ar+1}(x,t)}{\partial x \partial t} - C_2 \frac{\partial^2 u_{ar-1}(x,t)}{\partial x \partial t} - \\ &- C' \frac{\partial}{\partial t} [u_{ar}(x,t) - u_{cr}(x,t)] - C'' \frac{\partial}{\partial t} [u_{ar}(x,t) - u_{br}(x,t)] = 0 \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned} &K \frac{\partial^3 u_a(x,t)}{\partial x^2 \partial t} - C_1 \frac{\partial u_{ar}(x,t)}{\partial t} - C_2 \frac{\partial u_{ar}(x,t)}{\partial t} - C_1 \frac{\partial^2 u_{ar}(x,t)}{\partial x \partial t} - C_2 \frac{\partial^2 u_{ar}(x,t)}{\partial x \partial t} + C_1 \frac{\partial u_{ar+1}(x,t)}{\partial t} + \\ &+ C_2 \frac{\partial u_{ar+1}(x,t)}{\partial t} + C_1 \frac{\partial^2 u_{ar+1}(x,t)}{\partial x \partial t} + C_2 \frac{\partial^2 u_{ar-1}(x,t)}{\partial x \partial t} + \\ &+ C' \frac{\partial}{\partial t} [u_{ar}(x,t) - u_{cr}(x,t)] + C'' \frac{\partial}{\partial t} [u_{ar}(x,t) - u_{br}(x,t)] = \frac{\partial i_{Lar}(x,t)}{\partial x} \end{aligned} \quad (4.61)$$

Po dosazení do rovnice (4.58) a úpravě:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_{ar}(x,t)}{\partial x^2} = & -L \cdot \left[K \frac{\partial^4 u_{ar}(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} - C_1 \frac{\partial^2 u_{ar}(x,t)}{\partial t^2} - C_2 \frac{\partial^2 u_{ar}(x,t)}{\partial t^2} - C_1 \frac{\partial^3 u_{ar}(x,t)}{\partial x \partial t^2} - C_2 \frac{\partial^3 u_{ar}(x,t)}{\partial x \partial t^2} + \right. \\
& + C_1 \frac{\partial^2 u_{ar+1}(x,t)}{\partial t^2} + C_2 \frac{\partial^2 u_{ar-1}(x,t)}{\partial t^2} + C_1 \frac{\partial^3 u_{ar+1}(x,t)}{\partial x \partial t^2} + C_2 \frac{\partial^3 u_{ar-1}(x,t)}{\partial x \partial t^2} - \\
& \left. - C' \frac{\partial}{\partial t} [u_{ar}(x,t) - u_{cr}(x,t)] - C'' \frac{\partial}{\partial t} [u_{ar}(x,t) - u_{br}(x,t)] \right] \\
- M_1 \cdot & \left[K \frac{\partial^4 u_{br}(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} - C_1 \frac{\partial^2 u_{br}(x,t)}{\partial t^2} - C_2 \frac{\partial^2 u_{br}(x,t)}{\partial t^2} - C_1 \frac{\partial^3 u_{br}(x,t)}{\partial x \partial t^2} - C_2 \frac{\partial^3 u_{br}(x,t)}{\partial x \partial t^2} + \right. \\
& + C_1 \frac{\partial^2 u_{br+1}(x,t)}{\partial t^2} + C_2 \frac{\partial^2 u_{br-1}(x,t)}{\partial t^2} + C_1 \frac{\partial^3 u_{br+1}(x,t)}{\partial x \partial t^2} + C_2 \frac{\partial^3 u_{br-1}(x,t)}{\partial x \partial t^2} - \\
& \left. - C' \frac{\partial}{\partial t} [u_{br}(x,t) - u_{cr}(x,t)] - C'' \frac{\partial}{\partial t} [u_{br}(x,t) - u_{ar}(x,t)] \right] \\
- M_2 \cdot & \left[K \frac{\partial^4 u_{cr}(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} - C_1 \frac{\partial^2 u_{cr}(x,t)}{\partial t^2} - C_2 \frac{\partial^2 u_{cr}(x,t)}{\partial t^2} - C_1 \frac{\partial^3 u_{cr}(x,t)}{\partial x \partial t^2} - C_2 \frac{\partial^3 u_{cr}(x,t)}{\partial x \partial t^2} + \right. \\
& + C_1 \frac{\partial^2 u_{cr+1}(x,t)}{\partial t^2} + C_2 \frac{\partial^2 u_{cr-1}(x,t)}{\partial t^2} + C_1 \frac{\partial^3 u_{cr+1}(x,t)}{\partial x \partial t^2} + C_2 \frac{\partial^3 u_{cr-1}(x,t)}{\partial x \partial t^2} - \\
& \left. - C' \frac{\partial}{\partial t} [u_{cr}(x,t) - u_{ar}(x,t)] - C'' \frac{\partial}{\partial t} [u_{cr}(x,t) - u_{br}(x,t)] \right] \\
- R \cdot & \left[K \frac{\partial^3 u_a(x,t)}{\partial x^2 \partial t} - C_1 \frac{\partial u_{ar}(x,t)}{\partial t} - C_2 \frac{\partial u_{ar}(x,t)}{\partial t} - C_1 \frac{\partial^2 u_{ar}(x,t)}{\partial x \partial t} - C_2 \frac{\partial^2 u_{ar}(x,t)}{\partial x \partial t} + \right. \\
& + C_1 \frac{\partial u_{ar+1}(x,t)}{\partial t} + C_2 \frac{\partial u_{ar-1}(x,t)}{\partial t} + C_1 \frac{\partial^2 u_{ar+1}(x,t)}{\partial x \partial t} + C_2 \frac{\partial^2 u_{ar-1}(x,t)}{\partial x \partial t} - \\
& \left. - C' \frac{\partial}{\partial t} [u_{ar}(x,t) - u_{cr}(x,t)] - C'' \frac{\partial}{\partial t} [u_{ar}(x,t) - u_{br}(x,t)] \right]
\end{aligned} \tag{4.62}$$

Výsledný výraz je možné zapsat maticově:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2}{\partial x^2} \cdot \begin{bmatrix} u_{ar}(x,t) \\ u_{br}(x,t) \\ u_{cr}(x,t) \end{bmatrix} + K \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} \cdot \begin{bmatrix} L & M_1 & M_2 \\ M_2 & L & M_1 \\ M_1 & M_2 & L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{ar}(x,t) \\ u_{br}(x,t) \\ u_{cr}(x,t) \end{bmatrix} + RK \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \cdot \begin{bmatrix} u_{ar}(x,t) \\ u_{br}(x,t) \\ u_{cr}(x,t) \end{bmatrix} + RC \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \cdot \begin{bmatrix} [u_{ar+1}(x,t) - u_{ar}(x,t)] - [u_{ar}(x,t) - u_{ar-1}(x,t)] \\ [u_{br+1}(x,t) - u_{br}(x,t)] - [u_{br}(x,t) - u_{br-1}(x,t)] \\ [u_{cr+1}(x,t) - u_{cr}(x,t)] - [u_{cr}(x,t) - u_{cr-1}(x,t)] \end{bmatrix} + \\
& + C \frac{\partial^3}{\partial x \partial t^2} \cdot \begin{bmatrix} L & M_1 & M_2 \\ M_2 & L & M_1 \\ M_1 & M_2 & L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [u_{ar+1}(x,t) - u_{ar}(x,t)] - [u_{ar}(x,t) - u_{ar-1}(x,t)] \\ [u_{br+1}(x,t) - u_{br}(x,t)] - [u_{br}(x,t) - u_{br-1}(x,t)] \\ [u_{cr+1}(x,t) - u_{cr}(x,t)] - [u_{cr}(x,t) - u_{cr-1}(x,t)] \end{bmatrix} + C \frac{\partial^2}{\partial t^2} \cdot \begin{bmatrix} L & M_1 & M_2 \\ M_2 & L & M_1 \\ M_1 & M_2 & L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [u_{ar+1}(x,t) - u_{ar}(x,t)] - [u_{ar}(x,t) - u_{ar-1}(x,t)] \\ [u_{br+1}(x,t) - u_{br}(x,t)] - [u_{br}(x,t) - u_{br-1}(x,t)] \\ [u_{cr+1}(x,t) - u_{cr}(x,t)] - [u_{cr}(x,t) - u_{cr-1}(x,t)] \end{bmatrix} + \\
& + R \frac{\partial}{\partial t} \cdot \begin{bmatrix} -C' - C'' & C'' & C' \\ C'' & -C' - C'' & C' \\ C' & C'' & -C' - C'' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{ar}(x,t) \\ u_{br}(x,t) \\ u_{cr}(x,t) \end{bmatrix} + \\
& + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \cdot \begin{bmatrix} -LC' - LC'' + M_1C'' + M_2C'; & LC'' - M_1C' - M_1C'' + M_2C''; & LC' + M_1C' - M_2C' - M_2C'' \\ LC'' + M_1C' - M_2C' - M_2C''; & -LC' - LC'' + M_1C'' + M_2C''; & LC' - M_1C' - M_1C'' + M_2C' \\ LC' - M_1C' - M_1C'' + M_2C''; & LC'' + M_1C'' - M_2C' - M_2C''; & -LC' - LC'' + M_1C' + M_2C' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{ar}(x,t) \\ u_{br}(x,t) \\ u_{cr}(x,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.63}$$

Použitá numerická metoda k řešení uvedeného vícevrstvého problému je identická s metodou užitou pro jednovrstvý případ, až na použití rozkladu matice \mathbb{A} , který je v tomto případě nevhodný vzhledem k přítomnosti matic jiných tvarů. To vede k větší složitosti a výpočetní náročnosti celé metody, jelikož musíme řešit trojnásobně větší soustavu, obsahující všechny tři složky neznámé funkce \mathbf{U} . Navíc musíme dát pozor na to, jak budeme aproximovat prostorové derivace na krajích vrstev a musíme vyřešit okrajové podmínky pro první a poslední vrstvu.

V těle vrstev používám stejné aproximace jako pro jednovrstvý případ doplněný o následující členy:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} U_i^k \approx \frac{1}{\tau} \frac{1}{h} (U_i^k - U_{i-1}^k) - \frac{1}{h} (U_i^{k-1} - U_{i-1}^{k-1}) \tag{4.64}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x \partial t^2} U_i^k \approx \frac{1}{\tau^2} \left[\frac{1}{h} (U_i^k - U_{i-1}^k) - \frac{2}{h} (U_i^{k-1} - U_{i-1}^{k-1}) + \frac{1}{h} (U_i^{k-2} - U_{i-1}^{k-2}) \right] \tag{4.65}$$

Vložení aproximací do rovnice (4.63) získáme následující identitu pro všechna $i = 1 \dots N_x - 1$ a pro všechna $k = 2 \dots M_t$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{h^2} U_{a,i-1}^k - \frac{2}{h^2} U_{a,i}^k + \frac{1}{h^2} U_{a,i+1}^k \right) - C^- L \frac{1}{\tau^2} U_{a,i}^k + C^- L \frac{2}{\tau^2} U_{a,i}^{k-1} - C^- L \frac{1}{\tau^2} U_{a,i}^{k-2} + C^- L \frac{1}{\tau^2} U_{a-1,i}^k \\
& - C^- L \frac{2}{\tau^2} U_{a-1,i}^{k-1} + C^- L \frac{1}{\tau^2} U_{a-1,i}^{k-2} - C^+ L \frac{1}{\tau^2} U_{a,i}^k + C^+ L \frac{2}{\tau^2} U_{a,i}^{k-1} - C^+ L \frac{1}{\tau^2} U_{a,i}^{k-2} + C^+ L \frac{1}{\tau^2} U_{a+1,i}^k \\
& - C^+ L \frac{2}{\tau^2} U_{a+1,i}^{k-1} + C^+ L \frac{1}{\tau^2} U_{a+1,i}^{k-2} - C^- M_1 \frac{1}{\tau^2} U_{b,i}^k - C^- M_2 \frac{1}{\tau^2} U_{c,i}^k + C^- M_2 \frac{1}{\tau^2} U_{c,i}^k + C^- M_1 \frac{2}{\tau^2} U_{b,i}^k \\
& + C^- M_2 \frac{2}{\tau^2} U_{c,i}^{k-1} - C^- M_1 \frac{1}{\tau^2} U_{b,i}^{k-2} - C^- M_2 \frac{1}{\tau^2} U_{c,i}^{k-2} + C^- M_1 \frac{1}{\tau^2} U_{b-1,i}^k \\
& + C^- M_2 \frac{1}{\tau^2} U_{c-1,i}^k - C^- M_1 \frac{2}{\tau^2} U_{b-1,i}^{k-1} - C^- M_2 \frac{2}{\tau^2} U_{c-1,i}^{k-1} + C^- M_1 \frac{2}{\tau^2} U_{b-1,i}^{k-2} + C^- M_2 \frac{2}{\tau^2} U_{c-1,i}^{k-2} \\
& - C^+ M_1 \frac{1}{\tau^2} U_{b,i}^k - C^+ M_2 \frac{1}{\tau^2} U_{c,i}^k + C^+ M_1 \frac{2}{\tau^2} U_{b,i}^{k-1} + C^+ M_2 \frac{2}{\tau^2} U_{c,i}^{k-1} - C^+ M_1 \frac{2}{\tau^2} U_{b,i}^{k-2} \\
& - C^+ M_2 \frac{2}{\tau^2} U_{c,i}^{k-2} + C^+ M_2 \frac{1}{\tau^2} U_{b+1,i}^k + C^+ M_2 \frac{1}{\tau^2} U_{c+1,i}^k - C^+ M_1 \frac{2}{\tau^2} U_{b+1,i}^{k-1} - C^+ M_2 \frac{2}{\tau^2} U_{c+1,i}^{k-1} \\
& + C^+ M_2 \frac{1}{\tau^2} U_{c+1,i}^{k-2} + KL \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} U_{a,i-1}^k - 2KL \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} U_{a,i}^k + KL \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} U_{a,i+1}^k - 2KL \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} U_{a,i-1}^{k-1} \\
& + 4KL \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} U_{a,i}^{k-1} - 2KL \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} U_{a,i+1}^{k-1} + KL \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} U_{a,i-1}^{k-2} - 2KL \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} U_{a,i}^{k-2} + KL \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} U_{a,i+1}^{k-2} \\
& + KM_1 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} U_{b,i-1}^k - 2KM_1 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} U_{b,i}^k + KM_1 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} U_{b,i+1}^k - 2KM_1 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} U_{b,i-1}^{k-1} + 4KM_1 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} U_{b,i}^{k-1} \\
& - 2KM_1 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} U_{b,i+1}^{k-1} + KM_1 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} U_{b,i-1}^{k-2} - 2KM_1 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} U_{b,i}^{k-2} \\
& + KM_1 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} U_{b,i+1}^{k-2} + KM_2 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} U_{c,i-1}^k - 2KM_2 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} U_{c,i-1}^{k-1} \\
& + 4KM_2 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} U_{c,i}^{k-1} - 2KM_2 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} U_{c,i+1}^{k-1} + KM_2 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} U_{c,i-1}^{k-2} - 2KM_2 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} U_{c,i}^{k-2} + KM_2 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} U_{c,i+1}^{k-2} \\
& + RK \frac{1}{\tau} \frac{1}{h^2} [U_{a,i-1}^k - 2U_{a,i}^k + U_{a,i+1}^k - U_{a,i-1}^{k-1} + 2U_{a,i}^{k-1} - U_{a,i+1}^{k-1}] \\
& + RC^- \frac{1}{\tau} \frac{1}{h} [-U_{a,i}^k + U_{a,i-1}^k + U_{a,i-1}^{k-1} - U_{a-1,i}^k - U_{a-1,i}^k - U_{a-1,i-1}^k - U_{a-1,i}^{k-1} + U_{a-1,i-1}^{k-1}] \\
& + RC^+ \frac{1}{\tau} \frac{1}{h} [-U_{a,i}^k - U_{a,i-1}^k + U_{a,i}^{k-1} - U_{a,i-1}^{k-1} + U_{a+1,i}^k - U_{a+1,i-1}^k - U_{a+1,i}^{k-1} + U_{a+1,i-1}^{k-1}] \\
& + R \frac{1}{\tau} [-(C' + C'')U_{a,i}^k + (C' + C'')U_{a,i}^{k-1} + C''U_{b,i}^k - C''U_{b,i}^{k-1} + C'U_{c,i}^k - C'U_{c,i}^{k-1}] \\
& + \frac{1}{\tau^2} [A_1 U_{a,i}^k - 2A_1 U_{a,i}^{k-1} + A_1 U_{a,i}^{k-2} + A_2 U_{b,i}^k - 2A_2 U_{b,i}^{k-1} + A_2 U_{b,i}^{k-2} + A_3 U_{c,i}^k - 2A_3 U_{c,i}^{k-1} + A_3 U_{c,i}^{k-2} \\
& + A_3 U_{c,i}^{k-2}] \\
& + C^- L \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} [U_{a,i-1}^k - U_{a,i}^k - 2U_{a,i-1}^{k-1} + 2U_{a,i}^{k-1} - U_{a,i}^{k-2} + U_{a,i-1}^{k-2} + U_{a-1,i}^k \\
& - U_{a-1,i-1}^k - 2U_{a-1,i}^{k-1} + 2U_{a-1,i-1}^{k-1} + U_{a-1,i}^{k-2} - U_{a-1,i-1}^{k-2}] \\
& + C^+ L \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} [U_{a,i-1}^k - U_{a,i}^k - 2U_{a,i-1}^{k-1} + 2U_{a,i}^{k-1} - U_{a,i}^{k-2} + U_{a,i-1}^{k-2} + U_{a+1,i}^k \\
& - U_{a+1,i-1}^k - 2U_{a+1,i}^{k-1} + 2U_{a+1,i-1}^{k-1} + U_{a+1,i}^{k-2} - U_{a+1,i-1}^{k-2}] \\
& + C^- M_1 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} [U_{b,i-1}^k - U_{b,i}^k - 2U_{b,i-1}^{k-1} + 2U_{b,i}^{k-1} - U_{b,i}^{k-2} + U_{b,i-1}^{k-2} + U_{b-1,i}^k \\
& - U_{b-1,i-1}^k - 2U_{b-1,i}^{k-1} + 2U_{b-1,i-1}^{k-1} + U_{b-1,i}^{k-2} - U_{b-1,i-1}^{k-2}] \\
& + C^+ M_1 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} [U_{b,i-1}^k - U_{b,i}^k - 2U_{b,i-1}^{k-1} + 2U_{b,i}^{k-1} - U_{b,i}^{k-2} + U_{b,i-1}^{k-2} + U_{b+1,i}^k \\
& - U_{b+1,i-1}^k - 2U_{b+1,i}^{k-1} + 2U_{b+1,i-1}^{k-1} + U_{b+1,i}^{k-2} - U_{b+1,i-1}^{k-2}] \\
& + C^- M_2 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} [U_{c,i-1}^k - U_{c,i}^k - 2U_{c,i-1}^{k-1} + 2U_{c,i}^{k-1} - U_{c,i}^{k-2} + U_{c,i-1}^{k-2} + U_{c-1,i}^k \\
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -U_{c-1,i-1}^k - 2U_{c-1,i}^{k-1} + 2U_{c-1,i-1}^{k-1} + U_{c-1,i}^{k-2} - U_{c-1,i-1}^{k-2} \\
& + C^+ M_2 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \left[U_{c,i-1}^k - U_{c,i}^k - 2U_{c,i-1}^{k-1} + 2U_{c,i}^{k-1} - U_{c,i}^{k-2} + U_{c,i-1}^{k-2} + U_{c-1,i}^k \right. \\
& \left. - U_{c-1,i-1}^k - 2U_{c+1,i}^{k-1} + 2U_{c+1,i-1}^{k-1} + U_{c+1,i}^{k-2} - U_{c+1,i-1}^{k-2} \right] = 0
\end{aligned}$$

Kapacity C^+ a C^- jsou kapacitami k nádobě a k jádru transformátoru (respektive kapacity na začátku a na konci všech vrstev).

(4.66)

Odtud převedením známých hodnot z předchozích časových vrstev (tj. k-1, k-2) a ponecháním neznámé k-té časové vrstvy vlevo, získáme rovnost:

$$\begin{aligned}
& u_{a,i-1}^k \left[\frac{1}{h^2} + KL \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} + RK \frac{1}{\tau} \frac{1}{h^2} + RC^- \frac{1}{\tau} \frac{1}{h} + RC^+ \frac{1}{\tau} \frac{1}{h} + C^- L \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} + C^+ L \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right] \\
& + u_{a,i}^k \left[-\frac{2}{h^2} - C^- L \frac{1}{\tau^2} - C^+ L \frac{1}{\tau^2} - 2KL \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} - 2RK \frac{1}{\tau} \frac{1}{h^2} - RC^- \frac{1}{\tau} \frac{1}{h} - RC^+ \frac{1}{\tau} \frac{1}{h} \right. \\
& \left. - R(C' + C'') \frac{1}{\tau} + A_1 \frac{1}{\tau^2} - C^- L \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} - C^+ L \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right] \\
& + u_{a,i+1}^k \left[\frac{1}{h^2} + KL \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} + RK \frac{1}{\tau} \frac{1}{h^2} \right] + u_{b,i-1}^k \left[KM_1 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} + C^- M_1 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} + C^+ M_1 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right] \\
& + u_{b,i}^k \left[-C^- M_1 \frac{1}{\tau^2} - 2KM_1 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} + RC'' \frac{1}{\tau} + A_2 \frac{1}{\tau^2} - C^- M_1 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} - C^+ M_1 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right. \\
& \left. - C^+ M_1 \frac{1}{\tau^2} \right] + u_{b,i+1}^k \left[KM_1 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} \right] + u_{c,i-1}^k \left[KM_2 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} + C^- M_2 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} + C^+ M_2 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right] \\
& + u_{c,i}^k \left[-C^- M_2 \frac{1}{\tau^2} - 2KM_2 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} + RC' \frac{1}{\tau} + A_3 \frac{1}{\tau^2} - C^- M_2 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} - C^+ M_2 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right. \\
& \left. - C^+ M_2 \frac{1}{\tau^2} \right] + u_{c,i+1}^k \left[KM_2 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} \right] + u_{a-1,i-1}^k \left[-RC^- \frac{1}{\tau} \frac{1}{h} - C^- L \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right] \\
& + u_{a-1,i}^k \left[C^- L \frac{1}{\tau^2} + RC^- \frac{1}{\tau} \frac{1}{h} + C^- L \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right] + u_{a+1,i-1}^k \left[-RC^+ \frac{1}{\tau} \frac{1}{h} - C^+ L \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right] \\
& + u_{a+1,i}^k \left[C^+ L \frac{1}{\tau^2} + RC^+ \frac{1}{\tau} \frac{1}{h} + C^+ L \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right] + u_{b-1,i-1}^k \left[-C^- M_1 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right] \\
& + u_{b-1,i}^k \left[C^- M_1 \frac{1}{\tau^2} + C^- M_1 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right] + u_{b+1,i-1}^k \left[-C^+ M_1 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right] \\
& + u_{b+1,i}^k \left[C^+ M_1 \frac{1}{\tau^2} + C^+ M_1 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right] + u_{c-1,i-1}^k \left[-C^- M_2 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right] \\
& + u_{c-1,i}^k \left[C^- M_2 \frac{1}{\tau^2} + C^- M_2 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right] + u_{c+1,i-1}^k \left[-C^+ M_2 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right] \\
& + u_{c+1,i}^k \left[C^+ M_2 \frac{1}{\tau^2} + C^+ M_2 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right] = \text{levá strana rovnosti}
\end{aligned}$$

(4.67)

$$\begin{aligned}
& -U_{a,i-1}^{k-1} \left[-2KL \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} - RK \frac{1}{\tau} \frac{1}{h^2} - RC^- \frac{1}{\tau} \frac{1}{h} - RC^+ \frac{1}{\tau} \frac{1}{h} - 2C^-L \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} - 2C^+L \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right] \\
& - U_{a,i}^{k-1} \left[2C^-L \frac{1}{\tau^2} + 2C^+L \frac{1}{\tau^2} + 4KL \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} + 2RK \frac{1}{\tau} \frac{1}{h^2} + RC^- \frac{1}{\tau} \frac{1}{h} + RC^+ \frac{1}{\tau} \frac{1}{h} \right. \\
& \left. + R(C' + C'') \frac{1}{\tau} - 2A_1 \frac{1}{\tau^2} + 2C^-L \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} + 2C^+L \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right] \\
& - U_{a,i+1}^{k-1} \left[-2KL \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} - RK \frac{1}{\tau} \frac{1}{h^2} \right] \\
& - U_{b,i-1}^{k-1} \left[-2KM_1 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} - 2C^-M_1 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} - 2C^+M_1 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right] \\
& - U_{b,i}^{k-1} \left[2C^-M_1 \frac{1}{\tau^2} + 2C^+M_1 \frac{1}{\tau^2} + 4KM_1 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} - RC'' \frac{1}{\tau} - 2A_2 \frac{1}{\tau^2} + 2C^-M_1 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right. \\
& \left. + 2C^+M_1 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right] - U_{b,i+1}^{k-1} \left[-2KM_1 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} \right] \\
& - U_{c,i-1}^{k-1} \left[-2KM_2 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} - 2C^-M_2 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} - 2C^+M_2 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right] \\
& - U_{c,i}^{k-1} \left[2C^-M_2 \frac{1}{\tau^2} + 2C^+M_2 \frac{1}{\tau^2} + 4KM_2 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} - RC' \frac{1}{\tau} - 2A_3 \frac{1}{\tau^2} + 2C^-M_2 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right. \\
& \left. + 2C^+M_2 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right] - U_{c,i+1}^{k-1} \left[-2KM_2 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} \right] - U_{a-1,i-1}^{k-1} \left[RC^- \frac{1}{\tau} \frac{1}{h} + 2C^-L \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right] \\
& - U_{a+1,i-1}^{k-1} \left[RC^+ \frac{1}{\tau} \frac{1}{h} + 2C^+L \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right] - U_{a-1,i}^{k-1} \left[-2C^-L \frac{1}{\tau^2} - RC^- \frac{1}{\tau} \frac{1}{h} - 2C^-L \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right] \\
& - U_{a+1,i}^{k-1} \left[-2C^+L \frac{1}{\tau^2} - RC^+ \frac{1}{\tau} \frac{1}{h} - 2C^+L \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right] - U_{b-1,i-1}^{k-1} \left[2C^-M_1 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right] \\
& - U_{b+1,i-1}^{k-1} \left[2C^+M_1 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right] - U_{b-1,i}^{k-1} \left[-2C^-M_1 \frac{1}{\tau^2} - 2C^-M_1 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right] \\
& - U_{b+1,i}^{k-1} \left[-2C^+M_1 \frac{1}{\tau^2} - 2C^+M_1 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right] - U_{c-1,i-1}^{k-1} \left[2C^-M_2 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right] \\
& - U_{c+1,i-1}^{k-1} \left[2C^+M_2 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right] - U_{c-1,i}^{k-1} \left[-2C^-M_2 \frac{1}{\tau^2} - 2C^-M_2 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right] \\
& - U_{c+1,i}^{k-1} \left[-2C^+M_2 \frac{1}{\tau^2} - 2C^+M_2 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right] - U_{a,i-1}^{k-2} \left[KL \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} + C^-L \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} + C^+L \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right] \\
& - U_{a,i}^{k-2} \left[-C^-L \frac{1}{\tau^2} - C^+L \frac{1}{\tau^2} - 2KL \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} + A_1 \frac{1}{\tau^2} - C^-L \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} - C^+L \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right] \\
& - U_{a,i+1}^{k-2} \left[KL \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} \right] - U_{b,i-1}^{k-2} \left[KM_1 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} + C^-M_1 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} + C^+M_1 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right] \\
& - U_{b,i}^{k-2} \left[-C^-M_1 \frac{1}{\tau^2} - 2KM_1 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} - C^+M_1 \frac{1}{\tau^2} + A_2 \frac{1}{\tau^2} - C^-M_1 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} - C^+M_1 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right] \\
& - U_{b,i+1}^{k-2} \left[KM_1 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} \right] - U_{c,i-1}^{k-2} \left[KM_2 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} + C^-M_2 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} + C^+M_2 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -U_{c,i}^{k-2} \left[-C^- M_2 \frac{1}{\tau^2} - 2KM_2 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} - C^+ M_2 \frac{1}{\tau^2} + A_3 \frac{1}{\tau^2} - C^- M_2 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} - C^+ M_2 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right] \\
& \quad - U_{c,i+1}^{k-2} \left[KM_2 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} \right] - U_{a-1,i-1}^{k-2} \left[-C^- L \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right] - U_{a+1,i-1}^{k-2} \left[-C^+ L \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right] \\
& \quad - U_{a-1,i}^{k-2} \left[C^- L \frac{1}{\tau^2} + C^- L \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right] - U_{a+1,i}^{k-2} \left[C^+ L \frac{1}{\tau^2} + C^+ L \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right] \\
& \quad - U_{b-1,i-1}^{k-2} \left[-C^- M_1 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right] - U_{b+1,i-1}^{k-2} \left[-C^+ M_1 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right] \\
& \quad - U_{b-1,i}^{k-2} \left[C^- M_1 \frac{1}{\tau^2} + C^- M_1 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right] - U_{b+1,i}^{k-2} \left[C^+ M_1 \frac{1}{\tau^2} + C^+ M_1 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right] \\
& \quad - U_{c-1,i-1}^{k-2} \left[-C^- M_2 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right] - U_{c+1,i-1}^{k-2} \left[-C^+ M_2 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right] \\
& \quad - U_{c-1,i}^{k-2} \left[C^- M_2 \frac{1}{\tau^2} + C^- M_2 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right] - U_{c+1,i}^{k-2} \left[C^+ M_2 \frac{1}{\tau^2} + C^+ M_2 \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \right] \\
& = \text{pravá strana rovnosti}
\end{aligned}$$

(4.68)

Analogicky získáme další dvě rovnosti podobné struktury, pouze s pozměněnými koeficienty.

Dále jsem označil:

$$P_1 = \frac{1}{h^2} + RK \frac{1}{\tau} \frac{1}{h^2} + RC^- \frac{1}{\tau} \frac{1}{h} + RC^+ \frac{1}{\tau} \frac{1}{h}$$

$$P_2 = -\frac{2}{h^2} - 2RK \frac{1}{\tau} \frac{1}{h^2} - RC^- \frac{1}{\tau} \frac{1}{h} - RC^+ \frac{1}{\tau} \frac{1}{h}$$

$$P_3 = \frac{1}{h^2} + RK \frac{1}{\tau} \frac{1}{h^2}$$

$$P_4 = -RC^- \frac{1}{\tau} \frac{1}{h}$$

$$P_5 = -RC^+ \frac{1}{\tau} \frac{1}{h}$$

$$P_6 = -RK \frac{1}{\tau} \frac{1}{h^2} - RC^- \frac{1}{\tau} \frac{1}{h} - RC^+ \frac{1}{\tau} \frac{1}{h}$$

$$P_7 = 2RK \frac{1}{\tau} \frac{1}{h^2} + RC^- \frac{1}{\tau} \frac{1}{h} + RC^+ \frac{1}{\tau} \frac{1}{h}$$

$$P_8 = -RK \frac{1}{\tau} \frac{1}{h^2}$$

$$S_1 = K \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} + C^- \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} + C^+ \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h}$$

$$S_2 = -C^- \frac{1}{\tau^2} - C^+ \frac{1}{\tau^2} - 2K \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} - C^- \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} - C^+ \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h}$$

$$S_3 = -R(C' + C'') \frac{1}{\tau}$$

$$\begin{aligned}
S_4 &= K \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h^2} \\
S_5 &= RC'' \frac{1}{\tau} \\
S_6 &= RC' \frac{1}{\tau} \\
S_7 &= -C^- \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \\
S_8 &= C^- \frac{1}{\tau^2} + C^- \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \\
S_9 &= -C^+ \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h} \\
S_{10} &= C^+ \frac{1}{\tau^2} + C^+ \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{h}
\end{aligned} \tag{4.69}$$

Soustavu můžeme tedy přepsat do následujících tří rovnic:

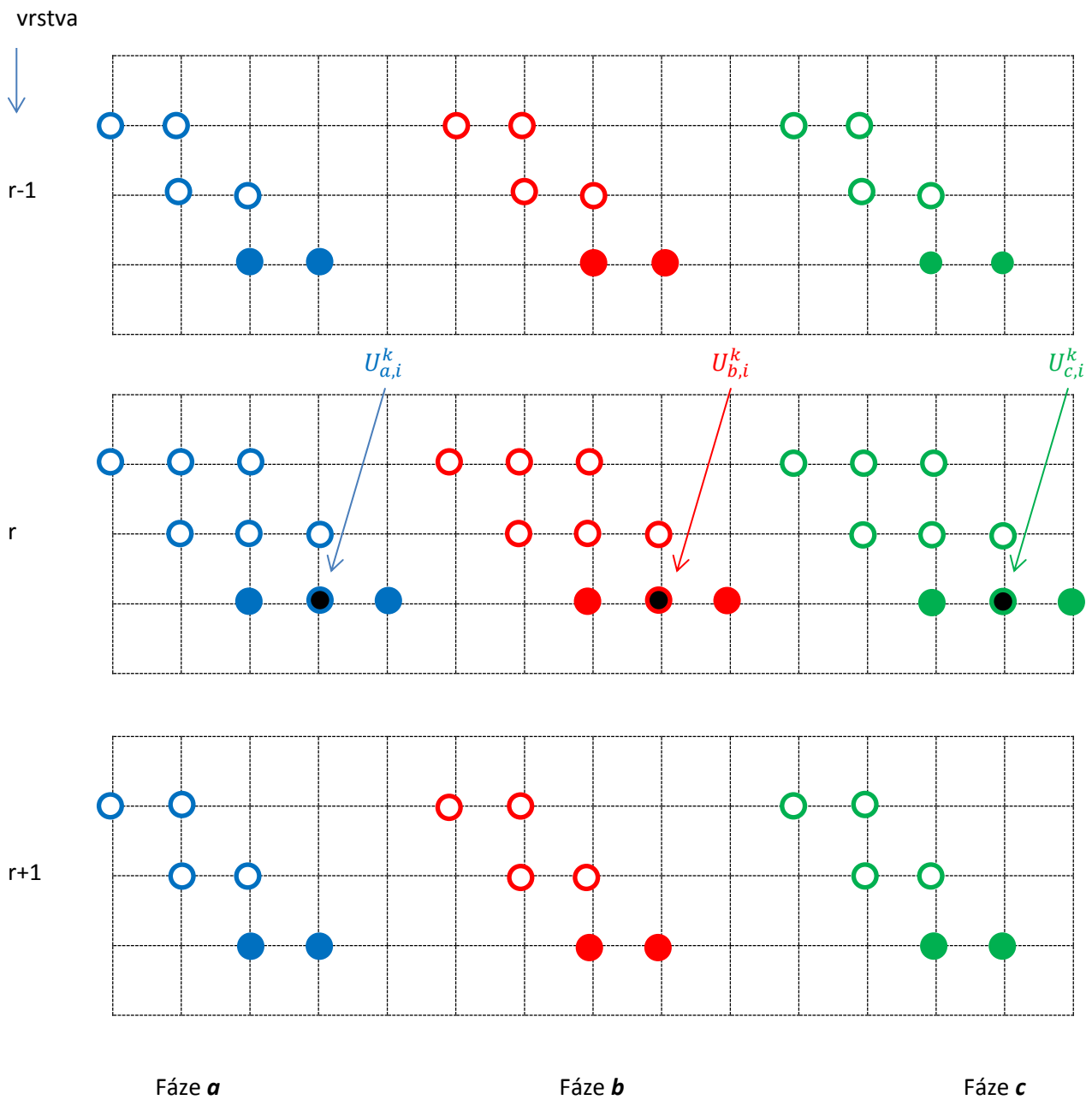
První rovnice

$$\begin{aligned}
&U_{a,i-1}^k (P_1 + LS_1) + U_{a,i}^k \left(P_2 + LS_2 + S_3 + A_1 \frac{1}{\tau^2} \right) + U_{a,i+1}^k (P_3 + LS_4) + U_{b,i-1}^k (M_1 S_1) + \\
&U_{b,i}^k \left(M_1 S_2 + S_5 + A_2 \frac{1}{\tau^2} \right) + U_{b,i+1}^k (M_1 S_4) + U_{c,i-1}^k (M_2 S_1) + U_{c,i}^k \left(M_2 S_2 + S_6 + A_3 \frac{1}{\tau^2} \right) + \\
&U_{c,i+1}^k (M_2 S_4) + U_{a-1,i-1}^k (P_4 + LS_7) + U_{a-1,i}^k (LS_8 - P_4) + U_{a+1,i-1}^k (P_5 + LS_9) + \\
&U_{a+1,i}^k (LS_{10} - P_5) + U_{b-1,i-1}^k (M_1 S_7) + U_{b-1,i}^k (M_1 S_8) + U_{b+1,i-1}^k (M_1 S_9) + U_{b+1,i}^k (M_1 S_{10}) + \\
&U_{c-1,i-1}^k (M_2 S_7) + U_{c-1,i}^k (M_2 S_8) + U_{c+1,i-1}^k (M_2 S_9) + U_{c+1,i}^k (M_2 S_{10}) = -U_{a,i-1}^{k-1} (P_6 - \\
&2LS_1) - U_{a,i}^{k-1} \left(P_7 - 2LS_2 - S_3 - 2A_1 \frac{1}{\tau^2} \right) - U_{a,i+1}^{k-1} (P_8 - 2LS_4) - U_{b,i-1}^{k-1} (-2M_1 S_1) - \\
&U_{b,i}^{k-1} \left(-2M_1 S_2 - S_5 - 2A_2 \frac{1}{\tau^2} \right) - U_{b,i+1}^{k-1} (-2M_1 S_4) - U_{c,i-1}^{k-1} (-2M_2 S_1) - U_{c,i}^{k-1} \left(-2M_2 S_2 - \right. \\
&S_6 - 2A_3 \frac{1}{\tau^2} \left. \right) - U_{c,i+1}^{k-1} (-2M_2 S_4) - U_{a-1,i-1}^{k-1} (-P_4 - 2LS_7) - U_{a+1,i-1}^{k-1} (-P_5 - 2LS_9) - \\
&U_{a-1,i}^{k-1} (P_4 - 2LS_8) - U_{a+1,i}^{k-1} (P_5 - 2LS_{10}) - U_{b-1,i-1}^{k-1} (-2M_1 S_7) - U_{b+1,i-1}^{k-1} (-2M_1 S_9) - \\
&U_{b-1,i}^{k-1} (-2M_1 S_8) - U_{b+1,i}^{k-1} (-2M_1 S_{10}) - U_{c-1,i-1}^{k-1} (-2M_2 S_7) - U_{c+1,i-1}^{k-1} (-2M_2 S_9) - \\
&U_{c-1,i}^{k-1} (-2M_2 S_8) - U_{c+1,i}^{k-1} (-2M_2 S_{10}) - U_{a,i-1}^{k-2} (LS_1) - U_{a,i}^{k-2} \left(LS_2 + A_1 \frac{1}{\tau^2} \right) - U_{a,i+1}^{k-2} (LS_4) - \\
&U_{b,i-1}^{k-2} (M_1 S_1) - U_{b,i}^{k-2} \left(M_1 S_2 + A_2 \frac{1}{\tau^2} \right) - U_{b,i+1}^{k-2} (M_1 S_4) - U_{c,i-1}^{k-2} (M_2 S_1) - U_{c,i}^{k-2} \left(M_2 S_2 + \right. \\
&A_3 \frac{1}{\tau^2} \left. \right) - U_{c,i+1}^{k-2} (M_2 S_4) - U_{a-1,i-1}^{k-2} (LS_7) - U_{a+1,i-1}^{k-2} (LS_9) - U_{a-1,i}^{k-2} (LS_8) - U_{a+1,i}^{k-2} (LS_{10}) - \\
&U_{b-1,i-1}^{k-2} (M_1 S_7) - U_{b+1,i-1}^{k-2} (M_1 S_9) - U_{b-1,i}^{k-2} (M_1 S_8) - U_{b+1,i}^{k-2} (M_1 S_{10}) - U_{c-1,i-1}^{k-2} (M_2 S_7) - \\
&U_{c+1,i-1}^{k-2} (M_2 S_9) - U_{c-1,i}^{k-2} (M_2 S_8) - U_{c+1,i}^{k-2} (M_2 S_{10})
\end{aligned} \tag{4.70}$$

Druhá rovnice

$$\begin{aligned}
& U_{a,i-1}^k(M_2S_1) + U_{a,i}^k\left(M_2S_2 + S_5 + A_4\frac{1}{\tau^2}\right) + U_{a,i+1}^k(M_2S_4) + U_{b,i-1}^k(P_1 + LS_1) \\
& + U_{b,i}^k\left(P_2 + LS_2 + S_3 + A_5\frac{1}{\tau^2}\right) + U_{b,i+1}^k(P_3 + LS_4) + U_{c,i-1}^k(M_1S_1) \\
& + U_{c,i}^k\left(M_1S_2 + S_6 + A_6\frac{1}{\tau^2}\right) + U_{c,i+1}^k(M_1S_4) + U_{a-1,i-1}^k(M_2S_7) + U_{a-1,i}^k(M_2S_8) \\
& + U_{a+1,i-1}^k(M_2S_9) + U_{a+1,i}^k(M_2S_{10}) + U_{b-1,i-1}^k(P_4 + LS_7) + U_{b-1,i}^k(LS_8 - P_4) \\
& + U_{b+1,i-1}^k(P_5 + LS_9) + U_{b+1,i}^k(LS_{10} - P_5) + U_{c-1,i-1}^k(M_1S_7) + U_{c-1,i}^k(M_1S_8) \\
& + U_{c+1,i-1}^k(M_1S_9) + U_{c+1,i}^k(M_1S_{10}) \\
& = -U_{a,i-1}^{k-1}(-2M_2S_1) - U_{a,i}^{k-1}\left(-2M_2S_2 - S_5 - 2A_4\frac{1}{\tau^2}\right) \\
& - U_{a,i+1}^{k-1}(-2M_2S_4) - U_{b,i-1}^{k-1}(P_6 - 2LS_1) - U_{b,i}^{k-1}\left(P_7 - 2LS_2 - S_3 - 2A_5\frac{1}{\tau^2}\right) \\
& - U_{b,i+1}^{k-1}(P_8 - 2LS_4) - U_{c,i-1}^{k-1}(-2M_1S_1) - U_{c,i}^{k-1}\left(-2M_1S_2 - S_6 - 2A_6\frac{1}{\tau^2}\right) \\
& - U_{c,i+1}^{k-1}(-2M_1S_4) - U_{a-1,i-1}^{k-1}(-2M_2S_7) - U_{a+1,i-1}^{k-1}(-2M_2S_9) - U_{a-1,i}^{k-1}(-2M_2S_8) \\
& - U_{a+1,i}^{k-1}(-2M_2S_{10}) - U_{b-1,i-1}^{k-1}(-P_4 - 2LS_7) - U_{b+1,i-1}^{k-1}(-P_5 - 2LS_9) \\
& - U_{b-1,i}^{k-1}(P_4 - 2LS_8) - U_{b+1,i}^{k-1}(P_5 - 2LS_{10}) - U_{c-1,i-1}^{k-1}(-2M_1S_7) \\
& - U_{c+1,i-1}^{k-1}(-2M_1S_9) - U_{c-1,i}^{k-1}(-2M_1S_8) - U_{c+1,i}^{k-1}(-2M_1S_{10}) - U_{a,i-1}^{k-2}(M_2S_1) \\
& - U_{a,i}^{k-2}\left(M_2S_2 + A_4\frac{1}{\tau^2}\right) - U_{a,i+1}^{k-2}(LS_4) - U_{c,i-1}^{k-2}(M_1S_1) - U_{c,i}^{k-2}\left(M_1S_2 + A_6\frac{1}{\tau^2}\right) \\
& - U_{c,i+1}^{k-2}(M_1S_4) - U_{a-1,i-1}^{k-2}(M_2S_7) - U_{a+1,i-1}^{k-2}(M_2S_9) - U_{a-1,i}^{k-2}(M_2S_8) \\
& - U_{a+1,i}^{k-2}(M_2S_{10}) - U_{b-1,i-1}^{k-2}(LS_7) - U_{b+1,i-1}^{k-2}(LS_9) - U_{b-1,i}^{k-2}(LS_8) - U_{b+1,i}^{k-2}(LS_{10}) \\
& - U_{c-1,i-1}^{k-2}(M_1S_7) - U_{c+1,i-1}^{k-2}(M_1S_9) - U_{c-1,i}^{k-2}(M_1S_8) - U_{c+1,i}^{k-2}(M_1S_{10})
\end{aligned} \tag{4.71}$$

Analogicky dostaneme třetí rovnici. Ta bude mít identickou strukturu, ale odlišné koeficienty. Celkově je důležité si uvědomit, že k přepsání rovnic v bodě (x_i, t_k) je potřeba 63 hodnot funkce \mathbf{U} (21 z nich je neznámých), které ukazuje následující schéma na obrázku číslo 35.



Legenda:

- ● ● neznámé hodnoty (časová vrstva *k*)
- ○ ○ známé hodnoty (předchozí časové vrstvy)

Obrázek 36 – Devítibodové schéma zvolené pro numerický výpočet

Na obrázku číslo 36 jsou plné body neznámé a prázdné body již známé hodnoty. Všimněme si, že toto schéma je nepoužitelné pro počáteční a koncové body vrstev, jelikož spousta bodů by při použití tohoto schématu byla nedefinována.

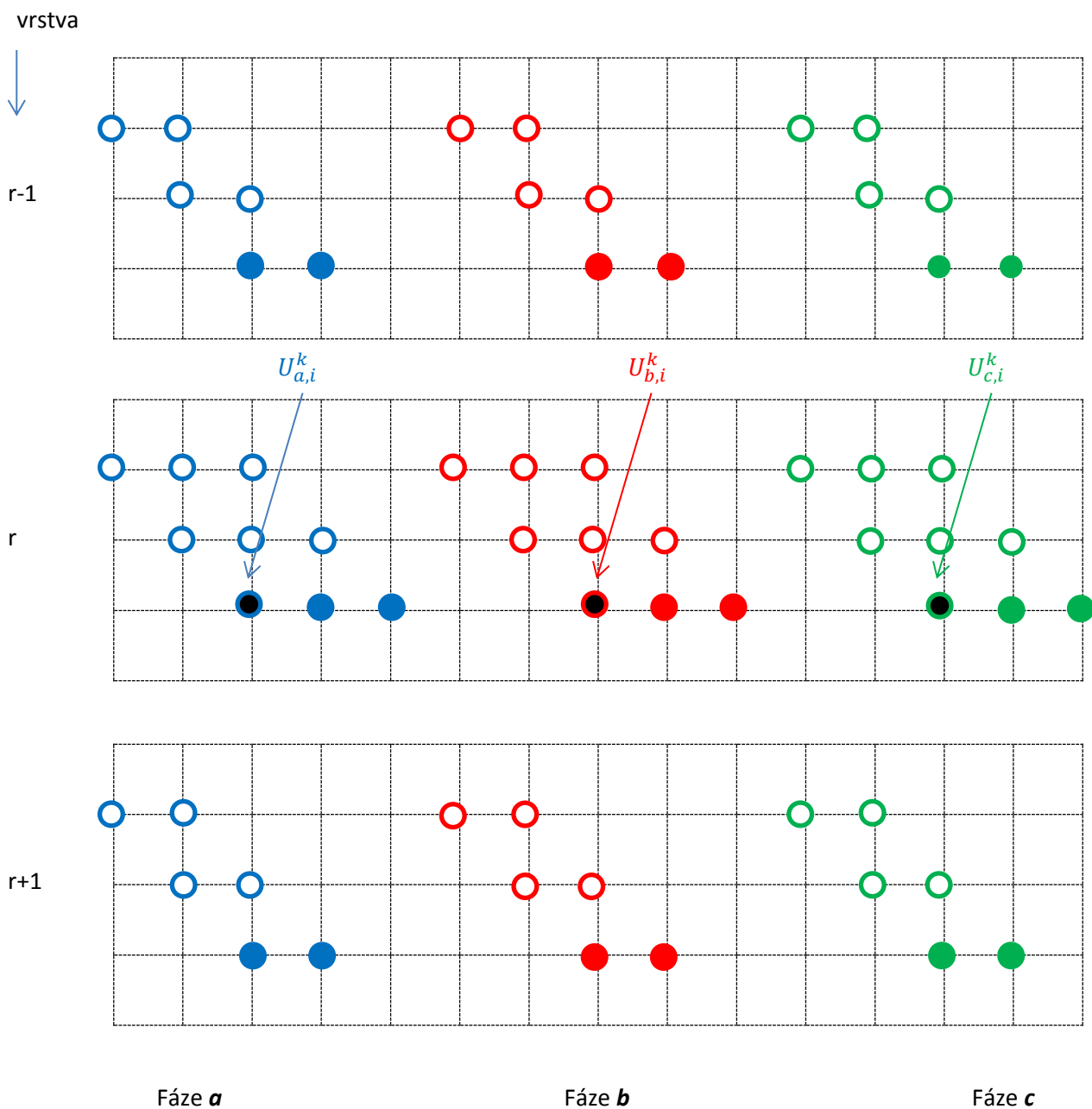
Proto postupujeme následovně:

Počáteční body

Až na počáteční bod první vrstvy, do kterého přichází vstupní impulz, a na počáteční bod poslední vrstvy, kde je uzemnění (pro malý počet vrstev), budou diferenciální rovnice aproximovány pomocí dopředných diferencí v prostoru, tedy budeme uvažovat následující změny v aproximacích:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{U}_0^k &\approx \frac{1}{h^2} (\mathbf{U}_2^k - 2\mathbf{U}_1^k + \mathbf{U}_0^k), \\
 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \mathbf{U}_0^k &\approx \frac{1}{\tau} \left[\frac{1}{h^2} (\mathbf{U}_2^k - 2\mathbf{U}_1^k + \mathbf{U}_0^k) - \frac{1}{h^2} (\mathbf{U}_2^{k-1} - 2\mathbf{U}_1^{k-1} + \mathbf{U}_0^{k-1}) \right], \\
 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} \mathbf{U}_0^k &\approx \frac{1}{\tau^2} \left[\frac{1}{h^2} (\mathbf{U}_2^k - 2\mathbf{U}_1^k + \mathbf{U}_0^k) - \frac{2}{h^2} (\mathbf{U}_2^{k-1} - 2\mathbf{U}_1^{k-1} + \mathbf{U}_0^{k-1}) + \frac{1}{h^2} (\mathbf{U}_2^{k-2} - 2\mathbf{U}_1^{k-2} + \mathbf{U}_0^{k-2}) \right], \\
 \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \mathbf{U}_0^k &\approx \frac{1}{\tau} \left[\frac{1}{h} (\mathbf{U}_1^k - \mathbf{U}_0^k) - \frac{1}{h} (\mathbf{U}_1^{k-1} - \mathbf{U}_0^{k-1}) \right] \\
 \frac{\partial^3}{\partial x \partial t^2} \mathbf{U}_0^k &\approx \frac{1}{\tau^2} \left[\frac{1}{h^2} (\mathbf{U}_1^k - \mathbf{U}_0^k) - \frac{2}{h^2} (\mathbf{U}_1^{k-1} - \mathbf{U}_0^{k-1}) + \frac{1}{h^2} (\mathbf{U}_1^{k-2} - \mathbf{U}_0^{k-2}) \right]
 \end{aligned}
 \tag{4.72}$$

To povede po dosazení do rovnice k podobným rovnicím jako v (4.69–4.71).



Legenda:

- ● ● neznámé hodnoty (časová vrstva *k*)
- ○ ○ známé hodnoty (předchozí časové vrstvy)

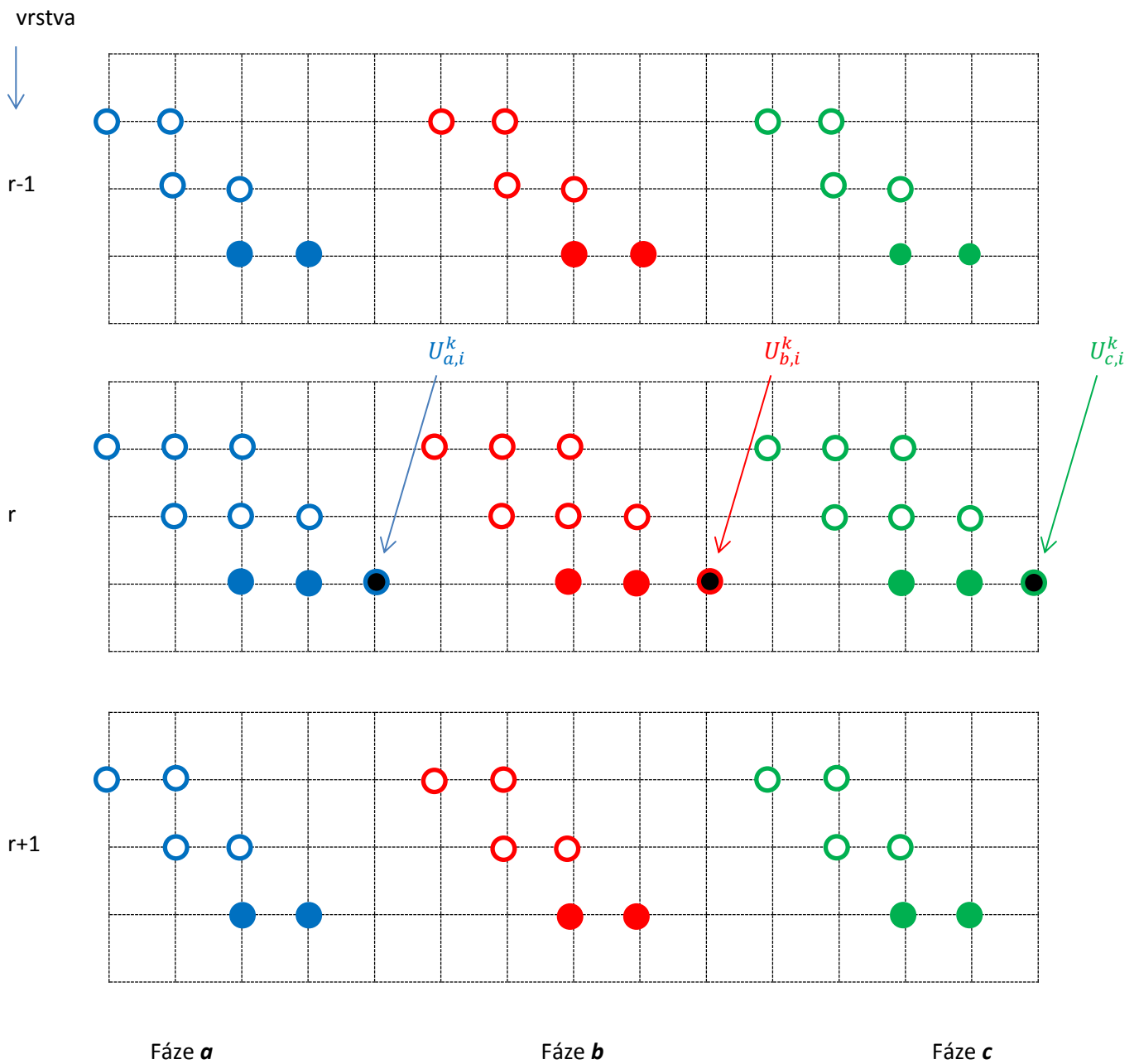
Obrázek 37 – Devítibodové schéma zvolené pro numerický výpočet

Koncové body

Až na počáteční bod poslední vrstvy (lichý počet vrstev), kde je uzemnění, budou diferenciální rovnice aproximovány pomocí zpětných diferencí v prostoru. Budeme tedy uvažovat:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{U}_N^k &\approx \frac{1}{h^2} (\mathbf{U}_N^k - 2\mathbf{U}_{N-1}^k + \mathbf{U}_{N-2}^k), \\ \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \mathbf{U}_N^k &\approx \frac{1}{\tau} \left[\frac{1}{h^2} (\mathbf{U}_N^k - 2\mathbf{U}_{N-1}^k + \mathbf{U}_{N-2}^k) - \frac{1}{h^2} (\mathbf{U}_N^{k-1} - 2\mathbf{U}_{N-1}^{k-1} + \mathbf{U}_{N-2}^{k-1}) \right], \\ \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} \mathbf{U}_N^k &\approx \frac{1}{\tau^2} \left[\frac{1}{h^2} (\mathbf{U}_N^k - 2\mathbf{U}_{N-1}^k + \mathbf{U}_{N-2}^k) - \frac{2}{h^2} (\mathbf{U}_N^{k-1} - 2\mathbf{U}_{N-1}^{k-1} + \mathbf{U}_{N-2}^{k-1}) + \frac{1}{h^2} (\mathbf{U}_N^{k-2} - 2\mathbf{U}_{N-1}^{k-2} + \mathbf{U}_{N-2}^{k-2}) \right], \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \mathbf{U}_N^k &\approx \frac{1}{\tau} \left[\frac{1}{h} (\mathbf{U}_N^k - \mathbf{U}_{N-1}^k) - \frac{1}{h} (\mathbf{U}_N^{k-1} - \mathbf{U}_{N-1}^{k-1}) \right] \\ \frac{\partial^3}{\partial x \partial t^2} \mathbf{U}_N^k &\approx \frac{1}{\tau^2} \left[\frac{1}{h^2} (\mathbf{U}_N^k - \mathbf{U}_{N-1}^k) - \frac{2}{h^2} (\mathbf{U}_N^{k-1} - \mathbf{U}_{N-1}^{k-1}) + \frac{1}{h^2} (\mathbf{U}_N^{k-2} - \mathbf{U}_{N-1}^{k-2}) \right]\end{aligned}\tag{4.73}$$

To povede po dosazení do rovnic také k podobným rovnicím jako v (4.69–4.71).



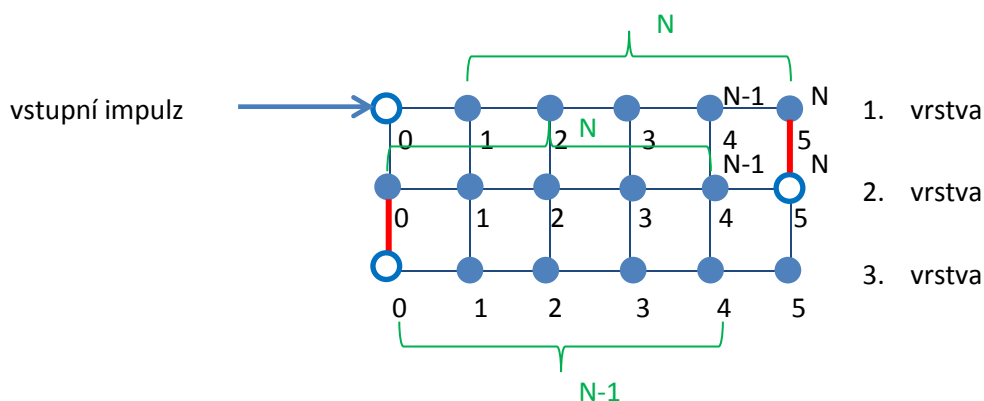
Legenda:

- ● ● neznámé hodnoty (časová vrstva *k*)
- ○ ○ známé hodnoty (předchozí časové vrstvy)

Obrázek 38 – Devítibodové schéma zvolené pro numerický výpočet

Dále budu uvažovat homogenní okrajové podmínky pro vrstvení, tj. budu uvažovat **nultou** a **r+1** vrstvu s nulovým napětím a jen odpovídajícím způsobem upravím kapacity mezi **nultou** a **první** vrstvou a **r-tou** a **r+1** vrstvou.

Celkem dostaneme pro každou časovou vrstvu $k = 2, \dots, M_t$ soustavu o $(3rN - 3)$ lineárních rovnic pro $(3rN - 3)$ neznámých, kterou můžeme přepsat v maticovém tvaru a řešit Gaussovou eliminační metodou. Jejím řešením dostaneme aproximaci hledané funkce **U**.



Obrázek 39 – Princip determinování počátečních a koncových bodů devítibodového numerického schématu

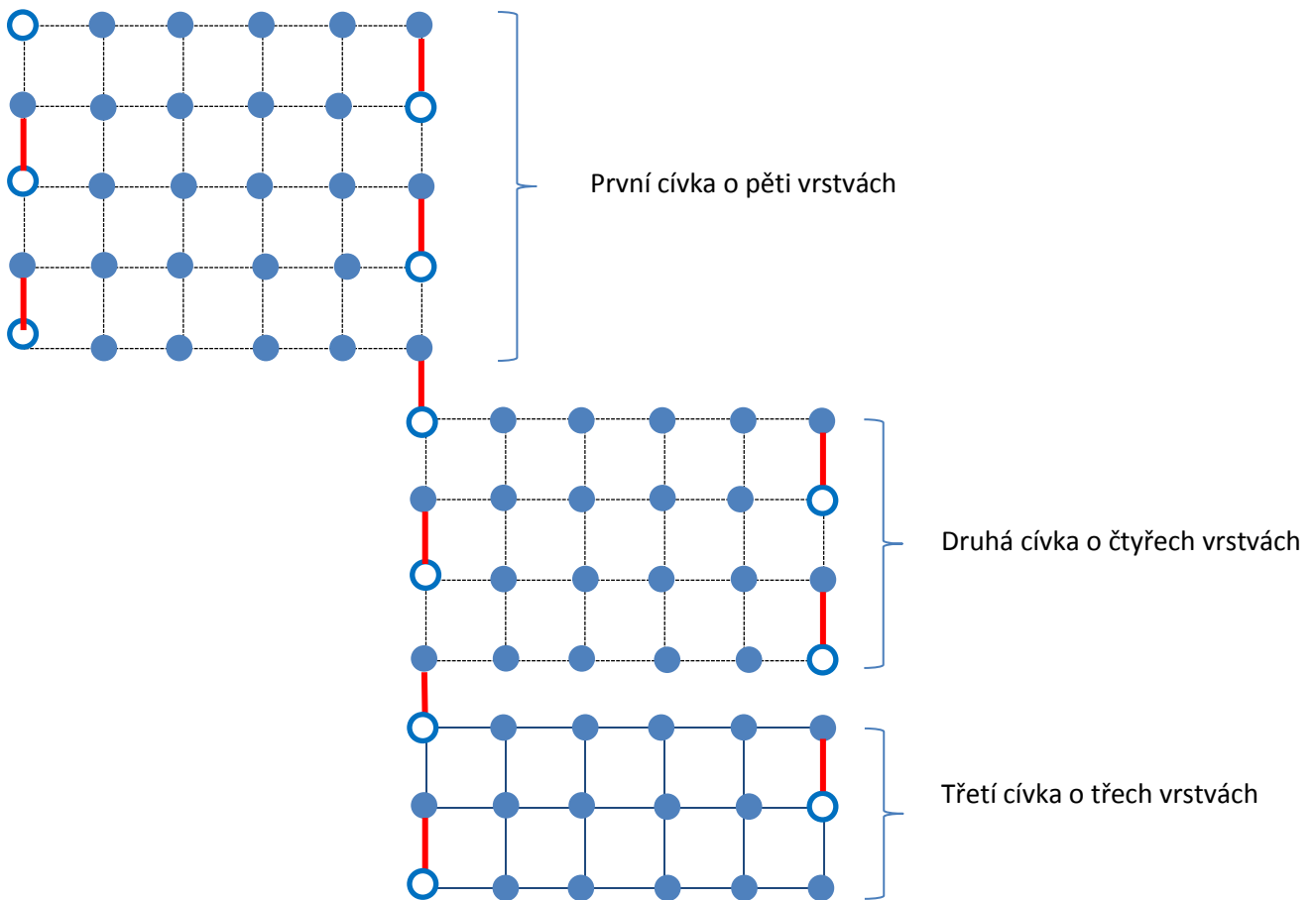
Soustava vypadá v blocích následovně:

$$\begin{bmatrix} M_a & D_a & 0 & 0 \\ M_b & D_b & 0 & 0 \\ M_c & D_c & 0 & 0 \\ P_a & M_a & D_a & 0 \\ P_b & M_b & D_b & 0 \\ P_c & M_c & D_c & 0 \\ 0 & P_a & M_a & D_a \\ 0 & P_b & M_b & D_b \\ 0 & P_c & M_c & D_c \\ 0 & 0 & P_a & M_a \\ 0 & 0 & P_b & M_b \\ 0 & 0 & P_c & M_c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} W_{a1,1}^k \\ W_{a1,2}^k \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ W_{cr,N-2}^k \\ W_{cr,N-1}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{a1,1}^k - d_a^0 W_{a1,0}^k - d_b^0 W_{b1,0}^k - d_c^0 W_{c1,0}^k \\ \beta_{a1,2}^k \\ \beta_{a1,3}^k \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \beta_{cr,N-1}^k \end{bmatrix}$$

(4.74)

Řetězení vícevrstvé cívký

U tohoto problému postupujeme podobným způsobem jako při řetězení jednovrstvé cívký. Postup sestavení soustavy lineárních rovnic názorně naznačuje následující obrázek:



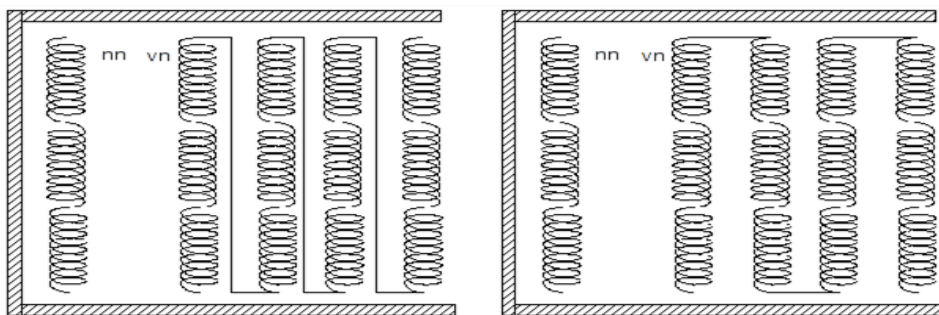
Obrázek 40 – Princip řetězení vícevrstvý cívek

Jednotlivé cívký budou ve výsledné matici reprezentující soustavu lineárních rovnic tvořit bloky o stejné struktuře, jakou jsem uvedl u samostatné vícevrstvé cívký. Přejchod mezi jednotlivými cívkami bude realizován technickým předpokladem, že místo vstupního impulzu v navazujících cívkách (tj. v prvních bodech prvních vrstev) budeme uvažovat hodnotu napětí z posledního bodu poslední vrstvy z předcházející cívký.

Celkem dostaneme soustavu o $3(r_1N_1 + r_2N_2 + \dots + r_nN_n) - 3n$, kde n je počet vrstev lineárních rovnic, kterou budeme řešit Gaussovou eliminační metodou.

4.5.1 Zjištěné skutečnosti – nekmitající polohová vinutí

Na základě úspěšného řešení vícevrstvých a řetězených cívek jsem analyzoval identickou metodu omezující vlastní kmity uvnitř cívky. Z důvodu omezení následku impulzního namáhání bylo vyvinuto polohové vinutí, které vychází ze snahy zmenšit zemní a současně zvětšit sériovou kapacitu vinutí transformátoru. Řetězení vícevrstvých cívek je analogií k polohovému vinutí, které je schematicky naznačeno na obrázku číslo 41.

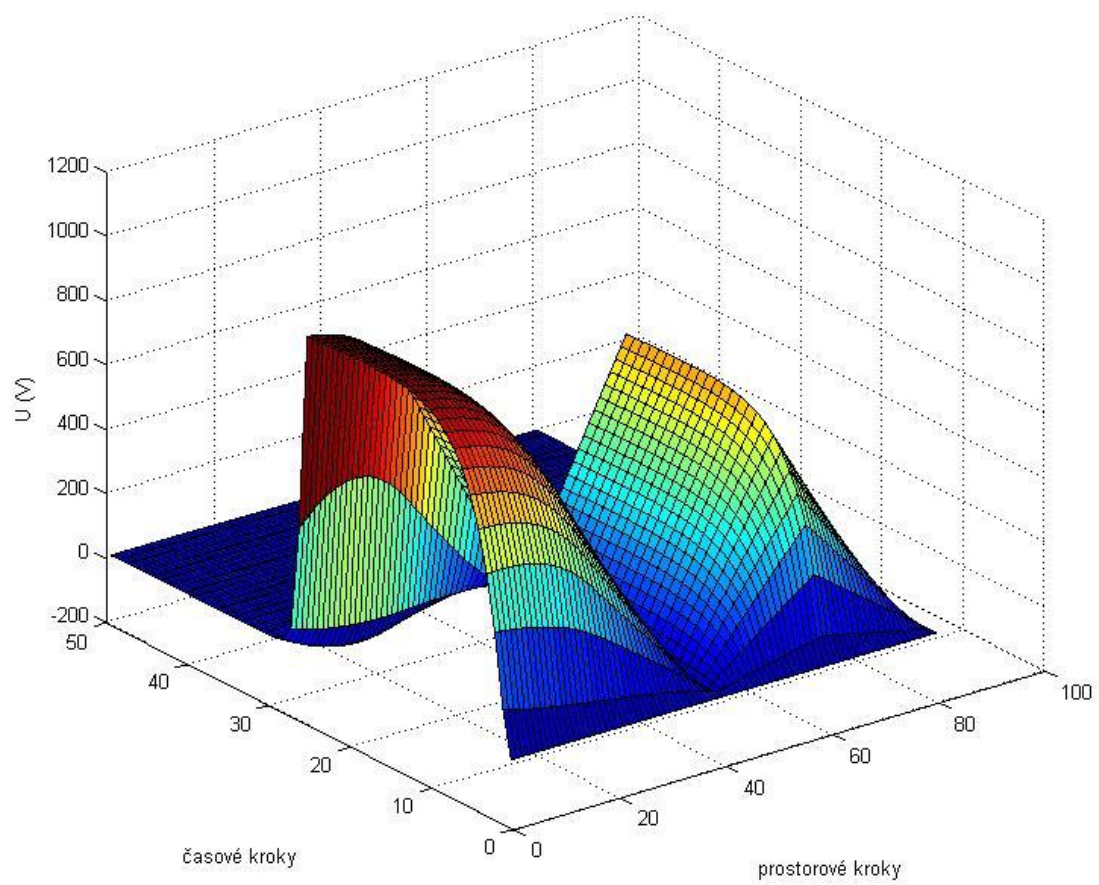


Obrázek 41 – Schematické znázornění a) jednoduchého, b) dvojitého polohového vinutí

Na *Technische Universität Ilmenau* byla v rámci modelu transformátorového vinutí zkonstruována dvojcívka s tabelizovanými údaji a byla namodelována odezva při trojpólovém naražení všech fází useknutým impulzem 1,2/50 μs .

Parametry modelu transformátorové dvojcívky:	
Délka vodiče	$l = 25 \text{ m}$
Počet závitů	$N = 16$
Permitivita izolace	$\epsilon_r = 4$
Rychlost šíření vlny	$v_s = 150 \frac{\text{m}}{\mu\text{s}}$
Sériová kapacita	$K = 158 \frac{\text{pF}}{\text{m}}$
Paralelní kapacita v těle vrstvy	$C_t = 3,9 \frac{\text{pF}}{\text{m}}$
Paralelní kapacita k nádobě a jádru	$C_o = 0,42 \frac{\text{pF}}{\text{m}}$
Ekvivalentní indukčnost	$L = 5,16 \frac{\mu\text{H}}{\text{m}}$
Rezistance vinutí	$R = 0,149 \frac{\Omega}{\text{m}}$
Vzájemná indukčnost mezi cívkami	$M_1 = 4,5 \frac{\mu\text{H}}{\text{m}} \quad M_2 = 9,6 \frac{\mu\text{H}}{\text{m}}$
Dielektrický ztrátový činitel	$\tan\delta = 0,02$
Vodivost vodiče	$\sigma = 5 \cdot 10^7 \frac{\text{S}}{\text{m}}$
Síla izolace vodiče	$d = 3 \text{ mm}$
Permeabilita	$\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$
Rozměry vodiče	$a = 0,0169 \text{ m}, b = 0,0111 \text{ m}$

Tabulka 2 – Tabelizované parametry modelu transformátorové dvojcívky



Obrázek 42 – Časoprostorové rozložení napětí trojfázového transformátoru s uzemněným uzlem naraženým useknutým impulzem $1,2/50 \mu s$ do všech fází jedné dvojčívky

5 Determinace vstupních parametrů modelu

Použití výše navrženého modelu je v konkrétním případě odvislé od co možná nejpřesnějšího určení vstupních parametrů vinutí. Jejich hodnoty lze stanovit měřením nebo výpočtem. Obě metody jsou zatíženy značnými restrikcemi. Měření parametrů L , M , C , K , R je popsáno například v [5, 62], avšak výsledky jsou velmi omezené a zatížené značnou chybou, neboť samotný měřený objekt má hodnoty srovnatelné s hodnotami parazitních prvků měřících přívodů. Určité parametry (například kapacity mezi jednotlivými vrstvami či přesné mezizávitové kapacity) nelze měřením reálně určit. Velký dopad na správné determinování hodnoty prvku náhradního délkového elementu má samotná konfigurace vinutí (válcové, deskové, pásové), ale i druh použitého materiálu, typ průřezu vodiče (kruhový, obdélníkový, čtvercový), průřez použitého vodiče (ve srovnání se zbývajícími částmi transformátoru), stejně jako specifické uspořádání (transpozice vodičů, vrstvení do poloh, atd.). Z důvodu značné chyby měření, ověřené v [62] jsem se rozhodl hodnoty parazitních prvků počítat podle níže uvedených vztahů.

5.1 Určení vlastní a vzájemné indukčnosti cívky

Vlastní a vzájemnou indukčnost uspořádání lze určit méně přesněji, než kapacity vinutí. Indukčnost je závislá na frekvenci. Oscilace, které uvnitř vinutí transformátoru nastávají, nemají jednotný kmitočet – ten se pohybuje v rozmezí 1 kHz–1 MHz. Pro matematický model by byla takto zvolená varianta značně obtížná a navíc studie [28, 33] dokazují, že frekvenční závislost není potřeba uvažovat při impulzním namáhání. Na základě experimentálních výsledků bylo prokázáno, že pro transformátory je velikost indukčnosti podílem indukčnosti naprázdno, a to pro velké (15–20) a pro výkonově malé (20–40).

Indukčnost naprázdno může být s dobrou přesností počítána podle [4, 28]:

$$L_{nl} = \mu_r \mu_0 \frac{S}{l_c} N^2, \quad (5.1)$$

kde S je plocha jádra transformátoru v kolmém řezu v (m^2), l_c je délka vinutí v (m) a N počet závitů

Při zanedbání vlivu jádra se nejčastěji používá závislost:

$$L = \frac{0,4\pi N^2 l}{10^8 h}, \quad (5.2)$$

kde N je počet závitů, l je délka vodiče v (m) a h je axiální výška cívky v (m)

Vzájemná indukčnost uspořádání byla experimentálně definována [4] jako:

$$M(x, y) = L^{-v} \left| \frac{x-y}{l} \right| \quad (5.3)$$

kde L je vlastní indukčnost sekce cívky a exponent je závislý na geometrických rozměrech a magnetických vlastnostech vinutí.

Experimentálně bylo stanoveno v [4, 28]

$$M(x, y) = \frac{K}{v^2 C} e^{-H|i-j|}, \quad (5.4)$$

kde $K = 0,6$ a $H = 1$ jsou experimentální konstanty.

5.2 Stanovení rezistance vinutí

Na vnitřní oscilace uvnitř vinutí působí i tlumící rezistance. V modelu se nejčastěji uvažuje v sériové vazbě s ekvivalentní indukčností vinutí. Vzhledem k tomu, že pro vyšší frekvence impulzu je i rezistance frekvenčně závislá, bylo by vhodné tuto závislost uvažovat, i když frekvenční změna v modelu nemá zvýšený účinek a musela by se počítat pro každou frekvenci impulzu samostatně.

Pro výpočet je potřeba stanovit ekvivalentní poloměr z rozměrů vinutí:

$$r_{eq} = \sqrt{\frac{a \cdot b}{\pi}}, \quad (5.5)$$

kde a a b jsou rozměry vinutí

Pro hloubku vniku potom platí:

$$\delta(f) = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot f \cdot \mu \cdot \sigma}} \quad (5.6)$$

Výsledná rezistance je potom stanovena jako funkce frekvence:

$$R(f) = \frac{1}{\pi(r_{eq} - \delta(f))^2} \quad (5.7)$$

5.3 Stanovení kapacit transformátoru

S malými rozměry vinutí se zvyšuje neúměrně chyba měření a přímé měření tak neposkytuje dostatečně validní výsledky. Je možné změřit *viděnou kapacitu* (někdy také *rázovou*) na svorkách posuzovaného objektu, ale obtížně se determinují mezizávitová kapacita, kapacita mezi jednotlivými vrstvami vinutí, kapacity vůči plášti, štítu a zbývajícím vodivým částem transformátoru.

Inverzním postupem navrženým v [36, 43, 44] se z *viděné kapacity* změřené vhodnou metodou pro měření malých kapacit dají dopočítat dílčí kapacity vinutí. Tento vztah jsem využil pro určení sériových a paralelních kapacit pro jedno- i vícevrstvá vinutí s jádrem i bez něho transformovaných do jedné paralelní kapacity vztažené vůči štítu, respektive vůči jádru.

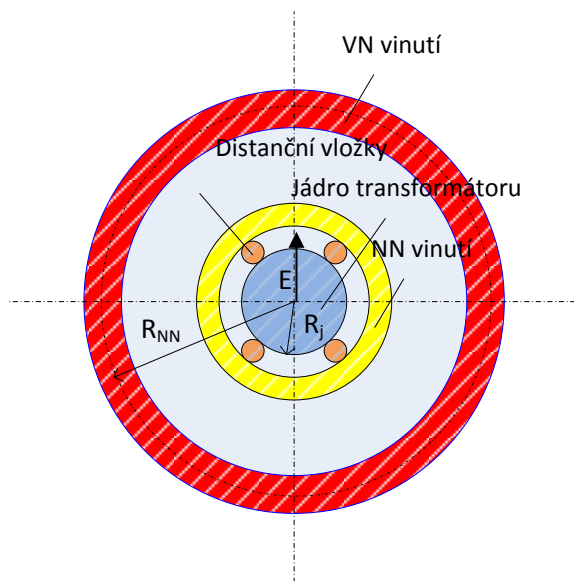
Massarini a Kazimierczuk [44] stanovují mezizávitovou a zemní kapacitu za pomoci vztahu odvozeného na základě teorie magnetického pole. Tento přístup je často využíván v stanovování parazitních kapacit transformátoru [32, 60] a pomocí něj lze získat hodnoty s přesností do 20% [32, 44].

Pro laboratorní, popřípadě výrobní účely je možné demontovat transformátor z nádoby a stanovit postupně mezizávitovou kapacitu vinutí z měření viděné kapacity vyjmutého vinutí z transformátoru (bez jádra). Příspěvek zemní (příčné) kapacity nestíněného vinutí je možné dopočíst rozdílem naměřené celkové svorkové kapacity transformátoru s naměřenou velikostí svorkové kapacity vinutí vyjmutého z nádoby transformátoru. Tímto způsobem lze pokračovat dále a naměřit příspěvky k celkové kapacitě od jednotlivých částí transformátoru:

- a) kapacita vinutí vůči jádru transformátoru (příčná kapacita)
- b) vzájemná kapacita primárního a sekundárního vinutí
- c) kapacita vinutí vůči plášti transformátoru
- d) kapacita vinutí vůči kapacitnímu štítu transformátoru
- e) mezizávitová kapacita (podélná kapacita)
- f) kapacita koncové svorky vinutí vůči zemi

5.4 Výpočet kapacity vinutí vůči jádru transformátoru

Při výpočtu jsem předpokládal ideální kruhový tvar jádra transformátoru a nahradil jsem jednovrstvé vinutí modelem válcového kondenzátoru.



R_{VN} – vzdálenost mezi VN vinutím (středním poloměrem) a středem jádra transformátoru

R_j – poloměr jádra transformátoru

Obrázek 43 – Určení kapacity vinutí vztažené k jádru (analogie s válcovým kondenzátorem)

Při této představě se zanedbává geometrický význam tloušťka vinutí a vzdálenost R_{NN} se uvažuje ke středu mezikružjí NN vinutí. Toto zjednodušení jsem přijal i pro následující odvození. Za předpokladu, že osová délka vinutí l_1 je výrazně větší než R_j , lze stanovit velikost náboje:

$$Q = \tau \cdot l_1 \tag{5.8}$$

kde τ představuje liniovou hustotu náboje. Intenzitu elektrického pole E lze z Gaussova zákona vypočítat pro vzdálenost r od jádra jako:

$$\oiint E dS = \frac{Q}{\epsilon} \tag{5.9}$$

Vzniklé pole předpokládáme homogenní:

$$E \cdot S = \frac{Q}{\epsilon} \tag{5.10}$$

odtud pro intenzitu E platí:

$$E(r) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon r} \tag{5.11}$$

napětí mezi oběma elektrodami:

$$U(r) = \int_{R_j}^{R_{NN}} E(r) dr = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon} \cdot \ln \frac{R_j}{R_{NN}} \tag{5.12}$$

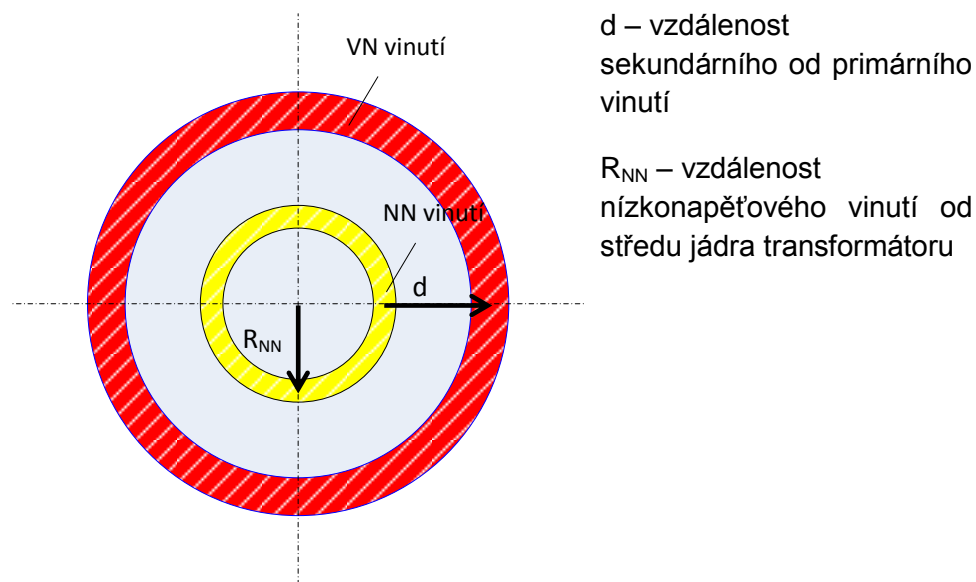
odtud velikost kapacity jádra vůči vinutí C_1 se rovná:

$$C_1 = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{R_{NN}}{R_j}} \tag{5.13}$$

výsledná kapacita je vztažena na jednotku délky $\left(\frac{F}{m}\right)$

5.5 Výpočet vzájemné kapacity primárního a sekundárního vinutí a kapacity vinutí vůči štítu

Pro výpočet vzájemné kapacity VN a NN vinutí jsem postupoval analogicky a vyšel jsem z geometrického uspořádání elektrod jako u válcového kondenzátoru.



Obrázek 44 – Výpočet velikosti vzájemné kapacity obou vinutí transformátoru (válcový kondenzátor)

Kapacitu stanovíme úpravou vzorce (5.13), kde za vzdálenost vnitřní elektrody od středu dosadíme R_{NN} a za vzdálenost vnější elektrody dosadíme $R_{NN} + d$.

$$C_{12} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\left(1 + \frac{d}{R_{NN}}\right)} \quad (5.14)$$

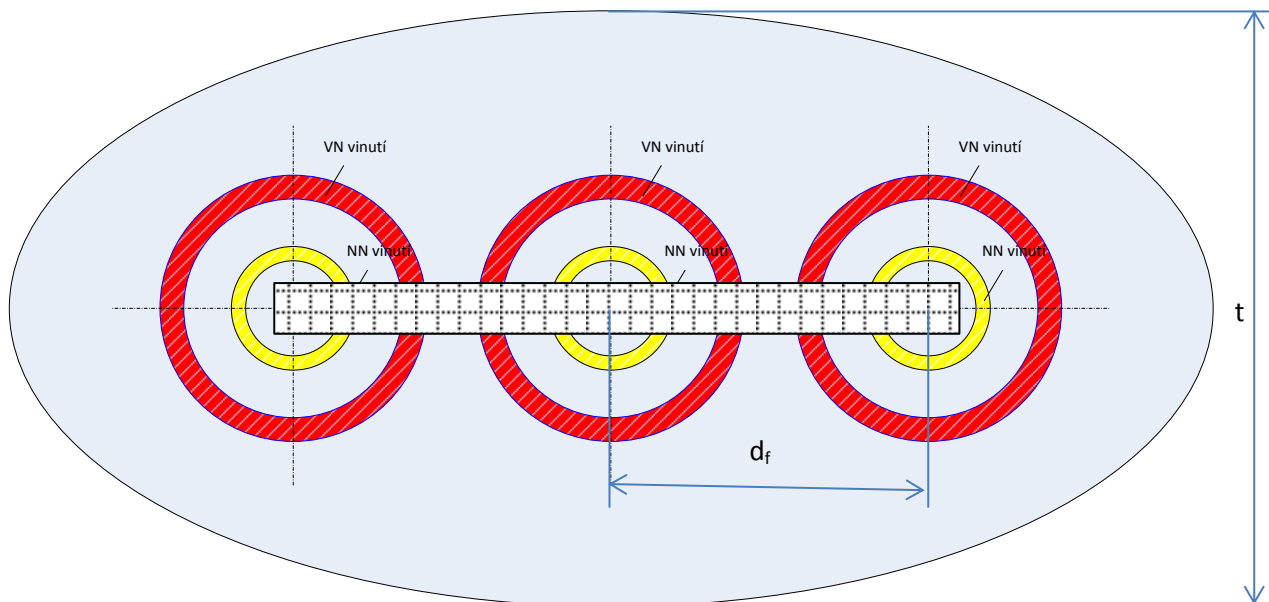
Velikost vzájemné kapacity z rovnice (5.14) je opět vztažena na jednotku délky ($F \cdot m^{-1}$) a rovnice se shoduje s výpočtem odvozeným v článku [32]. Pro velké vzdálenosti vinutí od jádra transformátoru lze uvažovat zjednodušený výpočet a využít geometrie deskového kondenzátoru.

$$C_{12} = 2\pi\varepsilon \cdot \frac{R_{NN}}{d} \quad (5.15)$$

Kapacitu vinutí vůči štítu stanovíme obdobným způsobem, jen vzdálenost d bude představovat vzdálenost vinutí od stínění a za R_{VN}

5.6 Výpočet kapacity vinutí vůči plášti transformátoru

U stanovování velikosti kapacity vinutí vůči plášti transformátoru připouštím největší chybu. Obecný výpočet pro různé tvary plášťů transformátorů neexistuje. Pro trojfázové transformátory představil Bjerkan ve svém článku následující metodu [60].



Obrázek 45 – Přehled geometrie trojfázového transformátoru pro výpočet kapacit

Kapacitu prostřední fáze lze vyjádřit s uvažováním redukčního činitele 0,25, jelikož stěny pláště jsou rovné plochy [60]:

$$C'_2 = 0,25 \cdot \frac{\varepsilon\pi \cdot (h+d_f-d_0)}{\ln\left[\frac{t}{d_0} + \sqrt{\frac{t^2}{d_0^2} - 1}\right]} \quad (5.16)$$

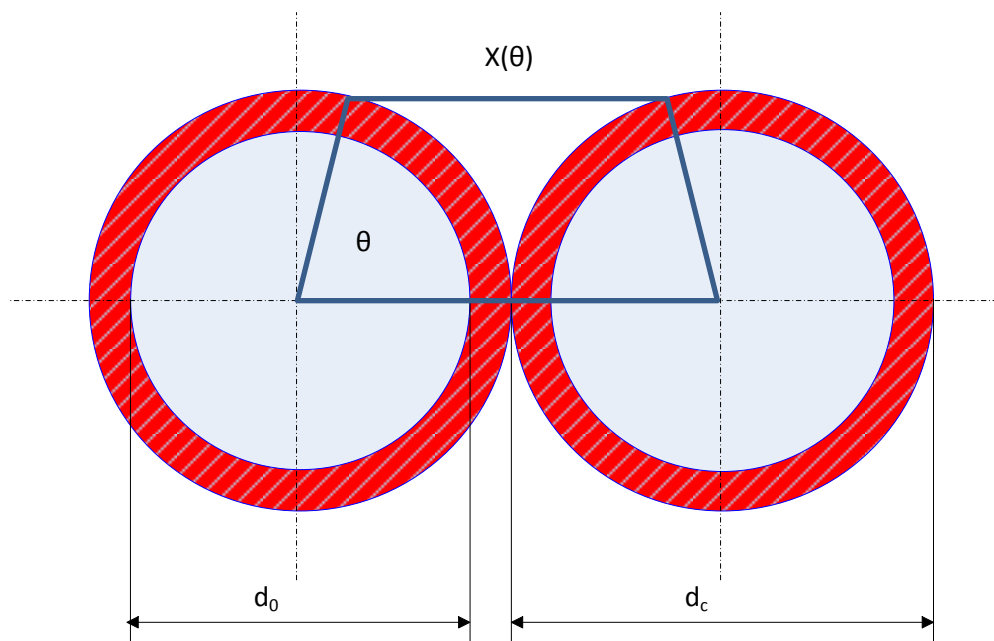
kde h představuje osovou délku vinutí a velikost kapacity zde není vztažena na jednotku délky vinutí. Pro kapacity krajních fází platí [60]:

$$C''_2 = 0,75 \cdot \frac{2\pi\varepsilon \cdot (h+d_f-d_0)}{\ln\frac{d_n}{d_0}} \quad (5.17)$$

Při stanovování kapacity vinutí vůči plášti transformátoru je výhodnější, dovolují-li to podmínky, kapacitu vypočítat z rozdílu změřené kapacity vinutí uvnitř a vně nádoby transformátoru.

5.7 Mezizávitová kapacita (podélná kapacita)

Metodou stanovení velikosti podélné kapacity se zabývá článek [44]. Z řady závitů, náležících jedné vrstvě vinutí, jsou vyjmuty dva elementární závity (obrázek číslo 45), mezi kterými je počítána jejich vzájemná kapacita.



Obrázek 46 – Průběh elektrických siločar mezi závitů jedné vrstvy

Siločáry u takového uspořádání prochází nejprve přes tenkou vrstvu izolace prvního závitu, dále vzduchovou mezerou a opět se noří přes izolaci druhého závitu do vodiče (obrázek číslo 45). Je-li výrazně menší tloušťka izolace, než je celkový poloměr jednoho závitu, lze předpokládat, že siločáry vstupují kolmo k povrchu vodiče. Stanovení cesty siločáry ve vzduchové mezeře je výrazně složitější, a proto Massarini a Kazimierczuk [44] předpokládali nejkratší možnou cestu siločar. Výsledná kapacita se skládá ze sériového spojení dvou kapacit odpovídajících izolační vrstvě závitu a jedné kapacity vzduchové vrstvy. Na základě těchto předpokladů byl odvozen vztah pro celkovou mezizávitovou kapacitu vztahenou na jednotku délky [44]:

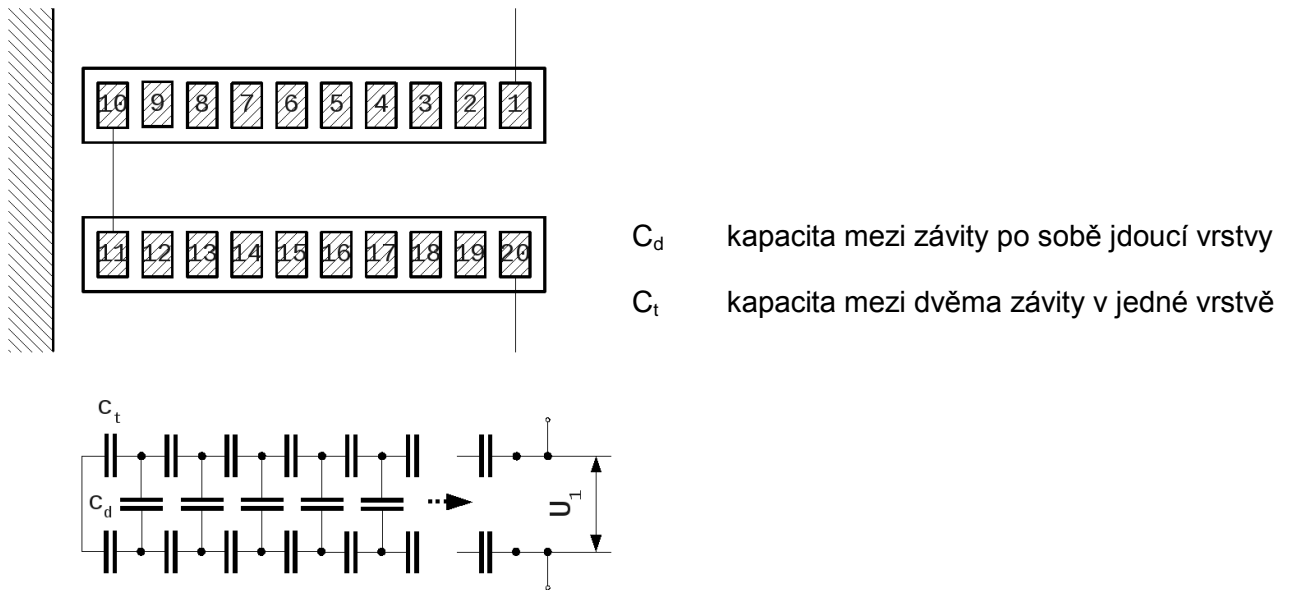
$$K = \varepsilon_0 \left[\frac{\varepsilon_r \theta^*}{\ln \frac{d_0}{d_c}} + \cot \frac{\theta^*}{2} - \cot \frac{\pi}{12} \right], \quad (5.18)$$

kde

$$\theta^* = \cos^{-1} \left[1 - \frac{\ln \frac{d_0}{d_c}}{\varepsilon_r} \right] \quad (5.19)$$

5.8 Výpočet kapacit u polohových vinutí

Výpočet je dle [29, 30, 66] naznačen pro dvojité polohové vinutí



Obrázek 47 – Naznačení dvou vrstev polohového vinutí

Ekvivalentní mezizávitová kapacita se může stanovit podle [29, 30, 66]:

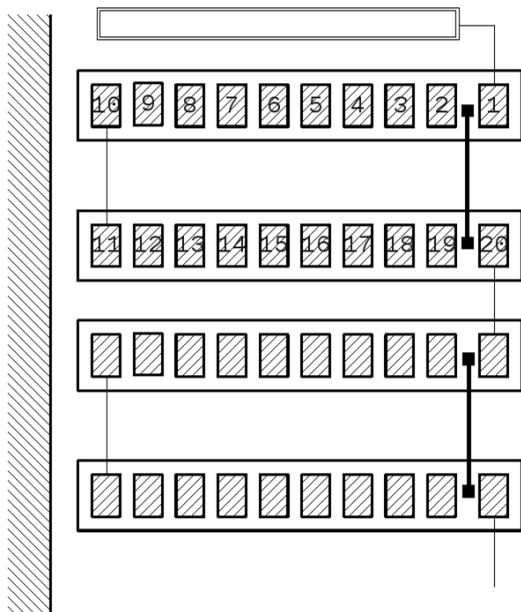
$$C_{tr} = \frac{C_t}{n^2} \cdot (n - 2) \quad (5.20)$$

Ekvivalentní mezivrstvá kapacita podle [29, 30, 66]:

$$C_{dr} = \frac{n}{6} C_d \quad (5.21)$$

Celková ekvivalentní kapacita dvou vrstev je součtem mezizávitové a mezivrstvé kapacity:

$$C_s = \frac{n}{C_d} + \frac{n-2}{n^2} C_t \quad (5.22)$$



Obrázek 48 – Vložení elektrostatického štítu mezi 1. a 2. závit první vrstvy a 19. a 20. závit druhé vrstvy

Pro mezizávitovou ekvivalentní kapacitu bude dle [29, 30, 66] platit:

$$C_s' = \frac{n}{6} C_d + \frac{n^2 - n - 2}{n^2} C_t \quad (5.23)$$

$$C_s'' = \frac{n}{C_d} + \frac{2n^2 - 8n + 6}{n^2} C_t \quad (5.24)$$

$$C_s < C_s' < C_s'' \quad (5.25)$$

6 Iterace atmosférického přepětí vzniklého účinkem bleskového výboje pomocí matematického modelu

Předpokladem pro ověření modelovaných jevů je nejenom správná volba metody, ale především co nejpřesněji stanovená vstupní data. Při přímém nárazu transformátoru bleskovým výbojem je nemožné šířící se impulz namodelovat ve shodě s realitou.

Podle [67–70] byl mezinárodně přijat zkušební impulz, který se používá pro obecné zkoušení odolnosti zařízení vůči přepětí. Obecně se rozlišují tři typy impulzního namáhání, atmosférický impulz, spínací impulz a impulz s useknutou dobou čela nebo týlu (dříve kusý impulz).

Přímý úder bleskového výboje způsobují dva základní typy blesků:

- a) sestupné blesky začínající sestupným lídrem z mraku k zemi,
- b) vzestupné blesky začínající vzestupným lídrem z uzemněné stavby k mraku.

Sestupné blesky se vyskytují většinou v rovinatých územích s úderem do nižších staveb, zatímco vzestupné blesky jsou dominantní pro exponované anebo vyšší stavby. S jejich efektivní výškou roste pravděpodobnost přímého úderu do objektu (viz IEC 62305-2:2010, příloha A) a mění se fyzikální podmínky.

Bleskový proud se skládá z jednoho nebo více různých dílčích výbojů:

- a) výbojů s dobou trvání kratší než 2 ms,
- b) dlouhých výbojů s dobou trvání delší než 2 ms.

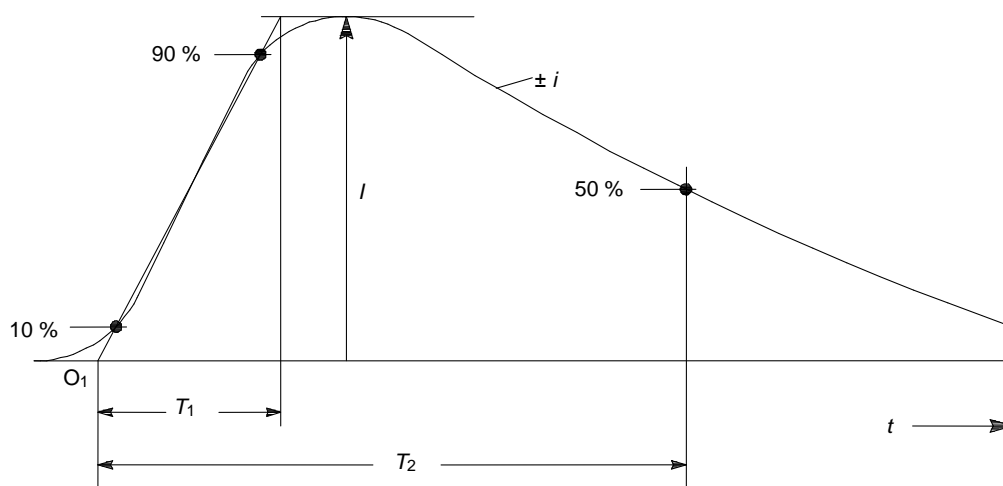
Přesnější aproximaci bleskového výboje popisuje ČSN EN 62305-1:2010 [69].

Atmosférická přepětí vznikají v důsledku přímého úderu blesku do vedení spojeného galvanicky se sledovaným objektem, ale také prostřednictvím induktivních vazeb vedení a místa postiženého elektrickým výbojem. Úderem blesku do vodiče vedení, zpětným přeskokem nebo induktivním působením proudu blesku dojde ke specifickému rozložení napětí. Z tohoto místa se podle něj šíří přibližně rychlostí světla na obě strany vedení napěťové impulzy, které jsou zdrojem přepětí ohrožující sledované zařízení. Impulzní přepětí mohou být klasifikována podle počtu zasažených fází na jedno-, dvou- a vícefázová. Různé

druhy přepětových impulzů interagují různým způsobem s vinutím transformátoru (viz kapitola 4.3 a 4.4).

Atmosférická přepětí jsou často příznačná stejnosměrným průběhem, který má ostře strmý vzrůst napětí (čelo impulzu, popřípadě náběžná hrana impulzu) a pozvolný pokles (těl impulzu, popřípadě spádová hrana impulzu). Přepětové impulzy jsou determinovány vrcholovou hodnotou napětí (U_m), dobou čela (T_1) a dobou půltýlu (T_2). Existence velkého množství variací atmosférických přepětí vedl Mezinárodní elektrotechnickou standardizační komisi – *International Electrotechnical Commission (IEC)* – ke stanovení normovaného jednotného zkušebnímu impulzu 1,2/50 μ s [69].

V současné době je tento impulz zaveden v normě ČSN EN 62305-1 jako:



Obrázek 49 – Normovaný jednotný zkušební impulz 1,2/50 μ s

V analytických úvahách je možné tvar impulzu 1,2/50 μ s aproximovat vztahem:

$$u(t) = U_0 \cdot (e^{-a \cdot t} - e^{-b \cdot t}),$$

kde a a b jsou konstanty charakterizující náběžnou a spádovou hranu impulzu, pro jednotkový impulz 1,2/50 μ s se uvádí v [6] a $U_0 = 1,038$

$$a = 15000 \text{ s}^{-1} \text{ a } b = 2470000 \text{ s}^{-1}, \quad (6.1)$$

podobně je možné simulovat pro:

- a) náběžnou hranu,
- b) pro spádovou hranu signálu

$$\text{a) } u(t) = \frac{U_{max} (1 - \cos 2,6 \cdot t)}{2} \text{ pro } 0 \leq t \leq t_{forehead} \quad (6.2)$$

$$\text{b) } u(t) = U_{max} \cdot e^{[-0,014 \cdot (t - t_{forehead})]} \quad (6.3)$$

Pro impulz, jehož tůl je useknutý v čase $\tau = 3 \mu\text{s}$, platí:

$$\begin{aligned} u(t) &= U_{01} \cdot (e^{-a \cdot t} - e^{-b \cdot t}), \text{ pro } 0 \leq t < \tau \text{ a} \\ u(t) &= U_{01} \cdot (e^{-a \cdot t} - e^{-b \cdot t}) - U_{02} \cdot (e^{-c \cdot (t - \tau)} - e^{-d \cdot (t - \tau)}), \text{ pro } t \geq \tau \end{aligned} \quad (6.5)$$

s konstantami:

$$U_{01} = 1,038$$

$$U_{02} = 0,986$$

$$a = 15000 \text{ s}^{-1}$$

$$c = 15000 \text{ s}^{-1}$$

$$b = 2470000 \text{ s}^{-1}$$

$$d = 16000000 \text{ s}^{-1}$$

Pro spínací impulz použitý ve studii jsem stanovil následující parametry:

$$U_{01} = 1,06$$

$$U_{02} = 0,8$$

$$a = 500 \text{ s}^{-1}$$

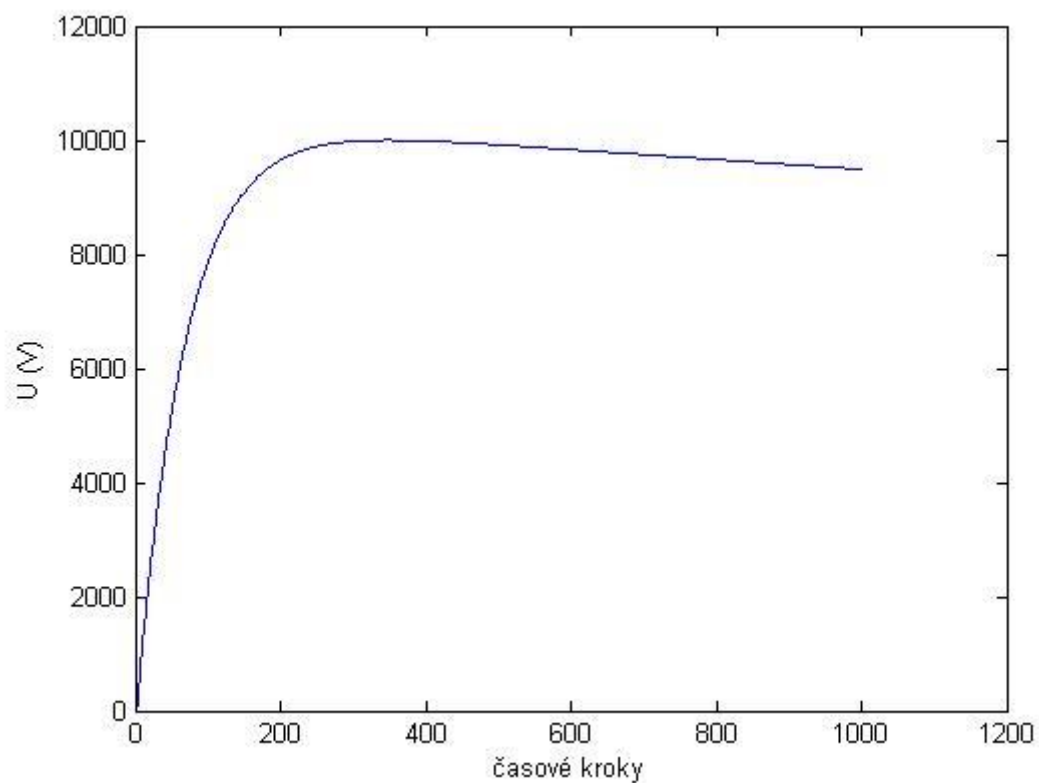
$$c = 500 \text{ s}^{-1}$$

$$b = 50000 \text{ s}^{-1}$$

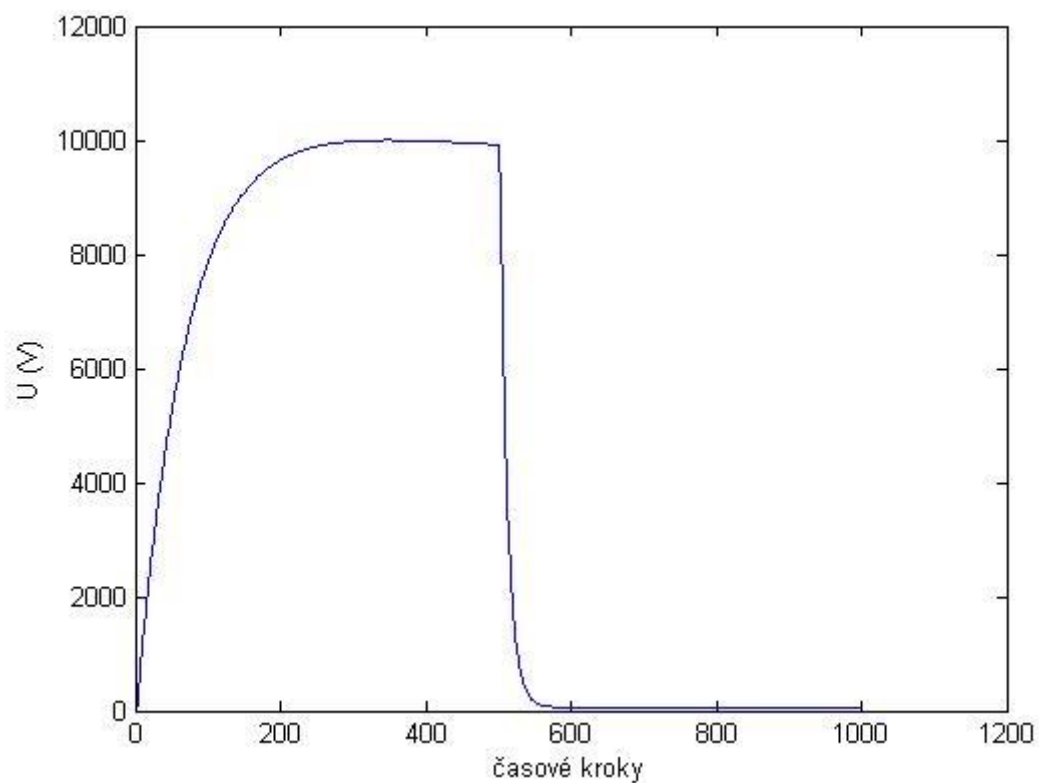
$$d = 10000 \text{ s}^{-1}$$

Pro $\tau = 800 \mu\text{s}$ jsou dle obrázku číslo 45 $T_1 = 60 \mu\text{s}$, $T_{max} = 100 \mu\text{s}$, $T_2 = 1050 \mu\text{s}$ a $T_{90\%} = 300 \mu\text{s}$.

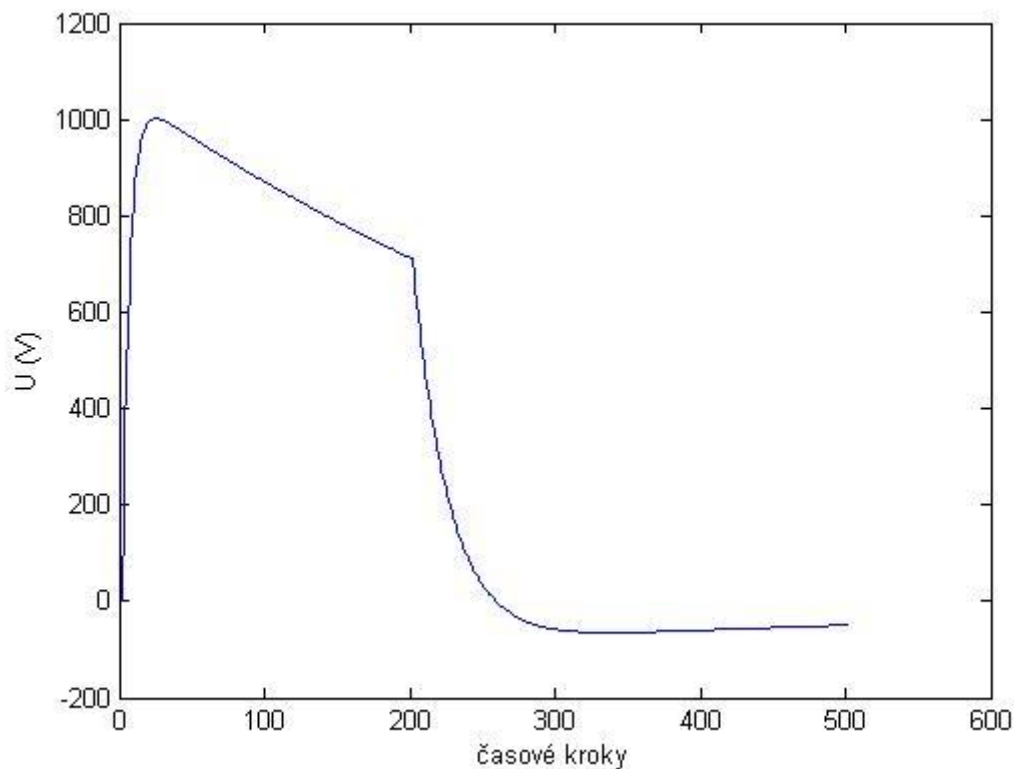
Ve studii používané průběhy:



Obrázek 50 – Zkušební impulz 1,2/50 μ s



Obrázek 51 – Zkušební impulz 1,2/50 μ s useknutý v týlu po $\tau = 3 \mu$ s



Obrázek 52 – Spínací impuls 100/1050 μs

7 Výpočet numerické chyby prostřednictvím Richardsonovy extrapolace

Buď U přesné řešení a $U(h)$ přibližné řešení závislé na kroku h , přičemž U a $U(h)$ jsou matice.

Chtěli bychom získat odhad typu:

$$\|U - U(h)\| \leq ch^\alpha, \quad (7.1)$$

kde $\alpha > 0, c > 0$

Lze předpokládat, že

$$U - U(h) = a_0h^{\alpha_0} + a_1h^{\alpha_1} + a_2h^{\alpha_2} + \dots, \quad (7.2)$$

kde a_0, a_1, a_2 jsou matice koeficientů a $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots > 0$. Obecně závisí a_0, a_1, a_2 na datech úlohy a přesném řešení U . Tedy i konstanta c v (7.1) bude závislá na U , které neznáme, a tedy c nemůžeme spočítat.

Dále lze napsat:

$$U - U(h) = a_0h^{\alpha_0} + O(h^{\alpha_1}) \quad (7.3)$$

$$U - U\left(\frac{h}{2}\right) = a_0 \left(\frac{h}{2}\right)^{\alpha_0} + O(h^{\alpha_1}) \quad (7.4)$$

Rovnici (7.2) přenásobíme hodnotou 2^{α_0} a odečteme rovnici (7.1):

$$(2^{\alpha_0} - 1)U = 2^{\alpha_0}U\left(\frac{h}{2}\right) - U(h) + O(h^{\alpha_1}) \quad (7.5)$$

Analogicky můžeme získat:

$$(U^{\alpha_0} - 1)U = 4^{\alpha_0}U\left(\frac{h}{4}\right) - U(h) + O(h^{\alpha_1}) \quad (7.6)$$

Porovnáme-li obě rovnosti, dostaneme po jednotlivých úpravách identitu.

$$2^{\alpha_0} \left(U\left(\frac{h}{2}\right) - U\left(\frac{h}{4}\right) \right) = U(h) - U\left(\frac{h}{2}\right) + O(h^{\alpha_1}) \quad (7.7)$$

Za použití trojúhelníkové nerovnosti dostaneme

$$2^{\alpha_0} \left| U\left(\frac{h}{2}\right) - U\left(\frac{h}{4}\right) \right| = \left| U(h) - U\left(\frac{h}{2}\right) + O(h^{\alpha_1}) \right| \quad (7.8)$$

a získáme aproximaci

$$2^{\alpha_0} \left\| U\left(\frac{h}{2}\right) - U\left(\frac{h}{4}\right) \right\| \approx \left\| U(h) - U\left(\frac{h}{2}\right) + O(h^{\alpha_1}) \right\|, \quad (7.9)$$

kde $\| \cdot \|$ značí Eukleidovskou maticovou normu.

K aproximaci řádu konvergence α_0 jsem se přiblížil výrazem:

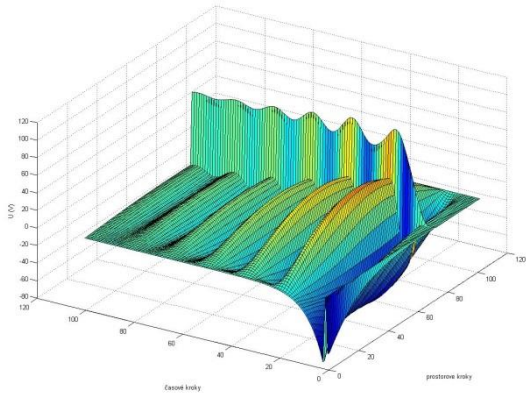
$$\alpha_0 \approx \frac{1}{\log 2} \log \left(\frac{\left\| U(h) - U\left(\frac{h}{2}\right) + O(h^{\alpha_1}) \right\|}{\left\| U\left(\frac{h}{2}\right) - U\left(\frac{h}{4}\right) \right\|} \right) \quad (7.10)$$

n/t	α_0
404/400	0,6542
808/800	0,2635
1616/1600	0,6479
3232/3200	0,4252

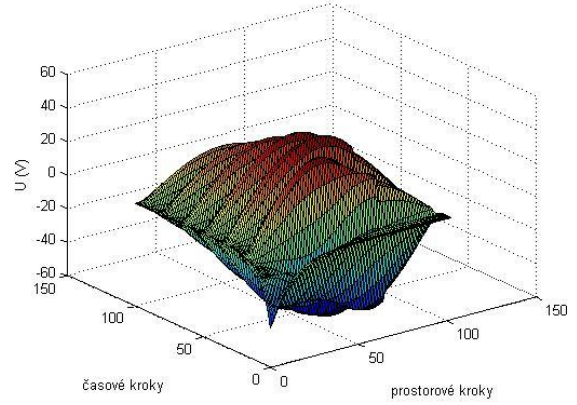
Tabulka 3 – Určení chyby modelovaných příkladů pro useknutý impuls $1,2/50 \mu\text{s}$ pro vinutí narážené ve všech fázích a uzemněným uzlem, $\alpha_0 \in (0,1)$

n/t	α_0
404/400	0,2872
808/800	0,4849
1616/1600	0,8426
3232/3200	0,3191

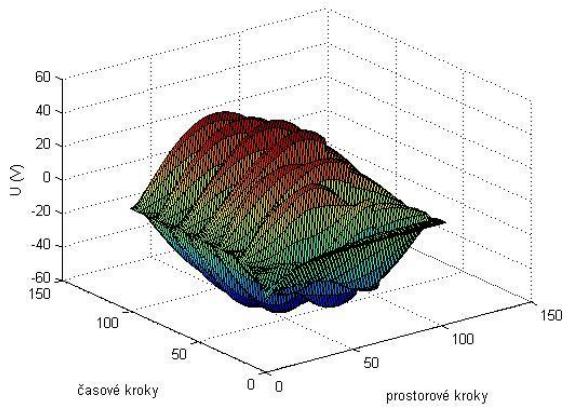
Tabulka 4 – Určení chyby modelovaných příkladů pro neuseknutý impuls $1,2/50 \mu\text{s}$ pro vinutí narážené ve všech fázích a uzemněným uzlem, $\alpha_0 \in (0,1)$



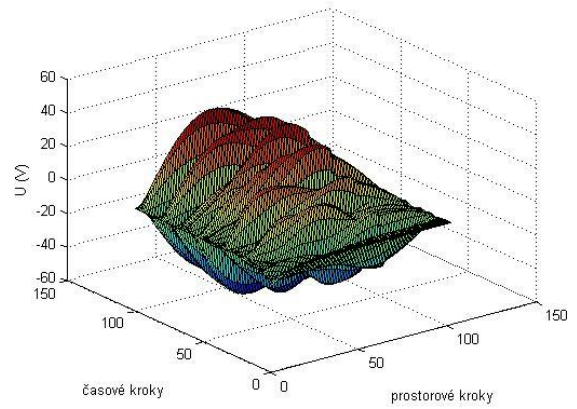
a)



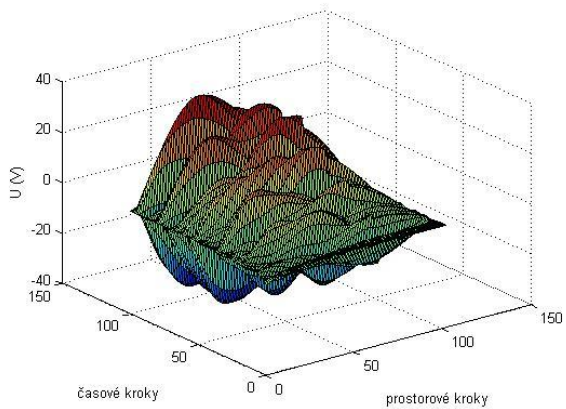
b)



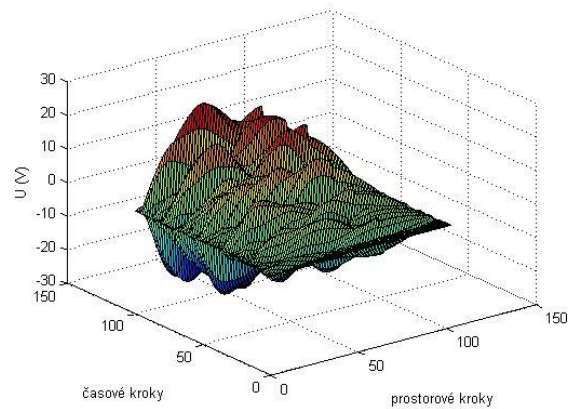
c)



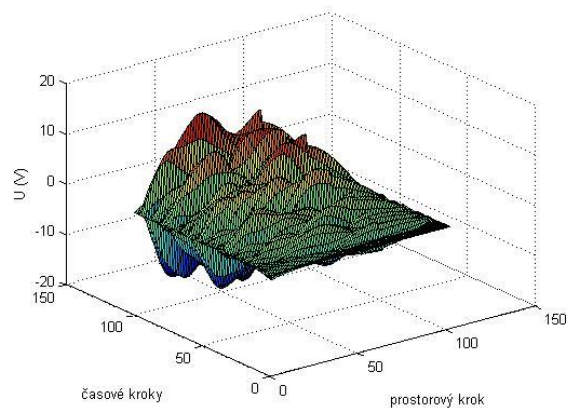
d)



e)



f)



g)

Obrázek 53 – Graficky zobrazený rozdíl $U(h) - U\left(\frac{h}{2}\right)$ pro trojpólový náraz plným impulzem $1,2/50 \mu\text{s}$ u trojfázového transformátoru zapojeného do hvězdy s uzemněným uzlem vinutí, po řadě pro a) $U(1) - U(2)$, b) $U(2) - U(4)$, c) $U(4) - U(8)$, d) $U(8) - U(16)$, e) $U(16) - U(32)$, f) $U(32) - U(64)$, g) $U(128) - U(64)$

Závěrem kapitoly uvádím grafický rozdíl $U(h) - U\left(\frac{h}{2}\right)$ pro různá h . I když je z nich vidět, že řešení konvergují, neznamená to ve výsledku, že ke správnému fyzikálnímu řešení porovnatelnému měřením (viz kapitola o problematice měření impulzních dějů).

8 Závěr

Cílem disertační práce bylo navrhnout a ověřit metodu pro zjišťování rozložení přepětového impulsu podél vinutí axiální osy transformátoru. Základním stavebním kamenem se stal element délkového vinutí navrženého K. W. Wagnerem, ale ten posloužil pouze jako vstupní představa o možnosti chápání vinutí jako obvodu s rozprostřenými parametry. V rámci práce jsem sestavil model trojfázového dvojvinuťového transformátoru, který kromě klasických příčných (C) a podélných (K, L a R) prvků respektoval také vliv vzájemné magnetické vazby (M) mezi jednotlivými fázemi a akceptoval i vzájemnou indukčnost mezi jednotlivými závitů a kapacitní vazby s ostatními fázemi. Pro takto složený model jsem sestavil analytické vyjádření, pro které jsem zvolil numerickou metodu založenou na principu konečných diferencí v devítibodovém schématu.

Řešením jsem dostal možnost analyzovat jednoduchou válcovou cívku s konstantními koeficienty a zjišťovat rozložení impulzního napětí v kterémkoliv délkovém elementu vinutí. V návaznosti na tento primární problém jsem rozšířil představu o potřebu plynulého řetězení cívek, které nemají konstantní parametry a jsou řazeny do sériových vazeb. Řešení přineslo eventualitu analyzovat kotoučové cívky, které jsou spojeny sériovou propojkou, ale neakceptoval jsem u nich vzájemné ovlivnění.

Po ověření použitelnosti numerické metody jsem se v dalších částech práce zaměřil na analýzu vinutí, která je různými metodami odolnější vůči impulznímu namáhání. Jednalo se o cívky využívající principu vrstvení jednotlivých závitů. A to buď do vazby, která tvoří těsný nerozebíratelný celek vinutí realizovaný přímým navinutím z několika vrstev izolovaného vodiče, kdy vodič je po vrstvách navíjen od začátku vinutí ke konci a opět od konce k počátku. Takto realizované vinutí se u VN transformátorů příliš nepoužívají, protože převládají u transformátorů pro malé výkony a specifické aplikace. Nebo byl vytvořen důležitější model vinutí, respektující reálnou situaci vícepolohového rozložení, které je navíjeno po částech ve válcích, kdy vždy konec jedné cívky navazuje na začátek nové vrstvy. Tento model zahrnuje nejreálnější představu o celkovém akceptování parametrů vinutí transformátoru. Všechny modely jsou konstruovány tak, aby byly rozšiřitelné pro konkrétní transformátor. Aplikace, pro které jsou VN transformátory konstruovány, neumožňují vytvoření univerzální metody, postihující všechny vazby. Analýza odolnosti transformátorového vinutí vůči přepětí tak podléhá modelování dílčích částí, které se musí vhodným způsobem propojit.

Hlavní přínos disertační práce kromě numerického řešení diferenciálních parciálních rovnic dosahujícího čtvrtého řádu hyperbolického typu, na které model vede, vidím především v reálnějším přístupu k transformátorovému vinutí, než bylo dosud možné za pomoci vyjádření pouze počátečního a koncového rozložení napětí modelovaného pro jednotkový impulz.

V práci akceptuji tři možné stavy napěťového impulzu – krátký atmosférický impulz (normalizovaný impulz 1,2/50), dlouhý (spínací) impulz a jako poslední příklad aplikuji useknutý impulz v týlu po době 3 μ s. Useknutý impulz jsem využil především pro transformátory, které jsou chráněny před přímým přepětovým impulzem některým z mnoha typů omezovačů. V disertační práci jsem používal reálná konstrukční data transformátorů, ze kterých jsem sestavoval modely a ověřoval jejich řešitelnost.

V poslední části disertační práce jsem ověřoval chybu numerického řešení založené na principu půlení intervalu. Na jejím základě jsem se všechny tři hlavní modely snažil optimalizovat a výsledky jsou prezentovány v souhrnné tabulce.

Výsledky práce jsem se snažil ověřit měřením na modelu reálného transformátorového vinutí. Výsledky této části práce přinášejí s ohledem na složitost validního snímání rozložení napětí podél axiální osy transformátoru spíše informativní poznatky. Mým cílem nebylo prohlubovat experimentální metody ověřování rozložení napětí podél vinutí. Obtížnost získání správných výsledků měřením vidím především v mnoha restrikcích, které ověřování provázejí. Patří k nim určitě nutnost vytažení vinutí transformátoru z nádoby (odstranění skutečného prostředí – například oleje, zároveň odstranění uzemněného obalu), omezení se na nebandážované body, omezení počtu snímacích bodů (počtem kanálů osciloskopu), nemožnost používání vysokých hladin zkušebního napětí, atd.

Model je citlivý na vstupní data, která ovlivňují podmíněnost matic pro numerická řešení. V celém modelu jsou akceptovány parazitní prvky, jejichž hodnoty se řádově pohybují v rozmezí 10^{-6} – 10^{-13} . Okrajově jsem se v práci věnoval i determinaci těchto parametrů, i když většina navržených metod je zatížena chybou. V této práci jsem vycházel při jejich určování z postupů, které byly čerpány z odborné literatury posledních deseti let.

Pro zlepšení odolnosti transformátorů vůči přepětí jsem sledoval význam nastavení poměru kapacity podélné a příčné a modelem dokládám možnost jejich optimalizace do lineárního rozložení bez vnitřních kmitů.

Předložená disertační práce si neklade za cíl být vyčerpávající studií problematiky ochrany transformátorových vinutí před přímými účinky přepětí, ale poskytuje stabilní model, který může být komerčně využíván při ověřování odolnosti již hotových vinutí před přepětím, respektive může pomoci již při samotném projektování a konstrukci.

9 Resumé

9.1 Impulse interactions in power transformer windings

The aim of the thesis is to design and test a method for determining the distribution of surge pulses along the winding axis of a transformer. The cornerstone of the work is the element of length winding proposed by K. W. Wagner, but this only served as an idea for understanding the winding as a circuit with distributed parameters. As part of the work I compiled a model of a three-phase dual-winding transformer, which in addition to conventional diagonal (C) and longitudinal (K, L and R) elements also respects the effect of mutual magnetic coupling (M) between the individual phases and accepts the mutual inductance of the coils and the capacitive coupling with other phases. For the model I formulated an analytical expression for which I have chosen a numerical method based on the principle of finite differences in a nine-point scheme.

This solution enabled me to analyze a simple cylindrical coil with a constant coefficient and to determine the distribution of the impulse voltage along any length of the element winding. In relation to this primary problem I expanded on the idea of the need to have continuous chaining coils, which do not have constant parameters and are chained to series links. The solution also enabled me to analyze circular coils which are connected by a series jumper, but I did not accept their mutual interaction.

After verifying the applicability of the numerical method I focused in other parts of the work on an analysis of the winding, which is more resistant to pulse stress by using different methods. This is based on the principle of layering the individual coils into couplings, which form tight windings made by directly winding several layers of insulated wire, where the wire is wound in layers from the beginning of the winding to the end and back from the end to the beginning. This type of winding is not commonly used in HV transformers because they are more common in low power transformers and in specific applications, or a more important winding model is created respecting the real situation of a multi-position layout which is wound on reels, where the end of one coil is linked to the beginning of a new layer. This model provides the most realistic representation of the overall acceptance of the parameters of transformer winding. All of the models are designed to be modified for a specific transformer. The applications for which HV transformers are designed do not allow the creation of a universal method involving all of the couplings. The analysis of the resistance of transformer windings to surges was subject to the modeling of components which must be appropriately connected.

The main contribution of the thesis, besides the numerical solution of differential partial equations achieving a hyperbolic fourth order which is demonstrated by the model, is a more realistic approach to transformer windings than was previously possible using an expression of the start and end of the distribution stress modeled for a unit impulse.

In the work I accepted three possible states of voltage pulse - a short atmospheric pulse (normalized pulse 1.2/50), long (switching) pulse and as the last example I apply a clipped pulse at the back for a duration of 3 μ s. The clipped pulse is used mainly for transformers which are protected from a direct surge wave by one of the many types of limiters. In the thesis I used real transformer construction data, from which I compiled models and tested their solvability.

In the last part of the thesis I verified the error of the numerical solution based on the principle of interval bisection. On the basis of this I attempted to optimize all three main models and the results are presented in the summary table.

I have attempted to verify the results of the work by measuring them on a model of a real transformer winding. The results of this part of the work provide knowledge of an informative nature considering the complexity of measuring the stress distribution along the axial of the transformer. My aim was not to deepen the experimental methods for verifying the voltage distribution along the winding. The difficulty in obtaining the correct measurement results is mainly in the many restrictions that accompany the verification. These include the need to remove the transformer winding from the container (removing the actual environment - such as oil, while removing the grounded cover), restrictions with unwrapped points, limits in the number of measurement points (the number of oscilloscope channels), and inability to use high levels of test voltage, etc.

The model is sensitive to the input data which affect the conditionality of the matrices for the numerical solutions. The entire model accepts parasitic elements whose values are in the range of 10^{-6} – 10^{-13} . I paid a certain amount of attention to the determination of these parameters in the work, although most of the proposed methods are flawed. In this work, I used procedures taken from the scientific literature from the last ten years.

To improve the resistance of the transformer against surges I took into account the importance of setting the ratio of the longitudinal and diagonal capacity and using the model I demonstrated how to optimize them into a linear distribution without internal oscillations.

The presented thesis does not aim to be an exhaustive study of the issue of protection of transformer winding against the effects of surges, but to provide a stable model which can be commercially utilized to verify the resistance of ready-made windings to power surges or to support their design and construction.

9.2 Impulsinteraktionen in den Wicklungen von Leistungstransformatoren

Das Ziel der Dissertationsarbeit bestand im Entwurf und der Überprüfung der Methode zur Sicherstellung der Aufteilung des Überspannungsimpulses entlang der Wicklung der axialen Achse des Transformators. Als Grundbaustein bestand das Element mit Längswicklung, das von K. W. Wagner entwickelt wurde. Dieses diente jedoch nur als eingehende Vorstellung bezüglich der Verständnismöglichkeit für die Wicklung als Schaltkreis mit erweiterten Parametern. Im Rahmen der Arbeit habe ich das Modell eines dreiphasigen doppelt gewickelten Transformators zusammengestellt, das neben den klassischen Querelementen (C) und den Längselementen (K, L und R) auch den Einfluss der gegenseitigen magnetischen Kopplungen (M) unter den einzelnen Phasen berücksichtigt und auch die gegenseitige Induktion zwischen den einzelnen Windungen und die Kapazitätskopplung mit den sonstigen Phasen akzeptiert. Für ein so zusammengestelltes Modell habe ich den analytischen Ausdruck erstellt, für den ich die numerische Methode wählte, die auf dem Prinzip der endgültigen Differenzen im Neunpunktschema basiert.

Aufgrund der Lösung erhielt ich die Möglichkeit der Analyse einer einfachen Zylinderspule mit konstanten Koeffizienten und die Sicherstellung der Aufteilung der Impulsspannung in jedem beliebigen Längenelement der Wicklung. In der Anbindung an dieses Grundproblem habe ich die Vorstellung um den Bedarf der kontinuierlichen Verkettung von Spulen erweitert. Die Spulen haben keine konstanten Parameter und sind in Serienkopplungen verkettet. Die Lösung brachte die Eventualität der Analyse von Scheibenspulen mit sich, die mittels einer seriellen Verbindung verbunden sind, jedoch habe ich eine gegenseitige Beeinflussung dieser Spulen nicht akzeptiert.

Nach Prüfung der Anwendbarkeit der numerischen Methode habe ich mich in den weiteren Teilen der Arbeit auf die Analyse der Wicklung konzentriert, die mittels verschiedener Methoden widerstandsfähiger gegen die Impulslast ist. Es handelte sich um die Spule, die das Prinzip der Schichtung einzelner Windungen verwendet. Dieses erfolgte entweder in der Kopplung, die ein dichtes unzerlegbares Ganzes der Wicklung in direkter Wicklung bestehend aus mehreren Schichten eines isolierten Leiters darstellte, wo der Leiter in Schichten von Anfang bis Ende und zurück gewickelt wurde. Eine so umgesetzte Wicklung wird bei Hochspannungstransformatoren gängig nicht verwendet, denn diese überwiegt bei Transformatoren für eine geringe Leistung und die spezifische Anwendung. Oder es wurde ein wichtigeres Wicklungsmodul erstellt, das die tatsächliche Situation der mehrpoligen Aufteilung respektiert, das in Teilen auf Zylindern gewickelt wird, wobei immer das Ende einer Spule an den Anfang einer neuen Schicht anbindet. Dieses Modul umfasst die der

Realität am nächsten stehende Vorstellung bezüglich der Gesamtakzeptanz der Wicklungsparameter von Transformatoren. Alle Modelle sind so konstruiert, dass diese für konkrete Transformatoren erweiterbar sind. Die Anwendungen, für die Hochspannungstransformatoren konstruiert werden, ermöglichen keine Entwicklung einer universellen Methode, die alle Kopplungen umfassen würde. Die Analyse der Widerstandsfähigkeit der Transformatorenwicklungen gegenüber Überspannung unterliegt somit der Modellierung von Teilabschnitten, die auf geeignete Art und Weise verknüpft werden müssen.

Den Hauptbeitrag der Dissertationsarbeit sehe ich neben der numerischen Lösung der partiellen Differenzialgleichungen, die die vierte Ordnung des hyperbolischen Typs erreichen, zu denen das Modell führt, vor allem im effektiveren Zugang zu den Transformatorenwicklungen, als dieses bisher aufgrund des rechnergestützten Ausdrucks und der modellierten Spannungsendaufteilung für den Einzelimpuls möglich war.

In der Arbeit akzeptiere ich drei mögliche Zustände des Spannungsimpulses – den kurzen atmosphärischen Impuls (Normimpuls 1,2/50), den langen (Schaltimpuls) Impuls und letztendlich als Beispiel die Anwendung des in der Rückflanke gekappten Impulses nach einer Zeitspanne von 3 μ s. Den gekappten Impuls nutzte ich vor allem für Transformatoren, die vor einer direkten Überspannungswelle durch einen der vielen Typen der Begrenzungselemente geschützt wird. In der Dissertationsarbeit habe ich tatsächliche Konstruktionsdaten für Transformatoren verwendet, aus denen ich Modelle erstellte und deren Lösbarkeit prüfte.

Im letzten Teile der Dissertationsarbeit habe ich den Fehler der numerischen Lösung basierend auf dem Prinzip der Intervallhalbierung angewendet. Auf deren Grundlage habe ich versucht, alle drei Hauptmodelle zu optimieren und die Ergebnisse werden in der zusammenfassenden Tabelle präsentiert.

Die Ergebnisse der Arbeit habe ich versucht, mittels der Messungen am Modell einer tatsächlichen Transformatorwicklung zu überprüfen. Die Ergebnisse dieses Teils der Arbeit sind aufgrund der Komplexität der gültigen Aufnahme der Spannungsaufteilung entlang der axialen Achse des Transformators eher informativen Charakters. Mein Ziel bestand nicht in der Vertiefung der experimentellen Methode zur Überprüfung der Spannungsaufteilung entlang der Wicklungen. Die Schwierigkeit bezüglich der Erlangung korrekter Ergebnisse basierend auf Messungen sehe ich vor allem in den unzähligen Restriktionen, die die Überprüfung begleiten. Zu diesen gehört sicherlich die Notwendigkeit der Entnahme der

Transformatorwicklung aus dem Behältnis (Entfernung des tatsächlichen Umfelds - z. B. des Öls, parallel die Beseitigung der Behältniserdung), die Einschränkung nur auf die bandagierten Punkte, die Einschränkung hinsichtlich der Anzahl von Aufnahmepunkten (aufgrund der Oszilloskopkanalanzahl), der unmöglichen Verwendung hoher Niveaus der Prüfspannung, usw.

Das Modell ist bezüglich der Eingabedaten empfindlich, die von der Matrizenbedingtheit für die numerische Lösung beeinflusst werden. Im gesamten Modell werden parasitäre Elemente akzeptiert, deren Werte sich in der Ordnung 10^{-6} – 10^{-13} bewegen. Am Rande habe ich mich in der Arbeit der Determinierung dieser Parameter befasst, obwohl die meisten entworfenen Methoden durch einen Fehler belastet sind. In dieser Arbeit bin ich bei deren Bestimmung aus den Vorgehensweisen hervorgegangen, die der Fachliteratur der letzten zehn Jahren entnommen wurden.

Zur Verbesserung der Widerstandsfähigkeit von Transformatoren gegen die Überspannung habe ich die Bedeutung der Einstellung des Verhältnisses von Längs- und Querkapazität verfolgt und mittels des Modells weise ich die Möglichkeit derer Optimierung zur linearen Aufteilung ohne interne Schwingungen nach.

Die vorgelegte Dissertationsarbeit, hat nicht das Ziel eine ausschöpfende Studie der Problematik des Schutzes von Wicklungen der Transformatoren vor der direkten Wirkung der Überspannung zu sein, sondern diese stellt ein stabiles Modell zur Verfügung, das kommerziell bei der Überprüfung der Widerstandsfähigkeit bereits fertiger Wicklungen vor Überspannung genutzt werden kann, bzw. es kann bei der eigentlichen Projektierung und Konstruktion als Hilfsmittel zum Einsatz kommen.

9.3 Les pulsations dans les enroulement des transformateurs de puissance

L'objectif de ma thèse a été de proposer et de contrôler la méthode de vérification de la distribution des impulsions de surtension le long de l'axe axial d'enroulement du transformateur. La pierre de base a été l'élément d'enroulement proposé par K. W. Wagner, qui a servi uniquement à concevoir la possibilité d'interpréter l'enroulement comme un circuit avec paramètres étalés. Dans le cadre du travail, j'ai construit un modèle de transformateur à double enroulement triphasé qui outre les éléments classiques transversaux (C) et longitudinaux (K, L et R) respectait également l'influence du rapport magnétique mutuel (M) entre les différentes phases et acceptait l'induction mutuelle entre les différentes spires et les rapports de capacité avec les autres phases. Pour ce modèle, j'ai conçu un avis analytique pour lequel j'ai choisi une méthode numérique fondée sur le principe des différences finales dans un schéma de neuf points.

J'ai eu la possibilité d'analyser une bobine cylindrique simple avec coefficients constants et de vérifier la répartition des impulsions sur tous les éléments de longueur de l'enroulement. Suite à cette question primaire, j'ai élargi l'idée du besoin d'enchaînement continu des bobines sans paramètres concrets et avec enchaînement en série. J'ai pu analyser les bobines à plateaux réunies par connexion en série mais je n'ai pas accepté leur influence mutuelle.

Pour vérifier l'utilisation de la méthode numérique, je me suis concentré plus loin sur l'analyse de l'enroulement qui est plus résistant à la fatigue d'impulsion. Il s'agissait des bobines utilisant le principe des couches des différentes spires. Et ce soit dans un rapport créant un ensemble non démontable de l'enroulement réalisé avec enroulement direct de plusieurs couches de conducteur isolé, celui-ci étant enroulé par couches du début de l'enroulement à la fin et de la fin au début. Ce type d'enroulement n'est pas très utilisé pour les transformateurs HT, mais plutôt pour les transformateurs pour faibles puissances et applications spécifiques. Ou bien un modèle plus important d'enroulement a été conçu, respectant la situation réelle de répartition entre les champs, avec enroulement en parties dans les cylindres où l'extrémité d'une bobine correspond au début d'une nouvelle couche. Ce modèle représente l'idée la plus réelle d'acceptation globale des paramètres de l'enroulement du transformateur. Tous les modèles sont construits afin d'être différenciés pour un transformateur concret. Les applications pour lesquelles les transformateurs HT sont construits ne permettent pas la création de méthodes universelles comprenant toutes les relations. L'analyse de la résistance de l'enroulement de transformateur à la surtension est soumise au modelage des pièces partielles qui doivent être réunies de manière adéquate.

Outre la solution numérique des équations différentielles atteignant le quatrième rang de type hyperbolique selon le modèle, je considère comme l'apport principal de ma thèse l'approche plus réelle de l'enroulement du transformateur, possible jusqu'à présent uniquement à l'aide de l'avis sur la répartition initiale et finale de la tension pour l'unité d'impulsion.

Dans ce travail, j'accepte trois situations possibles d'impulsion de tension – impulsion atmosphérique courte (impulsion normalisée 1,2/50), impulsion longue (de couplage) et application de l'impulsion coupée du front arrière pendant 3 μ s. J'ai utilisé l'impulsion coupée notamment pour les transformateurs protégés contre la vague de surtension directe par un des nombreux types de limiteurs. La thèse utilise des données de construction réelles qui ont permis de construire les modèles et de vérifier leurs solutions.

Dans la dernière partie de ma thèse, j'ai vérifié l'erreur de la solution numérique fondée sur le principe de la bisection de l'intervalle. Je me suis efforcé d'optimiser les trois modèles principaux, les résultats sont présentés dans le tableau récapitulatif.

Je me suis efforcé de vérifier le résultat de ce travail en mesurant l'enroulement réel d'un transformateur. Vu la complexité de la lecture de la répartition de la tension le long de l'axe du transformateur, les résultats de cette partie du travail apportent plutôt des connaissances informatives. Mon objectif n'était pas d'approfondir la méthode expérimentale de vérification de la répartition de la tension le long de l'enroulement. La difficulté d'obtention de résultats justes par les mesures se trouve dans les nombreuses restrictions de la vérification, dont la nécessité de retirer l'enroulement du transformateur du récipient (élimination de l'environnement réel – par exemple l'huile, et élimination de l'emballage mis à la terre), la limitation aux points non-bandés, la limitation du nombre de points analysés (par le nombre de canaux de l'oscilloscope), l'impossibilité d'utiliser des hauts niveaux de tension d'essai, etc.

Le modèle est sensible aux données d'entrée qui influencent la conditionnalité des matrices pour les solutions numériques. Le modèle accepte les éléments parasites dont les valeurs sont situées entre 10^{-6} et 10^{-13} . Je me suis consacré en marge à la détermination de ces paramètres, bien que la majorité des méthodes proposées connaisse des erreurs. Je les ai déterminées en me fondant sur la littérature spécialisée des dix dernières années.

Pour améliorer la résistance des transformateurs à la surtension, j'ai suivi l'importance du réglage du rapport de la capacité longitudinale et transversale et le modèle propose la possibilité de leur optimisation dans une répartition linéaire sans vibrations internes.

Ma thèse présentée ne prétend pas être une étude exhaustive des questions de la protection des enroulements des transformateurs contre les effets directs de la surtension, mais elle présente un modèle stable qui peut être commercialisé pour vérifier la résistance des enroulements à la surtension ou peut aider au moment de la conception et de la construction.

10 Výběrový seznam použité literatury

10.1 Odborné monografie k problematice impulzního namáhání

- [1] HARLOW, J. H. *Electric Power Transformer Engineering*. Boca Raton: CRC Press, 2012. ISBN 143985629X.
- [2] HASMAN, T. *Přepětí v elektroenergetických soustavách*. Praha: ČVUT, 2004. ISBN 80-01-02952-2.
- [3] HEATHCOTE, M. J. *The J & P Transformer Book: A Practical Technology of the Power Transformer*. Oxford: Newnes, 2007. ISBN 978-0-7506-8164-3.
- [4] HELLER, B., VEVERKA, A. *Surge phenomena in electrical machines*. Prague: Academia, 1968.
- [5] JEZERSKI, E. *Transformátory: teoretické základy*. Praha: Academia, 1973.
- [6] KARSAI, K., KERÉNYI, D. and KISS, L. *Large Power Transformers*. Budapest: Akadémiai Kiadó, 1987.
- [7] KULKARNI, S. V., KHAPARDE S. A. *Transformer Engineering: Design, Technology, and Diagnostics*. Boca Raton: CRC Press, 2013. ISBN 9781439853771.
- [8] MAYER, D. *Aplikovaný elektromagnetismus*. České Budějovice: KOPP, 2012. ISBN 978-80-7232-424-8.
- [9] MAYER, D. *Elektrodynamika v energetice*. Praha: BEN - technická literatura, 2005. ISBN 80-7300-164-0.
- [10] MAYER, D. *Úvod do teorie elektrických obvodů*. Praha: Nakladatelství technické literatury, 1981.
- [11] PETROV, G. N. *Elektrické stroje I: Úvod - transformátory*. Praha: Academia, 1980.

10.2 Odborné monografie k problematice aplikovaného numerického řešení

- [12] BLUMAN, G. W., CHEVIAKOV, A. F., ANCO, S. C. *Applications of Symmetry Methods to Partial Differential Equations*. New York: Springer, 2010. ISBN 038798612X.
- [13] CONSTANDA, C. *Solution Techniques for Elementary Partial Differential Equations*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2002. ISBN 1439811393.
- [14] DUFFY, D. G. *Transform Methods for Solving Partial Differential Equations*. Boca Raton: Chapman & Hall, 2004. ISBN 1584884517.
- [15] FRANČŮ, J. *Parciální diferenciální rovnice*. Brno: PC-DIR Real, 1998. ISBN 8021412720.

- [16] GALAKTIONOV, V. A., VÁZQUEZ, J. L. *A Stability Technique for Evolution Partial Differential Equations: A Dynamical Systems Approach*. Boston: Birkhäuser, 2004. ISBN 0-8176-4146-7.
- [17] JÄGER, W. *Partial Differential Equations: Theory and Numerical Solution*. Boca Raton: Chapman & Hall, 2000. ISBN 1584880228.
- [18] KOZEL, K. *Numerické řešení parciálních diferenciálních rovnic*. Praha: ČVUT, 2000. ISBN 8001042766.
- [19] LANGTANGEN, H. P. *Computational Partial Differential Equations: Numerical Methods and Diffpack Programming*. Berlin: Springer, 2003. ISBN 3-540-65274-4.
- [20] MAYER, D., ULRICH, B. *Základy numerického řešení elektrických a magnetických polí*. Praha: SNTL, 1988.
- [21] MAYER, D. *Analýza elektrických obvodů maticovým počtem*. Praha: Academia, 1966.
- [22] MÍKA, S., BRANDNER, M. *Numerické metody*. Plzeň: Západočeská univerzita, 2000. ISBN 80-7082-619-3.
- [23] MOIN, P. *Fundamentals of Engineering Numerical Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. ISBN 0521711231.
- [24] RILEY, K. F., HOBSON, M. P. *Essential Mathematical Methods for the Physical Sciences*. Cambridge. New York: Cambridge University Press, 2011. ISBN 1139492942.
- [25] TRANGENSTEIN, J. A. *Numerical Solution of Hyperbolic Partial Differential Equations*. Cambridge: Cambridge University Press, 2009. ISBN 052187727X.
- [26] VEMURI, V., KARPLUS, W. J. *Digital Computer Treatment of Partial Differential Equations*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1981. ISBN 0132124076.
- [27] VITÁSEK, E. *Základy teorie numerických metod pro řešení diferenciálních rovnic*. Praha: Academia, 1994. ISBN 80-200-0281-2.

10.3 Odborné původní časopisecké příspěvky

- [28] BABIC, S., AKYEL, C. Improvement in Calculation of the Self- and Mutual Inductance of Thin-Wall Solenoids and Disk Coils. *IEEE Transactions on Magnetics*, July 2000, vol. 36, No. 4, pp. 1970–1975. ISSN 0018-9464. DOI 10.1109/TMAG.2000.875240.
- [29] BAGHERI, M., HEKMATI, A., HEIDARZADEH, R., NADERI, M. S. Impulse Voltage Distribution in Intershield Disk Winding VS Interleaved and Continuous Disk Winding in Power Transformer. *2nd IEEE International Conference on Power and Energy (PECon '08)*, December 1–3, Johor Baharu, Malaysia 2008, pp. 387–392. ISSN 978-1-4244-2405-4. DOI 10.1109/PECON.2008.4762505.

- [30] BAGHERI, M., VAKILIAN, M., HEKMATI, A., HEIDARZADEH, R. Influence of Electrostatic Shielding of Disc Winding on Increasing the Series Capacitance in Transformer. *PowerTech, 2007, IEEE Lausanne 2007*, pp. 1780–1784. ISSN 978-1-4244-2190-9. DOI 10.1109/PCT.2007.4538586.
- [31] BAK, C. L., EINARSDÓTTIR, K. E., ANDRESSON, E., RASMUSSEN, J. M., LYKKEGAARD, J., WIECHOWSKI, W. Overvoltage Protection of Large Power Transformers – A Real-Life Study Case. *IEEE Transactions on Power Delivery*, April 2008, vol. 23, No. 2, pp. 657–666. ISSN 0885-8977. DOI 10.1109/TPWRD.2007.905793.
- [32] DALESSANDRO, L., DA SILVAIRA CAVALCANTE, F., KOLAR, J., W., Self-Capacitance of High-Voltage Transformers. *IEEE Transactions on Power Electronics*, September 2007, vol. 22, No. 5, pp. 2081–2092. ISSN 0885-8993. DOI 10.1109/TPEL.2007.904252.
- [33] DELLA TORRE, F., MORANDO, A. P., TODESCHINI, G. Three-Phase Distributed Model of High-Voltage Windings to Study Internal Steep-Fronted Surge Propagation in a Straightforward Transformer. *IEEE Transactions on Power Delivery*, October 2008, vol. 23, No. 4, pp. 2050–2057. ISSN 0885-8977. DOI 10.1109/TPWRD.2008.923102.
- [34] FUJITA, S., HOSOKAWA, N., SHIBUYA, Y. Experimental Investigation of High Frequency Voltage Oscillation in Transformer Winding. *IEEE Transaction on Power Delivery*, October 1998, vol. 13, No. 4, pp. 1201–1207. ISSN 0885-8977 DOI 10.1109/61.714485.
- [35] GHAREHPETIAN, G. B., MOHSENI, H., MÖLLER, K. Hybrid Modelling of Inhomogeneous Transformer Winding for Very Fast Transient Overvoltage Studies. *IEEE Transactions on Power Delivery*, January 1998, vol. 13, No. 1, pp. 157–163. ISSN 0885-8977. DOI 10.1109/61.660873.
- [36] GRANDI, G., KAZIMIERCZUK, M. K., MASSARINI, A., REGGIANI, U. Stray Capacitances of Single-Layer Solenoid Air-Core Inductors. *IEEE Transactions on Industry Applications*, September/October 1999, vol. 35, No. 5, pp. 1162–1168. ISSN 0093-9994. DOI 10.1109/28.793378.
- [37] GUISHU L., HAIFENG S., XILE Z., XIANG C. Modeling of Transformer Windings Under Very Fast Transient Overvoltages. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, November 2006, vol. 48, No. 4, pp. 621–627. ISSN 0018-9375. DOI 10.1109/TEMC.2006.884537.
- [38] GURUMURTHY, G. R., ANSARI, M. Z. A., AMARNATH, J. Reduction of Voltage Stresses in Power Transformer Windings Due to Surges. *2005 Annual Report*

- Conference on Electrical Insulation and Dielectric Phenomena (CEIDP '05)*, 2005, pp. 51–54. ISBN 0-7803-9257-4. DOI: 10.1109/CEIDP.2005.1560618.
- [39] HOOGENDORP, G., POPOV, M., VAN DER SLUIS, L. Application of Hybrid Modeling for Calculating Interturn Voltages in Transformer Windings. *IEEE Transactions on Power Delivery*, July 2009, vol. 24, No. 3, pp.1742–1744. ISSN 0885-8977. DOI 10.1109/TPWRD.2009.2021021.
- [40] HOSSEINI, S. M. H., VAKILIAN, M., GHAREHPETIAN, G. B. Comparison of Transformer Detailed Models for Fast and Very Fast Transient Studies. *IEEE Transactions on Power Delivery*, April 2008, vol. 23, No. 2, pp. 733–741. ISSN 0805-8977. DOI 10.1109/TPWRD.2008.915795.
- [41] LI, Y., LIU, G., ZHANG, L., LIN, Z. Transformer Winding Deformation Diagnosis Using Middle Band Frequency Response Analysis. *IEEE International Conference on Solid Dielectric (ICSD '07)*, UK 2007, pp. 677–680. ISSN 1-4244-0751-6. DOI 10.1109/ICSD.2007.4290904.
- [42] LIANG, G., SUN, H., ZHANG, X., CUI, X. Modeling of Transformer Windings Under Very Fast Transient Overvoltages. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, November 2006, vol. 48. No. 4, pp. 621–627. ISSN 0018-9375. 10.1109/TEMC.2006.884537.
- [43] MASSARINI, A., KAZIMIERCZUK, K., GRANDI, G. Lumped Parameter Models for Single- and Multiple-Layer Inductors. *Power Electronics Specialists Conference*, Juny 1996, vol. 1, No. 23–27, pp. 295–301. ISSN 0275-9306. DOI 10.1109/PESC.1996.548595.
- [44] MASSARINI, A., KAZIMIERCZUK, K. Self-Capacitance of Inductors. *IEEE Transactions on Power Electronics*, July 1997, vol. 12, No. 4, pp. 671–676. ISSN 0885-8993. DOI 10.1109/63.602562.
- [45] MATĚNA, Š., HELLER, B. Contribution to the solution of surge propagation along transformer windings with all parameters. *Acta Technica ČSAV*, 1976, vol. 21, No. 4, pp. 459–477.
- [46] MIKI, A., HOSOYA, T., OKUYAMA, K. A. Calculation Method for Impulse Voltage Distribution and Transferred Voltage in Transformer Windings. *IEEE Transaction on Power Apparatus and Systems*, May 1978, vol. PAS-97, No. 3, pp. 930–939. ISSN 0018-9510. DOI 10.1109/TPAS.1978.354566.
- [47] MIKULOVIĆ, J. Č., SAVIĆ, M. S. Calculation of Transients in Transformer Winding and Determination of Winding Parameters. *Electrical Engineering*, 2007, vol. 89, No. 4, pp. 293–300. ISSN 0948-7921. DOI 10.1007/s00202-006-0005-7.
- [48] NADERI, M. S., VAKILIAN, M. A Method for Modeling Power Transformer Tap Winding for Transient Studies. *Conference Record of the 2004 IEEE International*

- Symposium on Electrical Insulation*, September 2004, Indianapolis, USA, pp. 34–37. ISBN 0-7803-8447-4. DOI 10.1109/ELINSL.2004.1380434.
- [49] POPOV, M., SLUIS, L., SMEETS, R. P. P., ROLDAN, L. Analysis of Very Fast Transients in Layer-Type Transformer Winding. *IEEE Transaction on Power Delivery*, January 2007, vol. 22, No. 1, pp. 238–247. ISSN 0885-8977. DOI 10.1109/TPWRD.2006.881605.
- [50] POPOV, M., SLUIS, van der L., PAAP, G. C., HERDT, De H. Computation of Very Fast Transient Overvoltages in Transformer Windings. *IEEE Transaction on Power Delivery*, October 2003, vol. 18, No. 4, pp. 1268–1274. ISSN 0885-8977. DOI 10.1109/TPWRD.2003.817738.
- [51] POPOV, M., SLUIS, van der L., SMEETS, R. P. P., TERZIJA, V. V. Investigation of Fast Transients Propagation in Layer-type Transformer Windings – Measurements and Modelling. *XVth International Symposium on High Voltage Engineering*, August 2007, Ljubljana, Slovenia, T2-61 (6 pp.).
- [52] POPOV, M., SLUIS, van der L., SMEETS, R. P. P., LOPEZ-ROLDAN, J., TERZIJA, V. V. Modelling, Simulation and Measurement of Fast Transients in Transformer Windings with Consideration of Frequency-dependent losses. *IET Electric Power Applications.*, January 2007, vol. 1, No. 1, pp. 29–35. ISSN 1751-8660. DOI 10.1049/iet-epa:20060124.
- [53] POPOVIC, L. M. New Method for Calculation of Series Capacitance for Transient Analysis of Windings. *9th Mediterranean Electrotechnical Conference (MELECON '98)*, May 1998, vol. 2, pp. 1042–1046. ISBN 0-7803-3879-0. DOI 10.1109/MELCON.1998.699388.
- [54] SALLES, de C., BARREIRA MARTINEZ, M. L. Model of Distribution Transformers Winding for Lighting. *Power Tech 2007*, pp. 2047-2052, ISBN 978-1-4244-2190-9. DOI 10.1109/PCT.2007.4538633.
- [55] SHIBUYA, Y., FUJITA, S., HOSOKAWA, N. Analysis of Very Fast Transient Overvoltage in Transformer Winding. *IEE Proceedings. Generation, Transmission and Distribution.*, September 1997, vol. 144, No. 5, pp. 461–468. ISSN 1350-2360. DOI 10.1049/ip-gtd:19971134.
- [56] TRBUŠIĆ, M., ČEPIN, M. Surge Wave Distribution Over the Power Transformer Continuous. *Elektrotehniški vestnik*. Ljubljana, Elektrotehniška Zveza Slovenije, 2011, pp. 106–111. ISSN 0013-5852.
- [57] WAGNER, Karel Willy. *Das eindringen einer elektromagnetischen welle in eine spule mit windungskapazität*. Elektrotechnische Maschinen-Bau, 1915 (in German).
- [58] WANG, T., DONG, H., LIANG, G. Overvoltage Distribution Calculation of Transformer Windings under VFTO Considering Frequency-dependent parameters via Krylov

subspace Technique. *DRPT 2008*, Nanjing China, April 2008, pp. 887–891. ISBN 978-7-900714-13-8. DOI 10.1109/DRPT.2008.4523532.

- [59] YU, Y., ZANJI, W., CHONG, S. A Circuit Model in a Wide Frequency Range for Power Transformer and Analysis of its Characteristics. *2009 Asia-Pacific Power and Energy Engineering Conference (APPEEC 2009)*, March 2009, pp. 1–5. ISBN 978-1-4244-2487-0. DOI 10.1109/APPEEC.2009.4918035.

10.4 Kvalifikační práce

- [60] BJERKAN, E. *High frequency modeling of power transformers – Stresses and Diagnostics*: Doctoral thesis. Norwegian University of Science and Technology, Department of Electrical Power Engineering, 2005. ISBN: 82-471-6923-1.
- [61] FERGESTAD, P. I. *Transient oscillations in transformer windings*: Doctoral thesis. NTH, Norway 1971.
- [62] KLAS, Jan. *Modelování rázových dějů ve vinutí transformátoru*. Praha, 2008. Diplomová práce (Ing.). České vysoké učení technické v Praze, Fakulta elektrotechnická, katedra elektroenergetiky. Vedoucí práce Radek Procházka.
- [63] KLOUČEK, Tomáš. *Kapacity vysokonapěťových transformátorů*. Praha, 2009. Diplomová práce (Ing.). České vysoké učení technické v Praze, Fakulta elektrotechnická, katedra elektroenergetiky. Vedoucí práce Jan Mikeš.
- [64] KOKEŠ, Dalibor. *Úpravy vinutí transformátorů s ohledem na impulsní namáhání*. Praha, 2012. Bakalářská práce (Bc.). České vysoké učení technické v Praze, Fakulta elektrotechnická, katedra elektroenergetiky. Vedoucí práce Jan Mikeš.
- [65] ŠULC, Josef. *Rázové jevy v obvodech s rozloženými parametry*. Praha, 1981. Kandidátská disertační práce (CSc.). České vysoké učení technické v Praze, Fakulta elektrotechnická, Československé energetické závody. Vedoucí práce Jaroslav Vladař.

10.5 Patenty, normy, zkušební postupy

- [66] DEGENEFF, Robert C. and CROUSE, John C. *Electrostatic shielding of nonsequential disc windings in transformers*. United States Patent 1979, Patent No. 4243966.
- [67] ČSN EN 60076-3. *Výkonové transformátory – Část 3: Izolační hladiny, dielektrické zkoušky a vnější vzdušné vzdálenosti*. Praha: Český normalizační institut, 2001.

- [68] ČSN EN 60076-4 (351001) - Výkonové transformátory - Část 4: Průvodce zkouškami atmosférickým a spínacím impulzním napětím - Výkonové transformátory a tlumivky. Praha: Český normalizační institut, 2003.
- [69] ČSN EN 62305-1. Ochrana před bleskem – Část 1: Obecné principy. Praha: Český normalizační institut, 2006 a 2009.
- [70] ČSN IEC 60-1 (345640) – Technika zkoušek vysokým napětím – Část 1: Obecné definice a požadavky na zkoušky.

11 Soupisy

11.1 Soupis obrázků

Obrázek 1 – Hlavní druhy válcových vinutí transformátorů: a) válcové koncentrické, b) válcové bikoncentrické.....	16
Obrázek 2 – Hlavní druhy kotoučových vinutí transformátorů: a) kotoučové souměrné, b) kotoučové nesouměrné.....	16
Obrázek 3 – Polohy válcových vinutí transformátorů podle provedení: a) cívkové z válcových cívek, b) cívkové z deskových cívek, c) cívkové z dvojděskových cívek, d) plynulé, e) polohové	17
Obrázek 4 – Náhradní schéma vlivu kapacitního štítu vně vinutí	19
Obrázek 5 – Externí stínění pomocí kapacitního štítu vně vinutí	20
Obrázek 6 – Externí stínění pomocí kapacitního štítu vně vinutí s nehomogenními parametry	22
Obrázek 7 – Analogie mezi skutečnou jednovrstvou cívkou a náhradním modelem	23
Obrázek 8 – Ekvivalentní schéma délkového elementu jednovrstvé cívky	24
Obrázek 9 – Rozšířené ekvivalentní schéma délkového elementu jednovrstvé cívky při respektování vzájemných induktivních vazeb mezi jednotlivými fázemi.....	26
Obrázek 10 – Ekvivalentní parametry jednovrstvé cívky	28
Obrázek 11 – Schematické znázornění měřicího stanoviště.....	38
Obrázek 12 – Nejdůležitější geometrická konfigurace transformátorového modelu	40
Obrázek 13 – Jednopolový a trojpolový náraz u trojfázového transformátoru zapojeného do hvězdy s uzemněným uzlem vinutí.....	41
Obrázek 14 – Jednopolový náraz plným impulzem 1,2/50 μ s u trojfázového transformátoru zapojeného do hvězdy s uzemněným uzlem vinutí do fáze U_a , indukované napětí ve fázi U_b a U_c	42
Obrázek 15 – Jednopolový náraz plným impulzem 1,2/50 μ s u trojfázového transformátoru zapojeného do hvězdy s uzemněným uzlem vinutí do fáze U_a – zeleně namodelované výsledky, modře naměřené (měřeno v 6tém, 18tém a 30tém závitě).....	42
Obrázek 16 – Jednopolový náraz useknutým impulzem 1,2/50 μ s v čase 3 μ s u trojfázového transformátoru zapojeného do hvězdy s uzemněným uzlem vinutí do fáze U_a , indukované napětí ve fázi U_b , U_c	43
Obrázek 17 – Jednopolový náraz useknutým impulzem 1,2/50 μ s v čase 3 μ s u trojfázového transformátoru zapojeného do hvězdy s uzemněným uzlem vinutí do fáze U_a – zeleně namodelované výsledky, modře naměřené (měřeno v 6tém, 18tém a 30tém závitě).....	43
Obrázek 18 – Trojpolový náraz plným impulzem 1,2/50 μ s u trojfázového transformátoru zapojeného do hvězdy s uzemněným uzlem vinutí, pro zbývající fáze jsou průběhy identické	44
Obrázek 19 – Trojpolový náraz plným impulzem 1,2/50 μ s u trojfázového transformátoru zapojeného do hvězdy s uzemněným uzlem vinutí – zeleně namodelované výsledky, modře naměřené (měřeno v 6tém, 18tém a 30tém závitě).....	44
Obrázek 20 – Trojpolový náraz useknutým impulzem 1,2/50 μ s v čase 3 μ s u trojfázového transformátoru zapojeného do hvězdy s uzemněným uzlem vinutí, pro zbývající fáze jsou průběhy identické.....	45
Obrázek 21 – Trojpolový náraz useknutým impulzem 1,2/50 μ s v čase 3 μ s u trojfázového transformátoru zapojeného do hvězdy s uzemněným uzlem vinutí – zeleně namodelované výsledky, modře naměřené (měřeno v 6tém, 18tém a 30tém závitě).....	45
Obrázek 22 – Trojpolový náraz plným spínacím impulzem 1000/1050 μ s u trojfázového transformátoru zapojeného do hvězdy s uzemněným uzlem vinutí	46
Obrázek 23 – Trojpolový náraz plným spínacím impulzem 1000/1050 μ s u trojfázového transformátoru zapojeného do hvězdy s uzemněným uzlem vinutí – zeleně namodelované výsledky, modře naměřené (měřeno v 6tém, 18tém a 30tém závitě).....	46
Obrázek 24 – Jednopolový náraz u trojfázového transformátoru zapojeného do hvězdy s izolovaným uzlem vinutí nebo do trojúhelníku.....	47
Obrázek 25 – Jednopolový náraz plným impulzem 1,2/50 μ s v čase 3 μ s u trojfázového transformátoru zapojeného do hvězdy s uzemněným uzlem vinutí do fáze U_a , indukované napětí ve fázi U_b a U_c	48
Obrázek 26 – Jednopolový náraz plným impulzem 1,2/50 μ s v čase 3 μ s u trojfázového transformátoru zapojeného do hvězdy s uzemněným uzlem vinutí do fáze U_a – zeleně namodelované výsledky, modře naměřené (měřeno v 6tém, 18tém a 30tém závitě).....	48
Obrázek 27 – Jednopolový náraz useknutým impulzem 1,2/50 μ s u trojfázového transformátoru zapojeného do hvězdy s izolovaným uzlem vinutí do fáze U_a , indukované napětí ve fázi U_b a U_c	49

Obrázek 28 – Jednopolový náraz useknutým impulzem $1,2/50 \mu s$ u trojfázového transformátoru zapojeného do hvězdy s izolovaným uzlem vinutí do fáze U_a , – zeleně namodelované výsledky, modře naměřené (měřeno v 6tém, 18tém a 30tém závitě)	49
Obrázek 29 – Trojpólový náraz u trojfázového transformátoru zapojeného do hvězdy s izolovaným uzlem vinutí nebo do trojúhelníku.....	50
Obrázek 30 – Trojpólový náraz plným impulzem $1,2/50 \mu s$ u trojfázového transformátoru zapojeného do hvězdy s izolovaným uzlem vinutí do fáze U_a , identický průběh fáze U_b a fáze U_c	50
Obrázek 31 – Trojpólový náraz plným impulzem $1,2/50 \mu s$ u trojfázového transformátoru zapojeného do hvězdy s izolovaným uzlem vinutí zobrazena fáze U_a – zeleně namodelované výsledky, modře naměřené (měřeno v 6tém, 18tém a 30tém závitě)	51
Obrázek 32 – Trojpólový náraz useknutým impulzem $1,2/50 \mu s$ v čase $3 \mu s$ u trojfázového transformátoru zapojeného do hvězdy s izolovaným uzlem vinutí do fáze U_a , identický průběh fáze U_b a fáze U_c	51
Obrázek 33 – Trojpólový náraz useknutým impulzem $1,2/50 \mu s$ v čase $3 \mu s$ u trojfázového transformátoru zapojeného do hvězdy s izolovaným uzlem vinutí zobrazena fáze U_a – zeleně namodelované výsledky, modře naměřené (měřeno v 6tém, 18tém a 30tém závitě)	52
Obrázek 34 – Intuitivní představa o vzájemných vazbách ve vícevrstevném vinutí.....	53
Obrázek 35 – Náhradní schéma vícevrstevného vinutí	54
Obrázek 36 – Devítibodové schéma zvolené pro numerický výpočet.....	64
Obrázek 37 – Devítibodové schéma zvolené pro numerický výpočet.....	66
Obrázek 38 – Devítibodové schéma zvolené pro numerický výpočet.....	68
Obrázek 39 – Princip determinování počátečních a koncových bodů devítibodového numerického schématu	69
Obrázek 40 – Princip řetězení vícevrstevných cívek	71
Obrázek 41 – Schematické znázornění a) jednoduchého, b) dvojitého polohového vinutí.....	72
Obrázek 42 – Časoprostorové rozložení napětí trojfázového transformátoru s uzemněným uzlem naraženým useknutým impulzem $1,2/50 \mu s$ do všech fází jedné dvojcívky	73
Obrázek 43 – Určení kapacity vinutí vztahované k jádru (analogie s válcovým kondenzátorem)	77
Obrázek 44 – Výpočet velikosti vzájemné kapacity obou vinutí transformátoru (válcový kondenzátor)	78
Obrázek 45 – Přehled geometrie trojfázového transformátoru pro výpočet kapacit	79
Obrázek 46 – Průběh elektrických siločar mezi závitěmi jedné vrstvy	80
Obrázek 47 – Naznačení dvou vrstev polohového vinutí	81
Obrázek 48 – Vložení elektrostatického štítu mezi 1. a 2. závit první vrstvy a 19. a 20. závit druhé vrstvy	82
Obrázek 49 – Normovaný jednotný zkušební impuls $1,2/50 \mu s$	84
Obrázek 50 – Zkušební impuls $1,2/50 \mu s$	86
Obrázek 51 – Zkušební impuls $1,2/50 \mu s$ useknutý v týlu po $\tau = 3 \mu s$	86
Obrázek 52 – Spínací impuls $100/1050 \mu s$	87
Obrázek 53 – Graficky zobrazený rozdíl $U(h) - U(h/2)$ pro trojpólový náraz plným impulzem $1,2/50 \mu s$ u trojfázového transformátoru zapojeného do hvězdy s uzemněným uzlem vinutí, po řadě pro a) $U(1) - U(2)$, b) $U(2) - U(4)$, c) $U(4) - U(8)$, d) $U(8) - U(16)$, e) $U(16) - U(32)$, f) $U(32) - U(64)$, g) $U(128) - U(64)$	90

11.2 Soupis tabulek

Tabulka 1 – Parametry modelu trojfázového transformátoru pro jednotlivé sekce A, B, C	39
Tabulka 2 – Tabelizované parametry modelu transformátorové dvojcívky	72
Tabulka 3 – Určení chyby modelovaných příkladů pro useknutý impuls $1,2/50 \mu s$ pro vinutí naražené ve všech fázích a uzemněným uzlem, $\alpha \in (0,1)$	88
Tabulka 4 – Určení chyby modelovaných příkladů pro neuseknutý impuls $1,2/50 \mu s$ pro vinutí naražené ve všech fázích a uzemněným uzlem, $\alpha \in (0,1)$	88