

**ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ**

**V PRAZE**

**FAKULTA STROJNÍ**

**Ústav mechaniky tekutin a termodynamiky**



# **Diplomová práce**

Zlepšení tvaru leteckých profilů pomocí adjungované  
optimalizace a panelové metody

## I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Belda** Jméno: **Marek** Osobní číslo: **482687**  
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**  
Zadávající katedra/ústav: **Ústav mechaniky tekutin a termodynamiky**  
Studijní program: **Aplikované vědy ve strojním inženýrství**  
Specializace: **Aplikovaná mechanika**

## II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

**Zlepšení tvaru leteckých profilů pomocí adjungované optimalizace a panelové metody**

Název diplomové práce anglicky:

**Improving the Shape of Airfoil Profiles using Adjoint Optimization and Panel Method**

Pokyny pro vypracování:

V rešeršní části stručně popište metody použitelné k optimalizaci v aerodynamice. Poté se podrobně zaměřte na adjungovanou optimalizační metodu a detailně popište její matematické základy. V následující části popište diskrétní přístup k optimalizaci leteckých profilů, kde k řešení rozložení tlaku využijte panelovou metodu. Odvoďte vztahy potřebné k optimalizaci tvaru leteckých profilů. V závěru se věnujte validaci získaných výsledků a jejich diskusi.

Seznam doporučené literatury:

dle doporučení vedoucího práce

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

**doc. Ing. Tomáš Hyhlík, Ph.D. ústav mechaniky tekutin a termodynamiky FS**

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

Datum zadání diplomové práce: **25.04.2023**

Termín odevzdání diplomové práce: **28.07.2023**

Platnost zadání diplomové práce: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
doc. Ing. Tomáš Hyhlík, Ph.D.  
podpis vedoucí(ho) práce

\_\_\_\_\_  
Ing. Michal Schmirler, Ph.D.  
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

\_\_\_\_\_  
doc. Ing. Miroslav Španiel, CSc.  
podpis děkana(ky)

## III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

\_\_\_\_\_  
Datum převzetí zadání

\_\_\_\_\_  
Podpis studenta



## Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl v příloženém seznamu veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací, vydaným ČVUT v Praze 1. 7. 2009.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č.121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Jindřichově Hradci dne 23. 6. 2023

.....

Podpis



## Poděkování

Nejvíce bych chtěl poděkovat mému vedoucímu, panu doc. Ing. Tomáši Hyhlíkovi, Ph.D. za užitečné rady, věcné připomínky a trpělivost při vedení této práce. Dále bych chtěl také poděkovat panu doc. RNDr. Stanislavu Kračmarovi, CSc. za cenné rady a přínosné konzultace týkající se matematického aparátu použitého v této práci.

Na závěr bych chtěl poděkovat své rodině a kamarádům, že respektovali časovou náročnost vypracování této práce a poskytovali mi podporu.



## Anotace

<b>Autor:</b>	Bc. Marek Belda
<b>Název diplomové práce:</b>	Zlepšení tvaru leteckých profilů pomocí adjungované optimalizace a panelové metody
<b>Rozsah práce:</b>	135 str., 62 obr., 30 tab.
<b>Školní rok vyhotovení:</b>	2022/2023
<b>Škola:</b>	ČVUT FS
<b>Ústav:</b>	Ú12112 – Ústav mechaniky tekutin a termodynamiky
<b>Vedoucí diplomové práce:</b>	doc. Ing. Tomáš Hyhlík, Ph.D.
<b>Zadavatel:</b>	ČVUT FS
<b>Klíčová slova:</b>	optimalizace, adjungovaná metoda, letecký profil, součinitel vztlaku, panelová metoda
<b>Anotace:</b>	<p>Tato diplomová práce se zabývá adjungovanou optimalizací vztlakového profilu, která byla použita v kombinaci s panelovou metodou pro řešení proudění. Výhodou adjungované metody je zejména její nízká výpočetní náročnost, která je při optimalizaci v mechanice tekutin velmi důležitým kritériem při výběru metody. V této práci je provedeno rigorózní odvození adjungované metody a všech rovnic potřebných pro optimalizaci. Výsledkem práce je script pro optimalizaci vztlakového profilu, jehož výstupy byly verifikovány nezávislým výpočtem v programu Xfoil. Vzhledem k výpočetní nenáročnosti scriptu je tuto optimalizaci možné využít již v raných fázích návrhu a získat tak nejlepší možné výsledky. Také bylo provedeno zkoumání chování optimalizovaných profilů v návrhových i nenávrhových provozních režimech.</p>



## Annotation

<b>Author:</b>	Bc. Marek Belda
<b>Title of diploma thesis:</b>	Improving the Shape of Airfoil Profiles using Adjoint Optimization and Panel Method
<b>Extent of the thesis:</b>	135 p., 62 fig., 30 tab.
<b>Academic year:</b>	2022/2023
<b>University:</b>	CTU, Faculty of Mechanical Engineering
<b>Department:</b>	Ú12112 – Department of thermodynamics and fluid mechanics
<b>Supervisor:</b>	doc. Ing. Tomáš Hyhlík, Ph.D.
<b>Submitter of the Theme:</b>	CTU, Faculty of Mechanical Engineering
<b>Key words:</b>	optimization, adjoint method, airfoil, lift coefficient, panel method
<b>Annotation:</b>	<p>This thesis deals with airfoil optimization using the discrete adjoint method coupled with the panel method used for flow solution. The main advantage of the adjoint method is its computational efficiency, which is one of the defining characteristics of any optimization method used in fluid mechanics. In this thesis, a rigorous derivation of the governing equations of the adjoint method is carried out, as well as the derivation of all necessary equations needed for the optimization. The outcome of this thesis is a script for the adjoint optimization of an airfoil. The results of this optimization have been verified using Xfoil software. Thanks to the computational efficiency of the script, it is possible to employ it early during the design phase, which yields the best possible results. In this thesis, the behavior of optimized airfoils subjected to both design and non-design operating conditions was also studied.</p>



## Seznam použitých veličin a jejich jednotek

$a$	$[m^2 s^{-1}]$	teplotní vodivost
$c_t$	$[m s^{-1}]$	tečná rychlost
$c_\infty$	$[m s^{-1}]$	rychlost nabíhajícího proudu vzduchu
$C_M$	[1]	momentový součinitel profilu
$C_p$	[1]	tlakový součinitel profilu
$C_x$	[1]	součinitel odporu profilu
$C_y$	[1]	součinitel vztlaku profilu
$k$	[1]	počet jedinců v generaci
$L$	[m]	délka tětiny profilu
$m$	[1]	dimenze prostoru parametrů
$Ma$	[1]	Machovo číslo
$N$	[1]	počet panelů
$p$	[Pa]	tlak v obecném bodě
$p_\infty$	[Pa]	tlak nabíhajícího proudu
$r_{up}$	[1]	poloměr náběžné hrany horní površky
$r_{lo}$	[1]	poloměr náběžné hrany spodní površky
$Re$	[1]	Reynoldsovo číslo
$S$	$[m^2]$	plocha křídla
$T$	[K]	termodynamická teplota
$u$	[-]	funkce bez konkrétního významu (do kapitoly 4 včetně)
$v$	[-]	funkce bez konkrétního významu (do kapitoly 4 včetně)
$u$	$[m s^{-1}]$	složka rychlosti ve směru x (od kapitoly 5 dále)
$v$	$[m s^{-1}]$	složka rychlosti ve směru y (od kapitoly 5 dále)
$x_{up}$	[1]	x souřadnice nejvyššího bodu horní površky
$x_{lo}$	[1]	x souřadnice nejnižšího bodu spodní površky



$y_{up}$	[1]	y souřadnice nejvyššího bodu horní povrchy
$y_{lo}$	[1]	y souřadnice nejnižšího bodu spodní povrchy
$y_{xxup}$	[1]	křivost v nejvyšším bodě horní povrchy
$y_{xxlo}$	[1]	křivost v nejnižším bodě spodní povrchy
$y_{te}$	[1]	y souřadnice odtokové hrany
$\Delta y_{te}$	[1]	tloušťka odtokové hrany
$\alpha$	[°]	úhel náběhu
$\alpha_{te}$	[°]	úhel orientace odtokové hrany
$\beta_{te}$	[°]	úhel rozevření odtokové hrany
$\zeta$	[1]	iterační krok
$\zeta_0$	[1]	jmenovitý iterační krok
$\rho$	[kg m <sup>-3</sup> ]	hustota nabíhajícího proudu

## Seznam použitých zkratk

MKP	Metoda konečných prvků
PDR	Parciální diferenciální rovnice
OP	Okrajové podmínky
PP	Počáteční podmínky
RVT	Rovnice vedení tepla

## Seznam použitých symbolů

$\nabla$	Hamiltonův operátor
$\Delta$	Laplaceův operátor
$\partial$	Parciální derivace
$(u, v)$	Skalární součin funkcí u a v





## Obsah

Prohlášení.....	I
Poděkování.....	II
Anotace .....	III
Annotation.....	IV
Seznam použitých veličin a jejich jednotek .....	V
Seznam použitých zkratk.....	VI
Seznam použitých symbolů.....	VI
1 Úvod.....	1
2 Optimalizační metody použitelné v aerodynamice .....	3
2.1 Základy optimalizace .....	3
2.2 Výpočetní náročnost vybraných metod.....	5
2.3 Adjungovaná metoda .....	6
3 Odvození adjungované metody – Lagrangeův multiplikátor .....	10
3.1 Diskrétní formulace – metoda Lagrangeova multiplikátoru pro funkce .....	10
3.2 Spojitá formulace – metoda Lagrangeova multiplikátoru pro funkcionál.....	14
3.3 Shrnutí odvození pomocí Lagrangeových multiplikátorů.....	17
4 Odvození adjungované metody – adjungovaný operátor .....	18
4.1 Diskrétní formulace.....	18
4.2 Spojitá formulace .....	20
4.3 Ukázka divergující úlohy – nestacionární vedení tepla.....	23
5 Ukázkové použití adjungované metody – spojitý přístup .....	25
6 Optimalizace leteckého profilu – spojitý přístup .....	28
6.1 Silové působení na profil a součinitel vzlaku .....	29
6.2 Potenciální proudění.....	30
6.3 Bezrozměrové proměnné a převod do referenční konfigurace.....	32
7 Optimalizace leteckého profilu – diskretní přístup .....	35
7.1 Výchozí vztahy a základní idea iteračního výpočtu.....	35



7.2	Odvození optimalizace adjungovanou metodou .....	39
7.3	Použití parametrizace profilu .....	42
8	Výsledky optimalizace .....	48
8.1	Obecné úvodní poznámky .....	48
8.2	NACA 0012 .....	49
8.2.1	Úhel náběhu 0° .....	51
8.2.2	Úhel náběhu 10° .....	53
8.3	NLF(1)-0115 dle [10].....	55
8.3.1	Úhel náběhu 0° .....	56
8.3.2	Úhel náběhu 10° .....	58
8.4	NLF(1)-0414 .....	60
8.4.1	Úhel náběhu 0° .....	61
8.4.2	Úhel náběhu 10° .....	63
8.5	RAE2822.....	65
8.5.1	Úhel náběhu 0° .....	66
8.5.2	Úhel náběhu 10° .....	68
8.6	NREL S809 .....	70
8.6.1	Úhel náběhu 0° .....	71
8.6.2	Úhel náběhu 10° .....	73
8.7	Evoluce tvaru profilů během optimalizace.....	75
8.7.1	NACA 0012.....	75
8.7.2	NLF(1)-0115 dle [10].....	77
8.7.3	NLF(1)-0414 .....	78
8.7.4	RAE2822.....	80
8.7.5	NREL S809 .....	81
8.8	Shrnutí výsledků a komentář.....	83
9	Verifikace výsledků .....	86
9.1	Letecké profily .....	87



9.1.1	Profil NLF(1)-0414 .....	89
9.1.2	Profil RAE2822.....	90
9.2	Profil NREL S809 .....	91
9.2.1	Profil NREL S809 při úhlu náběhu 0°.....	92
9.2.2	Profil NREL S809 při úhlu náběhu 10°.....	93
9.3	Poláry profilů .....	94
10	Identifikace počátečních parametrů pro optimalizaci .....	95
11	Závěr .....	97
	Citovaná literatura.....	101
	Seznam obrázků.....	103
	Seznam tabulek .....	105
	Seznam použitého softwaru .....	106
	Seznam příloh .....	106
12	Přílohy.....	107
12.1	Příloha 3.1 – Rozšířené odvození a důkazy v Lagrangeovském přístupu.....	107
12.2	Příloha 4.1 – Důkaz ekvivalence obou přístupů k odvození .....	109
12.3	Příloha 7.2 – Podrobné odvození rovnic pro optimalizaci .....	110
12.3.1	Krátké shrnutí potřebných vztahů z kapitoly 7.1.....	110
12.3.2	Podrobné odvození adjungované optimalizace součinitele vztlaku .....	111
12.4	Příloha 8.7 – Evoluce tvaru profilu a cílové funkce – obrázky a grafy.....	118
12.5	Příloha 9.1 – Letecké profily v nenávrhovém režimu.....	124
12.5.1	Profil NLF(1)-0414 .....	124
12.5.2	Profil RAE2822.....	125
12.6	Příloha 9.2 – Odtržení u profilu NREL S809 – úhel náběhu 0 a 10° .....	126
12.7	Příloha 9.3 – Poláry a ostatní charakteristiky profilů – grafy .....	127



## 1 Úvod

Vzhledem k neustálému posouvání možností výzkumu, vývoje i výroby a stále se zvyšujícímu tlaku na efektivitu nabývá v posledních zhruba 20 letech na významu téma optimalizace. S neustálým zlepšováním vlastností strojů a součástek, které již někdy začínají narážet na fyzikální limity, vyvstává potřeba použití spolehlivějších a efektivnějších metod optimalizace, než je pouhý kvalifikovaný inženýrský odhad a zkušenosti. Rozvoj optimalizačních procedur jde ruku v ruce se zvyšováním výpočetního výkonu počítačů a vývojem výpočetních softwarů. Výrazný nárůst výpočetního výkonu umožnil v posledních několika desítkách let užití optimalizace i v oblastech, kde již samotné řešení úlohy vyžaduje velký výpočetní výkon. Vzhledem k extrémní výpočetní náročnosti úloh mechaniky tekutin je při volbě optimalizační procedury stále kladen velký důraz na její výpočetní náročnost. Výpočetní náročnost je v tomto oboru natolik omezujícím faktorem, že bývá často hlavním hodnotícím kritériem metody. Volba nevhodné procedury pro daný problém pak může vést k násobnému zvýšení výpočetního času při dosažení stejných výsledků.

Jak v letectví, tak v jiných odvětvích (např. větrná energetika, ...) je velkým tématem optimalizace geometrie použitého vztlakového profilu. Optimalizací geometrie leteckého profilu lze výrazně snížit spotřebu paliva a zvýšit dolet při zachování cestovní rychlosti a užitečné hmotnosti nákladu. Optimalizací profilu listu větrné elektrárny lze při stejných rozměrech a stejné hmotnosti elektrárny dosáhnout výrazně vyššího výkonu, případně elektrárnu při stejném výkonu zmenšit a zlevnit. Problémem při optimalizaci profilů je fakt, že výrazného zlepšení efektivity lze často dosáhnout pomocí minimálních změn tvaru, pokud jsou tyto změny učiněny ve správných místech a správným způsobem. Odhalení přesné podoby těchto změn je vzhledem k jejich velikosti často velmi obtížné i s dlouholetou zkušeností v oblasti navrhování vztlakových profilů, protože konkrétní podoba a velikost úprav se liší profil od profilu a co dokonale fungovalo pro jeden profil, to pro jiný fungovat nemusí. Proto je vhodné pro identifikaci potřebných úprav tvaru použít exaktnějších metod. Použitím optimalizačních procedur lze identifikovat optimální úpravu tvaru profilu pro zlepšení daného parametru, což umožní maximalizaci benefitu při minimalizaci velikosti zásahů do tvaru profilu. Optimalizačních procedur dnes existuje nepřeberné množství, přičemž každá je vhodná pro jiný typ problému a málokterá je skutečně univerzálně funkční.

V této práci se budu, vzhledem k řešenému problému, zabývat především adjungovanou metodou optimalizace, a to z důvodu jejích vhodných vlastností pro řešení optimalizace v oblasti proudění tekutin (hlavně díky její nízké výpočetní náročnosti). V této práci tedy budou řešeny zejména následující oblasti.

- Zdůvodnění volby adjungované metody pro optimalizaci vztlakového profilu



- Podrobná diskuse matematických základů adjungované metody a odvození rovnic této metody v obecném tvaru spolu s porovnáním různých přístupů k odvození těchto rovnic
- Ukázka výhod spojité a diskrétní formulace adjungované metody, ale také jejich limitů a omezení, včetně limitů pro použití adjungované metody jako takové
- Zdůvodnění volby panelové metody pro řešení proudového pole
- Odvození a naprogramování vlastní adjungované optimalizace vztakového profilu v programu Matlab
- Otestování vytvořené procedury na několika výrazně odlišných profilech a podrobná diskuse získaných výsledků
- Validace získaných dat nezávislým výpočtem v programu Xfoil

Tato práce tedy poskytuje velmi široký pohled na adjungovanou metodu, kombinující teoretické základy a matematické odvození metody s její implementací, praktickou aplikací a validací získaných výsledků. Dále práce poskytuje několik pohledů na odvození metody a shrnuje možné přístupy k tvorbě rovnic procedury adjungované optimalizace. Pozornost je také věnována teorii potenciálního proudění a panelové metodě jakožto výpočetně efektivní metodě řešení obtékání profilu. Výpočetní efektivita optimalizace je téma, které je výrazně akcentováno v celé práci a je mu věnována značná pozornost i při implementaci. Nízká výpočetní náročnost metody totiž umožňuje opakované provádění optimalizace při návrhu křídla nebo listu vrtule, a to přímo na míru lokálním podmínkám. Po délce listu vrtule, stejně jako po rozpětí křídla, se často mění výchozí tvar profilu a úhel náběhu, přičemž nízká výpočetní náročnost umožňuje optimalizaci provádět v mnoha řezech a tím získat optimální vlastnosti po celém rozpětí křídel či délce listu vrtule. V práci je také rozebráno téma parametrizace profilů, protože parametrizace a optimalizace profilu jsou neoddělitelně spjaty, přičemž efektivita optimalizace výrazně závisí na použité parametrizaci. Z hlediska praktických výsledků práce je nejvýznamnější aplikace procedury na různé typy profilů a podrobná diskuse získaných výsledků, přičemž je uvedeno i srovnání výsledků s jinými pracemi zabývajícími se optimalizací vztakových profilů. V poslední části práce jsou výsledky optimalizace verifikovány pomocí programu Xfoil pro několik různých provozních režimů. Verifikace byla provedena nejprve při uvažování nevazkého nestlačitelného proudění a následně také s uvažováním viskozity a stlačitelnosti. Součástí verifikace je také vykreslení polár testovaných profilů.



## 2 Optimalizační metody použitelné v aerodynamice

### 2.1 Základy optimalizace

K optimalizaci funkce dané součástky je nejprve nutné zavést veličinu, kterou je třeba optimalizovat, tzv. cílovou funkci. Optimalizace může být buď jednokriteriální (máme pouze jednu cílovou funkci) nebo vícekriteriální (cílových funkcí je více). Při vícekriteriální optimalizaci musíme na základě zkušeností a požadované aplikace zvolit váhy jednotlivých dílčích cílových funkcí. Když máme vydefinovanou cílovou funkci (v případě vícekriteriální optimalizace vážený součet jednotlivých dílčích cílových funkcí), můžeme přistoupit k výběru optimalizační procedury. Procedur pro optimalizaci existuje velmi mnoho, např. inženýrská zkušenost a kvalifikovaný odhad, náhodná volba parametrů, ... Tyto procedury sice mohou vést ke zlepšení funkce, ale konvergence není zaručena, a to ani k lokálnímu extrému. Zajímavější jsou proto jiné metody optimalizace, u kterých je konvergence alespoň za některých podmínek zaručena. Tyto metody lze rozdělit na lokální a globální. Lokální metody hledají lokální extrém cílové funkce v okolí počátečního bodu, globální metody hledají globální extrém na vymezeném podprostoru prostoru parametrů. Z globálních metod stojí za zmínku metoda genetického algoritmu, z lokálních pak simplexová metoda a široké spektrum metod gradientních.

Metoda genetického algoritmu má tu výhodu, že má zaručenou konvergenci ke globálnímu extrému cílové funkce na předem definovaném rozsahu přípustných hodnot parametrů, a to bez ohledu na vlastnosti cílové funkce (spojitost, ...). V oblasti mechaniky tekutin však je její velkou nevýhodou obrovská výpočetní náročnost, protože konvergence je zaručena v nekonečném počtu generací. Toto vede k nutnosti opakovaných CFD výpočtů pro mnoho generací, které konzumují, zvláště u složitějších úloh, nepřipustně velký výpočetní výkon. Tato metoda se snaží ve výpočetním postupu napodobit přirozený výběr, ke kterému dochází v přírodě. Na počátku je z přípustného prostoru parametrů náhodně vygenerována počáteční populace o  $k$  jedincích. U všech jedinců je vyhodnocena hodnota cílové funkce a na základě těchto hodnot jsou vybráni rodiče následující populace, přičemž existuje více algoritmů pro tento výběr. V tomto výběru se v závislosti na hodnotě cílové funkce někteří jedinci objeví vícekrát a někteří ani jednou, přičemž zvýhodnění jsou jedinci s lepší hodnotou cílové funkce. Stále ovšem musí platit, že jedinců ve výběru je právě  $k$ . Následně dochází ke křížení jedinců z rodičovského výběru, kdy je každému jedinci náhodně vybrán partner pro křížení. Opět existuje několik používaných druhů křížení (prosté, algebraické, ...), lišících se vlastnostmi. Po křížení následuje mutace, která nastává s předem danou pravděpodobností. Při mutaci je hodnota náhodně vybraného parametru u jedince postiženého mutací nahrazena náhodným číslem z přípustného rozsahu daného parametru, přičemž algoritmů mutace je opět více druhů. Po provedení všech výše uvedených kroků získáváme následující generaci, která má také  $k$  jedinců a postup iteračně opakujeme do



dosažení konvergence nebo stanoveného maximálního počtu generací. Spolehlivost této metody ovšem s rostoucím počtem optimalizačních parametrů výrazně klesá, výpočetní náročnost naopak velmi rychle roste.

V mechanice tekutin se z důvodu výpočetní náročnosti spíše uplatní metody lokální. Tyto metody, ať už založené na jakémkoli principu, mají za určitých podmínek zaručenou konvergenci k lokálnímu extrému, nikoli ke globálnímu, ale jejich výhodou je řádově nižší výpočetní náročnost. Lokální metody lze rozdělit na gradientní a ngradientní. Z ngradientních metod stojí za zmínku simplexová metoda. Jedná se o nejjednodušší lokální metodu jak z hlediska teorie, tak z hlediska implementace. Simplexová metoda spočívá ve zkonstruování pravidelného simplexu (nejjednoduššího mnohostěnu) v prostoru parametrů. Následně se vypočtou hodnoty cílové funkce ve vrcholech simplexu. Vrchol s nejhorší hodnotou cílové funkce se vypustí a nahradí se novým vrcholem na opačné straně od těžiště zbylých vrcholů, přičemž tento postup se iteračně opakuje. Nevýhodou je, že tato metoda nevyužívá gradientu, tudíž směr nejrychlejšího růstu či poklesu cílové funkce odhaduje pouze přibližně. Výhodou je, že nevyžaduje diferencovatelnost cílové funkce, ale postačuje její spojitost.

Gradientní metody využívají různých postupů pro výpočet gradientu. Gradient je získáván buď přímo, nebo nepřímo. Zástupcem metod, v nichž se gradient získává přímo je metoda konečných diferencí, která vychází přímo z definice parciální derivace. Nepřímo získávaný gradient využívá např. adjungovaná metoda. Dále existují gradientní metody, které kromě gradientu využívají též Hessovu matici cílové funkce. Tyto metody mají výhodu výrazně rychlejší konvergence a možnosti použití výrazně většího iteračního kroku bez ztráty přesnosti, ale jejich nevýhodou jsou vyšší požadavky na kvalitu cílové funkce (dvakrát spojitá diferencovatelnost), které nemusíme být vždy schopni zaručit. Také mívají zpravidla mírně vyšší výpočetní náročnost, což je však vyváženo jejich velmi rychlou konvergencí. Gradientní metody jsou vhodné pouze tehdy, pokud je cílová funkce spojitá, přičemž někdy na ni mohou být kladeny i další podmínky (hladkost, ...). Pokud může cílová funkce nabývat pouze diskrétních hodnot (např. počet stupňů kompresoru, ...), nebo je cílová funkce nespojitá, je vhodnější použít jiné metody, např. výše zmíněný genetický algoritmus, i když jsou výrazně výpočetně náročnější.



## 2.2 Výpočetní náročnost vybraných metod

Z hlediska výpočetní náročnosti jednoho kroku optimalizační procedury je zdaleka nejlepší adjungovaná metoda, a to i proto, že její výpočetní náročnost nezávisí nijak významně na počtu parametrů. Níže uvádím stručný přehled používaných optimalizačních metod a jejich výpočetní náročnosti. Výpočetní náročnost je uváděna pro jeden krok optimalizační procedury (jedno updatování hodnot parametrů) a je porovnávána s prostým řešením původního problému bez implementace optimalizační procedury.

Metoda	Statistické metody	Genetický algoritmus	Metoda konečných diferencí	Adjungovaná metoda	Simplexová metoda
Výpočetní náročnost	$m^2$	$k$	$m + 1$	$\approx 2$	$\approx 1$

Tabulka 1 – Výpočetní náročnost každého kroku optimalizace [1]

$m$  ... dimenze prostoru parametrů

$k$  ... počet jedinců (různých návrhů) v každé populaci

Z tabulky výše je vidět nízká výpočetní náročnost adjungované metody, zvláště při rostoucím počtu návrhových parametrů. Stojí za povšimnutí, že výpočetní náročnost adjungované metody se výrazně nemění se změnou počtu návrhových parametrů (výpočetní náročnost sice roste, ale výrazně pomaleji než u ostatních metod). U simplexové metody je sice náročnost ještě nižší než u adjungované metody, avšak Tabulka 1 neposkytuje v případě simplexové metody úplnou informaci o výpočetní náročnosti. Jelikož v případě simplexové metody se v každé iteraci mění pouze jeden vrchol simplexu, je výpočetní náročnost v druhé a každé další iteraci skutečně rovna náročnosti řešení původní úlohy bez optimalizace. Ovšem v první iteraci (definice výchozího pravidelného simplexu v prostoru parametrů) je výpočetní náročnost rovna  $m + 1$ , protože pravidelný simplex v  $m$ -dimenzionálním prostoru parametrů má  $m + 1$  vrcholů a v každém z nich je třeba vyhodnotit cílovou funkci. Při výpočtu simplexovou metodou je navíc pro dosažení konvergence potřeba měnit délku hrany tohoto simplexu, přičemž každá změna délky hrany simplexu opět znamená vyhodnotit  $m + 1$  hodnot cílové funkce. Kvůli těmto vlastnostem simplexové metody může výpočetní náročnost narůst natolik, že se adjungovaný přístup nakonec ukáže jako výpočetně méně náročný. Navíc simplexová metoda nevyužívá gradientu, a proto postup této metody může být poměrně vzdálen optimálnímu směru postupu danému gradientem. Dalším problémem spojeným s použitím simplexové metody je nutnost definice výchozího pravidelného simplexu s  $m + 1$  vrcholy v  $m$ -rozměrném prostoru parametrů





a velká citlivost metody na délku hrany tohoto simplexu. Adjungované metodě oproti tomu stačí pouze jeden výchozí bod v prostoru parametrů bez ohledu na dimenzi tohoto prostoru. Navíc změna velikosti iteračního kroku v adjungované metodě není spojena s nárůstem výpočetní náročnosti. Jelikož je každé řešení proudového pole výpočetně velmi drahé, a simplexová metoda má hned několik zásadních nevýhod, budu dále rozebírat pouze adjungovaný přístup jakožto přístup poskytující zdaleka nejlepší poměr spotřebovaný výpočetní výkon – benefit optimalizace.

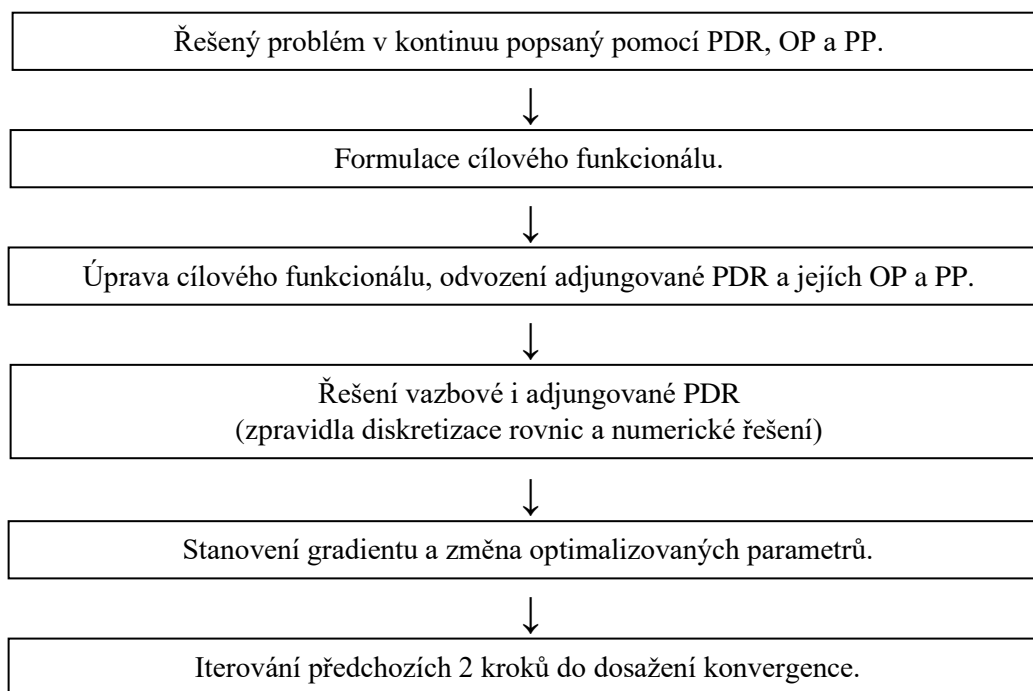
### 2.3 Adjungovaná metoda

Adjungovaný přístup vychází z teorie optimálního řízení. Počátky využití této metody v oblasti CFD sahají do 70. a 80. let 20. století. O položení základů této metody a její výrazný rozvoj se zasloužili zejména Olivier Pironneau (\*1945) a Antony Jameson (\*1934). Základem této metody je vhodná definice cílové funkce, jejíž hodnotu se snažíme minimalizovat nebo maximalizovat za podmínky splnění vazbových rovnic daných povahou řešeného problému. Pro příklad, u úlohy v lineární elasticitě se bude jednat o rovnice Lamé – Navierovy (případně Beltrami – Michellovy), v případě mechaniky tekutin pak zpravidla o rovnice Eulerovy či Navier – Stokesovy, případně jejich diskretizované tvary nebo analogie (např. maticové rovnice v MKP). Při použití adjungované metody existují 2 hlavní přístupy, spojitý a diskrétní, které se liší pořadím prováděných úprav a zjednodušování modelu. V rámci každého tohoto přístupu pak existují 2 cesty odvození, jedna přes teorii lineárních operátorů a druhá přes metodu Lagrangeova multiplikátoru, které však vedou k identickým výsledkům [2].

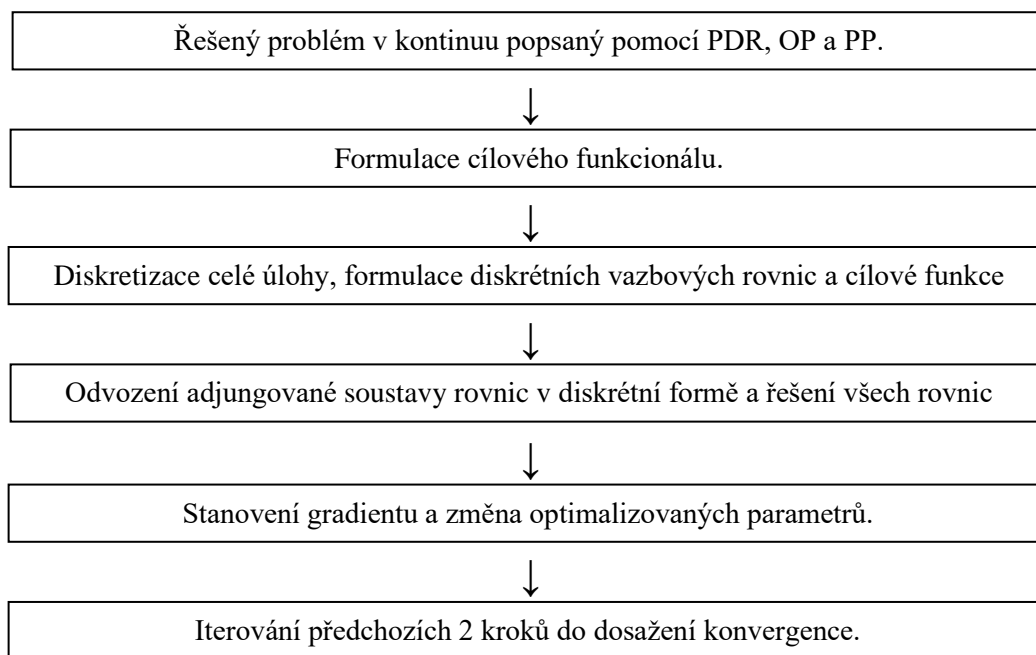
Z fyzikálního hlediska se jeví jakožto korektnější spojitý přístup. V tomto přístupu je jako první definována cílová funkce v kontinuu (cílový funkcional). Následně je stále ještě v kontinuu odvozena adjungovaná parciální diferenciální rovnice (nebo soustava PDR), která slouží k výpočtu gradientu. Tato adjungovaná rovnice je pak diskretizována spolu s rovnicí původního problému (tzn. vazbovou rovnicí optimalizační úlohy) a následně numericky řešena. Výhodou tohoto přístupu je fyzikální korektnost a možnost rozboru řešitelnosti ještě před samotným řešením (z tvaru adjungované PDR lze poměrně snadno odhalit inherentní nestabilitu řešení) a také nezávislost adjungované PDR na diskretizaci. Tím, že lze provést diskretizaci původní a adjungované rovnice nezávisle na sobě lze ušetřit poměrně značné množství paměti, což zvláště u rozsáhlých úloh může být rozhodující parametr pro volbu tohoto postupu. Další výhodou je, že gradient je konzistentní s fyzikální podstatou problému. Nevýhodou je velmi náročná a zdoluhavá odvození adjungované PDR, a zejména pak jejich OP a PP, navíc je toto odvození obtížné na algoritmizaci, a je ho tudíž zpravidla nutné provádět alespoň částečně ručně. Nekonzistence



gradientu s numerickým řešením může navíc vést k zastavení další konvergence optimalizace v blízkosti lokálního extrému. Z důvodu matematické náročnosti bude odvození ve spojitě formě provedeno až po uvedení diskrétního přístupu. Spojitý přístup se tedy vyznačuje následujícím pořadím úprav.



Při diskrétním přístupu je prvním krokem opět definice cílové funkce v kontinuu (cílového funkcionálu). V dalším kroku ovšem nastupuje diskretizace celého problému, tzn. diskretizace rovnic úlohy, zahrnutí OP a PP do diskretizovaných rovnic (diskretizací vzniká soustava vysokého řádu obecně nelineárních algebraických rovnic) a také diskretizace cílového funkcionálu (převod na cílovou funkci mnoha proměnných). Teprve po diskretizaci celého problému následuje odvození adjungované soustavy rovnic (také v diskrétním tvaru rovnou obsahujícím OP a PP) a její řešení. Dále je postup stejný jako u spojitěho přístupu, tzn. stanovení gradientu a úprava parametrů. Velkou výhodou tohoto přístupu je jednoduchost odvození, které lze provést bez nutnosti hlubokého porozumění variačnímu počtu a bez jeho aplikace. Tento přístup je také jednodušší na algoritmizaci a vypočtený gradient je konzistentní s numerickým řešením problému (nemusí však už být konzistentní s jeho fyzikální podstatou). Toto za určitých podmínek zaručuje plnou konvergenci optimalizace. Další výhodou diskrétního přístupu je, že takto získaný gradient je identicky roven gradientu získanému při optimalizaci metodou konečných diferencí. Nevýhodou je závislost adjungovaných rovnic na způsobu diskretizace problému a nemožnost oddělené diskretizace vazbové a adjungované rovnice. Tímto se ještě umocňuje nutnost korektního provedení diskretizace. Diskrétní přístup má tedy pořadí úprav následující.



V rámci každého přístupu existují 2 cesty odvození vedoucí ke stejným výsledkům, z nichž mi v rámci inženýrské optimalizace připadá přirozenější cesta přes metodu Lagrangeova multiplikátoru. Tato cesta dle mého názoru lépe vystihuje podstatu optimalizace, tzn. hledání extrému za podmínky splnění vazeb mezi parametry. V následujících kapitolách proto považuji za vhodné shrnout princip Lagrangeových multiplikátorů jak v oblasti hledání vázaných extrémů funkcí (hodí se pro diskretní přístup), tak v oblasti hledání vázaných extrémů funkcionálů (vhodné pro spojitý přístup) [2].

Adjungovaná metoda má však i některé nevýhody. Jednou z hlavních nevýhod je fakt, že adjungovaná metoda rychle ztrácí svou výpočetní efektivitu při přidávání dalších omezujících podmínek a vazbových rovnic. Geometrické podmínky (zachování plochy, zachování vzdálenosti určitých bodů, ...) lze ošetřit úpravou přípustného prostoru parametrů tak, aby tento prostor parametrů zaručoval splnění geometrických podmínek, a promítnutím gradientu do tohoto prostoru. Pokud ovšem požadujeme splnění dalších fyzikálních podmínek (např. zachování součinitele odporu, ...), je třeba přidat tyto rovnice jako další vazbové rovnice a tím tedy i zvýšit počet Lagrangeových multiplikátorů. Tento postup lze samozřejmě aplikovat i pro podmínky geometrické. Toto vede k nárůstu výpočetní náročnosti a v případě, že se počet dodatečných vazeb přiblíží počtu návrhových parametrů, ztrácí adjungovaná metoda oproti metodě konečných diferencí jakoukoli výhodu.

Z tohoto důvodu se u fyzikálních podmínek často používá metoda penalizace. Při použití této metody není požadováno přesné splnění dodatečných podmínek v každém kroku, ale jejich nesplnění je penalizováno v cílové funkci. Tento postup je v podstatě převedením jednokriteriální



optimalizace s dodatečnými vazbovými podmínkami na vícekriteriální optimalizaci bez těchto podmínek, přičemž dodatečné vazbové podmínky jsou převedeny na kritéria této vícekriteriální optimalizace. Tento přístup snižuje výpočetní náročnost, ale nezaručuje bezvýhradné splnění dodatečných podmínek. V případě použití penalizačního přístupu je výsledná cílová funkce vyjádřena jako  $I' = I + \beta I_2^2$  kde  $I_2$  je rovnice pro dodatečnou vazbovou podmínku v anulovaném tvaru a  $\beta$  je konstanta určující míru penalizace nenulovosti  $I_2$  (míru penalizace porušení dodatečné podmínky). Znaménko koeficientu  $\beta$  je nutno volit podle povahy hledaného extrému tak, aby nesplnění dodatečné podmínky hodnotu cílové funkce zhoršovalo. Velikost  $\beta$  ovlivňuje tvrdost podmínky. Pro vynucení dodatečné podmínky je vhodné mít velikost  $\beta$  co největší, protože tato volba zaručuje vysokou penalizaci jejího nedodržení. Vysoká hodnota  $\beta$  s sebou ovšem nese nevýhody v podobě špatné podmíněnosti výpočtu a z toho vyplývající pomalé konvergence. Hodnotu  $\beta$  je proto nutné volit rozumně s ohledem na vynucení vazby i na numerické chování úlohy. Penaltová formulace také může mít výhodu z toho hlediska, že optimalizačnímu algoritmu dává určitou volnost a umožňuje mu danou podmínku mírně porušit, pokud je toto mírné porušení vykoupeno dramatickým zlepšením primární cílové funkce. Penaltová formulace je proto vhodná pro podmínky, kde není bazírováno na dokonalém splnění, ale spíše na udržení dané hodnoty v rozumných mezích [2].



### 3 Odvození adjungované metody – Lagrangeův multiplikátor

#### 3.1 Diskrétní formulace – metoda Lagrangeova multiplikátoru pro funkce

Mějme skalární veličinu  $I$ , kterou chceme optimalizovat (najít její maximum nebo minimum).  $I$  je tedy cílovou funkcí optimalizace. Hodnota  $I$  závisí na závisle proměnných úlohy (např. na hodnotách  $p$ ,  $\rho$ ,  $\vec{c}$ , ... v integračních bodech) a na parametrech dané úlohy. Označme tedy  $w$  vektor závisle proměnných úlohy a  $F$  vektor nezávislých parametrů úlohy. Vektor  $w$  je  $n$ -prvkový vektor neznámých úlohy, pro jehož vyřešení musím znát nebo odhadnout  $m$ -prvkový vektor parametrů  $F$ . Pak lze psát definiční vztah pro cílovou funkci.

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{bmatrix}, \quad I = I(w, F) = I(s)$$

Vektor  $s = \begin{bmatrix} w \\ F \end{bmatrix}$  je  $n + m$  prvkový vektor všech hledaných parametrů v dané úloze.

V Lagrangeovském přístupu jsou při definici cílové funkce  $I(w, F)$  proměnné  $w$  a  $F$  chápány jako nezávislé. Rovnice popisující danou úlohu (a tím svazující k sobě vektory  $w$  a  $F$ ) se uplatňují až při definici vazby, které musí hledaný extrém  $I$  vyhovovat.

$$R = \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}$$

Vektor  $R$  popisuje soustavu  $n$  rovnic dané úlohy v anulovaném tvaru. Pro úlohu požadujeme splnění těchto rovnic pro závisle proměnné úlohy  $w$  a zadané nezávislé parametry  $F$ . Tento vektor rovnic je tedy vazbovou podmínkou umožňující vypočítat vektor  $w$  z vektoru  $F$ . Této podmínce musí hledaný extrém vyhovovat. Proto musí platit identita (1).

$$R(w, F) = R(s) = 0 \quad (1)$$

Tato identita platí, pokud  $s$  je řešením úlohy (neboli  $w$  je řešením úlohy pro zadané  $F$ ). Z tohoto plyne, že pro jednoznačnou řešitelnost úlohy musí být vektor  $R$  právě  $n$ -prvkový (potřebujeme  $n$  nezávislých rovnic pro  $n$  neznámých prvků  $w$ ). Protože požadujeme  $R=0$ , tak i  $\lambda^T \cdot R(w, F) = 0$  a tento výraz můžeme přičíst k původní cílové funkci  $I$ , aniž bychom změnili její hodnotu. Tímto můžeme definovat rozšířenou cílovou funkci  $\phi$  pro hledání vázaného lokálního extrému  $I$  následujícím způsobem.

$$\phi(w, F, \lambda) = I(w, F) + \lambda^T \cdot R(w, F) \quad (2)$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$



V této funkci je  $\lambda$   $n$ -prvkový vektor Lagrangeových multiplikátorů. Přičtením členu, který obsahuje vazbové rovnice (člen  $\lambda^T \cdot R(w, F)$ ) je zohledněna vazba mezi původně nezávisle proměnnými  $w$  a  $F$ , které musí poloha hledaného extrému vyhovovat. Rovnici výše lze přepsat do indexového zápisu.

$$\phi(w, F, \lambda) = I(w, F) + \lambda_i \cdot R_i(w, F) = \phi(S) \quad (3)$$

Vektor  $S = \begin{bmatrix} S \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ F \\ \lambda \end{bmatrix}$  je v tomto zápisu  $2n + m$  prvkový vektor všech proměnných optimalizační úlohy. Rozšířená cílová funkce  $\phi$  je pak funkcí nezávislých proměnných  $w$ ,  $F$  a  $\lambda$ .

Dle principu Lagrangeových multiplikátorů pro hledání vázaného extrému funkce více proměnných je vázaný extrém funkce  $I$ , jehož poloha musí vyhovovat vazbovým rovnicím  $R$ , prostým extrémem funkce  $\phi$ , tzn. kritickým bodem funkce  $\phi$ . Musí proto splňovat podmínku (4).

$$\text{grad}(\phi) = \left( \frac{\partial \phi}{\partial S_i} \right) = \left( \frac{\partial \phi}{\partial w_i}; \frac{\partial \phi}{\partial F_j}; \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_k} \right) = 0 \quad \forall i, j, k \quad (4)$$

Z této podmínky pak plyne platnost rovností (5) – (7).

$$\frac{\partial \phi}{\partial w_i} = \frac{\partial I}{\partial w_i} + \lambda_l \cdot \frac{\partial R_l}{\partial w_i} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial F_j} = \frac{\partial I}{\partial F_j} + \lambda_l \cdot \frac{\partial R_l}{\partial F_j} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \lambda_k} = R_k = 0 \quad (7)$$

Je vidět, že rovnice (7) požaduje splnění rovnic popisujících úlohu. Při výpočtu gradientu funkce  $\phi$  vypočteme parciální derivace vzhledem ke všem proměnným  $S$ .

$$\text{grad}(\phi) = \left( \frac{\partial \phi}{\partial S_i} \right) = \left( \frac{\partial \phi}{\partial w_i}; \frac{\partial \phi}{\partial F_j}; \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_k} \right) = \left( \frac{\partial I}{\partial w_i} + \lambda_l \cdot \frac{\partial R_l}{\partial w_i}; \frac{\partial I}{\partial F_j} + \lambda_l \cdot \frac{\partial R_l}{\partial F_j}; R_k \right) \quad (8)$$

Dále lze definovat totální diferenciál  $\phi$ .

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial S_i} dS_i = \left( \frac{\partial I}{\partial w_i} + \lambda_l \cdot \frac{\partial R_l}{\partial w_i} \right) dw_i + \left( \frac{\partial I}{\partial F_j} + \lambda_l \cdot \frac{\partial R_l}{\partial F_j} \right) dF_j + R_k d\lambda_k \quad (9)$$

Pro tento totální diferenciál požadujeme při optimalizaci nezávislost na změnách vektoru Lagrangeových multiplikátorů  $d\lambda$  a také na změnách vektoru proměnných úlohy  $dw$ , protože tyto hodnoty nejsme schopni přímo ovlivnit. Jelikož v Lagrangeovském přístupu jsou  $w$ ,  $F$  a  $\lambda$  chápány jako nezávislé, nejsme schopni nijak specifikovat přírůstek  $dw$  ani  $d\lambda$  a musíme tyto přírůstky



uvažovat jako libovolné možné. Přírůstek  $dF$  jsme vzhledem k jeho povaze změny parametrů úlohy (které zadáváme z vnějšku) jako jediný schopni přímo ovlivnit (explicitně předepsat). Z těchto důvodů nás při optimalizaci zajímá, jak se mění hodnota  $\phi$  pouze v závislosti na změně parametrů  $F$ , bez zřetele ke změnám hodnot  $w$  a  $\lambda$ . Pokud jsou tyto podmínky nezávislosti na  $dw$  a  $d\lambda$  splněny, pak se jedná o totální diferenciál vzhledem k parametrům úlohy  $F$ , jehož hodnotu jsme vzhledem ke znalosti  $dF$  schopni vyčíslit.

Gradient  $\phi$  má obecně všechny složky nenulové. Protože nejsme schopni předepsat žádnou podmínku pro  $dw$  ani  $d\lambda$ , musí být nulové výrazy, které tyto hodnoty násobí. Při podmínce splnění vazbových rovnic je vynulován poslední subvektor gradientu  $\phi$ . Pokud je cílem zjistit totální diferenciál vzhledem k parametrům úlohy  $F$ , je potřeba vynulovat ještě první subvektor gradientu. Toho lze docílit pomocí vektoru Lagrangeových multiplikátorů  $\lambda$ . Po vynulování všech nežádoucích složek zůstává gradient očištěn o vlivy nesplnění vazbových rovnic a proměnných úlohy a udává citlivost dané úlohy na změnu parametrů  $F$ .

Jelikož známe strukturu  $I$  a  $R$ , jsme schopni analyticky spočítat vektor (matici) parciálních derivací  $I$  a  $R$  podle  $w$  a  $F$ . Po vyřešení vazbových rovnic úlohy  $R$ , ze kterých získáme vektor  $w$ , jsme navíc tyto výrazy schopni vyčíslit. Zjišťování citlivosti a optimalizaci provádíme vzhledem k parametrům  $F$ , proto po vyřešení rovnic úlohy  $R$  dopočteme vektor Lagrangeových multiplikátorů z rovnice (10) požadující nulovost prvků násobených  $dw$ .

$$\frac{\partial I}{\partial w_i} + \lambda_l \cdot \frac{\partial R_l}{\partial w_i} = 0 \quad (10)$$

Tímto dostáváme soustavu  $2n$  rovnic.

$$R = 0 \quad (11)$$

$$\left(\frac{\partial R}{\partial w}\right)^T \lambda = -\left(\frac{\partial I}{\partial w}\right)^T \quad (12)$$

Kde v těchto rovnicích lze zavést následující značení.

$$\frac{\partial R}{\partial w} \equiv A$$

Tato soustava se skládá z  $n$  v obecném případě nelineárních rovnic pro řešení proměnných úlohy  $w$  a z  $n$  lineárních rovnic pro řešení vektoru  $\lambda$ . V případě, že je soustava rovnic  $R$  lineární, přechází tyto rovnice do tvaru (13).

$$R = Aw - b = 0 \rightarrow Aw = b \quad (13)$$



Tedy celá soustava přejde na 2 soustavy lineárních rovnic.

$$Aw = b \quad (14)$$

$$A^T \lambda = - \left( \frac{\partial I}{\partial w} \right)^T \quad (15)$$

Z těchto rovnic je vidět, že náročnost jednoho kroku optimalizační procedury je v případě lineárních vazbových rovnic přibližně dvojnásobná oproti řešení úlohy bez optimalizace. Za gradient  $\phi$  vzhledem k  $F$  lze tedy označit vztah (16).

$$G_j = \frac{\partial \phi}{\partial F_j} = \frac{\partial I}{\partial F_j} + \lambda_l \cdot \frac{\partial R_l}{\partial F_j} \quad (16)$$

Tento gradient udává citlivost cílové funkce vzhledem k parametrům úlohy, a tedy udává citlivost úlohy na malé změny těchto parametrů. Toto znamená, že pro zjištění citlivosti úlohy na změny jednotlivých parametrů nemusíme provádět mnoho výpočtů s malými změnami parametrů, ale stačí provést jeden výpočet a vyřešení rovnic pro určení gradientu. Z výše uvedených vztahů lze ukázat následující rovnost (důkaz viz Příloha 3.1 – Rozšířené odvození a důkazy v Lagrangeovském přístupu).

$$d\phi = dI = G_j dF_j \quad (17)$$

Z tohoto vztahu plyne, že gradient  $G$  udává i citlivost původní cílové funkce  $I$ . Pro optimalizaci cílové funkce je pak potřeba udělat s vektorem  $F$  krok ve směru gradientu, protože lze z Cauchy-Schwarzovy nerovnosti ukázat, že gradient udává směr nejrychlejšího růstu  $I$  (důkaz viz Příloha 3.1 – Rozšířené odvození a důkazy v Lagrangeovském přístupu). Hodnotu parametrů v následující iteraci tedy lze vyjádřit následujícím způsobem.

$$F_{(n+1)} = F_{(n)} + \zeta G \quad (18)$$

$$\zeta > 0 \dots \text{maximalizace } I$$

$$\zeta < 0 \dots \text{minimalizace } I$$

Koeficient  $\zeta$  musí být volen „rozumně“ s ohledem na konvergenci metody a počet potřebných iterací. Pro koeficient v absolutní hodnotě příliš malý bude konvergence pomalá, pokud bude v absolutní hodnotě příliš velký, hrozí divergence výpočtu. Tento postup je základem diskrétního přístupu k adjungované metodě a dává přesný návod, jakým způsobem definovat adjungovanou rovnici a počítat gradient cílové funkce [2] [3].





### 3.2 Spojitá formulace – metoda Lagrangeova multiplikátoru pro funkcionál

Metodu Lagrangeových multiplikátorů lze využít pro hledání vázaného extrému funkcionálu podobně, jako pro hledání vázaného extrému funkce více proměnných. Význam vektorů  $w$  a  $F$  je stejný jako v kapitole 3.1 s tím, že v tomto případě se jedná o vektory funkcí a nikoli reálných čísel. Vektor  $w$  je v tomto případě tedy například rychlostní nebo tlakové pole.

$$w(x) = \begin{bmatrix} w_1(x) \\ \vdots \\ w_n(x) \end{bmatrix}, \quad F(x) = \begin{bmatrix} F_1(x) \\ \vdots \\ F_m(x) \end{bmatrix}, \quad I = I(w, F) = I(s)$$

Kde  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^k$

Analogicky ke kapitole 3.1 definujeme vektory  $s$ ,  $\lambda$ ,  $S$  a  $R$  jako funkce  $x$ .

$$\lambda(x) = \begin{bmatrix} \lambda_1(x) \\ \vdots \\ \lambda_n(x) \end{bmatrix}, \quad s(x) = \begin{bmatrix} w(x) \\ F(x) \end{bmatrix}, \quad S(x) = \begin{bmatrix} s(x) \\ \lambda(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w(x) \\ F(x) \\ \lambda(x) \end{bmatrix}, \quad R(s) = \begin{bmatrix} R_1(s) \\ \vdots \\ R_n(s) \end{bmatrix}$$

Rovnice úlohy v anulovaném tvaru jsou nyní obecnými diferenciálními rovnicemi pro neznámé funkce  $w(x)$ . Řešení těchto rovnic závisí na OP, PP a parametrech úlohy popsáných vektorem  $F(x)$ , který musíme před řešením znát nebo odhadnout. Stejně jako v kapitole 3.1 je pro jednoznačnou řešitelnost potřeba  $n$  rovnic, protože  $w(x)$  je  $n$ -prvkový vektor funkcí. Pro danou úlohu požadujeme splnění identity (19).

$$R(w(x), F(x)) = R\left(s, \frac{\partial s}{\partial x}, \frac{\partial^2 s}{\partial x \partial x}, \dots\right) = 0 \quad \forall x \in \Omega \quad (19)$$

Cílová funkce  $I$  je v nejjednodušším případě funkcionálem definovaným rovnicí (20).

$$I(w, F) = I(s) = \int_{\Omega} f\left(s, \frac{\partial s}{\partial x}, \frac{\partial^2 s}{\partial x \partial x}, \dots\right) dx \quad (20)$$

Protože požadujeme  $R=0$ , můžeme v integrálu analogicky k principu Lagrangeových multiplikátorů pro funkci více proměnných přičíst  $\lambda^T(x) \cdot R(s, \dots)$ , aniž bychom změnili hodnotu integrované funkce. Tímto získáme rozšířený funkcionál  $\Phi(w, F, \lambda)$  který použijeme pro výpočet vázaného extrému.

$$\Phi(w, F, \lambda) = \Phi(S) = \int_{\Omega} f\left(s, \frac{\partial s}{\partial x}, \frac{\partial^2 s}{\partial x \partial x}, \dots\right) + \lambda^T(x) \cdot R\left(s, \frac{\partial s}{\partial x}, \frac{\partial^2 s}{\partial x \partial x}, \dots\right) dx \quad (21)$$

$$\Phi(S) = \int_{\Omega} \phi\left(S, \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial x}, \dots\right) dx \quad (22)$$



Pro vázaný extrém funkcionálu  $I$  musí analogicky k funkci více proměnných platit, že vázaný extrém funkcionálu  $I$  je prostým extrémem funkcionálu  $\Phi$ , tzn kritickým bodem  $\Phi$ . Nezávisle na volbě funkce  $v$  tudíž musí platit vztahy (23) a (24).

$$d\Phi(S, v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi(S + tv) - \Phi(S)}{t} = 0 \quad (23)$$

$$d\Phi((w, F, \lambda), v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi(w + tv_w, F + tv_F, \lambda + tv_\lambda) - \Phi(w, F, \lambda)}{t} = 0 \quad (24)$$

Výše uvedené rovnice jsou obecné, platí pro funkcionál libovolného typu a jejich platnost lze snadno ověřit v [4]. Jedná se o obecně platný princip Lagrangeových multiplikátorů pro funkcionál. Nyní řešenou úlohu ještě více zjednodušíme tím, že se omezíme pouze na  $I$  následujícího typu.

$$I(s_i) = \int_{\Omega} f\left(s_i, \frac{\partial s_i}{\partial x_j}\right) dx = \int_{\Omega} f(s_i, p_j^i) dx \quad (25)$$

Vazbovými rovnicemi problému nechť jsou PDR 1. řádu. Pro takovýto funkcionál lze podmínku minima upravit do tvaru (26).

$$d\Phi(S, v) = \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial S} v + \frac{\partial \phi}{\partial P_j} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx = \int_{\partial \Omega} \frac{\partial \phi}{\partial P_j} v n_j dA + \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \phi}{\partial S} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial P_j} \right) v dx = 0 \quad (26)$$

Tento tvar lze přepsat do plně indexového zápisu.

$$d\Phi(S_i, v_i) = \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial S_i} v_i + \frac{\partial \phi}{\partial P_j^i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx = \int_{\partial \Omega} \frac{\partial \phi}{\partial P_j^i} v_i n_j dA + \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \phi}{\partial S_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial P_j^i} \right) v_i dx = 0 \quad (27)$$

V tomto zápisu je použito značení viz níže.

$$P_j^i = \frac{\partial S_i}{\partial x_j}, \quad P_i^w = \frac{\partial w}{\partial x_i}, \quad P_i^F = \frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad P_i^\lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial x_i}$$

Ke splnění této podmínky minima se snažíme při optimalizaci konvergovat pomocí změn parametrů  $F$ . Důvody jsou totožné jako v kapitole 3.1. Vzhledem k linearitě integrálu (integrál součtu je roven součtu integrálů, násobení skalárem lze vytknout před integrál) můžeme vztah pro derivaci funkcionálu opět rozdělit na příspěvek od proměnných pole  $w$ , optimalizovaných parametrů  $F$  a Lagrangeových multiplikátorů  $\lambda$  pomocí rozdělení sumy přes index  $i$  na 3 části odpovídající prvkům  $w$ ,  $F$  a  $\lambda$ . Stejně jako v diskrétní verzi požadujeme pro účely optimalizace to, aby derivace funkcionálu nezávisela explicitně na proměnných úlohy  $w$  a multiplikátorech  $\lambda$ . Proto musí být výrazy, které násobí prvky vektoru  $v$  příslušející proměnným  $w$  a  $\lambda$  rovny 0. Argument integrálu přes oblast  $\Omega$  proto lze rozepsat do součtu 3 členů (viz dále).



$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial\phi}{\partial P_j^w}\right)v_w + \left(\frac{\partial\phi}{\partial F} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial\phi}{\partial P_j^F}\right)v_F + \left(\frac{\partial\phi}{\partial\lambda} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial\phi}{\partial P_j^\lambda}\right)v_\lambda$$

Z tohoto zápisu lze následně vynulovat členy explicitně závislé na  $w$  a  $\lambda$ . Jelikož vektor  $v$  je libovolný vektor funkcí, musí být nulové výrazy které ho násobí.

$$\frac{\partial\phi}{\partial w_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial\phi}{\partial P_j^{wi}} = \frac{\partial f}{\partial w_i} + \lambda^T \frac{\partial R}{\partial w_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial P_j^{wi}} + \lambda^T \frac{\partial R}{\partial P_j^{wi}} \right) = 0 \quad v \Omega \quad (28)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\lambda_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial\phi}{\partial P_j^{\lambda i}} = R_i = 0 \quad v \Omega \quad (29)$$

Tyto požadavky definují PDR pro  $w$  a  $\lambda$  platné uvnitř oblasti  $\Omega$ . Analogicky lze rozepsat argument integrálu přes hranici oblasti na součet následujících 3 členů.

$$\frac{\partial\phi}{\partial P_j^w} v_w n_j + \frac{\partial\phi}{\partial P_j^F} v_F n_j + \frac{\partial\phi}{\partial P_j^\lambda} v_\lambda n_j$$

Opět požadujeme, aby tento výraz nezávisel explicitně na proměnných  $w$  a  $\lambda$ , tudíž lze analogicky k postupu výše získat rovnice (30) a (31).

$$\frac{\partial\phi}{\partial P_j^w} n_j = 0 \quad na \partial\Omega \quad (30)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial P_j^\lambda} n_j = 0 \quad na \partial\Omega \quad (31)$$

Tyto vztahy představují OP a PP k PDR odvozeným výše a jsou nezbytné pro jednoznačnou řešitelnost PDR pro  $w$  a  $\lambda$ . Jelikož  $\phi$  nikdy nezávisí na parciálních derivacích  $\lambda$ , je druhá OP a PP vždy identicky splněna. Proto je pro jednoznačnou řešitelnost vazbových rovnic, ke kterým tato OP a PP přísluší, potřeba převzít OP a PP z původní úlohy. Po vyřešení funkcí  $w$  a  $\lambda$  lze získat prvky gradientu funkcionálu  $\Phi$ .

$$g_F = \frac{\partial\phi}{\partial F_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial\phi}{\partial P_j^{Fi}} = \frac{\partial f}{\partial F_i} + \lambda^T \frac{\partial R}{\partial F_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial P_j^{Fi}} + \lambda^T \frac{\partial R}{\partial P_j^{Fi}} \right) \quad (32)$$

Vzhledem k větě o stopách funkcí z Banachova prostoru je hodnota  $\phi$  (a jejich parciálních derivací) na  $\partial\Omega$  jednoznačně dána hodnotami funkce (a jejich parciálních derivací) uvnitř  $\Omega$ . Z tohoto důvodu není třeba do gradientu zahrnovat vztah vycházející z integrálu přes hranici oblasti a tento vztah ani není potřeba pro jednoznačnou řešitelnost, protože gradient nemá povahu PDR.



### 3.3 Shrnutí odvození pomocí Lagrangeových multiplikátorů

Již z tohoto úvodu do problematiky je zřejmé, že diskrétní formulace adjungované metody je výrazně jednodušší z matematického hlediska a je také výrazně jednodušší na pochopení a implementaci. Toto snižuje pravděpodobnost chyby na straně výpočtáře a programátora. V diskrétní formulaci také není nutné odvozovat OP a PP adjungovaných rovnic, což je asi nejchoulostivější bod spojitěho přístupu, který vyžaduje zvláštní péči a hluboké porozumění problematice. Spojitá formulace zahrnuje i ve své nejjednodušší podobě, která byla ukázána v kapitole 3.2, využití poměrně pokročilých postupů funkcionální analýzy a variačního počtu. V kapitole 3.2 nebylo z důvodu obtížnosti a rozsáhlosti probíráno odvození gradientu pro obecnější případy. Mezi tyto případy se zejména řadí cílový funkcionál definovaný nejen pomocí objemového integrálu přes oblast  $\Omega$ , ale také pomocí plošného integrálu přes  $\partial\Omega$ . Obecně lze říci, že cílový funkcionál definovaný i pomocí integrálu přes  $\partial\Omega$  vede na nehomogenní OP a PP v adjungované rovnici, přičemž tvar adjungované rovnice se neliší. V obecnějším případě by pak mohl cílový funkcionál záviset také na vyšších derivacích funkcí v něm vystupujících, což opět povede ke zkomplikování výsledných vztahů. Spojitá verze se v tomto světle může jevit jako nadbytečná (každý problém lze diskretizovat a použít diskrétní formulaci), je však velmi užitečná pro odhalení některých nectností adjungovaného přístupu, které budou probrány dále, a také k plnému pochopení chování adjungovaných rovnic a jejich fyzikálního významu. Spojitá formulace také může být úspornější z hlediska paměti a výpočetní náročnosti, protože diskretizace původní a adjungované rovnice k sobě není vázána, a proto lze pro každou rovnici zvolit optimální diskretizaci i způsob řešení. Toto může v některých případech ušetřit i poměrně významné výpočetní prostředky [3] [4].

Vzhledem k tomu, že při použití adjungované metody zpravidla nedochází k tomu, že by cílový funkcionál byl definován pouze pomocí integrálu přes celou oblast, ale zpravidla se v něm vyskytují i hraniční prvky, bude při odvození adjungovaných rovnic ve spojitěm přístupu užitečné stručné shrnutí odvození přes adjungované operátory. Tento způsob odvození zahrnuje integrál přes hranici oblasti přirozeněji než metoda Lagrangeových multiplikátorů a oba způsoby odvození jsou zcela ekvivalentní, i když vychází ze zcela odlišných partií matematiky. Lze tedy ukázat, že vedou ke stejnému výsledku [2].



## 4 Odvození adjungované metody – adjungovaný operátor

### 4.1 Diskrétní formulace

Mějme vektor  $w$  ve stejném významu jako v kapitole 3.1 a skalární veličinu  $J(w)$ . Při odvození pomocí operátorů je důležité, jaká je lineární perturbace  $J$  při perturbaci  $w$ . Perturbace jsou značeny symbolem  $\delta$ .

$$g^T \delta w \equiv \frac{\partial J}{\partial w} \delta w \quad (33)$$

Dále požadujeme, aby perturbace  $\delta w$  vyhovovala linearizovaným vazbovým rovnicím pro danou matici  $A$  a vektor  $b$  ve tvaru viz (34).

$$A \delta w = b \quad (34)$$

Duální formou rozumíme vyhodnocení členu  $v^T b$ , u kterého lze dokázat, že se rovná  $g^T \delta w$  (důkaz níže) pomocí soustavy rovnic (35).

$$A^T v = g \quad (35)$$

$$v^T b = v^T A \delta w = (A^T v)^T \delta w = g^T \delta w \quad (36)$$

Ve vztazích výše platí následující značení.

$$g \equiv \left( \frac{\partial J}{\partial w} \right)^T$$

Výhoda tohoto přístupu se projeví, pokud vyhodnocujeme změnu  $J$  pro  $n$  různých vektorů  $b$  a tato úloha je ekvivalentní vyhodnocení změny  $J$  pro  $m$  různých vektorů  $g$ . Pro toto vyhodnocení musíme provést buď  $n$  přímých výpočtů, nebo  $m$  duálních. Pro  $n \gg m$  je duální přístup výrazně výhodnější.

Pro optimalizaci mějme vektory  $w$ ,  $F$ ,  $R(w, F)$  a skalární veličinu  $I(w, F)$  ve stejném významu jako v kapitole 3.1.  $R$  značí vazbové rovnice v anulovaném tvaru, proto lze psát podmínku (37).

$$R(w, F) = 0 \quad (37)$$

Kolem řešení  $w$  lze pro každý parametr  $F_i$  pomocí užití věty o derivaci složené funkce získat vztah pro citlivost na daný parametr. Na rozdíl od principu Lagrangeových multiplikátorů předpokládáme implicitní závislost řešení  $w$  na parametrech úlohy  $F$ .

$$\frac{dI}{dF_i} = \frac{\partial I}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial F_i} + \frac{\partial I}{\partial F_i} \quad (38)$$



Citlivost řešení  $w$  na parametr  $F_i$ , tzn.  $\frac{\partial w}{\partial F_i}$ , musí vyhovovat linearizovaným rovnicím R.

$$R(w, F) = 0 \quad (39)$$

Z tohoto požadavku plyne podmínka (40).

$$\frac{dR}{dF_i} = \frac{\partial R}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial F_i} + \frac{\partial R}{\partial F_i} = 0 \quad (40)$$

Definujme nyní značení ve tvaru viz níže.

$$\delta w_i \equiv \frac{\partial w}{\partial F_i}, \quad A \equiv \frac{\partial R}{\partial w}, \quad g^T \equiv \frac{\partial I}{\partial w}, \quad b_i \equiv -\frac{\partial R}{\partial F_i}$$

Po přepsání vztahů pomocí výše uvedeného značení do standardního tvaru dostaneme rovnice níže.

$$\frac{dI}{dF_i} = g^T \delta w_i + \frac{\partial I}{\partial F_i} \quad (41)$$

$$A \delta w_i = b_i \quad (42)$$

$$G_i = \frac{dI}{dF_i} = g^T \delta w_i + \frac{\partial I}{\partial F_i} \equiv v^T b_i + \frac{\partial I}{\partial F_i} \quad (43)$$

$$dI = G_i dF_i \quad (44)$$

$$g^T \delta w_i \equiv v^T b_i \quad (45)$$

Člen z identity (45) lze vyhodnocovat buď přímo řešením soustavy rovnic (46) nebo duálně ze soustavy (47).

$$A \delta w_i = b_i \quad (46)$$

$$A^T v = g \quad (47)$$

Pro jedinou návrhovou proměnnou nemá duální přístup žádný benefit. Pro více návrhových proměnných lze využít toho, že pro každou návrhovou proměnnou  $F_i$  je jiný vektor  $b_i$ , ale stejný vektor  $g$ , tzn. při přímém řešení je potřeba vyřešit soustavu (46)  $m$  krát, kdežto soustavu (47) pouze jednou. Z tohoto plyne výpočetní úspornost adjungovaného přístupu. Přímé řešení dle (46) je výpočetní náročností optimalizační úlohy  $m + 1$  ekvivalentní optimalizaci metodou konečných diferencí (viz Tabulka 1) [2]. Dá se ukázat, že jak odvození přes Lagrangeovy multiplikátory, tak odvození přes adjungovaný operátor vedou k totožným výsledkům (důkaz viz Příloha 4.1 – Důkaz ekvivalence obou přístupů k odvození).



## 4.2 Spojitá formulace

Spojitá formulace je rozšířením diskrétní formulace do oboru funkcí. Mějme vektorové funkce dle definičních vztahů níže.

$$U(x) = \begin{bmatrix} u_1(x) \\ \vdots \\ u_n(x) \end{bmatrix}, \quad V(x) = \begin{bmatrix} v_1(x) \\ \vdots \\ v_n(x) \end{bmatrix}, \quad (U, V) = \int_{\Omega} U^T V dx$$

Nyní vyčíslíme funkcionál  $(g, u)$  kde  $u$  musí vyhovovat soustavě PDR  $Lu = f$  v  $\Omega$  s homogenními OP na  $\partial\Omega$ . Využitím adjungované formulace lze říci, že tento funkcionál se rovná funkcionálu  $(v, f)$  kde  $v$  vyhovuje rovnici  $L^*v = g$  v  $\Omega$  a odpovídajícím homogenním OP na  $\partial\Omega$ . Adjungovaný operátor  $L^*$  je definován identitou  $(V, LU) = (L^*V, U)$  která musí platit pro všechny funkce vyhovující daným homogenním OP. Níže důkaz tvrzení  $(g, u) = (v, f)$ .

$$(v, f) = (v, Lu) = (L^*v, u) = (g, u) \quad (48)$$

Pro ilustraci mějme operátor  $L$  definovaný jako stacionární rovnici konvekce – difúze s OP  $u(0) = u(1) = 0$ .

$$Lu = \frac{du}{dx} - \epsilon \frac{d^2u}{dx^2}, \quad x \in \langle 0; 1 \rangle \quad (49)$$

Pomocí integrace per-partes lze odvodit vztah (50).

$$\begin{aligned} (v, Lu) &= \int_0^1 v \left( \frac{du}{dx} - \epsilon \frac{d^2u}{dx^2} \right) dx = \left[ uv - v\epsilon \frac{du}{dx} \right]_0^1 + \int_0^1 \left( -u \frac{dv}{dx} + \epsilon \frac{dv}{dx} \frac{du}{dx} \right) dx = \\ &= \left[ uv - \epsilon v \frac{du}{dx} + \epsilon \frac{dv}{dx} u \right]_0^1 + \int_0^1 \left( -u \frac{dv}{dx} - \epsilon \frac{d^2v}{dx^2} u \right) dx = \\ &= \left[ -\epsilon v \frac{du}{dx} \right]_0^1 + \int_0^1 u \left( -\frac{dv}{dx} - \epsilon \frac{d^2v}{dx^2} \right) dx \end{aligned} \quad (50)$$

Z tohoto vztahu plyne adjungovaný operátor  $L^*$ . V tomto operátoru musí  $v$  vyhovovat OP  $v(0) = v(1) = 0$ .

$$L^*v = -\frac{dv}{dx} - \epsilon \frac{d^2v}{dx^2} \quad (51)$$



Za povšimnutí stojí změna znaménka u první derivace. Toto je obecná vlastnost adjungovaných operátorů a nezáleží na dimenzi oblasti  $\Omega$ . Tato změna znaménka implikuje změnu smyslu plynutí času u časově závislých problémů. Z tohoto pramení nestabilita adjungované PDR u parabolických problémů (a obecně u všech problémů obsahujících první časovou derivaci).

Prozatím jsme se zabývali, stejně jako u přístupu pomocí Lagrangeových multiplikátorů, pouze veličinou definovanou přes celou oblast s homogenními OP pro vazbovou rovnici. Obecně, integrály přes hranici oblasti v primární formulaci vedou k nehomogenním OP v adjungované rovnici a opačně. Obecná formulace adjungovaného funkcionálu je identita (52).

$$(V, LU)_{\Omega} + (C^*V, BU)_{\partial\Omega} = (L^*V, U)_{\Omega} + (B^*V, CU)_{\partial\Omega} \quad (52)$$

V této identitě jsou B a C operátory operující na hranici oblasti  $\Omega$  definované při definici původního problému. Z výše uvedené identity lze odvodit vztah (53).

$$(v, f)_{\Omega} + (C^*v, f_2)_{\partial\Omega} = (g, u)_{\Omega} + (g_2, Cu)_{\partial\Omega} \quad (53)$$

Tento vztah platí, pokud předpokládáme platnost vztahů níže.

$$Lu = f \quad v \Omega \quad (54)$$

$$\text{OP: } Bu = f_2 \quad \text{na } \partial\Omega \quad (55)$$

$$L^*v = g \quad v \Omega \quad (56)$$

$$\text{OP: } B^*v = g_2 \quad \text{na } \partial\Omega \quad (57)$$

Důkladnější analýzou problému z hlediska matematiky lze zjistit, co lze předepsat jako OP a PP v původní rovnici v závislosti na jejím typu, aby adjungovaná úloha byla řešitelná. Tento rozbor však dalece přesahuje rámec práce, a proto se touto problematikou v této práci nezabývám. Níže důkaz identity (53).

$$\begin{aligned} (v, f)_{\Omega} + (C^*v, f_2)_{\partial\Omega} &= (v, Lu)_{\Omega} + (C^*v, Bu)_{\partial\Omega} = \\ &= (L^*v, u)_{\Omega} + (B^*v, Cu)_{\partial\Omega} = (g, u)_{\Omega} + (g_2, Cu)_{\partial\Omega} \end{aligned} \quad (58)$$

Vzhledem k výše uvedenému je vidět, že vztah operátor – adjungovaný operátor v  $\Omega$  nezávisí na OP úlohy a integrálu přes  $\partial\Omega$ , proto lze bez ohledu na OP a vyjádření integrálu přes  $\partial\Omega$  uvést tabulku na následující straně.





Typ problému	Operátor	Adjungovaný operátor
1D konvekce – difúze	$\frac{du}{dx} - \epsilon \frac{d^2u}{dx^2}$	$-\frac{dv}{dx} - \epsilon \frac{d^2v}{dx^2}$
Eliptický problém (např. stacionární vedení tepla, ...)	$\nabla \cdot (k\nabla u)$	$\nabla \cdot (k\nabla v)$
Parabolický problém (např. nestacionární vedení tepla, ...)	$\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (k\nabla u)$	$-\frac{\partial v}{\partial t} - \nabla \cdot (k\nabla v)$
Hyperbolický problém 1. řádu (např. rovnice advekce, Eulerovy rovnice, ...)	$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x}$	$-\frac{\partial v}{\partial t} - c \frac{\partial v}{\partial x}$
Hyperbolický problém 2. řádu (např. vlnová rovnice, ...)	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla \cdot (c^2 \nabla u)$	$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \nabla \cdot (c^2 \nabla v)$

Tabulka 2 – Typy operátorů a operátory k nim adjungované [2].

Povšimněme si toho, že jakákoli lichá derivace má v adjungovaném operátoru vždy opačné znaménko než v operátoru původním. To je dáno tím, že při každém použití integrace per-partes mění integrál přes oblast znaménko. Z tohoto plyne, že při sudém počtu použití integrace per-partes (tzn. sudé derivaci původní funkce) se změny znamének vzájemně vyruší, naopak při lichém počtu použití per-partes (tzn. lichá derivace původní funkce) se znaménko výsledného operátoru změní. Na tomto místě je také vhodné zmínit fyzikální interpretaci adjungovaných rovnic z tabulky výše. Je vidět, že typ rovnice je ve všech případech zachován, ale mění se znaménka. Tato změna znamének má v některých případech zřejmou fyzikální interpretaci. Rovnice eliptického typu a vlnová rovnice jsou vůči této transformaci invariantní (jejich tvar zůstává nezměněn). U ostatních typů evolučních rovnic je adjungovaná rovnice ekvivalentní sledování původní rovnice zpět v čase, tzn. obrací se směr plynutí času, směr proudění a smysl difúze (lokální minima se prohlubují, lokální maxima rostou). Pro stacionární rovnice se pouze mění směr proudění. Z tohoto vyplývá, že adjungovaná metoda je naprosto nevhodná pro nestacionární problémy zahrnující disipaci (adjungovaná rovnice je nepodmíněně nestabilní).



### 4.3 Ukázka divergující úlohy – nestacionární vedení tepla

Jako ukázková úloha pro ukázání divergence adjungované metody v některých případech byla vybrána úloha nestacionárního 2D vedení tepla, protože její odvození je jednoduché a přímočaré, a zároveň má tato úloha zřejmou fyzikální interpretaci. Vzhledem k tomu, že tvar adjungované rovnice a tím i konvergence úlohy nezávisí na OP a PP, bude ukázáno pouze odvození adjungovaného operátoru bez OP a PP. Okrajové podmínky jsou předepsány pro tepelný tok a jsou uvažovány jako nulové, s výjimkou jedné stěny, kde je nastavena podmínka přestupu tepla do okolí. Tato úloha by byla řešitelná i jako 1D úloha, ale z důvodu větší obecnosti byla řešena jako dvojrozměrná.

Na tomto místě je třeba provést odvození adjungované rovnice pomocí spojitého přístupu. V tomto případě nelze přímo použít rovnice odvozené na konci kapitoly 3.2, protože tato úloha obsahuje vyšší než první derivace. Navíc pro účel demonstrace nepodmíněné nestability je pro tento typ úlohy vhodnější využít kanonických tvarů operátorů bez odvození uvedených v tabulce výše (Tabulka 2). V tomto případě je cílovým funkcionálem teplo sdělené do okolí za určitý čas na jednotku délky teplosměnné plochy a vazbovou rovnicí je Fourierova – Kirchhoffova rovnice vedení tepla v anulovaném tvaru.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot \nabla^2 T \rightarrow R = \frac{\partial T}{\partial t} - a \cdot \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t} - a \cdot \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (59)$$

V operátorovém zápisu jde o rovnici (60).

$$LT = \frac{\partial T}{\partial t} - a \cdot \nabla^2 T = 0 \quad (60)$$

Operátor  $L^*$  adjungovaný k operátoru  $L$  je definován níže.

$$L^*v = -\frac{\partial v}{\partial t} - a \cdot \nabla^2 v = f \quad (61)$$

V tomto zápisu se značením  $f$  rozumí funkce pravé strany, kterou lze určit provedením kompletní transformace včetně OP a PP a která nás pro zjištění konvergence nebo divergence úlohy nezajímá. Divergence úlohy je již nyní očekávatelná, ale provedme ještě jednu úpravu, aby na plno vynikla.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -a \cdot \nabla^2 v - f \quad (62)$$

Na první pohled je patrné, že rovnice výše je RVT s objemovým zdrojem (propadem) tepla, ale se záporným součinitelem teplotní vodivosti. Záporný součinitel teplotní vodivosti znamená, že teplo teče ve směru gradientu, nikoli proti němu, a tudíž ve směru nejrychlejšího růstu teploty, a ne nejrychlejšího poklesu teploty. Lze tedy říci, že teplo přitéká do míst lokálních



maxim teploty, čímž jejich teplota dále stoupá a odtéká z míst lokálních minim, jejichž teplota klesá. Toto je přesný opak gradientové difúze pozorované v přírodě (vedení tepla je specifický případ gradientové difúze), kde teplo přitéká do míst lokálních minim teploty, čímž jejich teplota stoupá a odtéká z míst lokálních maxim, jejichž teplota klesá a tímto se průběh teploty jakožto funkce souřadnice v čase postupně vyhlazuje. Jednoznačnou divergenci úlohy lze tedy vyhodnotit již nyní na základě této fyzikální analogie, ale pro úplnost zde uvedu ještě matematické zdůvodnění. Pro RVT lze na jednoduché oblasti (omezme se nyní na rovnici bez pravé strany, s homogenními OP a pouze s jednou prostorovou dimenzí, tzn rovnicí (63) ) nalézt analytické řešení ve tvaru (64).

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (63)$$

$$T = \sum_{m=1}^{\infty} C_m e^{-a \frac{m^2 \pi^2}{L^2} t} \sin\left(\frac{m \pi}{L} x\right) \quad (64)$$

Konstanty  $C_m$  se určí z PP. Je vidět, že řešení obsahuje exponenciálu se záporným exponentem, tudíž v čase klesá. Pokud za  $a$  dosadíme záporné číslo (případ adjungované rovnice), změní exponent znaménko a řešení bude v čase exponenciálně narůstat, což v konečném důsledku vede k divergenci řešení.



## 5 Ukázkové použití adjungované metody – spojitý přístup

Již v 90. letech minulého století byla adjungovaná metoda úspěšně využita k vylepšení různých návrhů letadel létajících jak v transsonickém, tak v nadzvukovém režimu. V transsonickém režimu lze použitím této metody často zamezit tvorbě rázových vln, nebo alespoň výrazně snížit jejich intenzitu. Toto vede k významné redukci (nebo úplnému odstranění) vlnového odporu, který je dominantním zdrojem odporu v nadzvukových (a často i v transsonických) rychlostech. Výhodou adjungované metody je fakt, že zvládne dopočítat i velmi malé změny tvaru (často výrazně menší, než je tloušťka mezní vrstvy), které ovšem mají klíčový vliv na tvorbu rázových vln a tím i na celkový součinitel odporu. Je to tedy jedna z metod použitelných pro potlačení nebo alespoň oddálení transsonické divergence. Jedna z ukázkových aplikací adjungovaného přístupu pro odstranění rázových vln na sací straně profilu je optimalizace křídla letounu Boeing 747-200, kterou provedl Antony Jameson [3].

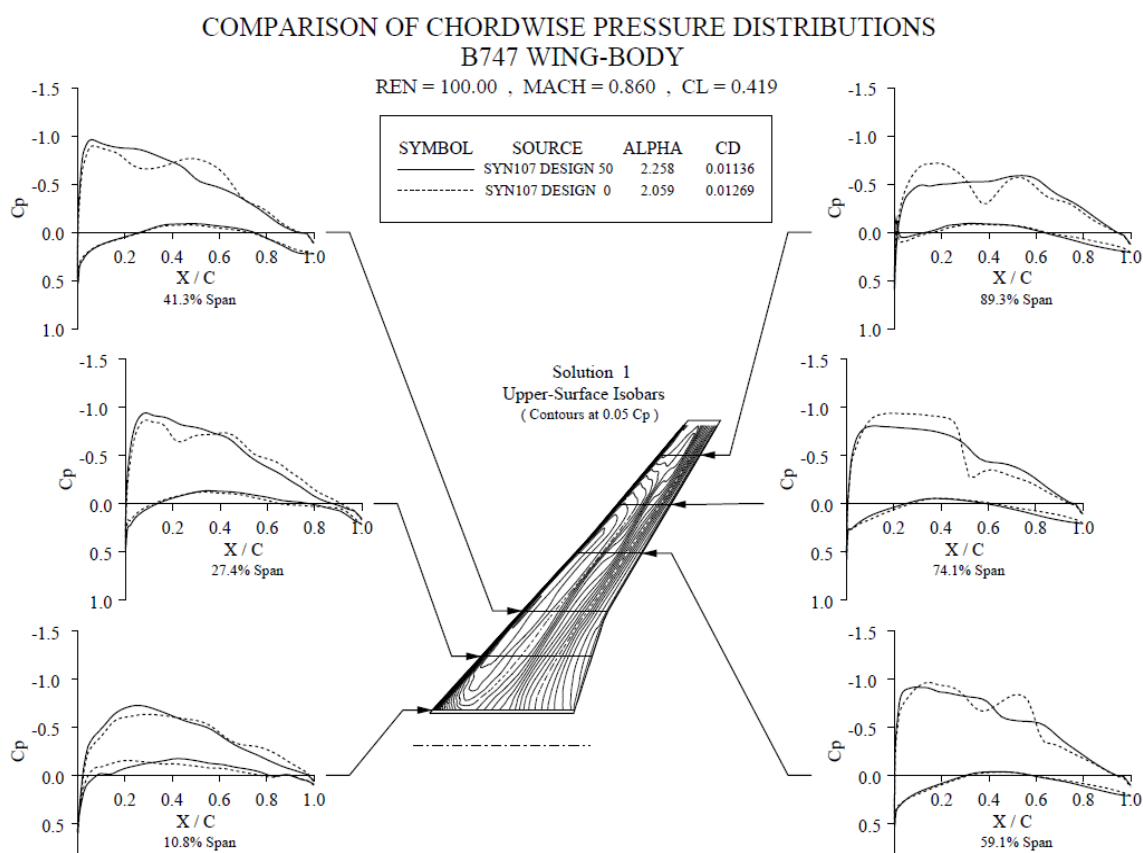
V případě této optimalizace byl použit spojitý adjungovaný přístup v kombinaci se stacionárními Navier – Stokesovými rovnicemi pro optimalizaci tvaru křídla Boeingu 747-200. Pro výpočet proudění byl použit model typu RANS spolu s Baldwin-Lomaxovým modelem turbulence. Tento model byl zvolen, protože výpočet byl prováděn pro běžné letové podmínky, kde nehrozí riziko odtržení proudění. Cílovou funkcí byl součinitel odporu, za podmínky zachování součinitele vztlaku, rozložení zatížení křídla a tloušťky profilu. Odpor by bylo možné snížit změnou rozložení zatížení po rozpětí křídla na eliptické, ale toto by mělo za následek zvýšení ohybového momentu v kořeni křídla. Tato změna by si tudíž vyžádala významnou úpravu konstrukce. Také by bylo možné zmenšit tloušťku profilu, což by ovšem mělo za následek snížení zásoby paliva nesené letounem a nežádoucí snížení ohybové únosnosti křídla. Podmínka zachování součinitele vztlaku je důležitá z hlediska zachování užitečné nosnosti letounu [3].

Machovo číslo pro optimalizační výpočty bylo zvoleno 0,86, což přibližně odpovídá maximálnímu Machovu číslu dosažitelnému před optimalizací bez významného zvýšení celkového odporu vlivem vlnového odporu křídel. Koeficient vztlaku křídla za těchto podmínek byl 0,42 a optimalizací nebyl změněn. Po započtení vztlaku trupu se součinitel vztlaku mírně zvýší, a to na 0,47. Z obrázku níže (Obrázek 1) je vidět, že po optimalizaci je křídlo zcela bez rázových vln i při takto vysokém Machově čísle. Součinitel odporu křídla se podařilo snížit z 0,01269 na 0,01136, což představuje redukci odporu o 10,5 %. Po započtení odporu trupu, který optimalizován nebyl, vychází redukce celkového součinitele odporu na 5 %. Při Machově čísle 0,9 již nedochází k úplné eliminaci rázových vln, ale jejich intenzita je značně snížena (viz Obrázek 2). Pro tuto hodnotu Machova čísla byl součinitel odporu křídla před optimalizací 0,01819, přičemž po optimalizaci klesl na 0,01293. V tomto případě se tedy jedná o redukci

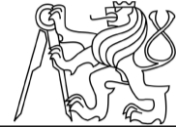


odporu o 29 %. Z tohoto vyplývá, že odpor křídla po optimalizaci při  $Ma = 0,9$  se přibližně rovná odporu původního křídla při  $Ma = 0,86$  [3].

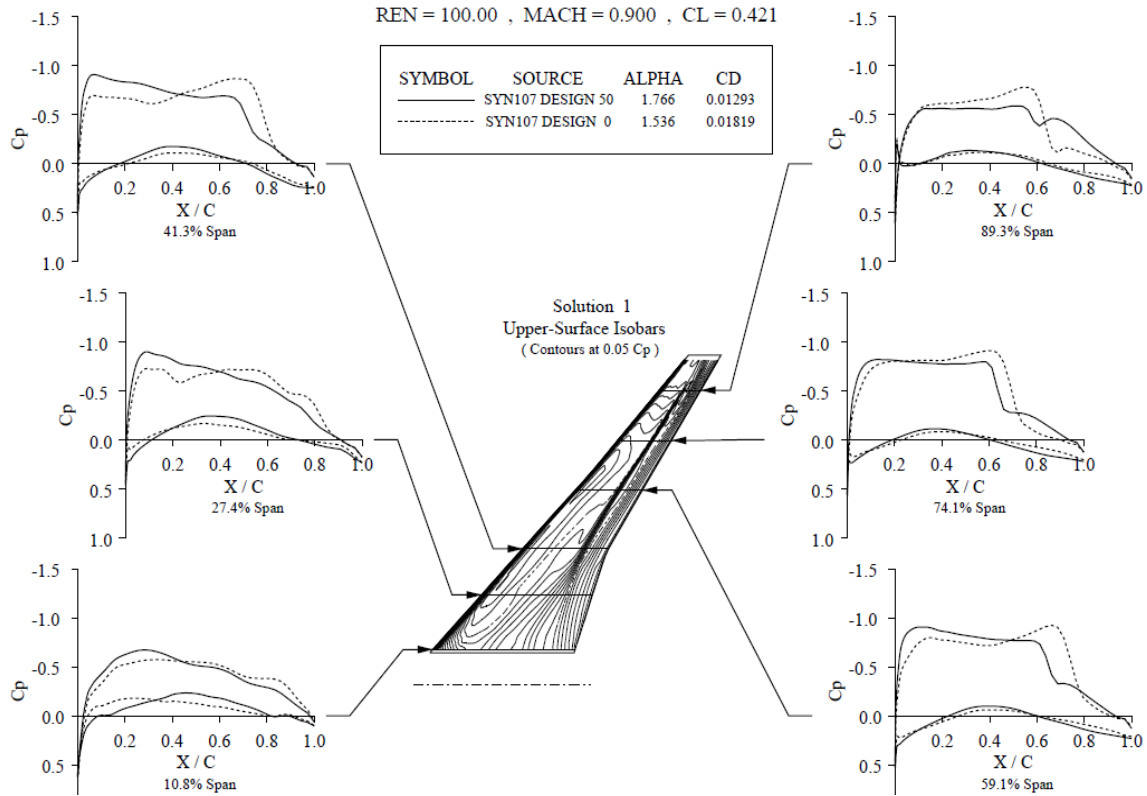
Provedení optimalizace v tomto případě znamená redukcí nákladů na palivo o cca 5 % při zachování původní cestovní rychlosti, nebo zvýšení cestovní rychlosti o 4,6 % při zachování nákladů na palivo. Křídlo Boeingu 747 mohlo být tímto způsobem modifikováno také proto, že má ve srovnání s křídly ostatních dopravních letadel poměrně velký úhel šípů a relativně štíhlý průřez s poměrem tloušťka profilu ku délce tělivity 8 %. Žádná z ostatních klíčových charakteristik křídla (součinitel vzlaku, rozložení zatížení po rozpětí, tloušťka profilu, délka tělivity, ...) nebyla touto optimalizací ovlivněna. Ze zkušeností lze říci, že většinu, zvláště starších, návrhů letadel by bylo možné tímto způsobem optimalizovat a ušetřit cca 3 – 5 % spotřeby paliva při zachování všech ostatních vlastností. Této úspory lze dosáhnout pomocí změn tvaru příliš malých na to, aby je bylo možné detekovat metodou pokus – omyl. Pokud by se navíc využilo adjungované metody pro optimalizaci poměru  $C_L/C_D$  již ve fázi návrhu letadla, mohla by být celková úspora ještě mnohem větší [3].



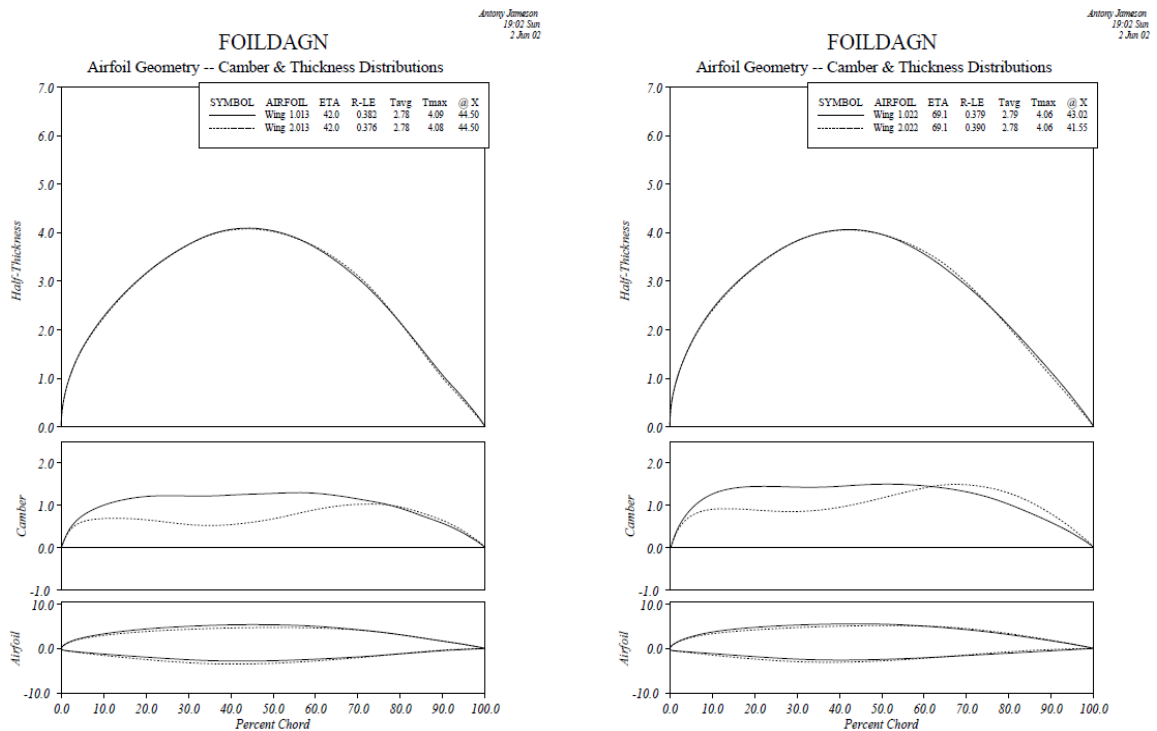
Obrázek 1 – Rozložení  $C_p$  na křídle letounu Boeing 747-200 při  $Ma = 0,86$  [3]



COMPARISON OF CHORDWISE PRESSURE DISTRIBUTIONS  
B747 WING-BODY



Obrázek 2 – Rozložení  $C_p$  na křídle letounu Boeing 747-200 při  $Ma = 0,9$  [3]



Obrázek 3 – Srovnání tvaru profilu před a po optimalizaci [3]



## 6 Optimalizace leteckého profilu – spojitý přístup

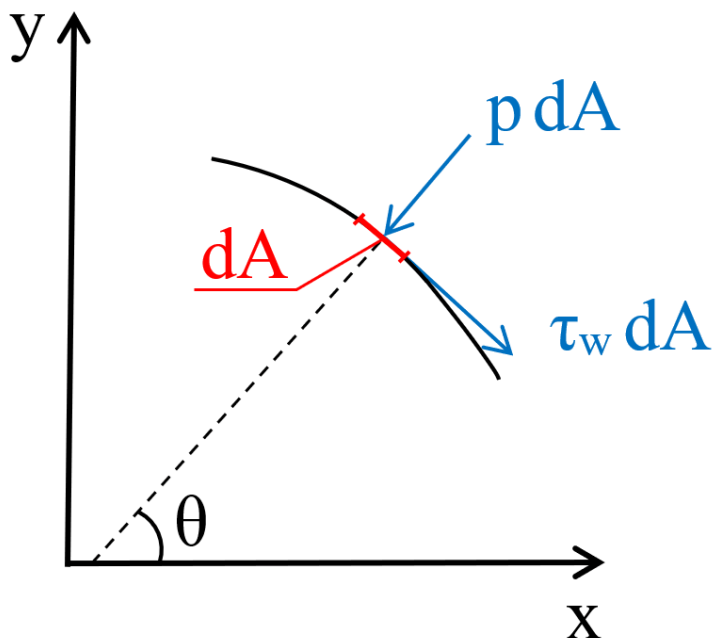
Vzhledem k limitacím adjungované metody zjištěným v kapitole 4.2 a 4.3 jsem se rozhodl úlohu optimalizace leteckého profilu formulovat jako úlohu optimalizace součinitele vztlaku. Volba cílové funkce v podobě součinitele vztlaku umožňuje získat přesné výsledky i pro řešení proudového pole jakožto stacionárního dvourozměrného nevazkého nestlačitelného proudění. I když je řešené proudění relativně specifické a získané výsledky platné pouze pro určité rozmezí hodnot podobnostních čísel ( $Ma \leq 0,3$ ;  $Re \rightarrow \infty$ ), stále toto řešení pokrývá relativně široké spektrum případů používaných v inženýrské praxi. Například jde o případy profilů používaných na listech rotorů větrných elektráren a o většinu profilů používaných u sportovních letadel. Pro řešení proudového pole byla zvolena teorie potenciálního proudění, protože nabízí výpočetně efektivní nástroje, je dobře prozkoumaná a obsahuje pouze rovnice vhodného (eliptického) typu. Tato teorie umožňuje stanovit součinitel vztlaku, protože tento lze relativně přesně získat integrací rozložení tlaku po profilu. Za tímto účelem je ovšem nutné teorii doplnit vynucením odtržení proudění na odtokové hraně. Teorii potenciálního proudění však nelze získat součinitel odporu, protože se dá ukázat, že odpor libovolného tělesa ve stacionárním proudovém poli, které vyhovuje předpokladům potenciálního proudění, je vždy nulový (viz d' Alembertův paradox).

Velkým problémem při topologické optimalizaci je fakt, že se během procesu optimalizace mění tvar výpočtové oblasti. Toto přináší problémy s výpočtem gradientu, protože výpočet gradientu nelze provést přímo. Parametry popisující tvar profilu v tomto případě vystupují nejen uvnitř integrálu, ale definují i samotnou oblast integrace. Vzhledem k výše zmíněnému je tedy nejdříve třeba úlohu transformovat do neměnné referenční konfigurace a vztah referenční – aktuální konfigurace vyjádřit pomocí transformačních vztahů (Jacobiho matice transformace). Po provedení transformace integrujeme přes pevnou oblast, a tudíž již neurčujeme Sobolevův gradient vzhledem k parametrům popisujícím tvar profilu, ale vzhledem k použité transformaci tvaru.



## 6.1 Silové působení na profil a součinitel vztlaku

Celkovou sílu působící na element povrchu vztlakového profilu lze rozdělit na sílu tlakovou a třecí. Vzhledem ke zvolené metodě řešení bude vztlaková síla získána pouze z tlakové síly. Rozložení sil viz Obrázek 4.



Obrázek 4 – Síly působící na element povrchu profilu

$$dF_y = -p \cdot \sin\theta \cdot dA - \tau_w \cdot \cos\theta \cdot dA \quad (65)$$

$$dF_x = -p \cdot \cos\theta \cdot dA + \tau_w \cdot \sin\theta \cdot dA \quad (66)$$

Z obrázku výše lze zapsat vztahy pro vztlakovou a odporovou sílu (vztahy (65) a (66)). Vzhledem k tomu, že uvažujeme proudění nevazké nestlačitelné tekutiny, tedy platí  $\tau_w = 0$ , lze vztah (65) zjednodušit na (67) a z něj následně vyjádřit vztahy (68) a (69).

$$dF_y = -p \cdot \sin\theta \cdot dA \quad (67)$$

$$F_y = - \int_A p \cdot \sin\theta \cdot dA \quad (68)$$

$$C_y = \frac{F_y}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot c_\infty^2} = - \frac{2}{\rho \cdot S \cdot c_\infty^2} \int_A p \cdot \sin\theta \cdot dA \quad (69)$$

Jelikož délka tělvy profilu je daná, je plocha průmětu profilu do půdorysny  $S$  konstantní, a proto pro optimalizaci teoreticky stačí uvažovat sílu  $F_y$ . Tato definice ovšem nebude schopna zachytit případné nežádoucí změny délky tělvy profilu. Přesná definice používané cílové funkce je založena na součiniteli vztlaku a je uvedena dále v této práci.





## 6.2 Potenciální proudění

Teorie potenciálního proudění slouží k řešení nevazkého nestlačitelného proudění. Teorii lze aplikovat na 2D i 3D případy proudění, přičemž v této práci bude použita 2D varianta. Tato teorie je založena na systému Eulerových rovnic. Označme  $u, v$  složky rychlosti ve směru  $x$  a  $y$ . Soustavu Eulerových rovnic pak tvoří rovnice (70) – (72). Rovnice (71) a (72) této soustavy lze několika postupnými úpravami převést na rovnice (73) a (74).

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (70)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (71)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (72)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = -v \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (73)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = u \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (74)$$

Rotaci rychlostního pole (ve 3D) lze definovat pomocí Hamiltonova operátoru nabla.

$$\nabla \times \vec{c} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (75)$$

Pokud se omezíme na 2D proudění ( $w \equiv 0, u \neq u(z), v \neq v(z)$ ), pak jedinou nenulovou složkou rotace je složka ve směru  $z$ . Za podmínky nulové rotace pak lze Eulerovy rovnice integrovat. Touto integrací je možné dospět ke 2D analogii Bernoulliho rovnice (76) a z této rovnice již snadno vyjádříme rozložení tlaku na povrchu profilu (77).

$$\frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = konst. = \frac{c_\infty^2}{2} + \frac{p_\infty}{\rho} \quad (76)$$

$$p = \rho \left( \frac{c_\infty^2}{2} - \frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2} \right) + p_\infty \quad (77)$$



Podmínku nulové rotace lze zapsat pomocí Hamiltonova operátoru, přičemž využijeme vztah (75).

$$\nabla \times \vec{c} = \vec{0} \quad (78)$$

Definujeme skalární funkci  $\Phi$  tak, že platí vztah (79).

$$\vec{c} = \nabla \Phi \quad (79)$$

Pokud přijmeme tento předpoklad, pak lze matematicky dokázat, že rychlostní pole definované pomocí této skalární funkce bude vždy splňovat podmínku nulovosti rotace, a to ve 2D i 3D případě. Proto ve 2D definujeme rychlosti následujícím způsobem.

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

Funkci  $\Phi$  nazýváme rychlostním potenciálem. Rovnice kontinuity (70) zapsaná pomocí rychlostního potenciálu je PDR 2. řádu.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \Delta \Phi = 0 \quad (80)$$

Jedná se tedy o harmonickou PDR v proměnných  $x, y$ , ze které lze při definici vhodných OP získat řešení pro funkci  $\Phi$ , a tedy i pro rychlostní pole. Soustava 3 Eulerových rovnic pro neznámé  $u, v, p$  se tímto tedy redukuje na jedinou rovnici (80) a vztahy pro výpočet  $u, v$  a  $p$  z funkce  $\Phi$ . Tato rovnice je tedy vazbovou rovnicí řešeného optimalizačního problému. Dále lze vyjádřit výslednou sílu působící na profil a součinitel vztlačku pomocí této funkce  $\Phi$ .

$$F_y = - \int_A p \cdot \sin \theta \cdot dA = - \int_A \left( \rho \left( \frac{c_\infty^2}{2} - \frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2} \right) + p_\infty \right) \cdot \sin \theta \cdot dA \quad (81)$$

$$F_y = - \int_A \left( \frac{\rho}{2} \left( c_\infty^2 - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right) + p_\infty \right) \cdot \sin \theta \cdot dA \quad (82)$$

$$C_y = - \frac{2}{\rho \cdot S \cdot c_\infty^2} \int_A \left( \rho \left( \frac{c_\infty^2}{2} - \frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2} \right) + p_\infty \right) \cdot \sin \theta \cdot dA \quad (83)$$

$$C_y = - \int_A \frac{1}{S} \left( 1 - \frac{u^2}{c_\infty^2} - \frac{v^2}{c_\infty^2} + \frac{2 \cdot p_\infty}{\rho \cdot c_\infty^2} \right) \cdot \sin \theta \cdot dA \quad (84)$$



### 6.3 Bezrozměrové proměnné a převod do referenční konfigurace

Zavedme nyní bezrozměrové proměnné  $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$ ,  $\hat{p}_\infty$  a funkci  $\phi$  následujícím způsobem.

$$\hat{u} = \frac{u}{c_\infty}, \quad \hat{v} = \frac{v}{c_\infty}, \quad \hat{p}_\infty = \frac{2 \cdot p_\infty}{\rho \cdot c_\infty^2}, \quad \phi = \frac{\Phi}{c_\infty}$$

Dosazením do těchto definičních vztahů lze ukázat souvislosti bezrozměrových veličin (vztahy (85) a (86)). Také rovnici kontinuity (80) lze přepsat v bezrozměrových proměnných a vyjádřit bezrozměrovým potenciálem  $\phi$  (87).

$$\hat{u} = \frac{1}{c_\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\Phi}{c_\infty} \right) = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (85)$$

$$\hat{v} = \frac{1}{c_\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\Phi}{c_\infty} \right) = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (86)$$

$$\frac{1}{c_\infty} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{c_\infty} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{c_\infty} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{1}{c_\infty} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\Phi}{c_\infty} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\Phi}{c_\infty} \right) = \Delta \phi = 0 \quad (87)$$

Vztah (84) pro součinitel vztlaku lze vyjádřením v bezrozměrových proměnných značně zjednodušit.

$$C_y = - \int_A \frac{1}{S} (1 - \hat{u}^2 - \hat{v}^2 + \hat{p}_\infty) \cdot \sin \theta \cdot dA \quad (88)$$

Po dosazení za  $S$  a  $dA$  pomocí šířky profilu  $B$  (rozměr ve směru osy  $z$ ) lze získat vztah (89). V tomto vztahu je  $L$  délka tětiny profilu. Navíc lze označit konstantu  $\gamma = 1 + \hat{p}_\infty$ .

$$C_y = - \int_l \frac{1}{L} (1 - \hat{u}^2 - \hat{v}^2 + \hat{p}_\infty) \cdot \sin \theta \cdot dl \quad (89)$$

$$C_y = - \int_l \frac{1}{L} \left( \gamma - \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right) \cdot \sin \theta \cdot dl \quad (90)$$

V souladu s notací používanou v matematickém úvodu do optimalizace má  $\phi$  význam  $w(x)$  jakožto (jediné) proměnné pole úlohy. Součinitel vztlaku je popsán v aktuální konfiguraci, stejně jako všechny funkce. Vzhledem k tomu, že křivka  $l$  závisí na tvaru profilu, který chceme optimalizovat, je nyní potřeba integrál převést na integrál přes referenční oblast. V této referenční oblasti definujeme referenční tvar profilu (např. NACA 0012) a definujeme zobrazení z referenční do aktuální konfigurace. Souřadnice v referenční konfiguraci budu značit velkými písmeny, v aktuální malými. V referenční i aktuální konfiguraci uvažujeme kartézské báze a definujeme zobrazení mezi nimi. Jako první můžeme definovat parametrizaci referenčního profilu  $P_0: s \rightarrow \vec{X}$ , dále definujeme parametrizaci v aktuální konfiguraci  $P: s \rightarrow \vec{x}$  a zobrazení z referenční do aktuální konfigurace.



$$T_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}, \quad J = \det(T)$$

$P_0$  je parametrizace profilu v referenční konfiguraci, tudíž je neměnná a nepatří mezi optimalizované parametry. Vyjádřením funkce  $\sin(x)$  lze získat vztah (91).

$$\sin\theta = \frac{dx}{dl} \rightarrow \sin\theta \, dl = dx = \frac{\partial x}{\partial X_j} dX_j = \frac{\partial x}{\partial X_j} \frac{dX_j}{ds} ds = T_{1j} \dot{P}_{0j} ds = T_{1j} dl_{0j} \quad (91)$$

$$C_y = - \int_l \frac{1}{L} (1 - \hat{u}^2 - \hat{v}^2 + \hat{p}_\infty) \cdot dx \quad (92)$$

$$C_y = - \int_l \frac{1}{L} (\gamma - \hat{u}^2 - \hat{v}^2) \cdot dx \quad (93)$$

Vzhledem k tomu, že znaménko diferenciálu  $dx$  závisí na směru procházení křivky jsem do integrálu ovšem vnesl nejednoznačnost jeho znaménka. Z tohoto důvodu je nutné správně volit směr procházení křivky. Víme, že působení tlaku na spodní stranu profilu generuje kladný součinitel vztlaku, působení tlaku na horní stranu profilu pak součinitel záporný, viz vztahy (65) a (67). Vzhledem k tomu, že výraz  $(\gamma - \hat{u}^2 - \hat{v}^2)$  má význam tlaku, musí mít  $dx$  na spodní straně profilu záporné znaménko, na horní straně profilu pak znaménko kladné. Z tohoto již plyne, že směr procházení křivky definující tvar profilu musí být vždy ve směru hodinových ručiček. Z důvodu jednoduššího odvození rovnic budu pro začátek vyšetřovat optimalizaci parametru (94), protože jej lze snáze diferencovat.

$$L \cdot C_y = - \int_l (\gamma - \hat{u}^2 - \hat{v}^2) \cdot dx \quad (94)$$

V dalších krocích je možno zahrnout podmínku neměnné délky těhvy profilu pomocí další vazbové rovnice nebo penaltovou formulací. Převod derivací do referenční konfigurace lze provést způsobem dle (95). Vazbovou rovnicí lze v referenční konfiguraci vyjádřit jakožto rovnicí (96), která je však rovnicí s nekonstantními koeficienty.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi}{\partial X_j} \frac{\partial X_j}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi}{\partial X_j} T_{ji}^{-1} \quad (95)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial X_j \partial X_k} T_{ji}^{-1} T_{ki}^{-1} = 0 \quad (96)$$

Již z dosavadního postupu je jasně vidět relativní neschůdnost tohoto velmi obecného přístupu. Navíc v tomto přístupu nebyla zatím vůbec řešena podmínka kompatibility (integrovatelnosti) Jacobiho matice zobrazení  $T_{ij}$ . Z tohoto vyplývá, že by bylo nutné přidat další „tvrdou“ podmínku mezi vazbové rovnice, protože integrovatelnost Jacobiho matice nutně musí



být splněna v každém kroku, jinak nejde o platnou definici zobrazení. Možným dalším řešením je definovat zobrazení přímo, a ne přes Jacobiho matici. Potenciální výhodou tohoto přístupu je jeho obecnost a relativně nízká náročnost na algoritmicizaci a strojový čas, protože po vyjádření se řeší stále tytéž rovnice ve stále stejné oblasti se stále stejným typem OP (díky transformaci na referenční oblast). Jediné, co se mění jsou funkce násobící jednotlivé členy rovnic, protože transformací vznikly z původních rovnic s konstantními koeficienty rovnice s koeficienty nekonstantními. Touto formulací není ohrožena stabilita úlohy, protože i po zcela obecné transformaci vazbová rovnice stále zůstává eliptického typu v celé referenční oblasti.

Vzhledem k výše uvedeným problémům a vzhledem k tomu, že pro řešení takto definovaných rovnic (převedených do referenční konfigurace) není možné použít panelovou metodu, zvolím jiný přístup k řešení problému. Tento problém by byl i v této formulaci pravděpodobně řešitelný, ale bylo by nutné vzniklé rovnice řešit jiným způsobem (např. metodou konečných diferencí, ...). Vzhledem k nemožnosti použití panelové metody, která je velmi účinným, spolehlivým a výpočetně efektivním nástrojem pro řešení potenciálního proudění, by také výsledná úloha byla pravděpodobně náročnější na výpočetní čas než formulace, kde by bylo možné panelovou metodu použít. Také by mohl nastat závažný problém s definicí OP v referenční konfiguraci, zvláště pak v adjungované rovnici. Celkově by tato formulace vedla k příliš komplikovanému odvození i řešení. Také tyto problémy byly dalším důvodem, proč jsem se rozhodl změnit formulaci úlohy.



## 7 Optimalizace leteckého profilu – diskretní přístup

### 7.1 Výchozí vztahy a základní idea iteračního výpočtu

V diskretní formulaci úlohy je vhodné vyjít z některých vztahů již dříve odvozených v kapitole 6. Velmi důležitými jsou v tomto kontextu vztahy pro součinitel vztlaku, zejména po převodu do bezrozměrových proměnných a vyjádření funkce  $\sin(\theta)$ . Vyjdeme proto ze vztahu (92), ve kterém délku tělivity profilu vytkneme z integrálu a převedeme na druhou stranu. Tímto dostaneme vztah (97). Tento integrální vztah je vyjádřen v aktuální konfiguraci, stejně jako vazbová rovnice (98). Alternativně lze místo vztahu (97) použít též vztah (94), který se liší pouze zavedením konstanty  $\gamma$ .

$$L \cdot C_y = - \int_l (1 - \hat{u}^2 - \hat{v}^2 + \hat{p}_\infty) \cdot dx \quad (97)$$

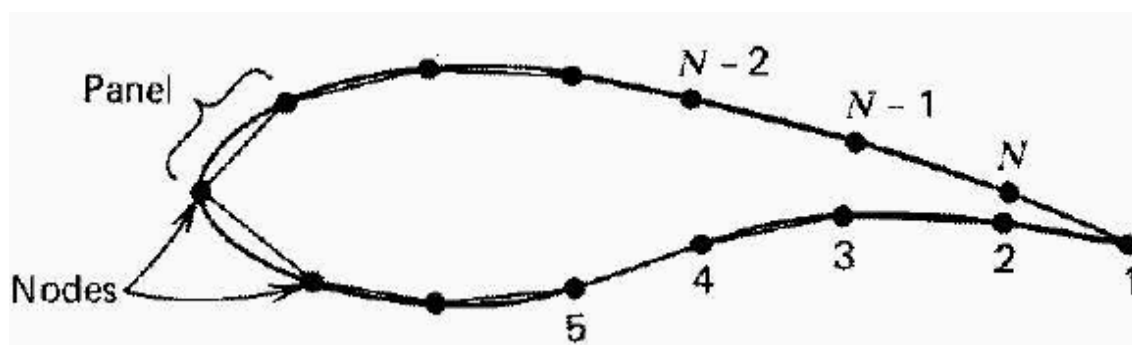
$$\Delta\phi = 0 \quad (98)$$

Pro zjednodušení operací, snazší vyjádření vztahů a zachování výhodných vlastností rovnic nebude úloha transformována do referenční konfigurace, ale pro optimalizaci použijí postup analogický k postupu „updated Lagrangian“ používanému pro řešení nelineárních úloh v mechanice poddajných těles. Procedura „updated Lagrangian“ v MKP spočívá v tom, že se místo výpočtů ve finální konfiguraci (kterou neznáme) nebo transformace do referenční konfigurace (která zpravidla znamená výrazné zkomplikování rovnic a vztahů) použije iterační postup. Při malém kroku mezi iteracemi lze uvažovat, že referenční a aktuální konfigurace téměř splývají. Proto lze rovnice vyřešit bez transformace v referenční konfiguraci, aniž bychom se dopustili významné chyby. Následně z řešení rovnic spočítáme změnu tvaru v dané iteraci, z ní určíme aktuální tvar a konfiguraci následně „updatujeme“, tzn. prohlásíme nově dopočítanou aktuální konfiguraci za referenční, znovu v ní vyjádříme všechny rovnice a pokračujeme v iterování až do dosažení konvergence. Použití tohoto iteračního algoritmu v optimalizaci má navíc tu výhodu, že pro každou iteraci rovnice přesně platí v referenční konfiguraci (např. součinitel vztlaku je dán tím, jak profil právě vypadá) a ne v konfiguraci dopočítávané, na rozdíl od mechaniky poddajných těles, kde rovnice rovnováhy přesně platí vždy v aktuální (dopočítávané) konfiguraci, nikoli v referenční. Proto může být optimalizační úloha výrazně méně citlivá na velikost iteračního kroku.

Dalším zjednodušením je samotné použití diskretního přístupu. V tuto chvíli je tedy nutné zformulovat diskretní analogii spojité úlohy popsané výše v kapitole 6. Diskretní cílová funkce musí charakterem odpovídat spojité a diskretní vazbové rovnice musí, alespoň za určitých podmínek kladených na převod do diskretního tvaru, zaručovat splnění vazbových rovnic spojité úlohy. Diskretizace optimalizovaného profilu a řešení proudění bude provedeno panelovou



metodou, tzn. aproximací tvaru profilu konečným počtem úseček (tzv. panelů). Panelových metod existuje nepřeberné množství, přičemž jednotlivé panelové metody vychází ze stejné základní myšlenky (nahrazení tvaru profilu konečným počtem panelů), ale liší se konkrétní formulací rovnic. Nejjednodušší prakticky použitelnou verzí panelové metody je Hessova – Smithova panelová metoda (Douglas Aircraft, 1966). V této verzi panelové metody se ve středu každého panelu nachází zdroj a potenciální vír. Intenzita zdroje je pro každý panel jiná, cirkulace potenciálního víru je stejná pro celý profil. Jelikož je spojitá vazbová rovnice lineární a homogenní, platí, že každá lineární kombinace řešení je také řešením. Jelikož jednosměrný proud, bodový zdroj i potenciální vír jsou vždy řešením spojitě vazbové rovnice, je jejich libovolná kombinace také řešením. Z tohoto důvodu použití panelové metody pro diskrétní řešení problému zaručuje splnění spojitě vazbové rovnice a panelová metoda je tedy validním způsobem definice diskrétních vazbových rovnic. Diskrétní analogie součinitele vztlaku bude získána prostou aproximací vztahu (94) součtem přes panely, přičemž na každém panelu je předpokládáno konstantní rozložení tlaku. Tímto dostáváme vztah (99). Orientace panelů a pořadí bodů je definována na obrázku níže [5].



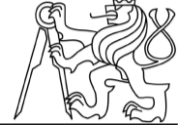
Obrázek 5 – Číslování uzlů a orientace panelů [5]

$$L \cdot C_y = - \sum_{i=1}^N (\gamma - \hat{u}_i^2 - \hat{v}_i^2) \cdot \Delta x_i \quad (99)$$

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \quad x_{N+1} \equiv x_1 \quad (100)$$

V těchto vztazích je N počet panelů a bezrozměrové rychlosti jsou definovány vždy ve středu panelu. Tento vztah lze přepsat pomocí tečné rychlosti (normálová rychlost je na povrchu profilu z definice nulová – povrch je neprostupná stěna). Jelikož uvažujeme nevazké nestlačitelné proudění, je tečná rychlost na povrchu nenulová. Z Pythagorovy věty platí pro rychlosti vztah (101), přičemž  $\hat{c}_{ti}$  je tečná rychlost na i-tém panelu.

$$\hat{c}_{ti}^2 = \hat{u}_i^2 + \hat{v}_i^2 \quad (101)$$



$$L \cdot C_y = - \sum_{i=1}^N (\gamma - \hat{c}_{ti}^2) \cdot \Delta x_i \quad (102)$$

Vazbové rovnice pro diskrétní úlohu jsou rovnicemi panelové metody, kde význam závisle proměnných úlohy přebírají intenzity zdrojů na jednotlivých panelech a intenzita cirkulace na profilu. Rovnice panelové metody jsou rovnice vynucující splnění OP spojité úlohy (nulovost normálové složky rychlosti na povrchu profilu), protože rovnice (98) je identicky splněna pro libovolnou kombinaci jednosměrných proudů, bodových zdrojů a potenciálních vírů. Rovnice panelové metody jsou lineární a lze je zapsat ve standardním tvaru používaném pro soustavy lineárních rovnic.

$$Aw = b \quad (103)$$

Matice A je plná matice koeficientů bez speciálních vlastností (symetrie, ...), b je vektor pravé strany a vektor w je definován jako N+1 prvkový vektor závisle proměnných úlohy (vektor intenzit zdrojů na jednotlivých panelech a intenzity cirkulace potenciálního víru kolem profilu). Pro Hessovu – Smithsovu variantu panelové metody lze odvodit matici A a vektor b ve tvaru viz vztahy (104) – (109). Výraz (i = 1, N) znamená, že se počítá pouze přes první a N-tý panel [5].

$$w = [q_1, \dots, q_N, \Gamma]^T$$

$$A_{ij} = \frac{1}{2\pi} \left( \sin(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} + \cos(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} \right) \quad \text{pro } i, j = 1 \div N \quad (104)$$

$$A_{i,N+1} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left( \cos(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} - \sin(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} \right) \quad \text{pro } i = 1 \div N \quad (105)$$

$$A_{N+1,j} = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1,N} \left( \sin(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} - \cos(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} \right) \quad \text{pro } j = 1 \div N \quad (106)$$

$$A_{N+1,N+1} = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1,N} \sum_{j=1}^N \left( \sin(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} + \cos(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} \right) \quad (107)$$

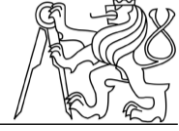
$$b_i = c_\infty \sin(\theta_i - \alpha) \quad \text{pro } i = 1 \div N \quad (108)$$

$$b_{N+1} = -c_\infty \cos(\theta_1 - \alpha) - c_\infty \cos(\theta_N - \alpha) \quad (109)$$

Z celého vektoru b lze tedy vytknout rychlost  $c_\infty$ . Stejně jako v kapitole 6.3 používám pro bezrozměrové proměnné značení se střechou.

$$b = c_\infty \hat{b} \quad (110)$$





$$Aw = c_\infty \hat{b} \quad (111)$$

$$A\hat{w} = \hat{b} \quad (112)$$

$$\hat{w} = \frac{w}{c_\infty} \quad (113)$$

Z Hessovy-Smithovy panelové metody lze tudíž získat přímo bezrozměrové tečné rychlosti na jednotlivých panelech vydělením definičního vztahu (114) rychlostí  $c_\infty$ .

$$c_{ti} = c_\infty \cos(\theta_i - \alpha) + \sum_{j=1}^N \frac{w_j}{2\pi} \left( \sin(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} - \cos(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} \right) + \frac{w_{N+1}}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left( \sin(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} + \cos(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} \right) \quad (114)$$

$$\hat{c}_{ti} = \frac{c_{ti}}{c_\infty} = \cos(\theta_i - \alpha) + \sum_{j=1}^N \frac{\hat{w}_j}{2\pi} \left( \sin(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} - \cos(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} \right) + \frac{\hat{w}_{N+1}}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left( \sin(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} + \cos(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} \right) \quad (115)$$

V této úloze tedy platí následující vztahy. Význam značení je v souladu s notací používanou v kapitole 3.1.

$$R = A\hat{w} - \hat{b} = 0 \quad (116)$$

$$I = L \cdot C_y = \sum_{i=1}^N (\hat{c}_{ti}^2 - \gamma) \cdot \Delta x_i \quad (117)$$

$$F = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T \quad (118)$$

Hodnoty  $x_i$  jsou konstantami (na začátku výpočtu se pevně zvolí a dále se s nimi již nijak nemanipuluje). Protože platí rovnice (100), jsou hodnoty  $\Delta x_i$  též konstanty. Na základě výše uvedeného tedy platí identity níže.

$$\frac{\partial \Delta x_i}{\partial \hat{w}_k} = 0, \quad \frac{\partial \Delta x_i}{\partial F_k} = 0 \quad (119)$$



## 7.2 Odvození optimalizace adjungovanou metodou

Soustava řešených rovnic přechází dle kapitoly 3.1 na dvě soustavy lineárních rovnic (rovnice (120) a (121)). Dá se také odvodit vztah (122) pro derivaci cílové funkce podle proměnných  $w$ . V tomto vztahu je matice  $C$  maticí parciálních derivací bezrozměrových tečných rychlostí na jednotlivých panelech podle jednotlivých prvků vektoru  $w$ . Konkrétní vyjádření prvků této matice viz (123) a (124). Také lze symbolicky vyjádřit gradient a jednotlivé derivace v něm vystupující v podobě vztahů (125) – (127).

$$A\hat{w} = \hat{b} \quad (120)$$

$$A^T \lambda = - \left( \frac{\partial I}{\partial \hat{w}} \right)^T \quad (121)$$

$$\left( \frac{\partial I}{\partial \hat{w}} \right) = 2(\Delta x \hat{c}_t)^T C \quad (122)$$

$$C_{ik} = \frac{\partial \hat{c}_{ti}}{\partial \hat{w}_k} = \frac{1}{2\pi} \left( \sin(\theta_i - \theta_k) \beta_{ik} - \cos(\theta_i - \theta_k) \ln \frac{r_{ik+1}}{r_{ik}} \right) \quad \text{pro } k = 1 \div N \quad (123)$$

$$C_{i,N+1} = \frac{\partial \hat{c}_{ti}}{\partial \hat{w}_{N+1}} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left( \sin(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} + \cos(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} \right) \quad (124)$$

$$G_k = \frac{\partial \phi}{\partial F_k} = \frac{\partial I}{\partial F_k} + \lambda_l \cdot \frac{\partial R_l}{\partial F_k} \quad (125)$$

$$\frac{\partial I}{\partial F_k} = 2 \sum_{i=1}^N \Delta x_i \hat{c}_{ti} \frac{\partial \hat{c}_{ti}}{\partial F_k} \quad (126)$$

$$\frac{\partial R_l}{\partial F_k} = \frac{\partial}{\partial F_k} (A_{lm} \hat{w}_m - \hat{b}_l) = \frac{\partial A_{lm}}{\partial F_k} \hat{w}_m - \frac{\partial \hat{b}_l}{\partial F_k} \quad (127)$$

Derivace vektoru  $\hat{c}_t$ , matice  $A$  a vektoru  $\hat{b}$  lze získat semianalyticky a tím výrazně zredukovat počet vyčíslovaných numerických derivací, což šetří výpočetní čas (kompletní derivace všech vztahů viz Příloha 7.2 – Podrobné odvození rovnic pro optimalizaci). V konečném důsledku lze dojít k tomu, že je potřeba spočítat numericky pouze následující derivace.

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial F_k}, \quad \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial F_k}, \quad \frac{\partial r_{ij}}{\partial F_k}$$

K numerickému vyčíslení těchto derivací bude využito přímo definice parciální derivace. Bylo by možné použít vícebodovou aproximaci parciální derivace vycházející z Taylorova



rozvoje, ale výpočtové prostředí MATLAB pracuje dostatečně přesně a není příliš citlivé na dělení malými čísly. Z tohoto důvodu postačuje vztah (128), i když jsem si vědom jeho možné problematičnosti.

$$\frac{\partial r_{ij}}{\partial F_k} \cong \frac{r_{ij}(F_1, \dots, F_{k-1}, F_k + \delta, F_{k+1}, \dots, F_m) - r_{ij}(F_1, \dots, F_m)}{\delta} \quad (128)$$

Vztahy pro zbylé dvě derivace jsou analogické.  $\delta$  musí být voleno s ohledem na numerické vlastnosti výpočtu (co nejmenší, ale ne příliš malé). Vzhledem k hodnotám ostatních veličin a s ohledem na numerické chování úlohy byla zvolena hodnota  $\delta = 10^{-6}$ , která se zpočátku během výpočtů osvědčila, nicméně následně musela být z důvodu stability snížena na  $\delta = 10^{-8}$ . Nyní zavedme pro účely programování pomocné proměnné.

$$dIdFk1_i = -\sin(\theta_i - \alpha) \frac{\partial \theta_i}{\partial F_k} \quad (129)$$

$$dIdFk2_{ij} = \cos(\theta_i - \theta_j) \left( \frac{\partial \theta_i}{\partial F_k} - \frac{\partial \theta_j}{\partial F_k} \right) \beta_{ij} + \sin(\theta_i - \theta_j) \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial F_k} \quad (130)$$

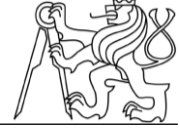
$$dIdFk3_{ij} = -\sin(\theta_i - \theta_j) \left( \frac{\partial \theta_i}{\partial F_k} - \frac{\partial \theta_j}{\partial F_k} \right) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} + \cos(\theta_i - \theta_j) \frac{\left( \frac{\partial r_{ij+1}}{\partial F_k} r_{ij} - r_{ij+1} \frac{\partial r_{ij}}{\partial F_k} \right)}{r_{ij} r_{ij+1}} \quad (131)$$

$$dIdFk4_{ij} = \cos(\theta_i - \theta_j) \left( \frac{\partial \theta_i}{\partial F_k} - \frac{\partial \theta_j}{\partial F_k} \right) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} + \sin(\theta_i - \theta_j) \frac{\left( \frac{\partial r_{ij+1}}{\partial F_k} r_{ij} - r_{ij+1} \frac{\partial r_{ij}}{\partial F_k} \right)}{r_{ij} r_{ij+1}} \quad (132)$$

$$dIdFk5_{ij} = -\sin(\theta_i - \theta_j) \left( \frac{\partial \theta_i}{\partial F_k} - \frac{\partial \theta_j}{\partial F_k} \right) \beta_{ij} + \cos(\theta_i - \theta_j) \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial F_k} \quad (133)$$

Konkrétní význam všech těchto pomocných proměnných a jejich rigorózní odvození viz Příloha 7.2 – Podrobné odvození rovnic pro optimalizaci. Dá se ukázat, že pomocí těchto proměnných lze vyčíslit velkou většinu derivací vystupujících ve vyjádření gradientu. Derivaci bezrozměrové tečné rychlosti a všechny ostatní derivace potřebné pro vyčíslení gradientu tedy zapíšeme pomocí pomocných proměnných. Následně můžeme číselně vyjádřit k-tý prvek gradientu dle vztahu (141). Pro updatování konfigurace profilu se následně využije gradient násobený iteračním krokem dle vztahu (142).

$$\frac{\partial \hat{c}_{ti}}{\partial F_k} = dIdFk1_i + \sum_{j=1}^N \left[ \frac{\hat{w}_j}{2\pi} (dIdFk2_{ij} - dIdFk3_{ij}) + \frac{\hat{w}_{N+1}}{2\pi} (dIdFk4_{ij} + dIdFk5_{ij}) \right] \quad (134)$$



$$\frac{\partial A_{lm}}{\partial F_k} = \frac{1}{2\pi} (dIdFk4_{lm} + dIdFk5_{lm}) \quad \text{pro } l, m = 1 \div N \quad (135)$$

$$\frac{\partial A_{lN+1}}{\partial F_k} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N (dIdFk3_{lj} - dIdFk2_{lj}) \quad \text{pro } l = 1 \div N \quad (136)$$

$$\frac{\partial A_{N+1,m}}{\partial F_k} = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1,N} (dIdFk2_{im} - dIdFk3_{im}) \quad \text{pro } m = 1 \div N \quad (137)$$

$$\frac{\partial A_{N+1,N+1}}{\partial F_k} = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1,N} \sum_{j=1}^N (dIdFk4_{ij} + dIdFk5_{ij}) \quad (138)$$

$$\frac{\partial \hat{b}_l}{\partial F_k} = \cos(\theta_l - \alpha) \frac{\partial \theta_l}{\partial F_k} \quad (139)$$

$$\frac{\partial \hat{b}_{N+1}}{\partial F_k} = -(dIdFk1_1 + dIdFk1_N) \quad (140)$$

$$G_k = 2 \sum_{i=1}^N \Delta x_i \hat{c}_{ti} \frac{\partial \hat{c}_{ti}}{\partial F_k} + \lambda_l \cdot \left( \frac{\partial A_{lm}}{\partial F_k} \hat{w}_m - \frac{\partial \hat{b}_l}{\partial F_k} \right) \quad (141)$$

$$F_{(n+1)} = F_{(n)} + \zeta G \quad (142)$$

$$\zeta = \frac{\zeta_0}{\|G\|} \quad (143)$$

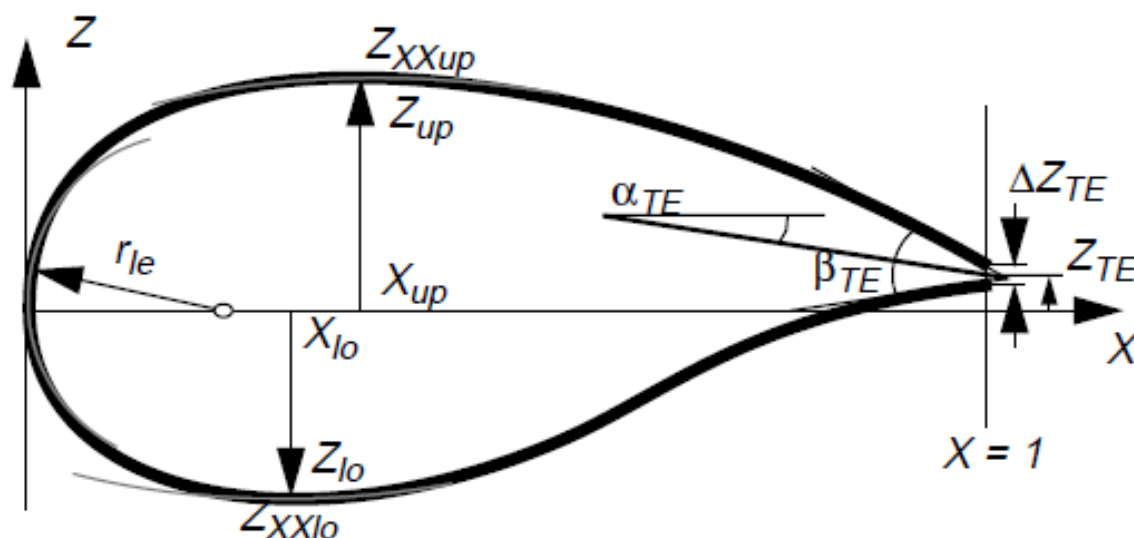
Ve vztahu (142) má  $\zeta$  význam velikosti iteračního kroku. Vzhledem ke kladnému znaménku se parametry mění ve směru gradientu, tzn. ve směru nejrychlejšího růstu cílové funkce (součinitele vztlaku). Pro výpočet jsem se rozhodl použít  $\zeta$  ve tvaru dle (143). Tento tvar je ekvivalentní použití normovaného (jednotkového) gradientu. Z důvodů popsaných v kapitole 8.1 je použití takto definovaného  $\zeta$  výhodné z hlediska robustnosti a spolehlivosti algoritmu. Jmenovitá hodnota iteračního kroku  $\zeta_0$  musí být vhodně zvolena na základě zkušenosti a požadovaného zvýšení součinitele vztlaku (velké požadované zvýšení součinitele vztlaku znamená velkou hodnotu  $\zeta_0$ , což ale znamená také velkou modifikaci tvaru). Úplné odvození všech v této kapitole uvedených vztahů viz Příloha 7.2 – Podrobné odvození rovnic pro optimalizaci.



### 7.3 Použití parametrizace profilu

Při použití přístupu z kapitoly 7.2 narážíme na to, že profil s takto definovaným vektorem parametrů  $F$  má velice mnoho stupňů volnosti (počet stupňů volnosti je roven počtu panelů). Takto vysoký počet optimalizačních parametrů přináší velmi významné problémy, a to jak fyzikálního, tak numerického rázu. Z problémů fyzikálního rázu je hlavním problémem fakt, že model neuvažuje vazkost proudění a nepřipouští odtržení nikde jinde než na odtokové hraně profilu. Toto vede již během několika iterací k tomu, že se tvar profilu začne stávat očividně nefyzikálním, přičemž tyto problémy se koncentrují zejména do okolí odtokové hrany profilu. Problémy numerického rázu spočívají ve ztrátě stability výpočtu, resp. „překroucení“ profilu do geometricky nepřijatelné konfigurace, přičemž toto „překroucení“ postupuje opět od odtokové hrany. Pro zamezení vzniku nestability je nutné volit velice malý základní iterační krok  $\zeta_0$ , což vede k neúměrnému zvyšování potřebného počtu iterací (do řádu několika set) a tím k výraznému prodlužování výpočtového času, přičemž očividná nefyzikálnost řešení zůstává. Navíc takto velké množství optimalizačních parametrů významně prodlužuje dobu výpočtu každé iterace, a to díky velkému množství operací a vyčíslování vztahů, které je nutné v každé iteraci provést. Při tomto počtu parametrů již náročnost režijních operací díky jejich velkému počtu může převýšit výpočetní náročnost řešení původní a adjungované rovnice. Nehledě k výše zmíněnému je z hlediska optimalizace krajně nevhodná závislost počtu parametrů na počtu panelů (kvalitě sítě).

V odstavci výše uvedené problémy jsem se rozhodl řešit výrazným snížením počtu stupňů volnosti výpočtu, tedy parametrizací profilu. Pro parametrizaci jsem se rozhodl použít modifikovanou variantu parametrizace PARSEC. Tato metoda má výhodu v tom, že výrazně omezí počet stupňů volnosti (na pouhých 11), přičemž zároveň poskytuje velmi dobrou kontrolu nad všemi důležitými charakteristikami profilu a je použitelná pro velmi široké spektrum profilů. V parametrizaci PARSEC je parametrizována zvláště horní a spodní povrchka profilu, přičemž řídicími parametry v původní parametrizaci PARSEC jsou poloměr náběžné hrany profilu ( $r_{le}$ ),  $x$  souřadnice nejvyššího a nejnižšího bodu na profilu ( $x_{lo}, x_{up}$ ),  $z$  souřadnice nejvyššího a nejnižšího bodu na profilu ( $z_{lo}, z_{up}$ ) a křivosti v těchto bodech ( $z_{xxlo}, z_{xxup}$ ). Dalšími parametry jsou úhel svíraný povrchkami profilu na odtokové hraně ( $\beta_{te}$ ), tloušťka odtokové hrany ( $\Delta z_{te}$ ) a poloha a úhel orientace odtokové hrany ( $z_{te}, \alpha_{te}$ ). Tyto parametry jsou přehledně vyznačeny v obrázku na následující straně (Obrázek 6).



Obrázek 6 – Parametry PARSEC parametrizace a jejich geometrický význam [6]

Pro použití v panelové metodě provedu několik modifikací PARSEC parametrizace. První modifikací bude, vzhledem ke mnou používaným souřadnicím, přeznačení osy z na y. Další modifikací je vzhledem k potřebě ostré odtokové hrany pevné stanovení  $\Delta y_{te} = 0$ . Poslední modifikací pak bude rozdělení poloměru náběžné hrany na poloměr náběžné hrany horní a spodní povrchy ( $r_{up}, r_{lo}$ ) pro přesnější řízení tvaru náběžné hrany. Používaný vektor parametrů viz níže.

$$F = [r_{lo}, X_{lo}, Y_{lo}, Y_{xxlo}, r_{up}, X_{up}, Y_{up}, Y_{xxup}, \alpha_{te}, \beta_{te}, Y_{te}]^T$$

Následně lze použít vztahy (144) a (145) pro výpočet koeficientů parametrizace. Tyto vztahy byly převzaty z [7], [8] a [9] s drobnou korekcí a opravou chyb.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ X_{lo}^{1/2} & X_{lo}^{3/2} & X_{lo}^{5/2} & X_{lo}^{7/2} & X_{lo}^{9/2} & X_{lo}^{11/2} \\ 1/2 & 3/2 & 5/2 & 7/2 & 9/2 & 11/2 \\ \frac{1}{2}X_{lo}^{-1/2} & \frac{3}{2}X_{lo}^{1/2} & \frac{5}{2}X_{lo}^{3/2} & \frac{7}{2}X_{lo}^{5/2} & \frac{9}{2}X_{lo}^{7/2} & \frac{11}{2}X_{lo}^{9/2} \\ -\frac{1}{4}X_{lo}^{-3/2} & \frac{3}{4}X_{lo}^{-1/2} & \frac{15}{4}X_{lo}^{1/2} & \frac{35}{4}X_{lo}^{3/2} & \frac{63}{4}X_{lo}^{5/2} & \frac{99}{4}X_{lo}^{7/2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{te} \\ Y_{lo} \\ \operatorname{tg} \left( \alpha_{te} + \frac{\beta_{te}}{2} \right) \\ 0 \\ Y_{xxlo} \\ -\sqrt{2r_{lo}} \end{bmatrix} \quad (144)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ X_{up}^{1/2} & X_{up}^{3/2} & X_{up}^{5/2} & X_{up}^{7/2} & X_{up}^{9/2} & X_{up}^{11/2} \\ 1/2 & 3/2 & 5/2 & 7/2 & 9/2 & 11/2 \\ \frac{1}{2}X_{up}^{-1/2} & \frac{3}{2}X_{up}^{1/2} & \frac{5}{2}X_{up}^{3/2} & \frac{7}{2}X_{up}^{5/2} & \frac{9}{2}X_{up}^{7/2} & \frac{11}{2}X_{up}^{9/2} \\ -\frac{1}{4}X_{up}^{-3/2} & \frac{3}{4}X_{up}^{-1/2} & \frac{15}{4}X_{up}^{1/2} & \frac{35}{4}X_{up}^{3/2} & \frac{63}{4}X_{up}^{5/2} & \frac{99}{4}X_{up}^{7/2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{te} \\ Y_{up} \\ \operatorname{tg} \left( \alpha_{te} - \frac{\beta_{te}}{2} \right) \\ 0 \\ Y_{xxup} \\ \sqrt{2r_{up}} \end{bmatrix} \quad (145)$$



Parametrizace horní povrchy je dána koeficienty  $a_i$  a vztahem (146), parametrizace spodní povrchy pak koeficienty  $b_i$  a vztahem (147).

$$Y = \sum_{i=1}^6 a_i \cdot X^{i-\frac{1}{2}} \quad (146)$$

$$Y = \sum_{i=1}^6 b_i \cdot X^{i-\frac{1}{2}} \quad (147)$$

Další výpočet je identický s kapitolou 7.2 pouze s tou změnou, že se použije jiný vektor parametrů  $F$ . Provedením výpočtů v programu MATLAB bylo ověřeno, že použití této parametrizace skutečně do značné míry odstraňuje všechny problémy zmíněné na konci kapitoly 7.2. Parametrizace PARSEC je aproximativní parametrizací, z toho vyplývá, že pro všechny profily nemusí dát exaktní tvar profilu tak, jak byl původně navržen. Toto může u některých profilů způsobovat menší či větší problémy, podle toho, k čemu je třeba profil generovaný parametrizací PARSEC použít a jak velkou nepřesnost tvaru použití PARSEC parametrizace způsobí. Přesnost aproximace tvaru PARSEC parametrizací se pro různé profily liší od velmi vysoké (např. NACA 0012, RAE2822, NREL S809, ...) až po ne příliš dobrou (např. NLF(1)-0414). Některé profily lze pomocí parametrizace PARSEC popsat pouze obtížně a může být vhodnější použít jinou metodu parametrizace (CST aj.). Obecně je parametrizace PARSEC velmi univerzální a dokáže téměř exaktně popsat extrémně široké spektrum profilů. Je ovšem třeba dbát na korektní stanovení hodnot parametrů. Parametry této parametrizace mají také konkrétní geometrický význam a umožňují dobrou kontrolu tvaru profilu v důležitých místech (okolí náběžné hrany, okolí nejvyššího a nejnižšího bodu a okolí odtokové hrany). Z těchto důvodů byla parametrizace PARSEC zvolena pro použití v této práci. Optimalizační procedura v této práci popsaná je ovšem velmi obecná a není žádný problém ji přizpůsobit pro libovolnou parametrizaci (stačí pouze změnit způsob definice tvaru profilu v jedné z volaných funkcí a v hlavním kódu upravit počet parametrů, žádné další úpravy nejsou třeba).

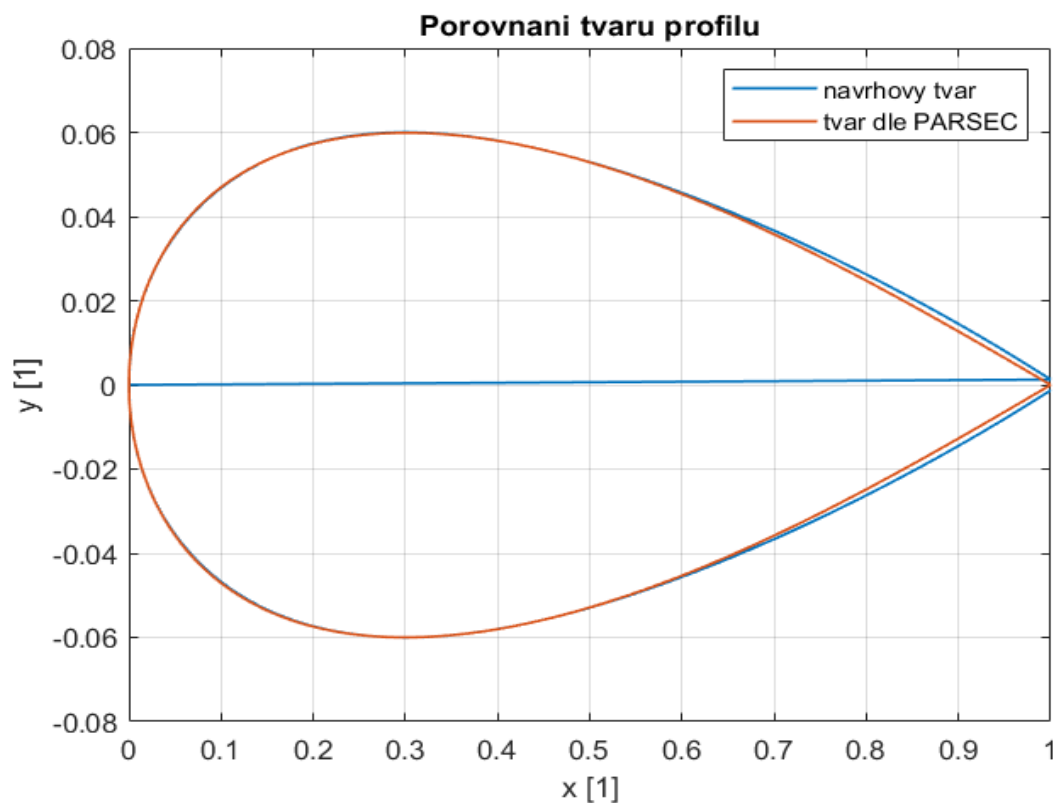
Pro posouzení efektivity a obecné aplikovatelnosti programu bylo vybráno 5 různých profilů, pro které byly dohledány parametry PARSEC parametrizace. Hodnoty parametrů byly převzaty přímo z uvedených zdrojů bez další korekce, protože v okamžiku testování funkčnosti metody jsem neměl k dispozici postup pro identifikaci parametrů z tvaru profilu. Profily byly voleny tak, aby byly parametrizovatelné modifikovanou PARSEC metodou a pokrývaly pokud možno co nejširší spektrum tvarů. Profily byly voleny od symetrického až po výrazně nesymetrické a od nízkorychlostních laminárních až po transsonické. Názvy a PARSEC parametry vybraných profilů viz tabulka na následující straně.



Parametr PARSEC	NACA 0012	NLF(1)-0115 dle [10]	NLF(1)-0414	RAE2822	NREL S809
$r_{lo}$ [1]	0,0147	0,0095	0,0105	0,0083	0,010
$X_{lo}$ [1]	0,2996	0,2774	0,4368	0,3441	0,3633
$Y_{lo}$ [1]	- 0,06	- 0,0341	- 0,0477	- 0,0588	- 0,1081
$Y_{xxlo}$ [1]	0,4406	0,1810	0,3859	0,7018	1,526
$r_{up}$ [1]	0,0147	0,0095	0,0105	0,0083	0,0216
$X_{up}$ [1]	0,3015	0,4468	0,4808	0,4312	0,3826
$Y_{up}$ [1]	0,0599	0,1194	0,0957	0,0629	0,1018
$Y_{xxup}$ [1]	- 0,4360	- 0,7844	- 0,7237	- 0,4273	- 1,201
$\alpha_{te}$ [°]	0	- 18,82	- 9,60	- 6,86	- 8,5
$\beta_{te}$ [°]	14,67	9,74	3,5	8,08	8,5
$Y_{te}$ [1]	0	0	- 0,0015	0	0

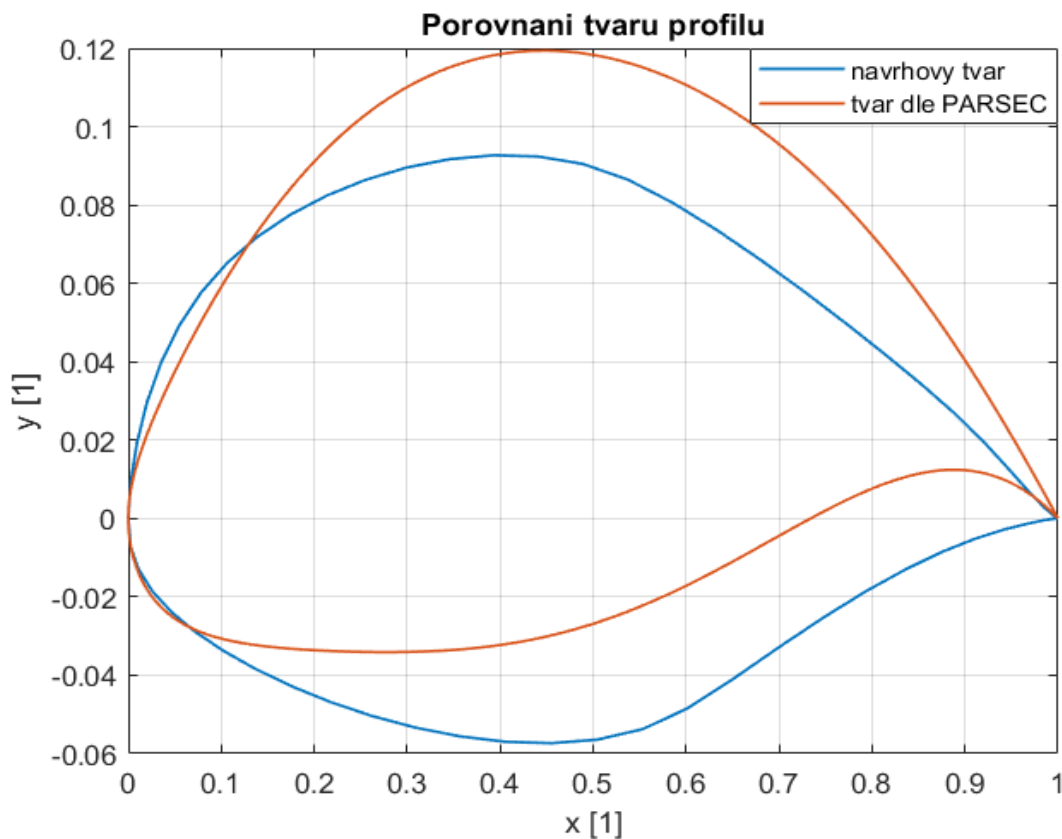
Tabulka 3 – PARSEC parametry vybraných profilů [9] [10]

Na obrázcích níže je vidět porovnání skutečného návrhového tvaru profilů s tvary získanými z PARSEC parametrů v tabulce výše (Tabulka 3). Tvary jsou na tomto místě uvedeny bez komentáře a spíše pro ilustraci. Komentář ohledně přesnosti aproximace je poskytnut u jednotlivých profilů při vyhodnocování výsledků (kapitola 8).

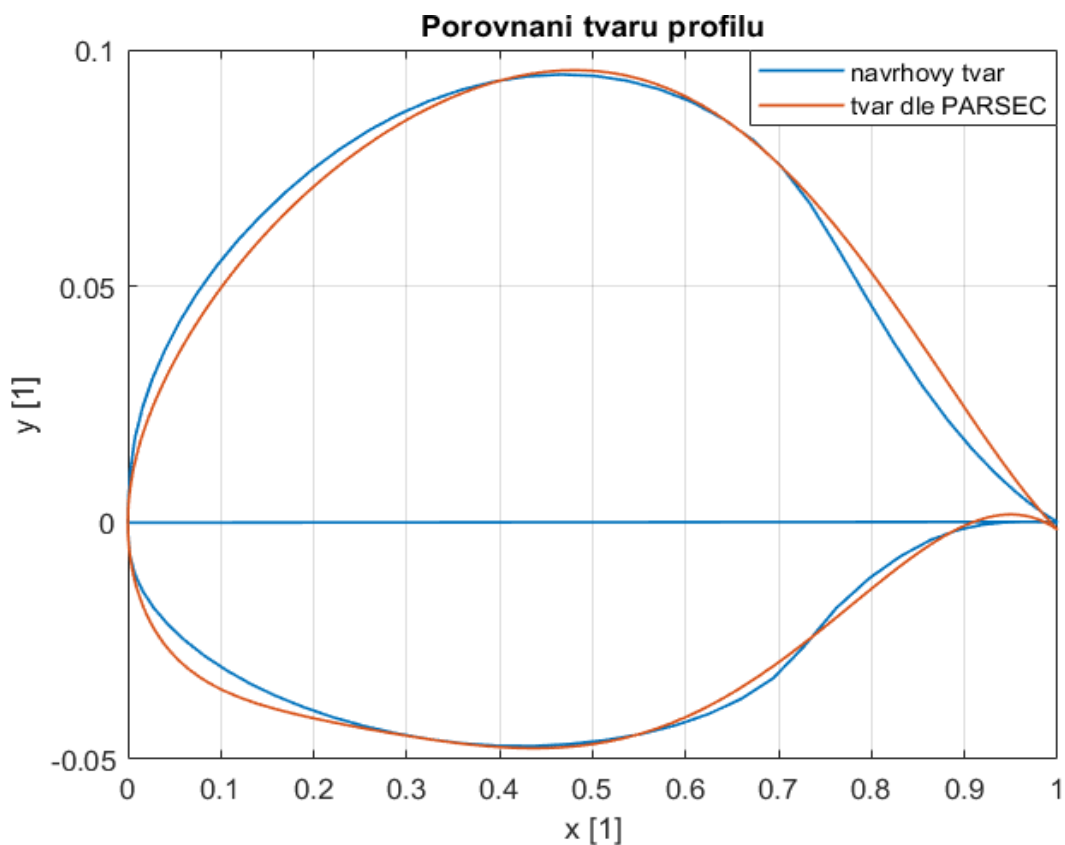


Obrázek 7 – NACA 0012 – Exaktní návrhový tvar a tvar dle PARSEC

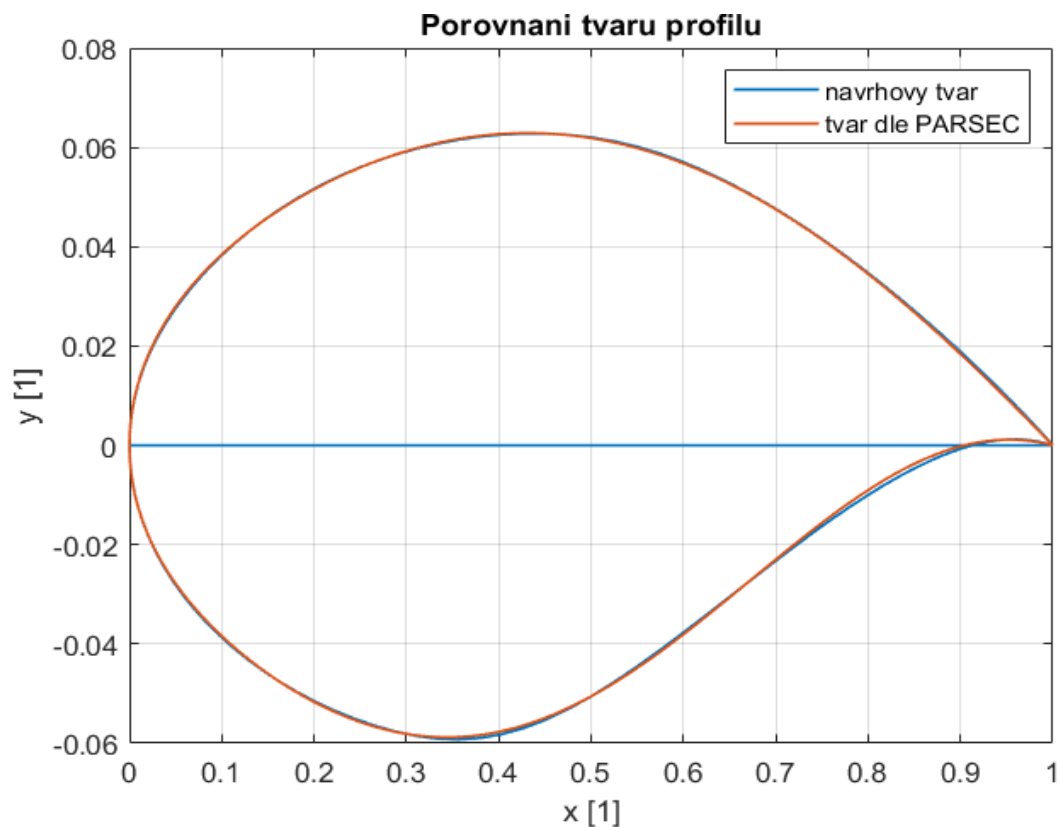




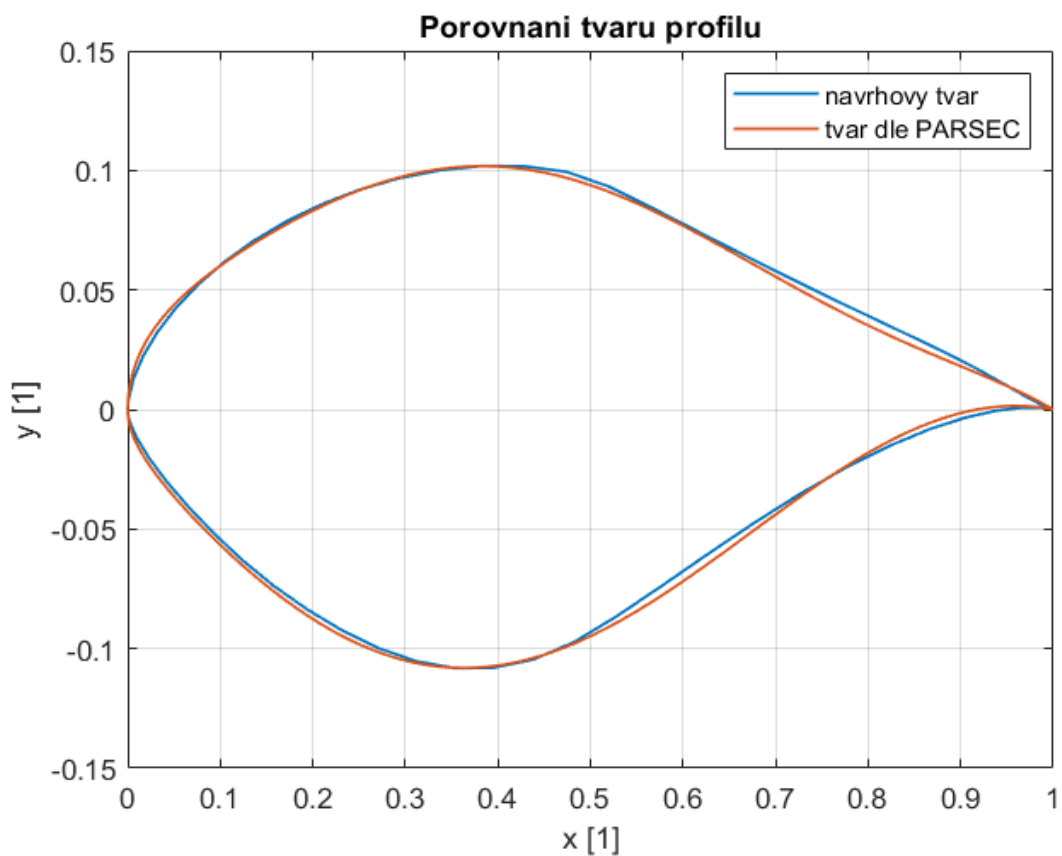
Obrázek 8 – NLF(1)-0115 – Exaktní návrhový tvar a tvar dle PARSEC



Obrázek 9 – NLF(1)-0414 – Exaktní návrhový tvar a tvar dle PARSEC



Obrázek 10 – RAE2822 – Exaktní návrhový tvar a tvar dle PARSEC



Obrázek 11 – NREL S809 – Exaktní návrhový tvar a tvar dle PARSEC



## 8 Výsledky optimalizace

### 8.1 Obecné úvodní poznámky

Pro všechny profily uvedené v kapitole 7.3 program pracoval tak, jak byl navržen, tzn. výrazně zvyšoval součinitel vztlaku profilů pomocí minimálních změn tvaru. Jediný problém nastal u profilu RAE2822, kde pro kombinaci úhlu náběhu  $10^\circ$  a iteračního kroku 0,0002 došlo v páté iteraci k poklesu součinitele vztlaku. Toto chování bylo zachyceno kontrolním mechanismem hlídajícím monotónní konvergenci, který jsem do programu implementoval, a rozhodnutí o dalším pokračování optimalizace bylo ponecháno na uživateli. Při pokračování optimalizace již k žádným dalším poklesům součinitele vztlaku nedošlo. Toto chování pro jinou volbu iteračního kroku, úhlu náběhu nebo počtu panelů nenastalo a optimalizace v těchto případech proběhla bez jakýchkoli problémů. Mojí první hypotézou pro vysvětlení zmíněného poklesu součinitele vztlaku bylo, že v blízkém okolí hodnot parametrů dosažených ve čtvrté iteraci dochází k prudké změně orientace gradientu, což může zapříčinit, že krok z iterace 4 do iterace 5 není přesně v optimálním směru (krok je učiněn ve směru gradientu, který se však v okolí rychle mění). Krokem do iterace 5 se však algoritmus dostane mimo oblast rychlých změn orientace gradientu a optimalizace tedy pokračuje bez problémů. Tato hypotéza se však nakonec ukázala jako pravděpodobně chybná. Pravý důvod tohoto poklesu byl odhalen v podobě nepřesného vyčíslení numerické derivace používané pro získání dílčích derivací v gradientu. Při snížení hodnoty  $\delta$  používané pro vyčíslení numerické derivace z  $\delta = 10^{-6}$  na  $\delta = 10^{-8}$  došlo k úplnému vymizení zmiňovaného problému. Charakter problému navíc přesně odpovídá povaze numerické derivace jakožto operace náchylné k nepřesnému vyčíslení a obecně citlivé na způsob výpočtu a jeho nastavení.

Pro updatování hodnot parametrů při optimalizaci bylo nutné využít normovaného gradientu (jednotkový vektor ve směru gradientu), protože někdy se, vlivem náhody, výpočet dostal do bodu, kde některé prvky gradientu nabývaly velice vysokých hodnot, což vedlo při updatování hodnot parametrů k „přestřelení“ hodnoty daného parametru do geometricky nebo fyzikálně nepřipustné oblasti. Destruktivitu problému s velikostí gradientu navíc zesiluje fakt, že k němu může dojít v libovolném kroku optimalizace (i těsně po jejím začátku). Využitím normovaného gradientu se podařilo tento problém zcela odstranit (velikost změny parametrů je vždy rovna  $\zeta_0$ , liší se pouze její rozdělení mezi jednotlivé parametry) a dosáhnout tak výrazně vyšší spolehlivosti a robustnosti výpočetního algoritmu. Pro optimalizaci byl iterační krok volen tak, aby pro všechny profily umožnil proběhnutí 50 iterací bez ztráty fyzikální smysluplnosti získaného tvaru. Velikost iteračního kroku byla volena konzervativně, aby vynikla míra zlepšení vlastností profilu díky minimálním změnám tvaru. Při konzervativní volbě kroku dojde sice k ne tak výraznému zlepšení součinitele vztlaku, ale díky naprosto minimálním změnám tvaru je velká



šance, že optimalizace neovlivní ostatní parametry profilu (jako např. součinitel odporu), nebo je ovlivní pouze nepatrně. Optimalizace s větším krokem je ukázána v kapitole 8.7, kde je pro každý profil volen krok tak, aby došlo pokud možno k maximálnímu vylepšení součinitele vztlaku daného profilu bez ztráty fyzikální smysluplnosti tvaru. Stejný počet kroků i velikost iteračního kroku pro všechny profily byly v tomto případě voleny proto, aby bylo možno porovnat výkonnost algoritmu na různých profilech při stejném nastavení. Jediné, čím se tedy optimalizace popsané v kapitolách 8.2 až 8.6 liší jsou počáteční podmínky (počáteční parametry profilu a úhel náběhu). Pro každý profil byly voleny 2 úhly náběhu, a to 0 a 10°. Nízký úhel náběhu (blízký 0°) je typický pro režim letu, vysoký úhel náběhu (často i výrazně více než 10°) je typický pro vzlet a přistání. Při takto zvolených úhlech náběhu tedy každá optimalizace probíhá v úplně jiném letovém režimu. Všechny tyto optimalizace byly z výše zmíněných důvodů provedeny s iteračním krokem 0,0002 a 50 iteracemi optimalizace u všech profilů.

## 8.2 NACA 0012

Profil NACA 0012 byl vybrán proto, že se jedná o jeden z nejlépe prozkoumaných profilů, navíc má velmi jednoduchou geometrii a často se používá jako „benchmark“ pro softwarové řešící obtékání profilů. Tento profil se používá na ocasních plochách letadel, na křídélkách a často také na rotorech vrtulníků. NACA 0012 nepatří mezi nejvhodnější profily pro optimalizaci zaměřenou na součinitel vztlaku, a to hned z několika důvodů. Prvním důvodem je fakt, že se jedná o symetrický profil a proto vykazuje relativně nízký součinitel vztlaku na začátku optimalizace. Z tohoto důvodu nemá algoritmus příliš výhodnou výchozí pozici, ale má velký prostor pro zlepšení profilu. Druhým důvodem je fakt, že profil NACA 0012 má při této optimalizaci silnou tendenci sklouzávat k nefyzikálnímu tvaru (zvláště zvlnění horní povrchy profilu), což klade vyšší nároky na výpočtáře provádějícího optimalizaci, zejména z hlediska volby počtu iterací a iteračního kroku. Při pohledu na Obrázek 12 a Obrázek 15 se tvar profilu optimalizovaného pro různé úhly náběhu zdá stejný, ovšem při pohledu do tabulky na následující straně (Tabulka 4) je vidět, že optimalizovaný tvar profilu se pro různé úhly náběhu liší. Tyto rozdíly jsou ovšem příliš malé na to, aby je bylo možno pouhým okem rozlišit a jsou také mimo možnosti většiny výrobních technologií. Tyto rozdíly jsou dány tím, že algoritmus postupuje z daného počátečního tvaru profilu, stejného pro různé úhly náběhu, a mění parametry ve směru největšího růstu součinitele vztlaku, kdy tento směr je pro různé úhly náběhu různý. Na průbězích tlakového součinitele (Obrázek 13 a Obrázek 16), stejně jako na průbězích tečné rychlosti (Obrázek 14 a Obrázek 17) je vidět počínající zvlnění horní povrchy profilu, které se propisuje do rozložení tečné rychlosti a tlakového součinitele. Zvlnění grafů těchto veličin je vysoce



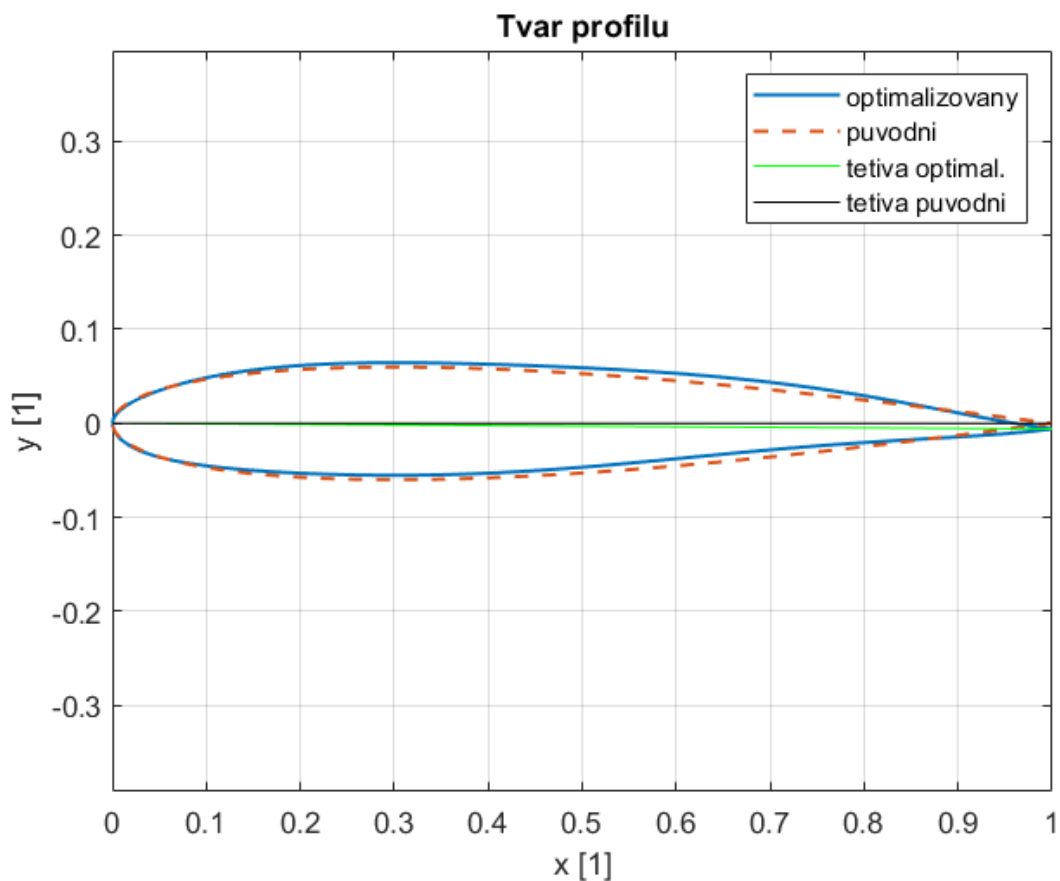
nežádoucí, protože může v krajním případě vést až k předčasnému odtržení mezní vrstvy vlivem nepříznivého tlakového gradientu a tím ke ztrátě vztlaku. Na grafu rozložení tlakového součinitele je vidět také zvýšení součinitele vztlaku, protože součinitel vztlaku je úměrný ploše uzavřené mezi křivkami v tomto grafu. Z tabulky níže je vidět, že se zvyšujícím se úhlem náběhu mírně klesá benefit optimalizace vyjádřený absolutním zlepšením součinitele vztlaku. Relativní zlepšení pro tento profil nelze korektně porovnat.

$\alpha$ [°]	Původní		Optimalizovaný	
	0	10	0	10
$r_{lo}$ [1]	0,01470	0,01470	0,01732	0,01791
$X_{lo}$ [1]	0,2996	0,2996	0,2997	0,2997
$Y_{lo}$ [1]	- 0,0600	- 0,0600	- 0,05531	- 0,05500
$Y_{xxlo}$ [1]	0,4406	0,4406	0,4408	0,4408
$r_{up}$ [1]	0,01470	0,01470	0,01188	0,01262
$X_{up}$ [1]	0,3015	0,3015	0,3011	0,3012
$Y_{up}$ [1]	0,05990	0,05990	0,06461	0,06432
$Y_{xxup}$ [1]	- 0,4360	- 0,4360	- 0,4359	- 0,4359
$\alpha_{te}$ [°]	0	0	- 0,05410	- 0,05380
$\beta_{te}$ [°]	14,67	14,67	14,67	14,67
$Y_{te}$ [1]	0	0	- 0,005993	- 0,005985
$C_y$ [1]	- 0,0005	1,1816	0,1543	1,3292
Zlepšení absolutní [1]	---	---	0,1548	0,1476
Zlepšení relativní [%]	---	---	---	12,49

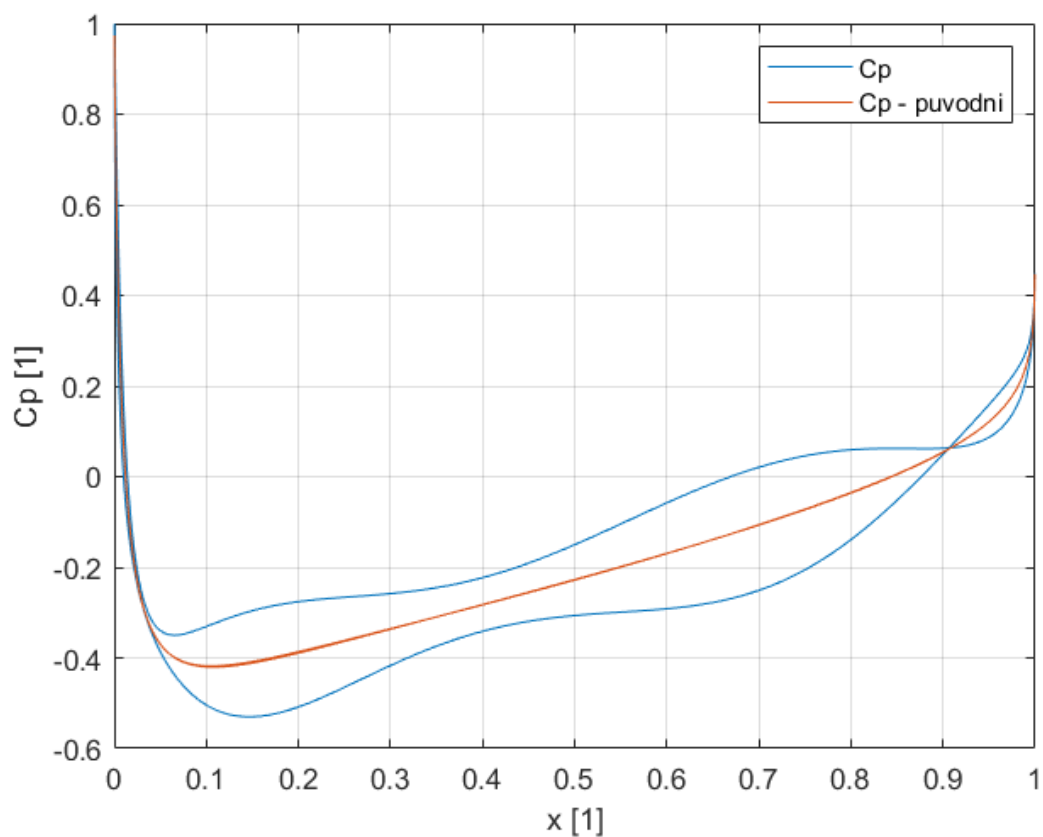
Tabulka 4 – Vlastnosti profilu NACA 0012 před a po optimalizaci



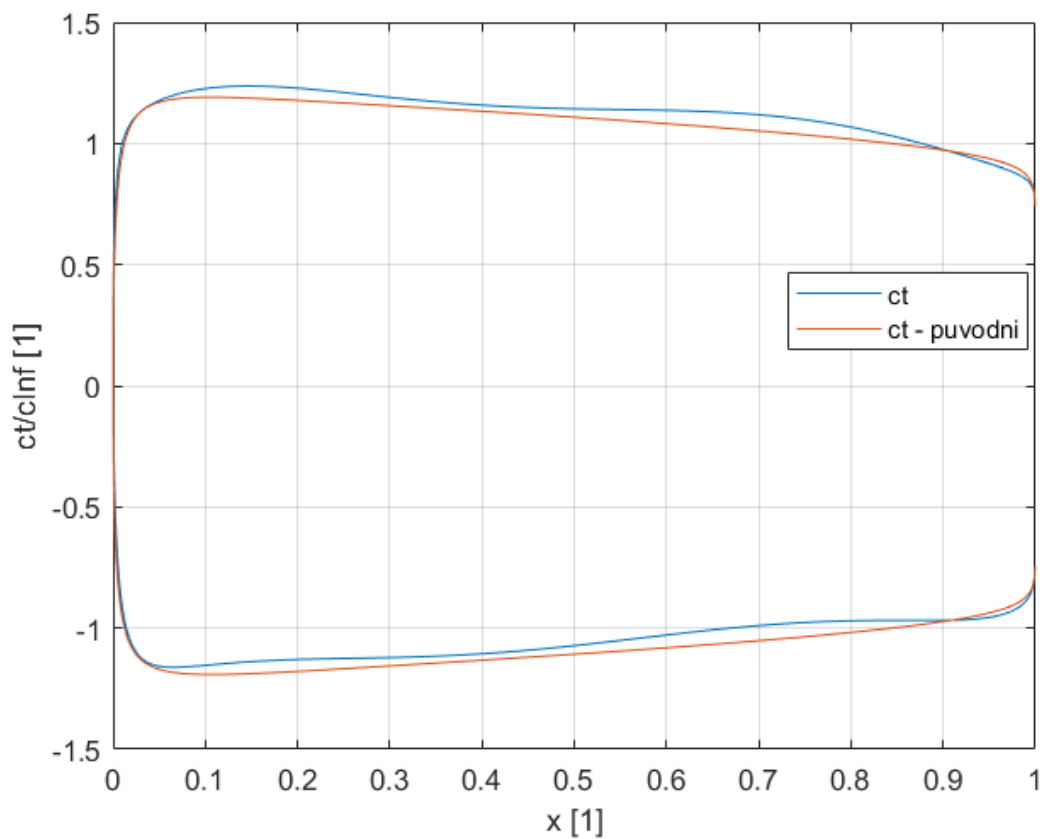
### 8.2.1 Úhel náběhu $0^\circ$



Obrázek 12 – Tvar profilu NACA 0012 před a po optimalizaci



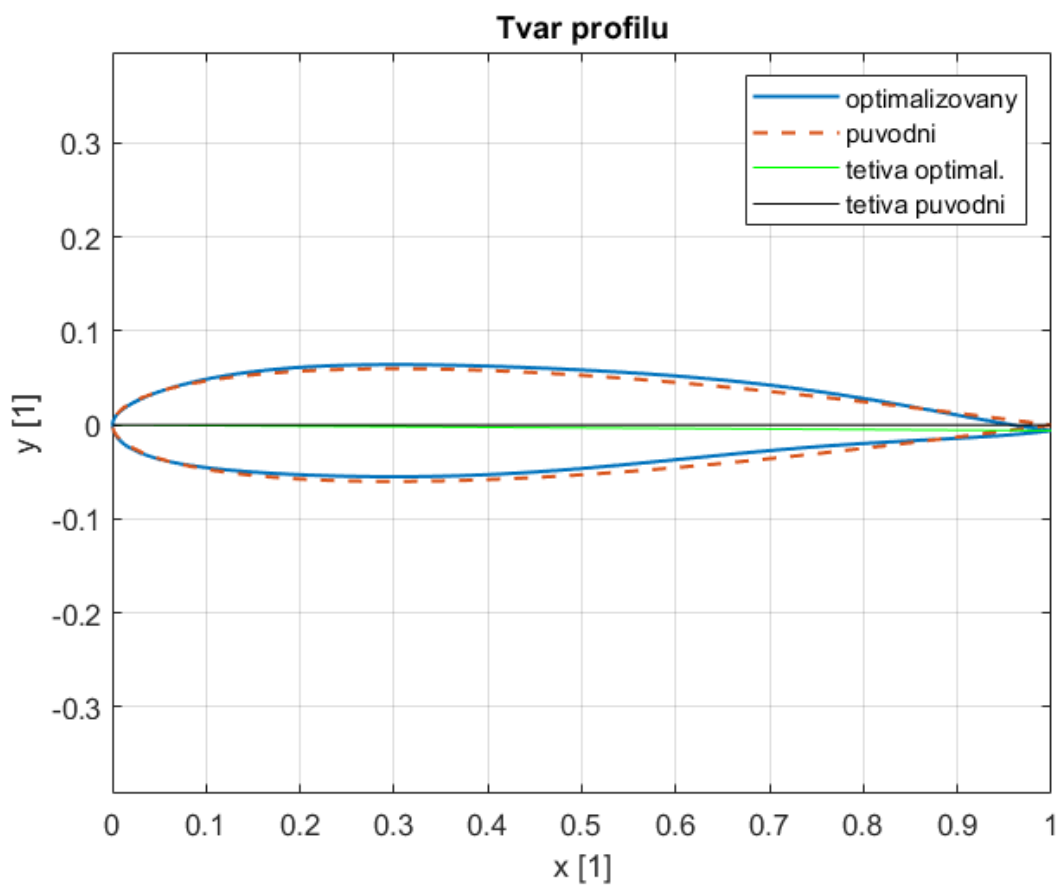
Obrázek 13 – Rozložení  $C_p$  na profilu NACA 0012 před a po optimalizaci



Obrázek 14 – Rozložení tečné rychlosti na profilu NACA 0012 před a po optimalizaci

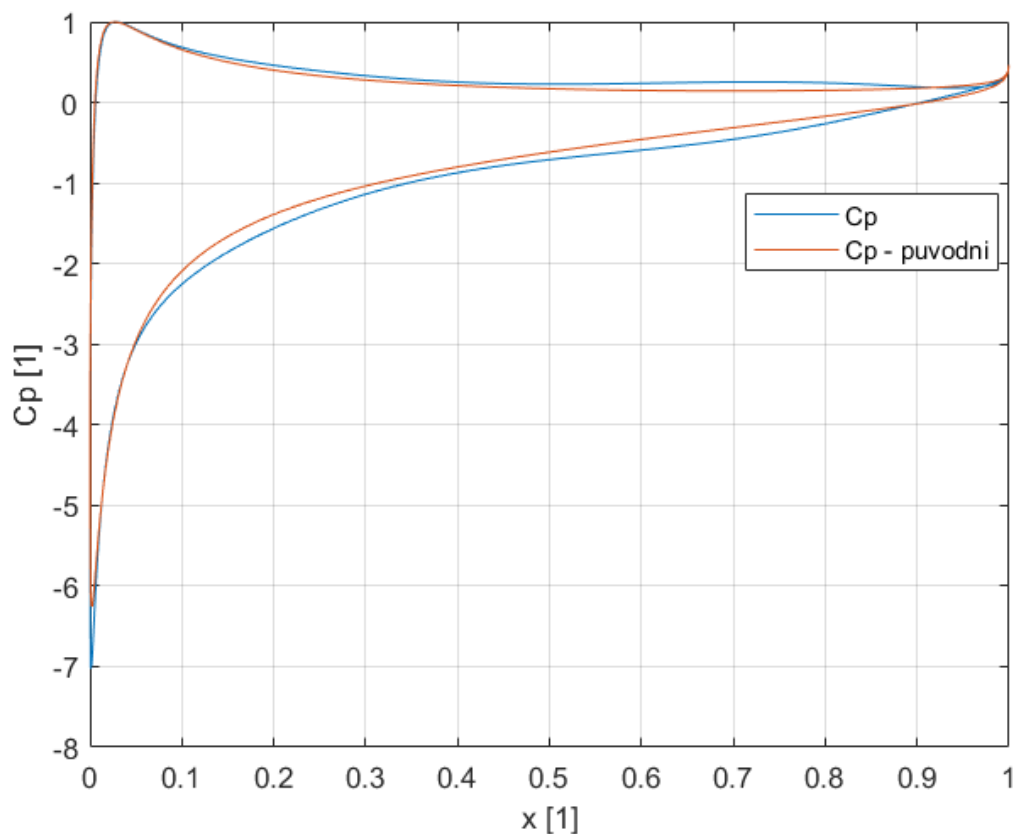


### 8.2.2 Úhel náběhu $10^\circ$

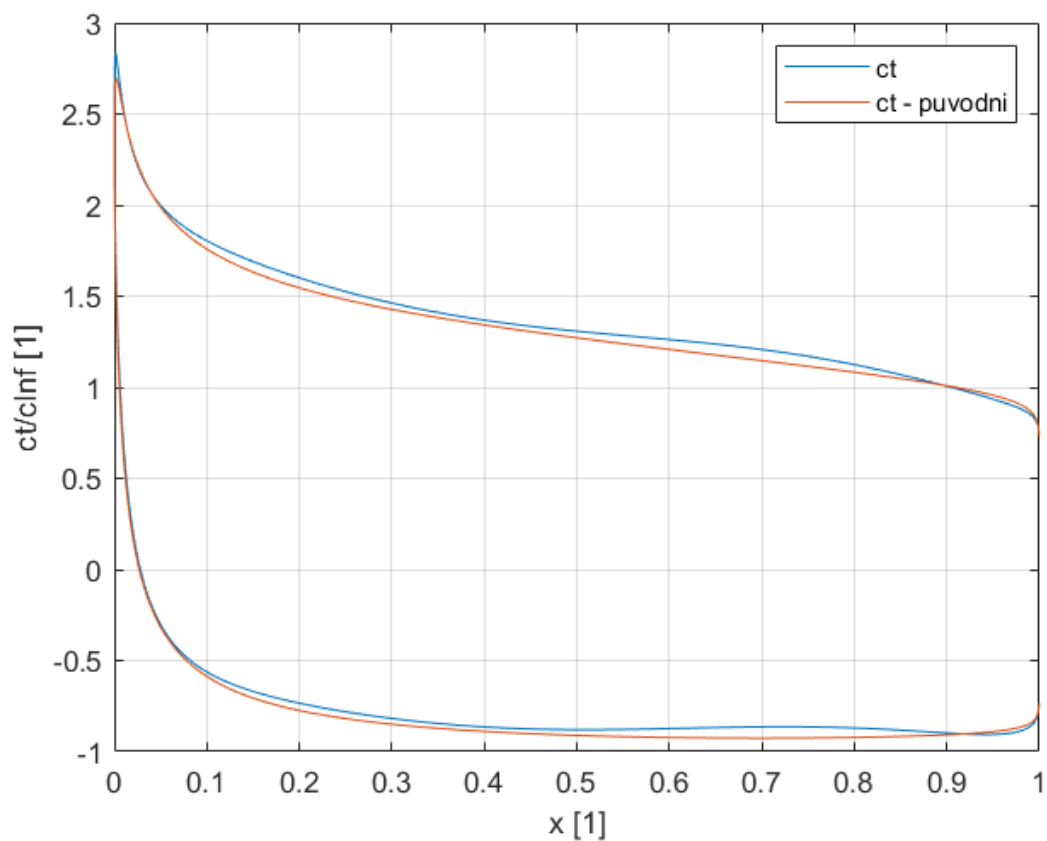


Obrázek 15 – Tvar profilu NACA 0012 před a po optimalizaci





Obrázek 16 – Rozložení  $C_p$  na profilu NACA 0012 před a po optimalizaci



Obrázek 17 – Rozložení tečné rychlosti na profilu NACA 0012 před a po optimalizaci



### 8.3 NLF(1)-0115 dle [10]

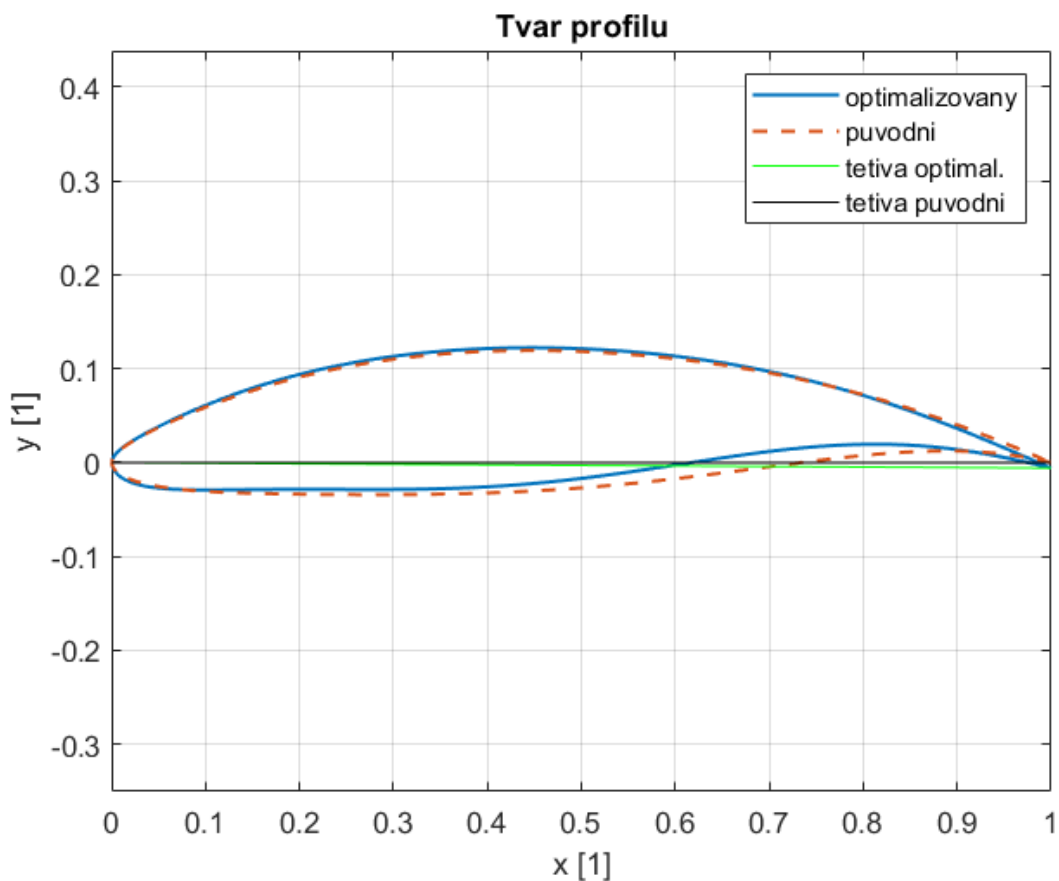
Profil NLF(1)-0115 je profil s přirozeně laminárním obtékáním (natural laminar flow), který byl navržen tak, aby poskytoval vysoký vztlak v nízkých rychlostech při minimálním odporu. Jedná se o profil bez speciálního určení, vhodný pro obecné použití. Tvar tohoto profilu získaný z PARSEC parametrů v [10] ovšem hrubě neodpovídá skutečnému tvaru tohoto profilu (porovnání tvarů viz Obrázek 8). Součinitel vztlaku spočtený z profilu parametrizovaného dle [10] také naprosto neodpovídá součiniteli vztlaku dostupnému v [11], i když u ostatních profilů je shoda při nulovém úhlu náběhu velice dobrá (odchylka v řádu tisícín, maximálně pak setin). Pro úhel náběhu  $10^\circ$  se u všech profilů již projevuje nelinearita závislosti součinitele vztlaku na úhlu náběhu, kterou moje implementace panelové metody (Hessova – Smithova panelová metoda) není schopna zachytit, ale stejně je u ostatních profilů shoda stále dobrá (odchylka přibližně jedna desetina, výjimečně více). Při použití lineární extrapolace součinitele vztlaku z hodnot v okolí  $\alpha = 0$  je shoda opět v řádu setin. Profil NLF(1)-0115 je ve skutečnosti velice podobný profilu NLF(1)-0414 (viz Obrázek 9 a Obrázek 24). Reálné chování algoritmu na profilu NLF(1)-0115 proto bude pravděpodobně velmi podobné chování na profilu NLF(1)-0414 a toto chování bude pravděpodobně společné pro většinu profilů řady NLF(1). Profil nemá tendence k nefyzikálním změnám tvaru. Protože nemám k dispozici lepší data, budu dále pokračovat s parametry dle [10], i když jsou očividně zcela mimo realitu. Z tabulky níže je vidět, že i na takto definovaném profilu je metoda schopna dosáhnout poměrně výrazného zlepšení součinitele vztlaku, a to i když je jeho počáteční hodnota vysoká.

$\alpha$ [°]	Původní		Optimalizovaný	
	0	10	0	10
$r_{lo}$ [1]	0,009500	0,009500	0,01414	0,01465
$X_{lo}$ [1]	0,2774	0,2774	0,2769	0,2769
$Y_{lo}$ [1]	- 0,03410	- 0,03410	- 0,02859	- 0,02848
$Y_{xxlo}$ [1]	0,1810	0,1810	0,1812	0,1812
$r_{up}$ [1]	0,009500	0,009500	0,009721	0,01008
$X_{up}$ [1]	0,4468	0,4468	0,4469	0,4469
$Y_{up}$ [1]	0,1194	0,1194	0,1224	0,1222
$Y_{xxup}$ [1]	- 0,7844	- 0,7844	- 0,7843	- 0,7843
$\alpha_{te}$ [°]	- 18,82	- 18,82	- 18,87	- 18,87
$\beta_{te}$ [°]	9,740	9,740	9,735	9,732
$Y_{te}$ [1]	0	0	- 0,005843	- 0,005368
$C_y$ [1]	0,8878	2,0504	1,0384	2,1843
Zlepšení absolutní [1]	---	---	0,1506	0,1339
Zlepšení relativní [%]	---	---	16,97	6,53

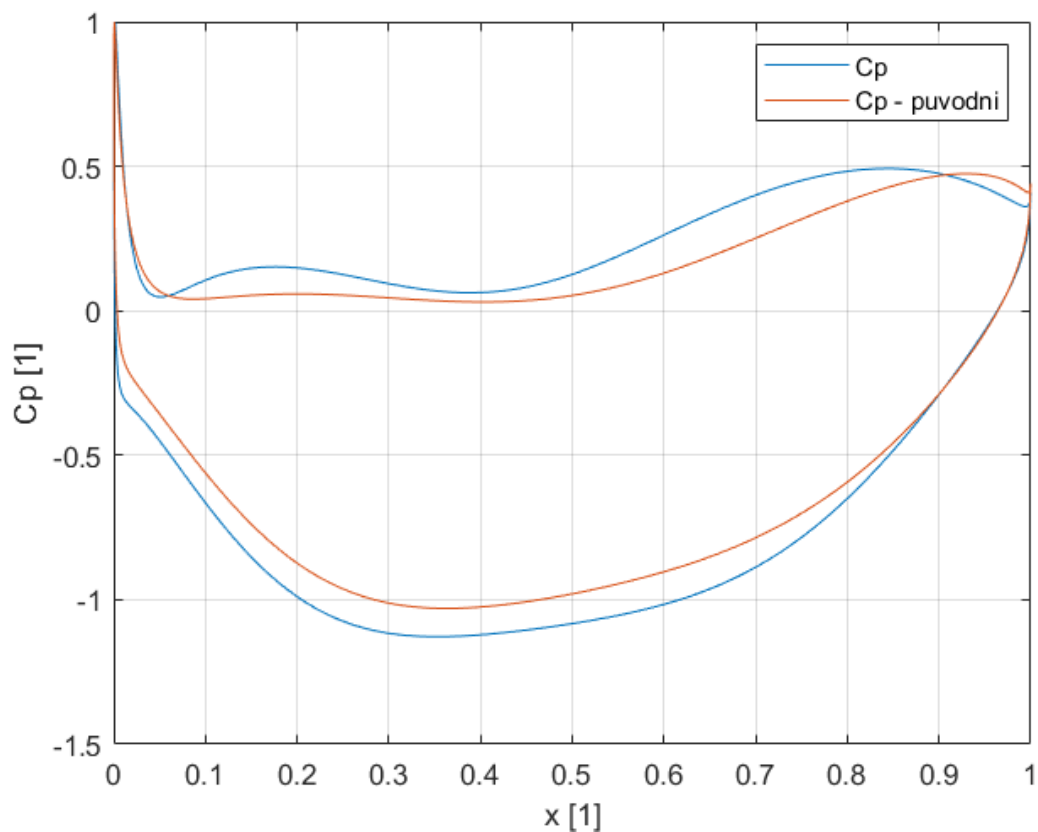
Tabulka 5 – Vlastnosti profilu NLF(1)-0115 před a po optimalizaci



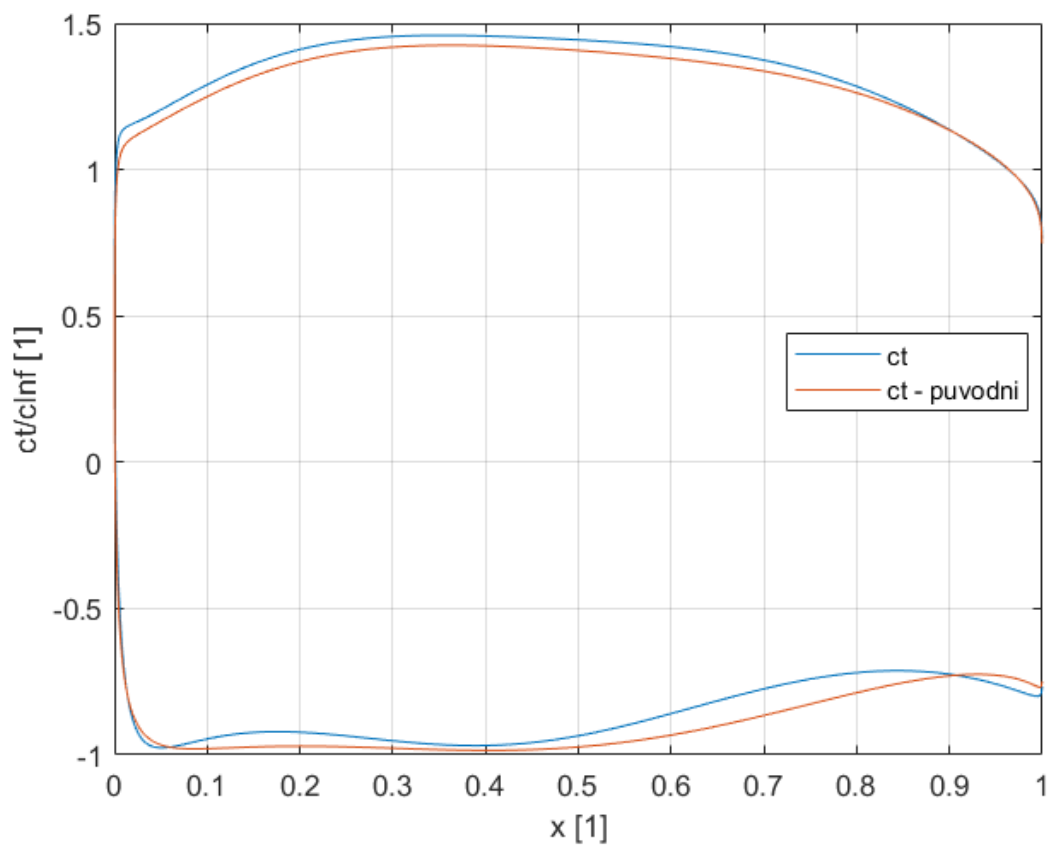
### 8.3.1 Úhel náběhu $0^\circ$



Obrázek 18 – Tvar profilu NLF(1)-0115 dle [10] před a po optimalizaci



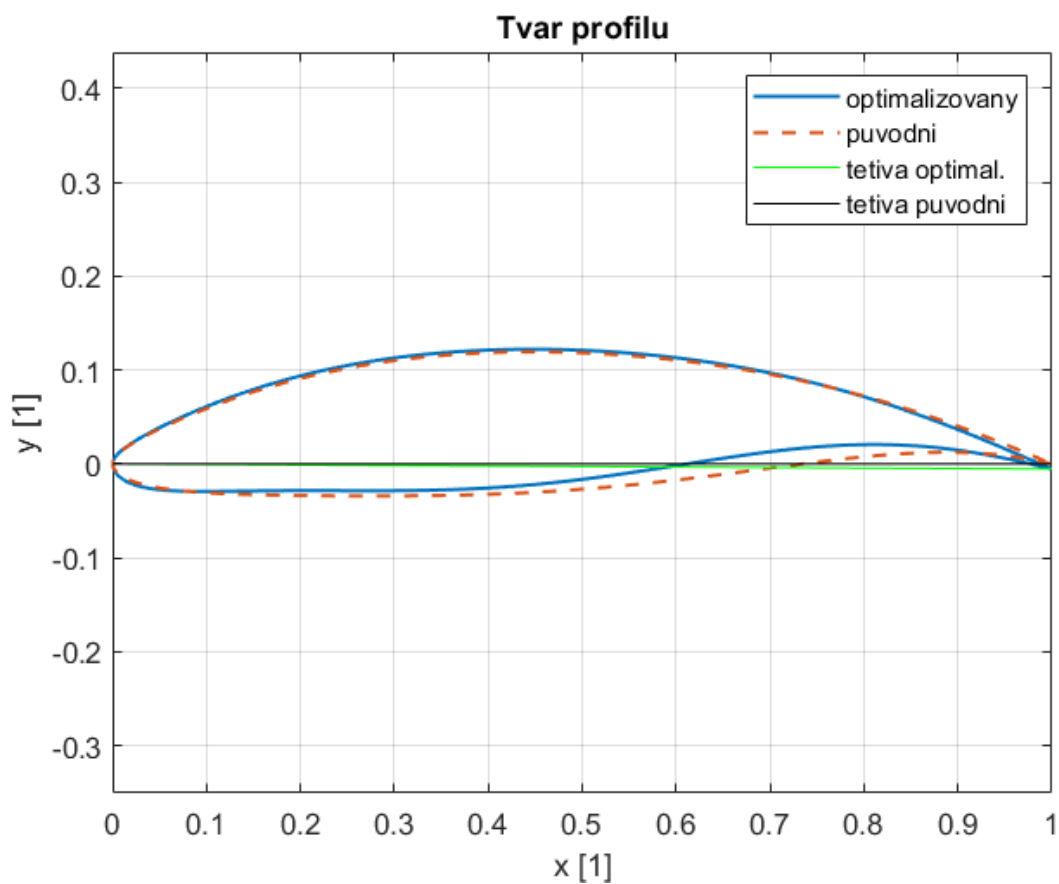
Obrázek 19 – Rozložení  $C_p$  na profilu NLF(1)-0115 před a po optimalizaci



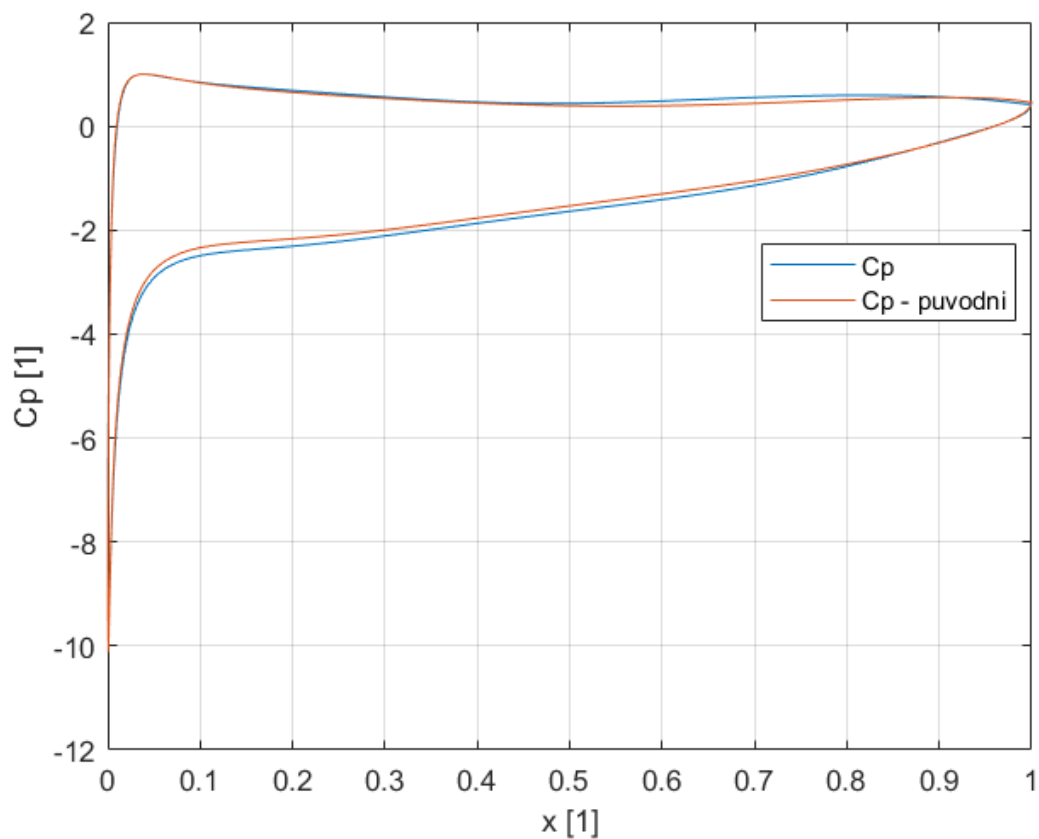
Obrázek 20 – Rozložení tečné rychlosti na profilu NLF(1)-0115 před a po optimalizaci



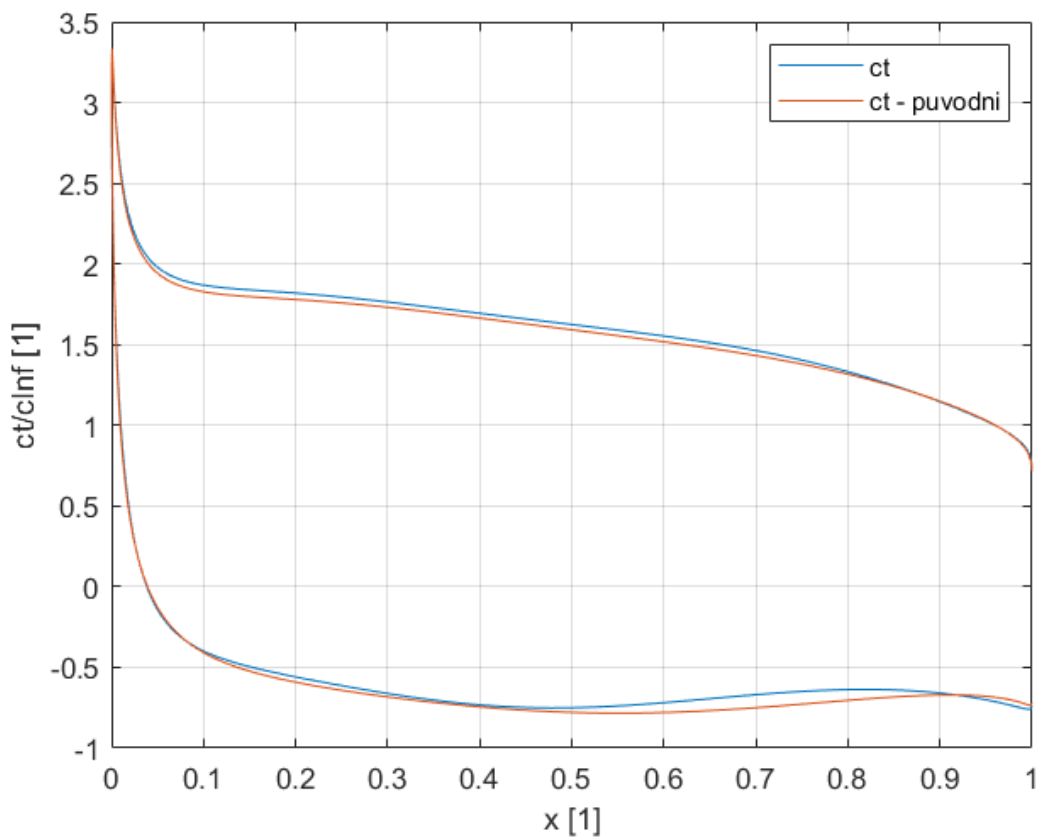
### 8.3.2 Úhel náběhu $10^\circ$



Obrázek 21 – Tvar profilu NLF(1)-0115 dle [10] před a po optimalizaci



Obrázek 22 – Rozložení  $C_p$  na profilu NLF(1)-0115 před a po optimalizaci



Obrázek 23 – Rozložení tečné rychlosti na profilu NLF(1)-0115 před a po optimalizaci



## 8.4 NLF(1)-0414

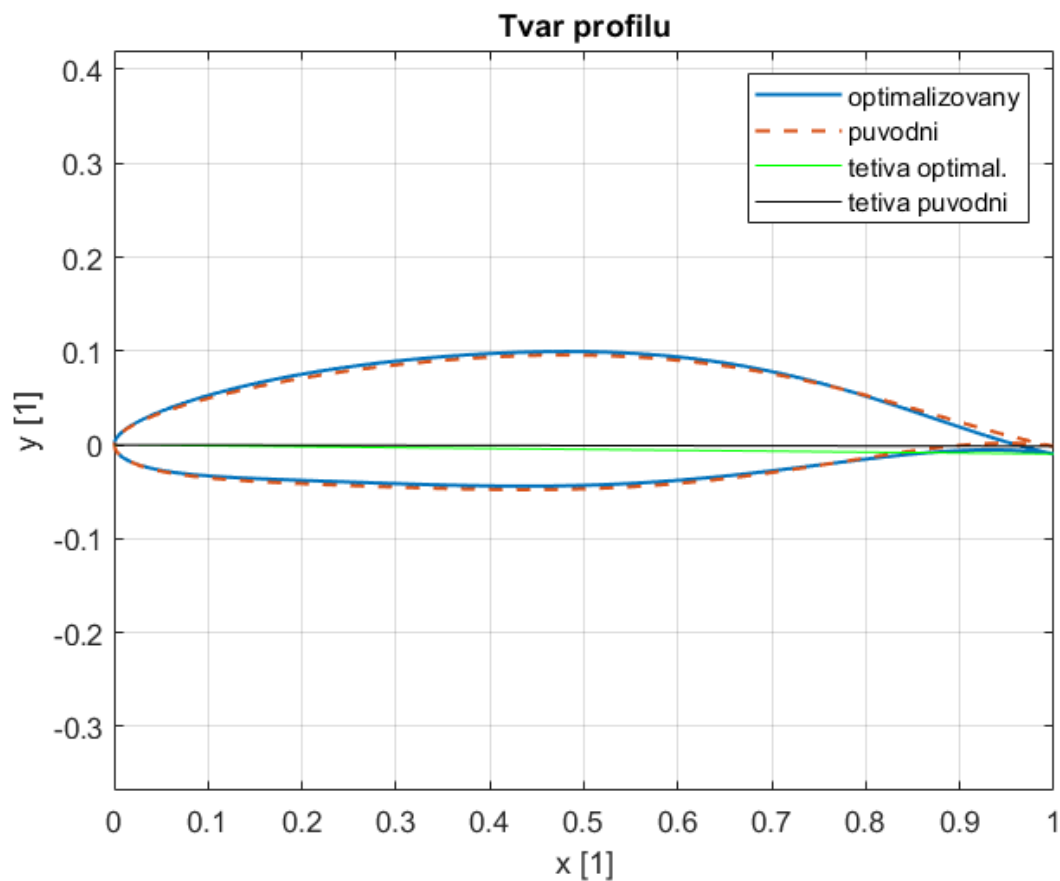
Charakteristika profilu NLF(1)-0414 je velmi podobná profilu NLF(1)-0115. Opět se jedná o profil s přirozeně laminárním obtékáním (natural laminar flow), jehož účelem je poskytovat vysoký vztlak při nízkém součiniteli odporu. Jedná se o výrazně podzvukový (nízkorychlostní) profil, jehož primární návrhový stav je v relativně vysokých Reynoldsových číslech ( $Re \approx 10^7$ ). Z tohoto důvodu je pro testování optimalizace velmi vhodný. Profil dokáže udržet laminární mezní vrstvu až do 70 % své hloubky, což zaručuje nízký součinitel odporu. Na rozdíl od profilu NLF(1)-0115, kde tvar vypočtený z parametrů dle [10] absolutně neodpovídal skutečnému tvaru dohledatelnému v [11], nejsou odchylky u tohoto profilu tak velké a jak tvar, tak součinitel vzlaku přibližně odpovídají údajům z databáze profilů (viz Obrázek 9). Na základě tohoto jsem usoudil, že parametry z [10] skutečně definují profil NLF(1)-0414 v podobě, v jaké je popsán v [12], i když tato definice může být relativně nepřesná. Největší odchylky tvaru se u tohoto profilu koncentrují v nejdůležitějších oblastech (okolí náběžné a odtokové hrany). Tento profil nemá při optimalizaci tendence k nefyzikálním změnám tvaru. V tabulce níže je opět viditelný rozdílný výsledný tvar profilu při optimalizaci pro různé úhly náběhu, přičemž tento rozdíl je příliš malý na to, aby jej bylo možné zachytit vizuálně. Vysvětlení těchto rozdílů je stejné jako u profilu NACA 0012 (viz kapitola 8.2). Na základě tabulky níže lze konstatovat, že optimalizační procedura dosahuje v absolutních číslech většího benefitu pro nízké úhly náběhu. V relativním vyjádření se pak tento trend potvrzuje v ještě mnohem výraznější podobě [10] [13].

$\alpha$ [°]	Původní		Optimalizovaný	
	0	10	0	10
$r_{lo}$ [1]	0,01050	0,01050	0,01057	0,01104
$X_{lo}$ [1]	0,4368	0,4368	0,4365	0,4365
$Y_{lo}$ [1]	- 0,04770	- 0,04770	- 0,04396	- 0,04381
$Y_{xxlo}$ [1]	0,3859	0,3859	0,3860	0,3860
$r_{up}$ [1]	0,01050	0,01050	0,01093	0,01142
$X_{up}$ [1]	0,4808	0,4808	0,4812	0,4811
$Y_{up}$ [1]	0,09570	0,09570	0,09952	0,09945
$Y_{xxup}$ [1]	- 0,7237	- 0,7237	- 0,7236	- 0,7236
$\alpha_{te}$ [°]	- 9,600	- 9,600	- 9,653	- 9,652
$\beta_{te}$ [°]	3,500	3,500	3,499	3,500
$Y_{te}$ [1]	- 0,001500	- 0,001500	- 0,009633	- 0,009539
$C_y$ [1]	0,4649	1,6323	0,5980	1,7607
Zlepšení absolutní [1]	---	---	0,1331	0,1284
Zlepšení relativní [%]	---	---	28,62	7,87

Tabulka 6 – Vlastnosti profilu NLF(1)-0414 před a po optimalizaci

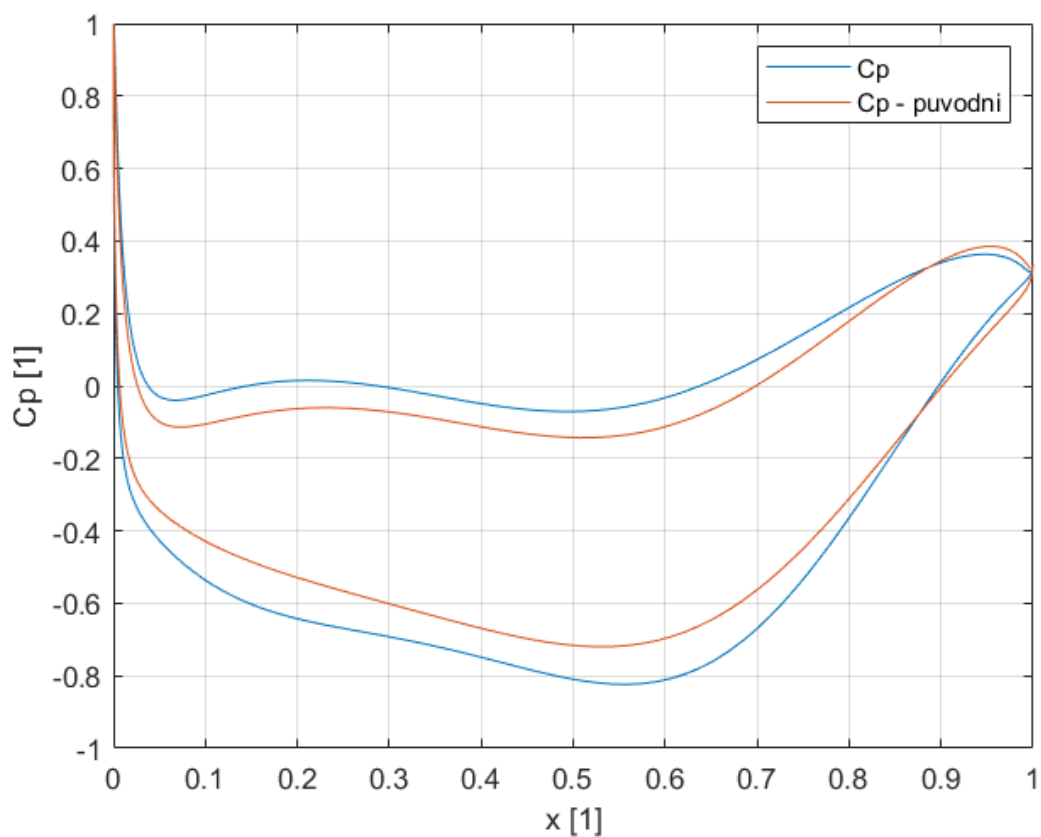


### 8.4.1 Úhel náběhu $0^\circ$

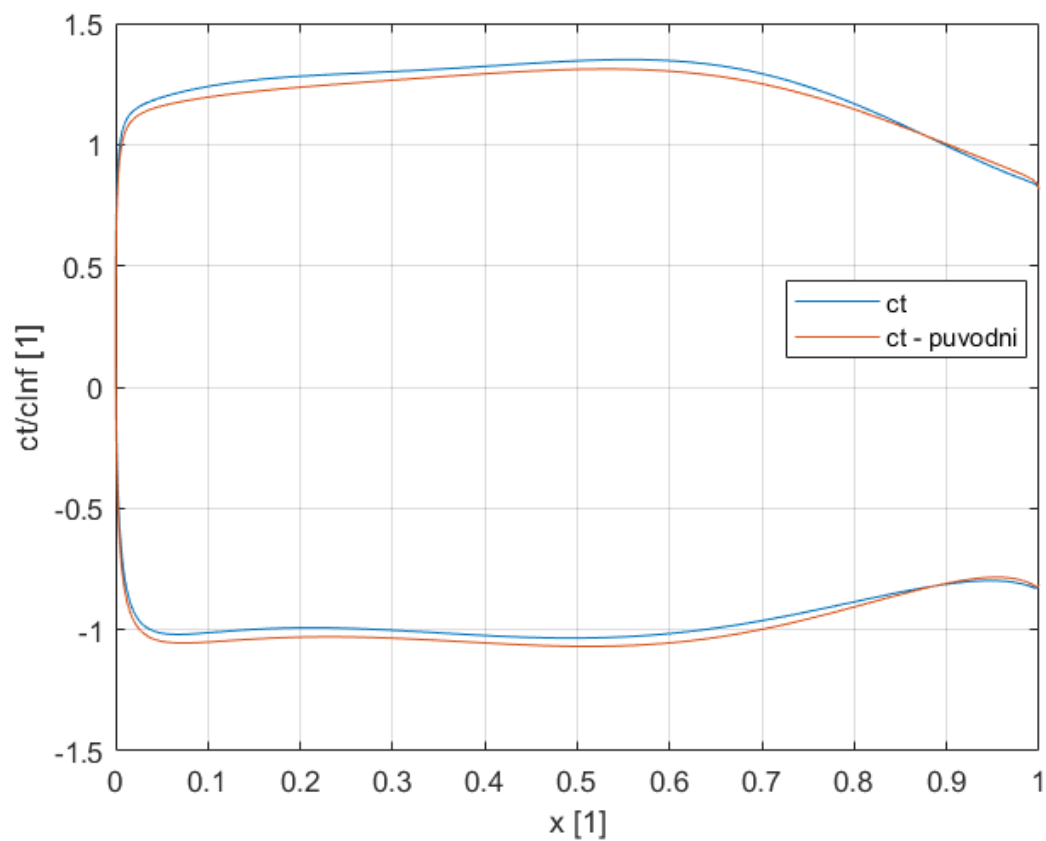


Obrázek 24 – Tvar profilu NLF(1)-0414 před a po optimalizaci





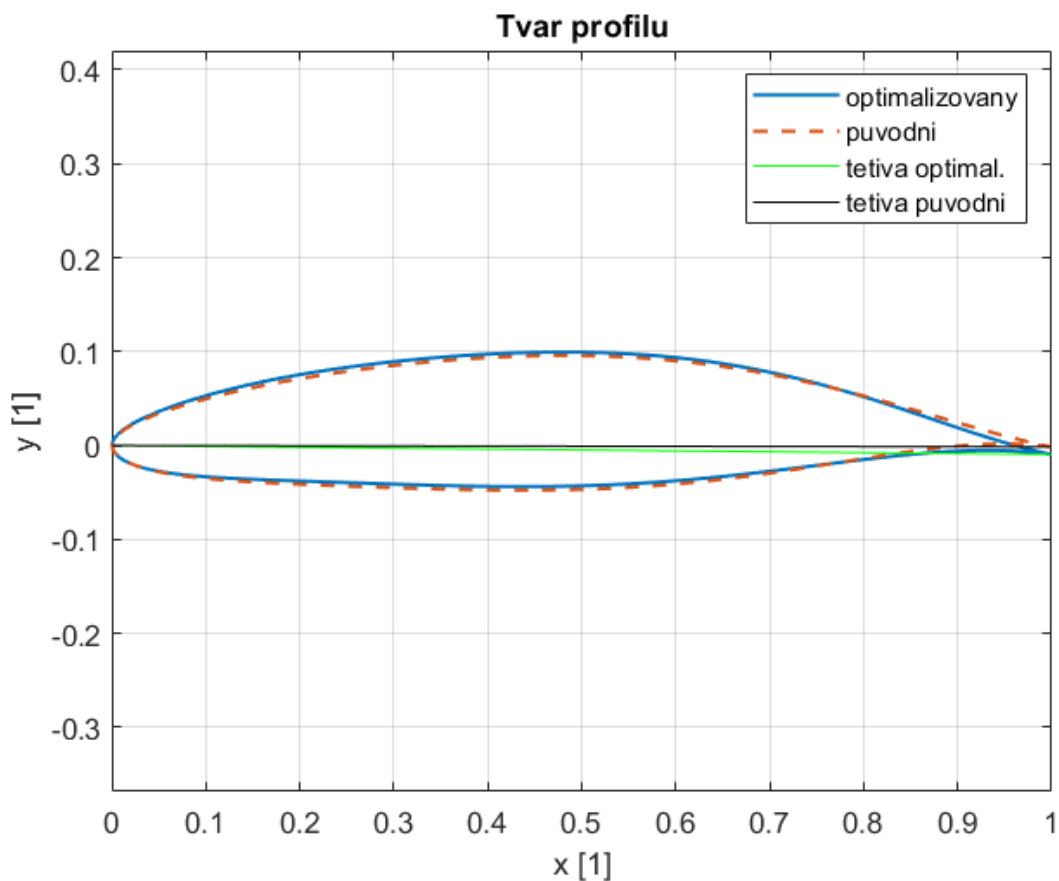
Obrázek 25 – Rozložení  $C_p$  na profilu NLF(1)-0414 před a po optimalizaci



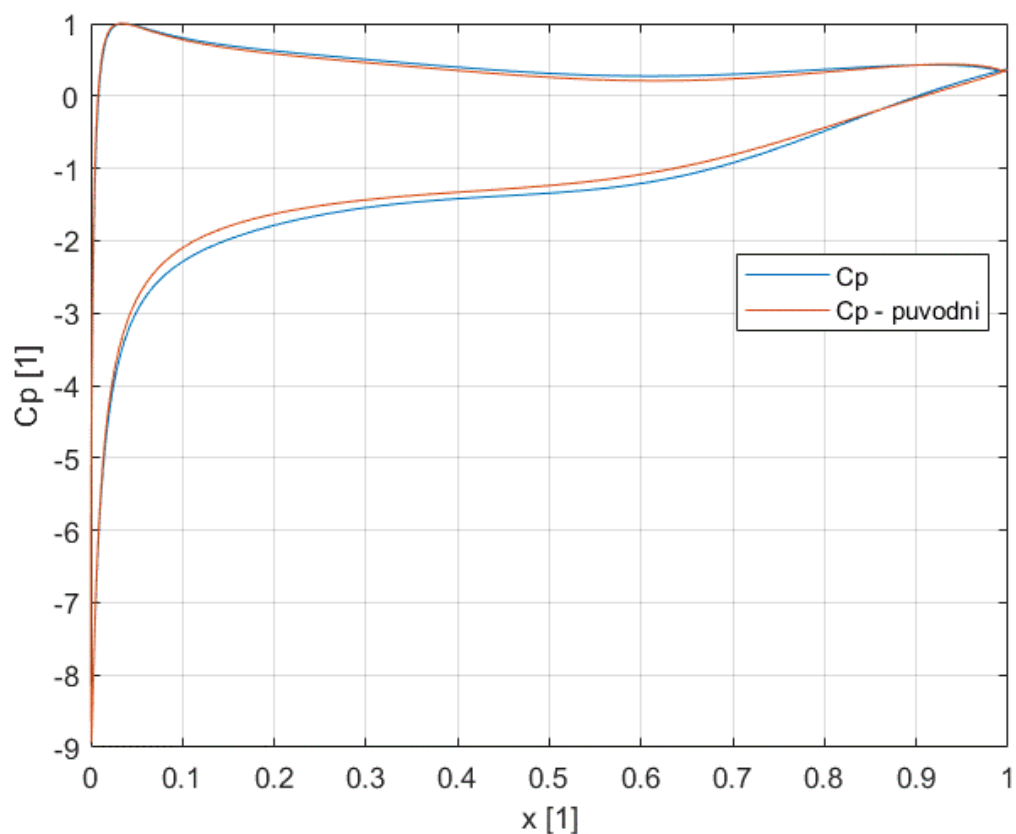
Obrázek 26 – Rozložení tečné rychlosti na profilu NLF(1)-0414 před a po optimalizaci



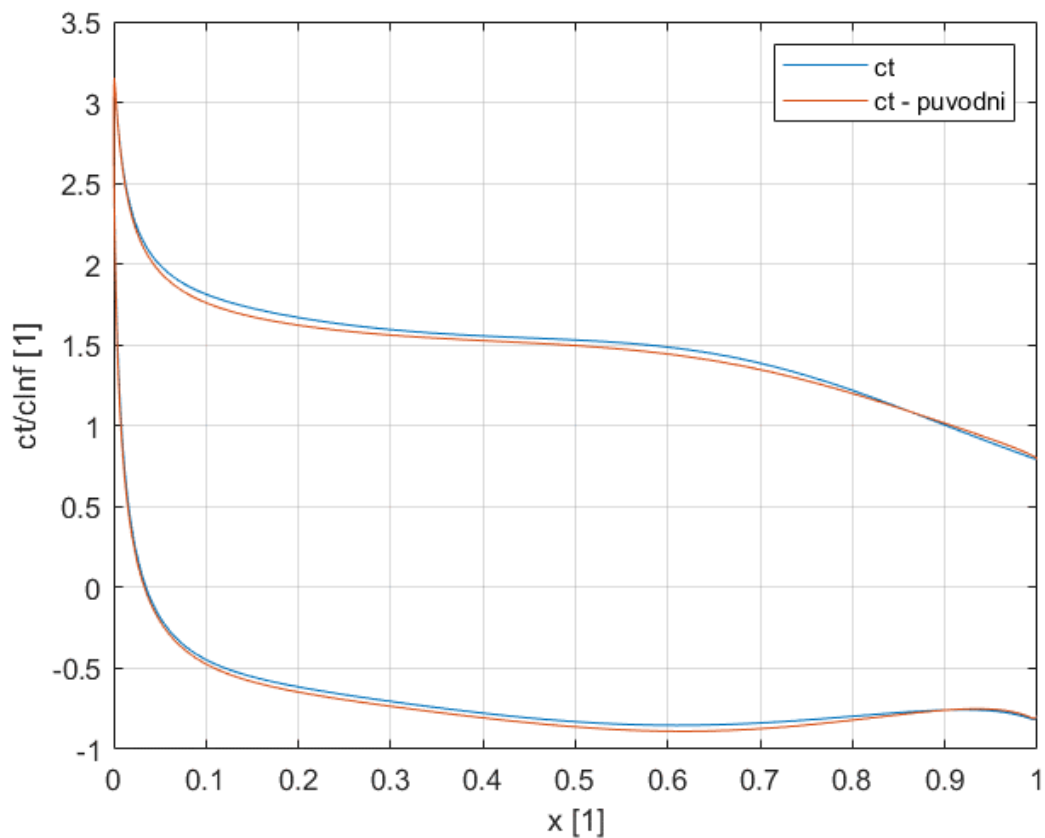
### 8.4.2 Úhel náběhu $10^\circ$



Obrázek 27 – Tvar profilu NLF(1)-0414 před a po optimalizaci



Obrázek 28 – Rozložení  $C_p$  na profilu NLF(1)-0414 před a po optimalizaci



Obrázek 29 – Rozložení tečné rychlosti na profilu NLF(1)-0414 před a po optimalizaci



## 8.5 RAE2822

Profil RAE2822 je od předešlých profilů velmi odlišný. Jedná se o transsonický profil schopný provozu při Machově čísle 0,7 – 0,8. Z tohoto důvodu je žádoucí provádět při optimalizaci pouze minimální změny tvaru, protože jakákoli změna tvaru může mít za následek přechod proudění v okolí profilu do nadzvukové oblasti a následnou tvorbu rázových vln výrazně zvyšujících odpor. Minimalizací změn tvaru se riziko tohoto nežádoucího chování snižuje, ale ne zcela eliminuje. Vzhledem k primární oblasti použití tohoto profilu by bylo vhodnější pro optimalizaci využít řešení pomocí potenciálního proudění uvažujícího stlačitelnost, které bylo použito např. v [14], případně jiné, pokročilejší, metody simulace proudění. Tyto metody se však vyznačují, vzhledem k nemožnosti použití panelové metody, výrazně (až o několik řádů) vyšší výpočetní náročností a komplikovanějším odvozením adjungovaných rovnic. Navíc je pro adjungovanou optimalizaci zpravidla nutné využít strukturovanou síť [3].

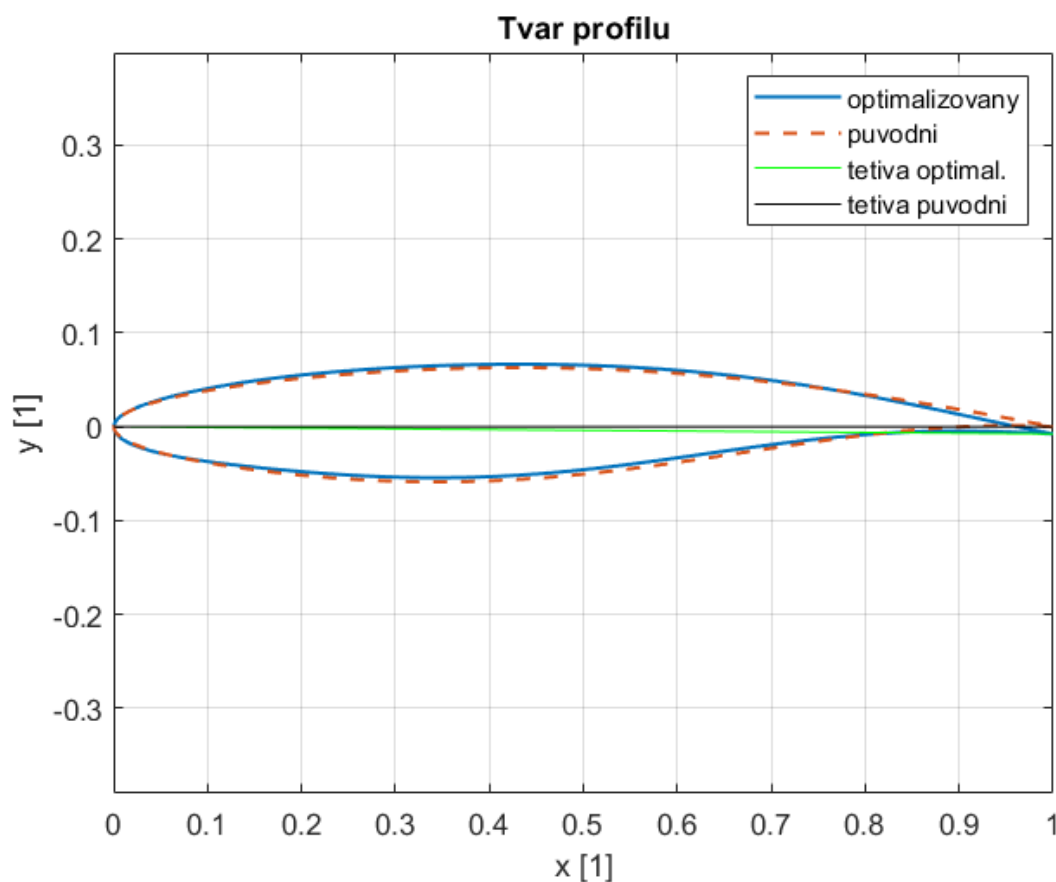
Vzhledem ke zvolené metodě řešení proudového pole je optimalizace v této práci platná pouze v rozsahu hodnot Machova čísla, kde lze zanedbat stlačitelnost ( $Ma \leq 0,3$ ). Díky možnosti využití Prandtlovy – Glauertovy korekce součinitele vztlaku lze platnost výsledků mírně rozšířit do oblasti slabě stlačitelného proudění. Pokud bychom chtěli výsledky optimalizace uplatnit při vyšší hodnotě Machova čísla, bylo by potřeba provést velmi důkladnou validaci získaných hodnot součinitele vztlaku a provést přesné výpočty součinitele odporu a obtékání profilu pro odhalení případně vznikajících rázových vln. Tento profil se tedy nachází na zcela opačné straně rychlostního spektra než profily řady NLF(1). Profil nemá tendenci k nefyzikálním změnám tvaru během optimalizace. Opět lze pozorovat rozdílné finální hodnoty parametrů pro různé úhly náběhu, přičemž tento rozdíl je příliš malý na to, aby byl na tvaru profilu pouhým okem patrný. Stejně jako u předchozích profilů je benefit optimalizace největší při nízkých úhlech náběhu, kdy tento rozdíl je patrný jak v absolutním, tak ještě mnohem výrazněji v relativním vyjádření. U tohoto profilu jsou však tyto rozdíly výrazně větší než u předchozích [10].



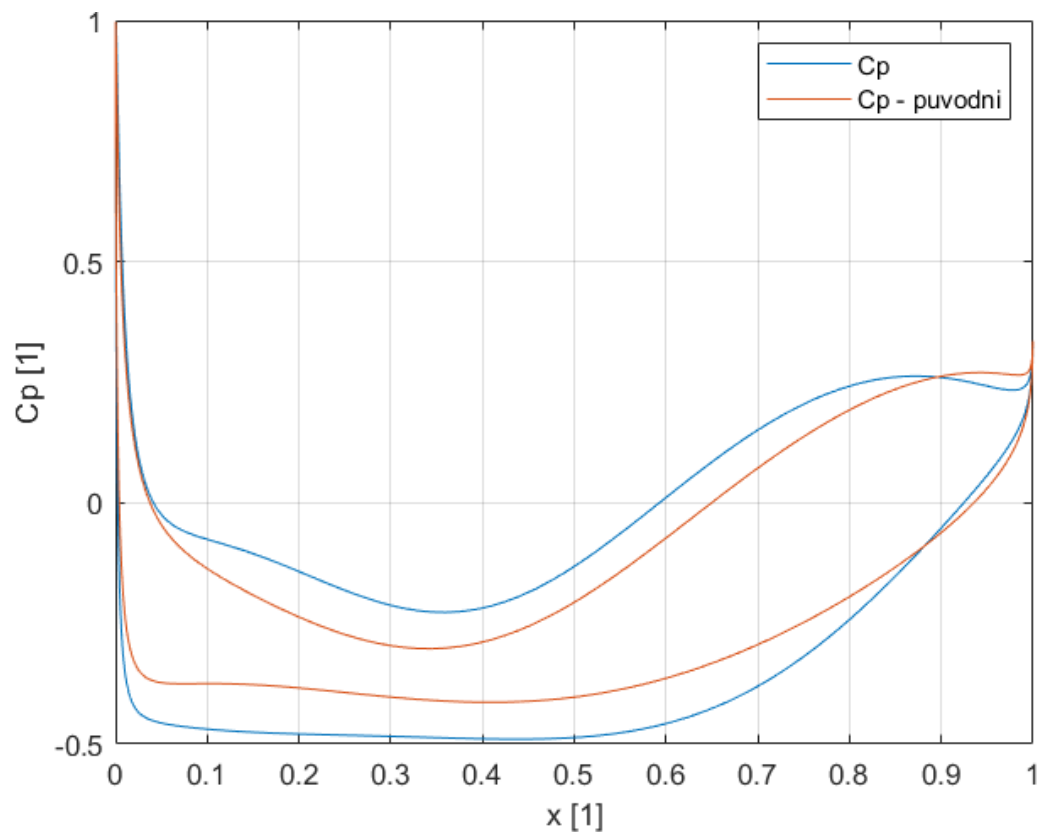
$\alpha$ [°]	Původní		Optimalizovaný	
	0	10	0	10
$r_{lo}$ [1]	0,008300	0,008300	0,01010	0,01066
$X_{lo}$ [1]	0,3441	0,3441	0,3439	0,3438
$Y_{lo}$ [1]	- 0,05880	- 0,05880	- 0,05438	- 0,05425
$Y_{xxlo}$ [1]	0,7018	0,7018	0,7019	0,7019
$r_{up}$ [1]	0,008300	0,008300	0,008408	0,009004
$X_{up}$ [1]	0,4312	0,4312	0,4314	0,4314
$Y_{up}$ [1]	0,06290	0,06290	0,06658	0,06639
$Y_{xxup}$ [1]	- 0,4273	- 0,4273	- 0,4272	- 0,4272
$\alpha_{te}$ [°]	- 6,860	- 6,860	- 6,920	- 6,919
$\beta_{te}$ [°]	8,080	8,080	8,079	8,076
$Y_{te}$ [1]	0	0	- 0,007652	- 0,007477
$C_y$ [1]	0,2481	1,4069	0,3757	1,528
Zlepšení absolutní [1]	---	---	0,1276	0,1211
Zlepšení relativní [%]	---	---	51,43	8,61

Tabulka 7 – Vlastnosti profilu RAE2822 před a po optimalizaci

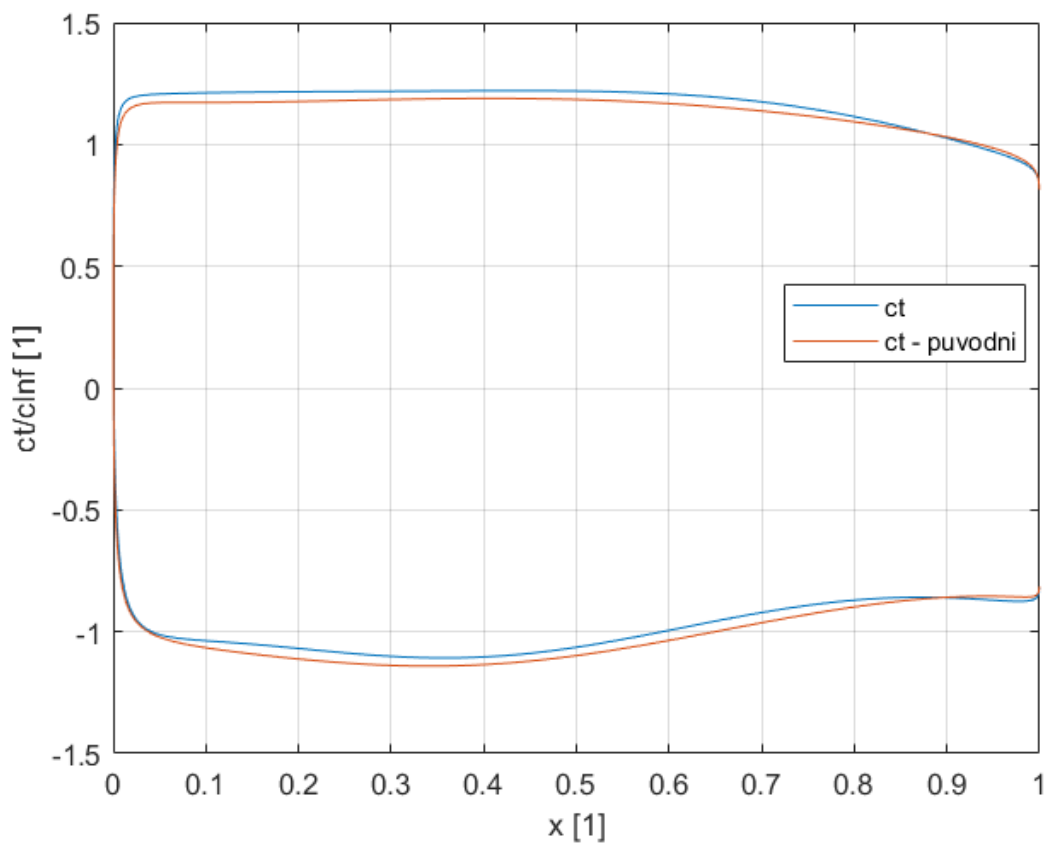
### 8.5.1 Úhel náběhu 0°



Obrázek 30 – Tvar profilu RAE2822 před a po optimalizaci



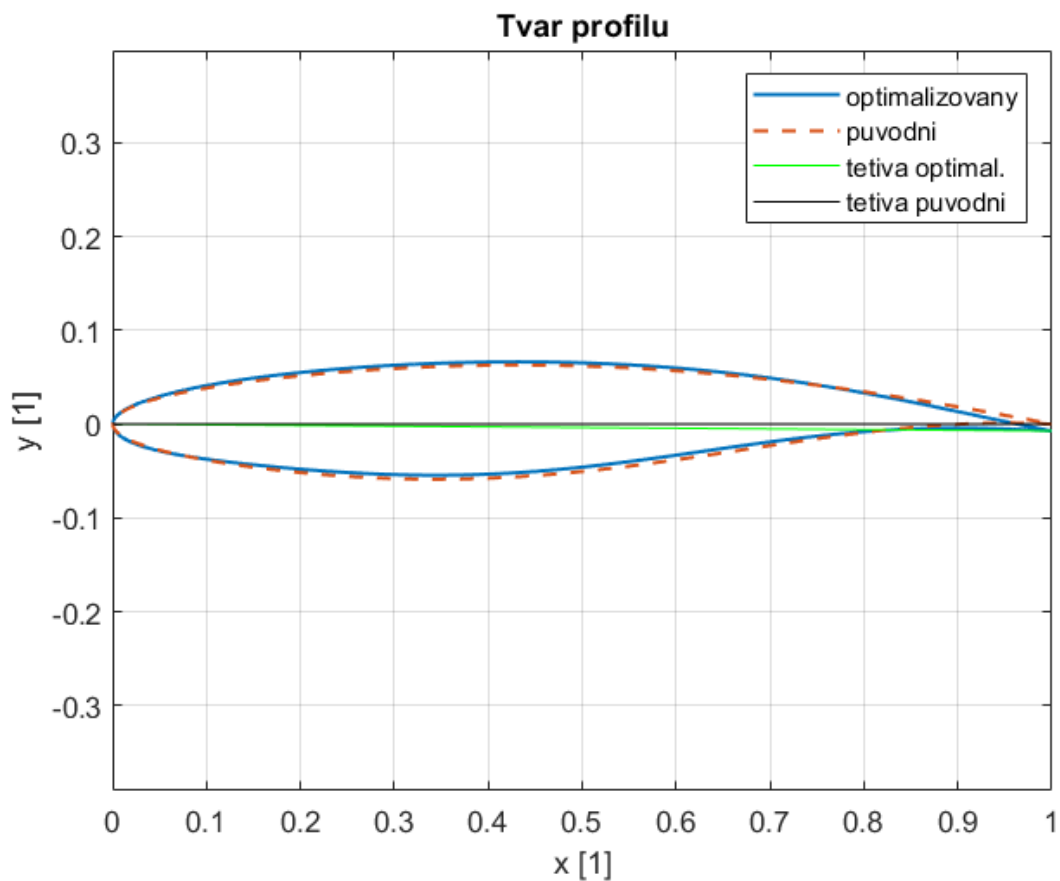
Obrázek 31 – Rozložení  $C_p$  na profilu RAE2822 před a po optimalizaci



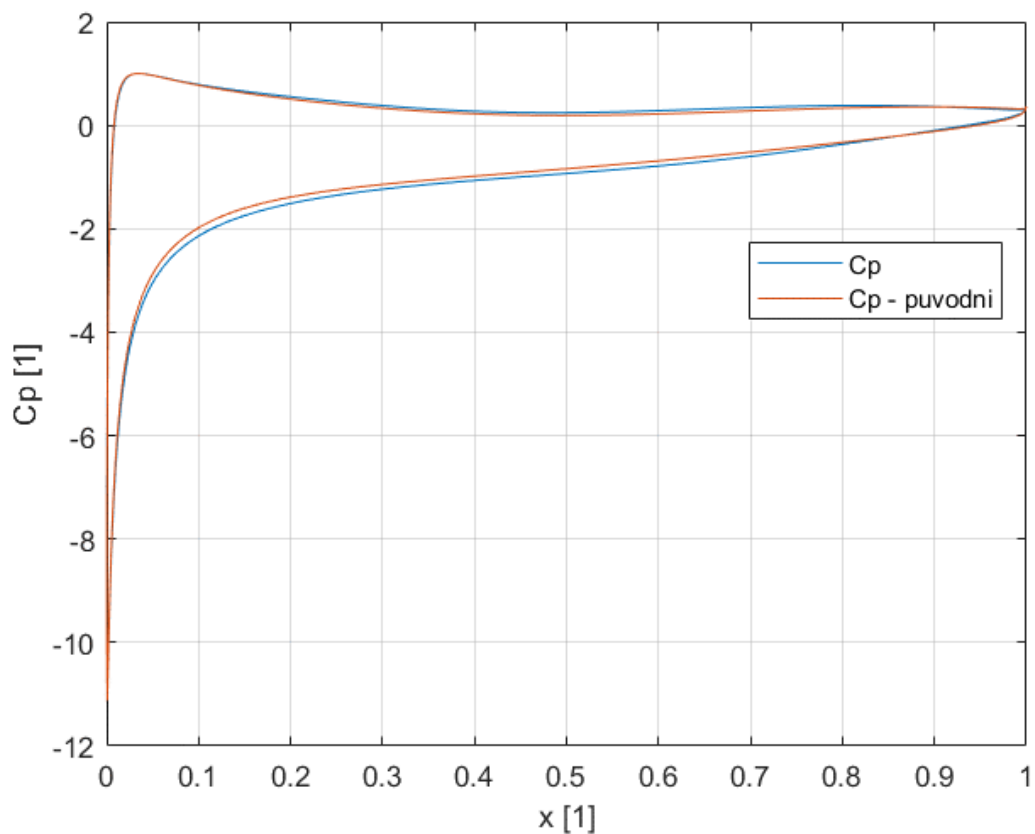
Obrázek 32 – Rozložení tečné rychlosti na profilu RAE2822 před a po optimalizaci



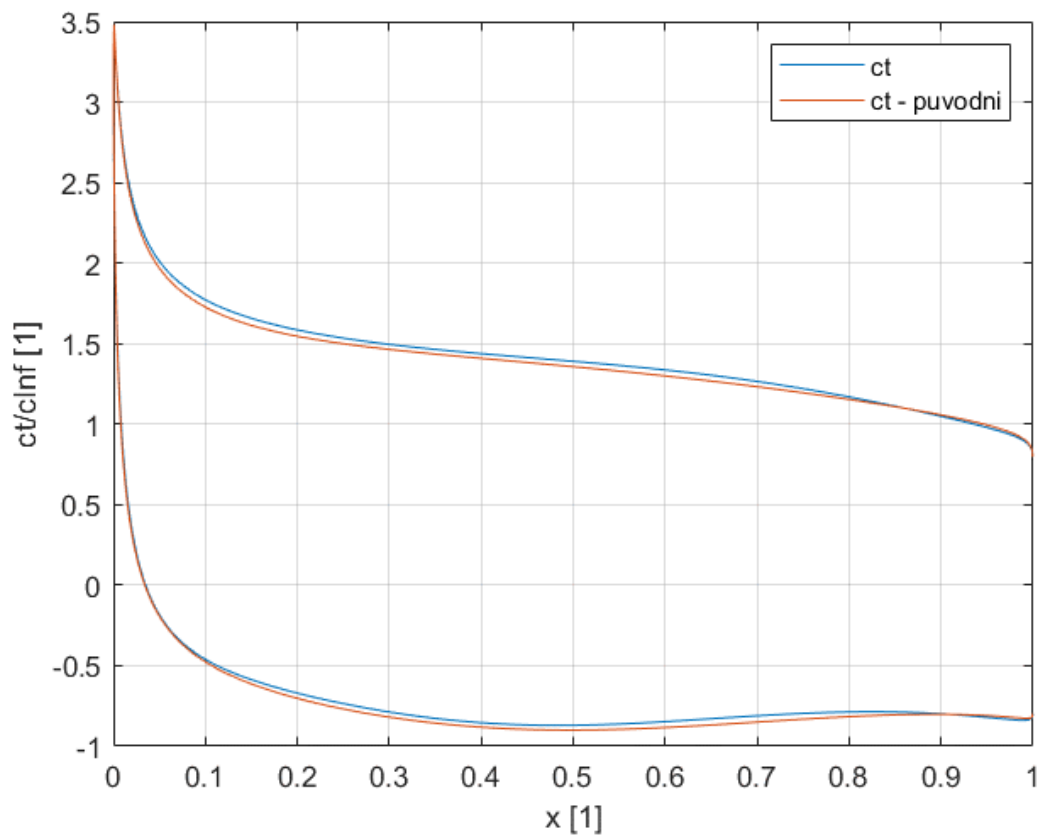
### 8.5.2 Úhel náběhu $10^\circ$



Obrázek 33 – Tvar profilu RAE2822 před a po optimalizaci



Obrázek 34 – Rozložení  $C_p$  na profilu RAE2822 před a po optimalizaci



Obrázek 35 – Rozložení tečné rychlosti na profilu RAE2822 před a po optimalizaci





## 8.6 NREL S809

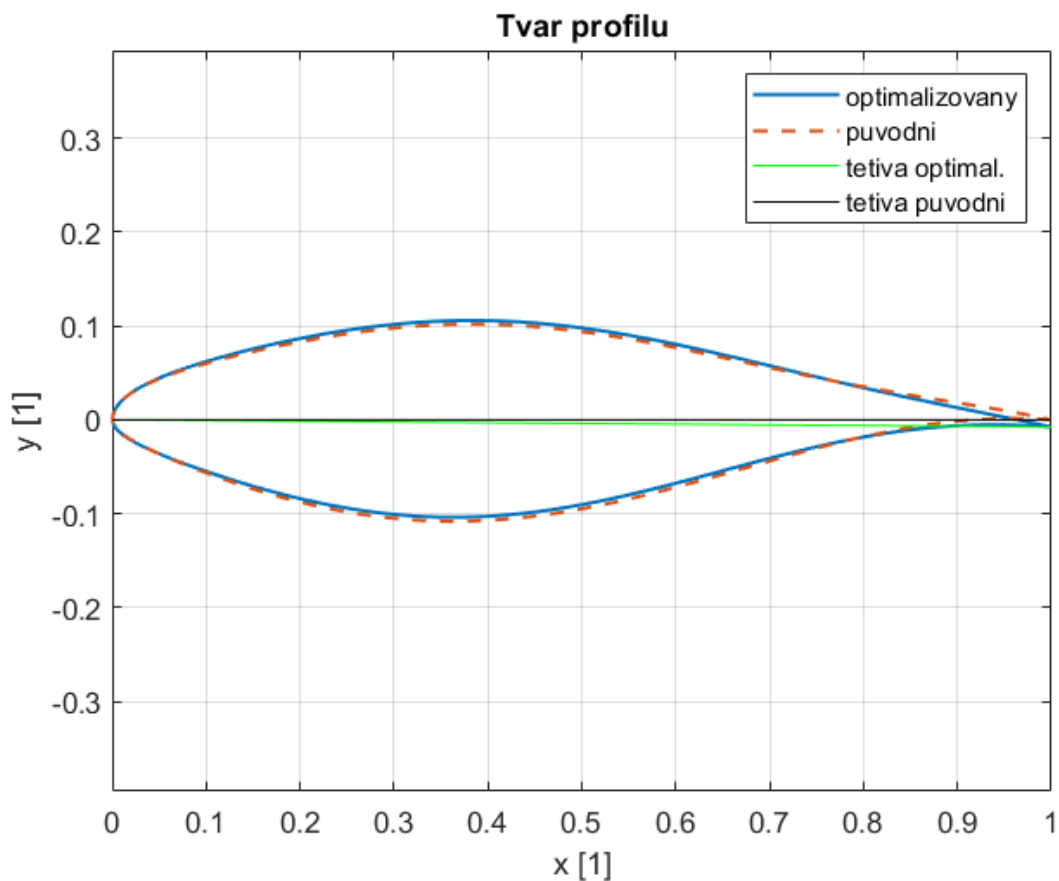
Profil NREL S809 je opět výrazně odlišný od všech dříve v této práci zmiňovaných profilů. Tento profil byl navržen pro použití na listech rotoru větrných elektráren. Vzhledem k tomuto předpokládanému použití byl profil navržen pro velmi nízká Machova čísla (nestlačitelné proudění) a střední hodnoty Reynoldsova čísla ( $Re \approx 10^6$ ). V oblasti větrných elektráren je profil relativně používaný, přičemž jsou z něj odvozeny další příbuzné profily (např. NREL Phase II, Phase III a Phase VI HAWT). Vzhledem k předpokládaným hodnotám Machova a Reynoldsova čísla při provozu tohoto profilu je Hessova – Smithova panelová metoda k řešení proudového pole více než vhodná. V oblasti větrných elektráren je optimalizace součinitele vztlaku stejně důležitá jako v letectví, protože optimalizace součinitele vztlaku umožní získat vyšší výkon při stejné velikosti elektrárny, případně elektrárnu při stejném výkonu zmenšit. Navíc v této oblasti zpravidla není kladen takový důraz na součinitel odporu jako v letectví. Z tohoto důvodu bychom si při optimalizaci mohli dovolit i větší změny tvaru, spojené s výraznějším nárůstem součinitele vztlaku. Tento profil se zpravidla používá při úhlu náběhu do  $6,2^\circ$ , tudíž je úhel náběhu  $10^\circ$  použitý v optimalizaci mírně nadsazený. Hodnota  $10^\circ$  byla zachována z důvodu konzistence s ostatními použitými profily. Profil nemá tendenci k nefyzikálním změnám tvaru během optimalizace. Opět lze pozorovat různé výsledné hodnoty parametrů pro různé úhly náběhu. Také u tohoto profilu se potvrzuje trend, že s rostoucím úhlem náběhu benefit optimalizace klesá, a to u tohoto profilu zdaleka nejvýrazněji ze všech testovaných profilů [9].

$\alpha$ [°]	Původní		Optimalizovaný	
	0	10	0	10
$r_{lo}$ [1]	0,0100	0,0100	0,01115	0,01168
$X_{lo}$ [1]	0,3633	0,3633	0,3630	0,3629
$Y_{lo}$ [1]	- 0,1081	- 0,1081	- 0,1038	- 0,1038
$Y_{xxlo}$ [1]	1,526	1,526	1,526	1,526
$r_{up}$ [1]	0,02160	0,02160	0,02123	0,02167
$X_{up}$ [1]	0,3826	0,3826	0,3829	0,3829
$Y_{up}$ [1]	0,1018	0,1018	0,1057	0,1057
$Y_{xxup}$ [1]	- 1,201	- 1,201	- 1,201	- 1,201
$\alpha_{te}$ [°]	- 8,500	- 8,500	- 8,558	- 8,558
$\beta_{te}$ [°]	8,500	8,500	8,499	8,495
$Y_{te}$ [1]	0	0	- 0,007687	- 0,007616
$C_y$ [1]	0,2178	1,4256	0,3507	1,5529
Zlepšení absolutní [1]	---	---	0,1329	0,1273
Zlepšení relativní [%]	---	---	61,02	8,93

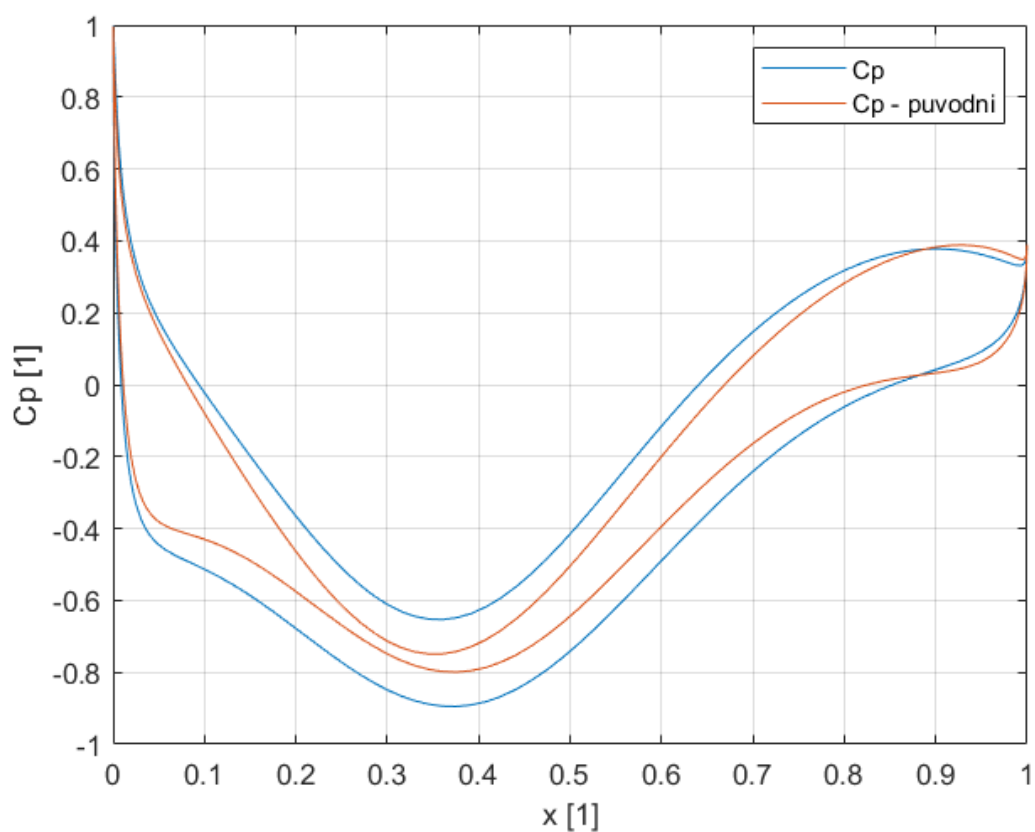
Tabulka 8 – Vlastnosti profilu NREL S809 před a po optimalizaci



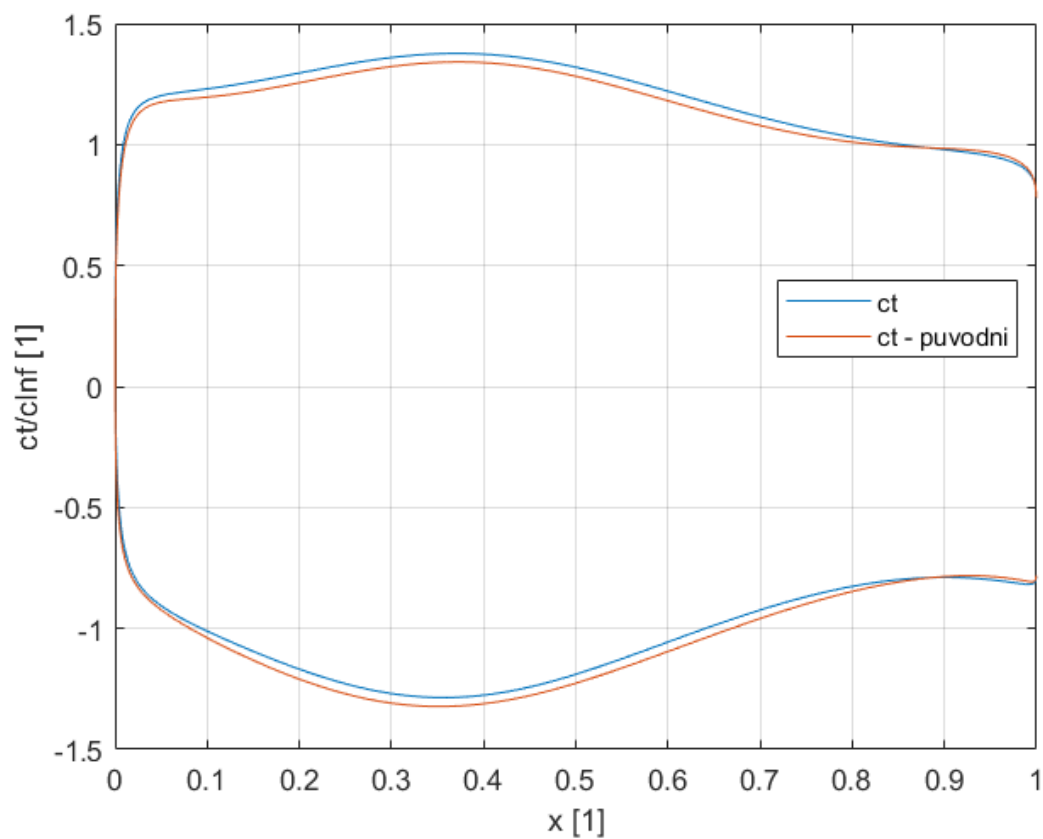
### 8.6.1 Úhel náběhu $0^\circ$



Obrázek 36 – Tvar profilu NREL S809 před a po optimalizaci



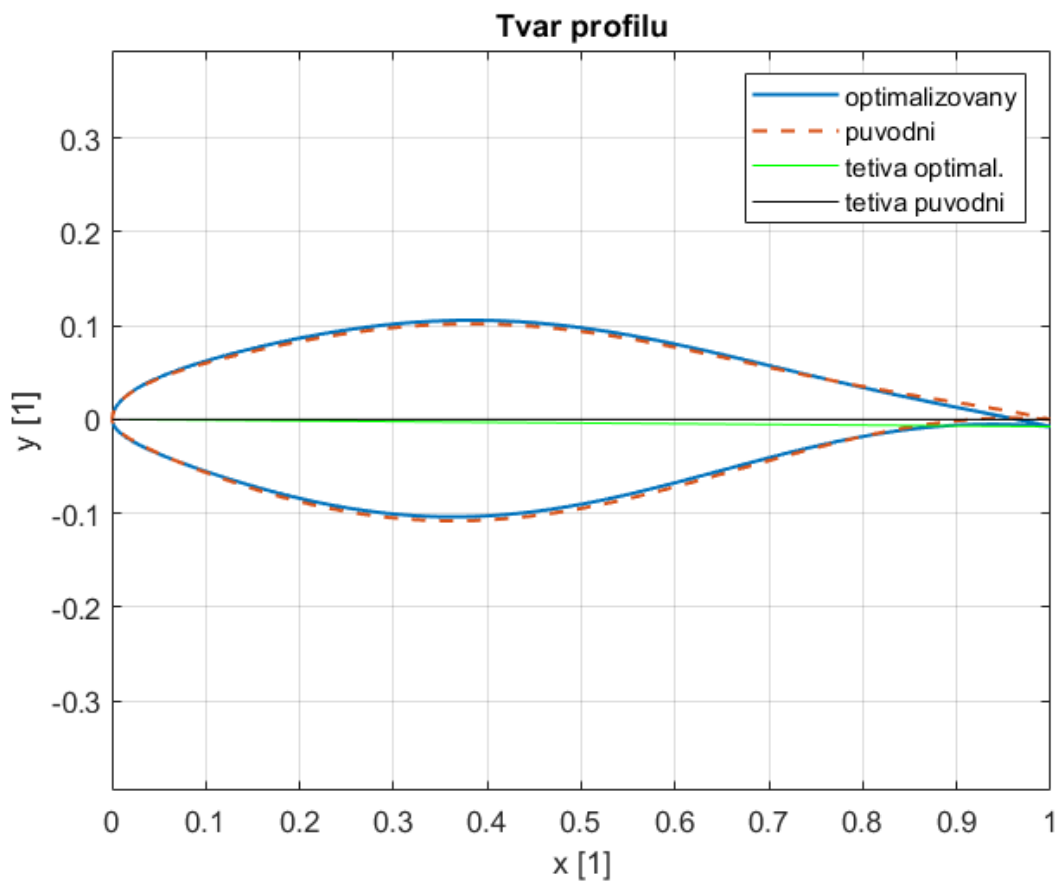
Obrázek 37 – Rozložení  $C_p$  na profilu NREL S809 před a po optimalizaci



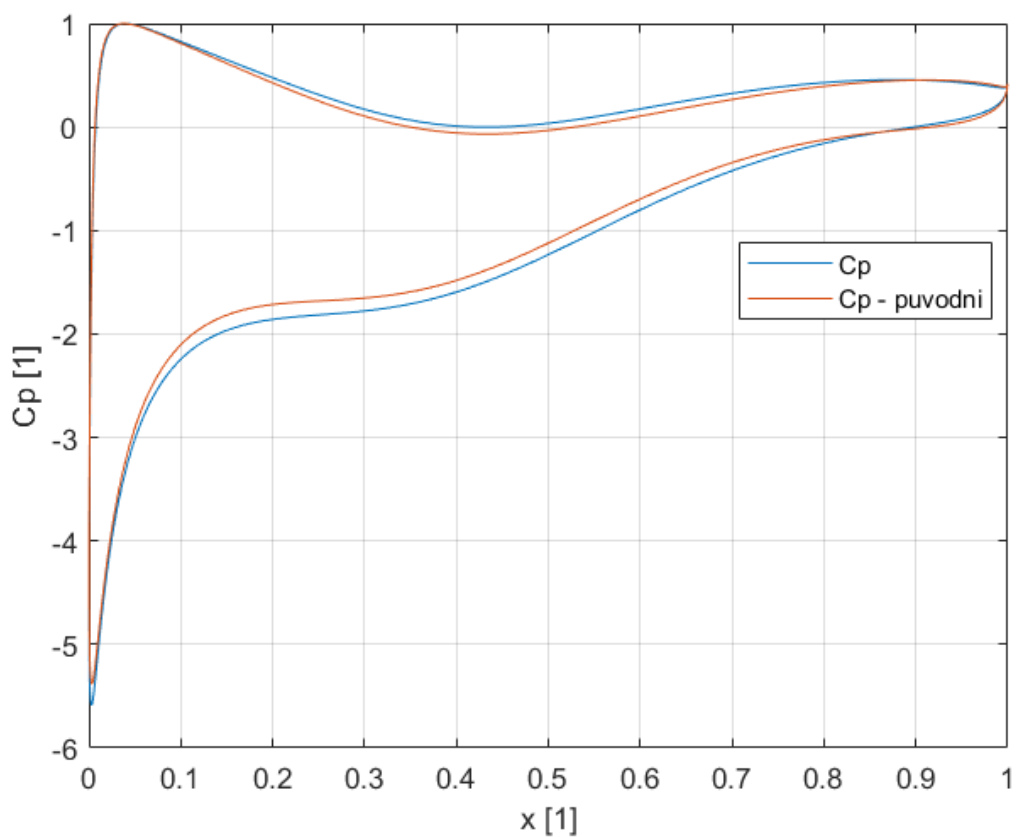
Obrázek 38 – Rozložení tečné rychlosti na profilu NREL S809 před a po optimalizaci



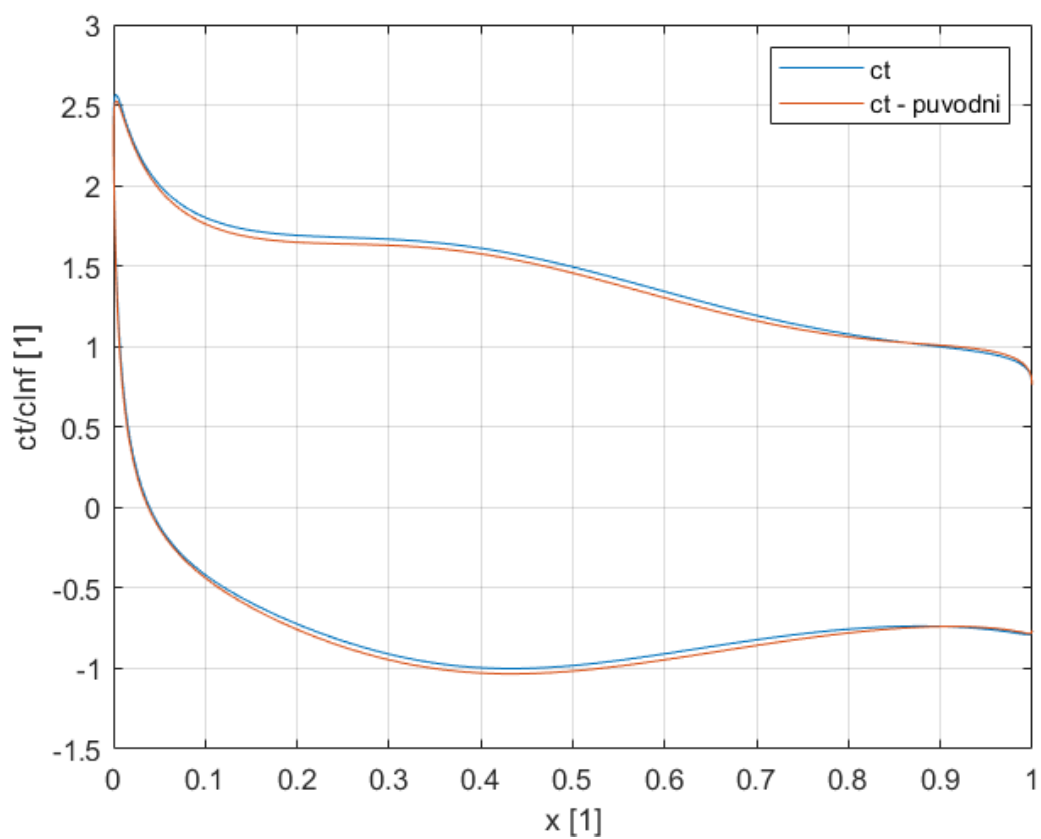
### 8.6.2 Úhel náběhu $10^\circ$



Obrázek 39 – Tvar profilu NREL S809 před a po optimalizaci



Obrázek 40 – Rozložení  $C_p$  na profilu NREL S809 před a po optimalizaci



Obrázek 41 – Rozložení tečné rychlosti na profilu NREL S809 před a po optimalizaci



## 8.7 Evoluce tvaru profilů během optimalizace

Evoluce tvaru při optimalizaci byla sledována u všech profilů při nulovém úhlu náběhu, protože většina profilů je primárně používána při nízkých úhlech náběhu (nižší jednotky stupňů). V této oblasti má také většina profilů bod aerodynamické jemnosti (maximální klouzavosti), tzn. maximální poměr  $C_y/C_x$ . Úhel  $0^\circ$  byl volen kvůli konzistenci s kapitolami 8.2 až 8.6. Sledování evoluce tvaru profilu během optimalizace je důležité pro vyhodnocení toho, zda změny tvaru profilu dávají logický a fyzikální smysl. Pokud se profil mezi iteracemi mění konzistentně, a navíc změny tvaru odpovídají očekávání pro zvyšování vztlaku, pak je velká šance, že algoritmus běží správně a opravdu postupuje ve směru největšího růstu součinitele vztlaku. Pro sledování evoluce jsem volil vždy stejný počet iteračních kroků (45 iterací z důvodu dělitelnosti 15), ale pro jednotlivé profily jsem volil různou velikost iteračního kroku tak, aby byl maximalizován nárůst součinitele vztlaku a aby změny tvaru profilu během iterování vynikly. Zároveň bylo nutné volit iterační krok tak, aby se tvar profilu nestal očividně nefyzikálním, což je problémem zejména u profilu NACA 0012. Počet iterací, velikost iteračního kroku a interval sledování jsou uvedeny u jednotlivých profilů. V podkapitolách dále jsou uvedeny poznámky k evoluci tvaru jednotlivých profilů a jsou vykresleny postupně se vyvíjející tvary. Zobrazení těchto tvarů v měřítku, spolu s vývojem hodnoty cílové funkce během optimalizace, viz Příloha 8.7 – Evoluce tvaru profilu a cílové funkce – obrázky a grafy.

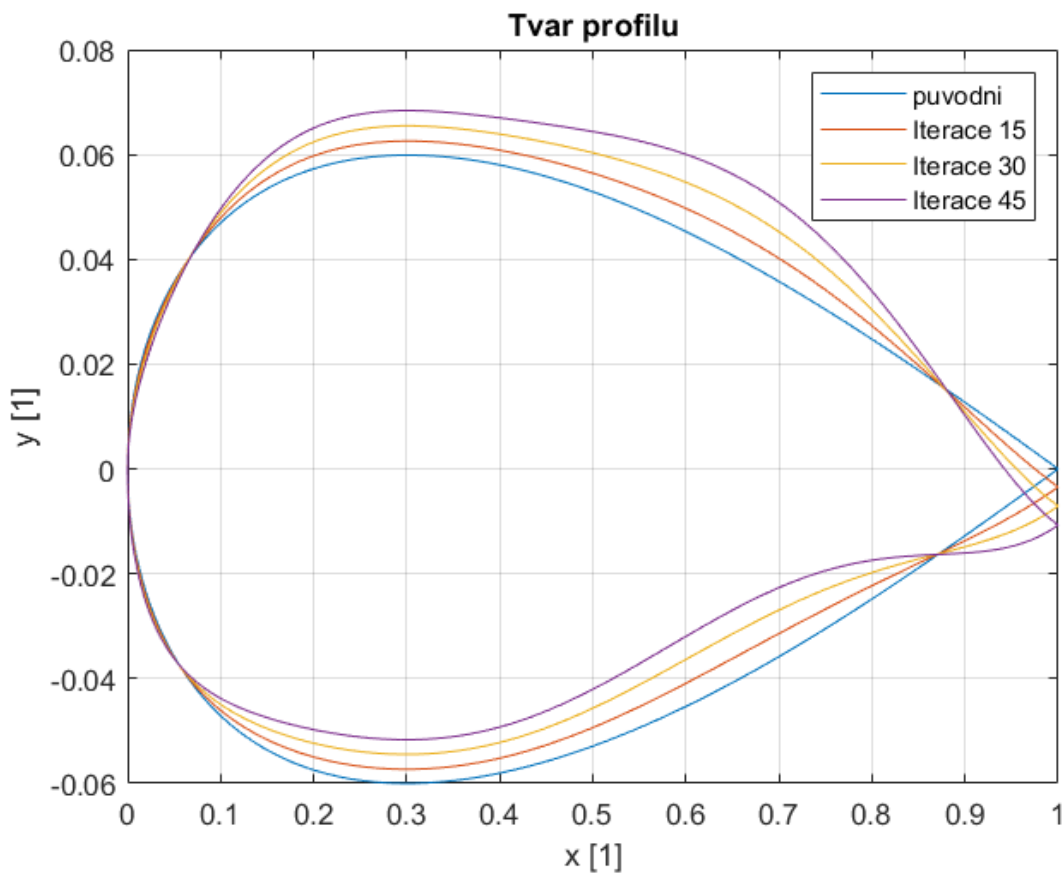
### 8.7.1 NACA 0012

V případě profilu NACA 0012 byla vykreslována každá 15. iterace při iteračním kroku 0,0004 a 45 iteracích celkem. Tato volba byla použita kvůli přehlednosti výsledných grafů a zachování fyzikálnosti tvaru profilu. Pro větší iterační krok nebo větší počet iterací se horní površka profilu zvlní, což z fyzikálního pohledu nedává smysl. Toto zvlnění je způsobeno nedokonalostí panelové metody a použitého přístupu celkově (použitý model nepřipouští odtržení jinde než na odtokové hraně). Jinak jsou změny tvaru mezi sledovanými iteracemi konzistentní a odpovídají předpokládaným změnám tvaru pro zvýšení vztlaku (horní površka se vyklenuje, spodní je zarovnávána do roviny). Z hlediska evoluce tvaru stojí za povšimnutí, že na profilu se vytváří celkem 4 uzlové body (na každé površce jeden v blízkosti náběžné a druhý v blízkosti odtokové hrany), které během optimalizace zůstávají na místě. V tabulce níže jsou uvedeny parametry parametrizace PARSEC a součinitele vztlaku v jednotlivých sledovaných iteracích. Pro tento profil nedává smysl definovat relativní nárůst součinitele vztlaku, protože se jedná o symetrický profil (při nulovém úhlu náběhu má NACA 0012 nulový vztlak). Benefit optimalizace, srovnáme-li mezi sebou po sobě následující sledované iterace, zůstává stále přibližně stejný nebo mírně roste.



	Původní	Iterace 15	Iterace 30	Iterace 45
$\alpha$ [°]	0	0	0	0
$r_{lo}$ [1]	0,01470	0,01623	0,01778	0,01923
$X_{lo}$ [1]	0,2996	0,2997	0,2997	0,2996
$Y_{lo}$ [1]	- 0,06000	- 0,05731	- 0,05446	- 0,05167
$Y_{xxlo}$ [1]	0,4406	0,4407	0,4408	0,4409
$r_{up}$ [1]	0,01470	0,01313	0,01132	0,009340
$X_{up}$ [1]	0,3015	0,3013	0,3010	0,3006
$Y_{up}$ [1]	0,05990	0,06258	0,06548	0,06839
$Y_{xxup}$ [1]	- 0,4360	- 0,4359	- 0,4358	- 0,4357
$\alpha_{te}$ [°]	0	- 0,03100	- 0,06400	- 0,09700
$\beta_{te}$ [°]	14,67	14,67	14,67	14,67
$Y_{te}$ [1]	0	- 0,003429	- 0,007088	- 0,01071
$C_y$ [1]	- 0,0005	0,0878	0,1829	0,2790
Zlepšení absolutní [1]	---	0,0883	0,1834	0,2795
Zlepšení relativní [%]	---	---	---	---
Zlepšení oproti předchozí iteraci	---	0,0883	0,0951	0,0961

Tabulka 9 – Změny parametrů profilu NACA 0012 během optimalizace



Obrázek 42 – Evoluce tvaru profilu NACA 0012



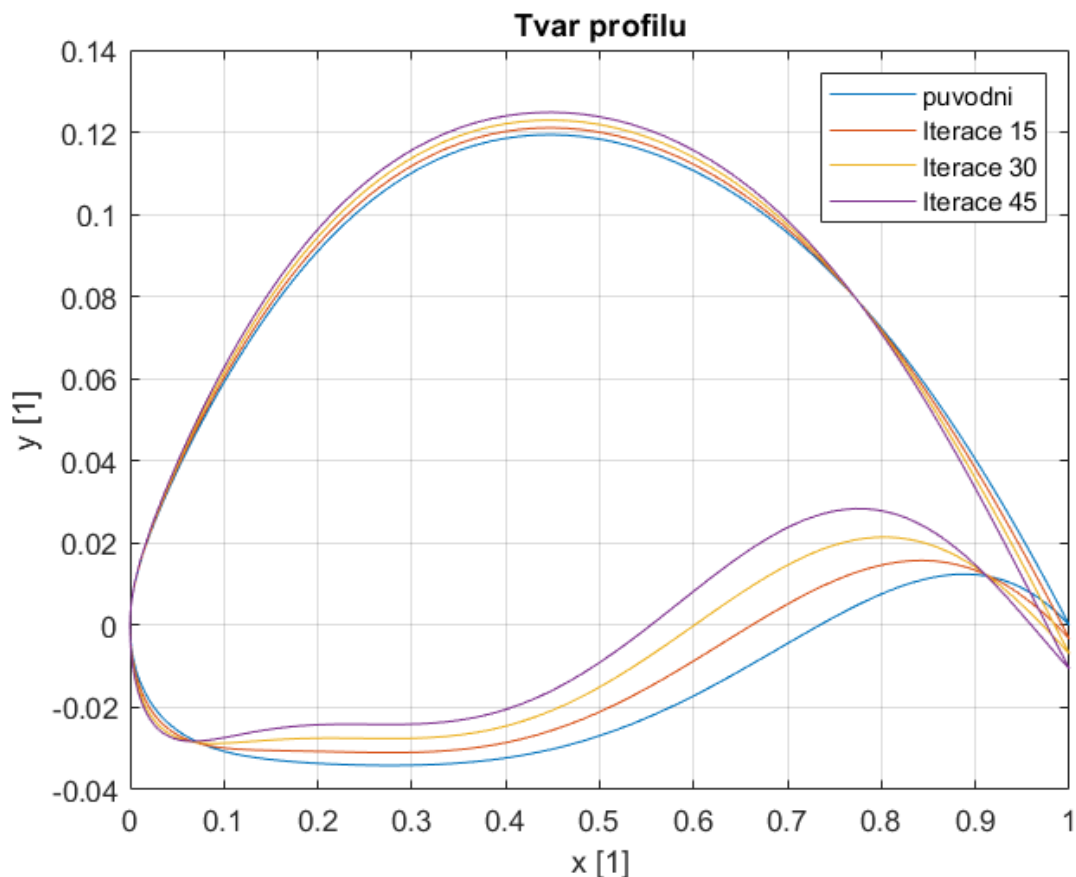
### 8.7.2 NLF(1)-0115 dle [10]

Pro profil NLF(1)-0115 byla sledována každá 15. iterace při iteračním kroku 0,0004 a 45 iteracích celkem. Je vidět, že změny tvaru tohoto profilu se koncentrují zejména na spodní povrchu profilu, konkrétně do její zadní poloviny. Změny tvaru profilu odpovídají očekávání pro zvyšování součinitele vztlaku. Spodní povrch s pokračující optimalizací začíná jevit známky zvlnění, což je jev vysoce nežádoucí. Z tohoto důvodu by bylo vhodné optimalizaci zastavit někde v okolí 30. iterace. I pro profil s takto vysokým základním součinitelem vztlaku je metoda schopna dosáhnout výrazného vylepšení, i když tento profil tlačí možná až lehce za hranu fyzikálně přípustného. Na profilu lze stejně jako u NACA 0012 nalézt uzlové body, které se během optimalizace nepohybují. U tohoto profilu jsou tyto body celkem 3 (2 na spodní a jeden na horní povrchu). Parametry profilu včetně součinitele vztlaku ve sledovaných iteracích jsou uvedeny v tabulce níže. Povšimněme si prakticky konstantního přínosu optimalizace při porovnání výsledků v jednotlivých sledovaných iteracích.

	Původní	Iterace 15	Iterace 30	Iterace 45
$\alpha$ [°]	0	0	0	0
$r_{lo}$ [1]	0,009500	0,01225	0,01493	0,01741
$X_{lo}$ [1]	0,2774	0,2772	0,2768	0,2761
$Y_{lo}$ [1]	- 0,03410	- 0,03098	- 0,02757	- 0,02413
$Y_{xxlo}$ [1]	0,1810	0,1811	0,1812	0,1813
$r_{up}$ [1]	0,009500	0,009621	0,009765	0,009919
$X_{up}$ [1]	0,4468	0,4469	0,4470	0,4470
$Y_{up}$ [1]	0,1194	0,1211	0,1229	0,1248
$Y_{xxup}$ [1]	- 0,7844	- 0,7844	- 0,7843	- 0,7843
$\alpha_{te}$ [°]	- 18,82	- 18,85	- 18,88	- 18,91
$\beta_{te}$ [°]	9,740	9,737	9,734	9,731
$Y_{te}$ [1]	0	- 0,003307	- 0,006937	- 0,01062
$C_y$ [1]	0,8878	0,9754	1,0648	1,1508
Zlepšení absolutní [1]	---	0,0876	0,1770	0,2630
Zlepšení relativní [%]	---	9,86	19,94	29,63
Zlepšení oproti předchozí iteraci	---	0,0876	0,0894	0,0860

Tabulka 10 – Změny parametrů profilu NLF(1)-0115 během optimalizace





Obrázek 43 – Evoluce tvaru profilu NLF(1)-0115

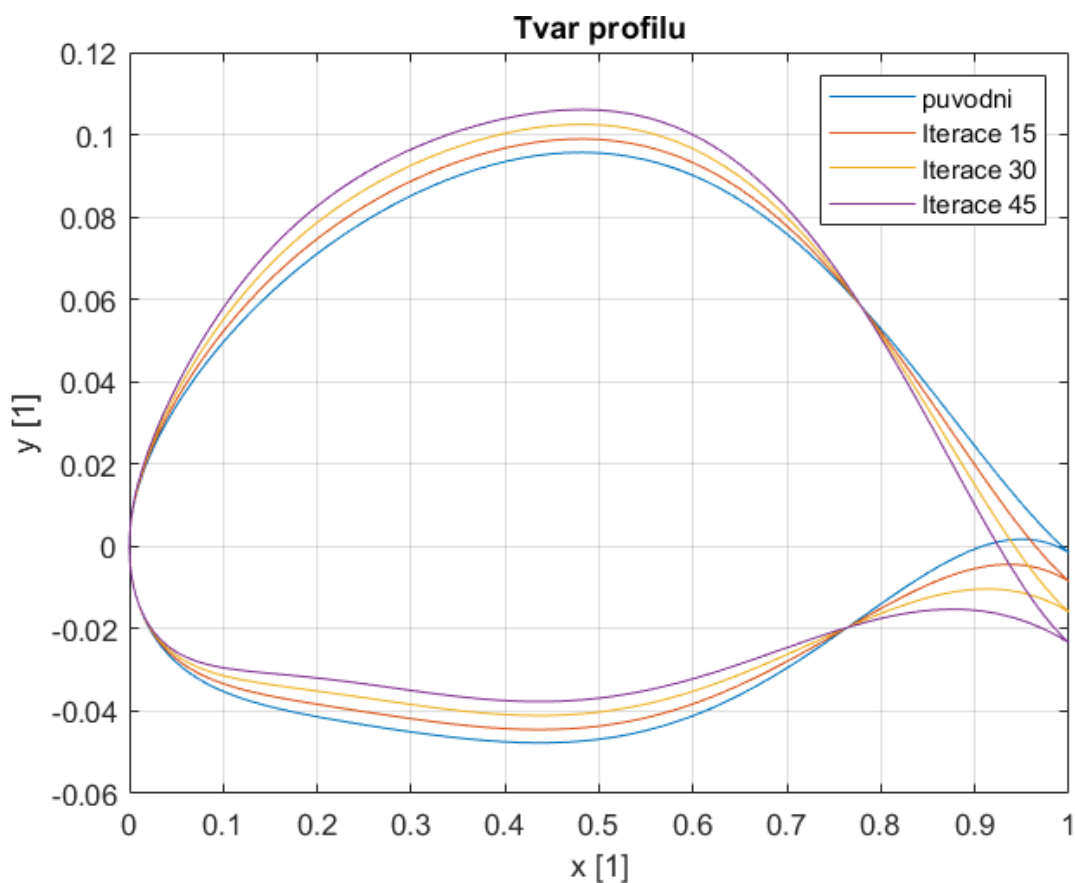
### 8.7.3 NLF(1)-0414

Pro profil NLF(1)-0414 byla sledována každá 15. iterace při iteračním kroku 0,0006 a 45 iteracích celkem. Byl použit relativně velký iterační krok (1,5x větší než u předchozích profilů) kvůli maximalizaci součinitele vztlaku. Tato hodnota iteračního kroku je také užitečná z hlediska zvýraznění změn tvaru a jejich evoluce. U tohoto profilu nedochází k příliš velkým změnám tvaru během optimalizace, ovšem tyto změny tvaru jsou doprovázeny relativně razantním nárůstem součinitele vztlaku (i když tento nárůst není v procentuálním vyjádření zdaleka tak markantní jako u RAE2822 nebo NREL S809). Změny tvaru jsou opět konzistentní jak s fyzikální podstatou problému, tak mezi sledovanými iteracemi. Také u tohoto profilu lze nalézt uzlové body, ovšem v případě tohoto profilu jsou pouze dva. Oba uzlové body se nachází v blízkosti odtokové hrany, jeden na každé pvršce. Hodnoty parametrů a součinitele vztlaku ve sledovaných iteracích viz tabulka na následující straně. Mezi jednotlivými sledovanými iteracemi je benefit optimalizace vždy přibližně stejný.



	Původní	Iterace 15	Iterace 30	Iterace 45
$\alpha$ [°]	0	0	0	0
$r_{lo}$ [1]	0,01050	0,01056	0,01065	0,01078
$X_{lo}$ [1]	0,4368	0,4365	0,4363	0,4360
$Y_{lo}$ [1]	-0,04770	-0,04449	-0,04108	-0,03769
$Y_{xxlo}$ [1]	0,3859	0,3860	0,3861	0,3861
$r_{up}$ [1]	0,01050	0,01087	0,01128	0,01172
$X_{up}$ [1]	0,4808	0,4811	0,4815	0,4820
$Y_{up}$ [1]	0,09570	0,09897	0,1025	0,1061
$Y_{xxup}$ [1]	-0,7237	-0,7236	-0,7236	-0,7235
$\alpha_{te}$ [°]	-9,600	-9,646	-9,694	-9,743
$\beta_{te}$ [°]	3,500	3,499	3,498	3,496
$Y_{te}$ [1]	-0,001500	-0,008472	-0,01593	-0,02338
$C_y$ [1]	0,4649	0,5790	0,7010	0,8226
Zlepšení absolutní [1]	---	0,1141	0,2361	0,3577
Zlepšení relativní [%]	---	24,54	50,78	76,95
Zlepšení oproti předchozí iteraci	---	0,1141	0,1220	0,1216

Tabulka 11 – Změny parametrů profilu NLF(1)-0414 během optimalizace



Obrázek 44 – Evoluce tvaru profilu NLF(1)-0414

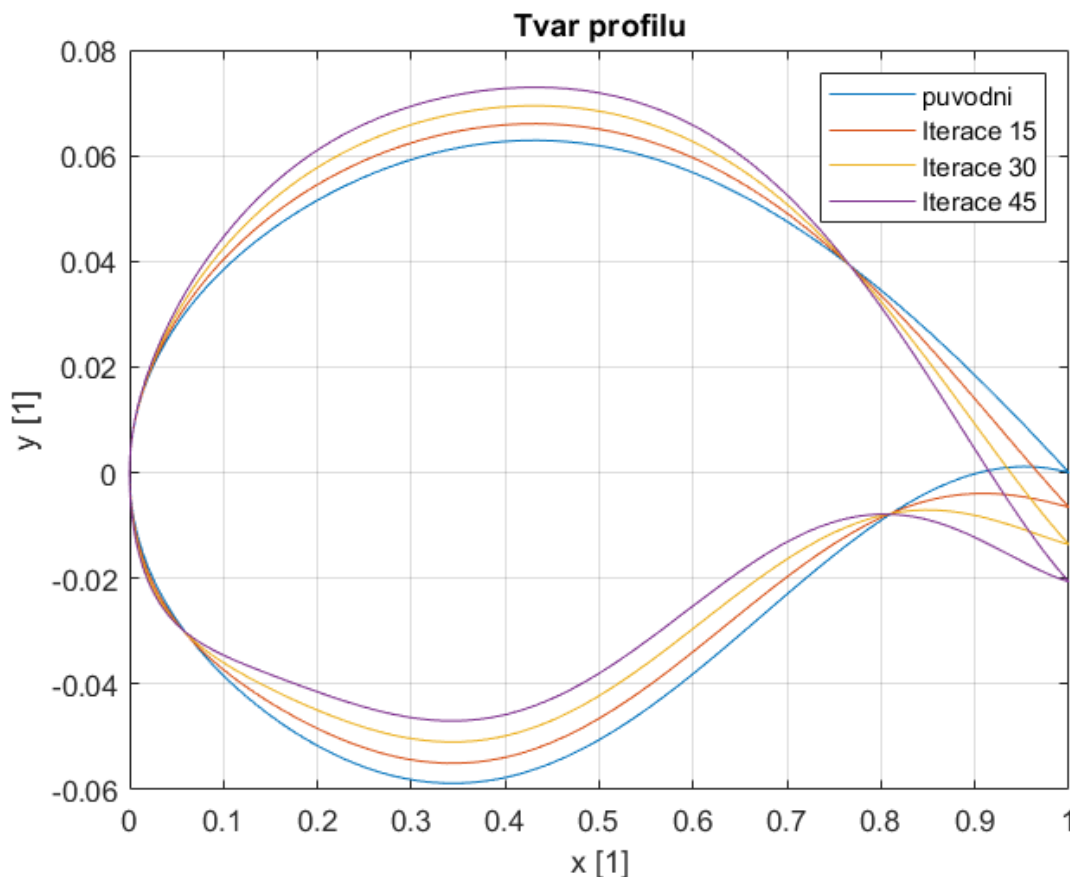


#### 8.7.4 RAE2822

Pro profil RAE2822 byla sledována každá 15. iterace při iteračním kroku 0,0006 a 45 iteracích celkem. Byl použit opět relativně velký iterační krok, stejný jako u profilu NLF(1)-0414, protože profil RAE2822 má, stejně jako NLF(1)-0414, tendenci k pouze minimálním změnám tvaru (ovšem doprovázeným velkými změnami součinitele vztlaku) při této optimalizaci (viz kapitola 8.5). I při takto velkém kroku jsou změny tvaru profilu stále dokonale konzistentní jak mezi sledovanými iteracemi (tvar se mění jedním směrem), tak s mými očekáváními, jak by se měl tvar profilu měnit pro zvýšení vztlaku (horní površka se vyklenuje, odtoková hrana je tlačena dolů, spodní površka je vyrovnávána). Tento profil navíc nevykazuje žádné sklony k nefyzikálním změnám tvaru. Při sledování evoluce tvaru lze nalézt 3 uzlové body, 2 na spodní a jeden na horní površce. Parametry profilu včetně součinitele vztlaku ve sledovaných iteracích jsou uvedeny v tabulce níže. Benefit optimalizace mezi jednotlivými sledovanými iteracemi zůstává přibližně konstantní.

	Původní	Iterace 15	Iterace 30	Iterace 45
$\alpha$ [°]	0	0	0	0
$r_{lo}$ [1]	0,008300	0,009853	0,01140	0,01287
$X_{lo}$ [1]	0,3441	0,3439	0,3436	0,3433
$Y_{lo}$ [1]	- 0,05880	- 0,05501	- 0,05098	- 0,04699
$Y_{xxlo}$ [1]	0,7018	0,7019	0,7020	0,7022
$r_{up}$ [1]	0,008300	0,008389	0,008513	0,008662
$X_{up}$ [1]	0,4312	0,4313	0,4315	0,4317
$Y_{up}$ [1]	0,06290	0,06605	0,06947	0,07295
$Y_{xxup}$ [1]	- 0,4273	- 0,4272	- 0,4271	- 0,4271
$\alpha_{te}$ [°]	- 6,860	- 6,911	- 6,967	- 7,022
$\beta_{te}$ [°]	8,080	8,079	8,077	8,075
$Y_{te}$ [1]	0	- 0,006557	- 0,01360	- 0,02065
$C_y$ [1]	0,2481	0,3575	0,4738	0,5891
Zlepšení absolutní [1]	---	0,1094	0,2257	0,3410
Zlepšení relativní [%]	---	44,10	90,96	137,44
Zlepšení oproti předchozí iteraci	---	0,1094	0,1163	0,1153

Tabulka 12 – Změny parametrů profilu RAE2822 během optimalizace



Obrázek 45 – Evoluce tvaru profilu RAE2822

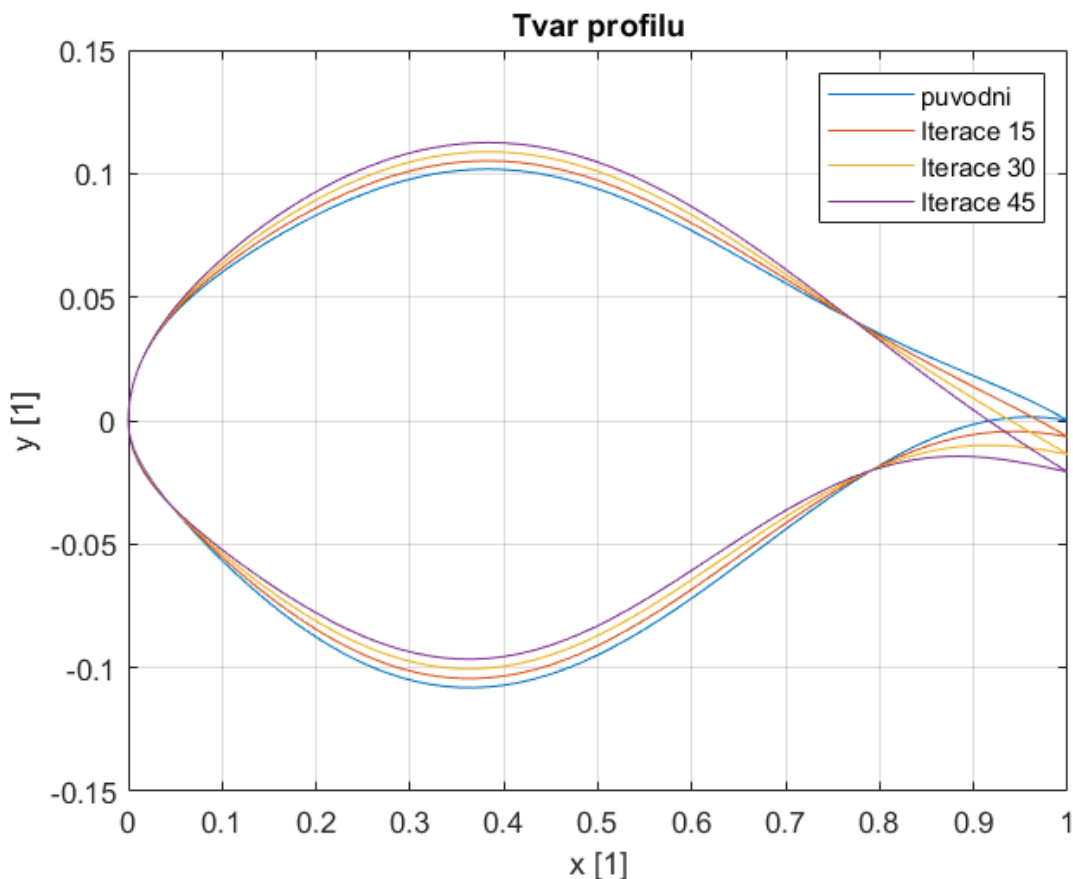
### 8.7.5 NREL S809

Pro profil NREL S809 byla sledována každá 15. iterace při iteračním kroku 0,0006 a 45 iteracích celkem. Vzhledem k absenci nefyzikálních změn tvaru u tohoto profilu byl použit relativně velký iterační krok, stejný jako pro NLF(1)-0414 a RAE2822. Stejně jako tyto profily má NREL S809 tendenci k pouze minimálním změnám tvaru doprovázeným velice výrazným zvýšením součinitele vztlaku (v procentuálním vyjádření je toto zvýšení dokonce výraznější než u RAE2822). Změny tvaru profilu jsou konzistentní jak s postupem iterace, tak s fyzikální podstatou problému (kvalitativně jsou podobné jako u všech ostatních profilů). Na profilu se opět během optimalizace objevují 2 zřetelné a jeden prakticky nezatelný uzlový bod. Dobře patrné uzlové body se nachází u odtokové hrany, poslední, téměř nezatelný, pak na spodní povrchce v blízkosti náběžné hrany. Parametry tohoto profilu ve sledovaných iteracích včetně součinitele vztlaku viz tabulka na následující straně. Benefit optimalizace mezi sledovanými iteracemi zůstává přibližně konstantní, nebo se dokonce mírně zvyšuje.



	Původní	Iterace 15	Iterace 30	Iterace 45
$\alpha$ [°]	0	0	0	0
$r_{lo}$ [1]	0,01000	0,01099	0,01202	0,01303
$X_{lo}$ [1]	0,3633	0,3630	0,3627	0,3624
$Y_{lo}$ [1]	- 0,1081	- 0,1044	- 0,1005	- 0,09657
$Y_{xxlo}$ [1]	1,5260	1,5261	1,5262	1,5263
$r_{up}$ [1]	0,02160	0,02128	0,02095	0,02063
$X_{up}$ [1]	0,3826	0,3829	0,3832	0,3835
$Y_{up}$ [1]	0,1018	0,1052	0,1088	0,1126
$Y_{xxup}$ [1]	- 1,2010	- 1,2009	- 1,2008	- 1,2007
$\alpha_{te}$ [°]	- 8,500	- 8,550	- 8,604	- 8,657
$\beta_{te}$ [°]	8,500	8,499	8,499	8,497
$Y_{te}$ [1]	0	- 0,006589	- 0,01365	- 0,02071
$C_y$ [1]	0,2178	0,3318	0,4534	0,5745
Zlepšení absolutní [1]	---	0,1140	0,2356	0,3567
Zlepšení relativní [%]	---	52,32	108,16	163,76
Zlepšení oproti předchozí iteraci	---	0,1140	0,1216	0,1211

Tabulka 13 – Změny parametrů profilu NREL S809 během optimalizace



Obrázek 46 – Evoluce tvaru profilu NREL S809



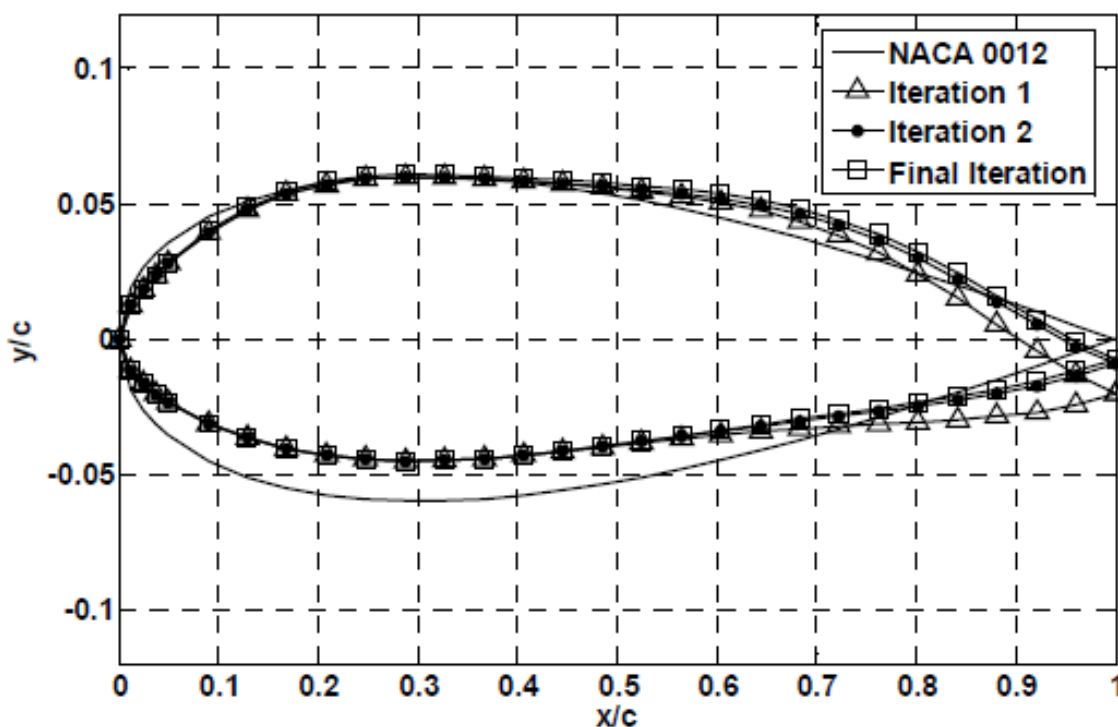
## 8.8 Shrnutí výsledků a komentář

Na základě všech v kapitolách 8.2 - 8.7 uvedených tabulek, obrázků a grafů je vidět, že metoda dosahuje požadovaných výsledků pomocí minimálních změn tvaru. I při těchto minimálních změnách tvaru je však z parametrů patrné, že se optimalizovaný tvar profilu pro různé úhly náběhu mírně liší. Tato odlišnost je však příliš malá na to, aby ji bylo možné vizuálně rozpoznat na obrázcích. Tato malá odlišnost optimalizovaných tvarů profilu pro různé úhly náběhu dává naději, že tvar optimalizovaný pro konkrétní návrhový úhel náběhu bude velmi dobře fungovat pro všechny v praxi dosahované úhly náběhu. Malá velikost změn tvaru je důležitá z hlediska zachování ostatních vlastností profilu, jako je např. součinitel odporu. Často je výsledný tvar profilu opticky téměř identický s počátečním, bez přímého srovnání v jednom obrázku by je od sebe prakticky nebylo možné rozeznat, ale součinitel vztlaku se liší i o desítky procent.

Z hlediska prvotního posouzení realističnosti výsledků metody je užitečný pohled na Obrázek 42 a Obrázek 51 a jejich porovnání s optimalizovaným tvarem profilu NACA 0012 v [10]. Optimalizace v [10] byla provedena pro snížení součinitele odporu při zachování součinitele vztlaku. Tato optimalizace je pro profil NACA 0012, vzhledem k průběhu závislosti součinitele odporu na úhlu náběhu, v blízkém okolí počátečního tvaru zhruba ekvivalentní optimalizaci součinitele vztlaku, za podmínky, že optimalizace součinitele vztlaku neovlivní příliš součinitel odporu. Tuto úvahu lze provést na základě toho, že optimalizace součinitele vztlaku v praxi umožní snížení úhlu náběhu, které kompenzuje dodatečně získaný vztlak. Toto snížení úhlu náběhu se následně příznivě projeví poklesem součinitele odporu. Ze srovnání obrázku níže (Obrázek 47) s výsledky v kapitole 8.7.1 (Obrázek 42) a v přílohách zmiňované kapitoly (Obrázek 51) je vidět, že vizuálně jsou si výsledky optimalizace velmi podobné. Optimalizace v [10] byla provedena pomocí SQP algoritmu. Sekvenční kvadratické programování (SQP) vyžaduje, aby jak cílová funkce, tak vazbové rovnice a nerovnice byly dvakrát spojitě diferencovatelné. SQP algoritmus je nelineární optimalizační metoda založená na Newtonově iterační metodě. Směr přírůstku v Newtonově iterační metodě však není zjišťován přímo, ale pomocí problému kvadratického programování [10] [15].

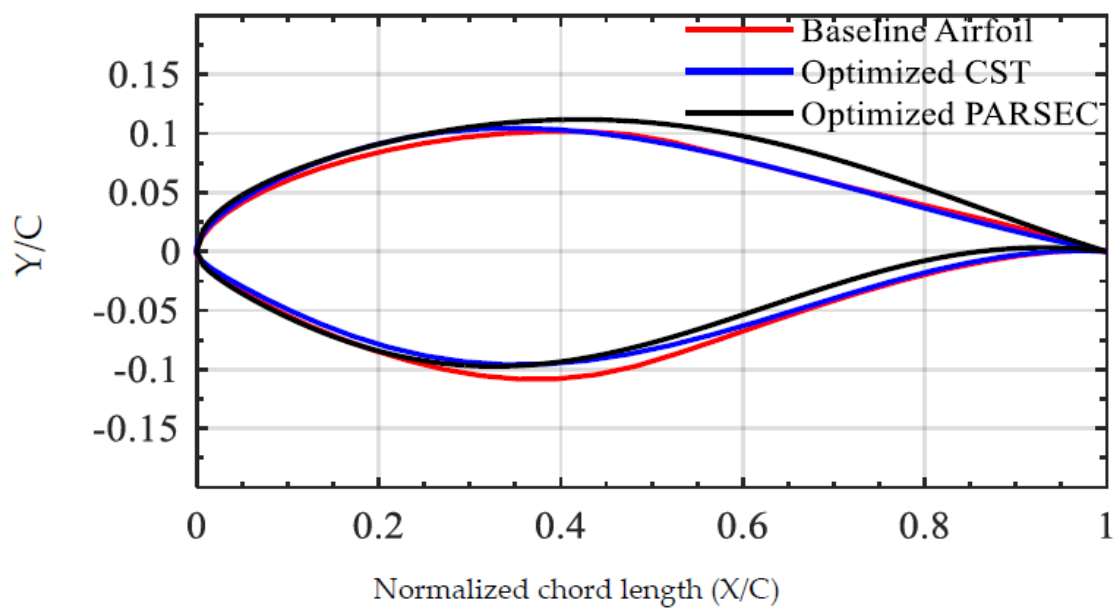


### Airfoil Shape Evolution using Gradient-Based Optimiser with NACA 0012 Base Section



Obrázek 47 – Profil NACA 0012 optimalizovaný pro snížení  $C_x$  při fixovaném  $C_y$  [10]

Další nepřímou verifikaci výsledků je možno realizovat na základě porovnání mých výsledků pro profil NREL S809 (zejména Obrázek 36, Obrázek 39 a Obrázek 59) s výsledky optimalizace v [9]. Optimalizace v [9] byla provedena s prakticky identickou cílovou funkcí jako optimalizace v této práci. Cílem optimalizace v [9] byla maximalizace součinitele vztlaku současně s maximalizací poměru  $C_y/C_x$ . Tato optimalizace byla provedena pomocí genetického algoritmu, tudíž je výrazně výpočetně náročnější. I přes to, že genetický algoritmus je globální metoda (a hledá tedy globální maximum cílové funkce), jsou mé výsledky výsledkům genetického algoritmu velice podobné. Rozdíly lze zcela vysvětlit drobnými nuancemi v definici cílové funkce, v úhlech náběhu a mírně odlišnými geometrickými omezeními. V [9] se zabývají optimalizací výše zmíněných veličin tak, aby výsledný tvar dosahoval pokud možno optimálních výsledků pro úhel náběhu  $0^\circ$  a současně i  $6,2^\circ$ , přičemž poloha odtokové hrany je fixována na  $y_{te} = 0$ . Optimalizace v mé práci hledá optimální tvar pro každý úhel náběhu zvlášť a na polohu odtokové hrany není kladeno omezení. I přes tyto rozdíly je výrazná podobnost získaných řešení očividná. Pro lepší ilustraci níže přikládám výsledné tvary získané genetickým algoritmem.



Obrázek 48 – Porovnání výchozího tvaru NREL S809 s optimalizovaným – parametrizace CST a PARSEC [9]





## 9 Verifikace výsledků

Za účelem získání uceleného obrázku o benefitech optimalizace, o jejich případných vedlejších nezamýšlených efektech a také, abychom se nemuseli spoléhat na nepřímou verifikaci porovnáním výsledků s jinými pracemi zabývajícími se optimalizací, je nutné provést důkladnou verifikaci získaných výsledků. Verifikace v této práci nebyla provedena experimentálně (jak by bylo ideální), ale z mnoha důvodů (včetně časového hlediska) provedením numerických výpočtů obtékání profilů v dostupném výpočtovém softwaru. Pro tento účel byl zvolen program Xfoil, protože se jedná o volně dostupný, prověřený a spolehlivý software pro výpočty vlastností leteckých profilů. Výhodou tohoto programu je jeho snadné a nenáročné ovládání a také jeho na poměry mechaniky tekutin velmi nízká výpočetní náročnost. Tato výpočetní náročnost umožňuje generovat velká množství dat pro různé úhly náběhu, což je nutné pro vykreslení polár verifikovaných profilů. Cenou za tuto nenáročnost je ovšem nižší přesnost výpočtu součinitele odporu. Hodnota součinitele odporu získaná z Xfoilu je spíše orientační a je dolním odhadem skutečné hodnoty. Jelikož však bylo pro všechny výpočty použito stejné nastavení, lze hodnotu součinitele odporu mezi jednotlivými profily bezproblémově porovnávat.

Pro kompletní verifikaci byly zvoleny celkem tři profily. Dva ze zvolených profilů mají aplikaci v letectví, poslední vybraný profil je používán na rotorových listech větrných elektráren. Verifikace byla provedena pro dva způsoby výpočtu, a to pro nevazkou nestlačitelnou tekutinu (stejný způsob výpočtu byl použit při optimalizaci), a s uvažováním vazkosti a stlačitelnosti (výpočet více se blíží realitě). Veškeré profily použité pro verifikaci byly optimalizovány pro úhel náběhu  $0^\circ$ . Parametry iterace viz kapitola 8.1, tzn. 50 iterací s krokem 0,0002. V rámci verifikace bylo provedeno také vykreslení polár optimalizovaných profilů. Poláry byly vykresleny pro všechny profily s výjimkou NLF(1)-0115. Pro tento profil nebyla polára vykreslena, protože nalezené PARSEC parametry tohoto profilu se ukázaly jako zcela chybné (viz kapitola 8.3). Z tohoto důvodu by polára tohoto profilu neměla téměř žádnou vypovídací hodnotu. Profily pro vykreslení polár byly optimalizovány pro úhel náběhu  $0^\circ$  s parametry iterace dle kapitoly 8.1. Poláry byly vykresleny pro  $Re = 10^6$  a  $Ma = 0$ . Tyto hodnoty Machova a Reynoldsova čísla byly voleny z důvodu spolehlivé konvergence výpočtu a možnosti srovnání s dostupnými databázemi profilů (např. v [16]).



## 9.1 Letecké profily

Jako letecké profily pro verifikaci byly zvoleny NLF(1)-0414 a RAE2822. Profil NLF(1)-0115 dle [10] nebyl verifikován z důvodů zmíněných již v kapitole 8.3. Nemá valného významu provádět verifikaci na profilu, jehož tvar získaný z parametrů PARSEC se očividně výrazně liší od skutečného návrhového tvaru (viz Obrázek 8). Vzhledem k oblastem použití profilu NACA 0012 (hlavně ovládací plochy letadel, ...) nebyla verifikace provedena ani pro tento profil. V aplikacích NACA 0012 je často naopak žádoucí mít koeficient vztlaku při nulovém úhlu náběhu nulový, proto zpravidla nemá smysl tuto optimalizaci vůbec provádět. Navíc je u tohoto profilu vzhledem k jeho aplikacím vhodné zachovat momentový součinitel jako lichou funkci úhlu náběhu (jeho graf je středově symetrický kolem počátku). Z leteckých profilů optimalizovaných v této práci tedy zůstávají dva zmíněné na začátku tohoto odstavce.

Pro verifikaci byly zvoleny celkem 3 typové příklady letounů: středně velký dron, malé sportovní letadlo a středně velké turbovrtulové letadlo. Tento výběr by měl dle mého názoru věrně reprezentovat oblasti, kde je reálné script vytvořený v této práci (případně nějaký od něj odvozený a rozšířený o další funkcionality) použít. Dron a malé sportovní letadlo jsou zcela v oblasti platnosti předpokladů nutných pro řešení proudění Hessovou – Smithovou panelovou metodou (oblast nevazkého nestlačitelného proudění, tzn.  $Ma \leq 0,3$ ;  $Re \rightarrow +\infty$ ). S rostoucím Reynoldsovým číslem vliv vazkosti klesá. Proto je z hlediska splnění kritéria nevazkosti nejlepším příkladem turbovrtulové letadlo, kde je Reynoldsovo číslo největší. Dron je z hlediska tohoto předpokladu nejhorší, protože zde může mít vazkost i relativně velký vliv. Všechny výše zmíněné případy však lze alespoň v prvním přiblížení modelovat jako obtékané nevazkou tekutinou. Z hlediska splnění kritéria nestlačitelnosti je situace přesně opačná. Z hlediska nestlačitelnosti je dron zdaleka nejlepší, protože má nejnižší Machovo číslo. Malé sportovní letadlo kritériu nestlačitelnosti také ještě vyhovuje. Zcela jiný případ je turbovrtulové letadlo, které je vzhledem ke své rychlosti již poměrně výrazně mimo oblast nestlačitelnosti ( $Ma \approx 0,4$ ). Tato hodnota Machova čísla spadá již zcela jednoznačně do oblasti podzvukového stlačitelného proudění. Při tomto Machově čísle neočekávám na profilu transsonické proudění, proto by řešení získané panelovou metodou mělo odpovídat přesnějším výpočtům alespoň přibližně (i vzhledem k platnosti Prandtlovy – Glauertovy korekce tlakového součinitele a součinitele vztlaku v takovém proudění). Turbivrtulové letadlo, i když nesplňuje jeden z předpokladů řešení, je v této validaci ze dvou zásadních důvodů.

- 1) Jedná se o praktický příklad stroje, kde se již vyplatí vynaložit i nemalé finanční prostředky na jeho optimalizaci. Optimalizací součinitele vztlaku lze získat výrazně větší užitečné zatížení s minimální změnou spotřeby paliva, a tím výrazně zlepšit užitné vlastnosti stroje.



- 2) Z hlediska této práce je zajímavé sledovat, jak metoda funguje mimo oblast platnosti předpokladů. Dle Prandtlovy – Glauertovy korekce  $C_p$  (viz [17]) by efektivita metody neměla být při  $Ma \approx 0,4$  nijak ovlivněna (tato korekce je pouze násobení  $C_p$  konstantou, což na efektivitu optimalizace nemá vliv). Tato analýza je důležitá pro případné praktické použití metody, protože dává náhled na to, jak přesně je třeba dodržet předpoklady řešení.

Z hlediska splnění obou předpokladů současně si tedy nejlépe vede malé sportovní letadlo. U dronu očekávám pozorovatelný relativně výrazný vliv vazkosti, a tudíž nižší součinitel vztlaku než v nevazkém výpočtu, u turbovrtulového letadla pak pozorovatelný vliv stlačitelnosti, která naopak součinitel vztlaku zvyšuje. Vliv stlačitelnosti na rozložení tlakového součinitele a tím i na součinitel vztlaku podrobněji viz [17]. Hodnoty z výpočtů provedených v této práci by tedy měly nejlépe odpovídat hodnotám získaným pro malé sportovní letadlo. Níže jsou uvedeny základní charakteristiky těchto typů letadel spolu s předpokládanými meteorologickými podmínkami v cestovní hladině. Na základě těchto charakteristik jsou následně určeny ostatní hodnoty. Parametry dronu jsou založeny na exempláři vyvíjeném na Ústavu mechaniky tekutin a termodynamiky FS ČVUT v Praze, parametry malého sportovního letadla jsou založeny na nejrozšířenějším letadle této kategorie, tedy typu Cessna 172 a parametry turbovrtulového letadla na typech ATR 42 a ATR 72 jakožto klasických zástupcích této kategorie. Jak je vidět v kapitolách 9.1.1 a 9.1.2, optimalizace ve všech případech poskytuje významný benefit, který je pro vazkou stlačitelnou tekutinu dokonce větší než benefit pro nevazkou a nestlačitelnou tekutinu. Chování profilů v nenávrhovém režimu viz Příloha 9.1 – Letecké profily v nenávrhovém režimu.

	Dron	Sportovní letadlo	Turbovrtulové letadlo
Délka tětiny profilu [m]	0,4	1,5	2,25
Cestovní rychlost [ $m \cdot s^{-1}$ ]	25	60	135
Cestovní výška [km]	<1	2	5
Teplota v cestovní výšce [ $^{\circ}C$ ]	20	0	-20
Rychlost zvuku v cestovní výšce [ $m \cdot s^{-1}$ ]	343	331	320
Kinematická viskozita vzduchu v cestovní výšce [ $m^2 \cdot s^{-1}$ ]	$1,52 \cdot 10^{-5}$	$1,34 \cdot 10^{-5}$	$1,16 \cdot 10^{-5}$
Machovo číslo [1]	0,07	0,18	0,42
Reynoldsovo číslo [1]	$0,658 \cdot 10^6$	$6,716 \cdot 10^6$	$26,185 \cdot 10^6$
Přistávací rychlost [ $m \cdot s^{-1}$ ]	15	35	60
Teplota při přistání [ $^{\circ}C$ ]	20	20	20
Rychlost zvuku při přistání [ $m \cdot s^{-1}$ ]	343	343	343
Kinematická viskozita vzduchu při přistání [ $m^2 \cdot s^{-1}$ ]	$1,52 \cdot 10^{-5}$	$1,52 \cdot 10^{-5}$	$1,52 \cdot 10^{-5}$
Machovo číslo při přistání [1]	0,04	0,1	0,17
Reynoldsovo číslo při přistání [1]	$0,394 \cdot 10^6$	$3,454 \cdot 10^6$	$8,882 \cdot 10^6$

Tabulka 14 – Technické a letové parametry vybraných letadel



### 9.1.1 Profil NLF(1)-0414

	Matlab bez vlivu vazkosti	Xfoil bez vlivu vazkosti	Xfoil zohlednění vlivu vazkosti a stlačitelnosti		
			0	0	0
$\alpha$ [°]	0	0	0	0	0
$Re$ [1]	---	---	$0,658 \cdot 10^6$	$6,716 \cdot 10^6$	$26,185 \cdot 10^6$
$Ma$ [1]	---	---	0,07	0,18	0,42
$C_y$ [1]	0,4649	0,4711	0,4197	0,4491	0,4811
$C_x$ [1]	---	---	0,00779	0,00323	0,00465
$C_y/C_x$ [1]	---	---	53,84	139,23	103,57
$C_M$ [1]	---	- 0,1183	- 0,1071	- 0,1133	- 0,1204

Tabulka 15 – Porovnání různých metod výpočtu pro profil NLF(1)-0414 před optimalizací

	Matlab bez vlivu vazkosti	Xfoil bez vlivu vazkosti	Xfoil zohlednění vlivu vazkosti a stlačitelnosti		
			0	0	0
$\alpha$ [°]	0	0	0	0	0
$Re$ [1]	---	---	$0,658 \cdot 10^6$	$6,716 \cdot 10^6$	$26,185 \cdot 10^6$
$Ma$ [1]	---	---	0,07	0,18	0,42
$C_y$ [1]	0,5980	0,6080	0,5578	0,5923	0,6465
$C_x$ [1]	---	---	0,0083	0,0033	0,00436
$C_y/C_x$ [1]	---	---	67,18	179,31	148,43
$C_M$ [1]	---	- 0,1379	- 0,1281	- 0,1343	- 0,1453
Zlepšení $C_y$ absolutní [1]	0,1331	0,1369	0,1381	0,1432	0,1654
Zlepšení $C_y$ relativní [%]	28,62	29,06	32,90	31,89	34,38

Tabulka 16 – Porovnání různých metod výpočtu pro profil NLF(1)-0414 po optimalizaci



### 9.1.2 Profil RAE2822

	Matlab bez vlivu vazkosti	Xfoil bez vlivu vazkosti	Xfoil zohlednění vlivu vazkosti a stlačitelnosti		
			0	0	0
$\alpha$ [°]	0	0	0	0	0
$Re$ [1]	---	---	$0,658 \cdot 10^6$	$6,716 \cdot 10^6$	$26,185 \cdot 10^6$
$Ma$ [1]	---	---	0,07	0,18	0,42
$C_y$ [1]	0,2481	0,2472	0,2238	0,2212	0,2282
$C_x$ [1]	---	---	0,00638	0,00387	0,00458
$C_y/C_x$ [1]	---	---	35,06	57,17	49,84
$C_M$ [1]	---	- 0,0727	- 0,0676	- 0,0669	- 0,0702

Tabulka 17 – Porovnání různých metod výpočtu pro profil RAE2822 před optimalizací

	Matlab bez vlivu vazkosti	Xfoil bez vlivu vazkosti	Xfoil zohlednění vlivu vazkosti a stlačitelnosti		
			0	0	0
$\alpha$ [°]	0	0	0	0	0
$Re$ [1]	---	---	$0,658 \cdot 10^6$	$6,716 \cdot 10^6$	$26,185 \cdot 10^6$
$Ma$ [1]	---	---	0,07	0,18	0,42
$C_y$ [1]	0,3757	0,378	0,3589	0,3587	0,3757
$C_x$ [1]	---	---	0,00685	0,00383	0,00483
$C_y/C_x$ [1]	---	---	52,37	93,59	77,72
$C_M$ [1]	---	- 0,0926	- 0,0889	- 0,0882	- 0,0929
Zlepšení $C_y$ absolutní [1]	0,1276	0,1308	0,1351	0,1375	0,1475
Zlepšení $C_y$ relativní [%]	51,43	52,91	60,37	62,16	64,64

Tabulka 18 – Porovnání různých metod výpočtu pro profil RAE2822 po optimalizaci



## 9.2 Profil NREL S809

Profil NREL S809 je používán jako profil pro listy rotorů větrných elektráren. Hodnoty podobnostních čísel použité pro verifikaci byly převzaty z dostupné literatury (viz Tabulka 19). Z uvedených podobnostních čísel lze při použití termofyzikálních konstant vzduchu a rychlosti zvuku ve vzduchu (viz Tabulka 14) zpětně odvodit rychlost nabíhajícího proudu vzduchu a délku tětiny profilu (viz Tabulka 20).

Machovo číslo [1]	0,02
Reynoldsovo číslo [1]	$0,75 \cdot 10^6$

Tabulka 19 – Podobnostní čísla pro validační výpočet profilu NREL S809 [9]

$c_{\infty}$ [ $m \cdot s^{-1}$ ]	6,9
$L$ [m]	1,65

Tabulka 20 – Dopočtené charakteristiky proudění a profilu NREL S809

I pro tento profil poskytuje topologická optimalizace významný benefit, a to bez ohledu na způsob výpočtu. Pro vazkou stlačitelnou tekutinu je benefit optimalizace při úhlu náběhu  $0^\circ$  výrazně větší (více než jeden a půl násobný), než ve výpočtu pro nevazkou tekutinu, při úhlu náběhu  $10^\circ$  je tomu přesně naopak. Toto je způsobeno odtržením proudění na horní povrch profilu při vyšším úhlu náběhu, které neguje provedené změny tvaru. Konkrétní hodnoty viz tabulky na následujících stranách. Rozsah odtržení pro oba vyhodnocované úhly náběhu viz Příloha 9.2 – Odtržení u profilu NREL S809 – úhel náběhu  $0$  a  $10^\circ$ .



**9.2.1 Profil NREL S809 při úhlu náběhu 0°**

	Matlab bez vlivu vazkosti	Xfoil bez vlivu vazkosti	Xfoil zohlednění vlivu vazkosti a stlačitelnosti
$\alpha$ [°]	0	0	0
$Re$ [1]	---	---	750 000
$Ma$ [1]	---	---	0,02
$C_y$ [1]	0,2178	0,2137	0,1480
$C_x$ [1]	---	---	0,00883
$C_y/C_x$ [1]	---	---	16,76
$C_M$ [1]	---	- 0,0578	- 0,0425

Tabulka 21 – Porovnání různých metod výpočtu pro profil NREL S809 před optimalizací (úhel náběhu 0°)

	Matlab bez vlivu vazkosti	Xfoil bez vlivu vazkosti	Xfoil zohlednění vlivu vazkosti a stlačitelnosti
$\alpha$ [°]	0	0	0
$Re$ [1]	---	---	750 000
$Ma$ [1]	---	---	0,02
$C_y$ [1]	0,3507	0,3502	0,2881
$C_x$ [1]	---	---	0,00885
$C_y/C_x$ [1]	---	---	32,55
$C_M$ [1]	---	- 0,0778	- 0,0638
Zlepšení $C_y$ absolutní [1]	0,1329	0,1365	0,1401
Zlepšení $C_y$ relativní [%]	61,04	63,87	94,66

Tabulka 22 – Porovnání různých metod výpočtu pro profil NREL S809 po optimalizaci (úhel náběhu 0°)



### 9.2.2 Profil NREL S809 při úhlu náběhu 10°

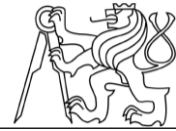
	Matlab bez vlivu vazkosti	Xfoil bez vlivu vazkosti	Xfoil zohlednění vlivu vazkosti a stlačitelnosti
$\alpha$ [°]	10	10	10
$Re$ [1]	---	---	750 000
$Ma$ [1]	---	---	0,02
$C_y$ [1]	1,4256	1,4552	1,0507
$C_x$ [1]	---	---	0,02391
$C_y/C_x$ [1]	---	---	43,94
$C_M$ [1]	---	- 0,0892	- 0,0294

Tabulka 23 – Porovnání různých metod výpočtu pro profil NREL S809 před optimalizací (úhel náběhu 10°)

	Matlab bez vlivu vazkosti	Xfoil bez vlivu vazkosti	Xfoil zohlednění vlivu vazkosti a stlačitelnosti
$\alpha$ [°]	10	10	10
$Re$ [1]	---	---	750 000
$Ma$ [1]	---	---	0,02
$C_y$ [1]	1,5529	1,5890	1,1157
$C_x$ [1]	---	---	0,02776
$C_y/C_x$ [1]	---	---	40,19
$C_M$ [1]	---	- 0,1083	- 0,0426
Zlepšení $C_y$ absolutní [1]	0,1273	0,1338	0,065
Zlepšení $C_y$ relativní [%]	8,93	9,19	6,19

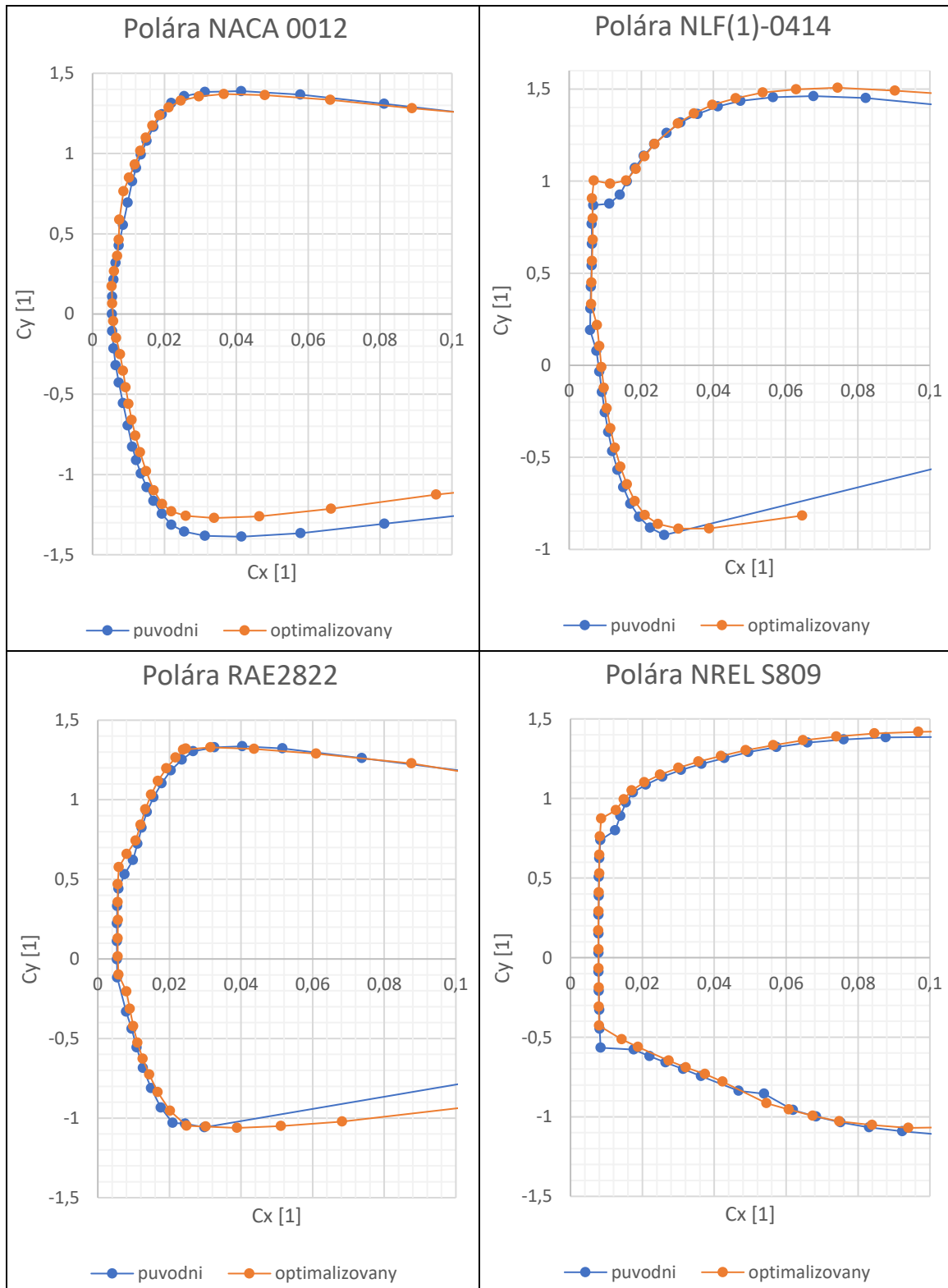
Tabulka 24 – Porovnání různých metod výpočtu pro profil NREL S809 po optimalizaci (úhel náběhu 10°)





### 9.3 Poláry profilů

Tabulka níže zobrazuje poláry vybraných profilů. Použité hodnoty podobnostních čísel a parametry optimalizace viz kapitola 9. Poláry profilů spolu s ostatními grafy viz Příloha 9.3 – Poláry a ostatní charakteristiky profilů – grafy.



Tabulka 25 – Poláry vybraných optimalizovaných profilů

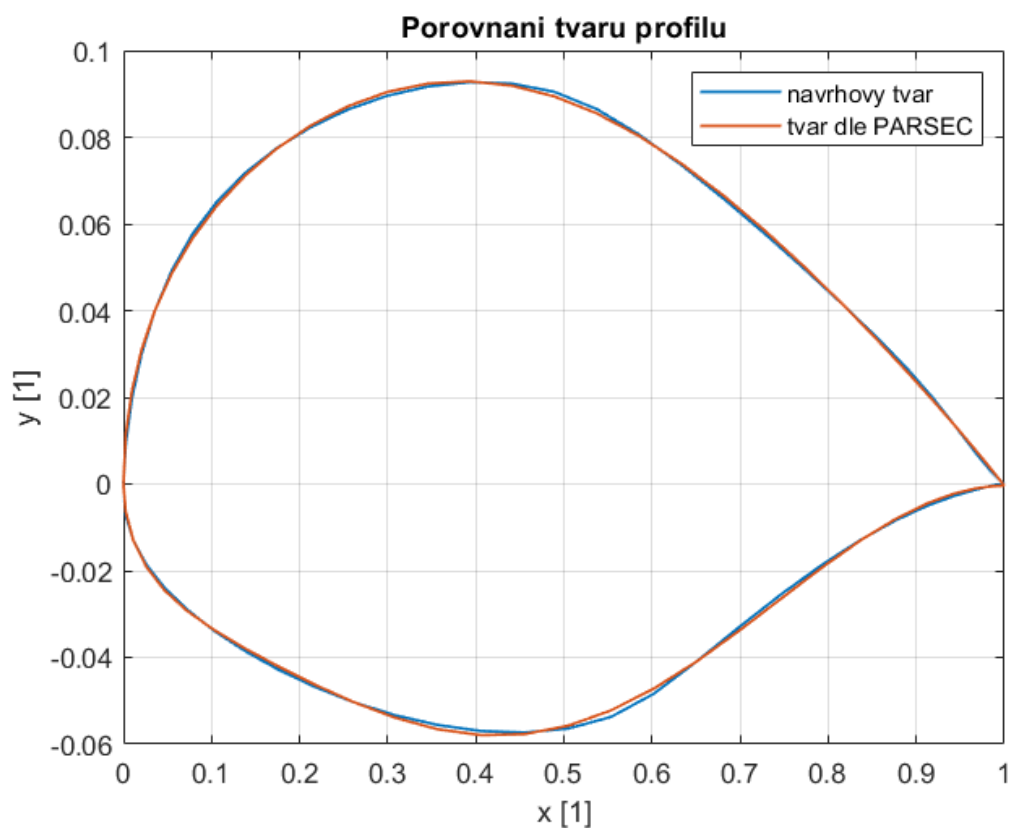


## 10 Identifikace počátečních parametrů pro optimalizaci

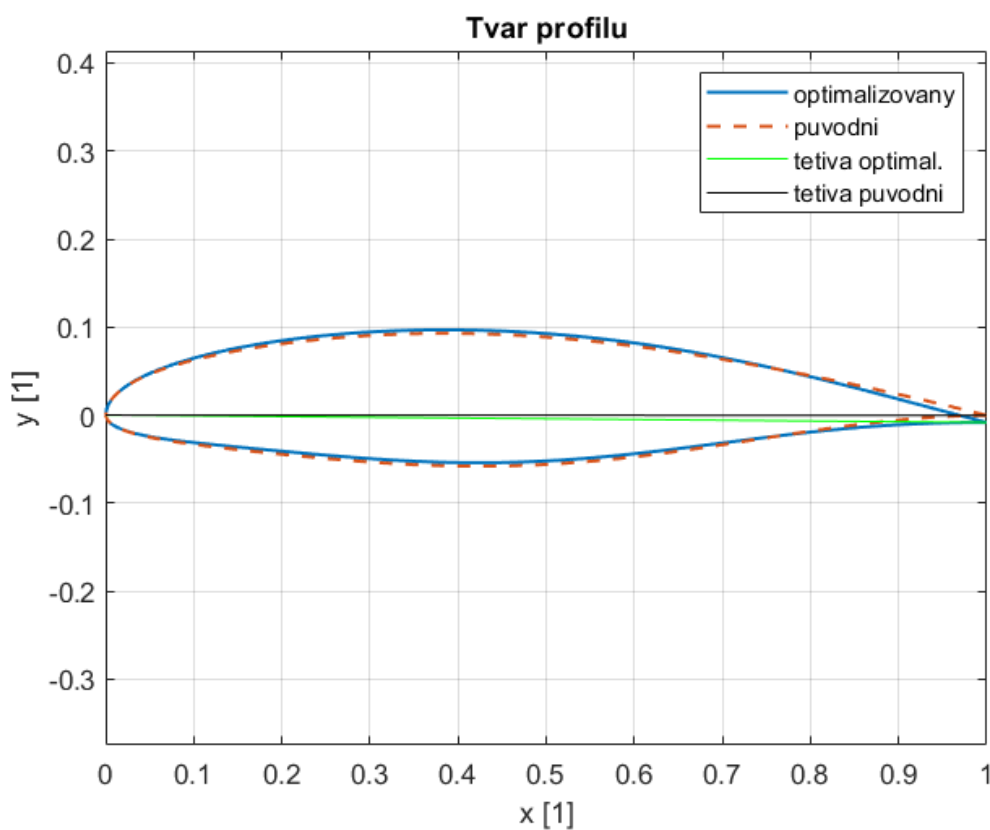
Vzhledem k neexistenci databáze PARSEC parametrů profilů a nedostupnosti těchto parametrů pro většinu profilů bylo nutné přistoupit k tvorbě rozšiřující funkce umožňující získat počáteční parametry profilu z dostupných zdrojových dat. Tato funkce byla vytvořena tak, aby dokázala identifikovat PARSEC parametry profilu z textového souboru obsahujícího tvar profilu uložený ve standardizovaném formátu Lednicer nebo Selig. Funkce byla vytvořena kvůli rozšíření praktické aplikovatelnosti programu v okamžiku, kdy už víme, že v této práci prezentovaná optimalizační procedura spolehlivě funguje a máme k dispozici validační data, která toto tvrzení podporují. Identifikace počátečních parametrů byla provedena v MATLABu pomocí funkce `fmincon`, přičemž kritériem optimality je odchylka tvaru získaného z PARSEC parametrizace od návrhového tvaru profilu. Tato odchylka je uvažována ve smyslu součtu čtverců odchylek jednotlivých definičních bodů. Do funkce `fmincon` byla zahrnuta geometrická omezení hodnot jednotlivých parametrů tak, aby výsledný tvar dával geometricky a fyzikálně smysl. Efektivita tohoto identifikačního algoritmu bude ukázána na profilu NLF(1)-0115 jakožto profilu, pro který jsou dohledané parametry očividně chybné. Nepřesnost z dohledaných parametrů získaného tvaru, případně chybnost těchto parametrů, byly další motivací pro doplnění této identifikační funkce do scriptu. Z tabulky níže je jasně vidět diametrální odlišnost hodnot jednotlivých parametrů. Z obrázku na následující straně (Obrázek 49) je vidět vysoká přesnost aproximace tvaru díky identifikaci parametrů funkcí `fmincon`. Tato velice přesná aproximace je v ostrém kontrastu s přesností tvaru získaného z parametrů v [10] (viz Obrázek 8). Pro profil NLF(1)-0115 definovaný pomocí identifikovaných parametrů byla též provedena optimalizace se stejným nastavením, které bylo uvedeno v kapitole 8.1.

	NLF(1)-0115 dle [10]	NLF(1)-0115 Identifikovaný	NLF(1)-0115 Optimalizovaný
$\alpha$ [°]	0	0	0
$r_{lo}$ [1]	0,0095	0,007982	0,008200
$X_{lo}$ [1]	0,2774	0,4239	0,4236
$Y_{lo}$ [1]	- 0,0341	- 0,05804	- 0,05413
$Y_{xxlo}$ [1]	0,1810	0,6783	0,6784
$r_{up}$ [1]	0,0095	0,02444	0,02411
$X_{up}$ [1]	0,4468	0,3853	0,3855
$Y_{up}$ [1]	0,1194	0,09291	0,09693
$Y_{xxup}$ [1]	- 0,7844	- 0,6659	- 0,6658
$\alpha_{te}$ [°]	- 18,82	- 7,187	- 7,246
$\beta_{te}$ [°]	9,74	14,58	14,58
$Y_{te}$ [1]	0	- 0,0003897	- 0,008338
$C_y$ [1]	0,8878	0,3479	0,47792

Tabulka 26 – Parametry profilu NLF(1)-0115, srovnání [10] s identifikací pomocí `fmincon`



Obrázek 49 – Identifikovaný tvar NLF(1)-0115 a srovnání s definičním tvarem



Obrázek 50 – Identifikovaný a optimalizovaný tvar profilu NLF(1)-0115



## 11 Závěr

V rešeršní části práce byl proveden stručný přehled používaných optimalizačních metod a u nejvýznamnějších z nich byl naznačen postup výpočtového algoritmu. Postup algoritmu byl ukázán pro metodu genetického algoritmu jakožto reprezentanta globálních metod, a pro simplexovou metodu jakožto reprezentanta metod lokálních. Vzhledem k zaměření práce byla největší pozornost věnována algoritmu adjungované metody, který byl vysvětlen také pomocí vývojového diagramu, a to jak pro spojitou, tak pro diskrétní formulaci této metody. Součástí přehledu optimalizačních metod jsou jejich výhody a nevýhody, a také jejich výpočetní náročnost, protože výpočetní náročnost je v oblasti mechaniky tekutin jedním z klíčových kritérií při výběru metody. Dále byla zdůvodněna volba adjungované metody jakožto metody hodící se nejlépe pro daný typ problému. Adjungovaná metoda byla, zejména ve své diskrétní formě, rigorózně odvozena a bylo provedeno srovnání různých způsobů jejího odvození včetně důkazu, že skutečně vedou ke stejnému výsledku. Byly rozebrány výhody a nevýhody spojitě a diskrétní formulace metody, včetně srovnání vývojového diagramu a pořadí úprav v obou formulacích. Byly také ukázány obecné limitace adjungovaného přístupu včetně ukázky divergující úlohy, která je bez ohledu na OP a PP a způsob numerického řešení vždy nepodmíněně nestabilní. V rešeršní části je také uveden příklad úspěšného použití spojitě adjungovaného přístupu pro optimalizaci křídla Boeingu 747-200 s ohledem na součinitel odporu při zachování součinitele vzlaku.

V praktické části práce je metoda aplikována pro optimalizaci vzlaku leteckého profilu. Bylo provedeno odvození definičního vztahu pro součinitel vzlaku, a tento vztah byl definován jako cílový funkcionál pro optimalizaci. Byla provedena formulace výchozích rovnic problému pomocí teorie potenciálního proudění. Na základě těchto rovnic byl proveden začátek odvození spojitě formulace této úlohy, ale pro značné problémy při odvození týkající se zejména okrajových podmínek, stejně jako z důvodu snížení výpočetní náročnosti, které spočívá v použití panelové metody, byla nakonec zvolena formulace diskrétní. V diskrétní formulaci byla odvozena diskrétní analogie cílového funkcionálu ze spojitě adjungovaného přístupu jakožto funkce mnoha proměnných. Následně byla PDR potenciálního proudění, vystupující ve spojitě adjungovaném problému jako vazbová rovnice, nahrazena soustavou lineárních algebraických rovnic panelové metody, přičemž přípustnost tohoto nahrazení byla diskutována. Po definování soustavy vazbových rovnic diskrétního problému jakožto soustavy rovnic panelové metody bylo provedeno odvození soustavy rovnic pro výpočet vektoru Lagrangeových multiplikátorů. Na základě znalosti vektoru Lagrangeových multiplikátorů bylo provedeno odvození vztahů pro výpočet gradientu cílové funkce vzhledem k parametrům úlohy. Vzhledem ke snaze o minimální výpočetní náročnost byly všechny potřebné derivace počítány analyticky nebo semianalyticky, přičemž bylo dbáno na to, aby derivace vyčíslované numericky byly pokud možno co nejjednodušší a byl jich co nejmenší



počet. Z důvodu zajištění fyzikálně korektního výsledného tvaru byla pro popis profilu použita PARSEC parametrizace. Konkrétní vzorce pro výpočet tvaru pomocí PARSEC parametrizace bylo nutné zkombinovat z více zdrojů kvůli častým překlepům v jednotlivých zdrojích. Správnost výsledného vzorce byla ověřena porovnáním tvaru získaného z PARSEC parametrů profilu NACA 0012 s tvarem získaným z definiční funkce tohoto profilu.

Po provedení všech odvození byla celá procedura implementována v programu Matlab, a následně testována na pěti různých profilech. V rámci implementace byly do kódu vloženy kontrolní mechanismy hlídající monotónní konvergenci metody, geometrickou přípustnost výsledného tvaru a dodržení přípustného rozsahu, ve kterém se parametry mohou pohybovat s ohledem na geometrická omezení. Při porušení kterékoli podmínky příslušný kontrolní mechanismus optimalizaci neprodleně ukončí, případně nechá rozhodnutí o dalším pokračování na uživateli. Testované profily byly voleny tak, aby zastupovaly co nejširší spektrum profilů, a to jak z hlediska tvaru, tak z hlediska použití. Vzhledem k tomu, že primárním zaměřením této práce není způsob získání PARSEC parametrů zkoumaných profilů, byly tyto pro otestování metody dohledány v dostupných zdrojích. Byla provedena kontrola, zda nalezené parametry PARSEC skutečně mohou reprezentovat dané profily. U všech profilů mimo profily řady NLF(1) byla shoda geometrie i součinitele vztaku návrhového a skutečného tvaru profilu velmi dobrá, a proto bylo usouzeno, že nalezené parametry skutečně věrně reprezentují dané profily. V případě profilu NLF(1)-0414 tvar získaný z PARSEC parametrů až na mírné odchylky odpovídal návrhovému tvaru, ale součinitel vztaku se lišil více než u profilů jiných řad. I přes tyto drobné nesrovnalosti bylo rozhodnuto, že parametry skutečně reprezentují profil NLF(1)-0414. Tyto rozdíly mezi skutečným a definičním tvarem, spolu s rozdíly v součiniteli vztaku, byly hlavním důvodem pro srovnání skutečného a návrhového tvaru jednotlivých profilů v jednom obrázku. Výrazně větší problém nastal u profilu NLF(1)-0115. Tvar tohoto profilu získaný z parametrizace již na první pohled neodpovídal návrhovému tvaru tohoto profilu, navíc při porovnání hodnot součinitele vztaku se tyto hodnoty lišily velmi výrazně. Profil spočtený z parametrizace vykazoval při nulovém úhlu náběhu dvojnásobný vztlak oproti návrhovému tvaru profilu. Tento profil byl nakonec také využit, avšak k jeho označení bylo explicitně doplněno, z jakého zdroje byly parametry získány, aby nedošlo k omylu, že se jedná o skutečný tvar profilu NLF(1)-0115. Skutečný tvar profilu NLF(1)-0115 je velmi podobný profilu NLF(1)-0414, a proto u obou profilů při jejich korektní definici předpokládám podobné chování metody. V kapitole 10 byly identifikovány správné parametry tohoto profilu a byla úspěšně provedena jejich optimalizace.

Získané výsledky byly podrobně diskutovány, stejně jako bylo podrobně diskutováno chování optimalizační procedury. Metoda neměla při správné volbě hodnoty  $\delta$  žádnou tendenci ke ztrátě monotónní konvergence, a to bez ohledu na úhel náběhu a použitý iterační krok. Na všech



profilech také metoda poskytovala velmi významný benefit. Tento benefit se při nulovém úhlu náběhu pohyboval v desítkách procent, při úhlu náběhu  $10^\circ$  pak v jednotkách procent. Tvary profilů zůstávaly také vesměs fyzikálně korektní, přičemž jediný problém tohoto rázu se vyskytl u profilu NACA 0012, kde se při větším iteračním kroku či počtu iterací vyskytovalo zvlnění horní povrchy profilu. Tato tendence ke změnám tvaru odporujícím fyzikální podstatě problému je však patrná také v jiných zdrojích zabývajících se optimalizací profilu NACA 0012. Na tomto místě stojí za zmínku také výpočetní náročnost odvozené procedury. Na běžném notebooku nižší až střední výkonové třídy trvá provedení 50 iterací optimalizace pouze jednotky až desítky sekund, podle zvoleného počtu panelů. To vše při zachování relativně jemné násady 200 – 300 panelů po obvodu profilu a z toho vyplývající dobré přesnosti výpočtu. Optimalizační procedura je tedy výpočetně velmi úsporná, což jí činí vhodnou pro optimalizaci geometrie profilu po celém rozpětí křídel, příp. celé délce listu vrtule. Díky výpočetní nenáročnosti lze provést optimalizaci v mnoha příčných řezech křídlem (listem vrtule) a v každém řezu optimalizovat profil přesně na míru lokálním podmínkám.

Verifikace výsledků byla provedena pro tři zvolené profily. Pro profil NACA 0012 nebyla verifikace provedena, byla pro něj pouze vykreslena polára. Verifikace pro tento profil nebyla provedena vzhledem k oblasti použití profilu NACA 0012, což jsou zpravidla ovládací plochy letadel, případně pak listy rotorů vrtulníků. Pro ovládací plochy letadel nedává smysl optimalizaci provádět, naopak je v této aplikaci zpravidla žádoucí mít profil ovládacího prvku symetrický. Pro použití na listech rotoru vrtulníku by teoreticky dávalo smysl optimalizaci zaměřenou na součinitel vztlaku provést. Profil NLF(1)-0115 také nebyl verifikován, protože tvar tohoto profilu získaný z nalezených parametrů PARSEC neodpovídal skutečnému tvaru tohoto profilu. Proto pro tento profil nebyla vykreslována ani polára. Pro letecké profily, tzn. NLF(1)-0414 a RAE2822 byly vybrány 3 validační případy. Prvním případem byl středně velký dron, druhým malé sportovní letadlo a třetím středně velké turbovrtulové letadlo. Turbivrtulové letadlo nespĺňuje předpoklady nutné pro řešení proudění panelovou metodou, avšak pro validaci bylo zvoleno, neboť reprezentuje reálný příklad stroje, kde by bylo vhodné optimalizaci tohoto druhu použít. Z hlediska této práce je turbivrtulové letadlo zajímavým případem proto, že umožňuje sledovat výsledky metody při překročení omezení kladených na hodnoty Reynoldsova a Machova čísla z důvodu platnosti použité metody řešení. Z výsledků získaných z programu Xfoil pro výše zmíněné případy vyplývá, že provedení optimalizace vlastností profilu vždy zlepší, a to i když jsou překročena omezení kladená na hodnoty podobnostních čísel z důvodu použitého řešení obtékání profilu. V případě Machova čísla toto vyplývá také z Prandtlova – Glauertova pravidla, které umožňuje přepočítat tlakový součinitel získaný z výpočtu nebo měření v nestlačitelném proudění na tlakový součinitel v proudění stlačitelném. Jelikož tento korekční vztah je pouze



násobením nestlačitelného  $C_p$  konstantou, lze jej z definičního integrálu (97) přepsaného pro stlačitelné proudění vytknout a převést na levou stranu rovnice. Tímto dostáváme upravenou cílovou funkci, jejíž definiční integrál se od cílové funkce použité v této práci v ničem neliší. Proto lze tento vztah bez újmy na přesnosti použít a-posteriori a pouze jím korigovat výsledné rozložení  $C_p$  a součinitel vztlaku po optimalizaci. Z tohoto vyplývá použitelnost optimalizace i ve slabě stlačitelném proudění. S rostoucím Machovým číslem však přesnost Prandtlova – Glauertova pravidla klesá. Dle očekávání je nejlepší shoda benefitu optimalizace s kontrolním výpočtem pro nevazké proudění v Xfoilu a hned poté s výpočtem pro malé sportovní letadlo. Tento výsledek byl očekávatelný, protože malé sportovní letadlo nejlépe odpovídá předpokladům. Ve všech případech optimalizace poskytuje významný benefit, který je pro vazkou stlačitelnou tekutinu často dokonce větší, než hodnota z Hessovy-Smithovy metody. Pro profil NREL S809, který se používá pro listy rotorů větrných elektráren, byly hodnoty podobnostních čísel pro validaci převzaty z [9]. Pro lepší ilustraci velikosti profilu a rychlosti proudění byla z těchto hodnot dopočítána rychlost nabíhajícího proudu vzduchu a délka těhivy profilu.

Pro všechny profily kromě NLF(1)-0115 byla také vykreslena polára profilu a závislosti jednotlivých součinitelů na úhlu náběhu. Ve všech případech je patrná shoda výsledků získaných z Xfoilu pro základní profil s dostupnými charakteristikami těchto profilů, přičemž výpočty v Xfoilu dávají dolní odhad součinitele odporu. Toto potvrzuje korektnost výpočtů provedených v této práci. Ve všech případech je pak z poláry a závislosti jednotlivých součinitelů na úhlu náběhu vidět jednoznačný a výrazný benefit provedené optimalizace. Provedení optimalizace navíc v běžně používaném rozsahu návrhového úhlu náběhu (nižší jednotky stupňů) neovlivní součinitel odporu žádného z testovaných profilů. Z tohoto pohledu tedy lze výsledky práce hodnotit jako velmi dobré a v některých ohledech výrazně překonávající očekávání (zvláště poměr zvýšení součinitele vztlaku – velikost změn tvaru profilu a absence ovlivnění součinitele odporu provedením optimalizace).

Vzhledem k nedostupnosti parametrů PARSEC pro drtivou většinu profilů, případně jejich nepřesnosti, byla práce rozšířena o kapitulu týkající se identifikace PARSEC parametrů zadaného profilu. Vstupem do této identifikace je soubor obsahující tvar profilu ve formátu Lednicer nebo Selig, výstupem je pak identifikovaná sada parametrů PARSEC, která je předána do samotného optimalizačního výpočtu. Na příkladu profilu NLF(1)-0115 bylo ukázáno, že tato identifikace funguje velmi dobře a dokáže zadaný profil přesně aproximovat. Identifikace parametrů sice bezprostředně nesouvisí s tématem práce, ale má klíčový vliv na praktickou uplatnitelnost vytvořeného kódu. Z tohoto důvodu bylo rozhodnuto o zařazení této kapitoly.



## Citovaná literatura

- [1] LUO, JiaQi, JunTao XIONG a Feng LIU. Aerodynamic design optimization by using a continuous adjoint method. *SCIENCE CHINA: Physics, Mechanics & Astronomy*. 2014, **57**(7), 1363-1375. ISSN 1674-7348. Dostupné z: doi:10.1007/s11433-014-5479-0
- [2] GILES, Michael B. a Niles A. PIERCE. An Introduction to the Adjoint Approach to Design. *Flow, Turbulence and Combustion*. 2000, **65**(34), 393-415. ISSN 13866184. Dostupné z: doi:10.1023/A:1011430410075
- [3] JAMESON, Anthony. *Aerodynamic Shape Optimization Using the Adjoint Method* [online]. In: . [cit. 2022-05-05]. Dostupné z: <http://aero-comlab.stanford.edu/Papers/jameson.vki03.pdf>
- [4] LAVREŇTJEV, Michail Aleksejevič a Lazar Aronovič LJUSTERNIK, Karel WINKELBAUER. *KURS VARIČNÍHO POČTU*. I. vydání. Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952.
- [5] *Hess-Smith Panel Method: AA200b - Applied Aerodynamics II - Lecture 3*. 2005.
- [6] SOBIECZKY, Helmut. Parametric Airfoils and Wings. *Notes on Numerical Fluid Mechanics*. 1998, (68), 71-88.
- [7] ARIAS-MONTAÑO, Alfredo, Carlos A. COELLO COELLO a Efrén MEZURA-MONTES. Evolutionary Algorithms Applied to Multi-Objective Aerodynamic Shape Optimization. *Computational Optimization, Methods and Algorithms*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2011, 211-240. Studies in Computational Intelligence. ISBN 978-3-642-20858-4. Dostupné z: doi:10.1007/978-3-642-20859-1\_10
- [8] DELLA VECCHIA, Pierluigi, Elia DANIELE a Egidio D'AMATO. An airfoil shape optimization technique coupling PARSEC parameterization and evolutionary algorithm. *Aerospace Science and Technology*. 2014, **32**(1), 103-110. ISSN 12709638. Dostupné z: doi:10.1016/j.ast.2013.11.006
- [9] AKRAM, Md Tausif a Man-Hoe KIM. Aerodynamic Shape Optimization of NREL S809 Airfoil for Wind Turbine Blades Using Reynolds-Averaged Navier Stokes Model—Part II. *Applied Sciences*. 2021, **11**(5). ISSN 2076-3417. Dostupné z: doi:10.3390/app11052211





- [10] KHURANA, Manas, Hadi WINARTO a Arvind SINHA. Airfoil Optimisation by Swarm Algorithm with Mutation and Artificial Neural Networks. *47th AIAA Aerospace Sciences Meeting including The New Horizons Forum and Aerospace Exposition*. Reston, Virigina: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2009, -. ISBN 978-1-60086-973-0. Dostupné z: doi:10.2514/6.2009-1278
- [11] NLF(1)-0115 (nlf0115-il). In: *Airfoil Tools* [online]. 2023 [cit. 2023-03-16]. Dostupné z: <http://airfoiltools.com/airfoil/details?airfoil=nlf0115-il>
- [12] NASA/LANGLEY NLF 0414F AIRFOIL (nlf414f-il). In: *Airfoil Tools* [online]. 2023 [cit. 2023-05-18]. Dostupné z: <http://airfoiltools.com/airfoil/details?airfoil=nlf414f-il>
- [13] J. K., Viken, Viken S. A., Pfenninger W., Morgan H. L., JR. a Campbell R. L. *DESIGN OF THE LOW-SPEED NLF(1)-0414F ANI) THE HIGH-SPEED HSNLF(1)-0213 AIRFOILS WITH HIGH-LIFT SYSTEMS*. 1985.
- [14] JAMESON, Antony. Aerodynamic Design via Control Theory. *Journal of Scientific Computing*. Plenum Publishing Corporation, 1988, (3), 233-245.
- [15] GOODMAN, Ben. Sequential quadratic programming. In: *Cornell University Computational Optimization Open Textbook* [online]. 2022 [cit. 2023-05-18]. Dostupné z: [https://optimization.cbe.cornell.edu/index.php?title=Sequential\\_quadratic\\_programming](https://optimization.cbe.cornell.edu/index.php?title=Sequential_quadratic_programming)
- [16] *Airfoil Tools* [online]. [cit. 2023-05-18]. Dostupné z: <http://airfoiltools.com/>
- [17] NOŽIČKA, Jiří. Podzvukové proudění. In: NOŽIČKA, Jiří. *Dynamika plynů*. Praha: Česká technika - nakladatelství ČVUT, 2005, s. 96 - 105. ISBN 80-01-03300-7.



## Seznam obrázků

Obrázek 1 – Rozložení $C_p$ na křídle letounu Boeing 747-200 při $Ma = 0,86$ [3].....	26
Obrázek 2 – Rozložení $C_p$ na křídle letounu Boeing 747-200 při $Ma = 0,9$ [3].....	27
Obrázek 3 – Srovnání tvaru profilu před a po optimalizaci [3] .....	27
Obrázek 4 – Síly působící na element povrchu profilu.....	29
Obrázek 5 – Číslování uzlů a orientace panelů [5] .....	36
Obrázek 6 – Parametry PARSEC parametrizace a jejich geometrický význam [6].....	43
Obrázek 7 – NACA 0012 – Exaktní návrhový tvar a tvar dle PARSEC .....	45
Obrázek 8 – NLF(1)-0115 – Exaktní návrhový tvar a tvar dle PARSEC .....	46
Obrázek 9 – NLF(1)-0414 – Exaktní návrhový tvar a tvar dle PARSEC .....	46
Obrázek 10 – RAE2822 – Exaktní návrhový tvar a tvar dle PARSEC.....	47
Obrázek 11 – NREL S809 – Exaktní návrhový tvar a tvar dle PARSEC .....	47
Obrázek 12 – Tvar profilu NACA 0012 před a po optimalizaci.....	51
Obrázek 13 – Rozložení $C_p$ na profilu NACA 0012 před a po optimalizaci.....	52
Obrázek 14 – Rozložení tečné rychlosti na profilu NACA 0012 před a po optimalizaci .....	52
Obrázek 15 – Tvar profilu NACA 0012 před a po optimalizaci.....	53
Obrázek 16 – Rozložení $C_p$ na profilu NACA 0012 před a po optimalizaci.....	54
Obrázek 17 – Rozložení tečné rychlosti na profilu NACA 0012 před a po optimalizaci .....	54
Obrázek 18 – Tvar profilu NLF(1)-0115 dle [10] před a po optimalizaci .....	56
Obrázek 19 – Rozložení $C_p$ na profilu NLF(1)-0115 před a po optimalizaci .....	57
Obrázek 20 – Rozložení tečné rychlosti na profilu NLF(1)-0115 před a po optimalizaci .....	57
Obrázek 21 – Tvar profilu NLF(1)-0115 dle [10] před a po optimalizaci .....	58
Obrázek 22 – Rozložení $C_p$ na profilu NLF(1)-0115 před a po optimalizaci .....	59
Obrázek 23 – Rozložení tečné rychlosti na profilu NLF(1)-0115 před a po optimalizaci .....	59
Obrázek 24 – Tvar profilu NLF(1)-0414 před a po optimalizaci.....	61
Obrázek 25 – Rozložení $C_p$ na profilu NLF(1)-0414 před a po optimalizaci.....	62
Obrázek 26 – Rozložení tečné rychlosti na profilu NLF(1)-0414 před a po optimalizaci .....	62
Obrázek 27 – Tvar profilu NLF(1)-0414 před a po optimalizaci.....	63
Obrázek 28 – Rozložení $C_p$ na profilu NLF(1)-0414 před a po optimalizaci .....	64
Obrázek 29 – Rozložení tečné rychlosti na profilu NLF(1)-0414 před a po optimalizaci .....	64
Obrázek 30 – Tvar profilu RAE2822 před a po optimalizaci .....	66
Obrázek 31 – Rozložení $C_p$ na profilu RAE2822 před a po optimalizaci.....	67
Obrázek 32 – Rozložení tečné rychlosti na profilu RAE2822 před a po optimalizaci.....	67
Obrázek 33 – Tvar profilu RAE2822 před a po optimalizaci .....	68
Obrázek 34 – Rozložení $C_p$ na profilu RAE2822 před a po optimalizaci.....	69

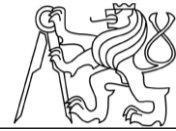


Obrázek 35 – Rozložení tečné rychlosti na profilu RAE2822 před a po optimalizaci.....	69
Obrázek 36 – Tvar profilu NREL S809 před a po optimalizaci.....	71
Obrázek 37 – Rozložení $C_p$ na profilu NREL S809 před a po optimalizaci.....	72
Obrázek 38 – Rozložení tečné rychlosti na profilu NREL S809 před a po optimalizaci.....	72
Obrázek 39 – Tvar profilu NREL S809 před a po optimalizaci.....	73
Obrázek 40 – Rozložení $C_p$ na profilu NREL S809 před a po optimalizaci.....	74
Obrázek 41 – Rozložení tečné rychlosti na profilu NREL S809 před a po optimalizaci.....	74
Obrázek 42 – Evoluce tvaru profilu NACA 0012.....	76
Obrázek 43 – Evoluce tvaru profilu NLF(1)-0115.....	78
Obrázek 44 – Evoluce tvaru profilu NLF(1)-0414.....	79
Obrázek 45 – Evoluce tvaru profilu RAE2822.....	81
Obrázek 46 – Evoluce tvaru profilu NREL S809.....	82
Obrázek 47 – Profil NACA 0012 optimalizovaný pro snížení $C_x$ při fixovaném $C_y$ [10].....	84
Obrázek 48 – Porovnání výchozího tvaru NREL S809 s optimalizovaným – parametrizace CST a PARSEC [9].....	85
Obrázek 49 – Identifikovaný tvar NLF(1)-0115 a srovnání s definičním tvarem.....	96
Obrázek 50 – Identifikovaný a optimalizovaný tvar profilu NLF(1)-0115.....	96
Obrázek 51 – Evoluce tvaru profilu NACA 0012 – zobrazení v měřítku.....	119
Obrázek 52 – Vývoj cílové funkce pro NACA 0012.....	119
Obrázek 53 – Evoluce tvaru profilu NLF(1)-0115 – zobrazení v měřítku.....	120
Obrázek 54 – Vývoj cílové funkce pro NLF(1)-0115.....	120
Obrázek 55 – Evoluce tvaru profilu NLF(1)-0414 – zobrazení v měřítku.....	121
Obrázek 56 – Vývoj cílové funkce pro NLF(1)-0414.....	121
Obrázek 57 – Evoluce tvaru profilu RAE2822 – zobrazení v měřítku.....	122
Obrázek 58 – Vývoj cílové funkce pro RAE2822.....	122
Obrázek 59 – Evoluce tvaru profilu NREL S809 – zobrazení v měřítku.....	123
Obrázek 60 – Vývoj cílové funkce pro NREL S809.....	123
Obrázek 61 – Održení proudění na profilu NREL S809 – úhel náběhu $0^\circ$ .....	126
Obrázek 62 – Održení proudění na profilu NREL S809 – úhel náběhu $10^\circ$ .....	126



## Seznam tabulek

Tabulka 1 – Výpočetní náročnost každého kroku optimalizace [1].....	5
Tabulka 2 – Typy operátorů a operátory k nim adjungované [2].....	22
Tabulka 3 – PARSEC parametry vybraných profilů [9] [10] .....	45
Tabulka 4 – Vlastnosti profilu NACA 0012 před a po optimalizaci.....	50
Tabulka 5 – Vlastnosti profilu NLF(1)-0115 před a po optimalizaci.....	55
Tabulka 6 – Vlastnosti profilu NLF(1)-0414 před a po optimalizaci.....	60
Tabulka 7 – Vlastnosti profilu RAE2822 před a po optimalizaci .....	66
Tabulka 8 – Vlastnosti profilu NREL S809 před a po optimalizaci .....	70
Tabulka 9 – Změny parametrů profilu NACA 0012 během optimalizace .....	76
Tabulka 10 – Změny parametrů profilu NLF(1)-0115 během optimalizace.....	77
Tabulka 11 – Změny parametrů profilu NLF(1)-0414 během optimalizace.....	79
Tabulka 12 – Změny parametrů profilu RAE2822 během optimalizace .....	80
Tabulka 13 – Změny parametrů profilu NREL S809 během optimalizace.....	82
Tabulka 14 – Technické a letové parametry vybraných letadel.....	88
Tabulka 15 – Porovnání různých metod výpočtu pro profil NLF(1)-0414 před optimalizací ....	89
Tabulka 16 – Porovnání různých metod výpočtu pro profil NLF(1)-0414 po optimalizaci .....	89
Tabulka 17 – Porovnání různých metod výpočtu pro profil RAE2822 před optimalizací.....	90
Tabulka 18 – Porovnání různých metod výpočtu pro profil RAE2822 po optimalizaci.....	90
Tabulka 19 – Podobnostní čísla pro validační výpočet profilu NREL S809 [9].....	91
Tabulka 20 – Dopočtené charakteristiky proudění a profilu NREL S809 .....	91
Tabulka 21 – Porovnání různých metod výpočtu pro profil NREL S809 před optimalizací (úhel náběhu 0°).....	92
Tabulka 22 – Porovnání různých metod výpočtu pro profil NREL S809 po optimalizaci (úhel náběhu 0°).....	92
Tabulka 23 – Porovnání různých metod výpočtu pro profil NREL S809 před optimalizací (úhel náběhu 10°).....	93
Tabulka 24 – Porovnání různých metod výpočtu pro profil NREL S809 po optimalizaci (úhel náběhu 10°).....	93
Tabulka 25 – Poláry vybraných optimalizovaných profilů .....	94
Tabulka 26 – Parametry profilu NLF(1)-0115, srovnání [10] s identifikací pomocí fmincon....	95
Tabulka 27 – Porovnání různých metod výpočtu pro profil NLF(1)-0414 před optimalizací ..	124
Tabulka 28 – Porovnání různých metod výpočtu pro profil NLF(1)-0414 po optimalizaci .....	124
Tabulka 29 – Porovnání různých metod výpočtu pro profil RAE2822 před optimalizací.....	125
Tabulka 30 – Porovnání různých metod výpočtu pro profil RAE2822 po optimalizaci.....	125



## Seznam použitého softwaru

- MATLAB R2019b
- Microsoft Office 365

## Seznam příloh

- Složka obsahující všechny soubory potřebné pro spuštění optimalizace
- Soubor „polar.xlsx“ obsahující vyhodnocené poláry a ostatní charakteristiky testovaných profilů, včetně porovnání všech údajů s databází profilů v [16]
- Textové přílohy práce dle kapitoly 12



## 12 Přílohy

### 12.1 Příloha 3.1 – Rozšířené odvození a důkazy v Lagrangeovském přístupu

Totální diferenciál  $d\phi$  lze dle vztahu z kapitoly 3.1 rozepsat jako

$$d\phi = \frac{\partial I}{\partial w_i} dw_i + \frac{\partial I}{\partial F_j} dF_j + \lambda_l \cdot \frac{\partial R_l}{\partial w_i} dw_i + \lambda_l \cdot \frac{\partial R_l}{\partial F_j} dF_j + R_k d\lambda_k = G_j dF_j$$

Nyní je zapotřebí využít implicitní závislosti  $w$  a  $F$ . Nezávisle na volbě parametrů  $F$  se proměnné úlohy  $w$  nastaví tak, že vždy platí

$$R_l = 0$$

Vzhledem k výše uvedenému lze podmínku  $R_l = 0$  zpřísnit na

$$R_l \equiv 0$$

Protože tedy pro libovolnou volbu parametrů  $F$  platí výše uvedená identita, můžeme diferencováním obou stran této rovnice obdržet

$$d(R_l) = d(0) = 0$$

$$d(R_l) = dR_l = \frac{\partial R_l}{\partial w_i} dw_i + \frac{\partial R_l}{\partial F_j} dF_j = 0$$

$$\lambda_l \cdot \left( \frac{\partial R_l}{\partial w_i} dw_i + \frac{\partial R_l}{\partial F_j} dF_j \right) = \lambda_l dR_l = 0$$

Navíc lze psát

$$R_k d\lambda_k = 0$$

$$dI = \frac{\partial I}{\partial w_i} dw_i + \frac{\partial I}{\partial F_j} dF_j$$

A vzhledem k výše uvedenému tedy platí

$$d\phi = dI = G_j dF_j$$

Z tohoto plyne, že gradient  $G$  udává i citlivost cílové funkce  $I$ . Pro optimalizaci je pak potřeba udělat s vektorem  $F$  krok ve směru gradientu (udává směr nejrychlejšího růstu  $I$ ). To, že gradient skutečně udává směr nejrychlejšího růstu lze dokázat z Cauchy-Schwarzovy nerovnosti. Pro přírůstek funkce  $I$  platí následující rovnost.

$$dI = G \cdot dF$$



Dle Cauchy-Schwarzovy nerovnosti platí

$$|a \cdot b| \leq \|a\| \cdot \|b\|$$

Přičemž vzhledem k definici Euklidovské normy v prostoru parametrů lze psát

$$\|G\| = \left( \sum_{j=1}^m |G_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = (G \cdot G)^{\frac{1}{2}}$$

Aplikací Cauchy-Schwarzovy nerovnosti

$$|dI| = |G \cdot dF| \leq \|G\| \cdot \|dF\|$$

Přičemž právě tehdy když  $dF = Gd\zeta$  platí

$$\|G\| \cdot \|dF\| = \|G\| \cdot \|Gd\zeta\| = \|G\|^2 |d\zeta| = (G \cdot G) |d\zeta| = |G \cdot Gd\zeta| = |G \cdot dF|$$

A nerovnost tedy v tomto případě přechází v rovnost

$$|dI| = |G \cdot dF| = |G \cdot Gd\zeta| = \|G\| \cdot \|dF\|$$

Z tvrzení C-S nerovnosti vyplývá, že tento přírůstek funkční hodnoty  $I$  je maximální možný. Tedy přírůstek parametrů  $dF = Gd\zeta$ , tzn. přírůstek ve směru gradientu, maximalizuje změnu  $I$  vzhledem ke změně parametrů  $F$ . Tímto je dokázáno, že gradient  $I$  je skutečně směrem největšího růstu  $I$ .



## 12.2 Příloha 4.1 – Důkaz ekvivalence obou přístupů k odvození

Při srovnání odvození pomocí Lagrangeových multiplikátorů v kapitole 3.1 s odvozením pomocí adjungovaného operátoru v kapitole 4.1 je evidentní, že obě odvození vedou k identickým výsledkům. Vektor  $v$  v odvození pomocí adjungovaného operátoru je dán (až na znaménko) stejným vztahem jako vektor Lagrangeových multiplikátorů  $\lambda$  v odvození z kapitoly 3.1. Relace mezi  $v$  a  $\lambda$  je tedy

$$A^T v = g$$

$$A \equiv \frac{\partial R}{\partial w}, \quad g^T \equiv \frac{\partial I}{\partial w}, \quad b_i \equiv -\frac{\partial R}{\partial F_i}$$

$$\left(\frac{\partial R}{\partial w}\right)^T v = \left(\frac{\partial I}{\partial w}\right)^T$$

$$\left(\frac{\partial R}{\partial w}\right)^T \lambda = -\left(\frac{\partial I}{\partial w}\right)^T$$

$$\lambda = -v$$

A proto

$$G_i = \frac{dI}{dF_i} = v^T b_i + \frac{\partial I}{\partial F_i} = -\lambda^T \left(-\frac{\partial R}{\partial F_i}\right) + \frac{\partial I}{\partial F_i} = \lambda^T \frac{\partial R}{\partial F_i} + \frac{\partial I}{\partial F_i}$$

Výsledný vztah je identický se vztahem odvozeným v kapitole 3.1. Tímto je ukázáno, že oba způsoby odvození vedou k totožným výsledkům, ačkoli vychází z naprosto odlišných partií matematiky.





## 12.3 Příloha 7.2 – Podrobné odvození rovnic pro optimalizaci

Tato příloha je přímým rozšířením kapitoly 7.2 a poskytuje kompletní odvození (včetně mezikroků), které je nutné ke korektnímu získání rovnic prezentovaných v kapitole 7.2. Z důvodu kontinuity odvození je v této příloze také opakování nezbytných vztahů z kapitoly 7.1.

### 12.3.1 Krátké shrnutí potřebných vztahů z kapitoly 7.1.

$$A_{ij} = \frac{1}{2\pi} \left( \sin(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} + \cos(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} \right) \quad \text{pro } i, j = 1 \div N$$

$$A_{i,N+1} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left( \cos(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} - \sin(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} \right) \quad \text{pro } i = 1 \div N$$

$$A_{N+1,j} = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1,N} \left( \sin(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} - \cos(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} \right) \quad \text{pro } j = 1 \div N$$

$$A_{N+1,N+1} = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1,N} \sum_{j=1}^N \left( \sin(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} + \cos(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} \right)$$

$$b_i = c_\infty \sin(\theta_i - \alpha) \quad \text{pro } i = 1 \div N$$

$$b_{N+1} = -c_\infty \cos(\theta_1 - \alpha) - c_\infty \cos(\theta_N - \alpha)$$

Kde výraz  $i = 1, N$  znamená, že se sčítá pouze přes první a N-tý panel.

$$w = [q_1, \dots, q_N, \Gamma]^T$$

Z celého vektoru  $b$  lze tedy vytknout rychlost  $c_\infty$  a soustavu rozepsat do bezrozměrového tvaru.

$$A\hat{w} = \hat{b}$$

Z panelové metody lze tudíž získat přímo bezrozměrové rychlosti.

$$\begin{aligned} \hat{c}_{ti} = \frac{c_{ti}}{c_\infty} &= \cos(\theta_i - \alpha) + \sum_{j=1}^N \frac{\hat{w}_j}{2\pi} \left( \sin(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} - \cos(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} \right) \\ &+ \frac{\hat{w}_{N+1}}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left( \sin(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} + \cos(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} \right) \end{aligned}$$



V této úloze tedy platí

$$R = A\hat{w} - \hat{b} = 0$$

$$I = L \cdot C_y = \sum_{i=1}^N (\hat{c}_{ti}^2 - \gamma) \cdot \Delta x_i$$

Kde hodnoty  $x_i$  jsou konstantami (na začátku výpočtu se pevně zvolí a dále se s nimi již nijak nemanipuluje). Protože  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ , jsou hodnoty  $\Delta x_i$  též konstanty. Na základě výše uvedeného tedy platí následující vztahy.

$$\frac{\partial \Delta x_i}{\partial \hat{w}_k} = 0, \quad \frac{\partial \Delta x_i}{\partial F_k} = 0$$

Nyní můžeme přistoupit k samotnému odvození.

### 12.3.2 Podrobné odvození adjungované optimalizace součinitele vztlaku

2 soustavy řešených rovnic jsou tedy definovány jako

$$A\hat{w} = \hat{b}$$

$$A^T \lambda = - \left( \frac{\partial I}{\partial \hat{w}} \right)^T$$

Rozderivováním výrazu  $\frac{\partial I}{\partial \hat{w}}$  dostáváme

$$\frac{\partial I}{\partial \hat{w}_k} = 2 \sum_{i=1}^N \Delta x_i \hat{c}_{ti} \frac{\partial \hat{c}_{ti}}{\partial \hat{w}_k} = 2 \sum_{i=1}^N \Delta x_i \hat{c}_{ti} C_{ik}$$

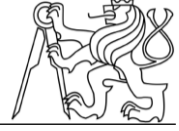
$$\left( \frac{\partial I}{\partial \hat{w}} \right) = 2(\Delta x \hat{c}_t)^T C$$

Kde

$$C_{ik} = \frac{\partial \hat{c}_{ti}}{\partial \hat{w}_k} = \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{jk}}{2\pi} \left( \sin(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} - \cos(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} \right) + \frac{\delta_{N+1,k}}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left( \sin(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} + \cos(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} \right)$$

$$C_{ik} = \frac{\partial \hat{c}_{ti}}{\partial \hat{w}_k} = \frac{1}{2\pi} \left( \sin(\theta_i - \theta_k) \beta_{ik} - \cos(\theta_i - \theta_k) \ln \frac{r_{ik+1}}{r_{ik}} \right) \quad \text{pro } k = 1 \div N$$

$$C_{i,N+1} = \frac{\partial \hat{c}_{ti}}{\partial \hat{w}_{N+1}} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left( \sin(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} + \cos(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} \right)$$



Řešené soustavy rovnic tedy přechází na

$$A\hat{w} = \hat{b}$$

$$A^T \lambda = -2C^T (\Delta x \hat{c}_t)$$

Nyní lze vyjádřit k-tý prvek gradientu (viz kapitola 3.1).

$$G_k = \frac{\partial \phi}{\partial F_k} = \frac{\partial I}{\partial F_k} + \lambda_l \cdot \frac{\partial R_l}{\partial F_k}$$

Postupným rozderivováním členu  $\frac{\partial I}{\partial F_k}$  lze obdržet následující vztahy.

$$\frac{\partial I}{\partial F_k} = 2 \sum_{i=1}^N \Delta x_i \hat{c}_{ti} \frac{\partial \hat{c}_{ti}}{\partial F_k}$$

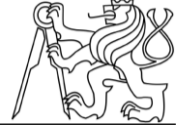
$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{c}_{ti}}{\partial F_k} = \frac{\partial}{\partial F_k} \left\{ \cos(\theta_i - \alpha) + \sum_{j=1}^N \frac{\hat{w}_j}{2\pi} \left( \sin(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} - \cos(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\hat{w}_{N+1}}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left( \sin(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} + \cos(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial F_k} \cos(\theta_i - \alpha) = -\sin(\theta_i - \alpha) \frac{\partial \theta_i}{\partial F_k}$$

$$\frac{\partial}{\partial F_k} \sum_{j=1}^N \frac{\hat{w}_j}{2\pi} \left( \sin(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} - \cos(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left[ \frac{\partial \hat{w}_j}{\partial F_k} \left( \sin(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} - \cos(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} \right) + \hat{w}_j \frac{\partial}{\partial F_k} \left( \sin(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} - \cos(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} \right) \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial F_k} (\sin(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij}) = \cos(\theta_i - \theta_j) \left( \frac{\partial \theta_i}{\partial F_k} - \frac{\partial \theta_j}{\partial F_k} \right) \beta_{ij} + \sin(\theta_i - \theta_j) \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial F_k}$$



$$\frac{\partial}{\partial F_k} \left( \cos(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} \right) = -\sin(\theta_i - \theta_j) \left( \frac{\partial \theta_i}{\partial F_k} - \frac{\partial \theta_j}{\partial F_k} \right) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} + \cos(\theta_i - \theta_j) \frac{r_{ij}}{r_{ij+1}} \frac{\left( \frac{\partial r_{ij+1}}{\partial F_k} r_{ij} - r_{ij+1} \frac{\partial r_{ij}}{\partial F_k} \right)}{r_{ij}^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial F_k} \left( \cos(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} \right) = -\sin(\theta_i - \theta_j) \left( \frac{\partial \theta_i}{\partial F_k} - \frac{\partial \theta_j}{\partial F_k} \right) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} + \cos(\theta_i - \theta_j) \frac{\left( \frac{\partial r_{ij+1}}{\partial F_k} r_{ij} - r_{ij+1} \frac{\partial r_{ij}}{\partial F_k} \right)}{r_{ij} r_{ij+1}}$$

$$\frac{\partial}{\partial F_k} \left( \frac{\widehat{w}_{N+1}}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left( \sin(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} + \cos(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \widehat{w}_{N+1}}{\partial F_k} \sum_{j=1}^N \left( \sin(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} + \cos(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} \right) +$$

$$+ \frac{\widehat{w}_{N+1}}{2\pi} \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial F_k} \left( \sin(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} + \cos(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial F_k} \left( \sin(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} \right) = \cos(\theta_i - \theta_j) \left( \frac{\partial \theta_i}{\partial F_k} - \frac{\partial \theta_j}{\partial F_k} \right) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} + \sin(\theta_i - \theta_j) \frac{\left( \frac{\partial r_{ij+1}}{\partial F_k} r_{ij} - r_{ij+1} \frac{\partial r_{ij}}{\partial F_k} \right)}{r_{ij} r_{ij+1}}$$

$$\frac{\partial}{\partial F_k} \left( \cos(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} \right) = -\sin(\theta_i - \theta_j) \left( \frac{\partial \theta_i}{\partial F_k} - \frac{\partial \theta_j}{\partial F_k} \right) \beta_{ij} + \cos(\theta_i - \theta_j) \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial F_k}$$

Vzhledem k tomu, že v Lagrangeovském přístupu jsou proměnné  $\widehat{w}$  a  $F$  chápány jako nezávislé, přičemž vztah mezi nimi je zohledněn přičtením členu  $\lambda^T \cdot R(\widehat{w}, F)$  do cílové funkce, musí vždy platit:

$$\frac{\partial \widehat{w}_j}{\partial F_k} = 0$$

A proto

$$\frac{\partial}{\partial F_k} \sum_{j=1}^N \frac{\widehat{w}_j}{2\pi} \left( \sin(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} - \cos(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \widehat{w}_j \frac{\partial}{\partial F_k} \left( \sin(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} - \cos(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} \right)$$



$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial F_k} \left( \frac{\hat{w}_{N+1}}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left( \sin(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} + \cos(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} \right) \right) = \\ = \frac{\hat{w}_{N+1}}{2\pi} \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial F_k} \left( \sin(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} + \cos(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial R_l}{\partial F_k} = \frac{\partial}{\partial F_k} (A_{lm} \hat{w}_m - \hat{b}_l) = \frac{\partial A_{lm}}{\partial F_k} \hat{w}_m - \frac{\partial \hat{b}_l}{\partial F_k}$$

Derivace prvků matice A a vektoru  $\hat{b}$  lze získat semianalyticky podobným postupem jaký byl použit výše. V konečném důsledku lze dojít k tomu, že je potřeba spočítat numericky pouze následující derivace.

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial F_k}, \quad \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial F_k}, \quad \frac{\partial r_{ij}}{\partial F_k}$$

K numerickému vyčíslení těchto derivací bude využito přímo definice parciální derivace. Bylo by možné použít vícebodovou aproximaci parciální derivace vycházející z Taylorova rozvoje, ale výpočtové prostředí MATLAB pracuje dostatečně přesně a není příliš citlivé na dělení malými čísly. Z tohoto důvodu tento přístup postačuje, i když jsem si vědom jeho možné problematičnosti.

$$\frac{\partial r_{ij}}{\partial F_k} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{r_{ij}(F_1, \dots, F_{k-1}, F_k + h, F_{k+1}, \dots, F_m) - r_{ij}(F_1, \dots, F_m)}{h}$$

A nahrazením  $h \rightarrow 0^+$  konečnou diferencí  $\Delta$

$$\frac{\partial r_{ij}}{\partial F_k} \cong \frac{r_{ij}(F_1, \dots, F_{k-1}, F_k + \delta, F_{k+1}, \dots, F_m) - r_{ij}(F_1, \dots, F_m)}{\delta}$$

Vztahy pro zbylé dvě derivace jsou analogické.  $\delta$  musí být voleno s ohledem na numerické vlastnosti výpočtu (co nejmenší, ale ne příliš malé). Vzhledem k hodnotám ostatních veličin a s ohledem na numerické chování úlohy byla zvolena hodnota  $\delta = 10^{-6}$ , která se zpočátku během výpočtů osvědčila, nicméně následně musela být z důvodu stability snížena na  $\delta = 10^{-8}$ .



Derivace prvků matice A lze tedy získat jako

$$\frac{\partial A_{lm}}{\partial F_k} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial F_k} \left( \sin(\theta_l - \theta_m) \ln \frac{r_{lm+1}}{r_{lm}} + \cos(\theta_l - \theta_m) \beta_{lm} \right) \quad \text{pro } l, m = 1 \div N$$

$$\frac{\partial A_{lN+1}}{\partial F_k} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial F_k} \left( \cos(\theta_l - \theta_j) \ln \frac{r_{lj+1}}{r_{lj}} - \sin(\theta_l - \theta_j) \beta_{lj} \right) \quad \text{pro } l = 1 \div N$$

$$\frac{\partial A_{N+1,m}}{\partial F_k} = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1,N} \frac{\partial}{\partial F_k} \left( \sin(\theta_i - \theta_m) \beta_{im} - \cos(\theta_i - \theta_m) \ln \frac{r_{im+1}}{r_{im}} \right) \quad \text{pro } m = 1 \div N$$

$$\frac{\partial A_{N+1,N+1}}{\partial F_k} = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1,N} \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial F_k} \left( \sin(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} + \cos(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} \right)$$

Kde výraz  $i = 1, N$  znamená, že se počítá pouze přes první a poslední panel. Všechny derivace potřebné pro vyčíslení derivací prvků matice A již byly vyčísleny výše při derivaci členu  $\frac{\partial I}{\partial F_k}$ .

Derivace členů vektoru  $\hat{b}$  lze získat v následujícím tvaru.

$$\frac{\partial \hat{b}_l}{\partial F_k} = \frac{\partial}{\partial F_k} (\sin(\theta_l - \alpha)) = \cos(\theta_l - \alpha) \frac{\partial \theta_l}{\partial F_k} \quad \text{pro } l = 1 \div N$$

$$\frac{\partial \hat{b}_{N+1}}{\partial F_k} = -\frac{\partial}{\partial F_k} (\cos(\theta_1 - \alpha) + \cos(\theta_N - \alpha))$$

Derivace  $\cos(\theta_i - \alpha)$  byly již také vypočteny dříve.

Zavedme nyní pro účely programování pomocné proměnné

$$dIdFk1_i = \frac{\partial}{\partial F_k} \cos(\theta_i - \alpha) = -\sin(\theta_i - \alpha) \frac{\partial \theta_i}{\partial F_k}$$

$$dIdFk2_{ij} = \frac{\partial}{\partial F_k} (\sin(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij}) = \cos(\theta_i - \theta_j) \left( \frac{\partial \theta_i}{\partial F_k} - \frac{\partial \theta_j}{\partial F_k} \right) \beta_{ij} + \sin(\theta_i - \theta_j) \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial F_k}$$

$$\begin{aligned} dIdFk3_{ij} &= \frac{\partial}{\partial F_k} \left( \cos(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} \right) = \\ &= -\sin(\theta_i - \theta_j) \left( \frac{\partial \theta_i}{\partial F_k} - \frac{\partial \theta_j}{\partial F_k} \right) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} + \cos(\theta_i - \theta_j) \frac{\left( \frac{\partial r_{ij+1}}{\partial F_k} r_{ij} - r_{ij+1} \frac{\partial r_{ij}}{\partial F_k} \right)}{r_{ij} r_{ij+1}} \end{aligned}$$



$$dIdFk4_{ij} = \frac{\partial}{\partial F_k} \left( \sin(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} \right) =$$

$$= \cos(\theta_i - \theta_j) \left( \frac{\partial \theta_i}{\partial F_k} - \frac{\partial \theta_j}{\partial F_k} \right) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} + \sin(\theta_i - \theta_j) \frac{\left( \frac{\partial r_{ij+1}}{\partial F_k} r_{ij} - r_{ij+1} \frac{\partial r_{ij}}{\partial F_k} \right)}{r_{ij} r_{ij+1}}$$

$$dIdFk5_{ij} = \frac{\partial}{\partial F_k} (\cos(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij}) = -\sin(\theta_i - \theta_j) \left( \frac{\partial \theta_i}{\partial F_k} - \frac{\partial \theta_j}{\partial F_k} \right) \beta_{ij} + \cos(\theta_i - \theta_j) \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial F_k}$$

Derivaci bezrozměrové tečné rychlosti a všechny ostatní derivace potřebné pro vyčíslení gradientu zapíšeme pomocí pomocných proměnných.

$$\frac{\partial \hat{c}_{ti}}{\partial F_k} = \frac{\partial}{\partial F_k} \left[ \cos(\theta_i - \alpha) + \sum_{j=1}^N \frac{\hat{w}_j}{2\pi} \left( \sin(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} - \cos(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\hat{w}_{N+1}}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left( \sin(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} + \cos(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} \right) \right]$$

$$\frac{\partial \hat{c}_{ti}}{\partial F_k} = dIdFk1_i + \sum_{j=1}^N \frac{\hat{w}_j}{2\pi} (dIdFk2_{ij} - dIdFk3_{ij}) + \frac{\hat{w}_{N+1}}{2\pi} \sum_{j=1}^N (dIdFk4_{ij} + dIdFk5_{ij})$$

$$\frac{\partial \hat{c}_{ti}}{\partial F_k} = dIdFk1_i + \sum_{j=1}^N \left[ \frac{\hat{w}_j}{2\pi} (dIdFk2_{ij} - dIdFk3_{ij}) + \frac{\hat{w}_{N+1}}{2\pi} (dIdFk4_{ij} + dIdFk5_{ij}) \right]$$

$$\frac{\partial A_{lm}}{\partial F_k} = \frac{1}{2\pi} (dIdFk4_{lm} + dIdFk5_{lm}) \quad \text{pro } l, m = 1 \div N$$

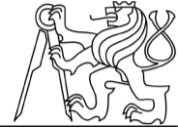
$$\frac{\partial A_{lN+1}}{\partial F_k} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N (dIdFk3_{lj} - dIdFk2_{lj}) \quad \text{pro } l = 1 \div N$$

$$\frac{\partial A_{N+1,m}}{\partial F_k} = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1,N} (dIdFk2_{im} - dIdFk3_{im}) \quad \text{pro } m = 1 \div N$$

$$\frac{\partial A_{N+1,N+1}}{\partial F_k} = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1,N} \sum_{j=1}^N (dIdFk4_{ij} + dIdFk5_{ij})$$

$$\frac{\partial \hat{b}_l}{\partial F_k} = \cos(\theta_l - \alpha) \frac{\partial \theta_l}{\partial F_k}$$

$$\frac{\partial \hat{b}_{N+1}}{\partial F_k} = -(dIdFk1_1 + dIdFk1_N)$$



Tímto obdržíme vyčíslený k-tý prvek gradientu

$$G_k = \frac{\partial \phi}{\partial F_k} = \frac{\partial I}{\partial F_k} + \lambda_l \cdot \frac{\partial R_l}{\partial F_k}$$

$$\frac{\partial I}{\partial F_k} = 2 \sum_{i=1}^N \Delta x_i \hat{c}_{ti} \frac{\partial \hat{c}_{ti}}{\partial F_k}$$

$$G_k = 2 \sum_{i=1}^N \Delta x_i \hat{c}_{ti} \frac{\partial \hat{c}_{ti}}{\partial F_k} + \lambda_l \cdot \left( \frac{\partial A_{lm}}{\partial F_k} \hat{w}_m - \frac{\partial \hat{b}_l}{\partial F_k} \right)$$

Udatování konfigurace profilu

$$F_{(n+1)} = F_{(n)} + \zeta G$$

Kde  $\zeta$  je velikost iteračního kroku. Vzhledem ke kladnému znaménku se parametry mění ve směru gradientu, tzn. ve směru nejrychlejšího růstu cílové funkce (součinitele vztlaku). Pro výpočet jsem se rozhodl použít  $\zeta$  v následujícím tvaru.

$$\zeta = \frac{\zeta_0}{\|G\|}$$

Tento tvar je ekvivalentní použití normovaného (jednotkového) gradientu. Z důvodů popsaných v kapitole 8.1 je použití takto definovaného  $\zeta$  výhodné z hlediska robustnosti a spolehlivosti algoritmu.

$$F_{(n+1)} = F_{(n)} + \zeta G = F_{(n)} + \frac{\zeta_0}{\|G\|} G = F_{(n)} + \zeta_0 g$$

$$g = \frac{G}{\|G\|}$$

Jmenovitá hodnota iteračního kroku  $\zeta_0$  musí být vhodně zvolena na základě zkušenosti a požadovaného zvýšení  $C_y$  (velké požadované zvýšení  $C_y$  znamená velkou hodnotu  $\zeta_0$ , což ale znamená také velkou modifikaci tvaru). Vzhledem k dříve odvozenému vztahu

$$dI = G \cdot dF \rightarrow \Delta I \cong G \cdot \Delta F = G \cdot G \zeta = \|G\|^2 \zeta$$

Je změna cílové funkce mezi iteracemi úměrná druhé mocnině normy gradientu. Při použití normovaného gradientu je změna cílové funkce úměrná pouze první mocnině, a dochází proto také k plynulejším změnám cílové funkce.

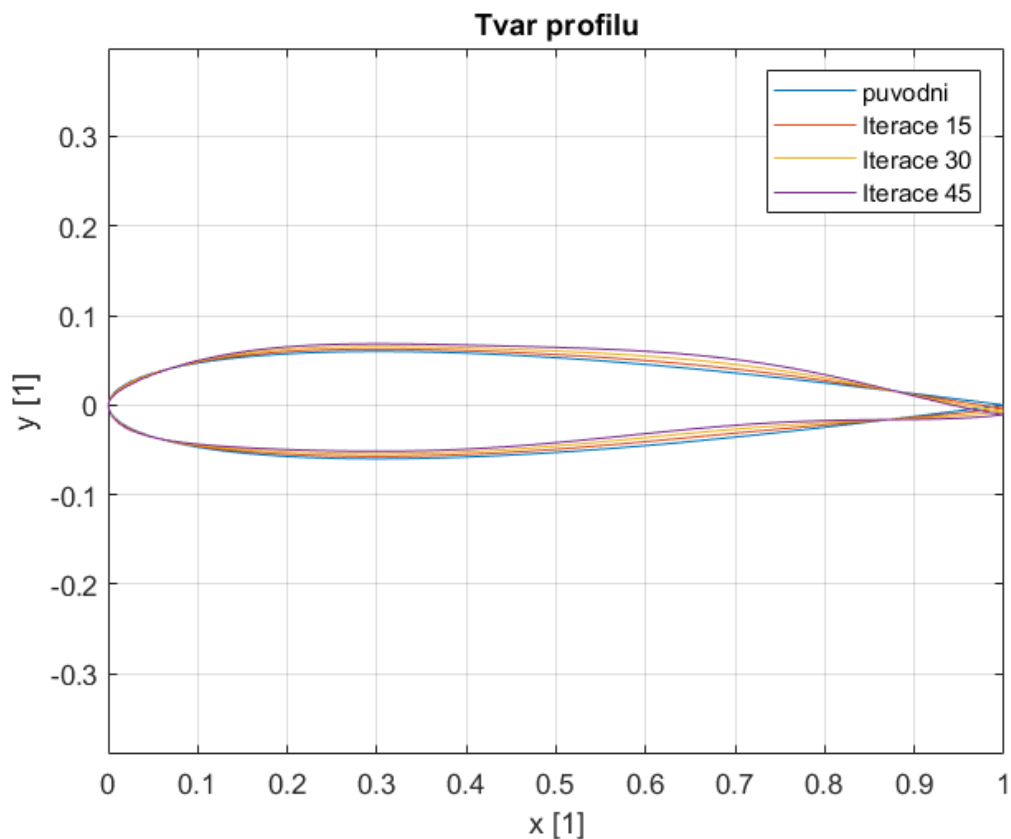
$$\Delta I \cong \|G\|^2 \zeta = \|G\| \zeta_0$$



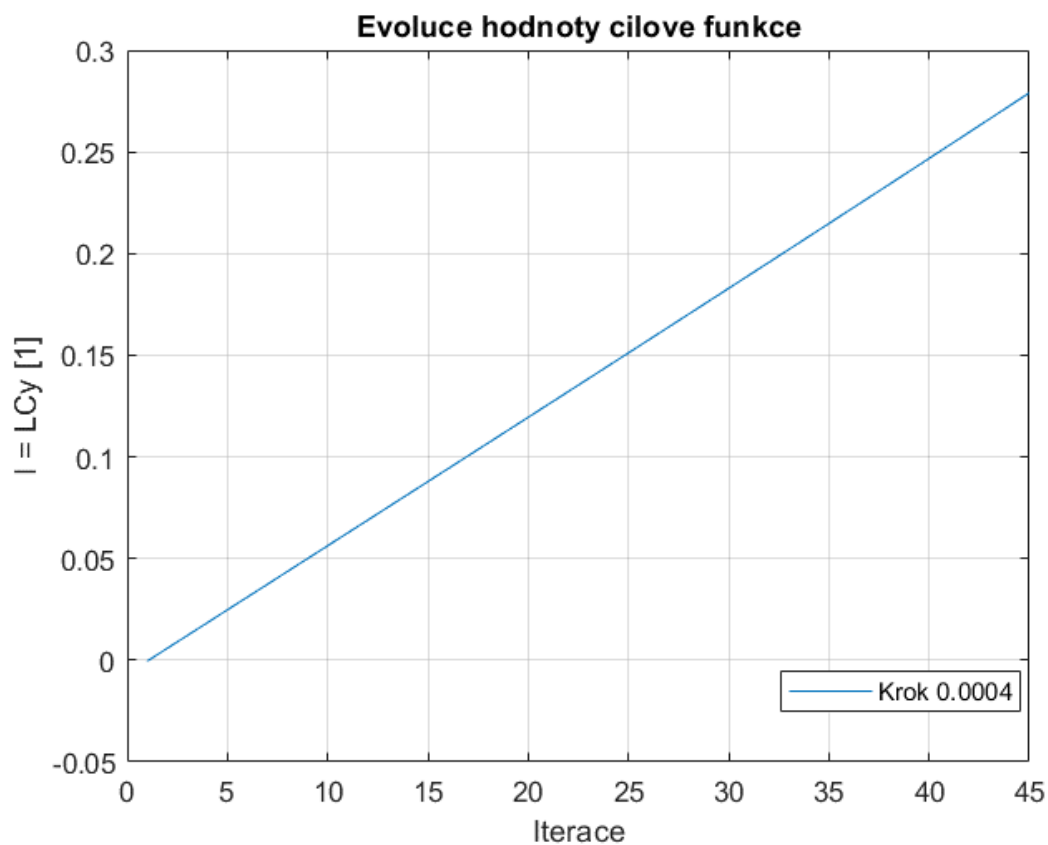


## **12.4 Příloha 8.7 – Evoluce tvaru profilu a cílové funkce – obrázky a grafy**

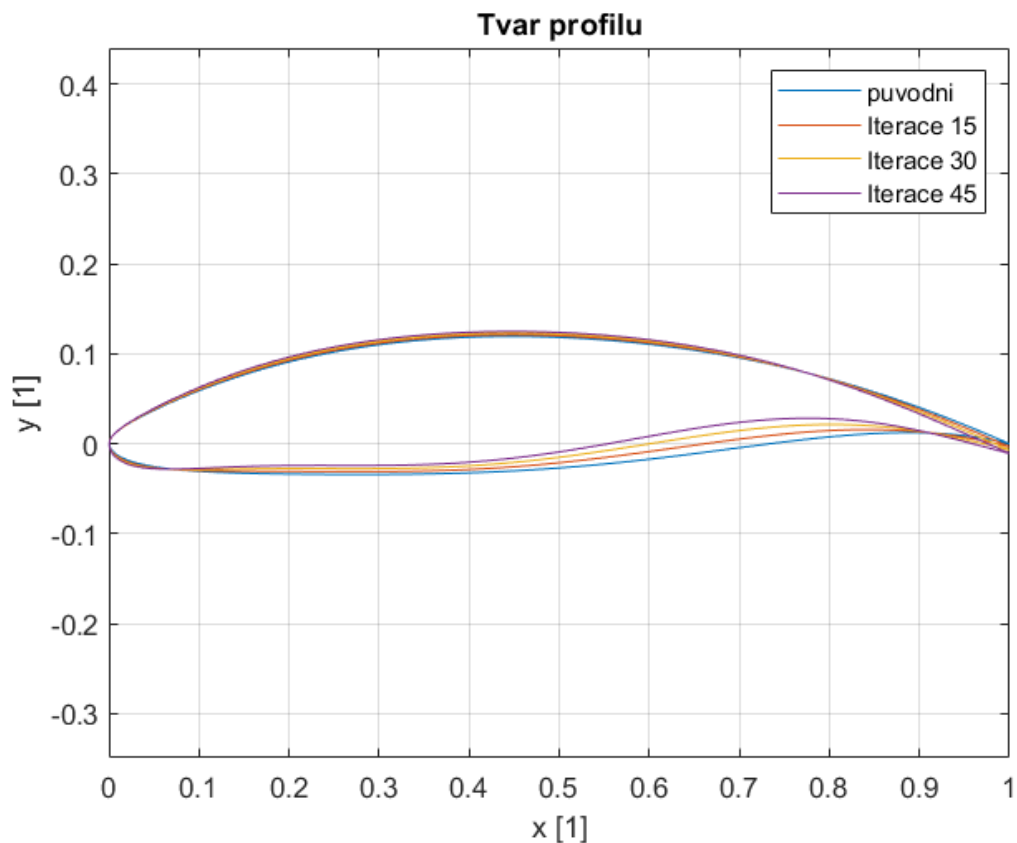
Na následujících stranách jsou ukázány změny tvaru profilů během optimalizace zobrazené v měřítku a vývoj hodnoty cílové funkce. Tato příloha je bezprostředním rozšířením kapitoly 8.7. Každá strana je věnována jednomu optimalizovanému profilu.



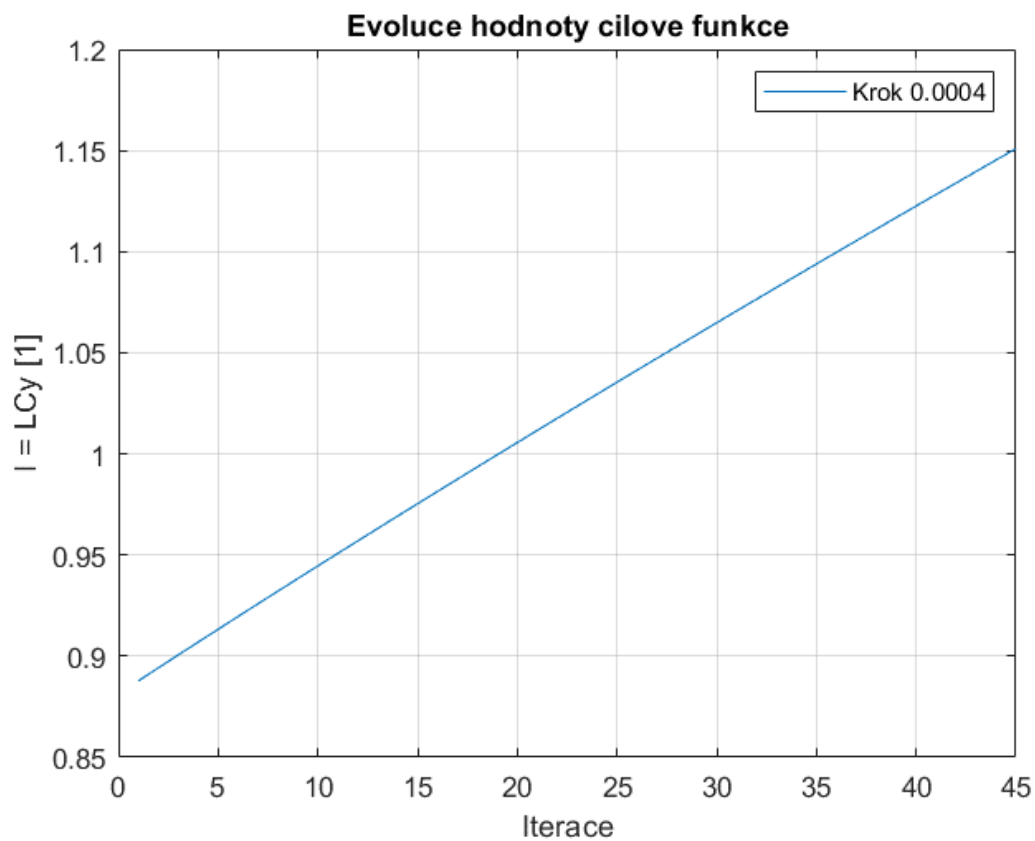
Obrázek 51 – Evoluce tvaru profilu NACA 0012 – zobrazení v měřítku



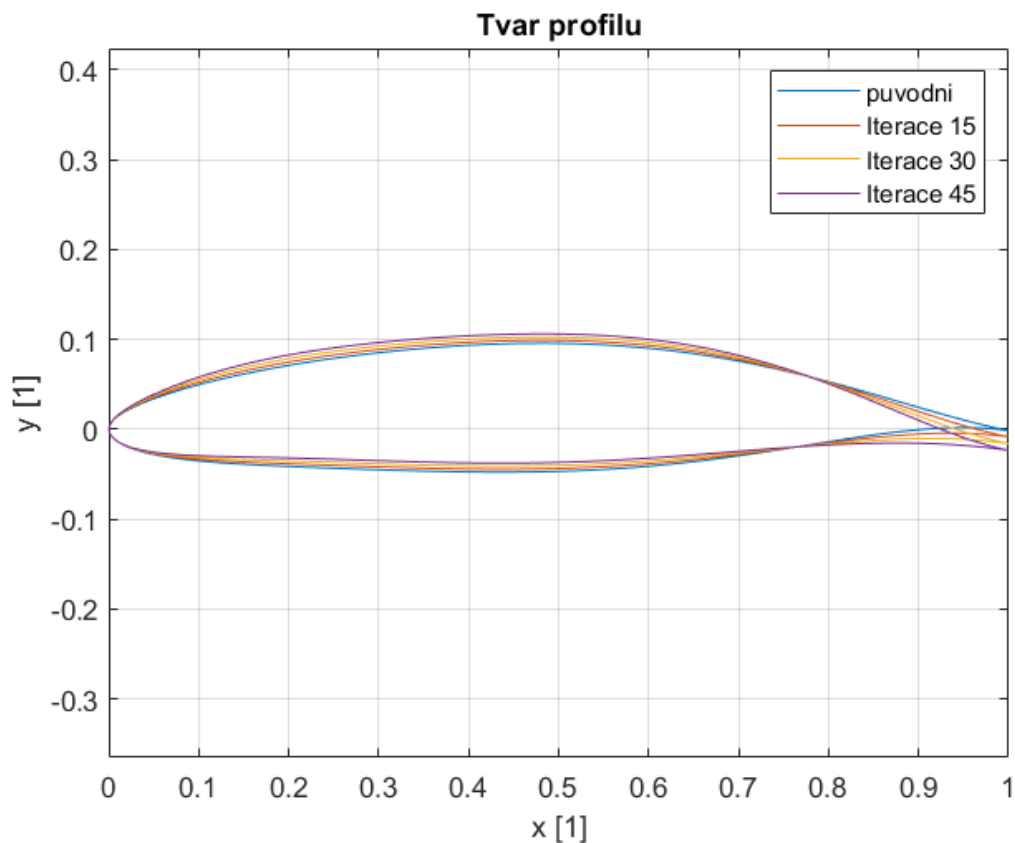
Obrázek 52 – Vývoj cílové funkce pro NACA 0012



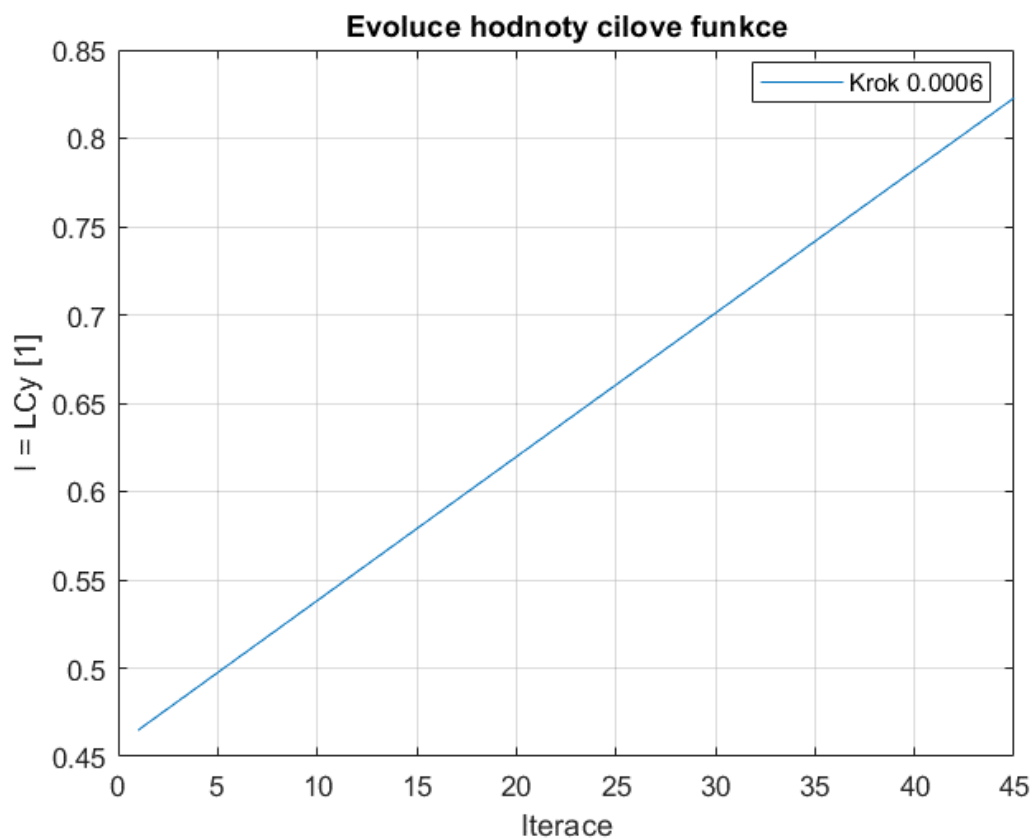
Obrázek 53 – Evoluce tvaru profilu NLF(1)-0115 – zobrazení v měřítku



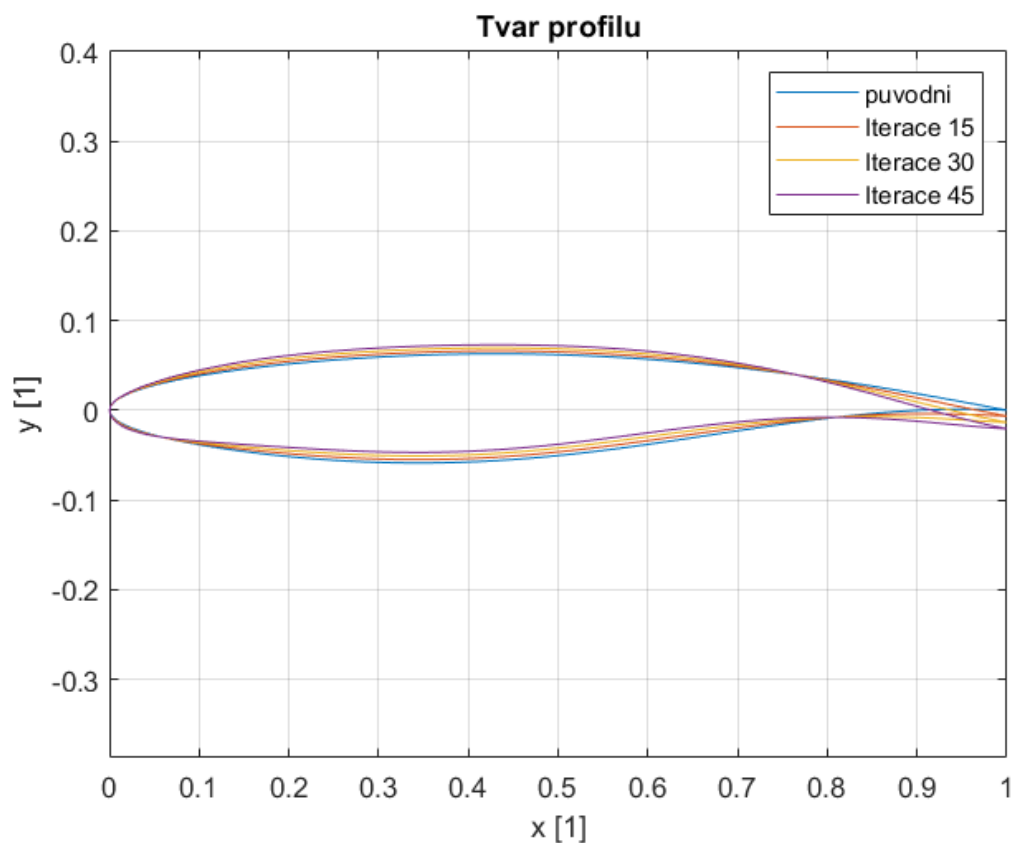
Obrázek 54 – Vývoj cilové funkce pro NLF(1)-0115



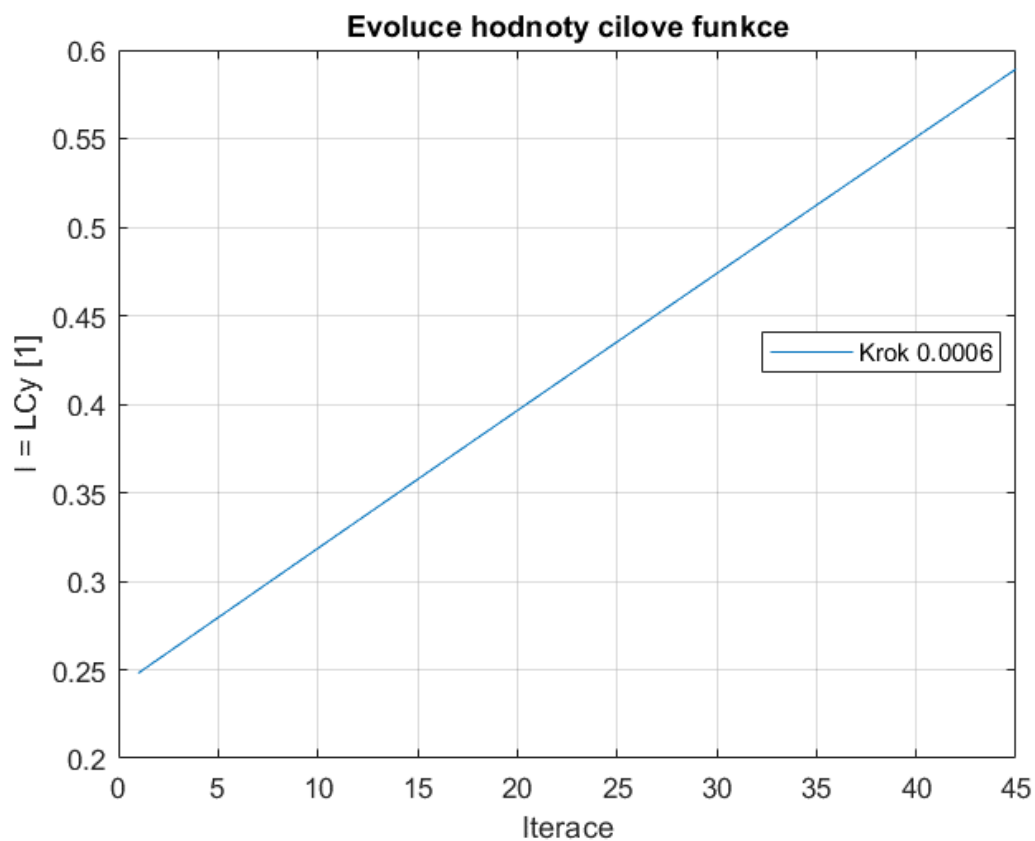
Obrázek 55 – Evoluce tvaru profilu NLF(1)-0414 – zobrazení v měřítku



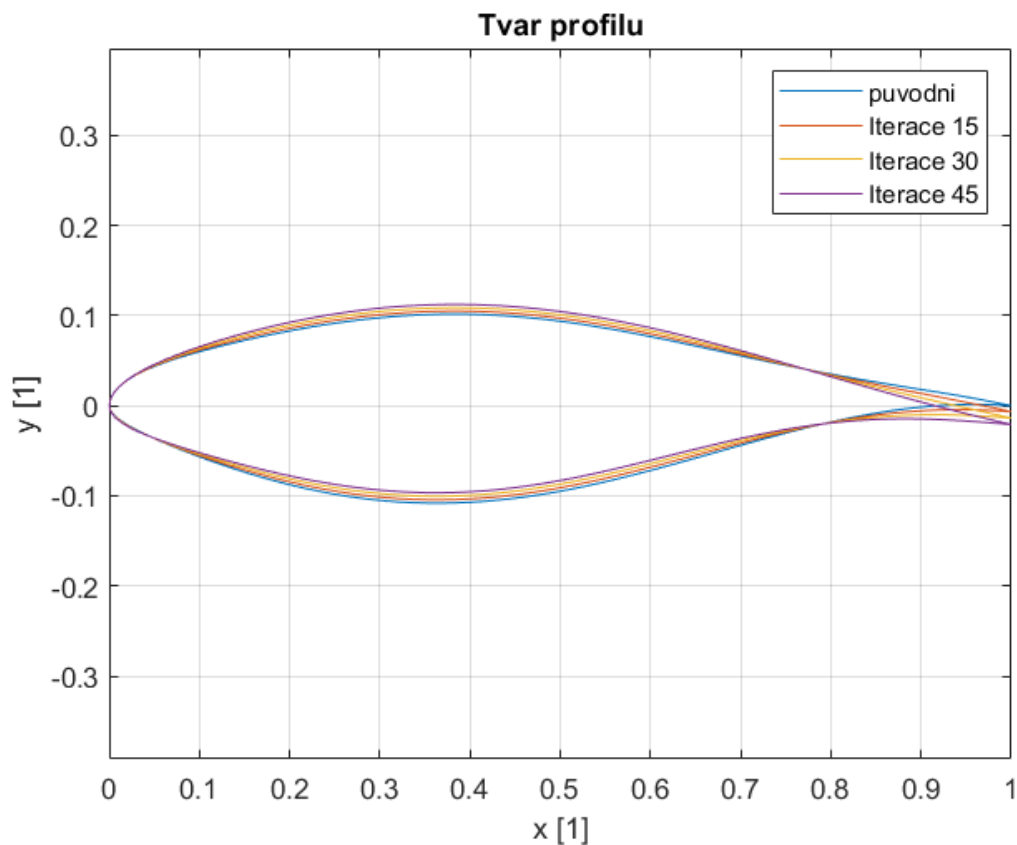
Obrázek 56 – Vývoj cilové funkce pro NLF(1)-0414



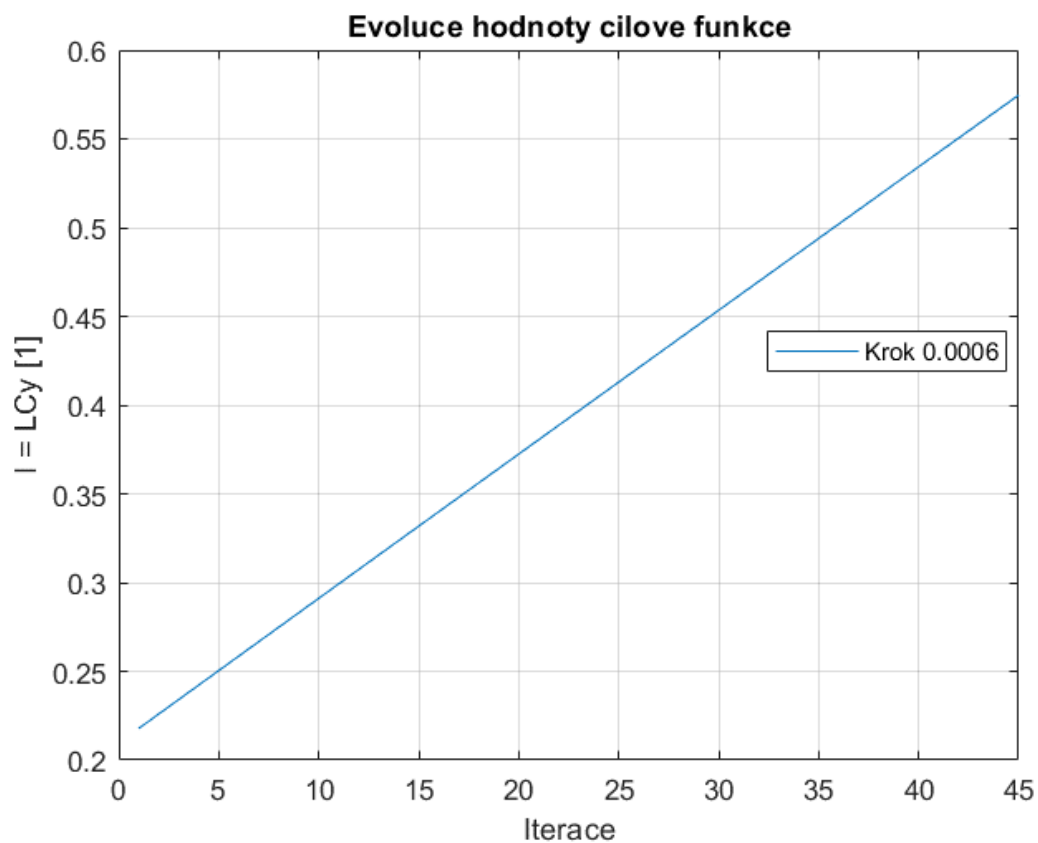
Obrázek 57 – Evoluce tvaru profilu RAE2822 – zobrazení v měřítku



Obrázek 58 – Vývoj cílové funkce pro RAE2822



Obrázek 59 – Evoluce tvaru profilu NREL S809 – zobrazení v měřítku



Obrázek 60 – Vývoj cílové funkce pro NREL S809



## 12.5 Příloha 9.1 – Letecké profily v nenávrhovém režimu

Tato příloha doplňuje kapitolu 9.1 o chování profilů v nenávrhovém režimu. Nenávrhovým režimem profilu je v tomto kontextu myšlen zejména let nižší rychlostí a při vyšším úhlu náběhu, než bylo uvažováno při návrhu. Tento režim nastává při provozu letadla zejména při vzletu, přistání a přiblížení na přistání. Tabulky níže ukazují benefit optimalizace za těchto podmínek. Provedení optimalizace stále zvyšuje součinitel vzlaku, ale u profilu NLF(1)-0414 je toto zvýšení vzlaku doprovázeno tak výrazným růstem součinitele odporu, že dojde k poklesu hodnoty poměru  $C_y/C_x$ . U profilu RAE2822 se tato hodnota sice nesníží, ale ani nezvýší. Nárůst  $C_x$  je tedy srovnatelný s růstem  $C_y$ . Toto chování je v přímém kontrastu s kapitolou 9.1, kde měla optimalizace příznivý (nebo v nejhorsím případě nulový) vliv na všechny charakteristiky profilu.

### 12.5.1 Profil NLF(1)-0414

	Matlab bez vlivu vazkosti	Xfoil bez vlivu vazkosti	Xfoil zohlednění vlivu vazkosti a stlačitelnosti		
$\alpha$ [°]	10	10	10	10	10
$Re$ [1]	---	---	$0,394 \cdot 10^6$	$3,454 \cdot 10^6$	$8,882 \cdot 10^6$
$Ma$ [1]	---	---	0,04	0,1	0,17
$C_y$ [1]	1,6323	1,6714	1,088	1,3085	1,3744
$C_x$ [1]	---	---	0,03048	0,01715	0,01436
$C_y/C_x$ [1]	---	---	35,69	76,3	95,72
$C_M$ [1]	---	- 0,1447	- 0,0433	- 0,0769	- 0,0836

Tabulka 27 – Porovnání různých metod výpočtu pro profil NLF(1)-0414 před optimalizací

	Matlab bez vlivu vazkosti	Xfoil bez vlivu vazkosti	Xfoil zohlednění vlivu vazkosti a stlačitelnosti		
$\alpha$ [°]	10	10	10	10	10
$Re$ [1]	---	---	$0,394 \cdot 10^6$	$3,454 \cdot 10^6$	$8,882 \cdot 10^6$
$Ma$ [1]	---	---	0,04	0,1	0,17
$C_y$ [1]	1,7611	1,8065	1,1613	1,3678	1,4345
$C_x$ [1]	---	---	0,03404	0,0202	0,01716
$C_y/C_x$ [1]	---	---	34,12	67,72	83,58
$C_M$ [1]	---	- 0,1648	- 0,0581	- 0,0857	- 0,092
Zlepšení $C_y$ absolutní [1]	0,1288	0,1351	0,0733	0,0593	0,0601
Zlepšení $C_y$ relativní [%]	7,89	8,08	6,74	4,53	4,37

Tabulka 28 – Porovnání různých metod výpočtu pro profil NLF(1)-0414 po optimalizaci



### 12.5.2 Profil RAE2822

	Matlab bez vlivu vazkosti	Xfoil bez vlivu vazkosti	Xfoil zohlednění vlivu vazkosti a stlačitelnosti		
			10	10	10
$\alpha$ [°]	10	10	10	10	10
$Re$ [1]	---	---	$0,394 \cdot 10^6$	$3,454 \cdot 10^6$	$8,882 \cdot 10^6$
$Ma$ [1]	---	---	0,04	0,1	0,17
$C_y$ [1]	1,4069	1,4316	1,1012	1,262	1,3098
$C_x$ [1]	---	---	0,03679	0,01395	0,01167
$C_y/C_x$ [1]	---	---	29,93	90,44	112,24
$C_M$ [1]	---	- 0,088	- 0,029	- 0,0542	- 0,0576

Tabulka 29 – Porovnání různých metod výpočtu pro profil RAE2822 před optimalizací

	Matlab bez vlivu vazkosti	Xfoil bez vlivu vazkosti	Xfoil zohlednění vlivu vazkosti a stlačitelnosti		
			10	10	10
$\alpha$ [°]	10	10	10	10	10
$Re$ [1]	---	---	$0,394 \cdot 10^6$	$3,454 \cdot 10^6$	$8,882 \cdot 10^6$
$Ma$ [1]	---	---	0,04	0,1	0,17
$C_y$ [1]	1,5291	1,5592	1,2062	1,364	1,4182
$C_x$ [1]	---	---	0,03786	0,01499	0,01257
$C_y/C_x$ [1]	---	---	31,86	90,99	112,8
$C_M$ [1]	---	- 0,1066	- 0,0454	- 0,0684	- 0,0726
Zlepšení $C_y$ absolutní [1]	0,1222	0,1276	0,105	0,102	0,1084
Zlepšení $C_y$ relativní [%]	8,69	8,91	9,54	8,08	8,28

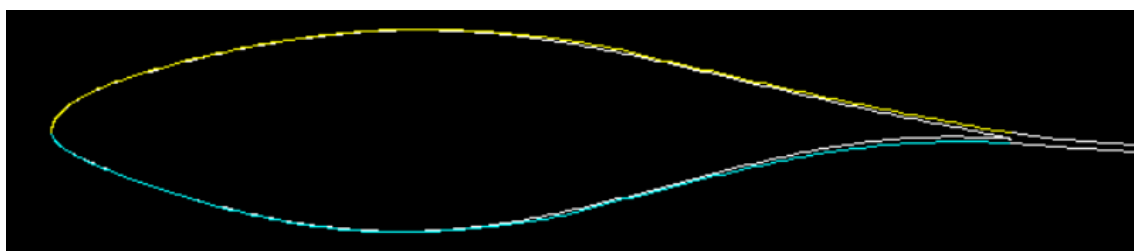
Tabulka 30 – Porovnání různých metod výpočtu pro profil RAE2822 po optimalizaci



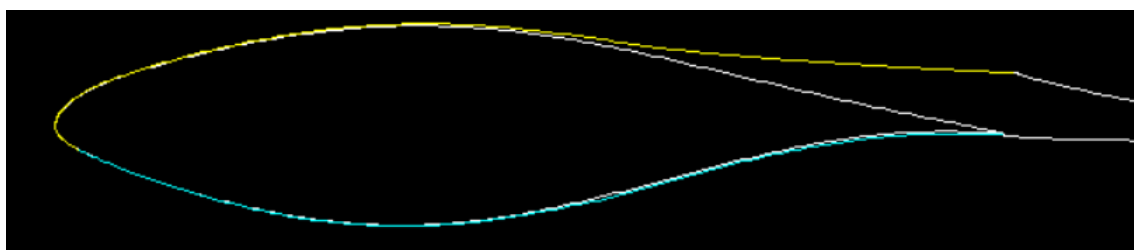


## 12.6 Příloha 9.2 – Odtržení u profilu NREL S809 – úhel náběhu 0 a 10°

Tato příloha vysvětluje velmi rozdílný přínos optimalizace profilu NREL S809 pro úhel náběhu 0 a 10°. Parametry proudění viz kapitola 9.2. Jedná se o obtékání profilu po provedení optimalizace. Odtržením proudění na horní povrchu profilu lze vysvětlit, proč pro úhel náběhu 10°, na rozdíl od úhlu náběhu 0°, optimalizace neposkytuje předpokládaný benefit. Odtržení je pro původní a optimalizovaný profil prakticky totožné. Odtržení proudění neguje jakékoli změny tvaru profilu v celé oblasti, kde proudění není přimknuté k profilu.



Obrázek 61 – Odtržení proudění na profilu NREL S809 – úhel náběhu 0°



Obrázek 62 – Odtržení proudění na profilu NREL S809 – úhel náběhu 10°



## 12.7 Příloha 9.3 – Poláry a ostatní charakteristiky profilů – grafy

Na následujících stranách jsou zobrazeny poláry a ostatní charakteristiky optimalizovaných profilů. Každému profilu přísluší 2 strany (4 grafy). Grafy byly zpracovány pro všechny profily s výjimkou NLF(1)-0115. Tento profil byl vynechán, protože tvar získaný z PARSEC parametrizace neodpovídá definičnímu tvaru. Tyto grafy obsahují charakteristiky profilů v podobě následujících závislostí.

$$C_y - C_x$$

$$C_y - \alpha$$

$$C_x - \alpha$$

$$C_y/C_x - \alpha$$

Všechny tyto charakteristiky jsou vykresleny pro následující hodnoty podobnostních čísel.

$$Re = 10^6$$

$$Ma = 0$$

Tyto hodnoty byly voleny z důvodu možnosti porovnání výsledků s charakteristikami v dostupných zdrojích. Toto porovnání a graf momentového součinitele profilů  $C_m - \alpha$  viz příložený excel.

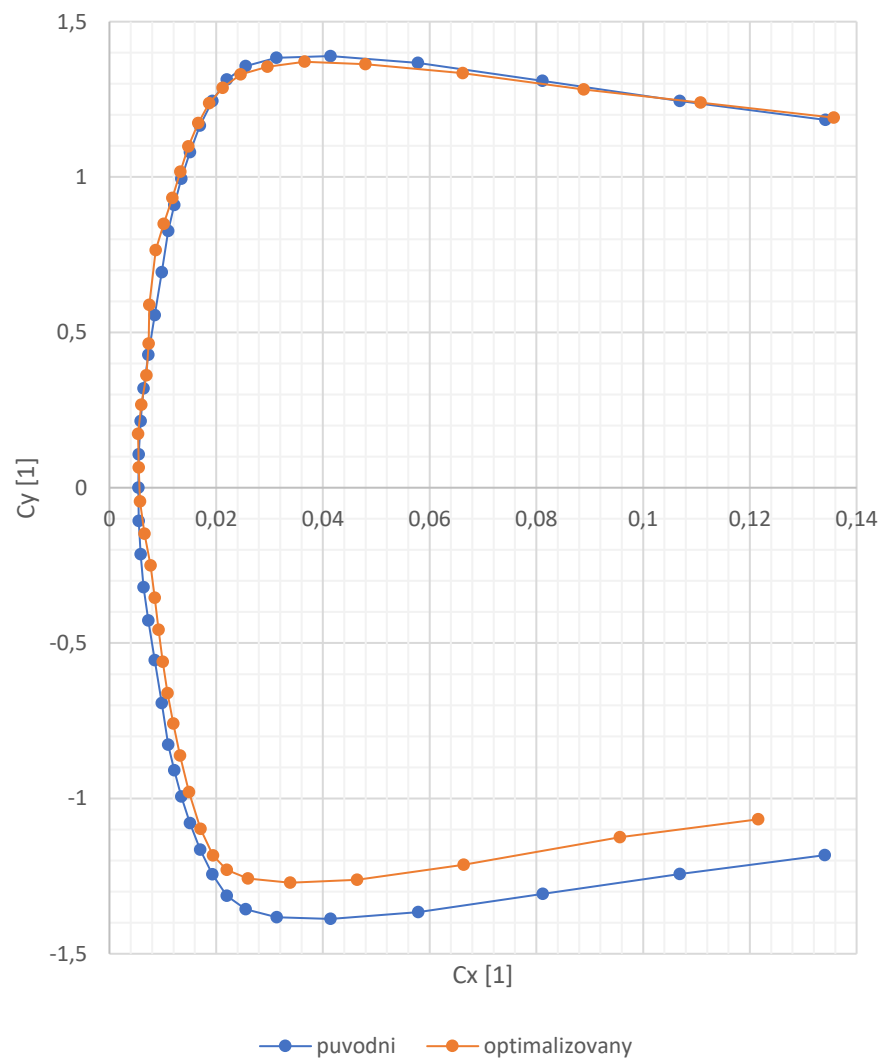
Soubor obsahující všechny níže uvedené grafy, grafy průběhů momentového součinitele, zdrojová data použitá pro vykreslení všech grafů, tvary profilů (jak porovnání návrhového tvaru s tvarem získaným z PARSEC parametrizace, tak porovnání tvarů na začátku a na konci optimalizace – oba získány z PARSEC parametrů) a porovnání získaných průběhů z Xfoilu s dostupnými daty:

**polar.xlsx**

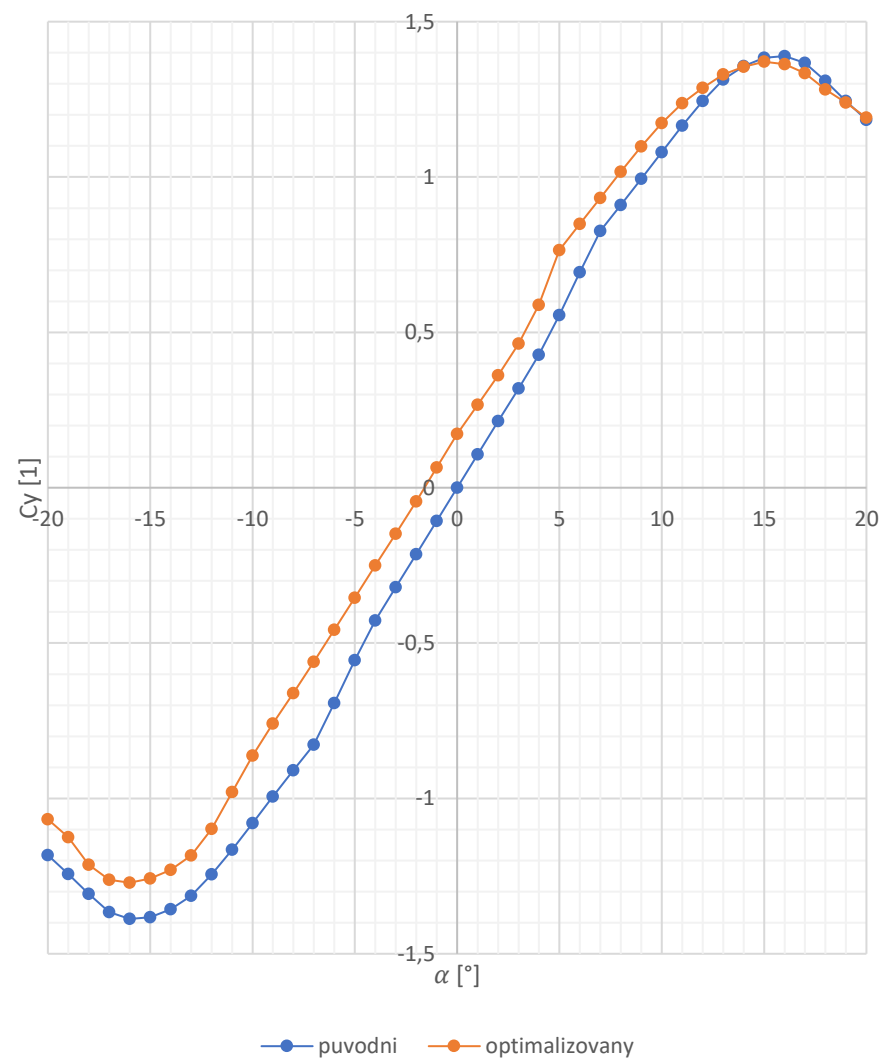
Soubor je součástí elektronické formy příloh práce. Optimalizace profilů byla provedena pro úhel náběhu  $0^\circ$ . Bylo provedeno 50 iterací optimalizace s krokem 0,0002.

Tato příloha je přímým rozšířením a doplněním kapitoly 9.3.

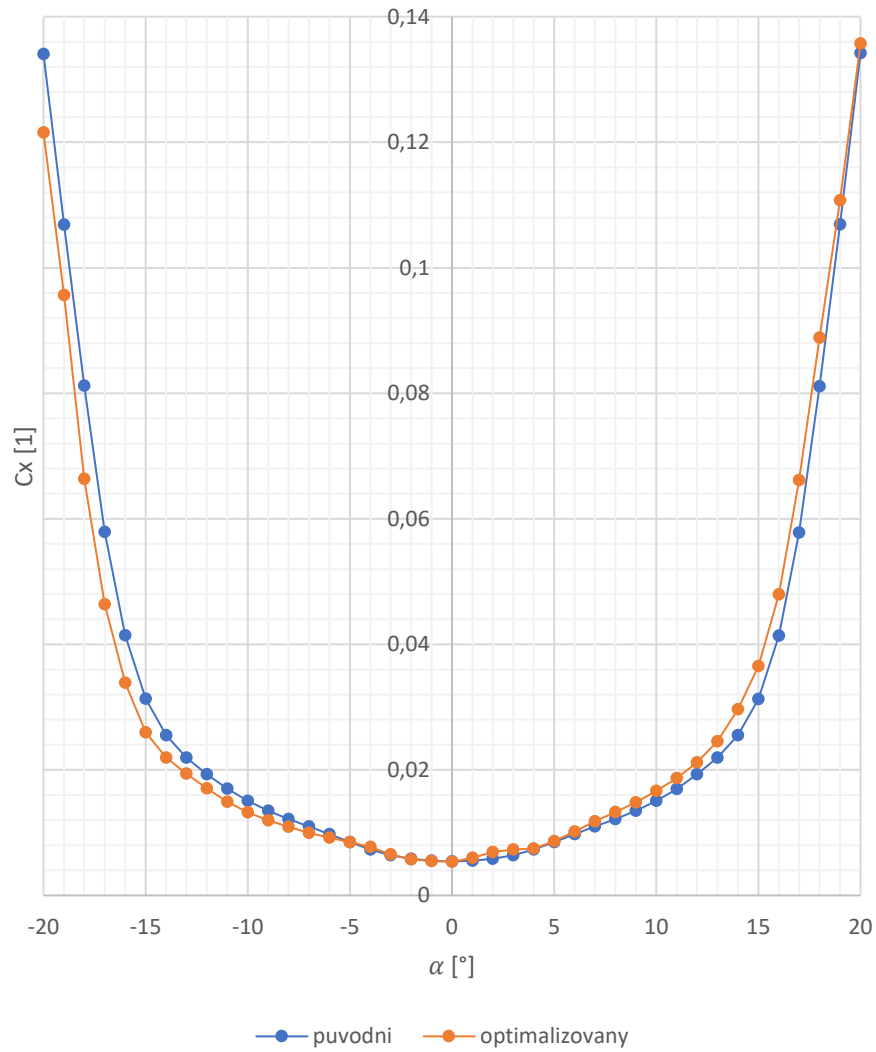
Polára NACA 0012



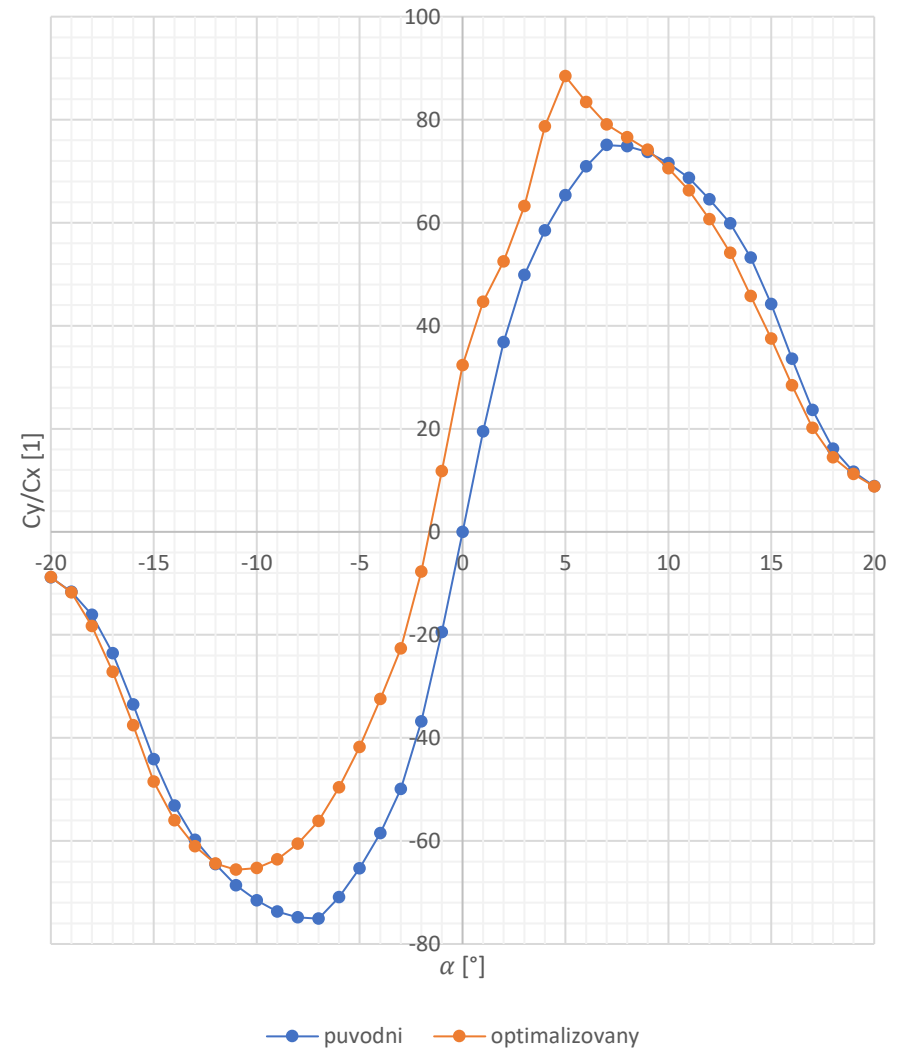
NACA 0012 - Závislost  $C_y$  na úhlu náběhu



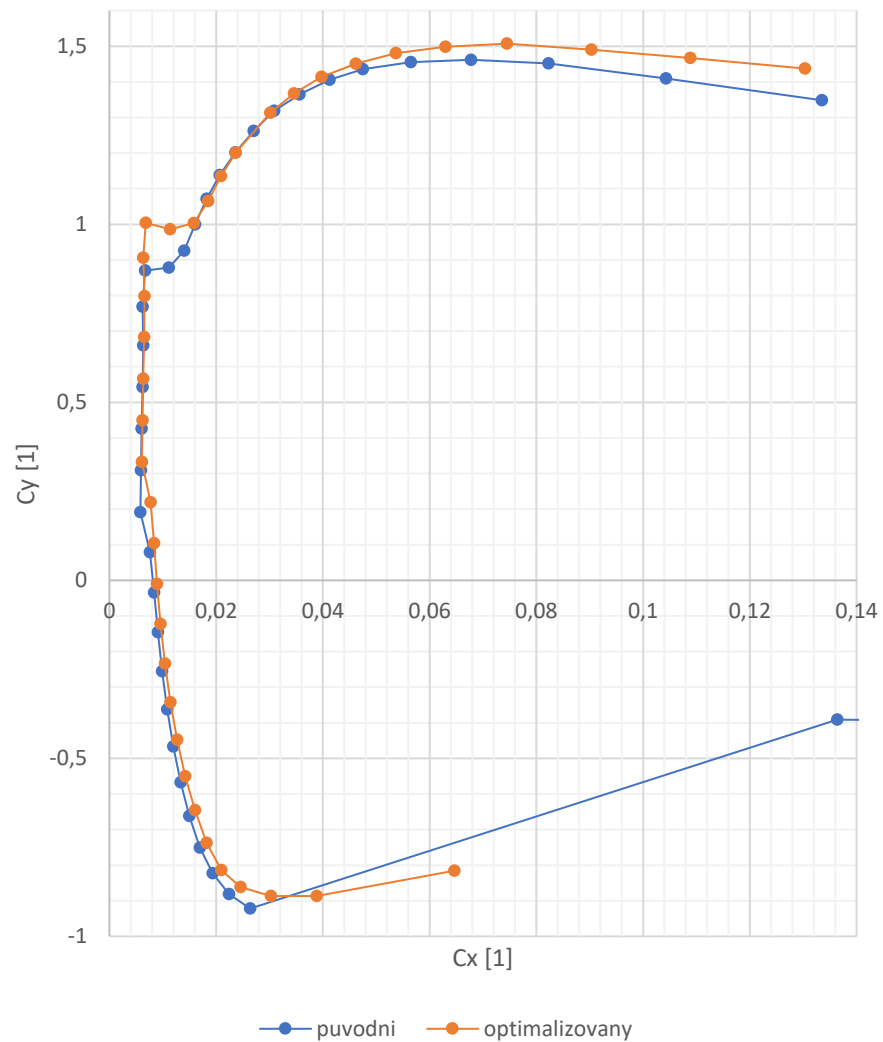
NACA 0012 - Závislost  $C_x$  na úhlu náběhu



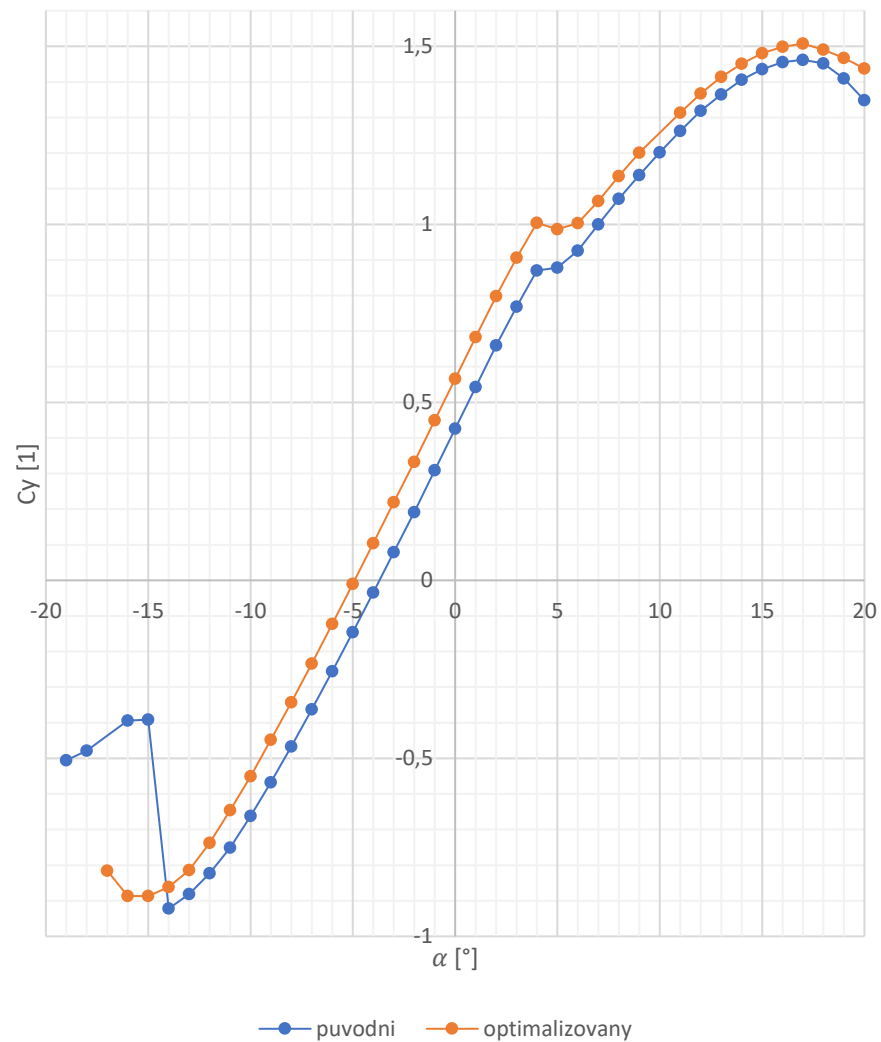
NACA 0012 - Závislost  $C_y/C_x$  na úhlu náběhu



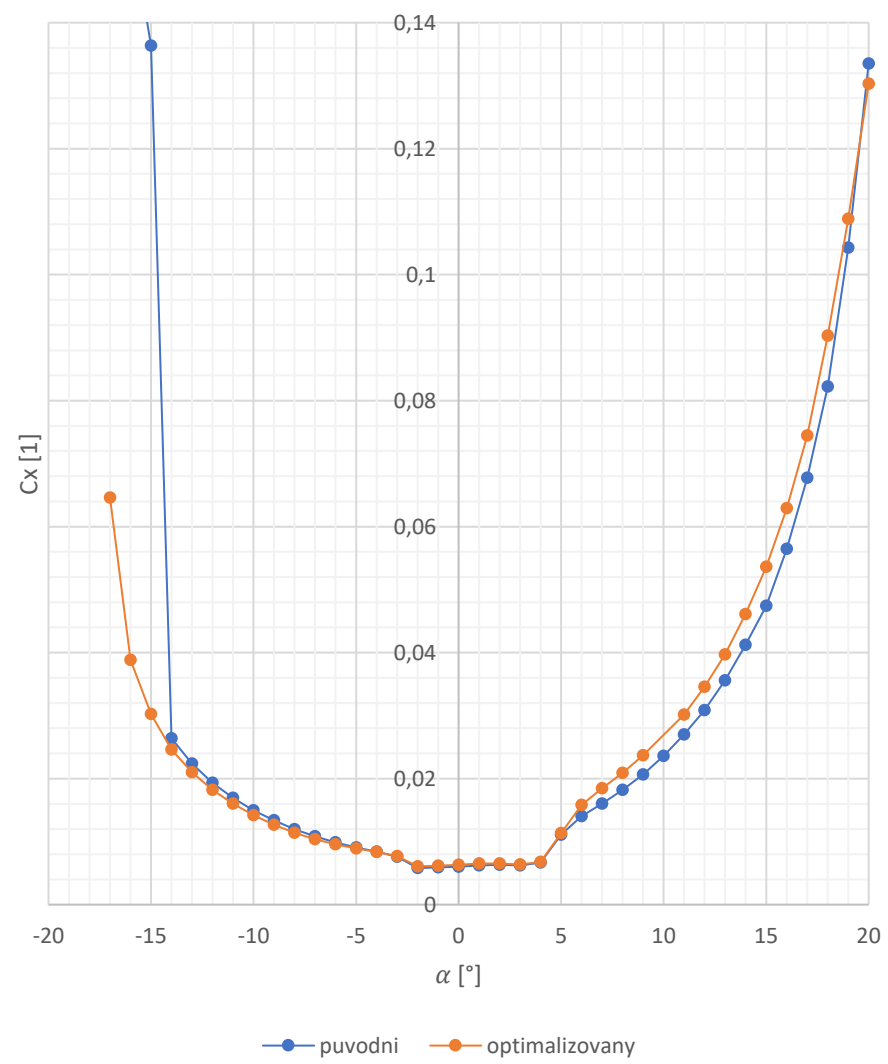
Polára NLF(1)-0414



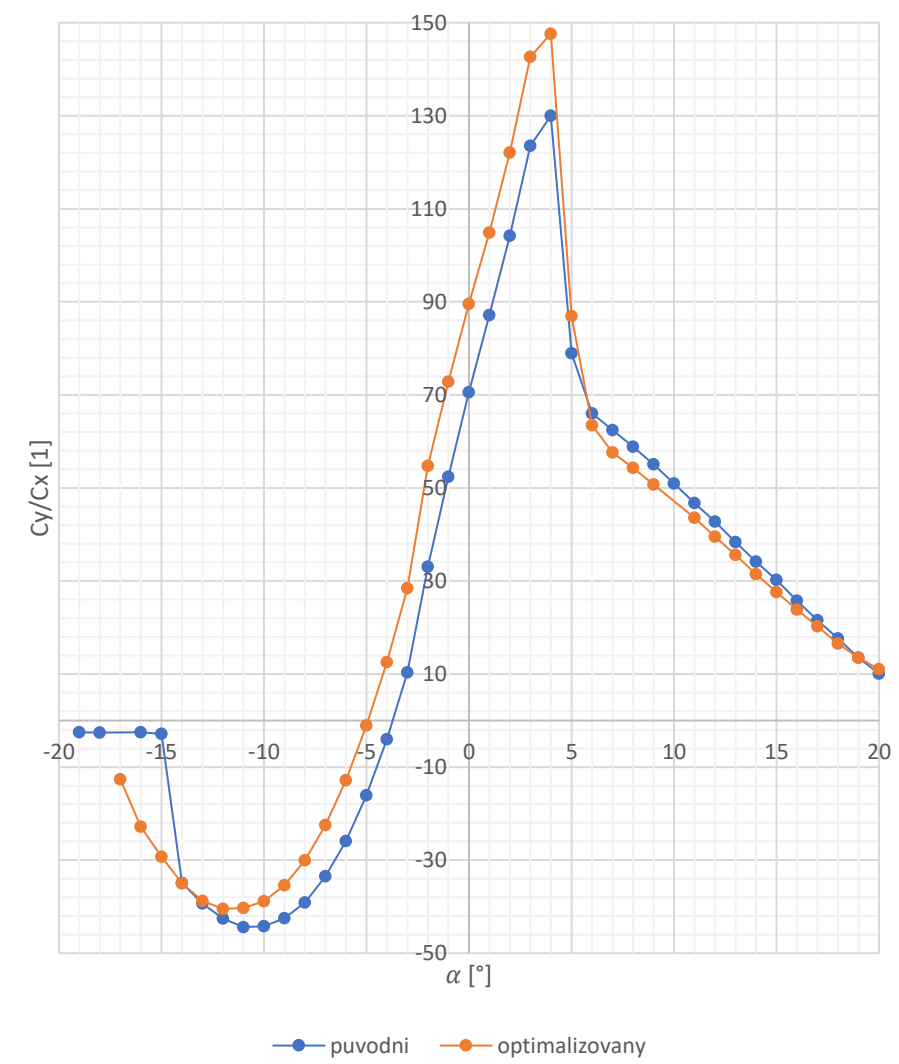
NLF(1)-0414 - Závislost  $C_y$  na úhlu náběhu



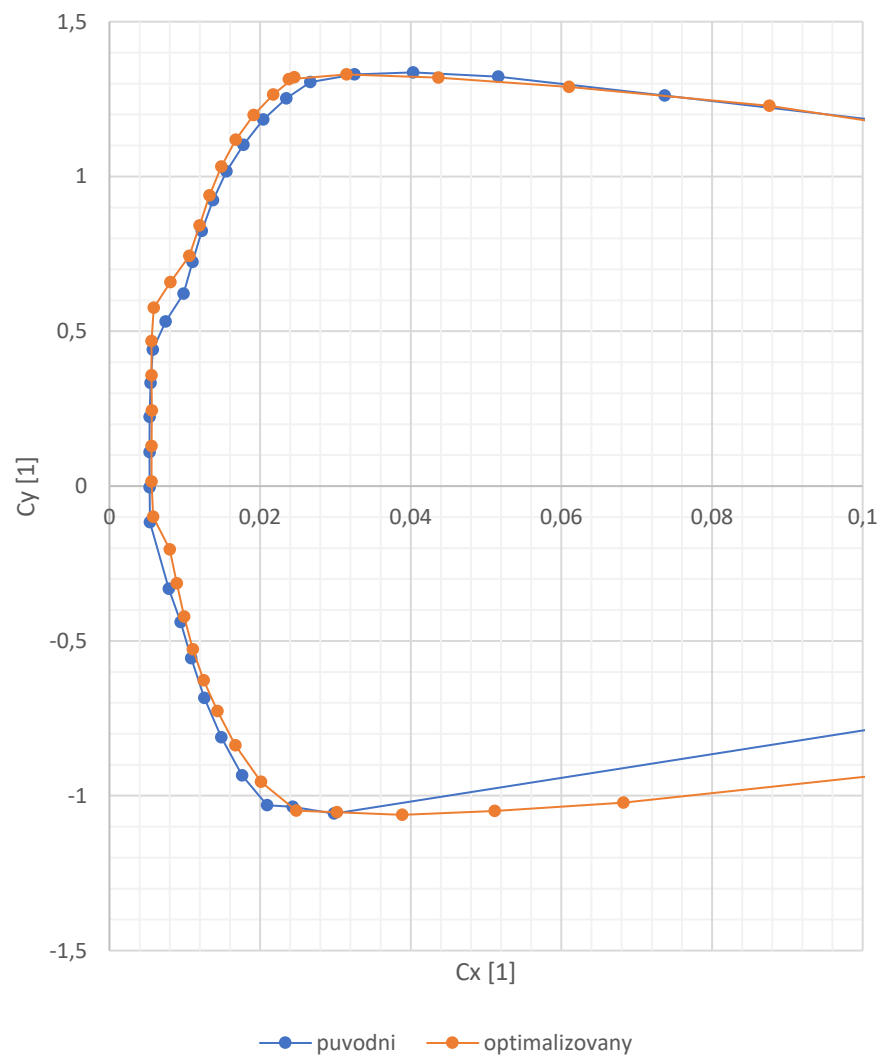
NLF(1)-0414 - Závislost  $C_x$  na úhlu náběhu



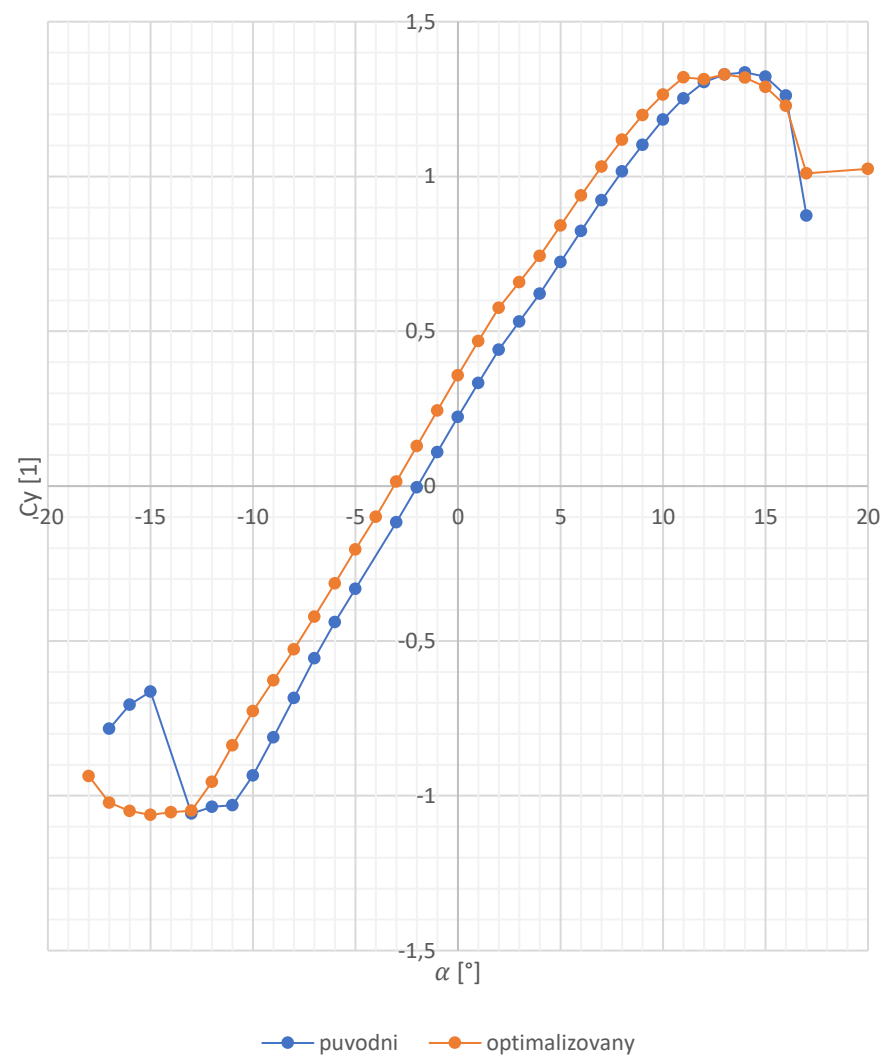
NLF(1)-0414 - Závislost  $C_y/C_x$  na úhlu náběhu



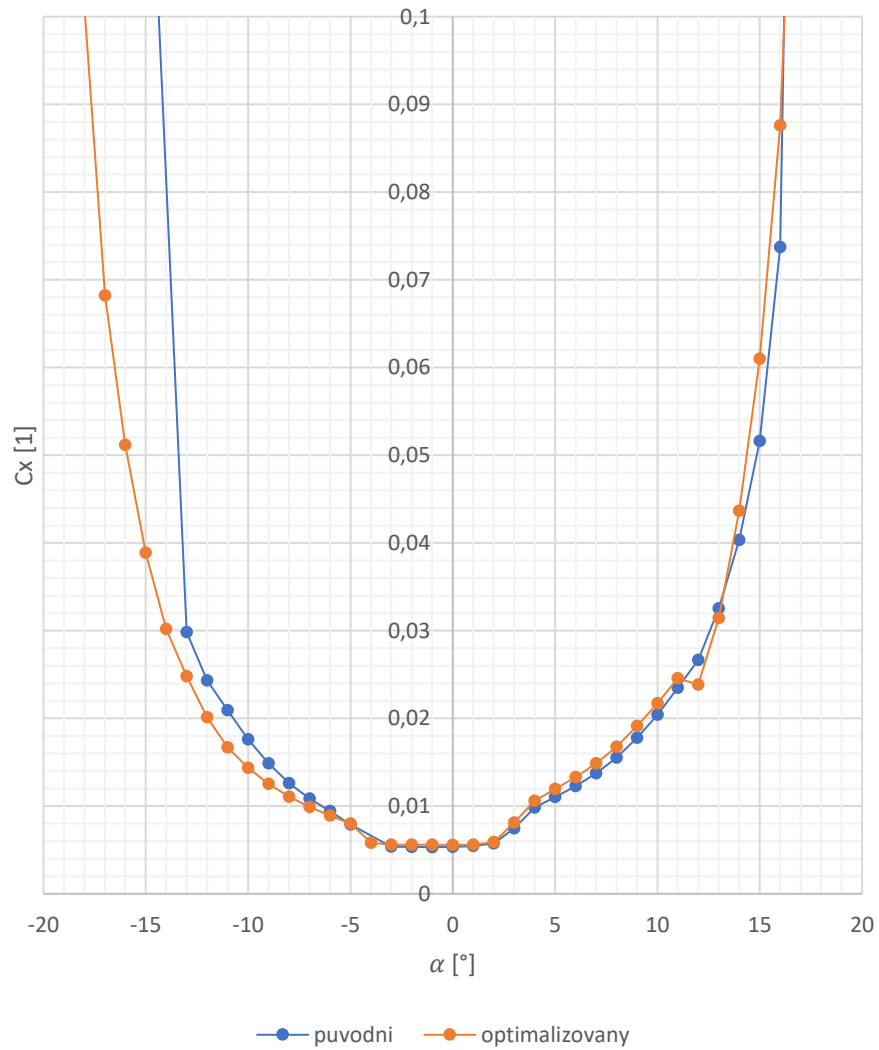
Polára RAE2822



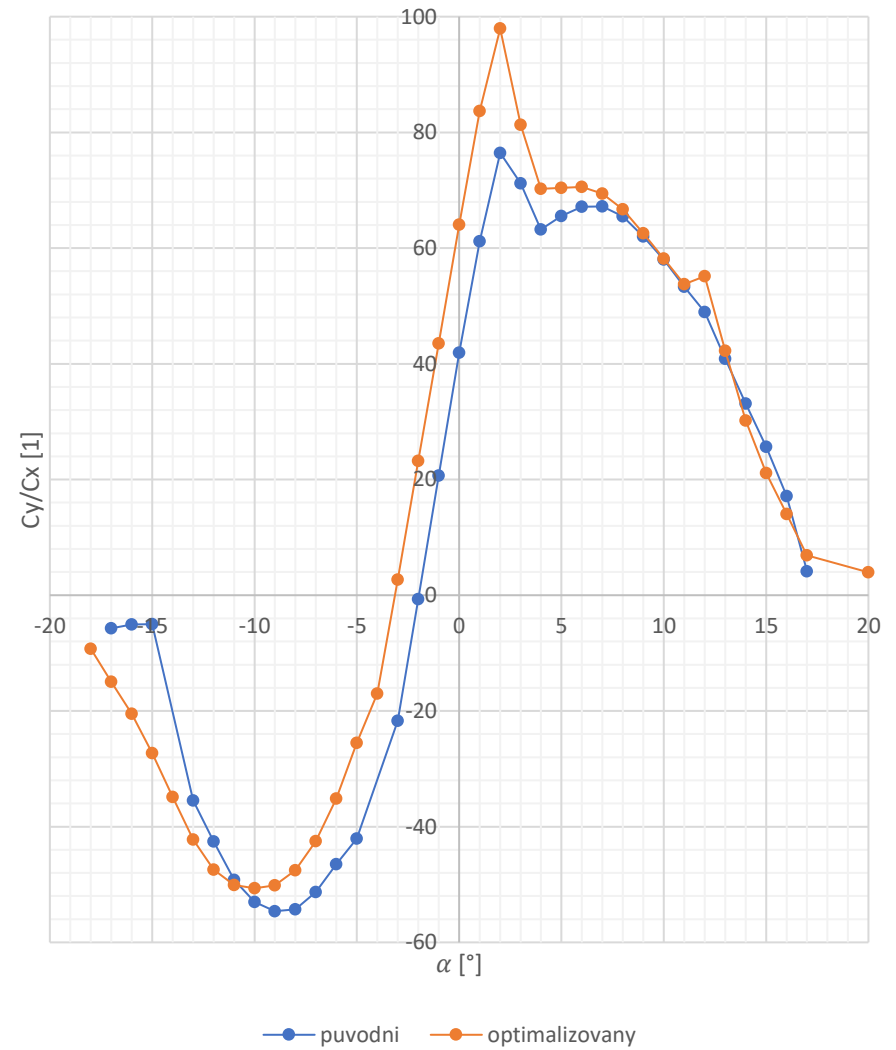
RAE2822 - Závislost  $C_y$  na úhlu náběhu



RAE2822 - Závislost  $C_x$  na úhlu náběhu

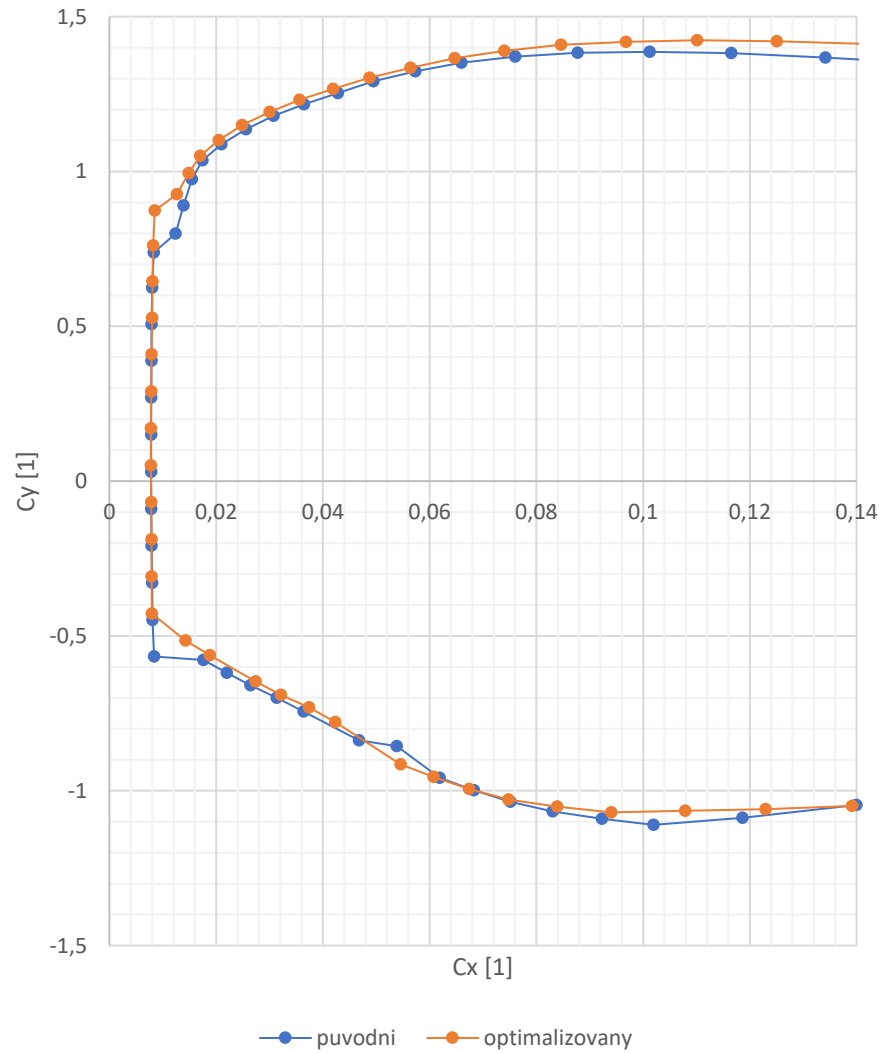


RAE2822 - Závislost  $C_y/C_x$  na úhlu náběhu

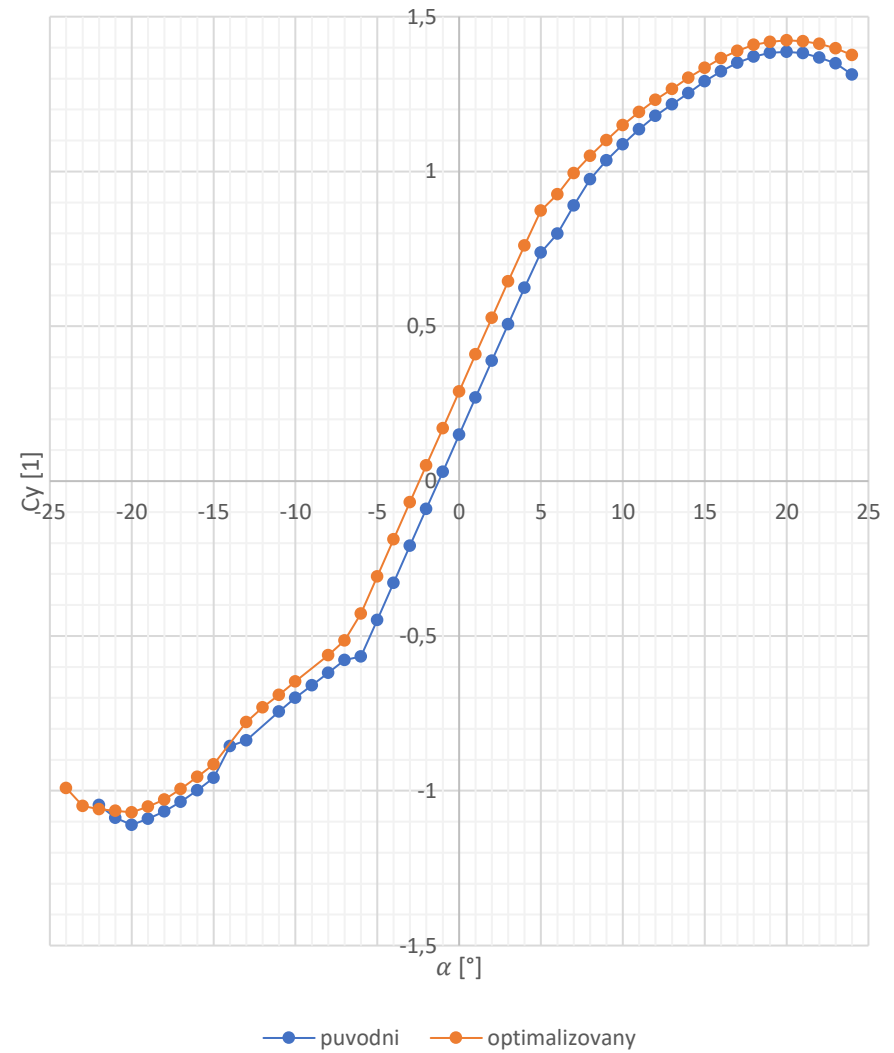




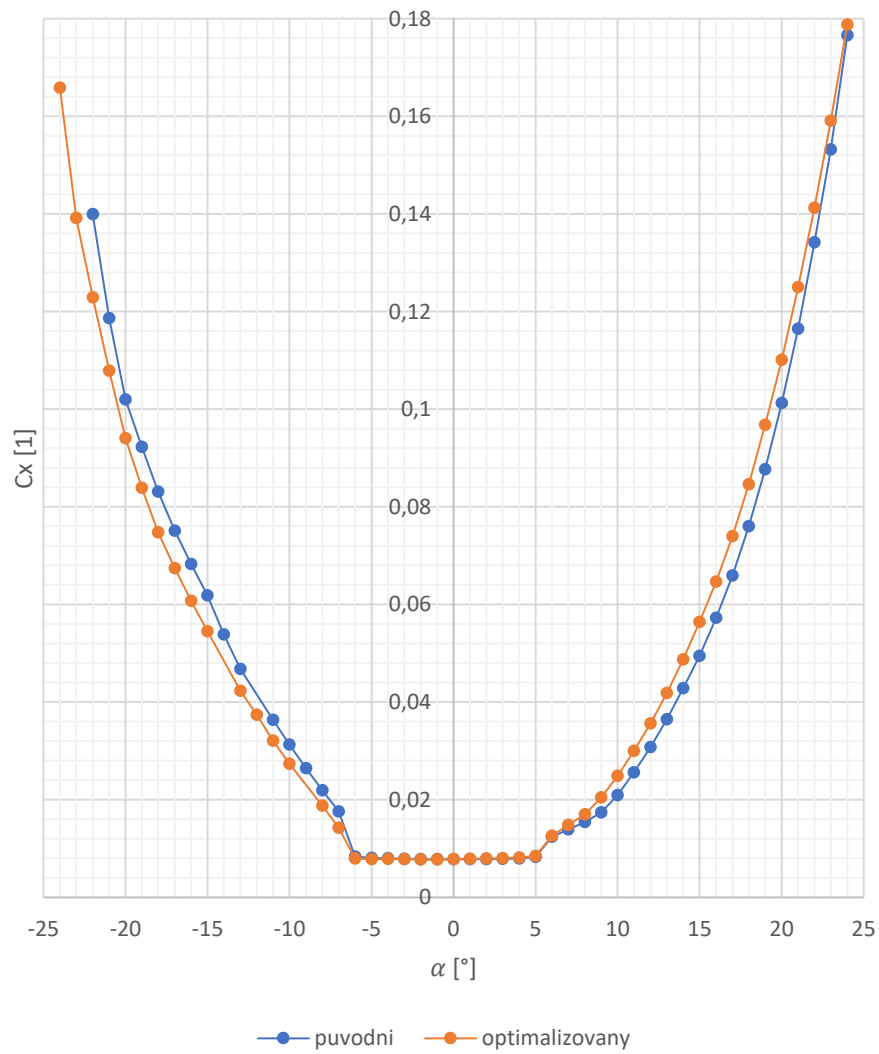
Polára NREL S809



NREL S809 - Závislost  $C_y$  na úhlu náběhu



NREL S809 - Závislost  $C_x$  na úhlu náběhu



NREL S809 - Závislost  $C_y/C_x$  na úhlu náběhu

