

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta strojní

Ústav technické matematiky

Obor: bez oboru



Metoda konečných prvků pro aproximaci nevířivého proudění tekutiny

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vypracoval: Adam Střihavka
Vedoucí práce: doc. RNDr. Petr Sváček, Ph.D.
Rok: 2023

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Střihavka** Jméno: **Adam** Osobní číslo: **501302**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávací katedra/ústav: **Ústav technické matematiky**
Studijní program: **Teoretický základ strojního inženýrství**
Studijní obor: **bez oboru**

II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

Metoda konečných prvků pro aproximaci nevířivého proudění tekutiny

Název bakalářské práce anglicky:

Finite element method for approximation of irrotational fluid flow

Pokyny pro vypracování:

Fyzikální a matematický popis problému
Matematický model a matematická formulace.
Popis numerického řešení metodou konečných prvků.
Použití numerické metody pro řešení vybraných úloh.

Seznam doporučené literatury:

P. Sváček, M. Feistauer, Metoda konečných prvků, Vydavatelství ČVUT, 2007
Miroslav Brdička, Ladislav Samek, Bruno Sopko, Mechanika kontinua, Academia 2005
Feistauer, M. (1993) Mathematical Methods in Fluid Dynamics. Longman Scientific & Technical, New York. 1992
P. Wesseling, Principles of Computational Fluid Dynamics, Springer 2001

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

doc. RNDr. Petr Sváček, Ph.D. ústav technické matematiky FS

Jméno a pracoviště druhého(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: **13.04.2023**

Termín odevzdání bakalářské práce: **13.08.2023**

Platnost zadání bakalářské práce: _____

doc. RNDr. Petr Sváček, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce

prof. Ing. Jiří Fůrst, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

doc. Ing. Miroslav Španiel, CSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací.
Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

Datum převzetí zadání

Podpis studenta

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v příloženém seznamu.

V Praze dne

.....
Adam Střihavka

Poděkování

Děkuji panu doc. RNDr. Petru Sváčkovi, Ph.D. za věcné rady, podporu a trpělivost při vedení této bakalářské práce.

Adam Střihavka

Název práce:

Metoda konečných prvků pro aproximaci nevířivého proudění tekutiny

Autor: Adam Střihavka

Studijní program: B2342 Teoretický základ strojního inženýrství

Obor: 2301R000 Studijní program je bezoborový

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: doc. RNDr. Petr Sváček, Ph.D.
Ústav technické matematiky

Abstrakt: Tato práce se zabývá matematickým popisem nevířivého proudění tekutiny a formulací problému nevířivého proudění tekutiny s okrajovými podmínkami. Formulovaná úloha je řešena metodou konečných prvků včetně odvození slabé formulace. Pro numerické řešení formulované úlohy je v programu Matlab napsán kód, který realizuje numerický výpočet. Funkčnost programu byla ověřena numerickým výpočtem funkce se známým analytickým řešením.

Klíčová slova: nevířivé proudění, metoda konečných prvků, Žukovského profil, Matlab

Title:

Finite element method for approximation of irrotational fluid flow

Author: Adam Střihavka

Abstract: This thesis deals with the mathematical description of irrotational fluid flow and the formulation of the problem of irrotational fluid flow with boundary conditions. The formulated problem is solved by the finite element method including the derivation of a weak formulation. For the numerical solution of the formulated problem, a code in the Matlab program that performs a numerical calculation is written. The functionality of the program was verified by numerical calculation of the function with a known analytical solution.

Key words: irrotational flow, finite element method, Joukowski airfoil, Matlab

Obsah

Seznam obrázků	vii
Úvod	1
Princip a užití metody konečných prvků	2
1.1 Metoda konečných prvků v 1D	2
1.1.1 Bázová funkce a maticový zápis diskrétního problému	2
1.1.2 Výpočet prvků maticové rovnice	3
1.2 Metoda konečných prvků ve 2D	4
1.2.1 Diskretizace problému - Galerkinova metoda	4
1.2.2 Volba konečně prvkového podprostoru V_h a jeho báze	5
1.2.3 Referenční element a transformace na referenčním elementu	5
1.2.4 Matice tuhosti a vektor zatížení	7
1.3 Numerické výsledky	7
1.3.1 Metoda konečných prvků v 1D	7
1.3.2 Metoda konečných prvků ve 2D	10
Matematické modelování proudění tekutin	18
2.1 Lagrangeův a Eulerův popis proudění	18
2.2 Věta o transportu a rovnice kontinuity	19
2.2.1 Popis rovinného nestlačitelného nevířivého proudění pomocí proudové funkce	21
2.2.2 Popis rovinného stlačitelného nevířivého proudění	22
2.3 Slabá formulace Laplaceovy rovnice proudové funkce	26
2.3.1 Nestlačitelné proudění	26
2.3.2 Stlačitelné proudění	27
2.4 Funkce komplexní proměnné a jejich užití pro matematický popis proudění	29
2.4.1 Popis stacionárního nevazkého nestlačitelného nevířivého proudění pomocí holomorfní funkce	29
2.4.2 Rovinné obtékání válce	30
2.4.3 Rovinné nestlačitelné nevířivé proudění okolo Žukovského profilu	31
2.5 Aproximace nevířivého proudění tekutiny	32
2.5.1 Nestlačitelné proudění	34
2.5.2 Stlačitelné proudění	37
2.5.3 Analytické a numerické proudění Žukovského profilu	42
Závěr	45
Bibliografie	46
Přílohy	47

Seznam obrázků

1.1	Analytické a numerické řešení ($h = \frac{1}{5}$)	8
1.2	Chyba MKP s krokem $h = \frac{1}{5}$	8
1.3	Analytické a numerické řešení ($h = \frac{1}{10}$)	8
1.4	Chyba MKP s krokem $h = \frac{1}{10}$	8
1.5	Analytické a numerické řešení ($h = \frac{1}{20}$)	8
1.6	Chyba MKP s krokem $h = \frac{1}{20}$	8
1.7	Analytické a numerické řešení ($h = \frac{1}{40}$)	9
1.8	Chyba MKP s krokem $h = \frac{1}{40}$	9
1.9	Analytické a numerické řešení ($h = \frac{1}{80}$)	9
1.10	Chyba MKP s krokem $h = \frac{1}{80}$	9
1.11	Chyba MKP v závislosti na velikosti kroku $h = 2^{-n}$, $n = 1..9$	10
1.12	Řešení na síti s 25 body	11
1.13	Řešení na síti s 81 body	11
1.14	Řešení na síti s 289 body	11
1.15	Řešení na síti s 1089 body	11
1.16	Řešení na síti s 25 body	12
1.17	Řešení na síti s 81 body	12
1.18	Řešení na síti s 289 body	13
1.19	Řešení na síti s 1089 body	13
1.20	Řešení na síti s 25 body	14
1.21	Řešení na síti s 81 body	14
1.22	Řešení na síti s 289 body	14
1.23	Řešení na síti s 1089 body	14
1.24	Řešení na síti s 25 body	15
1.25	Řešení na síti s 81 body	15
1.26	Řešení na síti s 289 body	15
1.27	Řešení na síti s 1089 body	15
1.28	Geometrie oblasti pro výpočet	16
1.29	Numerické řešení s oblastí Γ_D	16
1.30	Analytické řešení s oblastí Γ_D	16
1.31	Numerické řešení s oblastí Γ_N a Γ_D	17
1.32	Analytické řešení s oblastí Γ_N a Γ_D	17
1.33	Numerické řešení s oblastí Γ_R a Γ_D	17
1.34	Analytické řešení s oblastí Γ_R a Γ_D	17
2.35	Omezená oblast Ω pro řešení problému obtékání a detail v blízkosti profilu Γ_D	24
2.36	Profil NACA 0012 v programu GMSH	32
2.37	Izočáry proudové funkce profilu NACA 0012, $U = 50 [ms^{-1}]$, $\theta = 0^\circ$	34
2.38	Rozložení tlaku v $[Pa]$ pro $U = 50 [ms^{-1}]$, $\theta = 0^\circ$	34
2.39	Rozložení rychlosti v $[ms^{-1}]$ pro $U = 50 [ms^{-1}]$, $\theta = 0^\circ$	34

2.40	Tlakový součinitel C_p pro $U = 50 [ms^{-1}]$, $\theta = 0^\circ$	34
2.41	Rozdíl $C_{p_{horní}} - C_{p_{dolní}}$	34
2.42	Izočáry proudové funkce profilu NACA 0012, $U = 50 [ms^{-1}]$, $\theta = 4^\circ$	35
2.43	Rozložení tlaku v $[Pa]$ pro $U = 50 [ms^{-1}]$, $\theta = 4^\circ$	35
2.44	Rozložení rychlosti v $[ms^{-1}]$ pro $U = 50 [ms^{-1}]$, $\theta = 4^\circ$	35
2.45	Tlakový součinitel C_p pro $U = 50 [ms^{-1}]$, $\theta = 4^\circ$	35
2.46	Rozdíl $C_{p_{horní}} - C_{p_{dolní}}$	35
2.47	Izočáry proudové funkce profilu NACA 0012, $U = 50 [ms^{-1}]$, $\theta = 8^\circ$	36
2.48	Rozložení tlaku v $[Pa]$ pro $U = 50 [ms^{-1}]$, $\theta = 8^\circ$	36
2.49	Rozložení rychlosti v $[ms^{-1}]$ pro $U = 50 [ms^{-1}]$, $\theta = 8^\circ$	36
2.50	Tlakový součinitel C_p pro $U = 50 [ms^{-1}]$, $\theta = 8^\circ$	36
2.51	Rozdíl $C_{p_{horní}} - C_{p_{dolní}}$	36
2.52	Závislost hustoty $\rho [kg m^{-3}]$ na rychlosti $\mathbf{u} [ms^{-1}]$	37
2.53	Izočáry proudové funkce profilu NACA 0012, $U = 50 [ms^{-1}]$, $\theta = 0^\circ$	38
2.54	Rozložení tlaku v $[Pa]$ pro $U = 50 [ms^{-1}]$, $\theta = 0^\circ$	38
2.55	Rozložení rychlosti v $[ms^{-1}]$ pro $U = 50 [ms^{-1}]$, $\theta = 0^\circ$	38
2.56	Tlakový součinitel C_p pro $U = 50 [ms^{-1}]$, $\theta = 0^\circ$	38
2.57	Rozdíl $C_{p_{horní}} - C_{p_{dolní}}$	38
2.58	Rozložení hustoty $\rho [kg m^{-3}]$	39
2.59	Izočáry proudové funkce profilu NACA 0012, $U = 50 [ms^{-1}]$, $\theta = 4^\circ$	39
2.60	Rozložení tlaku v $[Pa]$ pro $U = 50 [ms^{-1}]$, $\theta = 4^\circ$	39
2.61	Rozložení rychlosti v $[ms^{-1}]$ pro $U = 50 [ms^{-1}]$, $\theta = 4^\circ$	39
2.62	Tlakový součinitel C_p pro $U = 50 [ms^{-1}]$, $\theta = 4^\circ$	40
2.63	Rozdíl $C_{p_{horní}} - C_{p_{dolní}}$	40
2.64	Rozložení hustoty $\rho [kg m^{-3}]$	40
2.65	Izočáry proudové funkce profilu NACA 0012, $U = 50 [ms^{-1}]$, $\theta = 8^\circ$	40
2.66	Rozložení tlaku v $[Pa]$ pro $U = 50 [ms^{-1}]$, $\theta = 8^\circ$	41
2.67	Rozložení rychlosti v $[ms^{-1}]$ pro $U = 50 [ms^{-1}]$, $\theta = 8^\circ$	41
2.68	Tlakový součinitel C_p pro $U = 50 [ms^{-1}]$, $\theta = 8^\circ$	41
2.69	Rozdíl $C_{p_{horní}} - C_{p_{dolní}}$	41
2.70	Rozložení hustoty $\rho [kg m^{-3}]$	41
2.71	Žukovského profil s parametry $a = 6$, $h = 0,5$, $\Delta = 0,6$	43
2.72	Analytické řešení obtékání Žukovského profilu pro $\theta = 0^\circ$	43
2.73	Numerické řešení obtékání Žukovského profilu pro $\theta = 0^\circ$	43
2.74	Analytické řešení obtékání Žukovského profilu pro $\theta = 4^\circ$	44
2.75	Numerické řešení obtékání Žukovského profilu pro $\theta = 4^\circ$	44
2.76	Analytické řešení obtékání Žukovského profilu pro $\theta = 8^\circ$	44
2.77	Numerické řešení obtékání Žukovského profilu pro $\theta = 8^\circ$	44

Úvod

Tato práce se zabývá řešením problému rovinného nevířivého proudění metodou konečných prvků. Řešení problémů proudění je velmi složité, protože tyto problémy jsou popsány parciálně diferenciálními rovnicemi v kombinaci s vhodně zvolenými okrajovými podmínkami na různých oblastech, pro které není obecně možné najít analytická řešení. Pro řešení takových problémů se používají numerické metody, které dokáží zadaný problém přibližně vyřešit, což je například metoda konečných prvků, kterou jsou řešeny problémy v této práci. Metoda konečných prvků je realizována kódy napsanými v programu Matlab a zkoumaná geometrie (oblast) je vytvořena v programu GMSH.

V první části práce je popsán princip a použití metody konečných prvků v 1D a ve 2D a to včetně odvození slabé formulace pro Poissonovu rovnici. Následně jsou uvedeny numerické výsledky z kódů vyvinutých v programu Matlab, pro ověření správného fungování metody konečných prvků v 1D a ve 2D. Tyto výsledky jsou porovnány s analytickým řešením a je pro ně stanovena maximální velikost chyby numerické metody.

Ve druhé části práce je popsána teorie proudění tekutin včetně odvození rovnice kontinuity a Eulerovy rovnice dynamiky tekutin. Je popsáno i nevířivé nestlačitelné a stlačitelné proudění s formulacemi daných problémů s okrajovými podmínkami. Pro oba dva případy je dále určena i slabá formulace Laplaceovy rovnice proudové funkce. Zároveň jsou v této části práce uvedeny základní poznatky z komplexní analýzy a využití funkcí komplexní proměnné pro matematický popis proudění. Výhodou popisu proudění funkcemi komplexní proměnné je získání analytického řešení proudění tekutiny pro určité druhy profilů. Příkladem takového profilu je Žukovského profil, na kterém lze ověřit správné řešení problému nevířivého rovinného proudění.

V poslední části této práce jsou uvedeny výsledky pro problémy rovinného nevířivého (nestlačitelného i stlačitelného subsonického) proudění aerodynamického profilu NACA 0012. Součástí je i porovnání analytického a numerického řešení obtékání Žukovského profilu.

Princip a užití metody konečných prvků

V této části popíšeme metodu konečných prvků, která patří mezi numerické metody pro řešení diferenciálních rovnic. Princip výpočtu touto metodou ukážeme pro případ v 1D a ve 2D. Následně byla metoda konečných prvků implementována v programu MATLAB, kde byla metoda srovnána s analytickým řešením vypočítaných rovnic.

1.1 Metoda konečných prvků v 1D

Hledáme řešení rovnice

$$-u''(x) = f(x), \quad x \in (0, 1) \quad (1.1)$$

s okrajovými podmínkami

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (1.2)$$

Rovnici (1.1) vynásobíme spojitou, po částech hladkou testovací funkcí v splňující podmínku (1.2). Označme prostor testovacích funkcí

$$\mathcal{V} = \{v : v \in C([0, 1]), v(0) = v(1) = 0, v'(x) \text{ po částech spojitá}\}. \quad (1.3)$$

Následně rovnici (1.1) vynásobenou funkcí $v(x)$ integrujeme na intervalu $(0, 1)$:

$$\int_0^1 -u''(x)v(x) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx, \quad \forall v \in \mathcal{V}. \quad (1.4)$$

Rovnici (1.4) integrujeme podle pravidla per partes a podle podmínky (1.2) dále upravíme:

$$\underbrace{[-u(x)v(x)]_0^1}_{=0} + \int_0^1 u'(x)v'(x) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx. \quad (1.5)$$

Slabá (Galerkinova) formulace problému (1.1-1.2) je pak dán jako hledání $u \in \mathcal{V}_h$ tak, že

$$\int_0^1 u'(x)v'(x) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx \quad (1.6)$$

platí pro všechny $v \in \mathcal{V}$.

1.1.1 Bázová funkce a maticový zápis diskrétního problému

Diskretizace problému (1.6) dostaneme pokud v Galerkinově formulaci (1.6) nahradíme prostor \mathcal{V} jeho konečně rozměrným podprostorem V_h . V případě diskrétního problému hledáme $u_h \in V_h$ tak, že

$$\int_0^1 u_h'(x)v_h'(x) dx = \int_0^1 f(x)v_h(x) dx \quad (1.7)$$

platí pro všechny $v_h \in V_h$. Prostor V_h má konečnou dimenzi $n = \dim V_h$ a volíme ho jako prostor:

$$V_h = \{\varphi \in C([0, 1]), \varphi|_{\langle x_i, x_{i+1} \rangle} \in P_1(\langle x_i, x_{i+1} \rangle) \forall i = 0, \dots, n, \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}, \quad (1.8)$$

kde $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n < x_{n+1} = 1$ je dané dělení intervalu $[0, 1]$. Prvky prostoru V_h jsou spojité po částech lineární funkce. Označíme bázi prostoru V_h jako $\varphi_1 \dots \varphi_n \in V_h$, které splňují:

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases} \quad (1.9)$$

Řešení problému (1.7) lze hledat ve tvaru lineární kombinace bázových funkcí:

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^n U_j \varphi_j(x). \quad (1.10)$$

Výraz (1.10) se dosadí do rovnice diskrétního problému (1.7) a testovací funkce v_h se nahradí bázovou funkcí φ_i , kde $i = 1 \dots n$.

$$\sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 \varphi_j' \varphi_i' dx \right) U_j = \int_0^1 f(x) \cdot \varphi_i dx \quad (1.11)$$

Rovnici (1.11) lze zapsat také v maticovém tvaru:

$$\mathbb{A} \mathbf{U} = \mathbf{b}. \quad (1.12)$$

1.1.2 Výpočet prvků maticové rovnice

Elementy matice \mathbb{A} lze vypočítat podle následujícího vzorce:

$$a_{ij} = \int_0^1 \varphi_i' \varphi_j' dx. \quad (1.13)$$

Pro výpočet elementů matice tuhosti \mathbb{A} je potřeba znát derivace bázové funkce φ . Derivace bázových funkcí na jednotlivých intervalech dělení získáme snadno, neboť funkce φ_i jsou na každém intervalu lineární a φ_i' je tedy konstantní. Jednotlivé prvky matice tuhosti lze v případě ekvidistantního dělení s krokem h vypočítat následovně:

$$a_{ii} = \int_0^1 (\varphi_i')^2 dx = h \left(\frac{1}{h} \right)^2 + h \left(-\frac{1}{h} \right)^2 = \frac{2}{h} \quad (1.14)$$

$$a_{ii+1} = \int_0^1 \varphi_{i+1}' \varphi_i' dx = h \left(-\frac{1}{h} \right) \left(\frac{1}{h} \right) = -\frac{1}{h} \quad (1.15)$$

$$a_{ii-1} = \int_0^1 \varphi_i' \varphi_{i-1}' dx = h \left(\frac{1}{h} \right) \left(-\frac{1}{h} \right) = -\frac{1}{h}. \quad (1.16)$$

Elementy vektoru pravé strany \mathbf{b} se vypočítají následovně:

$$b_i = \int_0^1 f(x) \varphi_i dx, \quad (1.17)$$

kde výpočet na jednotlivých intervalech dělení intervalu $[0, 1]$ realizujeme numerickou integrací.

Výsledná maticová rovnice má tvar:

$$\frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

1.2 Metoda konečných prvků ve 2D

Ve dvourozměrném případě uvažujeme okrajovou úlohu pro Poissonovu rovnici, tedy hledáme řešení Poissonovy rovnice

$$-\Delta u = f \quad (1.19)$$

na omezené oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ s Dirichletovou okrajovou podmínkou na oblasti Γ_D a Neumannovou okrajovou podmínkou na oblasti Γ_N na hranici oblasti $\partial\Omega$, pro kterou platí $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ a zároveň pro okrajové podmínky platí $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$. Dirichletova okrajová podmínka na oblasti Γ_D má tvar:

$$u = 0. \quad (1.20)$$

Neumannova okrajová podmínka na oblasti Γ_N má tvar:

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \Psi. \quad (1.21)$$

Pro řešení rovnice (1.19) volíme testovací funkce $v \in \mathcal{V}$, kde

$$\mathcal{V} = \{v \in C^1(\bar{\Omega}) : v = 0 \text{ na } \Gamma_D\}. \quad (1.22)$$

Touto testovací funkcí následně vynásobíme obě strany rovnice (1.19) a poté integrujeme:

$$\int_{\Omega} -\Delta u v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx. \quad (1.23)$$

Na levou stranu rovnice (1.23) dále aplikujeme Greenovu větu (viz [1]) čímž dostaneme rovnici

$$-\int_{\partial\Omega} \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \mathbf{n}_i}_{\nabla u \cdot \mathbf{n}} v \, dS + \int_{\Omega} \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}}_{\nabla u \cdot \nabla v} \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, dx. \quad (1.24)$$

Rovnici (1.24) upravíme užitím Neumannovy okrajové podmínky na hranici Γ_N (1.21) a užitím definice \mathcal{V} , tedy slabá formulace úlohy (1.19) zní: hledáme u takové, že splňuje

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_N} \Psi v \, dS, \quad \forall v \in \mathcal{V}. \quad (1.25)$$

1.2.1 Diskretizace problému - Galerkinova metoda

Pro řešení rovnice (1.25) uvažujeme prostor $V_h \subset \mathcal{V}$ a kde $n = \dim V_h < \infty$. Podle diskrétní Galerkinovy formulace $u_h \in V_h$ je řešením Galerkinova problému

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, d\Omega = \int_{\Omega} f v_h \, dx + \int_{\Gamma_N} \Psi v_h \, dS, \quad \forall v_h \in V_h. \quad (1.26)$$

V Galerkinově metodě lze namísto splnění podmínky pro všechna v_h požadovat splnění podmínky pro všechna φ_i :

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla \varphi_i \, d\Omega = \int_{\Omega} f \varphi_i \, dx + \int_{\Gamma_N} \Psi \varphi_i \, dS, \quad \forall \varphi_i \in V_h. \quad (1.27)$$

Řešení Galerkinova problému předpokládáme ve tvaru:

$$u_h = \sum_{j=1}^n U_j \varphi_j. \quad (1.28)$$

Pokud se předpokládané řešení (1.28) dosadí do rovnice (1.27), tak má výsledná rovnice tvar:

$$\sum_j U_j \underbrace{\int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j d\Omega}_{a_{ij}} = \underbrace{\int_{\Omega} f \varphi_i d\Omega + \int_{\Gamma_N} \Psi \varphi_i dS}_{b_i}. \quad (1.29)$$

V rovnici (1.29) jsou členy a_{ij} prvky matice tuhosti, členy b_i prvky matice pravé strany a U_j neznámé hodnoty, které chceme vypočítat. Rovnici (1.29) lze tedy zapsat v maticovém tvaru:

$$\mathbb{A}\mathbf{U} = \mathbf{b}. \quad (1.30)$$

1.2.2 Volba konečně prvkového podprostoru V_h a jeho báze

Dále předpokládejme, že dvojrozměrná oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je polygonální omezenou oblastí a τ_h je triangulací oblasti $\bar{\Omega}$, která má následující předpoklady, viz [2],

1. Triangulace τ_h je tvořena konečně mnoha uzavřenými trojúhelníky
2. $\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \tau_h} K$
3. Pro $K_i, K_j \in \tau_h$, kde $K_i \neq K_j$, je průnik $K_i \cap K_j = \emptyset$ nebo je průnik $K_i \cap K_j$ tvořen společným vrcholem nebo společnou stranou K_i a K_j

Pokud jsou tyto podmínky (1., 2., 3.) splněny, tak je triangulace τ_h označována jako přípustná, viz [2].

Podprostor triangulace V_h se volí jako prostor spojitých po částech lineárních funkcí, tedy

$$V_h = \{\varphi \in C(\bar{\Omega}) : \varphi|_K \in P_1(K), \forall K \in \tau_h, \varphi = 0 \text{ na } \Gamma_D\}. \quad (1.31)$$

Podprostor V_h je tvořen bázovými funkcemi $\varphi_j \in V_h$, které jsou určeny podmínkou:

$$\varphi_j(x_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, \dim V_h, \quad (1.32)$$

kde x_j jsou vrcholy triangulace.

1.2.3 Referenční element a transformace na referenčním elementu

Pro výpočet prvků matice tuhosti a_{ij} v (1.29) je integrál přes Ω nahrazena součtem integrálů přes všechny elementy $K \in \tau_h$, a integrál přes K realizován pomocí tzv. referenčního prvku. Pro výpočet bázových funkcí je vhodné zobrazit element K s obecnými vrcholy $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$ na referenčním elementu \hat{K} . Referenční element \hat{K} (trojúhelník) má vrcholy se souřadnicemi $\hat{A}(0, 0)$, $\hat{B}(1, 0)$, $\hat{C}(0, 1)$. Bázové funkce na referenčním trojúhelníku mají následující tvar:

$$\hat{\varphi}_{\hat{A}}(\hat{x}, \hat{y}) = 1 - \hat{x} - \hat{y} \quad (1.33)$$

$$\hat{\varphi}_{\hat{B}}(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x} \quad (1.34)$$

$$\hat{\varphi}_{\hat{C}}(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{y}. \quad (1.35)$$

Pro transformaci F_K platí následující vztah:

$$F_K : \hat{K} \rightarrow K, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + \mathbb{B}_K \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}. \quad (1.36)$$

Matice \mathbb{B}_K je transformační maticí a má tvar

$$\mathbb{B}_K = \begin{pmatrix} x_B - x_A & x_C - x_A \\ y_B - y_A & y_C - y_A \end{pmatrix}. \quad (1.37)$$

Pro inverzní transformaci F_K^{-1} platí následující vztah:

$$F_K^{-1} : K \rightarrow \hat{K}, \quad \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \mathbb{B}_K^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \mathbb{B}_K^{-1} \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}. \quad (1.38)$$

Matice \mathbb{B}_K^{-1} lze explicitně vyjádřit ve tvaru:

$$\mathbb{B}_K^{-1} = \frac{1}{\det \mathbb{B}_K} \begin{pmatrix} y_C - y_A & -x_C + x_A \\ -y_A + y_A & x_B - x_A \end{pmatrix}. \quad (1.39)$$

Pro transformaci bázových funkcí φ na K a $\hat{\varphi}$ na \hat{K} platí vztah

$$\varphi(x, y) = \hat{\varphi}(F_K^{-1}(x, y)), \quad (1.40)$$

který lze také zapsat ve tvaru:

$$\varphi(x, y) = \hat{\varphi}(\hat{x}, \hat{y}). \quad (1.41)$$

Parciální derivace bázových funkcí mají podle pravidla pro derivování složené funkce následující tvar:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{y}}{\partial x}, \quad (1.42)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{y}}{\partial y}. \quad (1.43)$$

Podle pravidla pro derivaci složené funkce (1.42) resp. (1.43) a inverzní transformace (1.38) dostaneme rovnici pro transformaci derivací bázových funkcí:

$$\nabla \varphi = \hat{\nabla} \hat{\varphi} \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} \end{pmatrix}. \quad (1.44)$$

Vztahy (1.42), (1.43) a (1.44) obsahují neznámé derivace podle x a podle y . Tyto parciální derivace lze spočítat zderivováním rovnice (1.36) podle x a y . Zderivovaná rovnice (1.36) zapsaná v maticové formě:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{B}_K \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (1.45)$$

a z rovnice (1.45) plyne:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} \end{pmatrix} = \mathbb{B}_K^{-1}. \quad (1.46)$$

Rovnicí (1.46) jsme vypočítali neznámé derivace ze vztahů (1.42) a (1.43).

1.2.4 Matice tuhosti a vektor zatížení

Matice tuhosti A obsahuje prvky a_{ii} a a_{ij} . Prvky a_{ij} se vypočítají následovně:

$$a_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx = \sum_{K \in \tau_h} \int_K \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx = \sum_{K \in \tau_h} |K| \nabla \varphi_i|_K \cdot \nabla \varphi_j|_K, \quad (1.47)$$

kde $\nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j$ je skalárním součinem gradientů bázových funkcí na elementu $K \in \tau_h$.

Prvky b_i pravé strany lze vypočítat následovně:

$$b_i = \int_{\Omega} f \varphi_i d\Omega = \sum_{K \in \tau_h} \int_K f \varphi_i dx = \sum_{K \in \tau_h} b_i^K. \quad (1.48)$$

Pro výpočet integrálu na elementu K použijeme numerickou kvadraturu.

1.3 Numerické výsledky

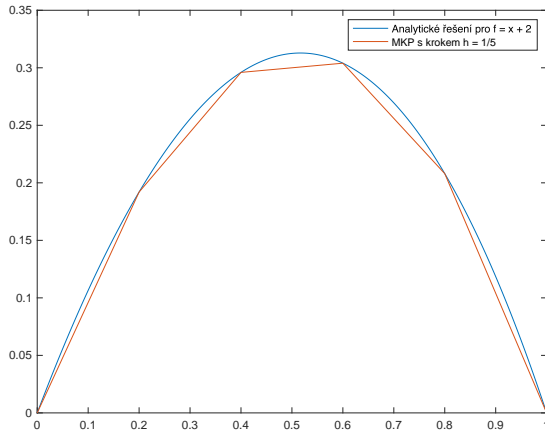
Přesnost metody konečných prvků zjistíme z porovnání numerických výsledků s analytickým řešením. Toto porovnání výsledků provedeme samostatně pro případy 1D a 2D Poissonovy rovnice. Pro oba případy určíme velikost maximální chyby a odhadneme řád konvergence. Pro metodu konečných prvků ve 2D určíme tyto parametry pro různé oblasti Ω s různými kombinacemi okrajových podmínek na hranici oblasti $\partial\Omega$.

1.3.1 Metoda konečných prvků v 1D

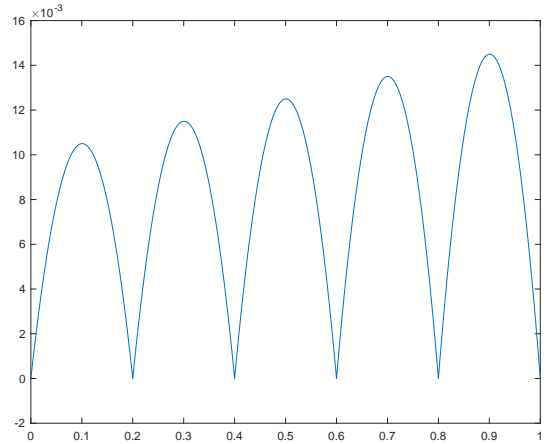
V metodě konečných prvků v 1D jsme porovnávali přesnost metody s různým množstvím kroků s analytickým řešením Poissonovy rovnice v 1D

$$-u''(x) = f(x), \quad (1.49)$$

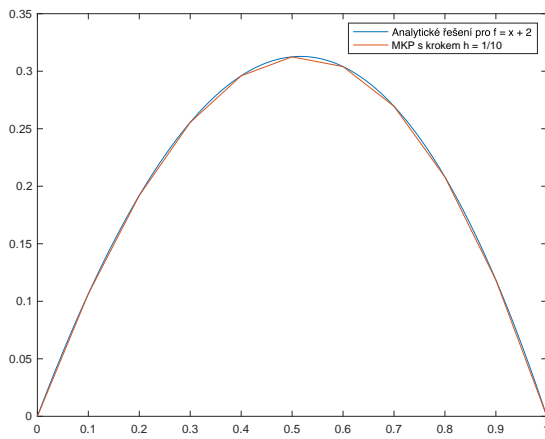
s pravou stranou $f(x) = x+2$ a okrajovými podmínkami $u(0) = u(1) = 0$. Pro řešení na intervalu $x \in (0, 1)$ jsme volili velikost kroku $h = \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{40}, \frac{1}{80}$. Z grafů je vidět, že pro velikost kroku $\frac{1}{40}, \frac{1}{80}$ již není poznat rozdíl mezi analytickým a numerickým řešením Poissonovy rovnice, proto jsme pro všechny uvažované kroky h vynesli do samostatných grafů velikosti chyby metody konečných prvků na intervalu $x \in (0, 1)$. Výpočet se v Matlabu [3] spustí ze skriptu `MKP_1D_test.m`.



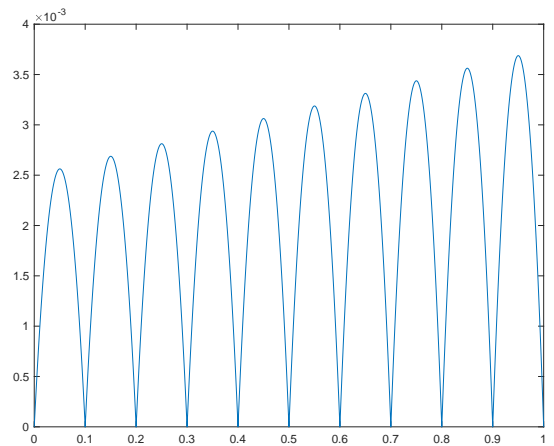
Obrázek 1.1: Analytické a numerické řešení ($h = \frac{1}{5}$)



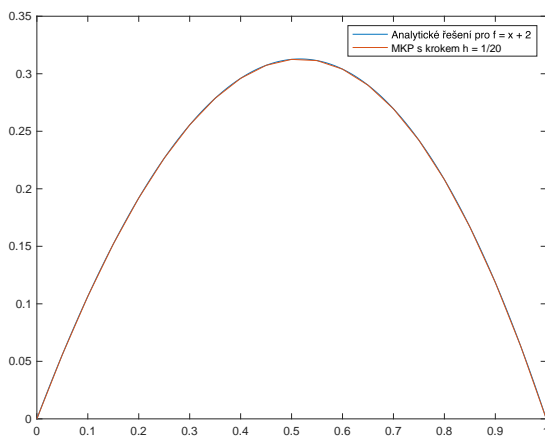
Obrázek 1.2: Chyba MKP s krokem $h = \frac{1}{5}$



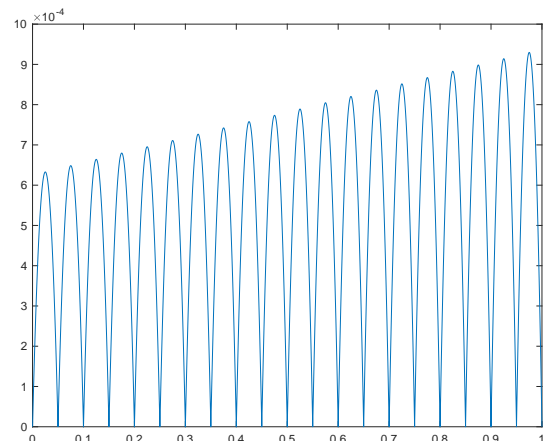
Obrázek 1.3: Analytické a numerické řešení ($h = \frac{1}{10}$)



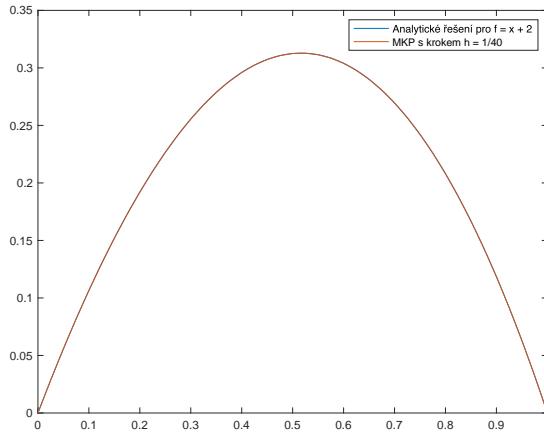
Obrázek 1.4: Chyba MKP s krokem $h = \frac{1}{10}$



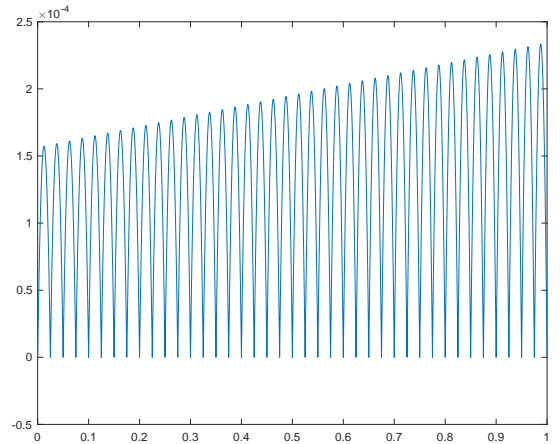
Obrázek 1.5: Analytické a numerické řešení ($h = \frac{1}{20}$)



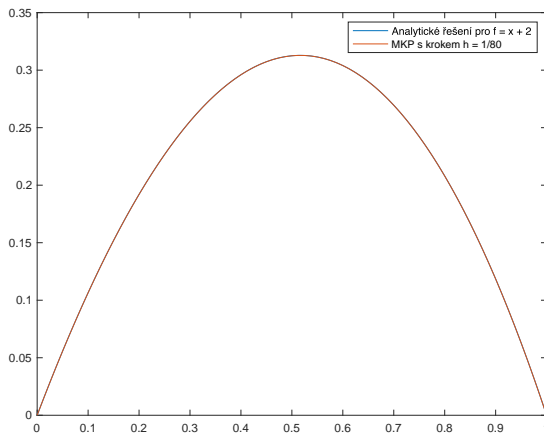
Obrázek 1.6: Chyba MKP s krokem $h = \frac{1}{20}$



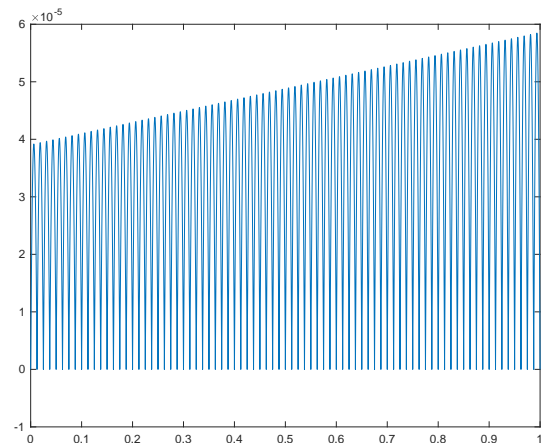
Obrázek 1.7: Analytické a numerické řešení ($h = \frac{1}{40}$)



Obrázek 1.8: Chyba MKP s krokem $h = \frac{1}{40}$



Obrázek 1.9: Analytické a numerické řešení ($h = \frac{1}{80}$)



Obrázek 1.10: Chyba MKP s krokem $h = \frac{1}{80}$

Pro metodu konečných prvků v 1D jsme také určili závislost maximální velikosti chyby metody na velikosti kroku h . Pro velikosti kroku $h = 2^{-n}$, kde $n = 1 \dots 9$, jsme vypočítali maximální velikost chyby na intervalu $(0, 1)$. Maximální chyba E byla určena pomocí maximální chyby vyhodnocené v diskrétních bodech jemnější sítě \mathfrak{M}_h (viz Obrázek 1.10), tedy

$$E = \max_{\tilde{x} \in \mathfrak{M}_h} |u^*(\tilde{x}) - u(\tilde{x})|, \quad (1.50)$$

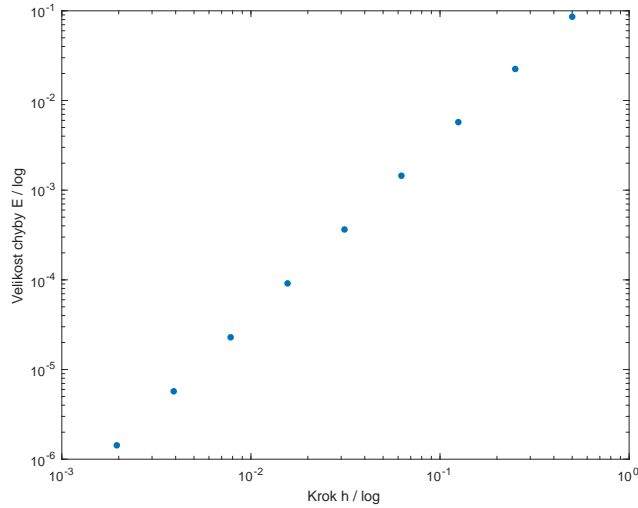
kde \mathfrak{M}_h označuje uzly jemnější sítě, u^* je numerické řešení a u je analytické řešení. Rychlost konvergence odpovídající v podstatě lineární závislosti na obrázku 1.11 lze odhadnout z velikosti chyby E a kroku h např. podle vztahu

$$\frac{E_4}{E_3} \approx 0,252657, \quad (1.51)$$

a pokud

$$E \approx C(h)^p, \quad (1.52)$$

pak řád konvergence odpovídá $p = 2$.



Obrázek 1.11: Chyba MKP v závislosti na velikosti kroku $h = 2^{-n}$, $n = 1 \dots 9$

Tabulka 1: Maximální chyba E v závislosti na velikosti kroku h

Krok h	Maximální chyba E	Odhad řádu
$\frac{1}{2}$	0,08595722	
$\frac{1}{4}$	0,02246212	1,936125
$\frac{1}{8}$	0,00573738	1,969031
$\frac{1}{16}$	0,00144959	1,984747
$\frac{1}{32}$	0,00036430	1,992431
$\frac{1}{64}$	0,00009131	1,996230
$\frac{1}{128}$	0,00002286	1,998119
$\frac{1}{256}$	0,00000571	1,999896
$\frac{1}{512}$	0,00000143	1,999526

1.3.2 Metoda konečných prvků ve 2D

Pro ověření správného fungování kódu na oblasti $\Omega = (0, 1)^2$ zvolíme formulaci okrajové úlohy pro Poissonovu rovnici tak, aby funkce $u(x, y)$ byla analytické řešení

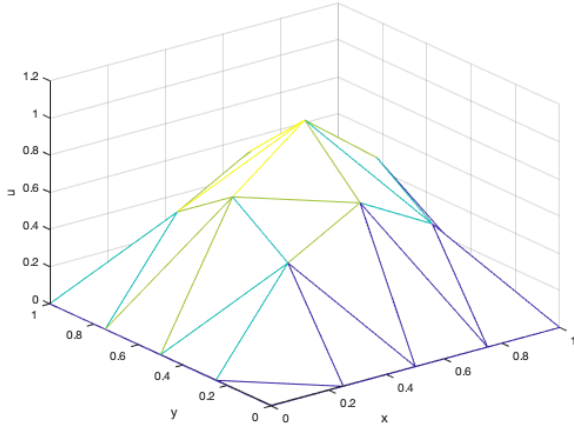
$$u(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y). \quad (1.53)$$

Dosazením funkce $u(x, y)$ do (1.19), získáme pravou stranu $f(x, y)$ ve tvaru:

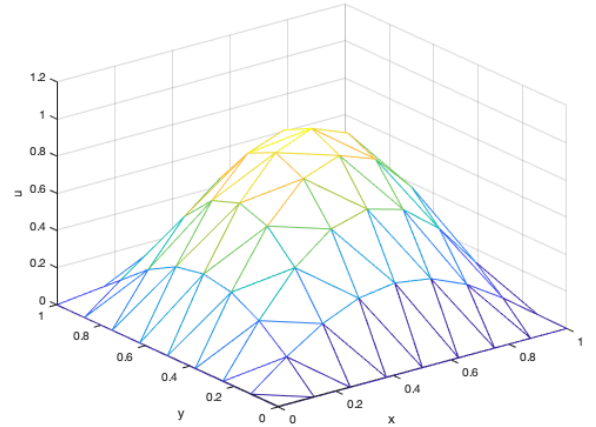
$$f(x, y) = 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y). \quad (1.54)$$

Zároveň můžeme v numerickém testu aplikovat Dirichletovu okrajovou podmínku, která je na celé hranici oblasti $\partial\Omega$ nulová. Okrajová podmínka, kterou použijeme má tvar:

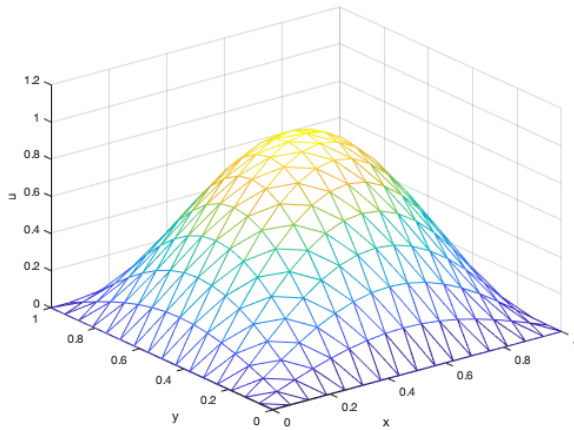
$$u_D(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y). \quad (1.55)$$



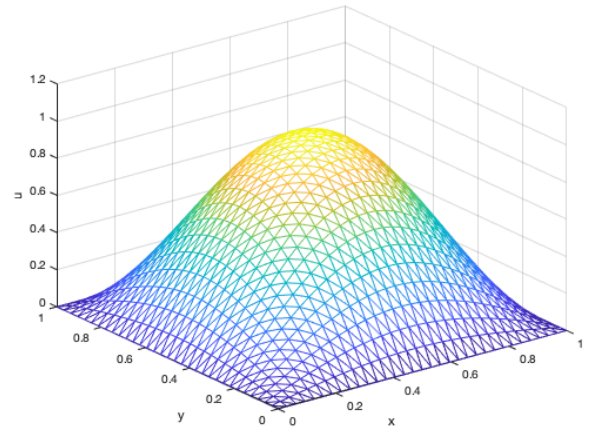
Obrázek 1.12: Řešení na síti s 25 body



Obrázek 1.13: Řešení na síti s 81 body



Obrázek 1.14: Řešení na síti s 289 body



Obrázek 1.15: Řešení na síti s 1089 body

Velikost chyby E s krokem h_i lze aproximovat ve tvaru

$$E(h_i) = E_i \approx C (h_i)^p, \quad (1.56)$$

kde C je konstanta a p je řád chyby. Tento řád chyby se vypočítá z poměru velikosti chyb $\frac{E_2}{E_1}$. Pro případ, kdy je velikost kroku h_2 poloviční oproti kroku h_1 , lze řád p vypočítat následovně:

$$\frac{E_2}{E_1} \approx \left(\frac{1}{2}\right)^p \implies p = -\log_2 \left(\frac{E_2}{E_1}\right). \quad (1.57)$$

Ve 2D případě chybu E počítáme jako maximum chyby ve vrcholech sítě, tedy

$$E = \max |u_h(x_i) - u(x_i)|, \quad (1.58)$$

kde u_h je numerické řešení a u je analytické řešení problému.

Tabulka 2: Maximální odchylka s hranicí $\partial\Omega = \Gamma_D$

Krok h	Počet uzlů na síti	Maximální chyba E	Odhad řádu
$\frac{1}{4}$	25	0,053029	
$\frac{1}{8}$	81	0,012951	2,033754
$\frac{1}{16}$	289	0,003219	2,008367
$\frac{1}{32}$	1089	0,000804	2,002087

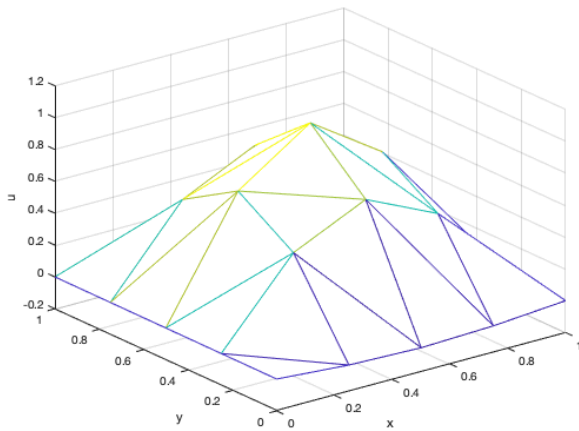
Pro numerický test můžeme také aplikovat Neumannovu okrajovou podmínku na části hranice $\partial\Omega$ ve tvaru:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = n_1 \frac{\partial u}{\partial x} + n_2 \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (1.59)$$

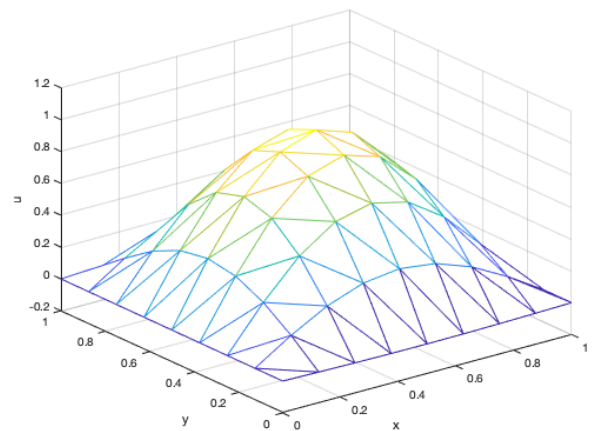
tedy

$$u_N(x, y) = n_1 \pi \cos(\pi x) \sin(\pi y) + n_2 \pi \sin(\pi x) \cos(\pi y). \quad (1.60)$$

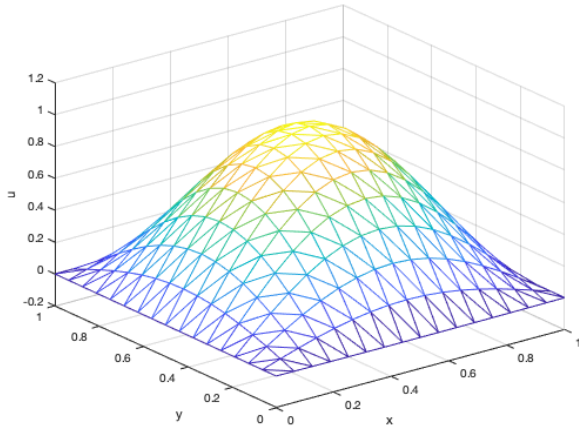
V následujících řešeních je na sítích předepsaná Neumannova okrajová podmínka na jedné hranici oblasti $\partial\Omega$ a na zbylých 3 částech je předepsaná Dirichletova okrajová podmínka (1.55).



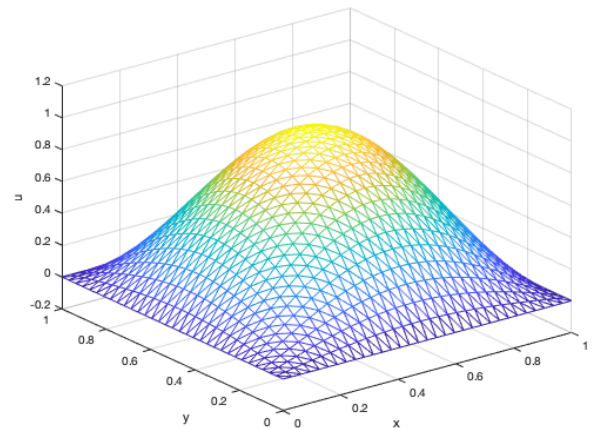
Obrázek 1.16: Řešení na síti s 25 body



Obrázek 1.17: Řešení na síti s 81 body



Obrázek 1.18: Řešení na síti s 289 body



Obrázek 1.19: Řešení na síti s 1089 body

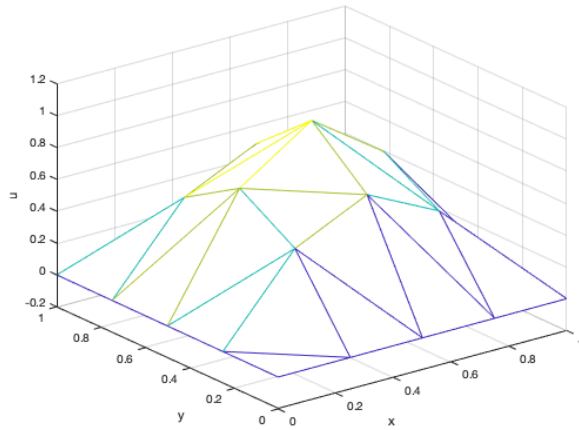
Tabulka 3: Maximální odchylka s hranicí $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$

Krok h	Počet uzlů na síti	Maximální chyba E	Odhad řádu
$\frac{1}{4}$	25	0,049529	
$\frac{1}{8}$	81	0,012676	1,966164
$\frac{1}{16}$	289	0,003192	1,98937
$\frac{1}{32}$	1089	0,000799	1,99719

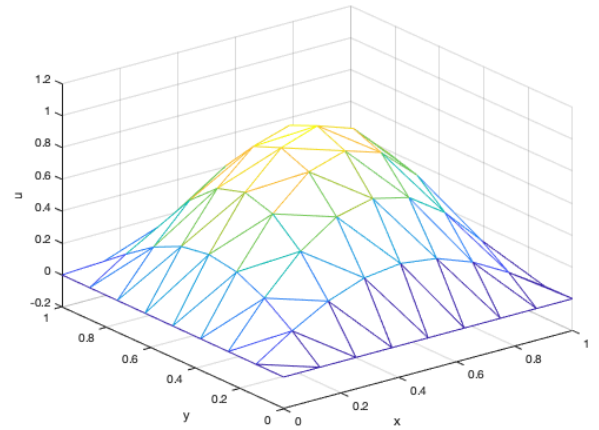
Robinova podmínka, která je lineární kombinací Dirichletovy a Neumannovy okrajové podmínky na část hranice oblasti $\partial\Omega$ je ve tvaru:

$$u_R(x, y) = \frac{1}{\alpha} (n_1 \pi \cos(\pi x) \sin(\pi y) + n_2 \pi \sin(\pi x) \cos(\pi y)) + \sin(\pi x) \sin(\pi y). \quad (1.61)$$

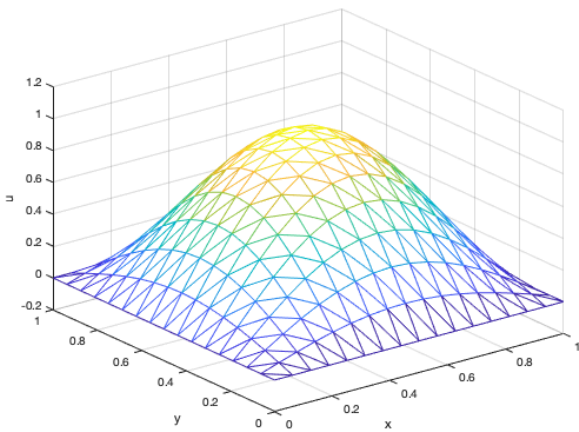
V následujících příkladech je na hranici oblasti $x \in (0, 1)$, $y = 0$ předepsána Robinova okrajová podmínka a na zbylých částech je předepsaná Dirichletova okrajová podmínka ve tvaru (1.55).



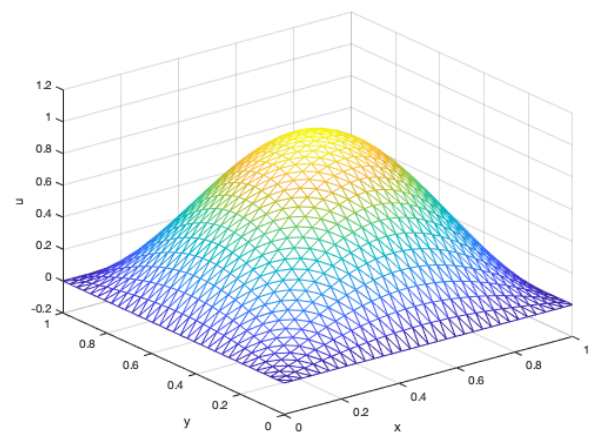
Obrázek 1.20: Řešení na síti s 25 body



Obrázek 1.21: Řešení na síti s 81 body



Obrázek 1.22: Řešení na síti s 289 body

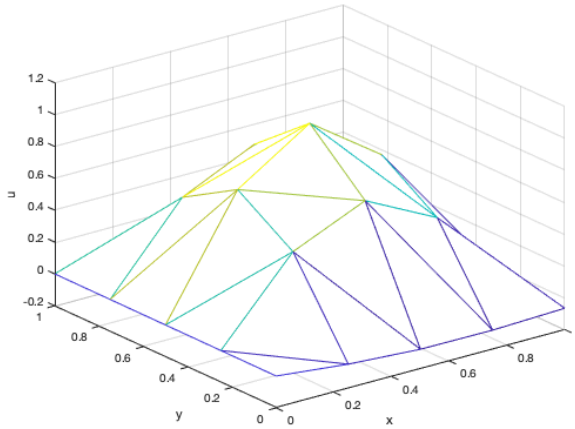


Obrázek 1.23: Řešení na síti s 1089 body

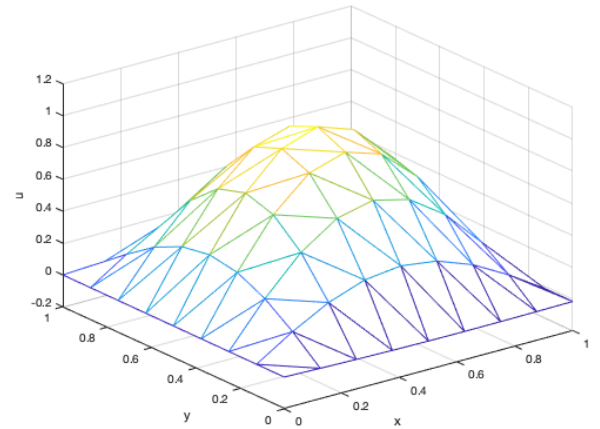
Tabulka 4: Maximální odchylka s hranicí $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_R$

Krok h	Počet uzlů na síti	Maximální chyba E	Odhad řádu
$\frac{1}{4}$	25	0,044921	
$\frac{1}{8}$	81	0,010992	2,030949
$\frac{1}{16}$	289	0,002767	1,990285
$\frac{1}{32}$	1089	0,000691	2,001423

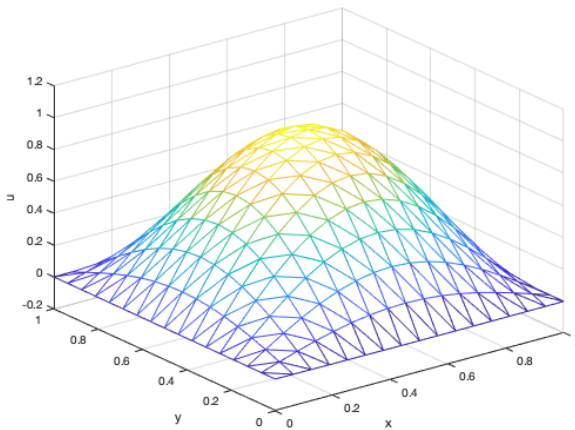
V následujících případech je na síti kombinace Dirichletovy, Neumannovy a Robinovy okrajové podmínky ve výše uvedených tvarech na hranici oblasti $\partial\Omega$.



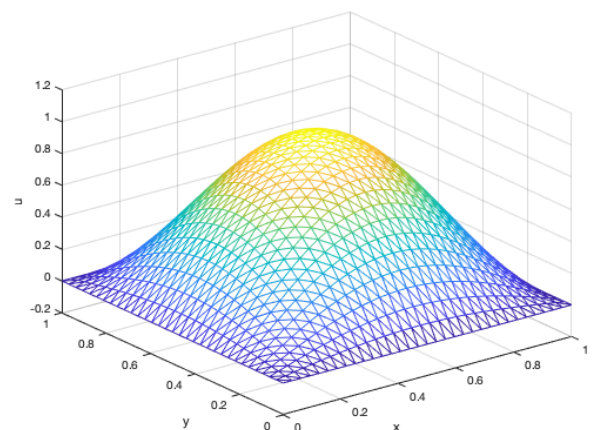
Obrázek 1.24: Řešení na síti s 25 body



Obrázek 1.25: Řešení na síti s 81 body



Obrázek 1.26: Řešení na síti s 289 body

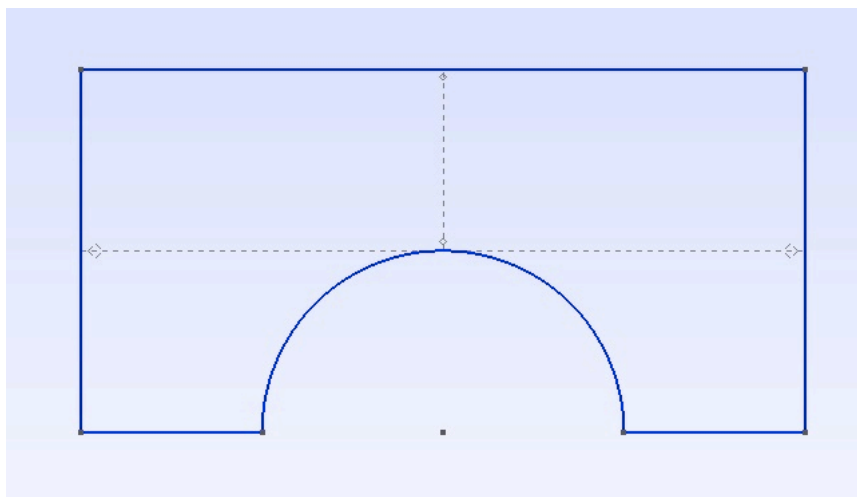


Obrázek 1.27: Řešení na síti s 1089 body

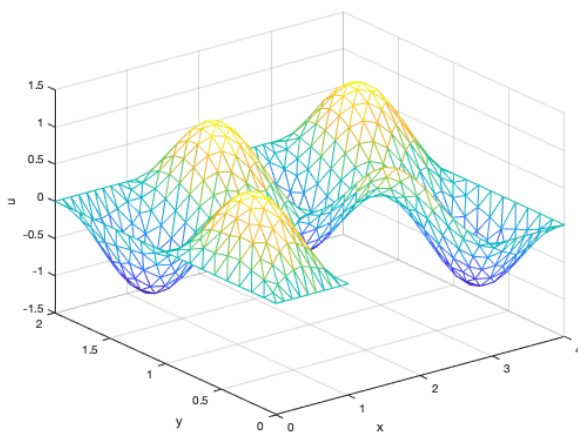
Tabulka 5: Maximální odchylka s hranicí $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_R$

Krok h	Počet uzlů na síti	Maximální chyba E	Odhad řádu
$\frac{1}{4}$	25	0,080925	
$\frac{1}{8}$	81	0,021273	1,927586
$\frac{1}{16}$	289	0,005375	1,984744
$\frac{1}{32}$	1089	0,001348	1,995099

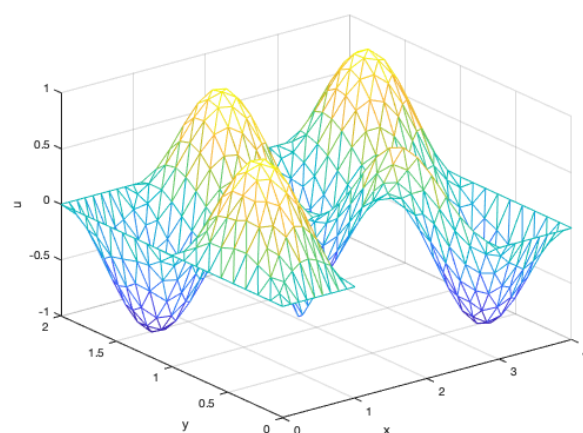
Numerické řešení s okrajovými podmínkami je možné také ověřit proti analytickému řešení na složitější oblasti. Oblast, na které se bude ověřovat numerické řešení s okrajovými podmínkami, je obdélník s vyříznutým půlkruhem o jednotkovém poloměru. Na hraně obdélníku s půlkruhem budeme předepisovat všechny výše použité okrajové podmínky. Na zbylých třech rovných stranách bude vždy předepsána Dirichletova okrajová podmínka (1.55).



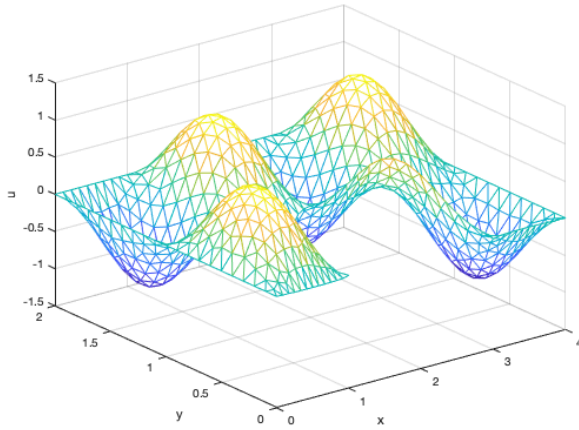
Obrázek 1.28: Geometrie oblasti pro výpočet



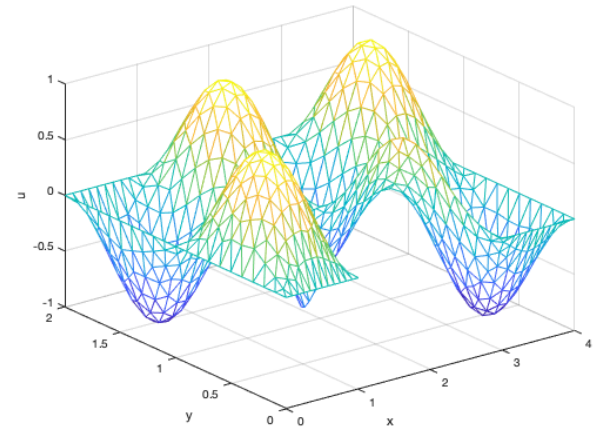
Obrázek 1.29: Numerické řešení s oblastí Γ_D



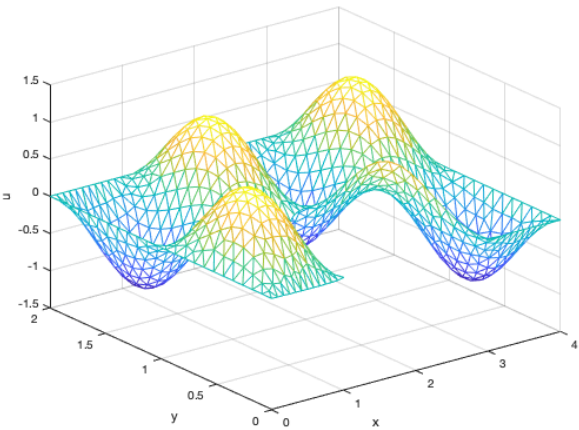
Obrázek 1.30: Analytické řešení s oblastí Γ_D



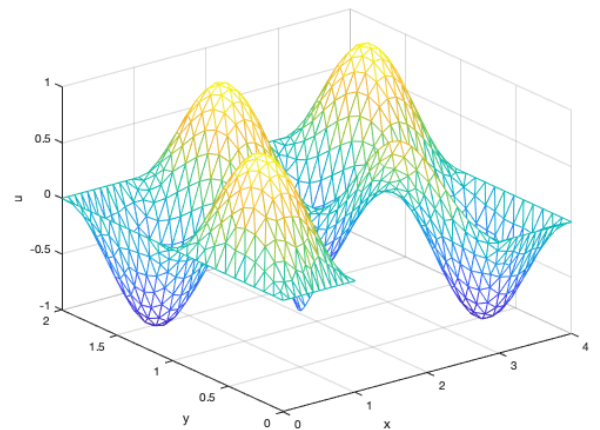
Obrázek 1.31: Numerické řešení s oblastí Γ_N a Γ_D



Obrázek 1.32: Analytické řešení s oblastí Γ_N a Γ_D



Obrázek 1.33: Numerické řešení s oblastí Γ_R a Γ_D



Obrázek 1.34: Analytické řešení s oblastí Γ_R a Γ_D

Tabulka 6: Maximální odchylka s hranicí $\partial\Omega$

Okrajové podmínky	Počet uzlů na síti	Maximální chyba E
u_D	2017	0,010526
u_D a u_N	2017	0,017052
u_D a u_R	2017	0,018264

Všechny výše uvedené výpočty pro metodu konečných prvků ve 2D se spustí ze skriptu `Numericke_testy.m`, kde jsou všechny uvedené okrajové podmínky a různé geometrie oblasti Ω , které byly vytvořeny v programu GMSH [4] a importovány do Matlabu pomocí funkce `load_gmsh.m`.

Matematické modelování proudění tekutin

Při odvození základních rovnic je využívána fundamentální hypotéza mechaniky kontinua, tedy že v každém bodě x se v libovolném čase t vyskytuje právě jedna částice.

2.1 Lagrangeův a Eulerův popis proudění

Lagrangeův popis se soustředí na popis pohybu každé jednotlivé částice kontinua, viz [5]. Trajektorie pohybu částice lze popsat rovnicí

$$x = \varphi(X, t), \quad (2.62)$$

kde $X \in \mathbb{R}^3$ je reference, která jednoznačně určuje zkoumanou částici v čase t . Parametry X_1, X_2, X_3 určují souřadnicový systém, který se společně s časem t nazývá Lagrangeovými souřadnicemi, viz [5]. Rovnici trajektorie (2.62) lze zpřesnit, když budeme uvažovat, že pozice částice s referencí X prochází v čase t_0 bodem X , to je

$$X = \varphi(X, t_0). \quad (2.63)$$

Za předpokladu dostatečné hladkosti zobrazení $\varphi = \varphi(X, t)$ definované pro $X \in \Omega_{t_0}$ a $t \in (t_1, t_2)$ lze z Lagrangeova popisu proudění vyjádřit rychlost a zrychlení částice o dané referenci X :

$$\hat{\mathbf{u}}(X, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(X, t), \quad (2.64)$$

$$\hat{\mathbf{a}}(X, t) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(X, t). \quad (2.65)$$

Oproti Lagrangeovu popisu Eulerův popis popisuje stav kontinua (tj. například rychlost $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$) ve všech bodech zkoumané oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Na základě předpokladu, že u obou popisů proudění se uvažuje, že skrze každý bod x v čase t prochází právě jedna částice tekutiny volíme X tak, aby v daném čase t platilo $x = \varphi(X, t)$. Vzhledem k tomu, že reference X není z hlediska popisu podstatná, lze ji vynechat a užívat v dalším značení $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(X, t)$. Eulerova rychlost proudění částice $\mathbf{u}(x, t)$, pak lze vyjádřit z Lagrangeovského popisu následovně:

$$\mathbf{u}(x, t) = \hat{\mathbf{u}}(X, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(X, t) = \frac{d\tilde{\varphi}}{dt}(t), \quad (2.66)$$

kde X je taková reference, že v čase t platí $x = \varphi(X, t)$. Užitím vztahu (2.65) je v Eulerově popisu vyjádřeno zrychlení $\mathbf{a}(x, t)$ částice procházející bodem x v čase t

$$\mathbf{a}(x, t) = \frac{d^2 \tilde{\varphi}}{dt^2}(t), \quad \text{kde } x = \varphi(X, t). \quad (2.67)$$

Užitím vztahu (2.66) pak dostáváme

$$\mathbf{a}(x, t) = \frac{d}{dt}[\mathbf{u}(\tilde{\varphi}(t), t)]. \quad (2.68)$$

Zderivováním dostáváme

$$\mathbf{a}(x, t) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\tilde{\varphi}(t), t) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}(\tilde{\varphi}(t), t) \frac{d\tilde{\varphi}_i}{dt}(t) \quad (2.69)$$

a tedy

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}. \quad (2.70)$$

Na pravé straně rovnice (2.70) operátor $\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$ nazýváme materiálovou resp. totální derivací označenou $\frac{d}{dt}$, tedy

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla. \quad (2.71)$$

Rovnice (2.70) je tedy zrychlením částice v Eulerových souřadnicích vyjádřené pomocí materiálové derivace rychlosti \mathbf{u} , tj.

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}. \quad (2.72)$$

Vztah mezi rychlostmi v Lagrangeově a Eulerově popisu lze zapsat:

$$\mathbf{u}(x, t) = \hat{\mathbf{u}}(\phi(x, t), t), \quad (2.73)$$

kde člen $\phi(x, t)$ popisuje inverzní zobrazení k zobrazení $\varphi(x, t)$. V případě opačné transformace z Eulerova na Lagrangeův popis proudění je, jako hledat trajektorii částice tekutiny na základě rychlosti $\mathbf{u}(x, t)$. Trajektorii částice procházející bodem $X \in \Omega_{t_0}$ v čase $t_0 \in (t_1, t_2)$ lze zjistit vyřešením Cauchyho úlohy ve tvaru:

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{u}(x, t), \quad x(t_0) = X. \quad (2.74)$$

2.2 Věta o transportu a rovnice kontinuity

Věta o transportu zkoumá pohyb částic kontinua obsažených v čase $t \in (t_1, t_2)$ v oblasti Ω_t . Necht funkce $F = F(x, t)$ reprezentuje nějakou fyzikální veličinu, například hustotu $\rho(x, t)$, která je transportována částicemi podle Eulerova popisu proudění. Pro vyjádření časové změny uvažujme ohraničenou oblast $\sigma(t) \subset \Omega_t$, tzv. kontrolní objem tvořený v každém čase t stejnými částicemi vyskytující se v čase t_0 v $\sigma(t_0)$, tj.

$$\sigma(t) = \{x = \varphi(X, t) : X \in \sigma(t_0), t \in (t_1, t_2)\}. \quad (2.75)$$

Celkové množství fyzikální veličiny $F(x, t)$ transportované částicemi, které se nacházejí v objemu $\sigma(t)$ v čase t lze vyjádřit jako integrál $\mathcal{F}(t)$:

$$\mathcal{F}(t) = \int_{\sigma(t)} F(x, t) dx. \quad (2.76)$$

Časová změna fyzikální veličiny $F(x, t)$ se dle věty o transportu (viz [5]) vyjádří ve tvaru

$$\frac{d\mathcal{F}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\sigma(t)} F(x, t) dx \quad (2.77)$$

$$= \int_{\sigma(t)} \left(\frac{\partial F(x, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (F\mathbf{u})(x, t) \right) dx, \quad (2.78)$$

kde \mathbf{u} je rychlost daná dle (2.66), viz [5]. Užitím věty o transportu lze odvodit základní rovnice dynamiky tekutin, například rovnici kontinuity nebo Eulerovu pohybovou rovnici hydrodynamiky.

Rovnice kontinuity je vyjádřením zákona zachování hmotnosti:

$$\frac{dm(\sigma(t))}{dt} = 0, \quad (2.79)$$

kde hmotnost $m(\sigma(t))$ je integrálem hustoty $\rho(x, t)$ přes kontrolní objem $\sigma(t)$, tedy

$$m(\sigma(t)) = \int_{\sigma(t)} \rho(x, t) dx. \quad (2.80)$$

Užitím věty o transportu pro (2.80) dostaneme rovnici kontinuity, tedy z rovnice (2.79) dostaneme

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\int_{\sigma(t)} \rho(x, t) dx \right) = \int_{\sigma(t)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right) dx. \quad (2.81)$$

Rovnice (2.81) musí platit pro libovolný objem $\sigma(t)$, což znamená, že integrand je roven nule. Tím dostáváme diferenciální vyjádření rovnice kontinuity ve tvaru:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (2.82)$$

Eulerova pohybová rovnice hydrodynamiky vyjadřuje zákon zachování hybnosti. Tuto rovnici opět odvodíme z věty o transportu. Zákon zachování hybnosti lze vyjádřit:

$$\frac{d\mathcal{H}(\sigma(t))}{dt} = \mathbf{F}(\sigma(t)), \quad (2.83)$$

kde $\mathbf{F}(\sigma(t))$ označuje síly působící na kontrolní objem $\sigma(t)$ a $\mathcal{H}(\sigma(t))$ označuje celkovou hybnost částic v kontrolním objemu $\sigma(t)$, tedy:

$$\mathcal{H}(\sigma(t)) = \int_{\sigma(t)} \rho(x, t) \mathbf{u}(x, t) dx. \quad (2.84)$$

Síla $\mathbf{F}(\sigma(t))$, která působí na kontrolní objem $\sigma(t)$ se skládá z objemové síly, která působí v celém objemu a plošné síly, která působí z vnějšku na plochu kontrolního objemu $\sigma(t)$, což jsou vnitřní síly v tekutině. Objemovou sílu $\mathbf{F}_v(\sigma(t))$ budeme uvažovat ve tvaru:

$$\mathbf{F}_v(\sigma(t)) = \int_{\sigma(t)} \rho(x, t) \mathbf{f}(x, t) dx, \quad (2.85)$$

kde \mathbf{f} je hustota objemové síly. Jako plošnou sílu $\mathbf{F}_s(\sigma(t))$ budeme uvažovat pouze tlakovou sílu danou tlakem p , tedy

$$\mathbf{F}_s(\sigma(t)) = - \int_{\partial\sigma(t)} p(x, t) \mathbf{n}(x) dS, \quad (2.86)$$

kde \mathbf{n} je vnější normála ke kontrolnímu objemu $\sigma(t)$. Dosadíme-li vztahy (2.86), (2.85) a (2.84) do vztahu (2.83) získáme vztah:

$$\frac{d}{dt} \int_{\sigma(t)} \rho(x, t) \mathbf{u}(x, t) dx = \int_{\sigma(t)} \rho(x, t) \mathbf{f}(x, t) dx - \int_{\partial\sigma(t)} p(x, t) \mathbf{n}(x) dS. \quad (2.87)$$

Užitím věty o transportu na levou stranu rovnice (2.87) a Greenovu větu (viz [1]) na plošnou sílu, získáme ve složkovém tvaru vztah:

$$\begin{aligned} \int_{\sigma(t)} \frac{\partial}{\partial t} (\rho(x, t) u_i(x, t)) + \nabla \cdot (\rho u_i \mathbf{u}) dx \\ = \int_{\sigma(t)} \rho(x, t) f_i(x, t) dx - \int_{\sigma(t)} \frac{\partial p}{\partial x_i}(x, t) dx, \end{aligned} \quad (2.88)$$

kde index i označuje složku příslušného vektoru. Rovnice (2.88) musí jako v předěšlém případě s rovnicí kontinuity (2.82) platit pro libovolný objem $\sigma(t)$, tudíž ji lze vyjádřit ve tvaru:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho(x, t) u_i(x, t)) + \nabla \cdot (\rho u_i \mathbf{u}) = \rho(x, t) f_i(x, t) - \frac{\partial p}{\partial x_i}(x, t). \quad (2.89)$$

Budeme-li předpokládat nestlačitelnou tekutinu, tedy konstantní hustoty, můžeme rovnici (2.89) vydělit hustotou ρ :

$$\frac{\partial}{\partial t} u_i(x, t) + \nabla \cdot (u_i \mathbf{u}) = f_i(x, t) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}(x, t). \quad (2.90)$$

Užitím vztahu

$$\nabla \cdot (u_i \mathbf{u}) = u_i \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla u_i \quad (2.91)$$

a rovnice kontinuity (2.82) splňující předpoklad nestlačitelného proudění, tedy

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.92)$$

získáme Eulerovu rovnici hydrodynamiky, kterou vyjádříme ve vektorovém tvaru:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (2.93)$$

2.2.1 Popis rovinného nestlačitelného nevířivého proudění pomocí proudové funkce

Za dodatečného předpokladu nestlačitelného proudění, tedy za předpokladu, že hustota ρ je konstantní, lze rovnici kontinuity (2.82) zapsat ve tvaru:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.94)$$

V nevířivém neboli potenciálním proudění částice konají pouze posuvný pohyb. Tudíž tuto podmínku, že se částice neotáčejí kolem své osy, lze vyjádřit rovnicí:

$$\text{rot } \mathbf{u} = 0. \quad (2.95)$$

Pro případ rovinného proudění rovnice (2.95) lze zapsat ve tvaru

$$0 = \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right). \quad (2.96)$$

Nestlačitelné nevířivé proudění popíšeme pomocí proudové funkce $\Psi = \Psi(x, y)$. Splnění rovnice (2.94) je zaručeno, pokud existuje hladká funkce splňující:

$$\mathbf{u}_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \mathbf{u}_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad (2.97)$$

nebo-li

$$\mathbf{u} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}, -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right). \quad (2.98)$$

Pokud do rovnice (2.96) dosadíme složky rychlosti (2.97), získáme Laplaceovou rovnici pro proudovou funkci ve tvaru, viz [6],

$$0 = \left(-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right), \quad (2.99)$$

nebo

$$-\Delta \Psi = 0. \quad (2.100)$$

2.2.2 Popis rovinného stlačitelného nevířivého proudění

Pro popis a formulaci stlačitelného proudění vycházíme z práce [7]. Jak již bylo odvozeno z věty o transportu (2.2), rovnici kontinuity pro stlačitelné proudění lze vyjádřit následovně:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (2.101)$$

Eulerovu pohybovou rovnici hydrodynamiky jsme odvodili ve tvaru:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (2.102)$$

Uvažujeme-li, že proudění je barotropní, tedy, že tlak je pouze funkcí hustoty $p = f(\rho)$. Další úvahou je, že proudění je adiabatické ($dQ = 0$) a homoentropické ($S = \text{konst.}$), poté lze tlak vyjádřit vztahem

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \quad (2.103)$$

a rychlost zvuku lze tedy vyjádřit

$$a^2 = \gamma \left(\frac{p_0}{\rho_0} \right) \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} = a_0^2 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} = \frac{\gamma p}{\rho}, \quad (2.104)$$

kde tlak p_0 , hustota ρ_0 a rychlost zvuku a_0 jsou hodnoty daných veličin při rychlosti $\mathbf{u} = 0$ a γ je Poissonova konstanta:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}. \quad (2.105)$$

V Poissonově konstantě γ je c_p měrná tepelná kapacita při konstantním tlaku p a c_v je měrná tepelná kapacita při konstantním objemu. Z rovnice (2.104) je možné vyjádřit rychlost zvuku $a_0^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}$.

Pomocí vztahu

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) - \mathbf{u} \times \text{rot } \mathbf{u}, \quad (2.106)$$

viz [7], upravíme rovnici (2.102) na tvar

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{f} + \mathbf{u} \times \text{rot } \mathbf{u}. \quad (2.107)$$

Pro stacionární a nevířivé proudění bez působení vnějších sil platí $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0$, $\text{rot } \mathbf{u} = 0$ a $\mathbf{f} = 0$, tedy rovnice (2.107) nabyde tvaru

$$\nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0. \quad (2.108)$$

Nyní zavedeme tlakovou funkci P , tak že:

$$\nabla P = \frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (2.109)$$

Tato funkce je pak dána vztahem

$$P(s) = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{dp}{d\tilde{\rho}}(\tilde{\rho}) d\tilde{\rho} = \frac{a_0^2}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} - 1 \right]. \quad (2.110)$$

Užitím této funkce v rovnici (2.108) dostáváme upravenou Eulerovu rovnici ve tvaru:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + P(s) \right) = 0. \quad (2.111)$$

Rovnice (2.111) implikuje:

$$\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + P(s) = \text{konst.} \quad (2.112)$$

Po dosazení (2.110) do (2.112) a vyjádření hustoty ρ dostáváme Bernoulliho rovnici stlačitelného proudění:

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2a_0^2} |\mathbf{u}|^2 \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad (2.113)$$

viz také [7].

Rovnice pro rovinné nevířivé stlačitelné proudění

Uvažujeme-li stacionární proudění ($\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$), tak se rovnice kontinuity (2.114) zjednoduší na tvar:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.114)$$

který lze také přepsat do tvaru:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u}_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho \mathbf{u}_2)}{\partial x_2} = 0. \quad (2.115)$$

Podmínku nevířivého proudění:

$$\text{rot } \mathbf{u} = 0, \quad (2.116)$$

lze také vyjádřit ve tvaru:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x_2} = 0 \quad (2.117)$$

viz (2.96).

Proudová funkce Užijeme proudové funkce pro stlačitelné proudění obdobně, jako pro případ nestlačitelného proudění, tedy

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} = \rho u_1, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = -\rho u_2. \quad (2.118)$$

Rovnice kontinuity (2.114) je splněna, neboť:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u}_1)}{\partial x_1} - \left(\frac{\partial(-\rho \mathbf{u}_2)}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2 \partial x_1} = 0. \quad (2.119)$$

Dosazením vztahů (2.118) do podmínky nevířivosti (2.117) dostáváme rovnici

$$-\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right) = 0, \quad (2.120)$$

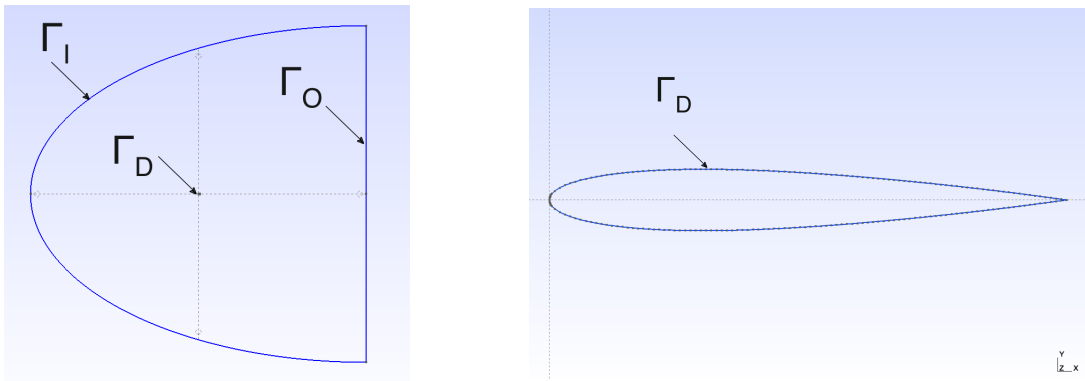
kterou lze také zapsat ve vektorovém tvaru:

$$-\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla \Psi \right) = 0. \quad (2.121)$$

V rovnici (2.121) je hustota ρ definována Bernoulliho vztahem (2.113), do kterého je třeba dosadit dle (2.118) za $|\mathbf{u}|^2 = \frac{1}{\rho^2} |\nabla \Psi|^2$. Výsledný vztah pro hustotu je definován implicitně:

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2a_0^2} \frac{1}{\rho^2} |\nabla \Psi|^2 \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \quad (2.122)$$

Rovnici (2.121) popisující proudění budeme řešit na omezené oblasti Ω



Obrázek 2.35: Omezená oblast Ω pro řešení problému obtékání a detail v blízkosti profilu Γ_D

a pro matematickou formulaci je třeba doplnit rovnici o okrajové podmínky.

Formulace problému na omezené oblasti, okrajové podmínky Okrajové podmínky, které budeme používat v této práci vycházejí z práce [8]. Okrajová podmínka na obtékaném profilu lze zapsat ve tvaru:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (2.123)$$

kde \mathbf{u} je vektor rychlosti a \mathbf{n} je normálový vektor.

Z levé strany rovnice (2.123) po dosazení proudové funkce (2.118) dostáváme vztah:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} n_1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} n_2, \quad (2.124)$$

kde složky normálového vektoru \mathbf{n} lze přepsat pomocí tečného vektoru $\mathbf{t} = (-n_2, n_1)$, čímž dostaneme:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\rho} \nabla \Psi \cdot \mathbf{t}. \quad (2.125)$$

Dosazením rovnice (2.123) do rovnice (2.124) získáme vztah

$$\frac{1}{\rho} \nabla \Psi \cdot \mathbf{t} = 0, \quad (2.126)$$

z které plyne, že funkce Ψ je na profilu konstantní, tedy:

$$\Psi = C_k \text{ na } \Gamma_D. \quad (2.127)$$

V nekonečnu definujeme okrajovou podmínku, které vychází ze vztahu:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \nabla \Psi = (-\rho_\infty u_2^\infty, \rho_\infty u_1^\infty). \quad (2.128)$$

Proudová funkce Ψ v nekonečnu má splňovat:

$$\Psi = -\rho_\infty u_2^\infty x + \rho_\infty u_1^\infty y. \quad (2.129)$$

Tuto okrajovou podmínku použijeme na hranici oblasti $\partial\Omega$, kterou proudící tekutina vstupuje do oblasti Ω . Poslední okrajovou podmínku předepíšeme na hranici oblasti $\partial\Omega$, kterou proudící tekutina opouští oblast Ω , zde předepíšeme pouze tečnou složku:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{t} = u_1^\infty t_1 + u_2^\infty t_2. \quad (2.130)$$

Nahrazením tečny $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$ normálou $\mathbf{n} = (n_2, -n_1)$ upravíme okrajovou podmínku (2.130) do tvaru

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u_1^\infty n_2 - u_2^\infty n_1 \quad (2.131)$$

a pomocí vztahů (2.118) dostáváme:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} n_2 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} n_1. \quad (2.132)$$

Užitím (2.131) a (2.132) získáme okrajovou podmínku

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{n}} = u_1^\infty n_2 - u_2^\infty n_1 \text{ na } \Gamma_O. \quad (2.133)$$

Laplaceovu rovnici proudové funkce (2.121) a okrajovou podmínku (2.133) upravíme vztahem $b(|\nabla\Psi|) = \frac{1}{\rho}$. Výsledný problém stlačitelného proudění je tedy:

$$\begin{aligned}
-\nabla \cdot (b(|\nabla\Psi|)\nabla\Psi) &= 0 && \text{v } \Omega \\
\Psi &= -\rho_\infty u_2^\infty x + \rho_\infty u_1^\infty y && \text{na } \Gamma_I \\
\Psi &= C_k && \text{na } \Gamma_D \\
-b(|\nabla\Psi|) \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{n}} &= u_1^\infty n_2 - u_2^\infty n_1 && \text{na } \Gamma_O,
\end{aligned} \tag{2.134}$$

kde

$$\rho_\infty = \rho_0 \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2a_0^2} |(u_1^\infty, u_2^\infty)|^2 \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \tag{2.135}$$

Pro úpravu problému ze stlačitelného proudění na nestlačitelné je hustota ρ konstantní a problém nestlačitelného proudění je formulován:

$$\begin{aligned}
-\Delta\Psi &= 0 && \text{v } \Omega \\
\Psi &= -u_2^\infty x + u_1^\infty y && \text{na } \Gamma_I \\
\Psi &= C_k && \text{na } \Gamma_D \\
\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{n}} &= u_1^\infty n_2 - u_2^\infty n_1 && \text{na } \Gamma_O.
\end{aligned} \tag{2.136}$$

2.3 Slabá formulace Laplaceovy rovnice proudové funkce

Pro obtékání leteckého profilu bude úloha zadána na oblasti Ω s hranicí oblasti $\partial\Omega = \Gamma_I^\infty \cup \Gamma_K^D \cup \Gamma_O^\infty$. Hranice obtékaného profilu je označena Γ_K^D . Hranice Γ_I^∞ označuje vstupní hranu, kterou přitéká tekutina do oblasti Ω a Γ_O^∞ hranici, kterou tekutina odtéká.

2.3.1 Nestlačitelné proudění

Úloha, kterou pro stacionární nevířivé nestlačitelné proudění budeme řešit je zadaná následovně:

$$\begin{aligned}
-\Delta\Psi &= 0 && \text{na } \Omega \\
\Psi &= -u_2^\infty x + u_1^\infty y && \text{na } \Gamma_I^\infty \\
\Psi &= C_k && \text{na } \Gamma_K^D \\
\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{n}} &= u_1^\infty n_2 - u_2^\infty n_1 && \text{na } \Gamma_O^\infty.
\end{aligned} \tag{2.137}$$

Rovnici (2.137) vynásobíme testovací funkcí v a integrujeme:

$$\int_{\Omega} -\Delta\Psi \cdot v \, dx = \int_{\Omega} 0 \cdot v \, dx. \tag{2.138}$$

Následně podle Greenovy věty [1] upravíme rovnici (2.138) na tvar:

$$\int_{\Omega} \nabla\Psi \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \nabla\Psi \cdot \mathbf{n} v \, dS. \tag{2.139}$$

Hranice $\partial\Omega$ se rozdělí na oblasti $\Gamma_I^\infty, \Gamma_K^D, \Gamma_O^\infty$, kde testovací funkce v_h je opět nulová na oblastech $\Gamma_I^\infty, \Gamma_K^D$:

$$\int_{\Omega} \nabla \Psi \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_{\Gamma_O^\infty} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{n}} v \, d\Gamma. \quad (2.140)$$

Po dosazení Neumannovy okrajové podmínky je výsledná slabá formulace

$$\int_{\Omega} \nabla \Psi \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_{\Gamma_O^\infty} (u_1^\infty n_2 - u_2^\infty n_1) v \, d\Gamma. \quad (2.141)$$

2.3.2 Stlačitelné proudění

Budeme-li opět uvažovat stacionární nevířivé proudění, které nyní bude stlačitelné, tak bude úloha formulována ve tvaru

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (b(|\nabla \Psi|) \nabla \Psi) &= 0 && \text{na } \Omega \\ \Psi &= -\rho_\infty u_2^\infty x + \rho_\infty u_1^\infty y && \text{na } \Gamma_I^\infty \\ \Psi &= C_k && \text{na } \Gamma_K^D \\ -b(\nabla \Psi) \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{n}} &= u_1^\infty n_2 - u_2^\infty n_1 && \text{na } \Gamma_O^\infty, \end{aligned} \quad (2.142)$$

kde je hustota daná vztahem:

$$\rho_\infty = \rho \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2a_0^2} |(u_1^\infty, u_2^\infty)|^2 \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \quad (2.143)$$

Slabou formulaci odvodíme stejným způsobem jako v předešlých případech, tedy vynásobíme rovnici (2.142) testovací funkcí v a zintegrujeme:

$$\int_{\Omega} -\nabla \cdot (b(|\nabla \Psi|) \cdot \nabla \Psi) v \, dx = \int_{\Omega} 0 \cdot v \, dx. \quad (2.144)$$

Aplikujeme Greenovu větu, viz [1]:

$$\int_{\partial\Omega} -b(|\nabla \Psi|) \nabla \Psi \cdot \mathbf{n} v \, dS + \int_{\Omega} b(|\nabla \Psi|) \nabla \Psi \cdot \nabla v \, dx = 0. \quad (2.145)$$

Upravíme rovnici (2.145):

$$\int_{\Omega} b(|\nabla \Psi|) \nabla \Psi \cdot \nabla v \, dx = \int_{\partial\Omega} b(|\nabla \Psi|) \nabla \Psi \cdot \mathbf{n} v \, dS, \quad (2.146)$$

kde lze pravou stranu upravit do tvaru:

$$\int_{\Omega} b(|\nabla \Psi|) \cdot \nabla \Psi \cdot \nabla v \, dx = \int_{\partial\Omega} b(|\nabla \Psi|) \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{n}} v \, dS. \quad (2.147)$$

Dosadíme okrajovou podmínku a slabá formulace problému stlačitelného stacionárního a nevířivého proudění je:

$$\int_{\Omega} b(|\nabla \Psi|) \cdot \nabla \Psi \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_{\Gamma_N} (u_1^\infty n_2 - u_2^\infty n_1) v \, dS. \quad (2.148)$$

Jak je vidět ze slabých formulací problému stlačitelného a nestlačitelného proudění, tak problém nestlačitelného proudění (2.139) je lineárním problémem a problém stlačitelného proudění (2.148) je problémem nelineárním. V nelineárním problému stlačitelného proudění používáme implicitní vztah pro hustotu (2.122), a proto řešení tohoto nelineárního problému určíme z iteračního výpočtu proudové funkce.

Pro určení fyzikálně smysluplného řešení musíme zvolit konstantu C_k tak, aby odpovídala Kutta-Žukovského odtokové podmínce.

Kutta-Žukovského podmínka pro profil s ostrou odtokovou hranou říká, že proudnice opouští profil Γ_K^D ve směru osy úhlu profilu, viz [8].

Abychom získali rychlostní pole kolem zkoumaného profilu Γ_K^D , potřebujeme získat složky rychlosti. Vzhledem k tomu, že rychlost je tečnou proudové funkce, tak hledané složky rychlosti \mathbf{u} získáme z gradientu proudové funkce $\nabla\Psi$, viz vztahy (2.97) a (2.98). Rychlostní pole určíme z výslednice složek rychlosti \mathbf{u} ve zkoumaných uzlech.

2.4 Funkce komplexní proměnné a jejich užití pro matematický popis proudění

V této části využijeme funkce komplexní proměnné pro popis proudění. Výhodou tohoto popisu proudění je, že jsme schopni získat analytické řešení pro obtékání některých profilů, například kruhu nebo Žukovského profilu a tato analytická řešení porovnat s numerickými výsledky [8]. Funkce komplexní proměnné je funkce $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, kde \mathbb{C} označuje obor komplexních čísel a zapisujeme $f = f(z)$, kde $z \in \mathbb{C}$ je komplexní číslo $z = a + ib$. Funkce f je holomorfní pokud pro každé komplexní číslo z v množině $\mathbb{G} \subset \mathbb{C}$ existuje derivace $f'(z)$, [9].

Nutnou podmínkou pro existenci derivace $f'(z)$ funkce $f(z) = f_1(x, y) + if_2(x, y)$ v bodě $z = x + iy$ je existence obou prvních parciálních derivací každé z funkcí f_1 a f_2 v bodě z a splnění Cauchy-Riemannových podmínek [9]:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y} \quad (2.149)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}. \quad (2.150)$$

2.4.1 Popis stacionárního nevazkého nestlačitelného nevířivého proudění pomocí holomorfní funkce

Uvažujeme nestlačitelné nevířivé proudění popsané rovnicí kontinuity

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0 \quad (2.151)$$

a podmínkou nevířivosti

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0. \quad (2.152)$$

Vidíme, že pokud komplexní funkce

$$w(z) = u_1(x, y) - iu_2(x, y) \quad (2.153)$$

definovaná pro $z = x + iy$, je holomorfní pak Cauchy-Riemannovy podmínky zaručují splnění obou rovnic (2.151) a (2.152) a řešení problémů pak odpovídá hledání komplexní funkce

$$w(z) = u_1(x, y) - iu_2(x, y) \quad (2.154)$$

namísto hledání $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ pro $z = x + iy$. Místo hledání rychlostního pole w , budeme hledat jeho potenciál. Komplexní potenciál se vypočítá tak, že hledáme funkci komplexní proměnné $F(z)$ tak, aby $F'(z) = w(z)$. Hledaná funkce $F(z)$ je ve tvaru:

$$F(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y). \quad (2.155)$$

Podle Cauchy-Riemannových podmínek platí:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = u_1, \quad (2.156)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = u_2, \quad (2.157)$$

kde Φ je potenciál a Ψ je proudová funkce. Komplexní potenciál je v některých případech znám.

2.4.2 Rovinné obtékání válce

Klasickým případem, kdy je komplexní potenciál znám, je případ rovinného obtékání válce.

Budeme-li chtít vyřešit obtékání válce, budeme předpokládat, že rychlost v nekonečnu je ve tvaru

$$u_\infty = u_{1\infty} + i u_{2\infty} = |\bar{U}_\infty| (\cos(\theta_0) + i \sin(\theta_0)), \quad (2.158)$$

kde $|\bar{U}_\infty|$ je velikost rychlosti v nekonečnu a θ_0 je úhel náběhu v nekonečnu. Dle [8] je komplexní potenciál pro obtékání válce dán:

$$F(z) = \bar{u}_\infty z + u_\infty \frac{R^2}{z} - \frac{\gamma}{2\pi i} \ln(z), \quad (2.159)$$

kde R je poloměr obtékaného kruhu a γ je cirkulace rychlosti. Komplexní funkci rychlosti w můžeme získat derivací potenciálu $F(z)$:

$$w(z) = \bar{u}_\infty - u_\infty \frac{R^2}{z^2} - \frac{\gamma}{2\pi i} \frac{1}{z}. \quad (2.160)$$

Má-li $F(z)$ odpovídat obtékání válce, pak musí být proudová funkce Ψ na profilu (obvodu kruhu) konstantní a podle (2.155) je $\Psi = \text{Im}(F(z))$.

V případě obtékání válce je profilem kruh K_R , který bude mít střed v počátku souřadnicového systému. Takový kruh je popsán rovnicí $x^2 + y^2 = R^2$ a lze ho pokládat za křivku, kterou lze parametrizovat následovně:

$$K_R = R e^{i\tau} = R (\cos(\tau) + i \sin(\tau)). \quad (2.161)$$

Komplexní potenciál parametrizovaného kruhu lze vypočítat dosazením parametrizace (2.161) do rovnice (2.159). Následně se vyjádří rychlosti $u_\infty = u_{1\infty} + i u_{2\infty}$ a $\bar{u}_\infty = u_{1\infty} - i u_{2\infty}$ a upraví logaritmus:

$$\ln(R(\cos(\tau) + i \sin(\tau))) = \ln(R) + i\tau. \quad (2.162)$$

Výsledná funkce komplexního potenciálu pro kruh K_R je po úpravě:

$$F(R e^{i\tau}) = 2R(u_{1\infty} \cos(\tau) + u_{2\infty} \sin(\tau)) + \frac{i\gamma}{2\pi} \ln R - \frac{\gamma}{2\pi} \tau. \quad (2.163)$$

Proudová funkce obtékaného kruhu K_R je imaginární složkou potenciálu, tedy

$$\text{Im} F(R (\cos(\tau) + i \sin(\tau))) = \frac{\gamma}{2\pi} \ln R \quad (2.164)$$

a vidíme, že proudová funkce je skutečně konstantní. Konstanta je dána cirkulací γ .

2.4.3 Rovinné nestlačitelné nevířivé proudění okolo Žukovského profilu

Žukovského funkce se využívá k vytvoření Žukovského profilu, viz [7],[8]. Žukovského funkce $Z(\theta)$ je definovaná pro $\theta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ dle:

$$Z(\theta) = \frac{1}{2} \left(\theta + \frac{a^2}{\theta} \right), \quad (2.165)$$

kde a je parametr, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Žukovského funkce Z zobrazuje S na S a toto zobrazení je prosté na jakékoliv množině $M \subset S$, viz [7], [8], [9].

Žukovského profil vznikne z kruhu M a $K(h, a)$. Kruh $K(h, a)$ má střed v bodě ih a dotýká se bodů $\pm a$. Kruh M má společný bod a s kruhem $K(h, a)$ a zároveň je $K(h, a) \subset M$. Žukovského profil je tedy množinou $Z(M)$, kde Z je Žukovského funkce (2.165). Zobrazení $\mathcal{K}(z)$ je inverzním zobrazením k Žukovskému zobrazení Z . Zobrazení $\mathcal{K}(z)$ je konformním zobrazením, což znamená, že zachovává úhly a je definované:

$$\mathcal{K}(z) = z + \sqrt{z^2 - a^2}. \quad (2.166)$$

Komplexní potenciál pro Žukovského profil je vyjádřen:

$$F(z) = \frac{1}{2} \left[\bar{U}_\infty (\mathcal{K}(z) - S) + \frac{U_\infty R^2}{\mathcal{K}(z) - S} - \frac{\gamma}{\pi i} \log(\mathcal{K}(z) - S) \right] \quad (2.167)$$

a komplexní rychlost je:

$$w(z) = F'(z) = \mathcal{K}'(z) \left[\frac{1}{2} \left(\bar{U}_\infty - \frac{U_\infty R^2}{(\mathcal{K}(z) - S)^2} \right) - \frac{\gamma}{2\pi i} \frac{1}{\mathcal{K}(z) - S} \right]. \quad (2.168)$$

Kutta-Žukovského odtoková podmínka Pro Žukovského profil je nutné předsat odtokovou podmínku, která omezí na odtokové hraně cirkulaci rychlosti na řešení, která dávají fyzikální smysl. Tato odtoková podmínka se nazývá Kutta-Žukovského odtoková podmínka. Žukovského profil je definován kružnicemi $K(h, a)$ a M (2.4.3) a cirkulace γ je určena vztahem:

$$\gamma = 2\pi R |U_\infty| \left(\theta_\infty + \arctan \frac{h}{a} \right). \quad (2.169)$$

2.5 Aproximace nevířivého proudění tekutiny

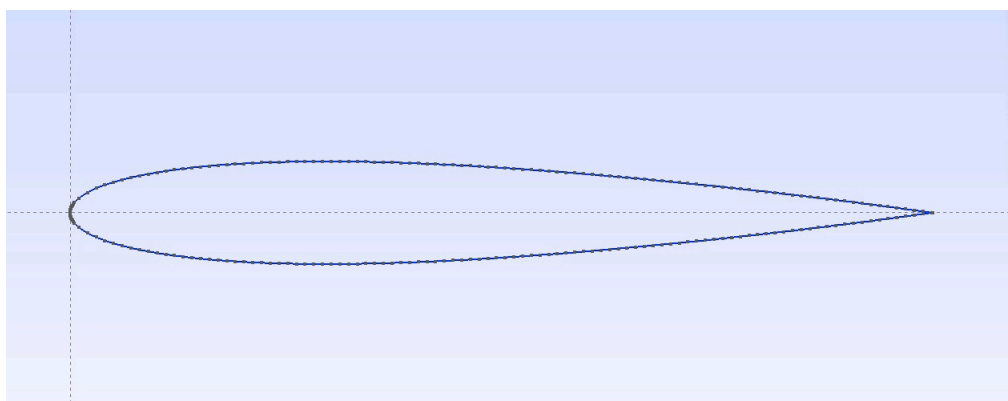
Jako obtékaný profil jsme si zvolili letecký profil NACA 0012. Profily NACA se mohou označovat čtyřmístným číslem, kterým je specifikována geometrie leteckého profilu. První číslice označuje maximální prohnutí v procentech hloubky. Druhá číslice definuje v polohu maximálního prohnutí křídla na těživě. Poslední dvě číslice definují maximální tloušťku v procentech hloubky. Na leteckém profilu je tětíva spojnice náběžného a odtokového bodu profilu a hloubka je délka tětivy, viz [10]. Tloušťková funkce pro čtyřciferné NACA profily je popsána rovnicí:

$$y = \pm t_{max} \left(1,4845\sqrt{x} - 0,63x - 1,7580x^2 + 1,4215x^3 - 0,5075x^4 \right), \quad (2.170)$$

kde t_{max} je maximální tloušťka profilu určená posledními dvěma číslicemi daného NACA profilu. Pro profil NACA 0012, který na základě znalostí číslic profilu není prohnutý a má maximální tloušťku 12% hloubky profilu je tloušťková funkce ve tvaru:

$$y = \pm 0,12 \left(1,4845\sqrt{x} - 0,63x - 1,7580x^2 + 1,4215x^3 - 0,5075x^4 \right). \quad (2.171)$$

Profil vytvoříme v programu GMSH a pomocí funkce `load_gmsh.m` importujeme do Matlabu.



Obrázek 2.36: Profil NACA 0012 v programu GMSH

Výpočet na profilu NACA 0012 realizujeme metodou konečných prvků v programu Matlab ve skriptu `solve_potential_flow.m`, kde zvolíme parametry pro obtékání profilu, tj. rychlost U a úhel náběhu θ . Jak je vidět např. v části (2.3.1), tak Dirichletova okrajová podmínka na křídle je neznámá konstanta C_k . Pro zjištění hodnoty této konstanty využijeme Kutta-Žukovského odtokovou podmínku pro ostrou odtokovou hranu. Tato podmínka říká, že proudnice opouští profil ve směru osy úhlu.

Pro získání konstanty, která uspokojuje Kutta-Žukovského odtokovou podmínku využijeme předpoklad, že hodnota proudové funkce na odtokové hraně by měla odpovídat hodnotě proudové funkce za odtokovou hranou, která je na ose úhlu profilu. Tento proces realizujeme pomocí funkce `Plot_constant.m`, která pro zvolené konstanty spočítá hodnoty proudové funkce za odtokovou hranou profilu. Následně se najde hodnota konstanty, pro kterou je proudová funkce na odtokové hraně stejná, jako proudová funkce za odtokovou hranou na ose úhlu profilu.

Po dosazení zjištěné konstanty do Dirichletovy okrajové podmínky `bvp.Dir1` a opětovném výpočtu získáme správné řešení problému proudění splňující Kutta-Žukovského odtokovou podmínku. Vypočítanou proudovou funkci poté s geometrií importujeme do programu ParaView [11], ve kterém zobrazíme proudnice. Pro model křídla NACA 0012 můžeme určit rozložení tlaku na jeho horní a dolní části a také rozdíl tlaku, které získáme z Bernoulliho rovnice

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 + U = \text{konst.} \quad (2.172)$$

Uvažujeme-li, že tlak okolí $p_\infty = 0$ a zanedbáme tloušťku křídla, tedy že rozdíl potenciální energie $\Delta U = 0$, tak je Bernoulliho rovnice po úpravě ve tvaru:

$$p = \frac{1}{2}\rho(\mathbf{u}_\infty^2 - \mathbf{u}^2). \quad (2.173)$$

Bezrozměrný tlakový součinitel je pro obtékaný profil ve tvaru

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho\mathbf{u}_\infty^2}. \quad (2.174)$$

Bezrozměrný tlakový součinitel počítá s relativním tlakem tedy rozdílem mezi tlakem p v daném místě a atmosférickým tlakem p_∞ . Pro účely tohoto výpočtu uvažujeme, že atmosférický tlak okolí $p_\infty = 0$ stejně jako v případě výpočtu tlaku p z Bernoulliho rovnice (2.173). Bezrozměrný tlakový součinitel bude tedy ve tvaru:

$$C_p = \frac{p}{\frac{1}{2}\rho\mathbf{u}_\infty^2}. \quad (2.175)$$

Vztlakový koeficient se vyjádří:

$$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho\mathbf{u}_\infty A}. \quad (2.176)$$

Pro vztlakový koeficient existuje aproximace, kterou si lze ověřit správný výpočet vztlakového koeficientu [12]:

$$C_L^{approx.} \approx 2\pi \sin(\alpha), \quad (2.177)$$

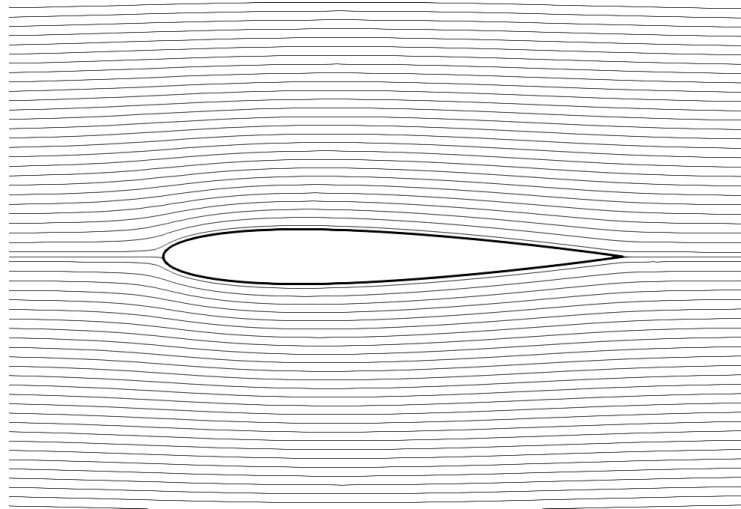
kde α je úhel náběhu. Odporový koeficient je ve tvaru:

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho\mathbf{u}_\infty A}. \quad (2.178)$$

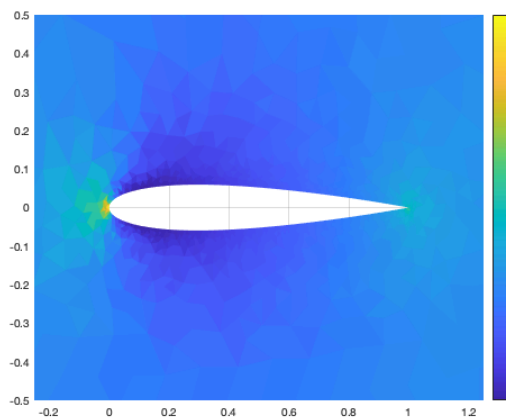
Pro výpočet vztlakového a odporového koeficientu uvažujeme jednotkovou plochu křídla. Vztlakovou a odporovou sílu získáme z rozložení tlaku na křídle a složek normály k povrchu profilu.

Obtékání profilu NACA 0012 rozdělíme na proudění stlačitelné a nestlačitelné a pro oba případy budeme uvažovat stejné podmínky, tedy počáteční hustotu $\rho = 1,225 \text{ [kgm}^{-3}\text{]}$, vstupní rychlost $U = 50 \text{ [ms}^{-1}\text{]}$ a stejné úhly náběhu θ .

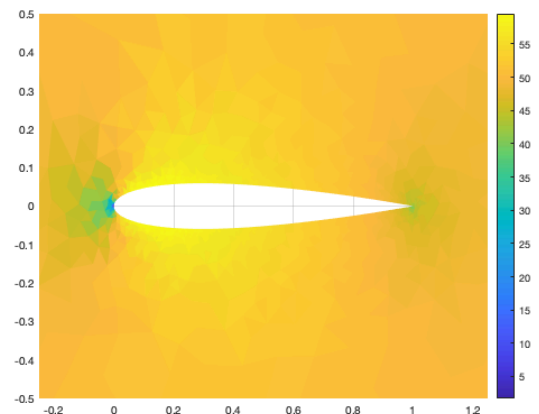
2.5.1 Nestlačitelné proudění



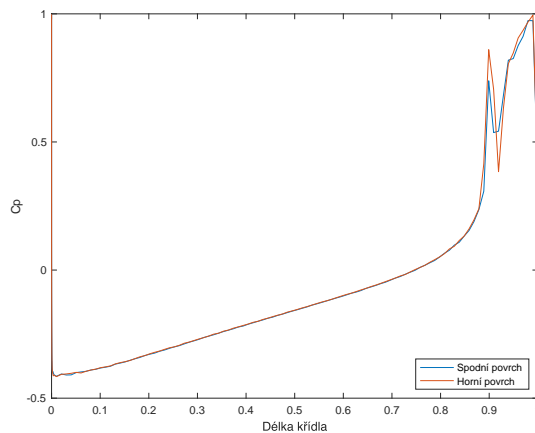
Obrázek 2.37: Izočáry proudové funkce profilu NACA 0012, $U = 50 [m \cdot s^{-1}]$, $\theta = 0^\circ$



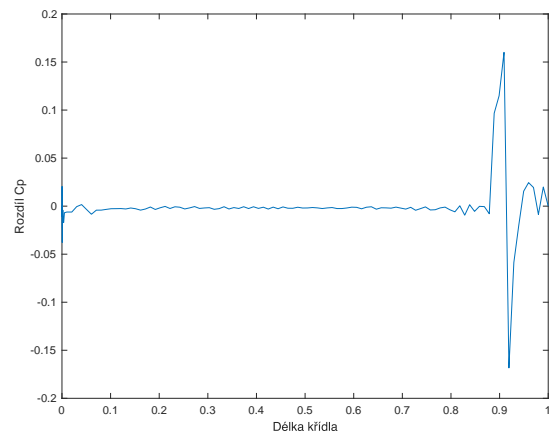
Obrázek 2.38: Rozložení tlaku v $[Pa]$ pro $U = 50 [m \cdot s^{-1}]$, $\theta = 0^\circ$



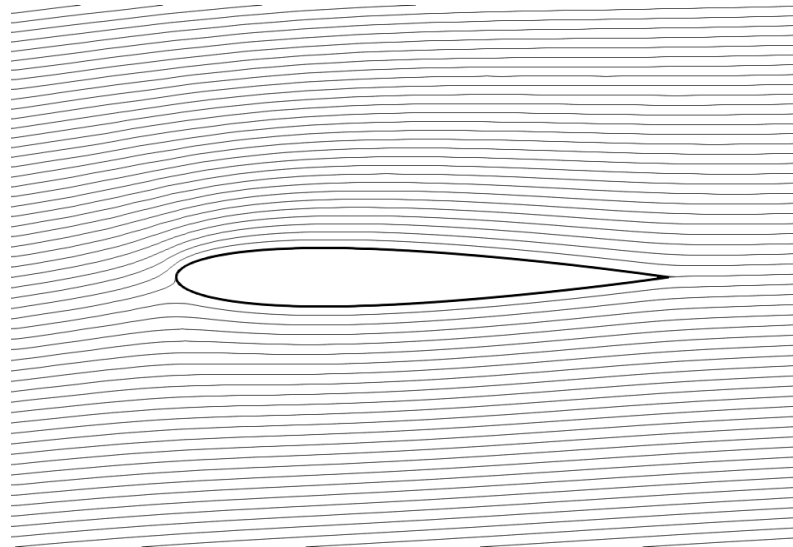
Obrázek 2.39: Rozložení rychlosti v $[m \cdot s^{-1}]$ pro $U = 50 [m \cdot s^{-1}]$, $\theta = 0^\circ$



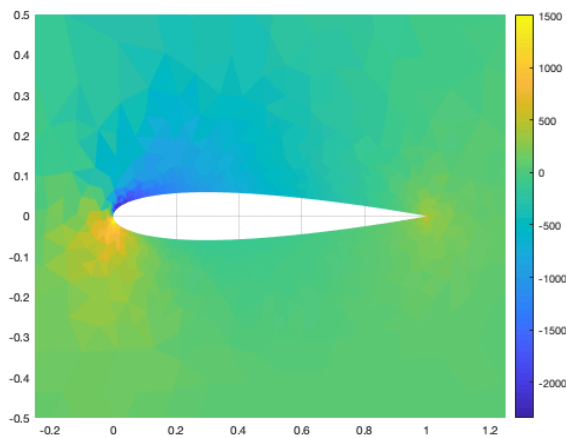
Obrázek 2.40: Tlakový součinitel C_p pro $U = 50 [m \cdot s^{-1}]$, $\theta = 0^\circ$



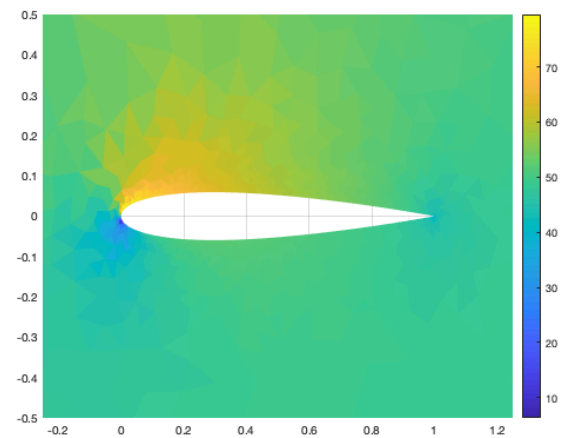
Obrázek 2.41: Rozdíl $C_{p_{horní}} - C_{p_{dolní}}$



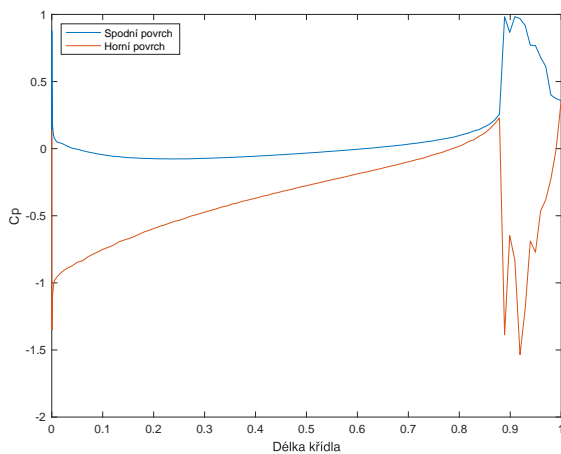
Obrázek 2.42: Izočáry proudové funkce profilu NACA 0012, $U = 50 [m.s^{-1}]$, $\theta = 4^\circ$



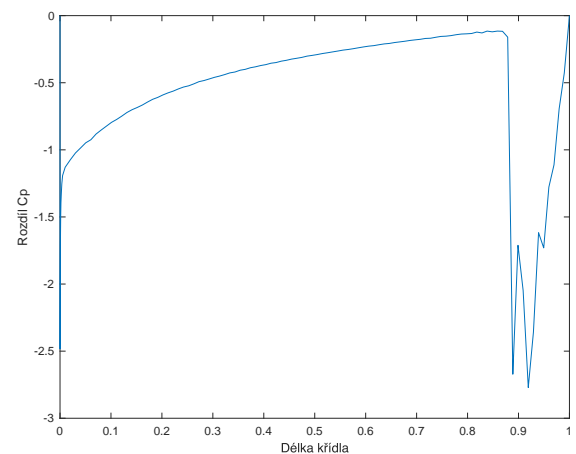
Obrázek 2.43: Rozložení tlaku v $[Pa]$ pro $U = 50 [m.s^{-1}]$, $\theta = 4^\circ$



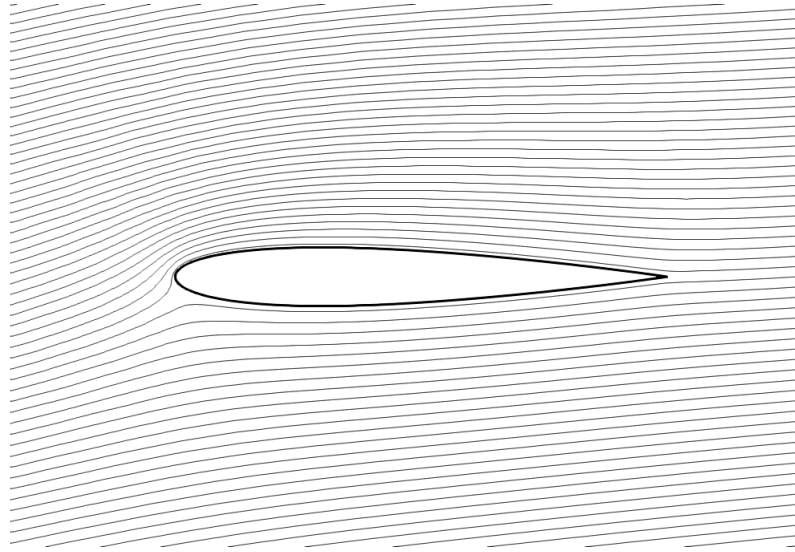
Obrázek 2.44: Rozložení rychlosti v $[m.s^{-1}]$ pro $U = 50 [m.s^{-1}]$, $\theta = 4^\circ$



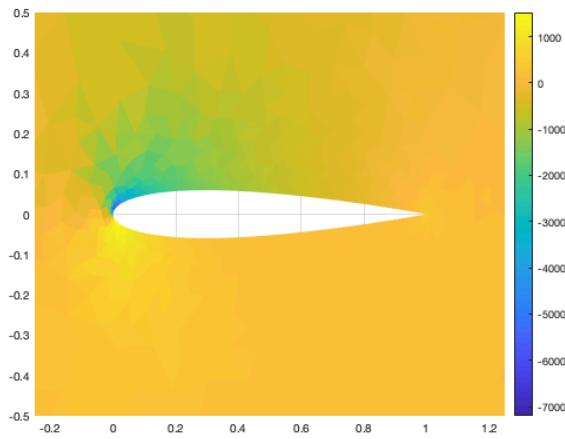
Obrázek 2.45: Tlakový součinitel C_p pro $U = 50 [m.s^{-1}]$, $\theta = 4^\circ$



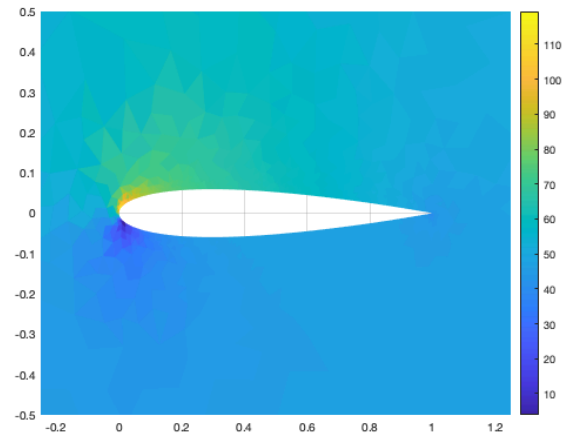
Obrázek 2.46: Rozdíl $C_{p_{horní}} - C_{p_{dolní}}$



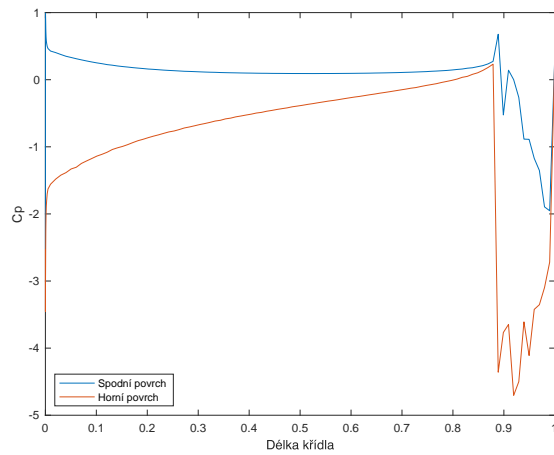
Obrázek 2.47: Izočáry proudové funkce profilu NACA 0012, $U = 50 [ms^{-1}]$, $\theta = 8^\circ$



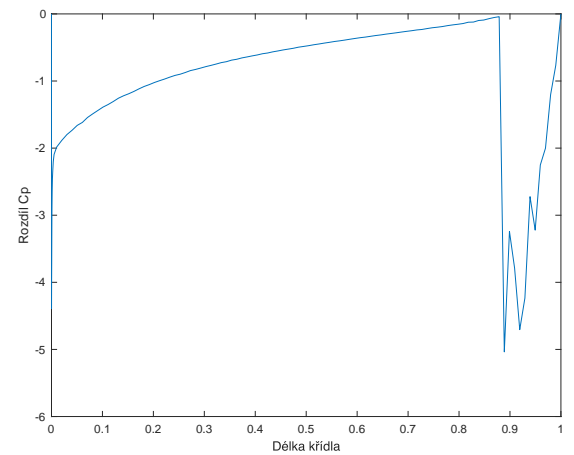
Obrázek 2.48: Rozložení tlaku v $[Pa]$ pro $U = 50 [ms^{-1}]$, $\theta = 8^\circ$



Obrázek 2.49: Rozložení rychlosti v $[ms^{-1}]$ pro $U = 50 [ms^{-1}]$, $\theta = 8^\circ$



Obrázek 2.50: Tlakový součinitel C_p pro $U = 50 [ms^{-1}]$, $\theta = 8^\circ$



Obrázek 2.51: Rozdíl $C_{p_{horní}} - C_{p_{spodní}}$

Z obrázků je vidět, že v nestlačitelném proudění pro úhel náběhu $\theta = 0^\circ$ je rozložení a průběh jednotlivých vypočítaných veličin v podstatě symetrický. Postupně se se zvyšujícím úhlem náběhu θ zvyšuje rychlost v horní polovině křídla, zejména u náběžné hrany. Zároveň se v místech na profilu, kde se zvyšuje rychlost, snižuje tlak. Tento jev odpovídá předpokládanému chování, které odpovídá Bernoulliho rovnici (2.172). V případě grafů s rozdíly tlakových součinitelů C_p jsou vidět velké rozdíly v místech, kde jsou velké změny v průběhu jednotlivých tlakových součinitelů, což je ve všech případech u konce leteckého profilu.

Pro nestlačitelné proudění byly stanoveny i odporové a vztlakové síly, resp. součinitele v závislosti na úhlu náběhu.

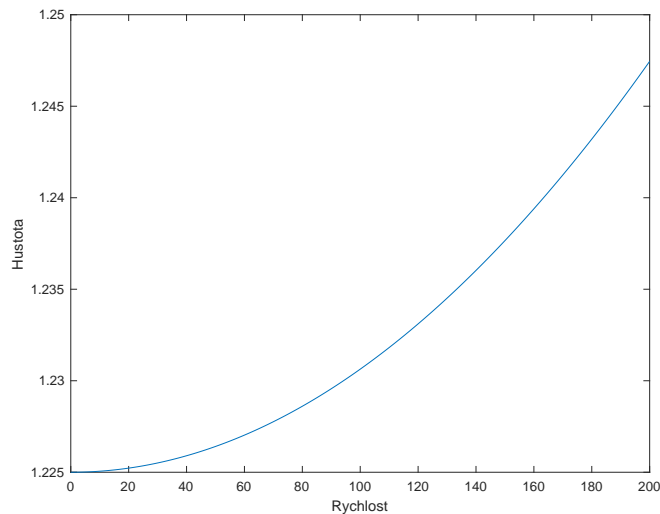
Tabulka 7: Nestlačitelné proudění

θ [°]	F_D [N]	F_L [N]	C_D	C_L	$C_L^{approx.}$
0	4,576	4,379	0,003	0,003	0
4	-45,745	732,205	-0,03	0,478	0,438
8	-196,598	1 453,402	-0,129	0,949	0,875

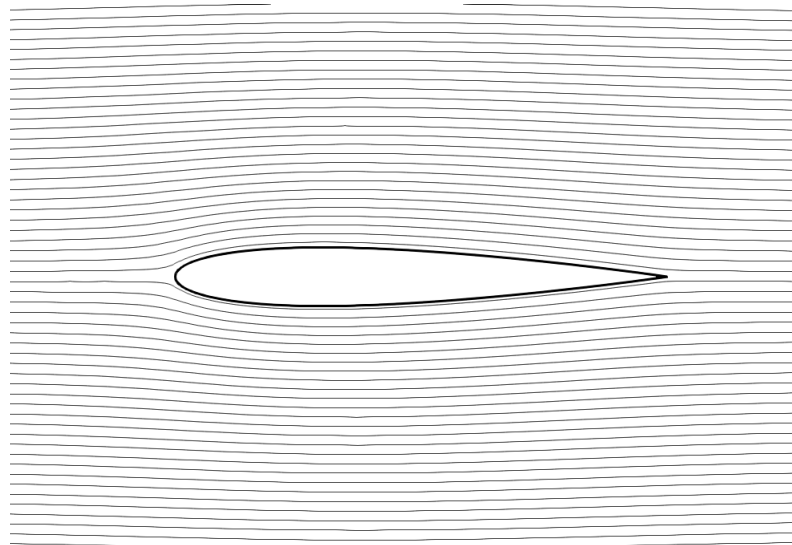
Z tabulky je vidět, že se zvyšujícím se úhlem náběhu zvyšuje jak odporová síla F_D v absolutní hodnotě, tak vztlaková síla F_L , čemuž odpovídá hodnota příslušných součinitelů. Pro úhel náběhu $\theta = 0^\circ$ profil nevytváří vztlak, protože podle vztlakové čáry je tento úhel v oblasti nulového vztlaku, viz [10]. V tabulce je také vidět, že přibližný vztah pro výpočet vztlakového součinitele $C_L^{approx.}$ (2.177) dokáže s poměrně malou chybou určit hodnotu vztlakového součinitele C_L .

2.5.2 Stlačitelné proudění

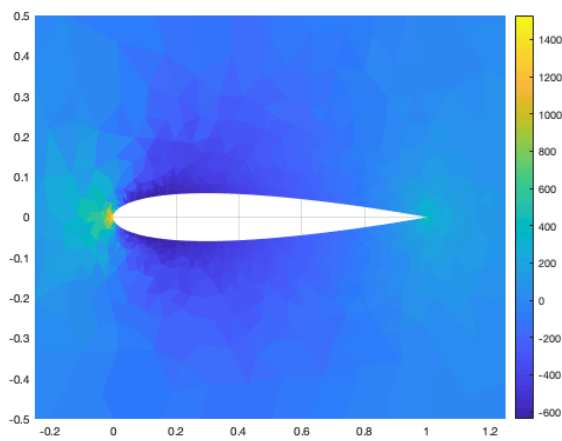
Obtékání profilu NACA 0012 rozšíříme o stlačitelné proudění. Vypočítáme závislost hustoty na rychlosti, resp. $\nabla\Psi$. Tento výpočet realizujeme pomocí funkce `density_gradintPSI.m`, která z Bernoulliho rovnice pro hustotu (2.122) určí výslednou závislost hustoty na rychlosti pro stlačitelné proudění. Následně se pro danou závislost hustoty iterací určí výsledná proudová funkce Ψ .



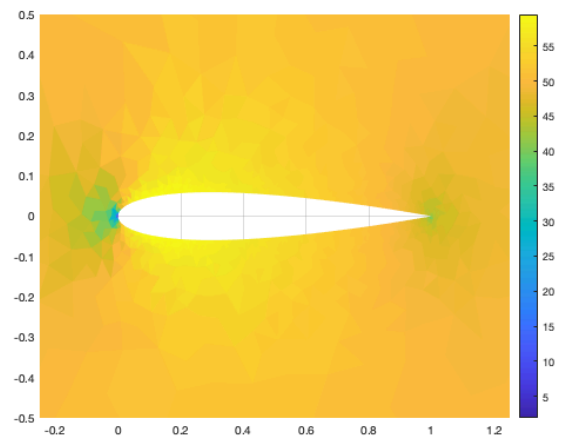
Obrázek 2.52: Závislost hustoty ρ [$kg\ m^{-3}$] na rychlosti u [ms^{-1}]



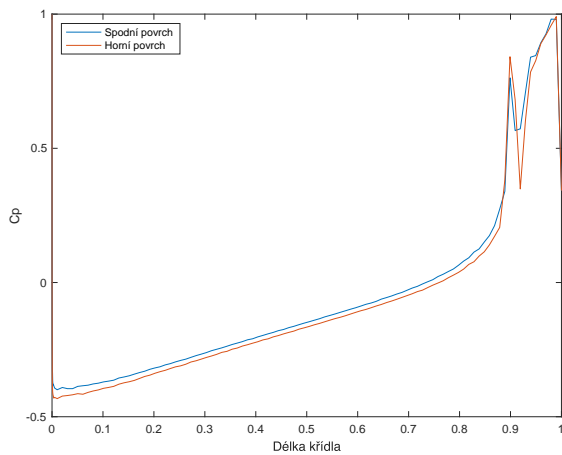
Obrázek 2.53: Izočáry proudové funkce profilu NACA 0012, $U = 50 [m \cdot s^{-1}]$, $\theta = 0^\circ$



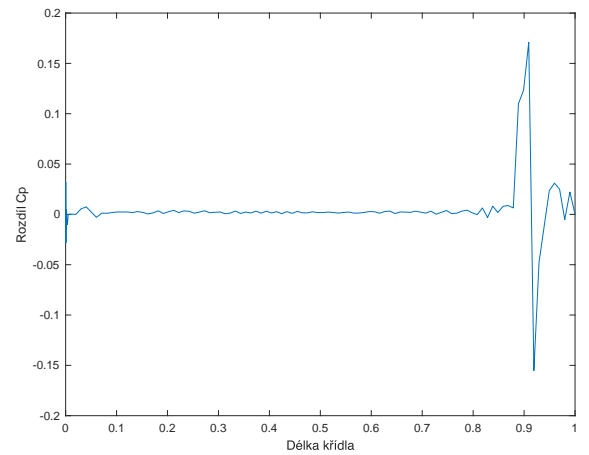
Obrázek 2.54: Rozložení tlaku v $[Pa]$ pro $U = 50 [m \cdot s^{-1}]$, $\theta = 0^\circ$



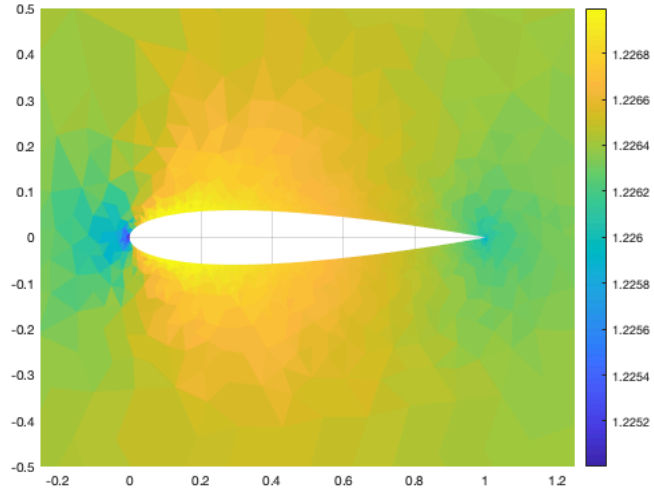
Obrázek 2.55: Rozložení rychlosti v $[m \cdot s^{-1}]$ pro $U = 50 [m \cdot s^{-1}]$, $\theta = 0^\circ$



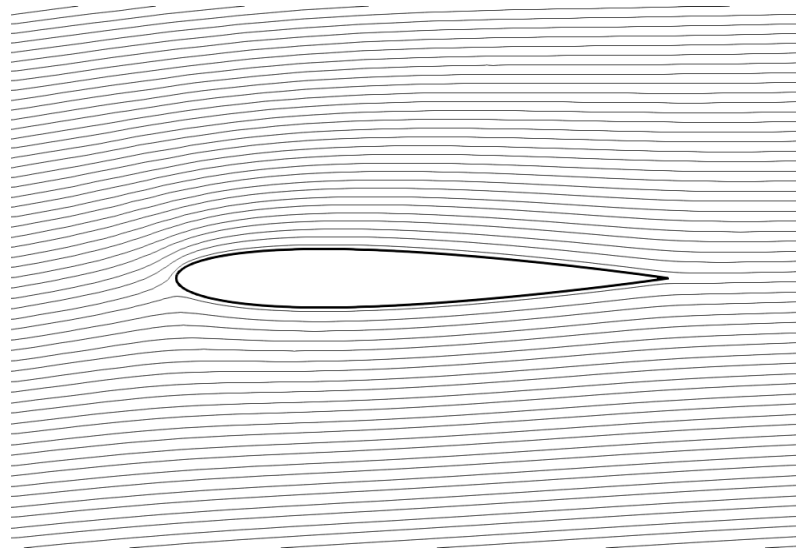
Obrázek 2.56: Tlakový součinitel C_p pro $U = 50 [m \cdot s^{-1}]$, $\theta = 0^\circ$



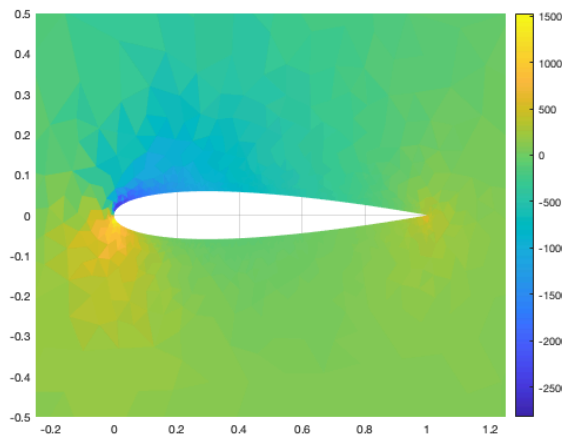
Obrázek 2.57: Rozdíl $C_{p_{horní}} - C_{p_{dolní}}$



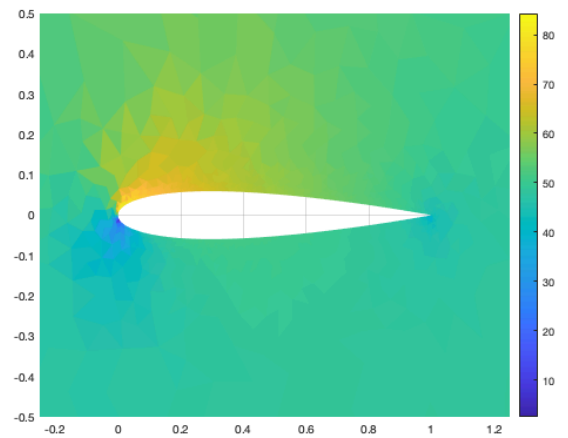
Obrázek 2.58: Rozložení hustoty ρ [$kg\ m^{-3}$]



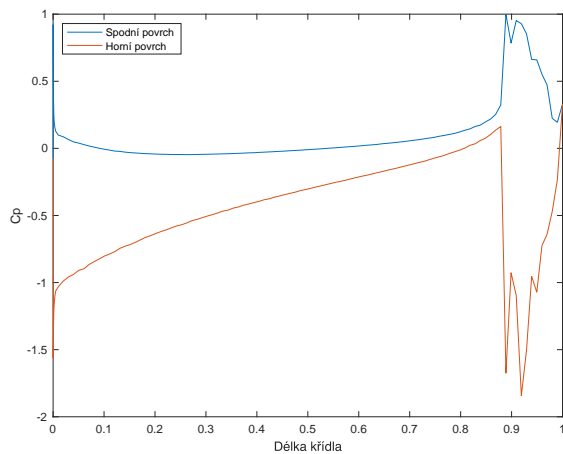
Obrázek 2.59: Izočáry proudové funkce profilu NACA 0012, $U = 50$ [$m\ s^{-1}$], $\theta = 4^\circ$



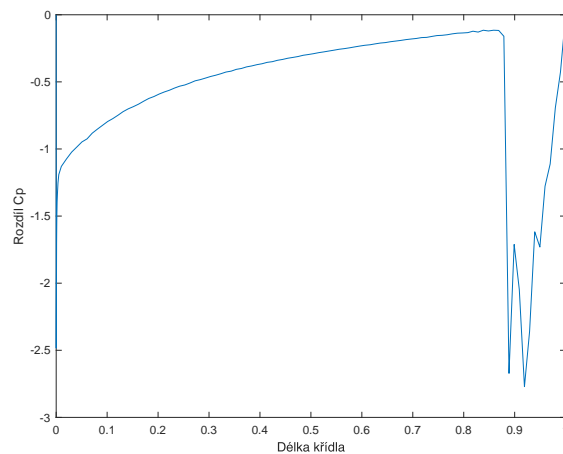
Obrázek 2.60: Rozložení tlaku v [Pa] pro $U = 50$ [$m\ s^{-1}$], $\theta = 4^\circ$



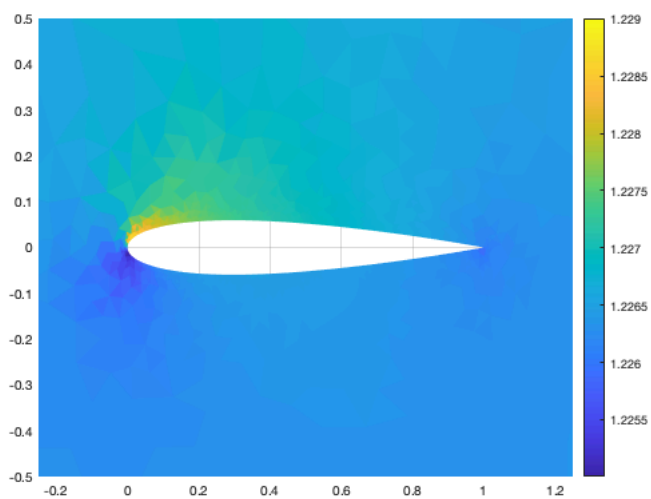
Obrázek 2.61: Rozložení rychlosti v [$m\ s^{-1}$] pro $U = 50$ [$m\ s^{-1}$], $\theta = 4^\circ$



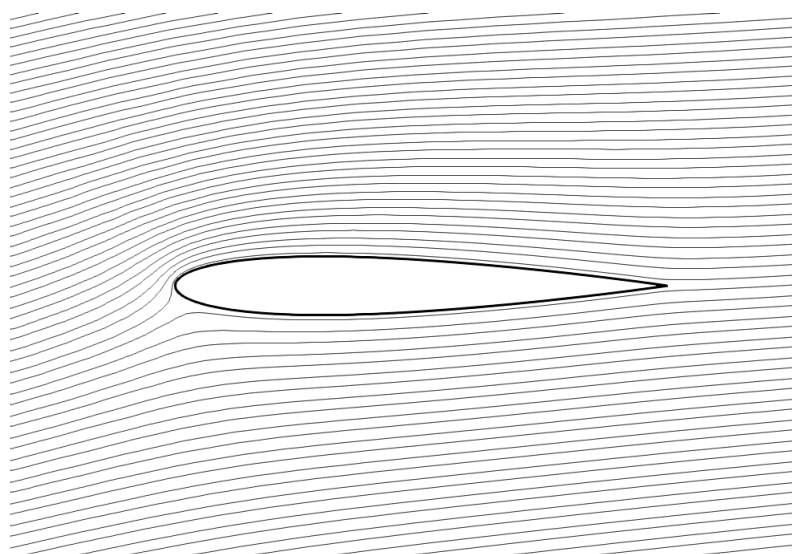
Obrázek 2.62: Tlakový součinitel C_p pro $U = 50 [m s^{-1}]$, $\theta = 4^\circ$



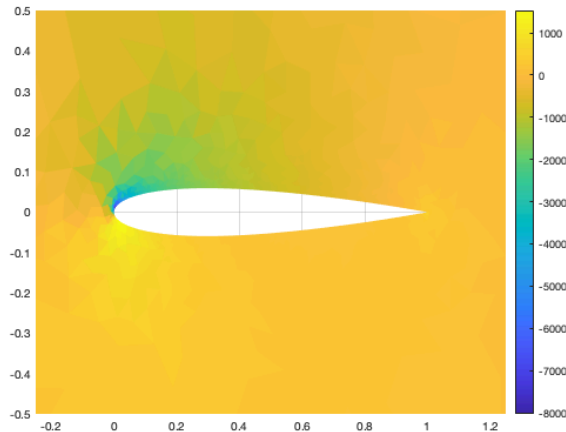
Obrázek 2.63: Rozdíl $C_{p_{horní}} - C_{p_{spodní}}$



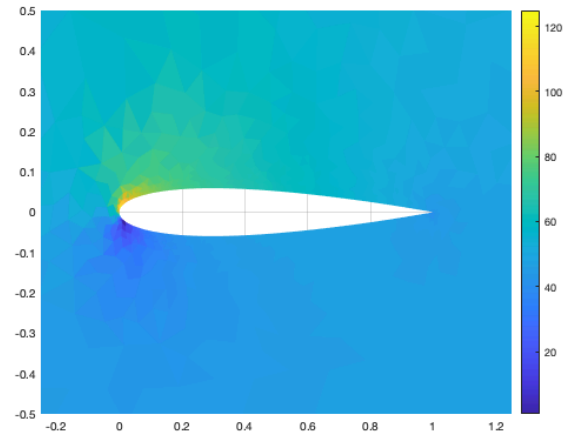
Obrázek 2.64: Rozložení hustoty $\rho [kg m^{-3}]$



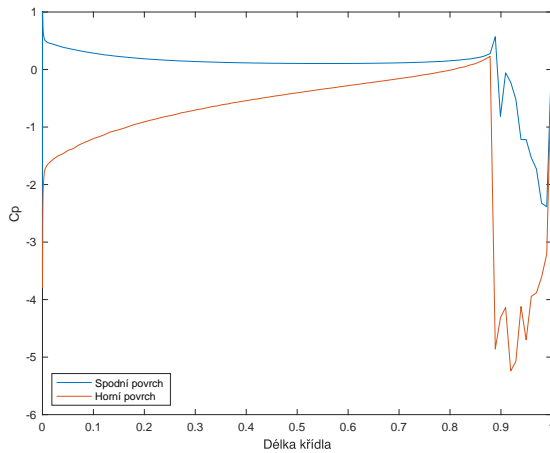
Obrázek 2.65: Izočáry proudové funkce profilu NACA 0012, $U = 50 [m s^{-1}]$, $\theta = 8^\circ$



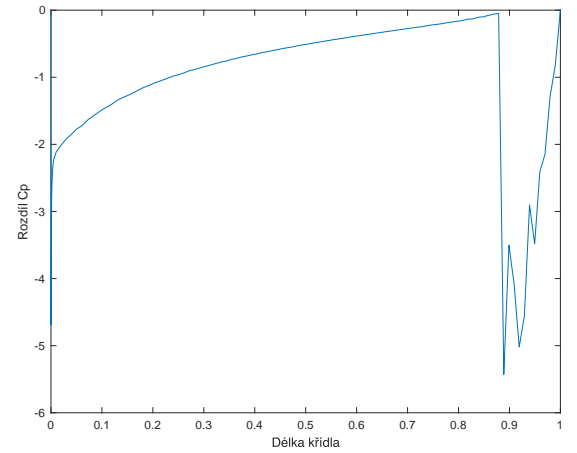
Obrázek 2.66: Rozložení tlaku v $[Pa]$ pro $U = 50 [ms^{-1}]$, $\theta = 8^\circ$



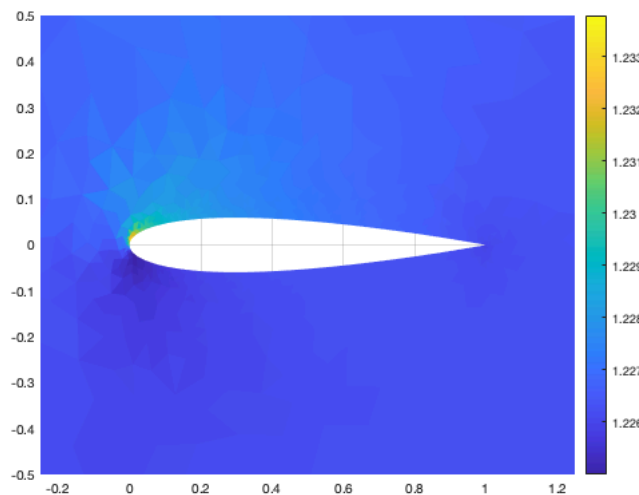
Obrázek 2.67: Rozložení rychlosti v $[ms^{-1}]$ pro $U = 50 [ms^{-1}]$, $\theta = 8^\circ$



Obrázek 2.68: Tlakový součinitel C_p pro $U = 50 [ms^{-1}]$, $\theta = 8^\circ$



Obrázek 2.69: Rozdíl $C_{p_{horní}} - C_{p_{dolní}}$



Obrázek 2.70: Rozložení hustoty $\rho [kg m^{-3}]$

Pro stlačitelné proudění je průběh a rozložení veličin při náběhu $\theta = 0^\circ$ velmi podobné se stejným případem u nestlačitelného proudění. Rozdíl je zejména v průběhu tlakových součinitelů, které se pro stlačitelné proudění více liší mezi horním

a spodním povrchem profilu. Při úpravě úhlu náběhu θ je vidět, že rozložení tlaku a rychlosti se pro stejnou rychlost a náběhový úhel nepatrně odlišuje. Tato změna hodnot tlaku a rychlosti kolem profilu se zvyšující se rychlosti U bude zvětšovat, protože s rychlostí U roste i hustota ρ , viz Obrázek 2.52. Oproti nestlačitelnému proudění byl navíc zobrazen průběh hustoty ρ kolem leteckého profilu. Z rozložení hustoty je vidět uvedená závislost na rychlosti, protože v místech, kde je na profilu rychlost nejvyšší, je i nejvyšší hodnota hustoty a naopak. Počáteční hodnota hustoty vzduchu byla pro stlačitelné i nestlačitelné proudění $\rho = 1,225 [kgm^{-3}]$ a maximální hodnota hustoty dosáhla zhruba $\rho = 1,233 [kgm^{-3}]$ na náběhové hraně křídla pro úhel $\theta = 8^\circ$.

Tabulka 8: Stlačitelné proudění

θ [°]	F_D [N]	F_L [N]	C_D	C_L	$C_L^{approx.}$
0	4,529	37,408	0,003	0,024	0
4	-58,396	856,369	-0,038	0,559	0,438
8	-224,512	1 550,889	-0,147	1,013	0,875

Pro stlačitelné proudění byly určeny odporové a vztlakové síly s příslušnými součiniteli, stejně jako pro případ nestlačitelného proudění. Pro stlačitelné proudění vychází hodnoty odporových a vztlakových součinitelů i sil v absolutní hodnotě větší než pro stejné případy u nestlačitelného proudění. Zároveň je vidět, že vztah pro přibližné určení vztlakového součinitele (2.177) lze rozumně použít pouze pro nestlačitelné proudění. Vzhledem k tomu, že se vztlaková síla i součinitel pro stlačitelné i nestlačitelné proudění zvyšovaly s rostoucím úhlem náběhu, znamená to, že nebyl nepřekročen kritický úhel náběhu θ_{kr} pro zkoumané nevířivé proudění a nedošlo tudíž k poklesu vztlakové síly a tedy ani vztlakového součinitele, viz [10].

2.5.3 Analytické a numerické proudění Žukovského profilu

Na základě věty o konformním zobrazení je možné jakoukoliv neprázdnou jednoduše souvislou oblast zobrazit konformně na kruh, viz [9], [13]. Tudíž obtékání Žukovského profilu je obtékáním kruhu M s příslušnou transformací. Žukovského profil vzniká z kružnic popsány v části (2.4.3) a z této geometrie lze určit poloměr kruhu $K(h, a)$ se středem v bodě ih :

$$R_1 = \sqrt{a^2 + h^2}. \quad (2.179)$$

Dále můžeme určit poloměr kružnice M :

$$R = R_1 + \Delta. \quad (2.180)$$

Střed kruhu M získáme z poměrů stran trojúhelníku, tedy:

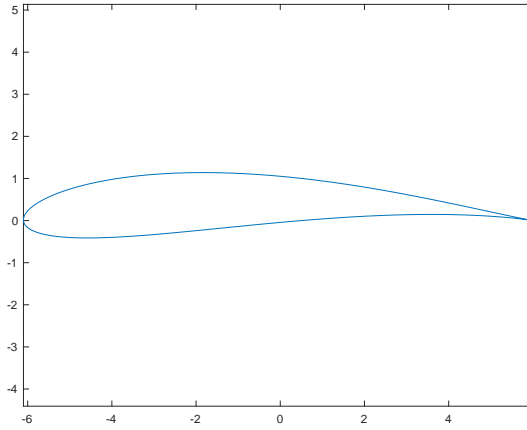
$$S_x = da = \frac{\Delta a}{R_1}, \quad (2.181)$$

$$S_y = h + dh = h \left(1 + \frac{\Delta}{R_1} \right). \quad (2.182)$$

Výsledné komplexní číslo v polárním tvaru pro kruh M je tedy

$$z = (S_x + R \cos(\theta)) + i(S_y + R \sin(\theta)). \quad (2.183)$$

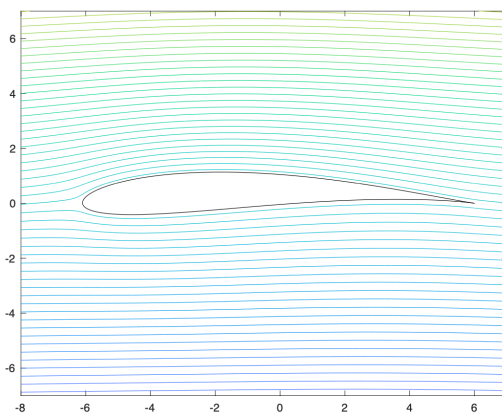
Výsledný Žukovského profil získáme dosazením (2.183) do funkce (2.165).



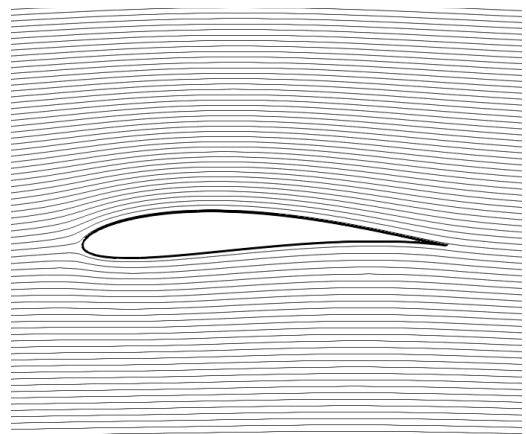
Obrázek 2.71: Žukovského profil s parametry $a = 6$, $h = 0,5$, $\Delta = 0,6$.

Abychom získali obtékání Žukovského profilu, využijeme funkci komplexního potenciálu (2.167). Hledanou proudovou funkci najdeme podle (2.155) jako $\text{Im}(F(z))$. Tento postup realizujeme skriptem `Zukovskeho_profil.m` v Matlabu, kde dosadíme parametry profilu a , h , Δ . Dále zvolíme rychlost U [ms^{-1}] a úhel náběhu `degUhel` ve stupních.

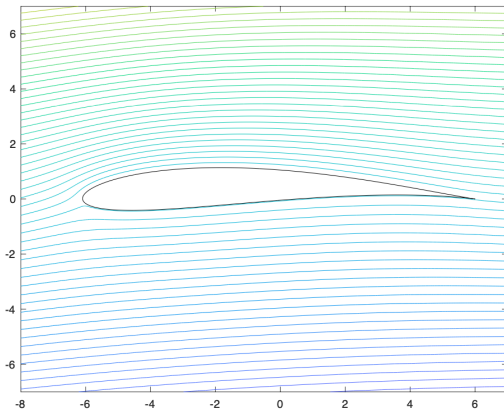
Zvolili jsme rychlost $U = 50$ [ms^{-1}] a budeme upravovat úhel náběhu. Odtoková podmínka je realizovaná Kutta-Žukovského odtokovou podmínkou (2.169). Získané analytické výsledky obtékání Žukovského profilu pro různé varianty úhlů náběhu srovnáme s numerickým řešením obtékání Žukovského profilu se stejnými parametry a pro stejné úhly náběhu.



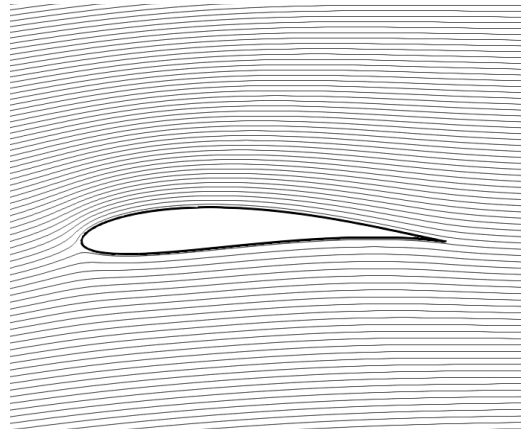
Obrázek 2.72: Analytické řešení obtékání Žukovského profilu pro $\theta = 0^\circ$



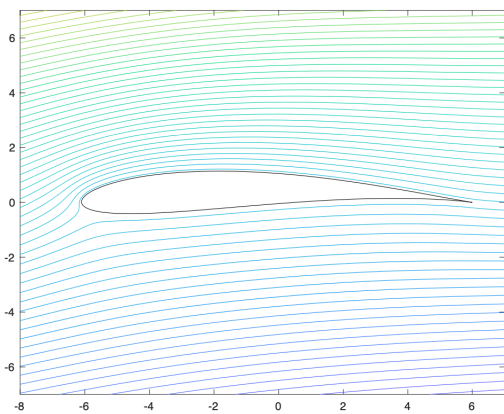
Obrázek 2.73: Numerické řešení obtékání Žukovského profilu pro $\theta = 0^\circ$



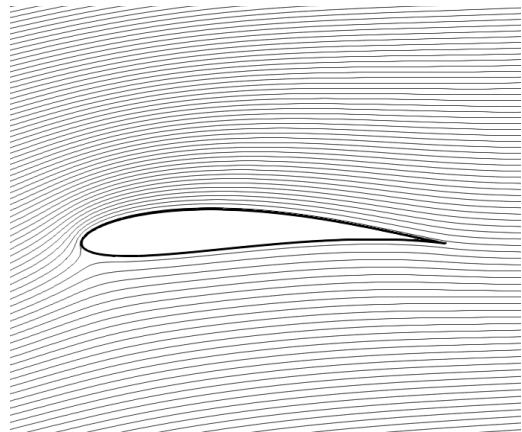
Obrázek 2.74: Analytické řešení obtékání Žukovského profilu pro $\theta = 4^\circ$



Obrázek 2.75: Numerické řešení obtékání Žukovského profilu pro $\theta = 4^\circ$



Obrázek 2.76: Analytické řešení obtékání Žukovského profilu pro $\theta = 8^\circ$



Obrázek 2.77: Numerické řešení obtékání Žukovského profilu pro $\theta = 8^\circ$

Z obrázků obtékání Žukovského profilu je vidět, že pro všechny zkoumané úhly náběhu θ je splněna Kutta-Žukovského odtoková podmínka na odtokové hraně, tedy proudnice opouštějí povrch profilu ve směru osy úhlu profilu.

Závěr

V této práci jsme popsali metodu konečných prvků v 1D i 2D. Pro obě varianty jsme určili příslušné slabé formulace včetně diskretizace problému Galerkinovou metodou.

Kódy, které jsme napsali v programu Matlab pro řešení Poissonovy rovnice metodou konečných prvků v 1D a ve 2D, jsme otestovali srovnáním s analytickým řešením, čímž jsme zkontrolovali i funkčnost napsaných kódů. Metodu konečných prvků v 1D jsme srovnali s analytickým řešením pro různé velikosti kroku h a zjistili jsme velikost chyby numerické metody. Zároveň jsme také určili závislost maximální velikosti chyby numerické metody na velikosti kroku h použité diskretizace a určili i odhad řádu numerické metody. Metodu konečných prvků ve 2D jsme vyzkoušeli na testovacím problému, pro který známe analytické řešení a tím jsme otestovali i funkčnost kódu, který byl následně použit pro aproximaci rovinného nevířivého proudění. Kód jsme testovali na dvou různých oblastech s různými kombinacemi Dirichletových, Neumannových a Robinových okrajových podmínek, pro které jsme zjistili maximální velikost chyby v závislosti na jemnosti sítě a odhad řádu konvergence metody obdobně jako pro 1D případ.

V druhé části jsme se seznámili s matematickým modelováním proudění tekutin. Byly popsány různé popisy proudění, odvozena rovnice kontinuity a Eulerova rovnice dynamiky tekutin. Určili jsme i příslušné Laplaceovy rovnice proudové funkce pro nestlačitelné i stlačitelné proudění, včetně odvození Bernoulliho vztahu pro výpočet hustoty pro problém stlačitelného proudění. Následně jsme formulovali problém pro aproximaci nevířivého rovinného stlačitelného i nestlačitelného proudění. Pro tyto formulace problémů proudění jsme následně odvodili příslušné slabé formulace.

V rámci matematického modelování proudění jsme popsali i základy z komplexní analýzy, které jsme následně použili pro popis proudění pomocí funkcí komplexní proměnné. Určili jsme vztahy pro komplexní potenciál a komplexní rychlost pro rovinné obtékání válce a Žukovského profilu.

Pro aproximaci nevířivého rovinného proudění tekutin jsme vytvořili v programu GMSH profil křídla NACA 0012, pro který jsme řešili formulovaný problém rovinného nevířivého proudění tekutiny. Z numerického řešení jsme určili pro nestlačitelné i stlačitelné proudění s různými úhly náběhu obtékání profilu NACA 0012. Zároveň jsme získali rozložení tlaku a rychlosti okolo profilu včetně průběhu tlakového součinitele. Určili jsme i odporové a vztlakové síly a jejich příslušné součinitele. Pro stlačitelné proudění jsme navíc určili i rozložení hustoty v okolí zkoumaného profilu NACA 0012.

Pro ověření výsledků obtékání jsme využili Žukovského profilu, pro který jsme získali analytické řešení obtékání profilu a porovnali ho s numerickým řešením stejného profilu vytvořeného opět v programu GMSH pomocí metody konečných prvků.

Bibliografie

1. NEUSTUPA, Jiří. *Matematika II*. Nakladatelství ČVUT, 2018. ISBN 80-01-03522-0.
2. PETR SVÁČEK, Miloslav Feistauer. *Metoda konečných prvků*. Nakladatelství ČVUT, 2006. ISBN 80-01-03522-0.
3. *MATLAB*. Dostupné také z: <https://www.mathworks.com/products/matlab.html>.
4. GEUZAINÉ, C.; REMACLE, J.-F. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 79(11), pp. 1309-1331. 2009.
5. FEISTAUER, Miloslav. *Mathematical methods in fluid dynamics*. Harlow: Longman, 1993. ISBN 0-582-20988-9.
6. JAN JEŽEK Blanka Váradiová, Josef Adamec. *Mechanika tekutin*. Ediční středisko ČVUT, 2000. ISBN 80-01-01615-3.
7. ŠIMÁNEK, Petr. Metoda konečných prvků pro řešení stlačitelného proudění. Bakalářská práce. *Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, Katedra numerické matematiky*. 2007.
8. PROKOPOVÁ, Jaroslava. Numerické řešení obtékání leteckého profilu. Bakalářská práce. *Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, Katedra numerické matematiky*. 2006.
9. VELESÝ, Jiří. *Komplexní analýza pro učitele*. Nakladatelství Karolinum, 2000. ISBN 80-246-0202-4.
10. BROŽ, Václav. *Aerodynamika nízkých rychlostí*. Ediční středisko ČVUT, 1990. ISBN 80-01-00198-9.
11. *ParaView*. Dostupné také z: <https://www.paraview.org>.
12. COLLEY, Eamonn. *Modelling Flow around a NACA 0012 foil*. Dostupné také z: https://cmst.curtin.edu.au/wp-content/uploads/sites/4/2016/05/colley_modelling_flow_around_a_NACA_0012_foil2011.pdf.
13. MIROSLAV BRDIČKA Ladislav Samek, Bruno Sopko. *Mechanika kontinua*. Nakladatelství Academia, 2011. ISBN 978-80-200-2039-0.

Přílohy

Součástí této bakalářské práce je soubor, ve kterém jsou uloženy všechny kódy, které byly pro výpočty uvedené v této práci použity.