

Posudek k dizertační práci Ing. Martina Hanka s názvem

„Numerical solution of the incompressible flow using the domain decomposition method“

Předložená dizertační práce se zabývá řešením 3d nestlačitelného proudění metodou doménové dekompozice BDDC. Autor představuje rozšíření více-úrovňové varianty metody, která prokazuje svůj potenciál řešit úlohy proudění s větší přesností než doposud. Metoda je v práci také použita na několik průmyslových problémů. Téma práce je velmi aktuální z hlediska teoretického i praktického použití.

Práce má pět kapitol. V kapitole první autor motivuje téma práce, předkládá stav poznání a formuluje cíle práce. Ve druhé kapitole je odvozena variační formulace úlohy, je zde popsána metoda konečných prvků založená na Taylorových-Hoodových elementech, jsou odvozeny lokální matice a vektory pravých stran a jsou popsány dva způsoby linearizace diskretizovaného diferenciálního operátoru. Kapitola třetí připomíná metody rozložení oblasti s důrazem na detailnější popis 2-úrovňové BDDC pro symetrické úlohy včetně jejich konvergenčních vlastností. V kapitole čtvrté začíná prezentace vlastních výsledků. Je zde popsáno nové rozšíření BDDC na nesymetrické úlohy sedlo-bodového typu. Nejdříve je rozšířena metoda 2-úrovňová a pak i více-úrovňová BDDC. Autor se dále zabývá škálováním mezi subdoménami, přičemž diskutuje specifický typ upwind-škálování. Jsou diskutovány také způsoby dekompozice sítě. Autor poznamenává, že pro účely svých strukturovaných geometrií naprogramoval vlastní mesh decomposer založený na rekurzivních bisekcích 3d diskretizací do krychlí. V kapitole páté jsou prezentovány numerické simulace. Na příkladu úzkého kanálu je demonstrována robustnost nelineárních Picardových iterací i iterací pro linearizované úlohy řešené metodou BiCGStab. Na akademické úloze je ukázána škálovatelnost 2, 3 a 4-úrovňové BDDC. Na závěr je prezentováno použití metod na průmyslové úloze hydrostatického ložiska. V kapitole 6 je závěr, za kterým následuje seznam autorových publikací a další reference.

Práce je dobře strukturována, jednotlivé kapitoly na sebe navazují. Práce je napsána v angličtině. V práci jsem zavadil o několik překlepů a nedokonalostí ve značení, z nichž si některé dovoluji zmínit:

1. Na str. 18 není řečeno, co se myslí symbolem „ ∂n “. Je to nejspíš počet uzlů na Dirichletovské části hranice. V jedné sumě je špatná horní mez „ $3n + \partial n$ “.
2. Na str. 28 nerozumím, co se myslí pseudoinverzí funkce δ_i . Na ni je pak aplikována matice identity I_h . Nejedná se spíše než o identitu o interpolaci?
3. V popisu Taylorových-Hoodových elementů na str. 15-17 není nikde zmíněno, že je uvažován referenční element $(-1,1)^3$. V popisu pak chybí transformace z referenčního elementu, která podle obrázků sítě se dokonce zdá být nelineární (křivočaré elementy).

Ocenil bych také, kdyby náročnou kapitolu 3 doprovázely ilustrace. Celková formální úroveň práce je však velmi dobrá.

Autor se velmi dobře zorientoval ve stavu poznání, který výstižně popisuje na dvou stranách v úvodní kapitole. Doporučuji ale Ing. Hankovi podívat se minimálně na jednu práci J. Pasciaka, a to na příspěvek ve sborníku z druhé konference DDM z roku 1988 „Two domain decomposition techniques for Stokes problem“ (viz ddm.org), kde je navržena podobná idea rozšíření DD ze symetrických úloh na sedlo-bodové.

V úvodní kapitole jsou stanoveny dva cíle práce, a to 1) rozšířit více-úrovňovou metodu BDDC na úlohy proudění a 2) aplikovat ji na vybrané průmyslové úlohy. Oba tyto cíle se beze zbytku podařilo naplnit.

Publikační aktivita doktoranda je na vysoké úrovni zejména díky článku publikovaném v prestižním časopise SIAM Journal on Scientific Computing, kde je Ing. Hanek hlavním autorem. Kromě toho je hlavním autorem ve dvou příspěvcích ze sborníků z domácích konferencí a spoluautorem článku ve sborníku z mezinárodní konference DD23.

Mám k práci následující dva dotazy, které bych rád s Ing. Hankem při obhajobě probral:

1. Více-úrovňová metoda BDDC připomíná multigrid. Jsou implementace příp. analýza těchto metod podobné? Lze pro více-úrovňovou BDDC využít výsledků skupiny prof. Ruedeho (Erlangen), který řeší paralelním multigridem také Stokesův problém (specifická geometrie zemské slupky) s MKP-diskretizacemi vedoucími, tuším, až na triliony neznámých?
2. V kapitole 5.1 se studuje závislost počtu iterací na geometrické anizotropii konečných prvků. Při zvyšujícím aspect-ratio však standartní prvky zhoršují kvalitu interpolace derivací, což vede k tzv. zamykání. Pozorujete v kap. 5.1 zhoršující se konvergenci metody konečných prvků při zvyšování aspect-ratio?

Závěrem konstatuji, že autor touto prací a související publikační činností prokázal svou erudici v oboru Matematické a fyzikální inženýrství a schopnost samostatné vědecké práce. Práci proto vřele **doporučuji k obhajobě**.

Na Soláni, 19. května 2022

.....
doc. Ing. Dalibor Lukáš, Ph.D.

Katedra aplikované matematiky

Fakulta elektrotechnika a informatiky