



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská



Statistické modely pro odhad kapacity neřízených křižovatek

Statistical models for estimation of unsignalized intersection capacity

Bakalářská práce

Autor: **Eliška Pečenková**
Vedoucí práce: **doc. Ing. Tomáš Hobza, Ph.D.**
Akademický rok: 2021/2022

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student:	Eliška Pečenková
Studijní program:	Aplikace přírodních věd
Studijní obor:	Matematické inženýrství
Studijní zaměření:	Aplikované matematicko-stochastické metody
Název práce (česky):	Statistické modely pro odhad kapacity neřízených křižovatek
Název práce (anglicky):	Statistical models for estimation of unsignalized intersection capacity

Pokyny pro vypracování:

- 1) Prostudujte existující inženýrské a statistické modely dopravního proudu na neřízené křižovatce.
- 2) Seznamte se s metodou výpočtu kapacity neřízené křižovatky typu T pomocí tzv. Sieglochovy funkce.
- 3) Implementujte pravděpodobnostní model zařazování vozidel na neřízené křižovatce typu T.
- 4) Pomocí numerických výpočtů a simulačních studií prozkoumejte vlastnosti Sieglochovy funkce pro různá rozdělení rozestupů na vedlejší komunikaci (Gama, GIG).
- 5) Prozkoumejte také možnosti odhadu Sieglochovy funkce pomocí modelů lineární regrese.

Doporučená literatura:

- 1) D. Wohlrath, Statistické modelování dopravního toku na neřízené křižovatce typu T. Výzkumný úkol, FJFI ČVUT v Praze, Praha, 2021.
- 2) M. Krbálek, T. Hobza, M. Patočka, M. Krbálková, J. Apeltauer, N. Groverová, Statistical aspects of gap-acceptance theory for unsignalized intersection capacity. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications (zasláno), 2021.
- 3) R. Akçelik, A Review of Gap-Acceptance Capacity Models. In '29th Conference of Australian Institutes of Transport Research (CAITR 2007)', University of South Australia, Adelaide, 2007, 1-25.
- 4) W. Brilon, R. Koenig, R. J. Troutbeck, Useful estimation procedures for critical gaps. Transportation Research Part A 33, 1999, 161-186.
- 5) B. Jorgensen, Statistical Properties of the Generalized Inverse Gaussian Distribution. Lecture Notes in Statistics 9, Springer-Verlag, New York, 1982.

Jméno a pracoviště vedoucího bakalářské práce:

doc. Ing. Tomáš Hobza, Ph.D.

KM FJFI ČVUT v Praze, Trojanova 13, 120 00 Praha 2


Jméno a pracoviště konzultanta:

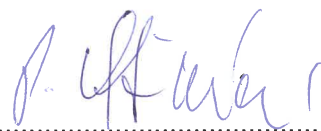
Datum zadání bakalářské práce: 31.10.2021

Datum odevzdání bakalářské práce: 7.7.2022

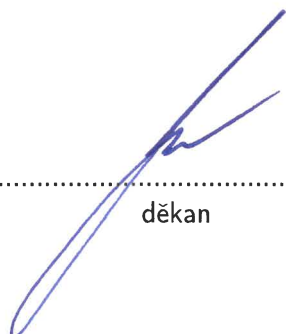
Doba platnosti zadání je dva roky od data zadání.

V Praze dne 19. října 2021


.....
garant oboru


.....
vedoucí katedry




.....
děkan

Poděkování:

Ráda bych zde poděkovala především svému školiteli doc. Ing. Tomáši Hobzovi, Ph.D. za pečlivost, vstřícnost, aktivní diskuze a odborné i přátelské zázemí při vedení mé bakalářské práce. Dále děkuji doc. Mgr. Milanu Krbálkovi, Ph.D. a Mgr. Michaele Krbákové za jejich ochotu a poskytnuté materiály.

Čestné prohlášení:

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracovala samostatně a uvedla jsem všechnu použitou literaturu.

V Praze dne 7. července 2022

Eliška Pečenková

Název práce:

Statistické modely pro odhad kapacity neřízených křižovatek

Autor: Eliška Pečenková

Obor: Matematické inženýrství

Zaměření: Aplikované matematicko-stochastické metody

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: doc. Ing. Tomáš Hobza, Ph.D., Katedra matematiky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze, Trojanova 13, 12000 Praha 2

Abstrakt: V této práci uvažujeme pravděpodobnostní model neřízené křižovatky typu T a pracujeme s pojmy světlost a kritická světlost. Kritické světlosti jsou hlavním předmětem Teorie akceptování mezer, jež je základem pro analytické odvození řešící teoreticky problém odhadování kapacity neřízených křižovatek. Aplikovaná statistická metoda je založena na obecně přijímaném přístupu Wernera Sieglocha, který představil pojem Sieglochovy funkce. Za předpokladu GIG-rozdělených světlostí a kritických světlostí je odvozena aproximace Sieglochovy funkce a je navržena vhodná alternativa této teoretické aproximace. Navíc je ukázáno, že tradičně používané regresní techniky při odhadu Sieglochovy funkce selhávají a diskutováno použití metodiky založené na aplikaci klasické regresní metody.

Klíčová slova: časová světlost, kapacita neřízené křižovatky, konvoluce hustot GIG rozdělení, kritická časová světlost, Sieglochova funkce, Zobecněné inverzní Gaussovo rozdělení (GIG)

Title:

Statistical models for estimation of unsignalized intersection

Author: Eliška Pečenková

Abstract: This paper deals with probabilistic model of an unsignalized T-intersection and works with the concept of clearances and critical clearances. Critical clearances are the main subject of the Gap Acceptance theory, which is the basis for analytical derivation solving theoretically a problem of vehicular capacity estimations for unsignalized intersections. The applied statistical method is based on the generally accepted practice formulated by Werner Siegloch, who introduced the concept of the Siegloch function. With the premise of GIG-distributed clearances and critical clearances the approximation of the Siegloch function is derived and a suitable alternative of this theoretical approximation is proposed. In addition to that, it is shown that the traditionally used regression technique fails and the methodology based on an application of classical regression methods is discussed.

Key words: capacity of an unsignalized intersection, convolution of GIG densities, critical time clearance, Generalized Inverse Gaussian distribution (GIG), Siegloch's function, time clearance

Obsah

Úvod	7
1 Specifikace modelu a teorie akceptování mezer	8
1.1 Teorie akceptování mezer	9
1.2 Sieglochova funkce a rovnice kapacity křižovatky	10
2 Konvoluce k identických hustot GIG rozdělení	13
2.1 GIG rozdělení	13
2.2 Odvození vzorce pro konvoluci k identických hustot metodou hrubého odhadu	14
2.2.1 Konvoluce dvou identických GIG hustot	16
2.2.2 Konvoluce dvou odlišných GIG hustot	17
2.2.3 Konvoluce k identických GIG hustot	18
2.2.4 Analýza středních hodnot	19
2.3 Odvození vzorce pro konvoluci k identických hustot Laplaceovou metodou .	23
2.3.1 Konvoluce dvou identických GIG hustot	24
2.3.2 Konvoluce dvou odlišných GIG hustot	25
2.3.3 Konvoluce k identických GIG hustot	27
2.3.4 Analýza středních hodnot	27
3 Sieglochova funkce pro GIG rozdělení	32
3.1 Tvar Sieglochovy funkce a její chování	32
3.1.1 Tvar matematicky odvozené aproximace Sieglochovy funkce	33
3.1.2 Empirická Sieglochova funkce	34
3.1.3 Odhad GIG rozdělení kritických světlostí	36
3.1.4 Chování empirické Sieglochovy funkce	37
3.2 Sieglochova funkce v praxi	39
3.3 Vliv aproximací Sieglochovy funkce na výpočet kapacity křižovatek	42
Závěr	44
Přílohy	47

Úvod

Neřízené křižovatky jsou nejčastějším typem křižovatek a hrají důležitou roli v dopravních sítích. Jednou z nejdůležitějších a nejvíce studovaných charakteristik křižovatek je kapacita. Průkopníkem teorie kapacity křižovatek je německý inženýr Werner Siegloch, který vyvinul celosvětově používanou metodu pro její výpočet.

Tato metoda pracuje s pojmem Sieglochovy funkce $s(t)$, tj. střední hodnotou počtu vozidel z vedlejší komunikace, která akceptují světlost velikosti t . Metoda je založena na výskytu časových světlostí mezi vozidly na hlavní komunikaci a kritických časových světlostí řidičů čekajících na vedlejší komunikaci, kteří hledají vhodný okamžik k provedení manévru, tj. vjezdu do křižovatky, odbočení a zařazení se do pruhu na hlavní silnici. Oba případy světlostí se v uvažovaném modelu považují za náhodné veličiny a snahou je statistickými metodami najít vhodné pravděpodobnostní rozdělení.

Jedním z cílů této bakalářské práce bylo podrobné zavedení matematického modelu neřízené křižovatky typu T, složené z hlavního proudu s předností v jízdě a jedné vedlejší silnice, na které řidiči dávají přednost řidičům vozidel jedoucích po hlavní komunikaci. Toto zjednodušené schéma křižovatky představuje základ většiny vědeckých prací zabývajících se výpočtem kapacity na matematické úrovni.

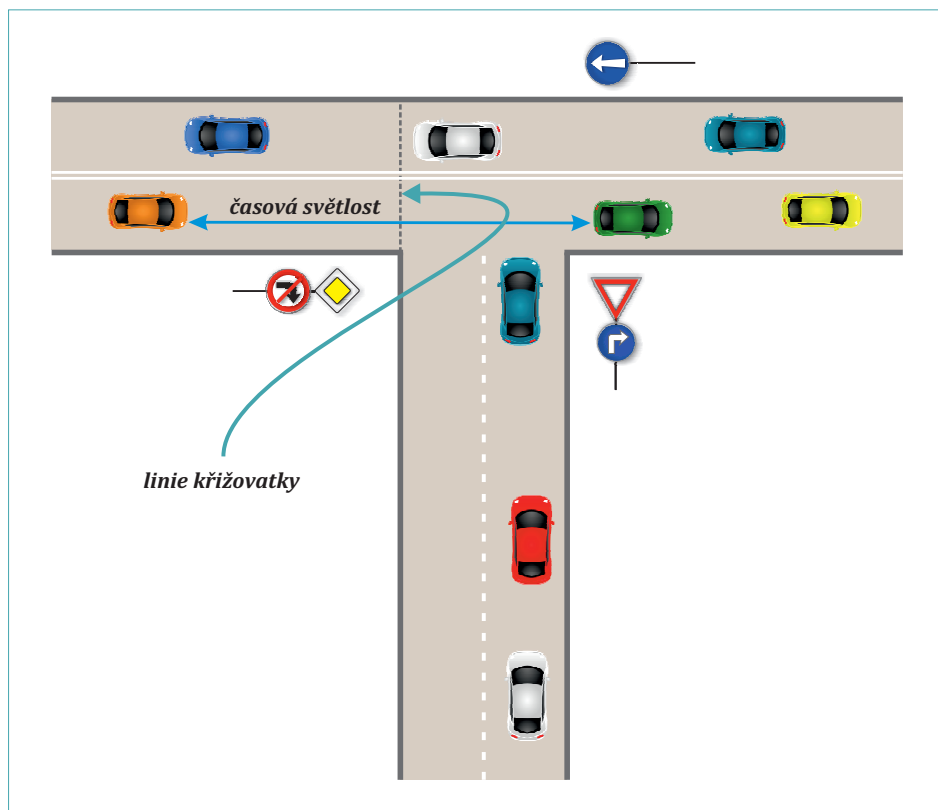
Dalším cílem bylo odvození Sieglochovy funkce pro kritické časové světlosti se Zobecněným inverzním Gaussovým rozdělením (zkráceně GIG), neboť v literatuře se dosud pracovalo pouze s exponenciálně, případně Gamma rozdělenými kritickými časovými světlostmi a hypotéza byla taková, že výsledky dosažené předpokladem GIG rozdělení by měly nejlépe odpovídat realitě.

Poslední část je věnovaná diskuzi nad možnými aproximacemi Sieglochovy funkce a vlivem těchto aproximací právě na výpočet kapacity křižovatky.

Kapitola 1

Specifikace modelu a teorie akceptování mezer

Náplní celého textu bude statistické modelování neřízených křižovatek typu T za účelem odhadu jejich kapacity. Pro jednoduchost se budeme soustředit na nejjednodušší případ takové křižovatky. Situace je schematicky zobrazena na Obr. 1.1. Kvůli přehlednosti zkou-



Obrázek 1.1: Ilustrace neřízené křižovatky typu T. Řidič na vedlejší komunikaci čeká na dostatečnou časovou světlost mezi vozidly jedoucími na hlavní komunikaci, aby se mohl zařadit mezi dvě vozidla jedoucími po sobě. Autorem ilustrace je doc. Mgr. Milan Krbálek Ph.D.

maný problém zjednodušíme na případy, kdy vozidla na hlavní komunikaci projíždějí křižovatkou nejsou nijak ovlivňována vozidly jedoucími v protisměru, zároveň jejich pohyb je nezávislý na pohybu vozidel na vedlejší komunikaci, neboť vozidla na hlavní komunikaci

mají přednost v jízdě a nepřipoušíme ani možnosti dalších poruch, jako je např. blízkost přechodu pro chodce, dalších křižovatek, atd.

Řidiči na vedlejší komunikaci se musí sami rozhodnout, zda je, či není, bezpečné vjet do křižovatky a odbočit, aniž by ohrozili nebo omezili řidiče na nadřazené komunikaci. Každý řidič prochází procesem rozhodování, zda mezera mezi vozidly na hlavní silnici, tzv. *gap*, je dostatečně velká, aby se mohl bezpečně zařadit do pruhu na hlavní komunikaci. Tímto procesem se zabývá teorie akceptování mezer, tzv. *Gap acceptance*¹, jejíž aplikace je významná především v analýzách neřízených křižovatek. Statistické modely založené na GA byly rozvíjeny v 70. letech 20. století a jsou celosvětově využívány pro optimalizaci designu křižovatek a kruhových objezdů. V této práci se budeme soustředit na slavnou metodu představenou Wernerem Sieglochtem, která pracuje s pojmem Sieglochovy funkce, jež bude představena v sekci 1.2.

1.1 Teorie akceptování mezer

Pro každého řidiče na vedlejší komunikaci existuje moment, ve kterém začne vyhledávat dostatečnou mezeru mezi vozidly na hlavní komunikaci vhodnou pro odbočení. Vozidla na hlavní silnici postupně projíždí křižovatkou zleva doprava. Označme čas vstupu i -tého vozidla do pomyslné linie² křižovatky, tedy protnutí této linie předním nárazníkem, jako t_i^{in} a čas opuštění této linie, tedy protnutí této linie zadním nárazníkem, jako t_i^{out} , kde $i \in \mathbf{N}$, potom časové rozestupy mezi i -tým a $i + 1$ -ním řidičem $t_{i+1}^{\text{in}} - t_i^{\text{out}}$, pro všechna $i \in \mathbf{N}$, nazveme časovými světlostmi³ vozidel na hlavní komunikaci. Každý řidič na vedlejší komunikaci hledá individuální, pro něj přijatelnou, světlost na hlavní komunikaci, kterou by mohl využít k odbočení a zařazení do pruhu na hlavní komunikaci. Některé světlosti tedy zůstanou nevyužité, jiné jsou naopak využity více vozidly. Nejmenší světlost, kterou je řidič daného vozidla ochoten využít, se v literatuře nazývá (individuální) kritická časová světlost. Pokud řidič na vedlejší komunikaci využije časovou světlost k vjezdu do křižovatky a zařazení se do hlavního pruhu, pak říkáme, že daná světlost byla akceptována, nebo jinak, že řidič akceptoval danou světlost.

Je zřejmé, že kritická časová světlost je pro každého řidiče jiná. Může být ovlivněna např. schopnostmi řidiče, znalostí nebo neznalostí křižovatky, atd. Řidičovo chování může být ovlivněno také např. vlivem počasí, takže jeden řidič může mít za různých podmínek různou kritickou světlost. Kritickou světlost i -tého řidiče na vedlejší komunikaci tedy považujeme za náhodou veličinu Y_i s hustotou pravděpodobnosti f_{Y_i} . Konkrétní realizace náhodné veličiny $Y_i \sim f_{Y_i}$, tedy individuální kritickou světlost, označme malým písmenem y_i . Veličiny Y_i považujeme v souladu s literaturou za nezávislé a stejně rozdělené⁴ s hustotou pravděpodobnosti, kterou můžeme nyní označit f_Y a to pro všechna $i \in \mathbf{N}$.

Podobně také časové světlosti mezi vozidly na hlavní komunikaci jsou bezesporu stejně rozdělené náhodné veličiny X_i s hustotou pravděpodobnosti f_X a nezávislými realizacemi x_i . Na vedlejší komunikaci jsou čekající vozidla připravena k odbočení a zařazení se mezi dvě, po sobě jedoucí, vozidla na nadřazené komunikaci. Tento manévr provede řidič právě tehdy, když dostupná časová světlost na nadřazené komunikaci je větší nebo rovna jeho individuální kritické časové světlosti. Jakmile dojde k odbočení prvního čekajícího vozidla, jehož řidič akceptoval světlost $x_1 \geq y_1$, je na odbočení připraven druhý řidič, který porovnává zbylou časovou světlost na hlavní komunikaci se svou kritickou světlostí y_2 . Buď tuto zbylou světlost akceptuje, nebo čeká na další vytvořenou světlost.

¹dále pouze GA

²tato pomyslná linie je vyznačena v Obr. 1.1

³dále jen světlost

⁴nezávislost a stejné rozdělení náhodných veličin dále značíme i. i. d.

Definujme dále pomocnou náhodnou veličinu $Z \sim f_Z$ jako

$$Z := \sum_{i=1}^k Y_i, \quad (1.1)$$

jejíž konkrétní realizace budeme značit malým písmenem z . Její rozdělení je díky nezávislosti a stejnému rozdělení veličin Y_i , $i \in \{1, \dots, k\}$, dáno konvolucí k hustot f_Y , tedy

$$Z = \sum_{i=1}^k Y_i \sim \star_{i=1}^k f_Y(z).$$

Důležitým všeobecně uznávaným předpokladem našeho modelu je konzistence a homogenita řidičů. Konzistentní řidič se svou individuální kritickou světlostí y nikdy nevyužije k manévru světlost $x < y$, naopak vždy využije světlost $x \geq y$. Homogenita řidičů znamená, že každá skupina (množina) řidičů má stejné rozdělení kritických světlostí. Pro analytické odvozování je tento předpoklad kruciólní, navíc je velice blízký realitě.

Dále předpokládáme, že křižovatka je v tzv. saturovaném stavu, což je případ, kdy je na vedlejší silnici vytvořena řada vozidel čekajících na odbočení. Pojem saturovaného stavu představil právě W. Sieglach a je uvažován téměř v každém praktickém měření kritických světlostí.

1.2 Sieglachova funkce a rovnice kapacity křižovatky

Hlavní motivací k rozboru a studiu kritických světlostí je výpočet kapacity křižovatek. Sieglach zformuloval v roce 1973 vzorec pro výpočet kapacity křižovatky (1.3). Tato rovnice představuje základ celé teorie GA. Jak je zmíněno v [9], téměř všechny v literatuře analyticky odvozené formule pro odhady kapacit křižovatek jsou založeny právě na tomto konceptu a to dokonce i pokud si autoři nejsou vědomi Sieglachovy metody.

Klíčovou náhodnou veličnou této bakalářské práce bude počet vozidel na vedlejší komunikaci akceptujících světlost, vytvořenou na hlavní komunikaci, o velikosti t . Tuto náhodnou veličinu označme jako N_t , realizací této náhodné veličiny potom může být jakékoliv přirozené číslo, včetně nuly. Střední hodnota N_t ,

$$s(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} k P[N_t = k], \quad (1.2)$$

je v literatuře označována jako Sieglachova funkce. Výraz $P[N_t = k]$ představuje pravděpodobnost akceptování světlosti délky t právě k vozidly. Dle W. Sieglacha [8] je kapacita neřízené křižovatky C rovna

$$C = I \int_0^{+\infty} f_X(t) s(t) dt, \quad (1.3)$$

kde konstantna I představuje intenzitu provozu na hlavní silnici v jednotkách vozidlo za hodinu, f_X je hustota pravděpodobnosti světlostí na hlavní komunikaci a $s(t)$ představuje Sieglachovu funkci.

Jak je vidět, Sieglachova funkce je zásadní pro výpočet kapacity křižovatky. Obecné odvození Sieglachovy funkce $s(t)$ v uvažovaném pravděpodobnostním modelu budeme provádět obdobně jako v [1] nebo v [2]. Máme tedy k dispozici definiční vztah (1.2). Upravujeme nejprve výraz $P[N_t = k]$. S využitím náhodné veličiny Z zavedené v (1.1) platí pro $k \in \mathbb{N}$

$$P[N_t = k] = P[Z < t < Z + Y_{k+1}], \quad (1.4)$$

kde veličina Y_{k+1} představuje kritickou světlost $(k+1)$ -ního řidiče. Výraz (1.4) představuje pravděpodobnost jevu, kdy prvních k řidičů akceptovalo světlost t , neboť $Z < t$, ale $(k+1)$ -ní řidič již tuto světlost o délce t neakceptoval, neboť $Z + Y_{k+1} > t$. Pro zjednodušení zápisu zavedme regulární transformaci $\varphi : \mathbf{R}_+^2 \rightarrow \mathbf{R}_+^2$ zadanou předpisem

$$\varphi : \begin{pmatrix} Z \\ Y_{k+1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} Q \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z \\ Z + Y_{k+1} \end{pmatrix}.$$

Jakobián této transformace je roven jedné, což platí i pro inverzní transformaci φ^{-1} , proto sdruženou hustotu pravděpodobnosti náhodných veličin Q a R pro $q > 0$ a $r - q > 0$ získáme jako

$$f_{Q,R}(q, r) = f_{Z,Y_{k+1}}(q, r - q) = f_Z(q) f_{Y_{k+1}}(r - q),$$

kde jsme využili nezávislost veličin Z a Y_{k+1} . Pravděpodobnost $P[N_t = k]$ pak vyjádříme jako

$$P[N_t = k] = P[Q < t < R] = P[(Q, R) \in A_t] = \iint_{A_t} f_{Q,R}(q, r) \, d(q, r),$$

kde jsme označili množinu $A_t = \{(q, r) \in \mathbf{R}^2 : q < t < r\}$. Z Fubiniho věty nakonec dostáváme

$$P[N_t = k] = \int_0^t f_Z(q) \left(\int_t^{+\infty} f_{Y_{k+1}}(r - q) \, dr \right) \, dq. \quad (1.5)$$

Výraz $P[N_t = k]$, a tedy i samotná Sieglochova funkce, závisí na pravděpodobnostním rozdělení kritických světlostí. Často uvažovanou volbou je exponenciální rozdělení, s parametrem $\lambda > 0$, resp. posunuté exponenciální rozdělení, s parametry $\lambda > 0$ a $\mu \in \mathbf{R}$, jejichž hustoty jsou tvaru

$$f(y) = \Theta(y) \lambda e^{-\lambda y}, \quad \text{resp.} \quad g_\mu(y) = \Theta(y - \mu) \lambda e^{-\lambda(y - \mu)},$$

kde $\Theta(x - \mu)$ představuje Heavisideovu skokovou funkci

$$\Theta(x - \mu) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \geq \mu, \\ 0 & \text{pro } x < \mu. \end{cases}$$

Exponenciální rozdělení je při výpočtu Sieglochovy funkce $s(t)$ uvažováno např. v [1]. Tato volba je ale příliš triviální. Distribuce sice nabývají pouze kladných hodnot, což je žádoucí, nicméně musí platit, že pravděpodobnost, že řidič má libovolně malou kritickou světlost, musí být nenulová, ale velice malá, což toto rozdělení nepostihuje. Autoři proto tuto volbu zobecňují a to např. volbou rozdělení Gamma, s parametry $\alpha \in \mathbf{N}$ a $\lambda > 0$, jehož hustota pravděpodobnosti je

$$h(y) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \Theta(y) y^{\alpha-1} e^{-\lambda y}, \quad (1.6)$$

kde $\Gamma(\alpha)$ je gamma funkce. Odvození Sieglochovy funkce pro Gamma rozdělení je ukázáno např. v [2]. Jednoduché analytické vyjádření Sieglochovy funkce, ke kterému autoři [1] a [2] přímočaře dospěli, je vhodné pro praktické výpočty. Pro rozdělení Gamma s parametry $\alpha \in \mathbf{N}$ a $\lambda > 0$ platí

$$s(t) = e^{-\lambda t} \sum_{l=0}^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{(\lambda t)^{k\alpha+l}}{(k\alpha+l)!}, \quad t > 0. \quad (1.7)$$

Speciálně pro $\alpha = 1$, při kterém hustota Gamma rozdělení odpovídá rozdělení exponenciálnímu s parametrem λ , je Sieglochova funkce $s(t)$ lineární funkcí, jejíž směrnice je právě parametr λ , neboť

$$s(t) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda t} \lambda t \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda t} \lambda t e^{\lambda t} = \lambda t, \quad \forall t > 0. \quad (1.8)$$

Jedním z cílů této bakalářské práce je zobecnění tvaru hustot pro kritické časové světlosti tak, aby rozdělení lépe odpovídalo realitě. Proto budeme uvažovat, že kritické světlosti mají GIG rozdělení⁵ s parametry $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta > 0$ a $\lambda > 0$, které definujeme a podrobně analyzujeme v následující kapitole 2, v sekci 2.1. Z analýzy reálných dat se totiž ukazuje, že toto rozdělení se pro modelování dopravního proudění hodí nejvíce. Rozdělení GIG, jak je patrné z definičního vztahu (2.1), má velmi komplikovaný předpis, proto analytické odvození Sieglochovy funkce $s(t)$ tak, jako tomu bylo v případě Gamma, resp. exponenciálního rozdělení, nebude možné. Pro praktické účely bychom chtěli určit její hodnoty alespoň numericky, vykreslit její tvar pro různé nastavení parametrů α , β , λ a zkoumat její chování v závislosti na změně těchto parametrů. Navíc z hustoty pravděpodobnosti definované v následující kapitole 2 předpisem (2.1) je patrné, že exponenciální i Gamma rozdělení jsou speciálními případy rodiny GIG distribucí, půjde nám tedy skutečně o zobecnění postupu představeného v [1] a v [2].

⁵zobecněné inverzní Gaussovo rozdělení

Kapitola 2

Konvoluce k identických hustot GIG rozdělení

V této kapitole definujeme již zmiňované rozdělení GIG, které je vhodné pro modelování dopravy zejména z toho důvodu, že hustota GIG rozdělení má na okolí bodu $x = 0$ tzv. plató, které je definováno následovně.

Definice 2.1: Funkce $f(x)$ má na okolí bodu $x = 0$ plató, právě tehdy, když

$$\forall n \in \mathbf{N}_0 : \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0.$$

Plató odpovídá tomu, že existuje nějaká minimální hodnota světlosti, kterou neakceptuje žádný řidič, a tedy pravděpodobnosti hodnot menších musí být malé (téměř nulové). Tuto vlastnost exponenciální, ani Gamma rozdělení nemají. V kapitole 1 v sekci 1.2 jsme došli k závěru, že výraz $P[N_t = k]$, a tedy i samotná Sieglochova funkce, závisí dle (1.5) na rozdělení kritických světlostí. Od této chvíle budeme uvažovat, dle značení zavedeného v kapitole 1, že veličiny Y_i mají GIG rozdělení. Rozdělení náhodné veličiny Z definované v (1.1) je tedy popsáno konvolucí k GIG hustot. Pro Gamma rozdělení platí v teorii pravděpodobnosti všeobecně známá reprodukční vlastnost¹, která značně zjednoduší analytické odvození Sieglochovy funkce, avšak pro GIG rozdělení tato vlastnost nelze dokázat.

Nejsme sice schopni nalézt přesné vyjádření požadovaného vzorce pro konvoluci GIG hustot, kvůli složitosti definice hustoty GIG rozdělení, nicméně představíme 2 přístupy, kterými nalezneme aproximativní vyjádření konvoluce k identických GIG hustot. Tyto přístupy v zápětí porovnáme a zvolíme ten přesnější.

2.1 GIG rozdělení

Definice 2.2: Náhodná veličina X má tříparametrické Zobecněné inverzní Gaussovo rozdělení (zkráceně GIG z anglického Generalized Inverse Gaussian distribution), značíme $X \sim \text{GIG}(\alpha, \beta, \lambda)$, jestliže pro její hustotu pravděpodobnosti platí vztah

$$f_X(x) = \Theta(x) \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^{\alpha+1}} \frac{1}{2\mathcal{K}_{\alpha+1}[2\sqrt{\beta\lambda}]} x^\alpha e^{-\frac{\beta}{x}} e^{-\lambda x}, \quad (2.1)$$

¹pro náhodnou veličinu $Y \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ by platilo $Z \sim \Gamma(k\alpha, \lambda)$

kde $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta > 0$, $\lambda > 0$. Symbol \mathcal{K}_ℓ , $\ell \in \mathbf{R}$, reprezentuje MacDonalldovu funkci řádu ℓ (tj. modifikovanou Besselovu funkci druhého druhu řádu ℓ), která je definována jako

$$\mathcal{K}_\ell(x) := \frac{2^{\ell-1}}{x^\ell} \int_0^\infty y^{\ell-1} e^{-\frac{x^2}{4y}} e^{-y} dy. \quad (2.2)$$

Poznamenejme, že takto definovaná hustota (2.1) je již správně normovaná. MacDonalldova funkce (2.2) splňuje rekurentní vztah

$$\mathcal{K}_{\ell+1}(x) - \mathcal{K}_{\ell+3}(x) = \frac{-2(a+2)}{x} \mathcal{K}_{\ell+2}(x), \quad (2.3)$$

jehož důkaz je k nahlédnutí v [7]. Střední hodnota $E(X)$ je dle [4] dána vztahem

$$E(X) = \sqrt{\frac{\beta}{\lambda}} \frac{\mathcal{K}_{\alpha+2}[2\sqrt{\beta\lambda}]}{\mathcal{K}_{\alpha+1}[2\sqrt{\beta\lambda}]}. \quad (2.4)$$

Pokud budeme požadovat, aby $E(X) = 1$, musí být splněna tzv. škálovací rovnice

$$\sqrt{\frac{\beta}{\lambda}} \frac{\mathcal{K}_{\alpha+2}[2\sqrt{\beta\lambda}]}{\mathcal{K}_{\alpha+1}[2\sqrt{\beta\lambda}]} \stackrel{!}{=} 1. \quad (2.5)$$

Hledejme závislost λ na α, β tak, aby rovnice (2.5) platila. Podle [6] je hledaná závislost tvaru

$$\lambda(\alpha, \beta) = \alpha + \beta + \frac{3 - g(\beta)}{2}, \quad (2.6)$$

kde $g(\beta)$ reprezentuje korekční funkci aproximativně odhadnutou na $g(\beta) \approx e^{-\sqrt{\frac{4\beta}{6+\alpha}}}$, kde $\alpha > 1$. Rozptyl náhodné veličiny X je roven

$$\text{VAR}(X) = \frac{\beta \mathcal{K}_{\alpha+3}[2\sqrt{\beta\lambda}]}{\lambda \mathcal{K}_{\alpha+1}[2\sqrt{\beta\lambda}]} - (E(X))^2,$$

jeho odvození je uvedeno např. v [7]. Pokud uvažujeme speciální případ, kdy $E(X) = 1$, tj. je splněna škálovací rovnice (2.5), vztah pro rozptyl se dosazením $\mathcal{K}_{\alpha+3}$ z rekurentního vztahu (2.3) značně zjednoduší na

$$\text{VAR}(X) = \frac{\alpha + \beta + 2}{\lambda} - 1.$$

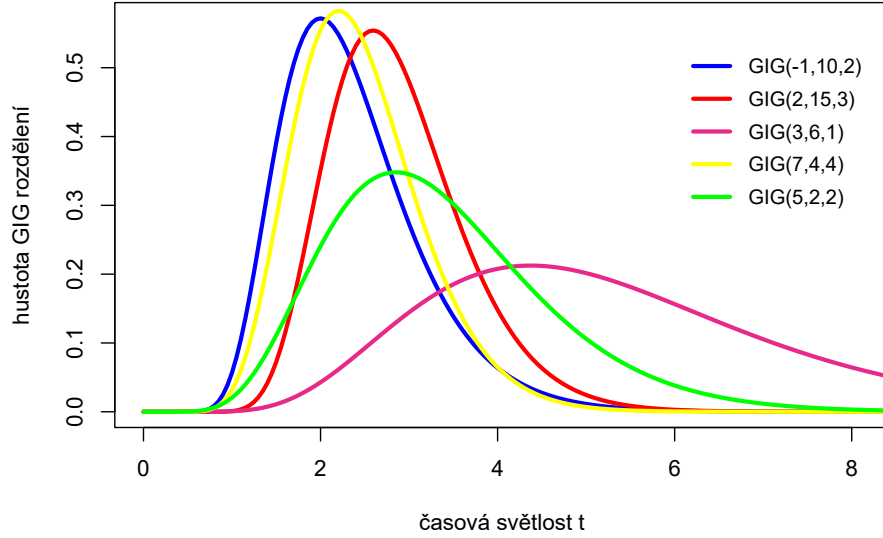
Hustoty GIG rozdělení pro různé parametry jsou pro ilustraci vykresleny na Obr. 2.1, kde můžeme vidět již zmíněné plató na okolí bodu $x = 0$.

2.2 Odvození vzorce pro konvoluci k identických hustot metodou hrubého odhadu

Po seznámení s hustotou GIG rozdělení odvodíme v této sekci aproximaci formule pro konvoluci k identických hustot $\text{GIG}(\alpha, \beta, \lambda)$. Inspirujeme se postupem z diplomové práce [4], kde byla odvozena přibližná vyjádření konvoluce dvou identických, resp. dvou rozdílných GIG hustot a to pomocí metody hrubého odhadu. Těchto výsledků využijeme a nalezneme aproximativní vyjádření konvoluce k identických hustot a následně ověříme kvalitu této aproximace.

Z důvodů přehlednosti textu se nejprve zaměříme na integrály Laplaceova typu

$$H(t) = \int_a^b r(x) e^{th(x)} dx. \quad (2.7)$$



Obrázek 2.1: Hustoty pravděpodobnosti pro GIG rozdělení s různými parametry.

Pro jednoduchost předpokládejme, že existuje právě jedno $x_0 \in \mathbf{R}$ takové, že

$$h(x_0) = S = \sup_{x \in (a,b)} h(x).$$

Nechť je navíc funkce h analytická na nějakém okolí bodu x_0 a funkce r je integrovatelná. Potom $h(x)$ je na tomto okolí bodu x_0 rovno své Taylorově řadě

$$h(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{h^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = h(x_0) + 0 + \frac{h^{(2)}(x_0)}{2} (x - x_0)^2 + \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{h^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad (2.8)$$

kde jsme položili $h'(x_0) = 0$, neboť x_0 je bodem suprema (maxima) funkce $h(x)$. Jelikož funkce $h(x)$ má v bodě x_0 supremum (maximum), můžeme předpokládat, že $h^{(2)}(x_0) < 0$. Nahradíme funkci $h(x)$ v integrálu (2.7) prvními třemi členy Taylorovy řady. Získáváme aproximaci

$$H(t) \approx \int_a^b r(x) e^{t \left[h(x_0) - \frac{|h^{(2)}(x_0)|}{2} (x - x_0)^2 \right]} dx.$$

Nyní se inspirováme v práci [4] a zanedbáme v (2.8) i člen s druhou derivací. Nahradíme funkci $h(x)$ v integrálu (2.7) pouze hodnotou $h(x_0)$ a dostaneme hrubou aproximaci

$$H(t) \approx e^{th(x_0)} \int_a^b r(x) dx. \quad (2.9)$$

Je zřejmé, že pro rostoucí t bude mít hlavní váhu člen $e^{th(x_0)}$. Proto tedy můžeme uzavřít, že hrubá aproximace (2.9) se zpřesňuje s rostoucím t .

2.2.1 Konvoluce dvou identických GIG hustot

Vyjdeme z tříparametrického GIG rozdělení s hustotou pravděpodobnosti danou vztahem (2.1), kde pro zjednodušení zápisu označíme normalizační konstantu

$$A = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^{\alpha+1} \frac{1}{2\mathcal{K}_{\alpha+1}[2\sqrt{\beta\lambda}]}}.$$

Tento výraz nezávisí na proměnné x a pro daná α, β, λ je konstantou. Potom konvoluce dvou identických hustot je rovna

$$(f \star f)(x) = \Theta(x) A^2 e^{-\lambda x} \int_0^x s^\alpha (x-s)^\alpha e^{-\frac{\beta}{s} - \frac{\beta}{x-s}} ds.$$

Označíme-li $r(s) = s^\alpha (x-s)^\alpha$, $t = \beta$, $h(s) = -\frac{1}{s} - \frac{1}{x-s}$ na intervalu $(a, b) = (0, x)$, získáme integrál tvaru (2.7) a můžeme použít odpovídající hrubou aproximaci

$$\int_0^x r(s) e^{\beta h(s)} ds \approx e^{\beta S} \int_0^x r(s) ds,$$

kde $S = \sup_{s \in (0, x)} h(s)$. Body, v nichž funkce $h(s)$ má extrém, najdeme pomocí její první derivace. Pro stacionární bod musí platit

$$\frac{dh(s)}{ds} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{(x-s)^2} = \frac{(x-s)^2 - s^2}{s^2 (x-s)^2} \stackrel{!}{=} 0,$$

kde $s \neq x$ a současně $s \neq 0$. Toto je splněno, právě když

$$|x-s| = |s|.$$

Stacionárním bodem je tedy $s_0 = \frac{x}{2}$ a jelikož funkce $h(s)$ je spojitá na kompaktním intervalu $\langle 0, x \rangle$ a platí

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} h(s) = \lim_{s \rightarrow x^-} h(s) = -\infty,$$

je zřejmé, že v bodě s_0 má funkce h maximum, které je zároveň rovno supremu

$$S = \sup_{s \in (0, x)} h(s) = h\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{4}{x}.$$

Z (2.9) dostáváme aproximaci

$$\begin{aligned} (f \star f)(x) &\approx \Theta(x) A^2 e^{-\lambda x} e^{\beta S} \int_0^x g(s) ds = \\ &= A^2 e^{-\lambda x} e^{-\beta \frac{4}{x}} \Theta(x) \int_0^x s^\alpha (x-s)^\alpha ds = \\ &= A^2 e^{-\lambda x} e^{-\beta \frac{4}{x}} \Theta(x) \int_0^x \left(\frac{s}{x}\right)^\alpha x^\alpha x^\alpha \left(1 - \frac{s}{x}\right)^\alpha ds = \\ &= A^2 e^{-\lambda x} e^{-\beta \frac{4}{x}} \Theta(x) x^{2\alpha+1} \int_0^1 z^\alpha (1-z)^\alpha dz, \end{aligned}$$

kde v poslední rovnosti byla zavedena nová proměnná z substitucí $s = xz$. Hodnotu integrálu $\int_0^1 z^\alpha (1-z)^\alpha dz$ vyjádříme v jeho obecné verzi pomocí známé beta funkce jako

$$\int_0^1 z^a (1-z)^b dz = B(a+1, b+1) = \frac{\Gamma(a+1) \Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)}, \quad (2.10)$$

kde jsme využili známý vzorec pro beta funkci $B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$. Pro konvoluci dvou identických hustot GIG rozdělení, označme ji symbolem $\kappa(x)$, pak získáváme vztah

$$\kappa(x) := (f \star f)(x) \approx A^2 \frac{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+2)} \Theta(x) x^{2\alpha+1} e^{-\frac{4\beta}{x}} e^{-\lambda x}.$$

Funkce $\kappa(x)$ má zjevně tvar hustoty pravděpodobnosti $\text{GIG}(2\alpha+1, 4\beta, \lambda)$, přičemž výraz $A^2 \frac{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+2)}$ nezávisí na proměnné x a vyjadřuje jistou normalizační konstantu. Z teorie pravděpodobnosti vyplývá, že konvolucí dvou hustot pravděpodobnosti vznikne opět hustota pravděpodobnosti, a tedy je také správně normovaná. V tomto případě jsme však použili aproximaci, takže konstanta $A^2 \frac{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+2)}$ je nevyhovující a je nutné výslednou funkci $\kappa(x)$ normalizovat znovu. Napíšeme ji proto ve tvaru

$$\kappa(x) = B \Theta(x) x^{2\alpha+1} e^{-\frac{4\beta}{x}} e^{-\lambda x}$$

a budeme hledat normalizační konstantu B . Z definičního vztahu (2.1) víme, že normalizační konstanta funkce $f_X(x)$ s parametry γ, δ, μ je rovna

$$A = \sqrt{\left(\frac{\mu}{\delta}\right)^{\gamma+1}} \frac{1}{2 \mathcal{K}_{\gamma+1}[2\sqrt{\delta\mu}]},$$

odkud při volbě $\gamma = 2\alpha + 1, \delta = 4\beta, \mu = \lambda$ získáme

$$B = \left(\frac{\lambda}{4\beta}\right)^{\alpha+1} \frac{1}{2\mathcal{K}_{2\alpha+2}[4\sqrt{\beta\lambda}]}.$$

Výsledný vztah pro aproximaci konvoluce dvou identických hustot pravděpodobnosti tříparametrického GIG rozdělení je tedy

$$(f \star f)(x) \approx \left(\frac{\lambda}{4\beta}\right)^{\alpha+1} \frac{1}{2\mathcal{K}_{2\alpha+2}[4\sqrt{\beta\lambda}]} \Theta(x) x^{2\alpha+1} e^{-\frac{4\beta}{x}} e^{-\lambda x}. \quad (2.11)$$

Připomínáme, že z odvození hrubého odhadu (2.9) plyne, že pro β rostoucí nade všechny meze se tato aproximace zpřesňuje.

2.2.2 Konvoluce dvou odlišných GIG hustot

Předpokládejme nyní dvě hustoty GIG rozdělení $f(x)$ a $g(x)$ s parametry $\alpha_1, \beta_1, \lambda$ a $\alpha_2, \beta_2, \lambda$. Odvození konvoluce $(f \star g)(x)$ provedeme analogicky jako pro identické hustoty GIG rozdělení. Označíme-li normalizační konstanty hustot příslušné první, resp. druhé trojici parametrů A , resp. B , lze upravit konvoluci na tvar

$$(f \star g)(x) = \Theta(x) A B e^{-\lambda x} \int_0^x s^{\alpha_1} (x-s)^{\alpha_2} e^{-\frac{\beta_1}{s} - \frac{\beta_2}{x-s}} ds.$$

Označíme $r(s) = s^{\alpha_1} (x-s)^{\alpha_2}$, $t = 1$, $h(s) = -\frac{\beta_1}{s} - \frac{\beta_2}{x-s}$. Stacionární bod s_0 určíme z první derivace $h(s)$ mající tvar

$$\frac{dh(s)}{ds} = \frac{\beta_1}{s^2} - \frac{\beta_2}{(x-s)^2} = \frac{\beta_1(x-s)^2 - s^2\beta_2}{s^2(x-s)^2},$$

kde $s \neq x$ a současně $s \neq 0$. Aby $\frac{dh(s)}{ds} = 0$, musí být splněna rovnost

$$\sqrt{\beta_1} |x-s| = \sqrt{\beta_2} |s|.$$

Funkce $h(s)$ je na $(0, x)$ spojitá a

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} h(s) = \lim_{s \rightarrow x^-} h(s) = -\infty,$$

proto stacionární bod $s_0 = \frac{x\sqrt{\beta_1}}{\sqrt{\beta_1} + \sqrt{\beta_2}}$ je bodem maxima a zároveň suprema

$$S = \sup_{s \in (0, x)} h(s) = h(s_0) = -\frac{(\sqrt{\beta_1} + \sqrt{\beta_2})^2}{x}.$$

S využitím (2.10) dostaneme aproximaci

$$\begin{aligned} (f \star g)(x) &\approx \Theta(x) A B e^{-\lambda x} e^{-\frac{(\sqrt{\beta_1} + \sqrt{\beta_2})^2}{x}} \int_0^x s^{\alpha_1} (x-s)^{\alpha_2} ds = \\ &= \Theta(x) A B e^{-\lambda x} e^{-\frac{(\sqrt{\beta_1} + \sqrt{\beta_2})^2}{x}} x^{\alpha_1 + \alpha_2 + 1} \frac{\Gamma(\alpha_1 + 1) \Gamma(\alpha_2 + 1)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 2)}. \end{aligned}$$

V aproximaci opět rozpoznáváme tvar hustoty GIG, a proto musíme analogicky předchozímu modifikovat konstantu $AB \frac{\Gamma(\alpha_1 + 1) \Gamma(\alpha_2 + 1)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 2)}$ na vhodnou konstantu C tak, aby konvoluce byla správně normována, neboť se jedná o hustotu pravděpodobnosti. Pro konvoluci tak dostáváme výsledný vztah

$$(f \star g)(x) \approx \Theta(x) C x^{\alpha_1 + \alpha_2 + 1} e^{-\frac{(\sqrt{\beta_1} + \sqrt{\beta_2})^2}{x}} e^{-\lambda x}, \quad (2.12)$$

kde

$$C = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{(\sqrt{\beta_1} + \sqrt{\beta_2})^2}\right)^{\alpha_1 + \alpha_2 + 2}} \frac{1}{2\mathcal{K}_{\alpha_1 + \alpha_2 + 2} \left[2\sqrt{\lambda}(\sqrt{\beta_1} + \sqrt{\beta_2})\right]}.$$

2.2.3 Konvoluce k identických GIG hustot

Mějme nyní k hustot rozdělení GIG s parametry α , β , λ . Dle vzorce (2.11) vidíme, že konvoluce 2 identických GIG hustot s parametry γ , δ , λ je opět hustota, konkrétně $\text{GIG}(2\gamma + 1, 4\delta, \lambda)$. Pro konvoluci dvou hustot s parametry γ_1 , δ_1 , λ a γ_2 , δ_2 , λ získáme dle vzorce (2.12) hustotu $\text{GIG}(\gamma_1 + \gamma_2 + 1, (\sqrt{\delta_1} + \sqrt{\delta_2})^2, \lambda)$. Z toho již snadno odvodíme konvoluci 3 identických hustot $\text{GIG}(\alpha, \beta, \lambda)$. Totiž za první sadu parametrů vezmeme

$$\gamma_1 = 2\alpha + 1, \quad \delta_1 = 2^2\beta, \quad \lambda_1 = \lambda$$

a za druhou sadu potom

$$\gamma_2 = \alpha, \quad \delta_2 = \beta, \quad \lambda_2 = \lambda,$$

z (2.12) dostáváme, že $((f \star f) \star f)$ je hustota $\text{GIG}(3\alpha + 2, 3^2\beta, \lambda)$. Nyní opět položíme

$$\gamma_1 = 3\alpha + 2, \quad \delta_1 = 3^2\beta, \quad \lambda_1 = \lambda$$

a následně

$$\gamma_2 = \alpha, \quad \delta_2 = \beta, \quad \lambda_2 = \lambda$$

a z (2.12) analogicky předchozímu odvodíme, že konvoluce $((f \star f \star f) \star f)$ odpovídá hustotě $\text{GIG}(4\alpha + 3, 4^2\beta, \lambda)$. Opakovaným užitím (2.12) dostaneme vzorec pro aproximaci konvoluce k identických hustot $\text{GIG}(\alpha, \beta, \lambda)$,

$$(\star_{i=1}^k f)(x) \approx \sqrt{\frac{\lambda^{k\alpha+k}}{(k^2\beta)^{k\alpha+k}} \frac{1}{2\mathcal{K}_{k\alpha+k} [2k\sqrt{\beta\lambda}]}} \Theta(x) x^{k\alpha+k-1} e^{-\frac{k^2\beta}{x}} e^{-\lambda x}. \quad (2.13)$$

Tedy aproximativní hustota pravděpodobnosti konvoluce k identických hustot odpovídá rozdělení $\text{GIG}(k\alpha + k - 1, k^2\beta, \lambda)$.

Na Obr. 2.2 jsou pro ilustraci zobrazeny konvoluce různých počtů hustot rozdělení GIG , a to pro 3 sady parametrů α , β , λ . Z tohoto obrázku je patrné, že s rostoucím počtem konvolucí se zvětšuje střední hodnota, ale také rozptyl. Tyto vlastnosti jsou přirozeným důsledkem základní vlastnosti střední hodnoty a toho, že uvažujeme-li i. i. d. náhodné veličiny Y_i , pak

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^k Y_i\right) = \sum_{i=1}^k \mathbb{E}(Y_i) = k \cdot \mathbb{E}(Y),$$

a pro rozptyl i. i. d. náhodných veličin platí

$$\text{VAR}\left(\sum_{i=1}^k Y_i\right) = \sum_{i=1}^k \text{VAR}(Y_i) = k \cdot \text{VAR}(Y).$$

Nyní bychom chtěli ověřit přesnost odvozené aproximace (2.13). Pro tyto účely v programovacím jazyce \mathbb{R} nageneryjeme² nezávisle k náhodných realizací y_1, \dots, y_k náhodné veličiny $Y \sim \text{GIG}(\alpha, \beta, \lambda)$, tyto sečteme a získáme realizaci z náhodné veličiny $Z \sim \star_{i=1}^k \text{GIG}(\alpha, \beta, \lambda)$. Tento postup opakujeme 10 000-krát a získáme tak 10 000 náhodných čísel, jejichž rozdělení pravděpodobnosti odpovídá konvoluci k identických hustot rozdělení $\text{GIG}(\alpha, \beta, \lambda)$. Z těchto vytvoříme histogram a do stejného obrázku vykreslíme funkci popsanou vztahem (2.13). Na Obr. 12, 13, 14 a 15 vidíme, že aproximace hrubým odhadem (2.13) se ve většině případů mírně zhoršuje s rostoucím k , avšak čím větší je parametr β , tím je tato aproximace kvalitnější.

2.2.4 Analýza středních hodnot

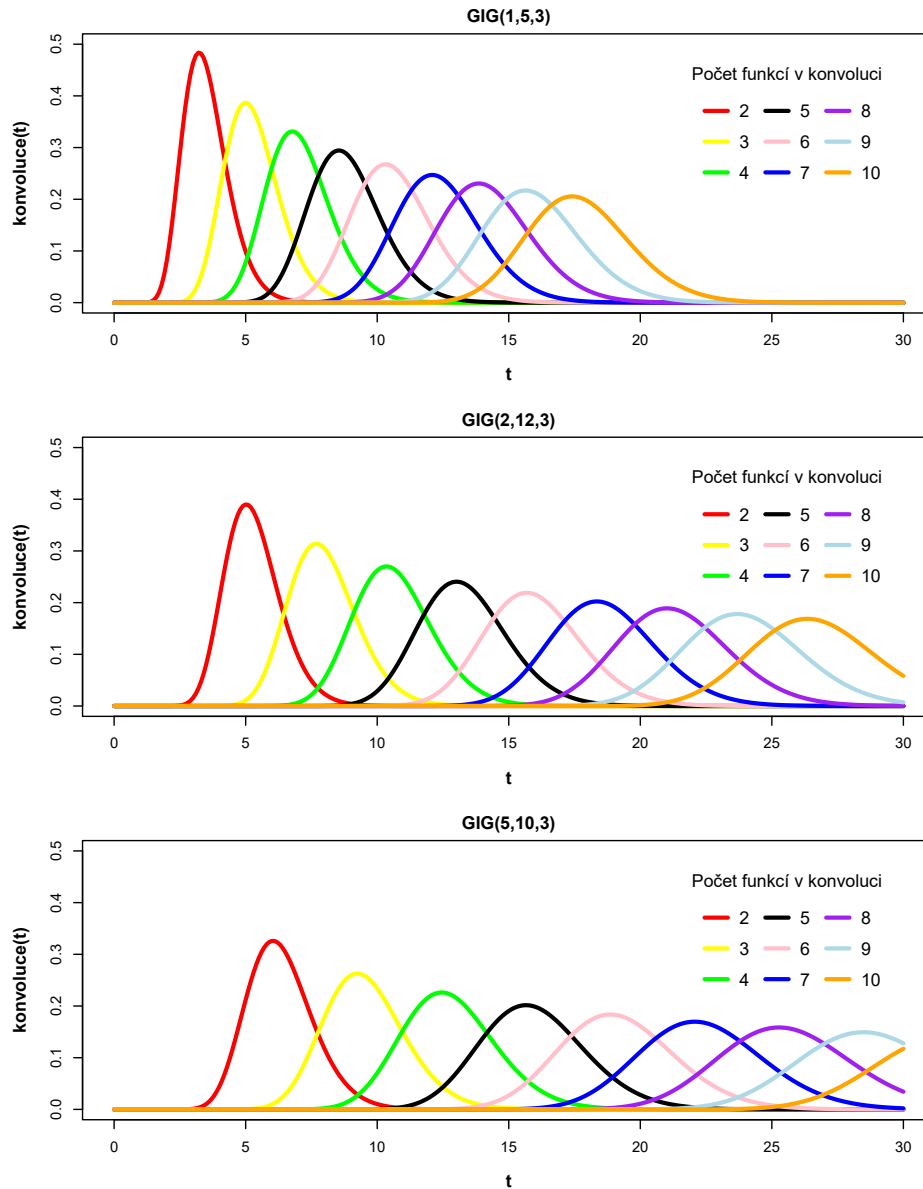
V minulé sekci jsme pomocí simulací zjistili, že s rostoucím k se aproximace konvoluce mírně zhoršuje. Podívejme se proto, jak spolu souvisí

- výběrové průměry realizací náhodné veličiny $Z \sim \star_{i=1}^k \text{GIG}(\alpha, \beta, \lambda)$, které jsme pro $k \in \mathbb{N}$ nagenerovali náhodně funkcí `rgig` z knihovny `GIGrvg`,
- střední hodnoty aproximací, tj. střední hodnoty vypočtené pomocí (2.4), kde správné parametry pro příslušný počet konvolucí jsou modifikovány dle (2.13),
- teoretické střední hodnoty, které spočteme pomocí základní vlastnosti střední hodnoty jako

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^k Y_i\right) = k \cdot \mathbb{E}(Y) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (2.14)$$

neboť uvažujeme i. i. d. náhodné veličiny Y_i .

Uvažujme pro názornost stejné parametry jako na Obr. 12, 13, 14 a 15. V Obr. 2.3 vidíme, že výběrové průměry skutečně leží (s nepatrnou chybou, která je způsobena náhodností čísel a jistě i zaokrouhlováním) na teoretické přímce³, což bylo očekáváno.



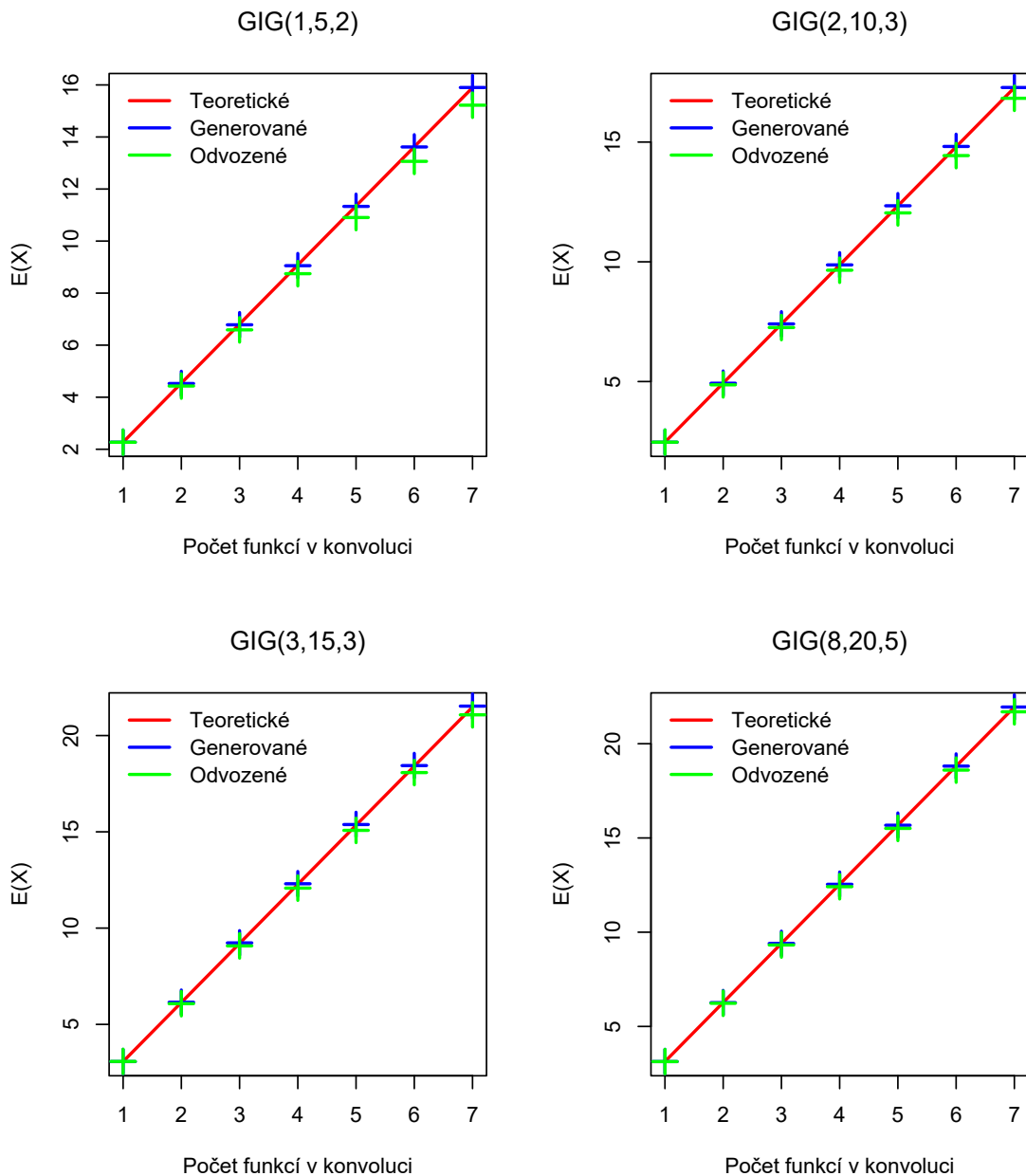
Obrázek 2.2: Konvoluce dvou až deseti identických hustot pravděpodobnosti rozdělení GIG v závislosti na t , kde t představuje časovou světlost, v prvním obrázku jsou zvoleny parametry $(\alpha, \beta, \lambda) = (1, 5, 3)$, v druhém obrázku $(\alpha, \beta, \lambda) = (2, 12, 3)$ a ve třetím $(\alpha, \beta, \lambda) = (5, 10, 3)$.

Střední hodnoty aproximací se ale s rostoucím k čím dál více odchylojí od teoretické predikce. Nicméně, pro velký parametr β je odchylka výrazně menší.

Zkoumejme tedy blíže jádro tohoto problému. Uvažujme pro následující úvahy, že parametry GIG rozdělení vyhovují závislosti (2.6), a tedy střední hodnota náhodné veličiny $Y \sim \text{GIG}(\alpha, \beta, \lambda)$ pro následující případy bude vždy přibližně rovna jedné. Je obtížné nastavit parametry tak, aby se střední hodnota rovnala přesně 1, ale my si pro názornost vystačíme pouze s přibližnou hodnotou. Pokud totiž takto nastavíme různé sady parametrů, budeme moct tato rozdělení mezi sebou dobře porovnat. Proto ponechme parametry

²funkcí `rgig` z knihovny `GIGrv`

³vzorec (2.14) představuje pro $k \in \mathbf{R}$ přímkou se směrnici $E(X)$



Obrázek 2.3: Modré body představují výběrové střední hodnoty náhodných čísel generovaných funkcí $rgig$, zelené body jsou vypočtené ze vzorce pro střední hodnotu (2.4) a červená přímka v bodech $1, 2, \dots, 7$ představuje teoretické hodnoty dle (2.14).

α a β tak, jako např. v Obr. 2.3 a dopočítejme parametr λ tak, aby vyhovoval vztahu (2.6). Dále tedy budeme pracovat s rozděleními z Tab. 2.1.

	α	β	λ
GIG ₁	1	5	7,408
GIG ₂	2	10	13,447
GIG ₃	3	15	19,462
GIG ₄	8	20	29,454

Tabulka 2.1: Tabulka škálovaných GIG rozdělení. Parametry α , β jsou zvoleny dle Obr. 2.3, parametry λ jsou dopočítány tak, aby přibližně vyhovovaly vztahu (2.6).

Tabulka 2.2 zobrazuje střední hodnoty náhodné veličiny Y z rozdělení GIG, která najdeme v Tab. 2.1 a součtu různého počtu náhodných veličin Y s odpovídajícími hustotami $\text{GIG}(k\alpha + k - 1, k^2\beta, \lambda)^4$, vypočtené ze vzorce (2.4). V Tab. 2.3 vidíme teoretické

	GIG ₁	GIG ₂	GIG ₃	GIG ₄
$E_1(X)$	0,9999	0,9992	0,9993	0,9990
$E_1(2X)$	1,9677	1,9804	1,9860	1,9899
$E_1(3X)$	2,9353	2,9615	2,9727	2,9808
$E_1(4X)$	3,9029	3,9426	3,9593	3,9716
$E_1(5X)$	4,8705	4,9237	4,9460	4,9625
$E_1(6X)$	5,8381	5,9048	5,9327	5,9533
$E_1(7X)$	6,8057	6,8859	6,9194	6,9442

Tabulka 2.2: Střední hodnoty vypočtené dle formule (2.4), první řádek hodnot je střední hodnota pro samotnou hustotu, další řádek jsou po řadě 2, 3, 4, 5, 6 a 7 hustot v konvoluci (se stejnými parametry).

střední hodnoty⁵ vypočtené dle (2.14). Číselné hodnoty v prvním řádku tabulek 2.2 a 2.3 se rovnají, což je správně. Ostatní hodnoty se již ale liší. Rozdíly⁶ teoretických (Tab. 2.3)

	GIG ₁	GIG ₂	GIG ₃	GIG ₄
$E_2(X)$	0,9999	0,9992	0,9993	0,9990
$E_2(2X)$	1,9997	1,9984	1,9985	1,9981
$E_2(3X)$	2,9996	2,9976	2,9978	2,9971
$E_2(4X)$	3,9995	3,9968	3,9970	3,9961
$E_2(5X)$	4,9994	4,9960	4,9963	4,9951
$E_2(6X)$	5,9992	5,9952	5,9956	5,9942
$E_2(7X)$	6,9991	6,9944	6,9948	6,9932

Tabulka 2.3: Střední hodnoty vypočtené z (2.14). První řádek hodnot je střední hodnota pro samotnou hustotu, další řádek jsou po řadě 2, 3, 4, 5, 6 a 7 hustot v konvoluci (se stejnými parametry).

a analytických středních hodnot (Tab. 2.2) jsou zaznamenány v Tab. 2.4. Odtud vidíme, že s rostoucím počtem funkcí v konvoluci nám narůstá chyba, a to lineárně. Lineární růst chyb dobře zachycuje také Tab. 2.5. Z této tabulky je opět vidět, že naše aproximace pro velká β funguje lépe.

⁴tyto představují právě střední hodnoty aproximací, označme ja pro předhlednost jako E_1

⁵teoretické střední hodnoty označme jako E_2

⁶označme tyto rozdíly jako $R(jX) = E_2(jX) - E_1(jX)$, pro $j \in \{1, \dots, 7\}$

	GIG ₁	GIG ₂	GIG ₃	GIG ₄
R(X)	0	0	0	0
R($2X$)	0,0321	0,0180	0,0126	0,0082
R($3X$)	0,0643	0,0361	0,0251	0,0163
R($4X$)	0,0966	0,0542	0,0377	0,0245
R($5X$)	0,1288	0,0723	0,0503	0,0327
R($6X$)	0,1611	0,0904	0,0629	0,0408
R($7X$)	0,1934	0,1085	0,0755	0,0490

Tabulka 2.4: Rozdíly mezi analytickými středními hodnotami (Tab. 2.2) a teoretickými středními hodnotami (Tab. 2.3).

	GIG ₁	GIG ₂	GIG ₃	GIG ₄
R($2X$) – R(X)	0,0321	0,0180	0,0126	0,0082
R($3X$) – R($2X$)	0,0322	0,0181	0,0126	0,0082
R($4X$) – R($3X$)	0,0323	0,0181	0,0126	0,0082
R($5X$) – R($4X$)	0,0323	0,0181	0,0126	0,0082
R($6X$) – R($5X$)	0,0323	0,0181	0,0126	0,0082
R($7X$) – R($6X$)	0,0323	0,0181	0,0126	0,0082

Tabulka 2.5: Tabulka demonstruje lineární nárůst chyb s přibývajícím počtem funkcí v konvoluci.

2.3 Odvození vzorce pro konvoluci k identických hustot Laplaceovou metodou

V sekci 2.2 se nám podařilo nalézt aproximativní vyjádření konvoluce k identických hustot GIG(α, β, λ), dle (2.13), a ukázali jsme, že se zpřesňuje s rostoucím β . Avšak v praxi se často používají malé hodnoty β , proto bychom v této sekci rádi našli alternativní přibližné vyjádření konvoluce, které bude dostatečně kvalitní i pro malá β . V sekci 2.2 jsme při výpočtu konvoluce dvou hustot GIG rozdělení narazili na problematický integrál Laplaceova typu

$$H(t) = \int_a^b r(x) e^{th(x)} dx, \quad (2.15)$$

který jsme hrubě odhadli jako

$$H(t) \approx e^{th(x_0)} \int_a^b r(x) dx, \quad (2.16)$$

kde x_0 byl bod maxima funkce h na (a, b) . Nyní pro přibližné vyjádření tohoto problematického integrálu nevyužijeme hrubého odhadu, ale tzv. Laplaceovy metody. Cílem je získat asymptotické vyjádření integrálu (2.15) pro t rostoucí nade všechny meze, díky kterému získáme kvalitnější aproximaci konvoluce k identických hustot GIG rozdělení, než jsme získali metodou hrubého odhadu.

Vezměme si nyní opět tento problematický integrál (2.15) a postupujme analogicky, jako v sekci 2.2. Předpokládejme, že funkce h má na (a, b) pouze jeden bod maxima x_0 . Z Taylorova rozvoje okolo bodu x_0 potom

$$h(x) \approx h(x_0) - \frac{1}{2}|h''(x_0)|(x - x_0)^2,$$

kde jsme využili skutečnost, že v bodě maxima platí $h'(x_0) = 0$ a $h''(x_0) < 0$. Nyní můžeme psát

$$H(t) \approx e^{th(x_0)} \int_a^b r(x) e^{-\frac{t}{2}|h''(x_0)|(x-x_0)^2} dx.$$

V sekci 2.2 jsme v této fázi zanedbali část s druhou derivací a dospěli jsme k hrubému odhadu (2.16). Nyní ale odhadneme

$$r(x) \approx r(x_0)$$

a zavedeme substituci $y = \sqrt{t|h''(x_0)|}(x - x_0)$, díky níž pak dostaneme

$$\begin{aligned} H(t) &\approx r(x_0) e^{th(x_0)} \frac{1}{\sqrt{t|h''(x_0)|}} \int_{-\sqrt{t|h''(x_0)|(x_0-a)}}^{\sqrt{t|h''(x_0)|(b-x_0)}} e^{-\frac{y}{2}} dy = \\ &= r(x_0) (|h''(x_0)|)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2\pi}{t}} e^{th(x_0)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{t}K_a}^{\sqrt{t}K_b} e^{-\frac{y}{2}} dy, \end{aligned}$$

kde jsme označili $K_a = \sqrt{|h''(x_0)|(x_0 - a)}$ a $K_b = \sqrt{|h''(x_0)|(b - x_0)}$. Tyto konstanty jsou jistě kladné, $K_a > 0$, $K_b > 0$. Našli jsme tedy aproximativní vyjádření

$$H(t) \approx r(x_0) (|h''(x_0)|)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2\pi}{t}} e^{th(x_0)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{t}K_a}^{\sqrt{t}K_b} e^{-\frac{y}{2}} dy,$$

které bychom mohli vyčíslit numericky, avšak abychom určili obecnou formuli pro konvoluci k hustot, použijeme následující zjednodušení. Všimneme si, že

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{t}K_a}^{\sqrt{t}K_b} e^{-\frac{y}{2}} dy = 1,$$

neboť funkce $\varphi(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}}$ je hustota pravděpodobnosti normálního rozdělení $N(0,1)$, a tedy splňuje vlastnost normalizace

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) dy = 1.$$

Tím obržíme kýžený Laplaceův odhad

$$H(t) \approx \frac{r(x_0)}{\sqrt{|h''(x_0)|}} \sqrt{\frac{2\pi}{t}} e^{th(x_0)}. \quad (2.17)$$

2.3.1 Konvoluce dvou identických GIG hustot

Konečně aplikujeme Laplaceův odhad (2.17) při výpočtu konvoluce. Postup bude analogický jako v sekci 2.2 při použití hrubého odhadu. Vycházíme z definice tříparametrické GIG hustoty (2.1), kde normalizační konstantu označíme stejně jako v předchozím textu

$$A = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^{\alpha+1}} \frac{1}{2\mathcal{K}_{\alpha+1}[2\sqrt{\beta\lambda}]}. \quad (2.18)$$

Můžeme psát

$$(f \star f)(x) = \Theta(x) A^2 e^{-\lambda x} \int_0^x s^\alpha (x-s)^\alpha e^{-\frac{\beta}{s} - \frac{\beta}{x-s}} ds = \Theta(x) A^2 e^{-\lambda x} H(\beta),$$

kde jsme označili

$$H(\beta) = \int_0^x r(s) e^{-\beta h(s)} ds,$$

přičemž

$$r(s) = s^\alpha (x - s)^\alpha \quad \text{a} \quad h(s) = -\frac{1}{s} - \frac{1}{x - s}.$$

Maximum funkce h už jsme našli v sekci 2.2. Bodem maxima je tedy $s_0 = \frac{x}{2}$ s hodnotou

$$h(s_0) = -\frac{4}{x}.$$

Pro odhad Laplaceovou metodou najdeme navíc hodnoty $h''(s_0)$ a $r(s_0)$:

$$h''(s) = -\frac{2}{s^3} - \frac{2}{(x - s)^3}$$

a po dosazení bodu s_0 máme $h''(s_0) = -\frac{32}{x^3}$, tato hodnota je záporná pro všechna $x > 0$. Dále

$$r(s_0) = \left(\frac{x^2}{4}\right)^\alpha,$$

platí tedy $r(s_0) \neq 0$ a z (2.17) obržíme aproximaci

$$H(\beta) \approx \frac{x^{2\alpha}}{4^\alpha} \sqrt{\frac{x^3}{32}} \sqrt{\frac{2\pi}{\beta}} e^{-\frac{4\beta}{x}} = \frac{x^{2\alpha + \frac{3}{2}}}{4^{\alpha+1}} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} e^{-\frac{4\beta}{x}},$$

ze které vyplývá aproximativní vyjádření

$$(f \star f)(x) \approx \Theta(x) A^2 e^{-\lambda x} \frac{x^{2\alpha + \frac{3}{2}}}{4^{\alpha+1}} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} e^{-\frac{4\beta}{x}},$$

což odpovídá rozdělení $\text{GIG}(2\alpha + \frac{3}{2}, 4\beta, \lambda)$. Jak bylo již diskutováno v kapitole 2, konstantu $A^2 \frac{1}{4^{\alpha+1}} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$ je nyní potřeba vhodně modifikovat, aby naše aproximace byla správně normovaná. Proto výsledná přibližná formule pro konvoluci 2 identických hustot pravděpodobnosti odpovídajících rozdělení $\text{GIG}(\alpha, \beta, \lambda)$ nabývá tvaru

$$(f \star f)(x) \approx \Theta(x) \sqrt{\left(\frac{\lambda}{4\beta}\right)^{2\alpha + \frac{3}{2} + 1}} \frac{1}{2 \mathcal{K}_{2\alpha + \frac{3}{2} + 1}[4\sqrt{\beta\lambda}]} x^{2\alpha + \frac{3}{2}} e^{-\lambda x} e^{-\frac{4\beta}{x}}. \quad (2.19)$$

2.3.2 Konvoluce dvou odlišných GIG hustot

Předpokládejme nyní dvě hustoty GIG rozdělení $f(x)$ a $g(x)$ s parametry $\alpha_1, \beta_1, \lambda$ a $\alpha_2, \beta_2, \lambda$. Postup bude analogie předchozího. Opět označíme pro přehlednost textu normalizační konstanty hustot příslušné první, resp. druhé, trojici parametrů A , resp. B , konvoluci pak upravíme do tvaru

$$\begin{aligned} (f \star g)(x) &= \Theta(x) A B e^{-\lambda x} \int_0^x s^{\alpha_1} (x - s)^{\alpha_2} e^{-\frac{\beta_1}{s} - \frac{\beta_2}{x-s}} ds = \\ &= \Theta(x) A B e^{-\lambda x} \int_0^x s^{\alpha_1} (x - s)^{\alpha_2} e^{-\beta_1 \left(\frac{1}{s} + \frac{\beta_2}{\beta_1(x-s)}\right)} ds = \\ &= \Theta(x) A B e^{-\lambda x} H(\beta_1) \end{aligned}$$

kde

$$r(s) = s^{\alpha_1} (x - s)^{\alpha_2} \quad \text{a} \quad h(s) = -\frac{1}{s} - \frac{\beta_2}{\beta_1(x - s)}.$$

Vytýkat stačí bez újmy na obecnosti pouze β_1 , protože pokud bychom chtěli analogicky vytýkat β_2 , vyměníme pořadí funkcí v konvoluci, která je komutativní, a přeznačíme β_2 na β_1 . V podsekcí 2.2.2 jsme již našli maximum funkce $\beta_1 h$, proto nyní ihned víme, že stacionárním bodem je opět

$$s_0 = \frac{\sqrt{\beta_1} x}{\sqrt{\beta_1} + \sqrt{\beta_2}}$$

a maximum funkce h má hodnotu

$$h(s_0) = -\frac{(\sqrt{\beta_1} + \sqrt{\beta_2})^2}{\beta_1 x}.$$

Druhou derivaci funkce h vyjádříme jako

$$h''(s) = -\frac{2}{s^3} - \frac{2\beta_2}{\beta_1(x - s)^3},$$

dosadíme bod s_0 a dostaneme

$$\begin{aligned} h''(s_0) &= -\frac{2(\sqrt{\beta_1} + \sqrt{\beta_2})^3}{(\sqrt{\beta_1} x)^3} - \frac{2\beta_2(\sqrt{\beta_1} + \sqrt{\beta_2})^3}{\beta_1(\sqrt{\beta_2} x)^3} = \\ &= -\frac{2(\sqrt{\beta_1} + \sqrt{\beta_2})^3}{\beta_1 x^3} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_1}} + \frac{1}{\sqrt{\beta_2}} \right) = \\ &= -\frac{2(\sqrt{\beta_1} + \sqrt{\beta_2})^4}{\beta_1 x^3 \sqrt{\beta_1} \sqrt{\beta_2}}, \end{aligned}$$

což pro všechna $x > 0$ představuje záporný výraz. Dále

$$r(s_0) = \left(\frac{\sqrt{\beta_1} x}{\sqrt{\beta_1} + \sqrt{\beta_2}} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\sqrt{\beta_2} x}{\sqrt{\beta_1} + \sqrt{\beta_2}} \right)^{\alpha_2},$$

a tedy předpoklad $r(s_0) \neq 0$ je také naplněn. Odtud obržíme aproximaci

$$\begin{aligned} H(\beta_1) &\approx \frac{(\sqrt{\beta_1} x)^{\alpha_1} (\sqrt{\beta_2} x)^{\alpha_2}}{(\sqrt{\beta_1} + \sqrt{\beta_2})^{\alpha_1 + \alpha_2}} \sqrt{\frac{\beta_1 x^3 \sqrt{\beta_1} \sqrt{\beta_2}}{2(\sqrt{\beta_1} + \sqrt{\beta_2})^4}} \sqrt{\frac{2\pi}{\beta_1}} e^{-\frac{(\sqrt{\beta_1} + \sqrt{\beta_2})^2}{x}} = \\ &= \frac{(\sqrt{\beta_1})^{\alpha_1 + \frac{1}{2}} (\sqrt{\beta_2})^{\alpha_2 + \frac{1}{2}}}{(\sqrt{\beta_1} + \sqrt{\beta_2})^{\alpha_1 + \alpha_2 + 2}} \sqrt{\pi} e^{-\frac{(\sqrt{\beta_1} + \sqrt{\beta_2})^2}{x}} x^{\alpha_1 + \alpha_2 + \frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Potom

$$(f \star g)(x) \approx \Theta(x) AB \sqrt{\pi} \frac{(\sqrt{\beta_1})^{\alpha_1 + \frac{1}{2}} (\sqrt{\beta_2})^{\alpha_2 + \frac{1}{2}}}{(\sqrt{\beta_1} + \sqrt{\beta_2})^{\alpha_1 + \alpha_2 + 2}} x^{\alpha_1 + \alpha_2 + \frac{3}{2}} e^{-\frac{(\sqrt{\beta_1} + \sqrt{\beta_2})^2}{x}} e^{-\lambda x},$$

což odpovídá rozdělení $\text{GIG}(\alpha_1 + \alpha_2 + \frac{3}{2}, (\sqrt{\beta_1} + \sqrt{\beta_2})^2, \lambda)$. Po zvolení vhodné normalizační konstanty dostaneme přibližnou formuli pro konvoluci 2 různých hustot pravděpodobnosti odpovídajících rozdělení $\text{GIG}(\alpha_1, \beta_1, \lambda)$ a $\text{GIG}(\alpha_2, \beta_2, \lambda)$ tvaru

$$(f \star g)(x) \approx \Theta(x) C x^{\alpha_1 + \alpha_2 + \frac{3}{2}} e^{-\frac{(\sqrt{\beta_1} + \sqrt{\beta_2})^2}{x}} e^{-\lambda x}, \quad (2.20)$$

kde

$$C = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{(\sqrt{\beta_1} + \sqrt{\beta_2})^2} \right)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \frac{3}{2}} \frac{1}{2 \mathcal{K}_{\alpha_1 + \alpha_2 + \frac{3}{2}} \left[2 \sqrt{(\sqrt{\beta_1} + \sqrt{\beta_2})^2 \lambda} \right]}}.$$

2.3.3 Konvoluce k identických GIG hustot

Mějme nyní k hustot rozdělení GIG s parametry α , β , λ . Dle vzorce (2.19) vidíme, že konvoluce 2 identických GIG hustot s parametry γ , δ , λ je opět hustota, konkrétně $\text{GIG}(2\gamma + \frac{3}{2}, 4\delta, \lambda)$. Pro konvoluci dvou hustot s parametry γ_1 , δ_1 , λ a γ_2 , δ_2 , λ získáme dle vzorce (2.20) hustotu $\text{GIG}(\gamma_1 + \gamma_2 + \frac{3}{2}, (\sqrt{\delta_1} + \sqrt{\delta_2})^2, \lambda)$. Úvaha nyní bude analogická jako v podsekcí 2.2.3. Opakovaně užitíme (2.20) a obržíme vzorec pro aproximaci konvoluce k identických hustot $\text{GIG}(\alpha, \beta, \lambda)$,

$$(\star_{i=1}^k f)(x) = C \Theta(x) x^{k\alpha + (k-1)\frac{3}{2}} e^{-\frac{k^2\beta}{x}} e^{-\lambda x}, \quad (2.21)$$

kde

$$C = \sqrt{\frac{\lambda^{k\alpha + (k-1)\frac{3}{2} + 1}}{(k^2\beta)^{k\alpha + (k-1)\frac{3}{2} + 1} 2\mathcal{K}_{k\alpha + (k-1)\frac{3}{2} + 1} [2k\sqrt{\beta\lambda}]}}.$$

Ukázali jsme, že hustota pravděpodobnosti konvoluce k identických hustot $\text{GIG}(\alpha, \beta, \lambda)$ přibližně odpovídá rozdělení $\text{GIG}(k\alpha + (k-1)\frac{3}{2}, k^2\beta, \lambda)$.

Nyní bychom chtěli porovnat obě uvažované aproximace. Nejprve jsme pomocí hrubého odhadu (2.9) došli k závěru, že konvoluce k identických $\text{GIG}(\alpha, \beta, \lambda)$ hustot odpovídá hustotě příslušející rozdělení $\text{GIG}(k\alpha + k - 1, k^2\beta, \lambda)$, poté jsme ale ten samý integrál odhadli pomocí Laplaceovy metody (2.17) a hledaná hustota pro konvoluci k identických $\text{GIG}(\alpha, \beta, \lambda)$ hustot odpovídá rozdělení $\text{GIG}(k\alpha + (k-1)\frac{3}{2}, k^2\beta, \lambda)$. Výsledná formule vycházející z Laplaceovy aproximace je tedy násobena navíc výrazem $x^{(k-1)\frac{1}{2}}$. Z Obr. 12-15 vidíme, že s rostoucím k se Laplaceova aproximace opět mírně zhoršuje, ale pozorujeme menší chybu, než pro hrubý odhad, což se projeví hlavně u nižších hodnot parametru β .

2.3.4 Analýza středních hodnot

Po vzoru sekce 2.2.4 analyzujeme pro odhad Laplaceovou metodou

- výběrové průměry,
- střední hodnoty aproximací,
- teoretické střední hodnoty,

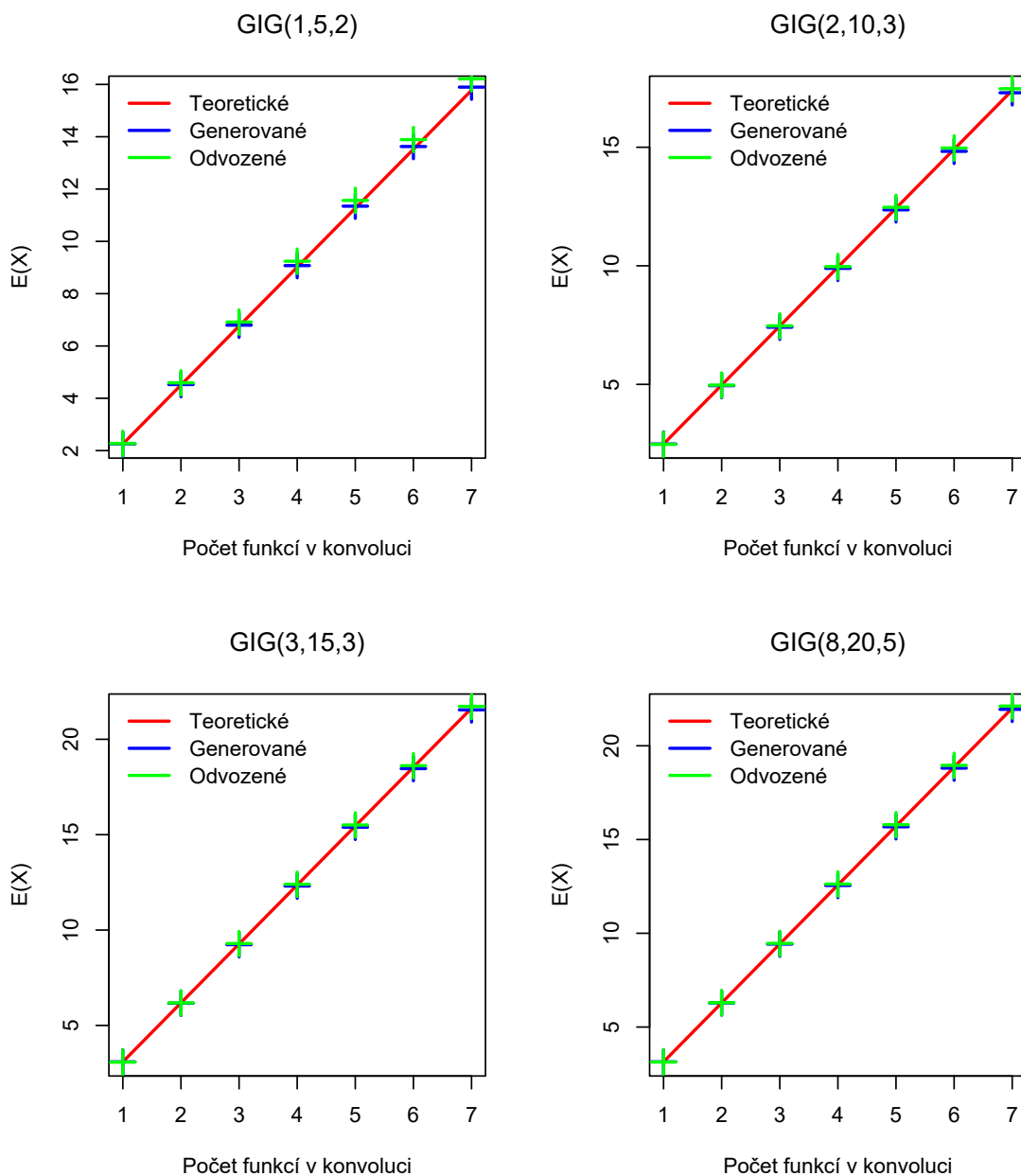
jejichž význam byl podrobně vysvětlen v podsekcí 2.2.4. Z Obr. 2.4 lze usoudit, že chyba roste s rostoucím počtem konvolucí k opět lineárně, ale je zde patrná výrazně menší odchylka, než ta, která byla pozorována v Obr. 2.3 pro aproximace hrubým odhadem.

Uvažujme opět pro porovnání, že parametry GIG rozdělení vyhovují závislosti (2.6), a tedy střední hodnota pro následující případy bude vždy přibližně rovna jedné. Tabulka 2.6 zobrazuje střední hodnoty náhodné veličiny Y z rozdělení GIG, která najdeme v Tab. 2.1 a součtu různého počtu náhodných veličin Y s odpovídajícími hustotami pravděpodobnosti $\text{GIG}(k\alpha + (k-1)\frac{3}{2}, k^2\beta, \lambda)$ ⁷, vypočtené ze vzorce (2.4). Tabulka teoretických středních hodnot⁸ 2.7 je kopií Tab. 2.3, neboť je počítáme z (2.14) a tedy nepoužíváme odlišné aproximace vzorců pro konvoluce. Číselné hodnoty v prvním řádku tabulek 2.6 a 2.7 se rovnají, což je správně. Ostatní hodnoty se již ale liší. Rozdíly⁹ teoretických (Tab. 2.7) a analytických středních hodnot (Tab. 2.6) jsou zaznamenány v Tab. 2.8. Odtud je patrné, že s rostoucím počtem funkcí v konvoluci narůstá chyba. Lineární nárůst těchto chyb

⁷ tyto představují právě střední hodnoty aproximací, označme ja pro předhlednost jako E_1

⁸ teoretické střední hodnoty označme jako E_2

⁹ označme tyto rozdíly jako $R(jX) = E_2(jX) - E_1(jX)$, pro $j \in \{1, \dots, 7\}$



Obrázek 2.4: Modré body představují výběrové střední hodnoty náhodných čísel generovaných funkcí $rgig$, zelené body jsou vypočtené ze vzorce pro střední hodnotu (2.4) a červená přímka v bodech $1, 2, \dots, 7$ představuje teoretické hodnoty dle (2.14).

dobře zachycuje Tab. 2.9. Záporná znaménka zde mají význam toho, že střední hodnoty aproximací jsou na reálné ose více vpravo, než střední hodnoty výběrové. To se projevuje v Obr. 12-15 tím, že graf aproximované hustoty pravděpodobnosti dle Laplaceovy metody (2.21) se posouvá doprava po reálné ose rychleji, než odpovídající histogram. Pro hustotu odvozenou hrubým odhadem (2.13) dochází k opačnému efektu.

V Tab. 2.9 si poprvé můžeme všimnout, že pro sadu parametrů $(8; 20; 29,494)$, tedy GIG_4 , vychází chyba nepatrně větší (o jednu desetitisícinu) než pro sadu $(3; 15; 19,489)$,

	GIG ₁	GIG ₂	GIG ₃	GIG ₄
E ₁ (X)	0,9999	0,9992	0,9993	0,9991
E ₁ (2X)	2,0070	2,0014	2,0003	1,9999
E ₁ (3X)	3,0144	3,0036	3,0014	3,0009
E ₁ (4X)	4,0218	4,0059	4,0025	4,0018
E ₁ (5X)	5,0292	5,0082	5,0036	5,0027
E ₁ (6X)	6,0366	6,0104	6,0047	6,0036
E ₁ (7X)	7,0440	7,0127	7,0058	7,0046

Tabulka 2.6: Střední hodnoty vypočtené dle formule (2.4), první řádek hodnot je střední hodnota pro samotnou hustotu, další řádek jsou po řadě 2, 3, 4, 5, 6 a 7 hustot v konvoluci (se stejnými parametry).

	GIG ₁	GIG ₂	GIG ₃	GIG ₄
E ₂ (X)	0,9999	0,9992	0,9993	0,9990
E ₂ (2X)	1,9997	1,9984	1,9985	1,9981
E ₂ (3X)	2,9996	2,9976	2,9978	2,9971
E ₂ (4X)	3,9995	3,9968	3,9970	3,9961
E ₂ (5X)	4,9994	4,9960	4,9963	4,9951
E ₂ (6X)	5,9992	5,9952	5,9956	5,9942
E ₂ (7X)	6,9991	6,9944	6,9948	6,9932

Tabulka 2.7: Střední hodnoty vypočtené z (2.14). První řádek hodnot je střední hodnota pro samotnou hustotu, další řádek jsou po řadě 2, 3, 4, 5, 6 a 7 hustot v konvoluci (se stejnými parametry).

	GIG ₁	GIG ₂	GIG ₃	GIG ₄
R(X)	0	0	0	0
R(2X)	-0,0073	-0,0030	-0,0018	-0,0019
R(3X)	-0,0147	-0,0060	-0,0037	-0,0038
R(4X)	-0,0223	-0,0091	-0,0055	-0,0057
R(5X)	-0,0298	-0,0121	-0,0073	-0,0076
R(6X)	-0,0373	-0,0152	-0,0092	-0,0095
R(7X)	-0,0449	-0,0182	-0,0110	-0,0114

Tabulka 2.8: Rozdíly mezi analytickými středními hodnotami (Tab. 2.2) a teoretickými středními hodnotami (Tab. 2.3).

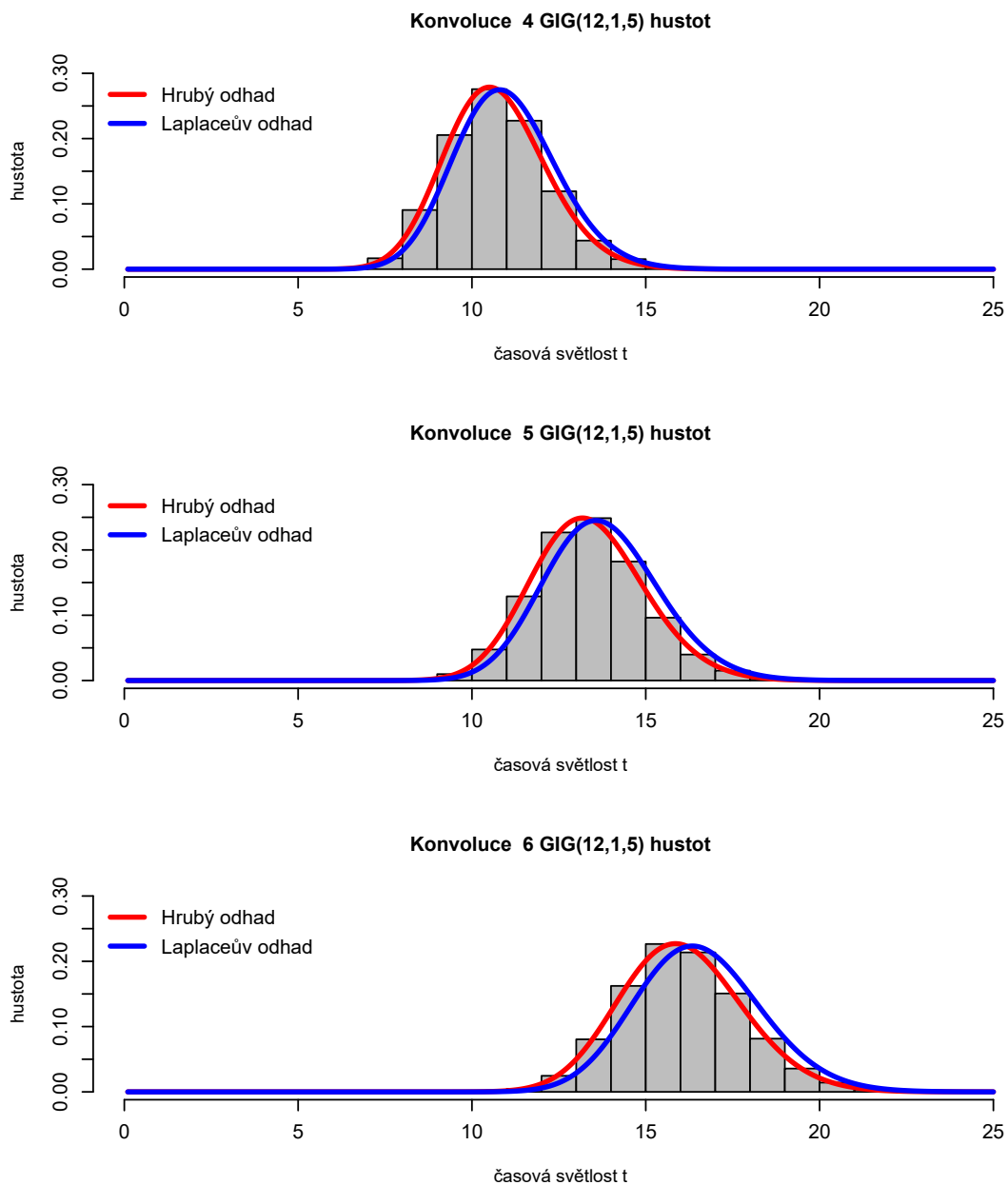
tedy GIG₃, bez ohledu na to, že parametr β je v první sadě větší ($\beta_1 = 20$) než v sadě druhé (zde $\beta_2 = 15$). Můžeme tedy vyslovit hypotézu, že zde hraje roli také velikost parametru α , který je v první sadě větší ($\alpha = 8$) než v druhé ($\alpha = 3$).

Ačkoliv se zdá, že aproximace pomocí Laplaceovy metody je pro případy zvolené v Obr. 12-15 mnohem kvalitnější, není tomu tak vždy. Pokud totiž zvolíme parametr β velmi malý a k němu výrazně větší α , my jsme vzali pro ilustraci $\alpha = 12$ a $\beta = 1$, dojdeme přesně k opačnému efektu, viz. Obr. 2.5. Z reálných dopravních dat se ale ukazuje, že hodnoty parametru α se pohybují někde v okolí nuly, tedy opravdu můžeme konstatovat, že pro naše účely je aproximace Laplaceovou metodou kvalitnější. Do konce tohoto textu

	GIG ₁	GIG ₂	GIG ₃	GIG ₄
$R(2X) - R(X)$	-0,0073	-0,0030	-0,0018	-0,0019
$R(3X) - R(2X)$	-0,0075	-0,0030	-0,0018	-0,0019
$R(4X) - R(3X)$	-0,0075	-0,0030	-0,0018	-0,0019
$R(5X) - R(4X)$	-0,0075	-0,0031	-0,0018	-0,0019
$R(6X) - R(5X)$	-0,0075	-0,0031	-0,0018	-0,0019
$R(7X) - R(6X)$	-0,0075	-0,0031	-0,0018	-0,0019

Tabulka 2.9: Tabulka demonstruje lineární nárůst chyb s přibývajícím počtem funkcí v konvoluci.

tedy budeme uvažovat výhradně výsledky získané právě Laplaceovou metodou.



Obrázek 2.5: Histogramy pro různý počet konvolucí a odpovídajícími hustotami pravděpodobnosti získanými Hrubým odhadem a Laplaceovou metodou se zvolenými parametry $\alpha = 12$, $\beta = 1$, $\lambda = 5$.

Kapitola 3

Sieglochova funkce pro GIG rozdělení

V této kapitole odvodíme předpis Sieglochovy funkce, numericky ji vykreslíme, definujeme tzv. empirickou Sieglochovu funkci a následně budeme studovat její chování v závislosti na změně jednoho z parametrů. Dále se podíváme, jaké aproximační techniky pro přibližná vyjádření Sieglochovy funkce se používají v praxi, okomentujeme kvalitu těchto aproximací a prozkoumáme jejich vliv na výpočet kapacity křižovatky v uvažovaném modelu.

3.1 Tvar Sieglochovy funkce a její chování

Připomeňme pro přehlednost definici. Sieglochova funkce $s(t)$ vyjadřuje střední hodnotu počtu vozidel na vedlejší komunikaci, která akceptují světlost velikosti t . Máme tedy k dispozici definiční vztah

$$s(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP[N_t = k], \quad (3.1)$$

kde $P[N_t = k]$ je pravděpodobnost akceptování světlosti o délce t právě k vozidly. V sekci 1.2 jsme tento výraz upravili do tvaru

$$P[N_t = k] = \int_0^t f_Z(q) \left(\int_t^{+\infty} f_{Y_{k+1}}(r - q) \, dr \right) \, dq,$$

kde veličina $Y_{k+1} \sim \text{GIG}(\alpha, \beta, D)$ představuje kritickou světlost $(k + 1)$ -ního řidiče, který světlost X už neakceptoval a rozdělení veličiny Z , definované vztahem (1.1) jako


$$Z := \sum_{i=1}^k Y_i,$$

se nám díky konkrétní volbě rozdělení veličin Y_i podařilo v sekci 2.3 aproximovat Laplaceovou metodou jako $Z \sim \text{GIG}(k\alpha + (k - 1)\frac{3}{2}, k^2\beta, \lambda)$. Odtud tedy dostáváme vyjádření Sieglochovy funkce

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot \int_0^t f_Z(q) \left(\int_t^{+\infty} f_{Y_{k+1}}(r - q) \, dr \right) \, dq = \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot C_k \int_0^t q^{k\alpha + (k-1)\frac{3}{2}} e^{-\frac{k^2\beta}{q}} \left(\int_t^{+\infty} (r - q)^\alpha e^{-\frac{\beta}{r-q}} e^{-\lambda r} \, dr \right) \, dq, \end{aligned} \quad (3.2)$$

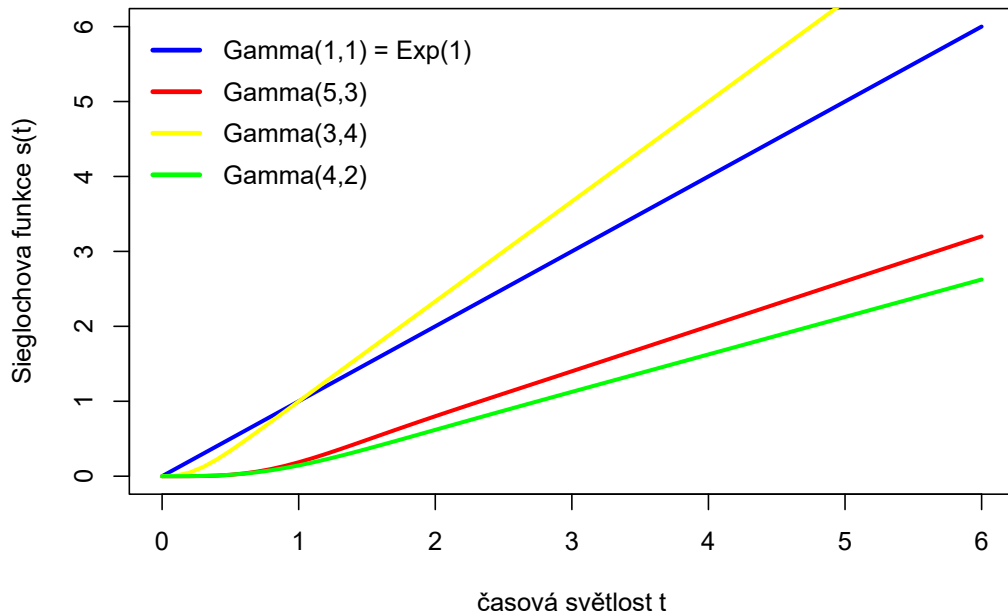
kde jsme označili

$$C_k = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^{(k+1)\alpha+(k-1)\frac{3}{2}+2} \frac{1}{k^{k\alpha+(k-1)\frac{3}{2}+1}} \frac{1}{4\mathcal{K}_{k\alpha+(k-1)\frac{3}{2}+1} [2k\sqrt{\beta\lambda}] \mathcal{K}_{\alpha+1} [2\sqrt{\beta\lambda}]}}.$$

Formule (3.2) je natolik komplikovaná, že není možné vyjádřit analyticky tvar Sieglochovy funkce $s(t)$ jako funkci času, proto její vlastnosti prozkoumáme pomocí numerických výpočtů a simulačních studií v prostředí .

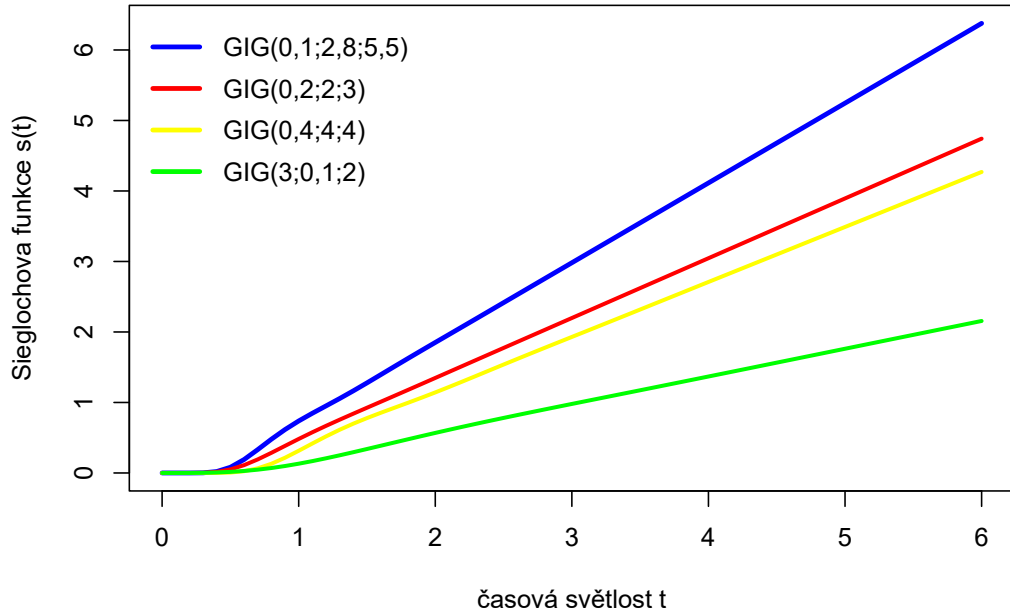
3.1.1 Tvar matematicky odvozené aproximace Sieglochovy funkce

Jak bylo již diskutováno v sekci 1.2, pro exponenciální, resp. Gamma rozdělení, se autorům podařilo dospět k analytickému vyjádření Sieglochovy funkce a její předpis je tvaru (1.8), resp. (1.7). V případě exponenciálního rozdělení s parametrem λ jde přímo o lineární funkci, jejíž směrnice je právě parametr λ . Pro Gamma rozdělení je předpis Sieglochovy funkce komplikovanější, nicméně pokud ji zobrazíme pro různé nastavení parametrů, pak můžeme zřetelně identifikovat lineární asymptoty, které jsou dobře viditelné na Obr. 3.1. Pro úplnost uvádíme, že parametry zvolené v tomto obrázku jsou čistě pro názornost a nejsou ničím významné.



Obrázek 3.1: Sieglochova funkce pro několik zvolených hustot kritických světlostí z rozdělení Gamma.

V praxi se Sieglochova funkce aproximuje právě lineární funkcí a proto bychom chtěli lineární asymptoty identifikovat i pro rozdělení GIG. V Obr. 3.2 můžeme vidět průběh Sieglochovy funkce definované vztahem (3.2), kterému předcházelo korektní, ale aproximativní matematické odvození, a i zde tyto lineární asymptoty rozpoznáváme. Zvolené parametry v tomto obrázku opět nejsou ničím významné. Nicméně, pokud porovnáme Obr. 3.1 a Obr. 3.2, můžeme si všimnout, že zelené křivky, přestože odpovídají přibližně



Obrázek 3.2: Sieglachova funkce pro několik zvolených hustot kritických světlostí z rozdělení GIG.

stejnému rozdělení¹, se s rostoucím t čím dál více odchyľují. V Obr. 3.3 jsou obě tyto křivky zobrazeny společně a je zde zřetelně vidět, že ze začátku jsou téměř identické, ovšem Sieglachova funkce pro rozdělení GIG se po určité době lehce skloní a její směrnice je nakonec nižší. To je důsledek faktu, že s rostoucím t se více projevuje efekt konvoluce GIG hustot. Jak bylo diskutováno v kapitole 2, s rostoucím počtem GIG hustot v konvoluci se chyba aproximace (2.21) zvyšuje lineárně, což způsobí lineární nárůst chyby i při výpočtu Sieglachovy funkce. Můžeme tedy vyslovit hypotézu, že přestože se nám v kapitole 2 podařilo zpřesnit aproximaci konvoluce k identických hustot pomocí Laplaceovy metody, nepřesnost těchto aproximací Sieglachovu funkci ovlivňuje natolik, že vzorec (3.2) není vhodné používat pro praktické výpočty, neboť výsledky dosažené tímto vyjádřením by nemusely být správné.

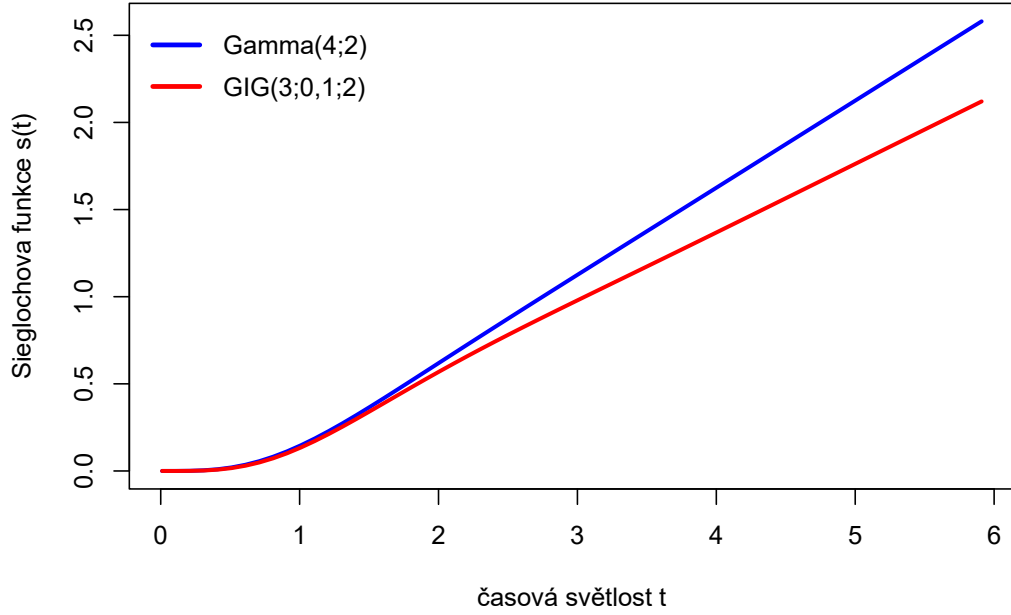
3.1.2 Empirická Sieglachova funkce

Další možný přístup nalezení Sieglachovy funkce z definice (3.1) je empirický odhad výrazu $P[N_t = k]$. To provedeme pomocí následující simulace. Uvažujme fixní hodnotu časové světlosti t . Podle námi zavedeného modelu mezeru odpovídající této světlosti t akceptuje právě $k \in \mathbf{N}_0$ vozidel, pokud

$$\sum_{i=1}^k y_i \leq t \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^{k+1} y_i \geq t, \quad (3.3)$$

kde y_1, \dots, y_{k+1} jsou kritické světlosti prvních $k+1$ řidičů. Hodnota k se v literatuře označuje jako akceptační řád časové světlosti t . Pro tuto světlost t nageneryjeme dostatečný

¹GIG rozdělení, definové vztahem (2.1), přechází pro β blízké 0 v rozdělení Gamma, definované vztahem (1.6)



Obrázek 3.3: Sieglachova funkce pro rozdělení Gamma(4, 2) a GIG(3; 0, 1, 2).

počet realizací kritické skvětlosti y_1, y_2, \dots z rozdělení GIG s danými parametry. Dále postupujeme dle následujícího algoritmu. Startujeme s hodnotou $k = 0$. Pokud $t > y_1$, hodnota akceptačního řádu k vzroste o jedničku, tedy $k = 1$, a zbylou světlost $t - y_1$ porovnáme s další realizací y_2 . Pokud znovu platí $t - y_1 > y_2$, zvýšíme hodnotu akceptačního řádu k opět o jedničku, tedy $k = 2$, a další realizaci y_3 porovnáme se světlostí $t - y_1 - y_2$, atd. Tento postup opakujeme do doby, kdy

$$t - y_1 - \dots - y_{j-1} > y_j \quad \wedge \quad t - y_1 - \dots - y_j < y_{j+1}$$

a hodnota akceptačního řádu časové světlosti t pro tento případ bude rovna $k = j$.

Tento experiment provedeme n -krát, a tedy pro jedno fixní t dostaneme n hodnot akceptačního řádu k_1, \dots, k_n a spočítáme odpovídající četnosti každé dostupné hodnoty k , které pro potřeby následujícího textu označíme jako n_k , tj.

$$n_k = \#\{k_i, i \in n \mid k_i = k\}.$$

Dále definujme symbol $k_{\max} = \max\{k_1, \dots, k_n\}$. Platí tedy

$$\sum_{k=0}^{k_{\max}} n_k = n.$$

Ze Zákona velkých čísel poté plyne, že

$$\frac{n_k}{n} \xrightarrow{P} \mathbb{P}[N_t = k], \quad (3.4)$$

tj. výrazy $\frac{n_k}{n}$ konvergují podle pravděpodobnosti právě k výrazu $\mathbb{P}[N_t = k]$.

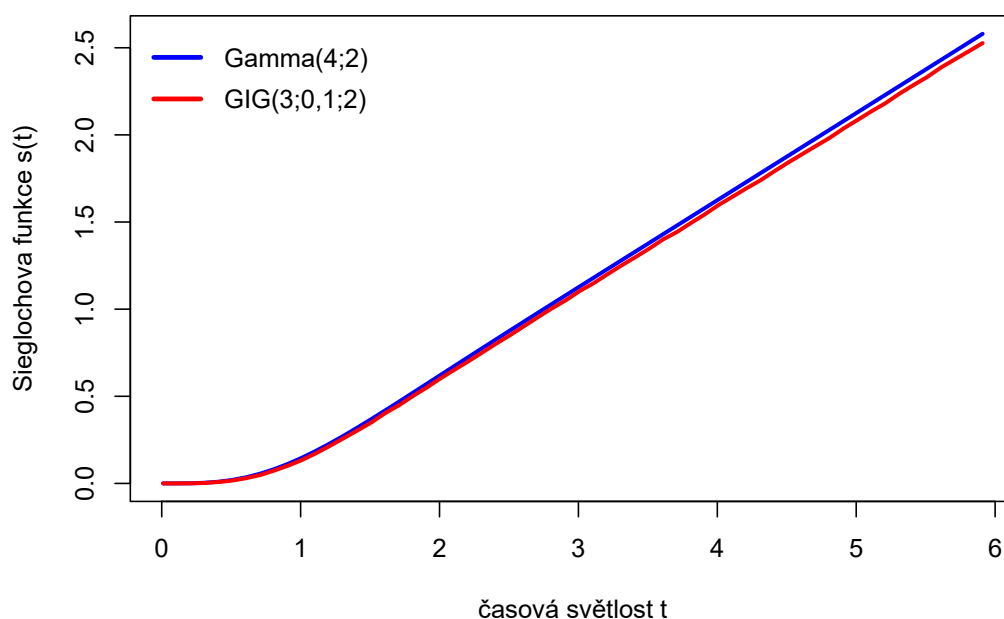
Za účelem nalezení alternativy vzorce (3.2), a při dodržení značení zavedeného v této sekci, nyní definujeme tzv. empirickou Sieglochovu funkci jako

$$s^*(t) = \sum_{k=0}^{k_{\max}} k \frac{n_k}{n}. \quad (3.5)$$

Takto definujeme empirickou Sieglochovu funkci pro jednu konkrétní světlost t , pro jinou světlost je celou popsanou simulaci nutno zopakovat. Tato funkce bude s rostoucím n zpřesňující se aproximací teoretické Sieglochovy funkce, což je důsledek právě Zákona velkých čísel.

V následujícím textu budeme tedy pracovat pouze s empirickou Sieglochovou funkcí a studovat právě její vlastnosti. V Obr. 3.4 je ukázáno, že aproximací výrazu $P[N_t = k]$ pomocí Zákona velkých čísel a zavedením empirické Sieglochovy funkce dostáváme mnohem přesnější aproximaci teoretické Sieglochovy funkce, než byla aproximace zavedená vzorcem (3.2).

Poznamenejme navíc, že pokud bychom zvolili $\beta = 0,01$, tedy rozdělení $\text{GIG}(3; 0,01; 2)$ bude blíže rozdělení $\text{Gamma}(4; 2)$, než rozdělení $\text{GIG}(3; 0,1; 2)$ z Obr. 3.4, obě křivky se budou přesně překrývat.



Obrázek 3.4: Sieglochova funkce pro rozdělení $\text{Gamma}(4, 2)$ a empirická Sieglochova funkce pro rozdělení $\text{GIG}(3; 0,1, 2)$.

3.1.3 Odhad GIG rozdělení kritických světlostí

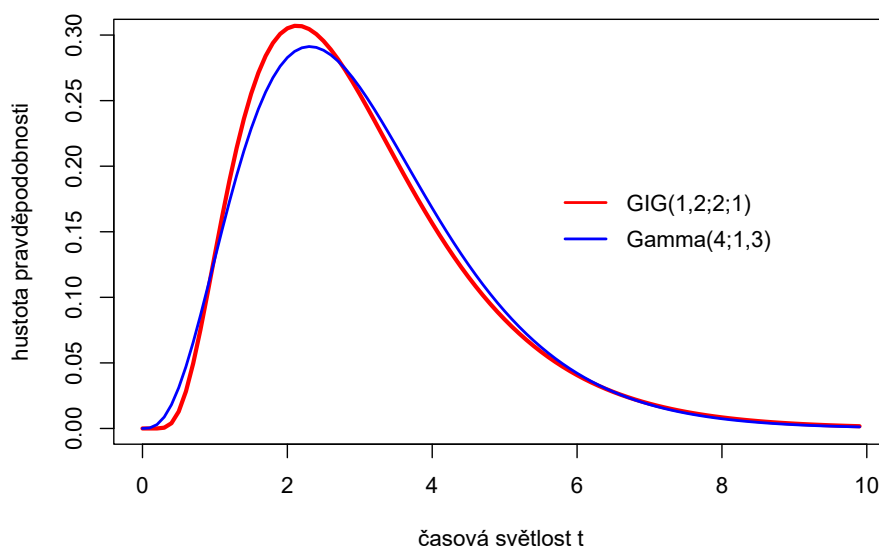
V článku [1] autoři pracovali s reálnými daty a použitím pravděpodobnostního modelu křížovanky se jim podařilo nalézt jako vhodné rozdělení kritických světlostí rozdělení $\text{Gamma}(4; 1,3)$. Pro rozdělení GIG dosud nemáme k dispozici potřebnou teorii, díky které

by se podařilo odhalit parametry odpovídající realitě. Proto budeme vycházet ze zmíněného $\text{Gamma}(4; 1,3)$ rozdělení a nalezneme rozdělení GIG, které tomuto Gamma rozdělení co nejlépe odpovídá. Toto rozdělení budeme brát za výchozí v následujících uvažích.

Za účelem nalezení vhodného rozdělení GIG provedeme následující experiment. Nageneme 10 000 náhodných čísel z rozdělení $\text{Gamma}(4; 1,3)$ a budeme předpokládat, že tato náhodná čísla pochází z rozdělení $\text{GIG}(\alpha, \beta, \lambda)$, kde $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta > 0$, $\lambda > 0$ jsou neznámé parametry. Jelikož bychom chtěli, aby se nalezené rozdělení odlišovalo od Gamma rozdělení, které by mělo $\beta = 0$, zafixujeme parametr β na hodnotě $\beta = 2$. Následně metodou maximální věrohodnosti² s podmínkou $\beta = 2$ nalezneme odhady neznámých parametrů

$$\hat{\alpha} = 1,2 \quad \text{a} \quad \hat{\lambda} = 1$$

a vykreslíme obě distribuce, abychom viděli, že jsou si dostatečně blízké. Obě tyto distribuce jsou ilustrovány v Obr. 3.5.



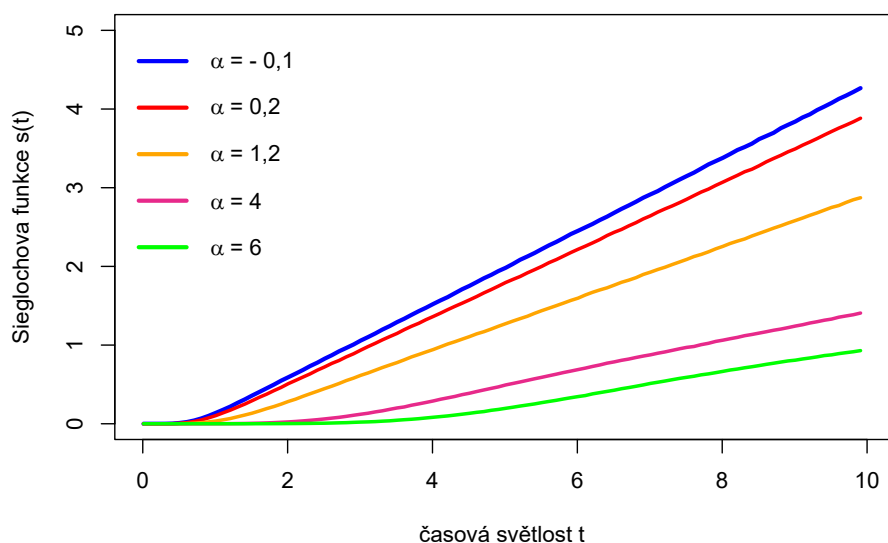
Obrázek 3.5: Hustota pravděpodobnosti $\text{Gamma}(4; 1,3)$, která vychází přímo z reálných dat dle článku [1] a odpovídající hustota pravděpodobnosti $\text{GIG}(1,2; 2; 1)$, jejíž parametry byly odhadnuty metodou MLE za podmínky $\beta = 2$.

3.1.4 Chování empirické Sieglochovy funkce

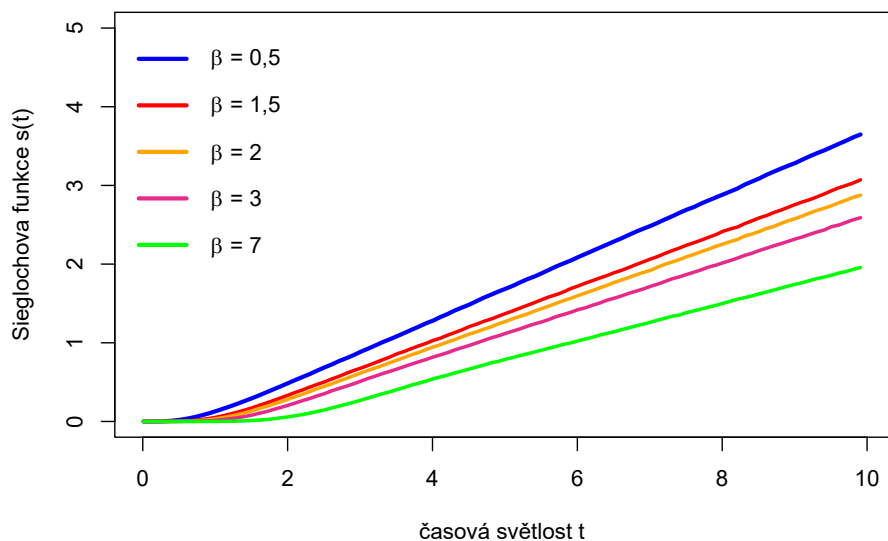
V následujících úvahách berme jako výchozí předpoklad, že $Y_i \sim \text{GIG}(1,2; 2; 1)$ a to pro všechna $i \in \mathbf{N}$. Podívejme se, jak se změní empirická Sieglochova funkce v závislosti na změnách jednotlivých parametrů.

Dva z parametrů vždy zafixujeme a budeme studovat pouze vliv třetího z nich na chování empirické Sieglochovy funkce. Z Obr. 3.6 je patrné, že s rostoucím parametrem α se sklon Sieglochovy funkce snižuje. Podobné chování platí i pro parametr β , což odpovídá tomu, že s rostoucími parametry α a β roste střední hodnota příslušných GIG rozdělení kritických světlostí, tj. méně řidičů bude akceptovat světlost délky t . Vliv změny parametru β je ilustrován v Obr. 3.7. Naopak rostoucí λ způsobí pokles střední hodnoty příslušných

²dále jen MLE



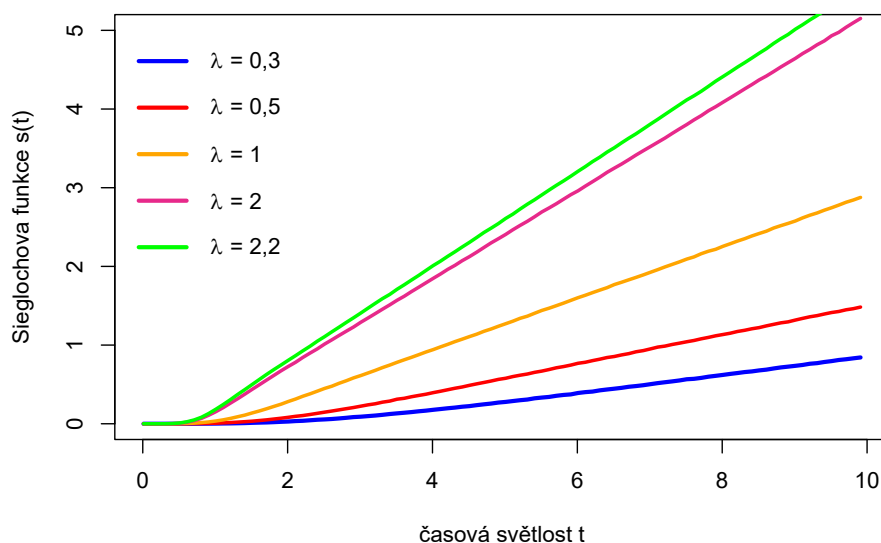
Obrázek 3.6: Sieglachova funkce, s parametry $\beta = 2$ a $\lambda = 1$, v závislosti na změně parametru α .



Obrázek 3.7: Sieglachova funkce, s parametry $\alpha = 1,2$ a $\lambda = 1$, v závislosti na změně parametru β .

GIG rozdělení kritických světlostí, tj. více řidičů bude akceptovat světlost délky t . Důsledkem je zvyšování směrnice Sieglachovy funkce. Tento efekt je k nahlédnutí v Obr. 3.8. Poznamenejme navíc, že hodnota n z definice empirické Sieglachovy funkce (3.5) je zde volena jako $n = 100\,000$, neboť např. pro $n = 10\,000$ křivky stále nebyly dostatečně hladké.

Zmíněné změny středních hodnot příslušných hustot GIG rozdělení z Obr. 3.6-3.8,



Obrázek 3.8: Sieglachova funkce, s parametry $\alpha = 1,2$ a $\beta = 2$, v závislosti na změně parametru λ .

jsou pro ilustraci znázorněny v Tab. 3.1-3.3.

α	-0,1	0,2	1,2	4	6
střední hodnota	2,15	2,34	3,05	5,44	7,31

Tabulka 3.1: Střední hodnoty pro rozdělení $GIG(\alpha,2,1)$ s proměnným parametrem α , který je volen stejně jako v Obr. 3.6.

β	0,5	1,5	2	3	7
střední hodnota	2,50	2,89	3,05	3,33	4,18

Tabulka 3.2: Střední hodnoty pro rozdělení $GIG(1,2;\beta;1)$ s proměnným parametrem β , který je volen stejně jako v Obr. 3.7.

λ	0,3	0,5	1	2	2,2
střední hodnota	8,48	5,43	3,05	1,79	1,67

Tabulka 3.3: Střední hodnoty pro rozdělení $GIG(1,2;2;\lambda)$ s proměnným parametrem λ , který je volen stejně jako v Obr. 3.8.

3.2 Sieglachova funkce v praxi

Uvažovaný pravděpodobnostní model byl poprvé prezentován v [1], můžeme ho tedy prohlásit za nový. V praxi se ale Sieglachova funkce odhaduje po částech lineární funkcí,

kteřou můžeme vyjádřit jako

$$\tilde{s}(t) = \begin{cases} at + b & \text{pro } t > t_0, \\ 0 & \text{pro } t \leq t_0, \end{cases} \quad (3.6)$$

kde $a > 0$, $b \in \mathbf{R}$ jsou vhodné konstanty a $t_0 = -b/a$ je prahová hodnota, jejíž existence je ospravedlněna předpokladem, že časová světlost menší než t_0 nebude akceptována žádným vozidlem čekajícím na vedlejší komunikaci. Parametry této aproximace jsou tradičně odhadovány následujícím způsobem. Podle námi zavedeného modelu mezeru odpovídající této světlosti x akceptuje právě $k \in \mathbf{N}_0$ vozidel, pokud

$$\sum_{i=1}^k y_i \leq x \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^{k+1} y_i \geq x, \quad (3.7)$$

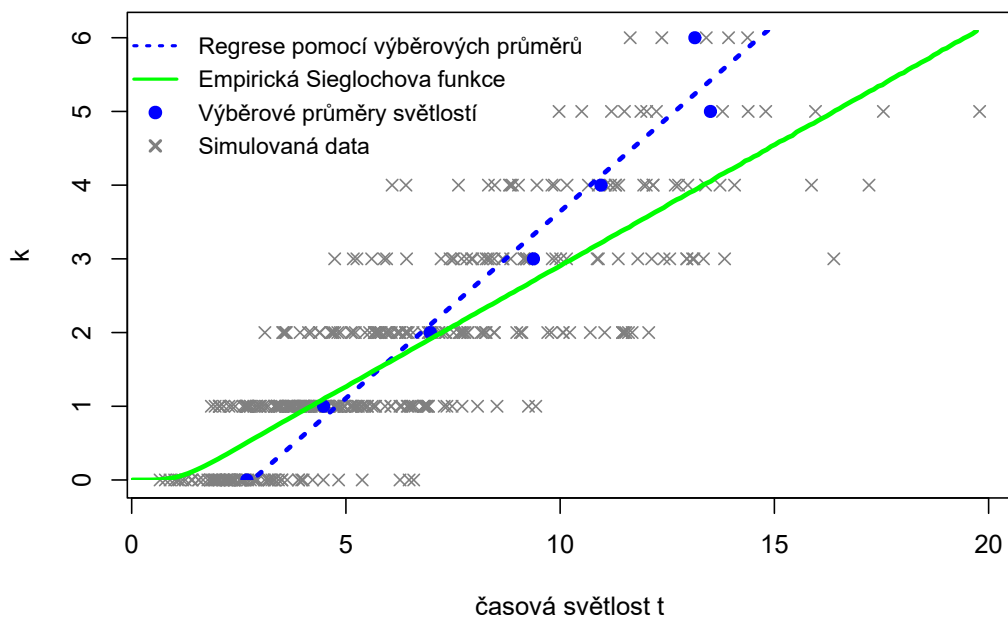
kde y_1, \dots, y_{k+1} jsou kritické světlosti prvních $k+1$ řidičů. Pro každou pozorovanou světlost $x > 0$ se zaznamená její akceptační řád světlosti $k \in \mathbf{N}_0$, tj. každé světlosti lze pomocí pravidla (3.7) přiřadit číslo $k \in \mathbf{N}_0$, které odpovídá počtu akceptujících vozidel a nazveme ho akceptační řád světlosti. Pro každou pozorovanou světlost $x > 0$ se zaznamená její akceptační řád světlosti $k \in \mathbf{N}_0$, tj. každé světlosti lze pomocí pravidla (3.7) přiřadit číslo $k \in \mathbf{N}_0$, které odpovídá počtu akceptujících vozidel. Poté se určí aritmetické průměry světlostí, kterým byla přiřazena stejná hodnota akceptačního řádu $k \in \mathbf{N}_0$, označme je jako \bar{x}_k , a následně je množina všech takových uspořádaných dvojic (\bar{x}_k, k) metodou lineární regrese proložena přímkou $\tilde{s}(t)$, která odpovídá aproximaci Sieglochovy funkce $s(t)$. Tento přístup je často využíván pro jednoduchost práce s daty, nicméně jedním z cílů této bakalářské práce je demonstrovat, že právě vytvářením průměrů \bar{x}_k dostáváme výsledky, které neodpovídají teoretické předpovědi, tedy tato regresní křivka $\tilde{s}(t)$ není dobrou aproximací Sieglochovy funkce.

Pro právě zmíněný aproximační proces snadno sestojíme simulační experiment, který může být popsán následujícím způsobem. Nageneme 400 nezávislých realizací náhodné veličiny $X \sim \text{GIG}(0,01; 3,6; 0,3)^3$, tj. 400 časových světlostí na hlavní komunikaci x_1, \dots, x_{400} . Podobně nageneme dostatečný počet kritických světlostí y_1, y_2, \dots , které odpovídají realizacím náhodné veličiny $Y \sim \text{GIG}(1,2; 2; 1)$. Každé světlosti x_i přiřadíme akceptační řád světlosti k_i dle pravidla (3.7). Body (x_i, k_i) jsou zobrazeny v Obr. 3.9 jako šedé křížky.

Následně spočítáme výběrové průměry \bar{x}_k světlostí, které byly akceptovány právě k vozidly a regresní přímkou proložíme body (\bar{x}_k, k) . Získané výsledky včetně teoretické Sieglochovy funkce jsou ilustrovány v Obr. 3.9. V tomto obrázku vidíme, že je zde velký rozdíl mezi aproximací $\tilde{s}(t)$, znázorněnou modrou přerušovanou přímkou, a empirickou Sieglochovou funkcí $s^*(t)$, což může dramaticky ovlivnit výpočet kapacity křižovatky. Nepřesnost aproximace \tilde{s} může být odůvodněna následujícím způsobem. Z definice Sieglochovy funkce (3.1) pro fixní t , jakožto střední hodnoty veličiny N_t přes všechna k , jsou vypočítávány očekávané hodnoty ve směru osy y , kdežto v popsaném tradičním aproximačním přístupu jsou počítány výběrové průměry ve směru osy x .

Autoři článku [3] ukázali (při práci s rozdělením Gamma), že pokud místo množiny uspořádaných dvojic (\bar{x}_k, k) proložíme regresní přímkou množinu bodů (x_i, k_i) , dostaneme značně kvalitnější aproximaci teoretické Sieglochovy funkce. Tímto se inspirujeme a aplikujeme metodu lineární regrese přímo na množinu bodů (x_i, k_i) , kterou jsme získali simulačním experimentem představeným právě v této sekci. V Obr. 3.10 vidíme, že tento aproximační přístup kopíruje tvar teoretické Sieglochovy funkce výrazně lépe.

³parametry tohoto rozdělení jsme zvolili podle článku [1]

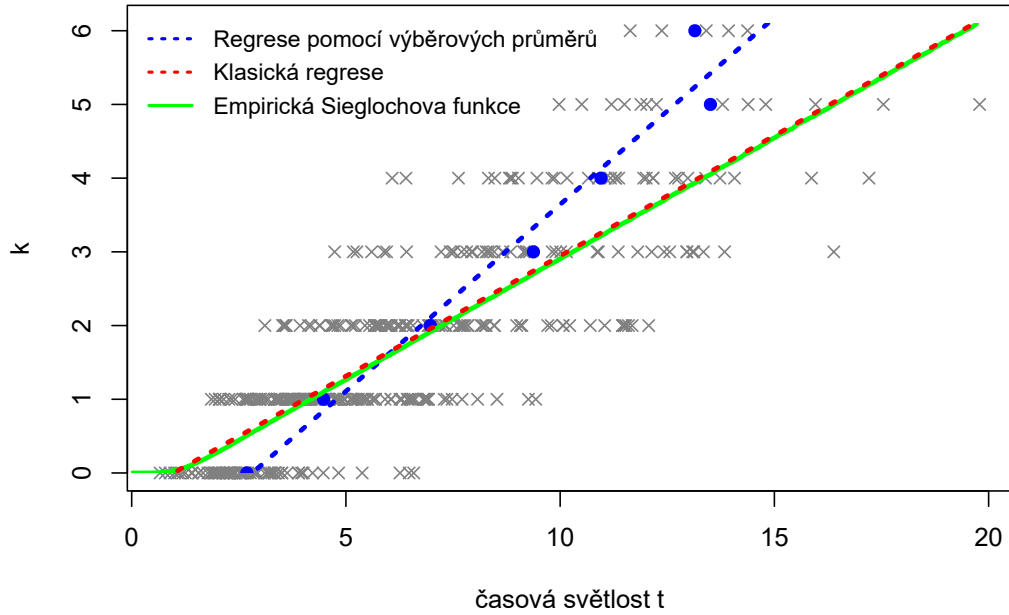


Obrázek 3.9: Empirická Sieglochova funkce $s^*(t)$ (zeleně) a její tradiční, po částech lineární, aproximace $\tilde{s}(t)$ (modře) pro $GIG(0,01; 3,6; 0,3)$ rozdělení na hlavní komunikaci a $GIG(1,2; 2; 1)$ na vedlejší komunikaci. Kruhy reprezentují výběrové průměry světlostí \bar{x}_k , které byly akceptovány právě k vozidly.

Je nutné podotknout, že obrázek prezentuje výsledky získané pouze pro jednu realizaci nagenovaných dat a pro jinou realizaci by se obrázek mohl lišit. Proto simulační experiment, kterým jsme získali body (x_i, k_i) , opakujeme 1000 krát, v každém kroku generujeme 400 světlostí na hlavní komunikaci a metodou lineární regrese odhadneme intercept b a směrnici a (z předpisu (3.6)) příslušné regresní křivky. Intercept a směrnici odhadujeme dvěma způsoby: tradičním postupem kdy regresní přímkou prokládáme množinu bodů (\bar{x}_k, k) a poté klasickou regresní přímkou skrz množinu bodů (x_i, k_i) . Střední hodnoty a rozptyly těchto odhadů najdeme v Tab. 3.4 a regresní křivky založené na středních hodnotách odhadovaných parametrů spolu s empirickou Sieglochovou funkcí $s^*(t)$ jsou k nahlédnutí v Obr. 3.11. Z této tabulky i obrázku vidíme, že klasický lineární regresní model aproximuje teoretickou Sieglochovu funkci velice dobře, narozdíl od lineární regrese aplikované na body (\bar{x}_k, k) .

	Regrese pomocí výběrových průměrů:		Klasická lineární regrese:	
	střední hodnota	rozptyl	střední hodnota	rozptyl
intercept	-0,787	0,396	-0,367	0,078
směrnice	0,411	0,047	0,327	0,014

Tabulka 3.4: Střední hodnoty a rozptyly 1000 odhadů parametrů regresních přímek pro 2 uvažované metody.



Obrázek 3.10: Empirická Sieglochova funkce $s^*(t)$ (zeleně) a její aproximace různými metodami pro simulovaná data s rozdělením $GIG(0,01; 3,6; 0,3)$ na hlavní komunikaci a $GIG(1,2; 2; 1)$ na vedlejší komunikaci.

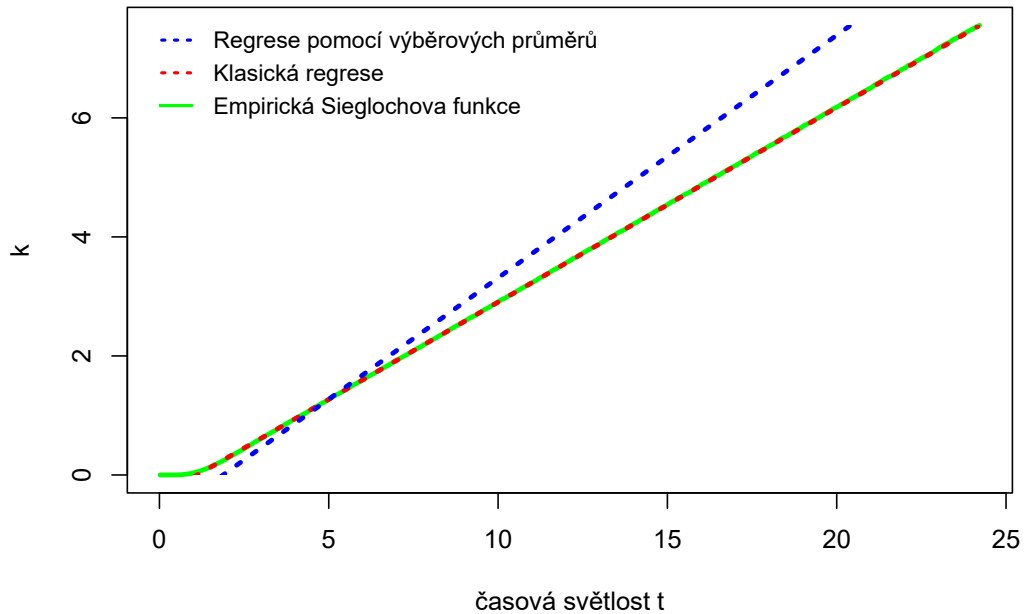
3.3 Vliv aproximací Sieglochovy funkce na výpočet kapacity křižovatek

Podívejme se nyní, jaký efekt má použití aproximací Sieglochovy funkce na odhad kapacity křižovatky, která je definována vztahem (1.3). Za tímto účelem počítejme numericky integrály

$$J = \int_0^{\infty} f_X(t)s(t)dt,$$

kde $f_X(t)$ je hustota pravděpodobnosti světlostí na hlavní komunikaci a $s(t)$ je Sieglochova funkce. Tyto integrály se vyskytují v definici (1.3), kde jsou ale navíc vynásobeny konstantou, která ale neovlivní naši výslednou analýzu, neboť by byla ve všech dále uvažovaných případech stejná, proto ji nebudeme uvažovat.

Budeme porovnávat 3 případy. Za $s(t)$ nejprve dosadíme empirickou Sieglochovu funkci $s^*(t)$ a výsledný integrál označíme symbolem J_{true} . Právě J_{true} by měla nejlépe odpovídat realitě. Jako druhý případ budeme uvažovat lineární aproximaci $\tilde{s}(t)$, kde intercept a směrnice byly vypočtené tradičním regresním přístupem pomocí výběrových průměrů. Hodnotu integrálu získanou tímto způsobem označíme jako J_{trad} . Jako třetí budeme uvažovat opět lineární aproximaci $\tilde{s}(t)$, avšak s interceptem a směrnicí získanými z klasické regresní analýzy. Výsledek tohoto integrálu označíme jako J_{klas} . Na hlavní komunikaci budeme vždy uvažovat světlosti z rozdělení $GIG(0,01; 3,6; 0,3)$, které našli autoři článku [1]. Za rozdělení kritických světlostí zvolíme námi nalezené rozdělení $GIG(1,2; 2; 1)$ a pro ilustraci zvolíme také další dvě rozdělení $GIG(4; 8; 0,3)$ a $GIG(6; 1; 0,5)$, které však nejsou ničím významná. Získané výsledky jsou pro tyto volby rozdělení kritických světlostí



Obrázek 3.11: Empirická Sieglochova funkce $s^*(t)$ (zeleně) a její aproximace různými metodami pro simulovaná data s rozdělením $GIG(0,01; 3,6; 0,3)$ na hlavní komunikaci a $GIG(1,2; 2; 1)$ na vedlejší komunikaci. Směrnice a intercept těchto aproximací jsou vypočteny jako průměry z 1000 opakovaných simulací.

k nahlédnutí v Tab. 3.5.

α	β	λ	J_{true}	J_{klas}	J_{trad}
1,2	2	1	1,660	1,659	1,769
4	8	0,3	0,055	0,069	0,218
6	1	0,5	0,102	0,121	0,260

Tabulka 3.5: Hodnoty integrálů J spočtené s empirickou Sieglochovou funkcí $s^*(t)$ (J_{true}), s tradiční lineární aproximací (J_{trad}) a s lineární aproximací pomocí klasické regrese (J_{klas}). Uvažujeme světlosti s rozdělením $GIG(0,01; 3,6; 0,3)$ a kritické světlosti z rozdělení $GIG(1,2; 2; 1)$, $GIG(4; 8; 0,3)$ a $GIG(6; 1; 0,5)$.

Z této tabulky vidíme, že hodnota J_{trad} je pro všechny sady vyšší než obě hodnoty J_{klas} a J_{true} . Navíc pro rozdělení $GIG(4; 8; 0,3)$ je hodnota J_{trad} dokonce téměř 4-krát vyšší, než skutečná hodnota J_{true} . Měli bychom tedy zvážit náhradu tradiční aproximace založené na výběrových průměrech pomocí námi navržené aproximace založené na klasické lineární regresi, neboť při použití tradiční aproximace by kapacity křížovatek mohly být značně nadhodnocené.

Závěr

V první části bakalářské práce jsme v souladu s terminologií teorie Gap Acceptance zadefinovali základní matematický model neřízené křižovatky typu T. Dále jsme vysvětlili důležitost analýzy kritických světlostí ve spojitosti s pojmem Sieglochovy funkce a s odhadem kapacity křižovatek. Následně jsme obecný model křižovatky specifikovali přidáním předpokladu GIG-rozdělených světlostí a kritických světlostí.

Pro potřeby analytického odvození Sieglochovy funkce jsme v druhé části dvěma způsoby našli aproximativní formuli pro k konvolucí identických $GIG(\alpha, \beta, \lambda)$ hustot, porovnali jsme přesnost obou aproximací pomocí histogramů a analýzy středních hodnot a zvolili tu přesnější. Konvoluce k identických hustot dle přesnější Laplaceovy metody je (přibližně) také hustota pravděpodobnosti a to z rozdělení $GIG(k\alpha + (k-1)\frac{3}{2}, k^2\beta, \lambda)$.

Ve třetí části jsme odvodili vzorec pro aproximaci Sieglochovy funkce (3.2). Její průběh jsme pro různé hodnoty parametrů zobrazili do grafu, ze kterého byla zřejmá lineární asymptota, kterou se Sieglochova funkce v praxi často aproximuje. Nicméně jsme ukázali, že tento vzorec není vhodnou aproximací, neboť její chyba se při porovnání pro blízká rozdělení GIG a Gamma lineárně zvyšovala s rostoucím t . Naše hypotéza byla taková, že na Sieglochovu funkci mají velký vliv chyby v aproximativním vyjádření konvoluce k identických GIG hustot, které rostly lineárně s rostoucím počtem funkcí v konvoluci. Proto jsme zadefinovali empirickou Sieglochovu funkci vztahem

$$s^*(t) = \sum_{k=0}^{k_{\max}} k \frac{n_k}{n},$$

kde sčítací index k představuje akceptační řád světlosti délky t , $k \in \mathbf{N}_0$, symbolem k_{\max} rozumíme nejvyšší hodnotu akceptačního řádu k , n_k představuje odpovídající četnost akceptačního řádu k a n je počet pozorování. Její definice byla založena na Zákoně velkých čísel, proto jsme měli jistotu, že pro velká n bude skutečně dobrou aproximací teoretické Sieglochovy funkce.

Následně jsme našli GIG rozdělení kritických světlostí, blízké rozdělení Gamma uvažovaného v práci [1], a to $GIG(1,2;2;1)$. Toto rozdělení jsme brali jako výchozí ve zbytku naší práce. Pro analýzu chování empirické Sieglochovy funkce, jsme vždy zafixovali 2 z parametrů tohoto rozdělení a sledovali jsme vliv změny třetího z nich. Výsledek pro změnu parametrů α a β byl stejný. S rostoucím parametrem se zvyšovala střední hodnota příslušných GIG rozdělení, což odpovídá tomu, že méně řidičů akceptuje světlost délky t , a tedy asymptotická směrnice Sieglochovy funkce se zmenšuje. Pro parametr λ platil opačný efekt. Rostoucí λ způsobilo pokles střední hodnoty příslušných GIG rozdělení a asymptotická směrnice se zvětšovala.

Dále jsme diskutovali možné aproximativní techniky. Ukázali jsme, že tradiční regresní techniky selhávají a navrhli jsme způsob založený na klasické regresní analýze, který lépe aproximuje empirickou Sieglochovu funkci. Důvod selhání tradičních aproximativních technik je s velkou pravděpodobností ten, že v popsaném tradičním aproximativním přístupu jsou počítány výběrové průměry ve směru osy x , kdežto v definici Sieglochovy funkce

(3.1) pro fixní t jsou vypočítávány očekávané hodnoty ve směru osy y , což bylo ukázáno pro exponenciální a Gamma rozdělení v článku [3].

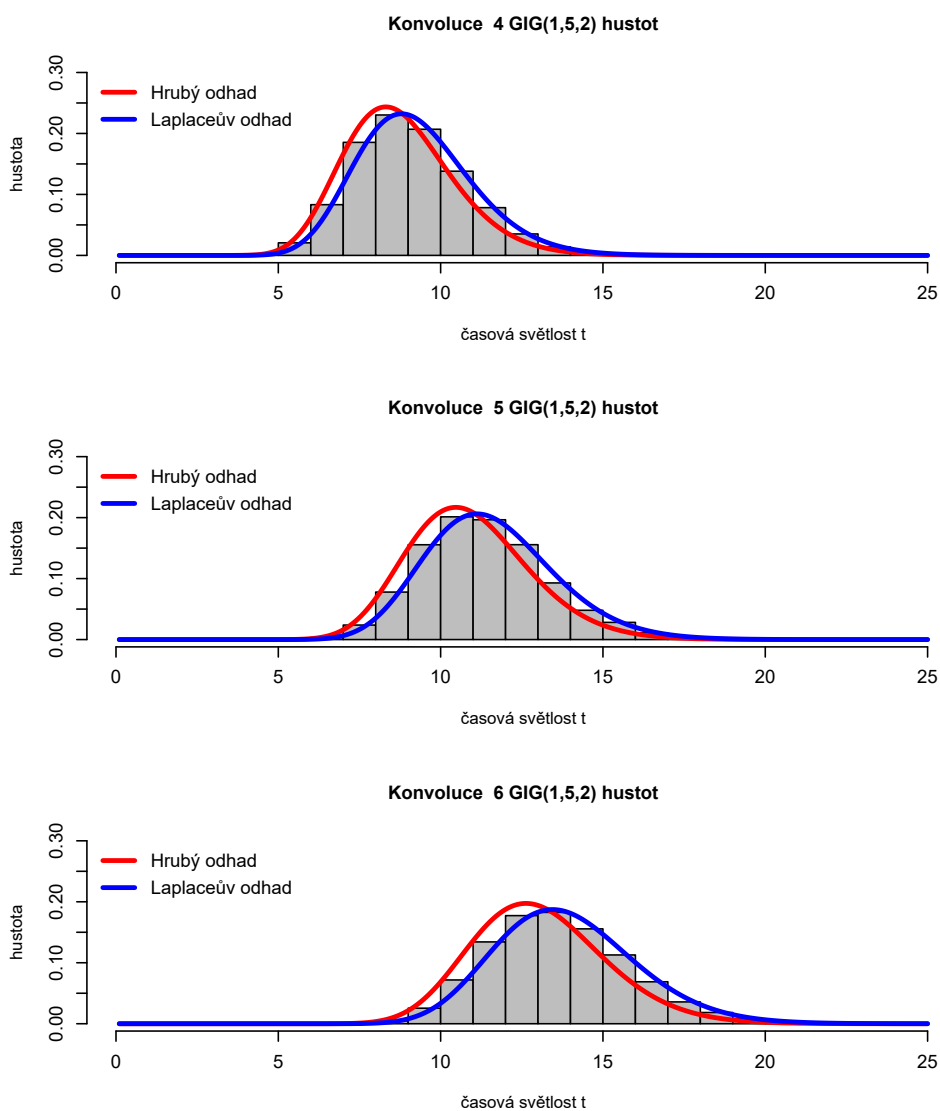
Nakonec jsme se podívali na efekt použití uvažovaných aproximací Sieglochovy funkce na odhad kapacity neřízené křižovatky. Z tohoto rozboru vyplývá, že kapacita křižovatky je při použití tradičního aproximačního přístupu vyšší, než při použití empirické Sieglochovy funkce, která ale odpovídá realitě. Naopak pokud použijeme klasické regresní techniky při odhadování Sieglochovy funkce, dostáváme výsledky uspokojivě blízké realitě. Proto bychom měli zvážit použití tradičního aproximačního přístupu v praxi, neboť kapacita křižovatek by v tomto případě mohla být nadhodnocená.

Literatura

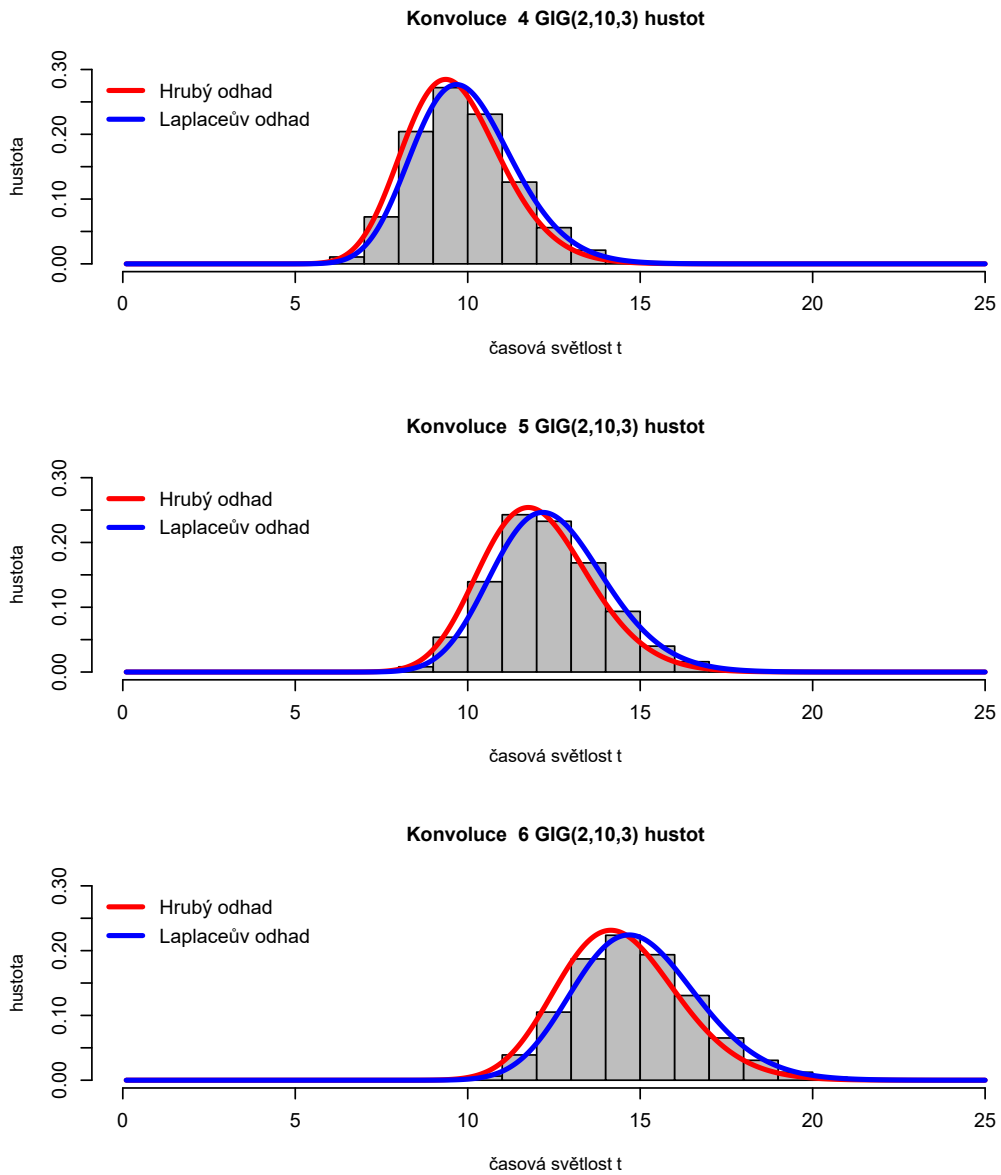
- [1] Krbálek, M., Hobza, T., Patočka, M., Krbálková, M., Apeltauer, J., Groverová, N., Statistical aspects of gap-acceptance theory for unsignalized intersection capacity. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 594, 2022, 1-19.
- [2] Wohlrath, D., 2021. Statistické modelování dopravního toku na neřízené křižovatce typu T. Výzkumný úkol, FJFI ČVUT v Praze, Praha, 2021.
- [3] Hobza, T., Krbálek M., Regression analysis for estimations of capacity at unsignalized intersection, připravovaný manuskript, 2022.
- [4] Krbálková, M., Studie dosahu interakčních sil v dopravních systémech, Diplomová práce, PŘF UHK v Hradci Králové, Hradec Králové, 2018.
- [5] Krbálek, M., Theoretical predictions for vehicular headways and their clusters. *Physica A: Mathematical and Theoretical* 46, 2013, 1-19.
- [6] Lhotáková, A., Testování účinnosti odhadovacích metod pro GIG-distribuovaná data. Výzkumný úkol, FJFI ČVUT v Praze, Praha, 2022.
- [7] Vacková, J., Poruchová teorie statistické rigidity částicových systémů. Diplomová práce, FJFI ČVUT v Praze, Praha, 2017.
- [8] Siegloch, W., Die Leistungsermittlung an Knotenpunkten ohne Lichtsignalsteuerung [Capacity calculations at unsignalized intersections]. *Strassenbau und Strassenverkehrstechnik* 154. Bundesminister für Verkehr, 1973.
- [9] Brilon, W., Koenig, R., Troutbeck, R.J., Useful estimation procedures for critical gaps. *Transportation Research Part A: Policy and Practice* 33, 1999, 161-186.

Přílohy

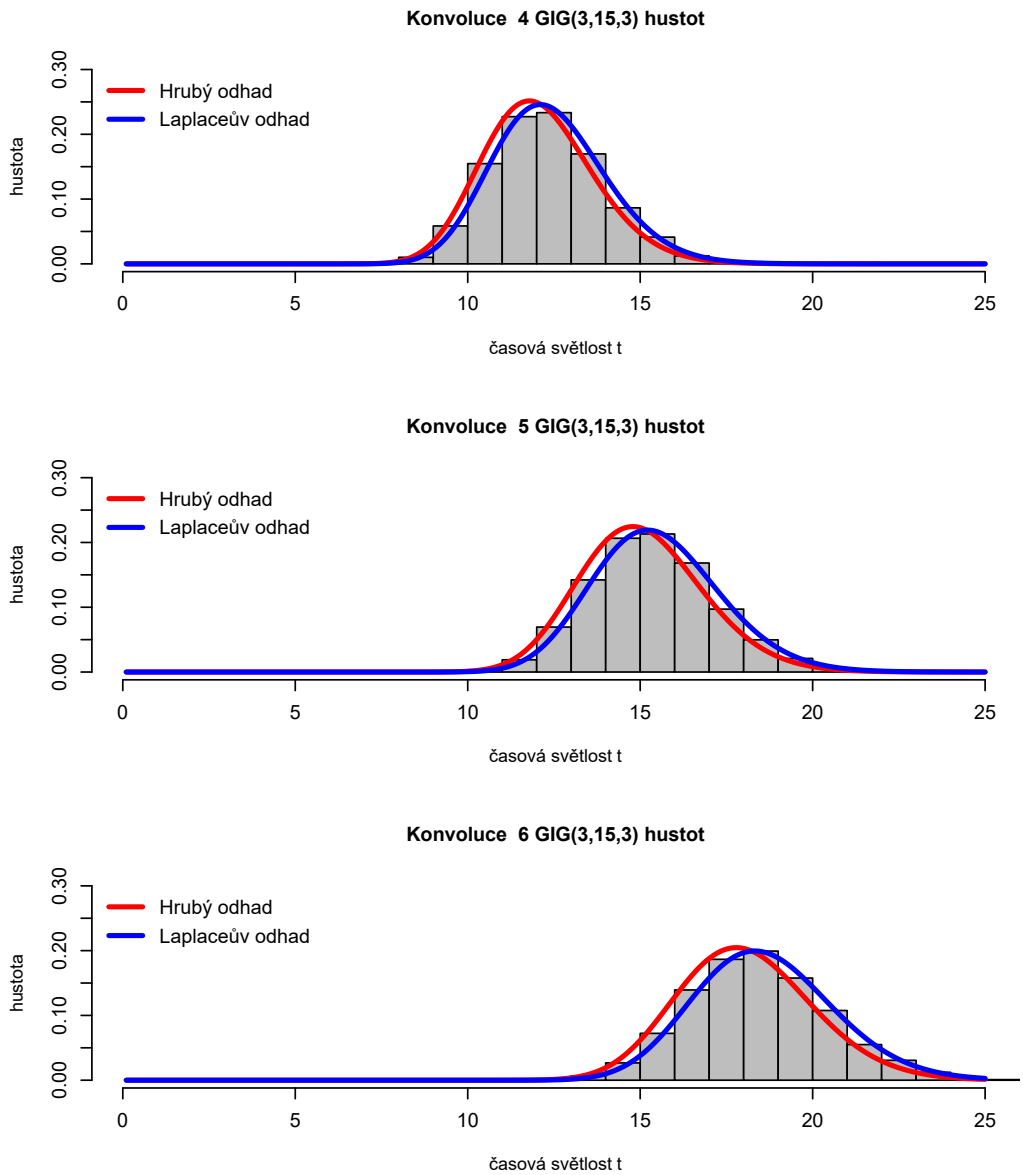
V příloze najdeme obrázky ke kapitole 2, ve kterých porovnáváme přesnost obou aproximací (2.9) a (2.17).



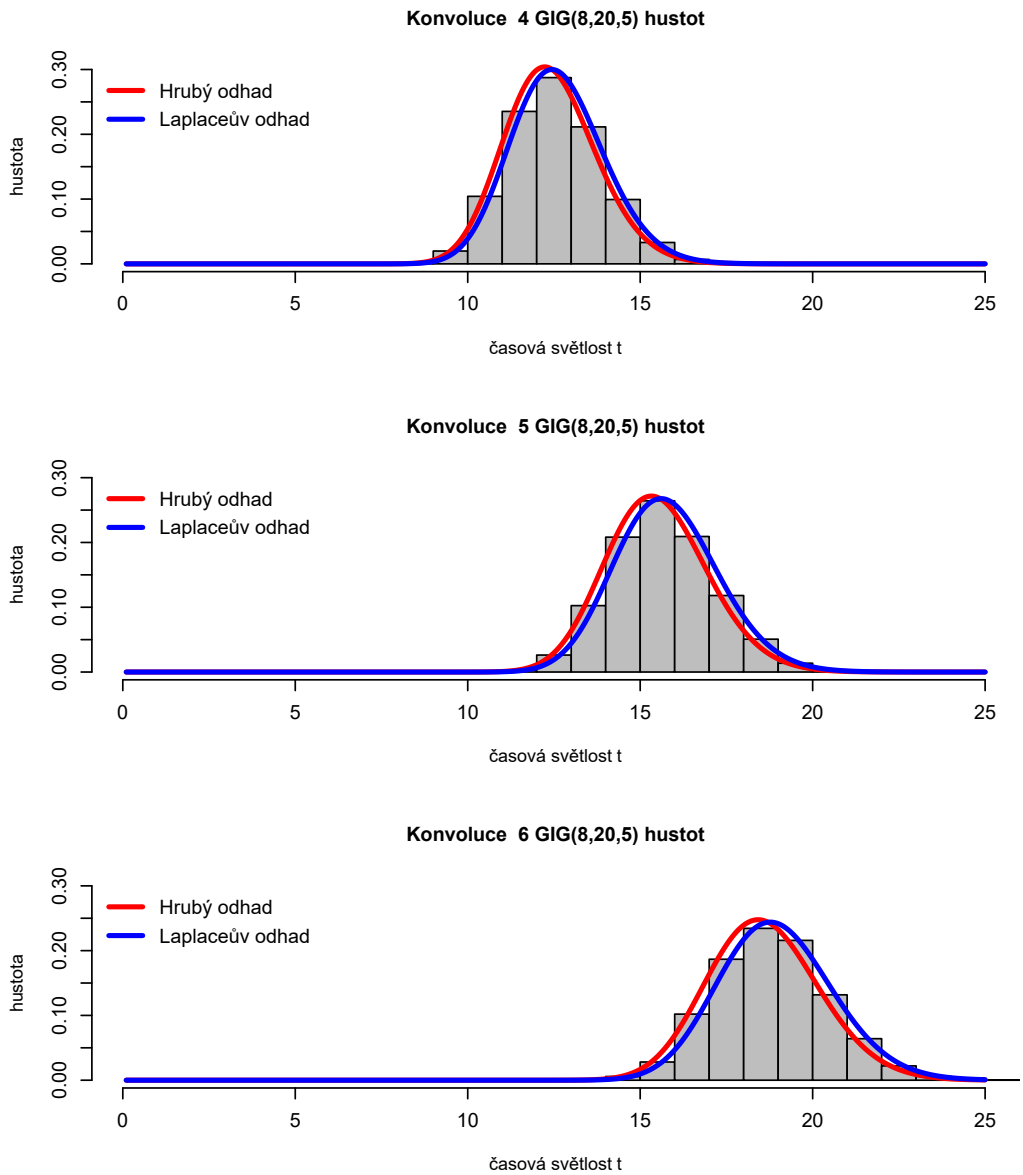
Obrázek 12: Histogramy pro různý počet konvolucí a odpovídajícími hustotami pravděpodobnosti získanými Hrubým odhadem a Laplaceovou metodou se zvolenými parametry $\alpha = 1$, $\beta = 5$, $\lambda = 2$.



Obrázek 13: Histogramy pro různý počet konvolucí a odpovídajícími hustotami pravděpodobnosti získanými Hrubým odhadem a Laplaceovou metodou se zvolenými parametry $\alpha = 2$, $\beta = 10$, $\lambda = 3$.



Obrázek 14: Histogramy pro různý počet konvolucí a odpovídajícími hustotami pravděpodobnosti získanými Hrubým odhadem a Laplacovou metodou se zvolenými parametry $\alpha = 3$, $\beta = 15$, $\lambda = 3$.



Obrázek 15: Histogramy pro různý počet konvolucí a odpovídajícími hustotami pravděpodobnosti získanými Hrubým odhadem a Laplacovou metodou se zvolenými parametry $\alpha = 8$, $\beta = 20$, $\lambda = 5$.