

České vysoké učení technické v Praze

Fakulta strojní

Ústav technické matematiky



**Modelování šíření znečištění v atmosféře**

**Numerical Simulation of the Transport and  
Dispersion of the PM in the ABL**

Bakalářská práce

Vypracoval:

Peter Denkóci

Vedoucí práce:

doc. Ing. Luděk Beneš, PhD.

Konzultant:

Mgr. Hynek Řezníček

Rok:

2022

## I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Denkóci** Jméno: **Peter** Osobní číslo: **492628**  
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**  
Zadávací katedra/ústav: **Ústav technické matematiky**  
Studijní program: **Teoretický základ strojího inženýrství**  
Studijní obor: **bez oboru**

## II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

**Modelování šíření znečištění v atmosféře**

Název bakalářské práce anglicky:

**Numerical simulation of the transport and dispersion of the PM in the ABL**

Pokyny pro vypracování:

Poléťavý prach patří k nejdůležitějším faktorům znečišťujícím ovzduší zejména v průmyslových a osídlených oblastech. Poléťavý prach a zejména chemické a biologické látky na něj navázané, jsou významným zdravotním rizikovým faktorem a proto je jeho množství v ovzduší limitováno různými normami. Největšími zdroji jsou průmysl, doprava, lokální topeniště. Matematické modelování šíření, rozptylu a usazování prachu z různých typů zdrojů významně pomáhá k poznání těchto procesů a tím ke snižování imisní zátěže, řízení zdrojů znečištění a podobně. Student se seznámí se základy modelování proudění a šíření znečištění. Dále se seznámí s numerickými metodami pro řešení takovýchto modelů. Na závěr bude řešit jednoduchý případ s využitím dodaného software.

Seznam doporučené literatury:

Bednář J., Zikmunda O.: Fyzika mezní vrstvy atmosféry. Academia, Praha 1985  
Arya S. P.: Introduction to Micrometeorology. Academic Press, San Diego 2001.  
Schlichting H., Gersten K.: Boundary-Layer Theory, Springer 2017  
Ferziger J.H., Peric M.: Computational methods for fluid dynamics, Springer 2002  
OpenFoam user guide, [www.openfoam.com/documentation/userguide](http://www.openfoam.com/documentation/userguide)

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

**doc. Ing. Luděk Beneš, Ph.D. ústav technické matematiky FS**

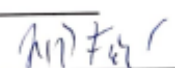
Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

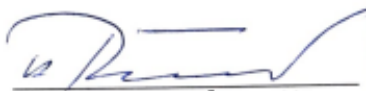
**Mgr. Hynek Řezníček ústav technické matematiky FS**

Datum zadání bakalářské práce: **14.04.2022** Termín odevzdání bakalářské práce: **14.08.2022**

Platnost zadání bakalářské práce:

  
doc. Ing. Luděk Beneš, Ph.D.  
podpis vedoucí(ho) práce

  
prof. Ing. Jiří Fůrst, Ph.D.  
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

  
doc. Ing. Miroslav Španiel, CSc.  
podpis děkana(ky)

## III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

6.5.2022  
Datum převzetí zadání

  
Podpis studenta

## **Prehlásenie**

Prehlasujem, že som svoju bakalársku prácu vypracoval samostatne pod vedením doc. Ing. Lud'ka Beneše PhD. a Mgr. Hynka Řezníčka a použil som len podklady uvedené v priloženom zozname literatúry.

V Prahe dňa .....

.....

Peter Denkóci

## **Pod'akovanie**

Chcel by som poďakovať svojim vedúcim bakalárskej práce doc. Ing. Lud'kovi Benešovi PhD. a Mgr. Hynkovi Řezníčkovi za odborné vedenie, priateľský a obetavý prístup, a taktiež za cenné rady, ktorými pomohli k vzniku tejto práce. Ďalej by som chcel poďakovať svojej rodine a kamarátom za podporu počas štúdia.

Peter Denkóci

Název práce: **Modelování znečištění v atmosféře**

Autor: Peter Denkóci

Studijní program: Teoretický základ strojího inženýrství  
Obor: bez oboru  
Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: doc. Ing. Luděk Beneš, PhD.  
Ústav technické matematiky, Fakulta strojní, České vysoké učení  
technické v Praze

Konzultant: Mgr. Hynek Řezníček  
Ústav technické matematiky, Fakulta strojní, České vysoké učení  
technické v Praze

e-mail: Ludek.Benes@fs.cvut.cz  
hynek.reznicek@fs.cvut.cz

Abstrakt: V tejto bakalárskej práci sa zaoberáme matematickým modelovaním znečistenia v atmosfére. Prúdenie tekutiny v medznej vrstve sme popísali rovnicami zákonov zachovania. Analyticky sme odvodili Blasiusov problém pre limitný 2D prípad laminárne obtekaného telesa. Tento problém sme riešili metódou streľby a metódou sečníc. Ďalej sme numericky riešili prúdenie a rozptyl pasívnej prímеси vo voľnej atmosfére a nad plochým terénom. Numerické výpočty sme realizovali prostredníctvom open source programu OpenFOAM. Numerické výsledky sme porovnali s analytickým riešením.

Klíčová slova: medzná vrstva atmosféry, Blasiusov problém, metóda streľby, metóda konečných objemov, SIMPLE, pasívna prímеси

**Title:** **Numerical Simulation of the Transport and Dispersion of the Passive Mess in the Atmospheric Boundary Layer**

**Author:** Peter Denkóci

**Study program:** Theoretical basis of mechanical engineering

**Branch:** no branch

**Type of theses:** Bachelor thesis

**Supervisors:** doc. Ing. Luděk Beneš, PhD.  
Department of Technical Mathematics, Czech Technical University in Prague

**Consultant:** Mgr. Hynek Řezníček  
Department of Technical Mathematics, Czech Technical University in Prague

**e-mail address:** Ludek.Benes@fs.cvut.cz  
hynek.reznicek@fs.cvut.cz

**Abstract:** The Bachelor thesis deal with mathematical modelling of atmospheric pollution, where the transport and the dispersion of pollution in the boundary layer of the atmosphere is being investigated. Conservation laws are used to describe flow in the boundary layer. Based on boundary-layer equations, the Blasius problem, which represents the case of 2D laminar flow around a flat plate, is derived. To resolve the Blasius equation, the shooting method and the secant method were used. Furthermore, we resolved flow of fluid and dispersion of the passive mess in the free atmosphere and over the flat ground by using numerical solution. Numerical simulations were performed using OpenFOAM, the open – source program. Numerical results were compared with analytical solution.

**Key words:** the atmospheric boundary layer, Blasius problem, the shooting method, the finite volume method, SIMPLE algorithm, passive mess

# Obsah

Úvod .....	9
1 Medzná vrstva atmosféry.....	10
1.1 Popis atmosféry .....	10
1.2 Medzná vrstva atmosféry.....	11
1.3 Základné rovnice prúdenia.....	12
1.3.1 Rovnica kontinuity .....	13
1.3.2 Navier-Stokesove rovnice.....	13
1.3.3 Rovnica pre transport pasívnej prímеси .....	14
1.3.4 Podobnostné čísla využívané v práci.....	15
2 Blasiusov problém.....	16
2.1 Prandtllova medzná vrstva.....	16
2.2 Blasiusovo riešenie.....	17
2.3 Numerické riešenie Blasiusovho problému .....	20
2.3.1 Metóda streľby .....	20
2.3.2 Metóda sečníc .....	22
2.3.3 Runge-Kuttova metóda.....	22
2.4 Odvodenie súčiniteľa odporu trenia .....	22
3 Numerické riešenie pomocou výpočtového programu OpenFOAM .....	24
3.1 Program OpenFOAM .....	24
3.2 Metóda konečných objemov .....	24
3.3 Realizácia MKO v OpenFOAM-e.....	26
3.3.1 Sieť .....	26
3.3.2 Interpolácia hodnôt.....	27
3.3.3 Diskretizácia konvektívnych členov .....	27
3.3.4 Diskretizácia difúzných členov .....	27
3.4 SIMPLE algoritmus.....	28
3.4.1 Relaxačné faktory.....	28
3.5 Riešenie lineárnych rovníc.....	29
4 Výsledky .....	30
4.1 Výsledok numerického riešenia Blasiusovho problému .....	30
4.2 Prúdenie nad plochým terénom.....	31
4.3 Výsledky numerického riešenia ustáleného prúdenia nad plochým terénom.....	32
4.4 Súčiniteľ odporu trenia .....	41
4.5 Priebeh výpočtu.....	41

4.6	Výsledky rozptylu pasívnej prímеси .....	44
Záver .....		47
Bibliografia .....		48



# Úvod

V dnešnej dobe sa pre simuláciu konkrétnych fyzikálnych problémov používa matematické modelovanie. Pomocou matematického modelovania môžeme simulovať napr. aerodynamiku vozidiel, prúdenie krvi v ľudskom tele alebo prúdenie vzduchu v zemskej atmosfére. Matematické modelovanie sa stáva stále populárnejším, aj vďaka rozvoju výpočtovej techniky, ktorá je jej neoddeliteľnou súčasťou.

V bakalárskej práci sa venujeme matematickému modelovaniu znečistenia v medznej vrstve atmosféry (MVA). Jedná sa o veľmi zložitý problém, a preto sa v tejto práci zaoberáme len modelovaním znečistenia pri ustálenom laminárnom prúdení tekutiny.

V prvej kapitole popíšeme medznú vrstvu atmosféry Zeme a vplyv znečistenia ovzdušia na človeka a jeho činnosti. Pre matematický popis pohybu znečistenia v MVA použijeme rovnice zákonov zachovania. V práci sa budeme venovať 2D laminárnemu prúdeniu tekutiny nad plochým terénom s jednoduchou medznou vrstvou. Pre toto prúdenie si odvodíme Blasiusovo riešenie. Numerické výpočty budeme realizovať pomocou open source programu OpenFOAM. Budeme skúmať nezávislosť výpočtu na voľbe siete, výpočtový čas v závislosti na veľkosti relaxačného faktora a zistíme hodnotu koeficienta odporu trenia medzi doskou a tekutinou. Pre validáciu numerických výsledkov využijeme Blasiusov problém. Ďalej sa budeme zaoberať transportom a disperziou znečistenia. Pre modelovanie znečistenia použijeme nami uvažovaný 2D prípad laminárneho prúdenia, do ktorého vložíme bodový zdroj, a budeme pozorovať chovanie pasívnej prímеси a rozptyl jej koncentrácie.

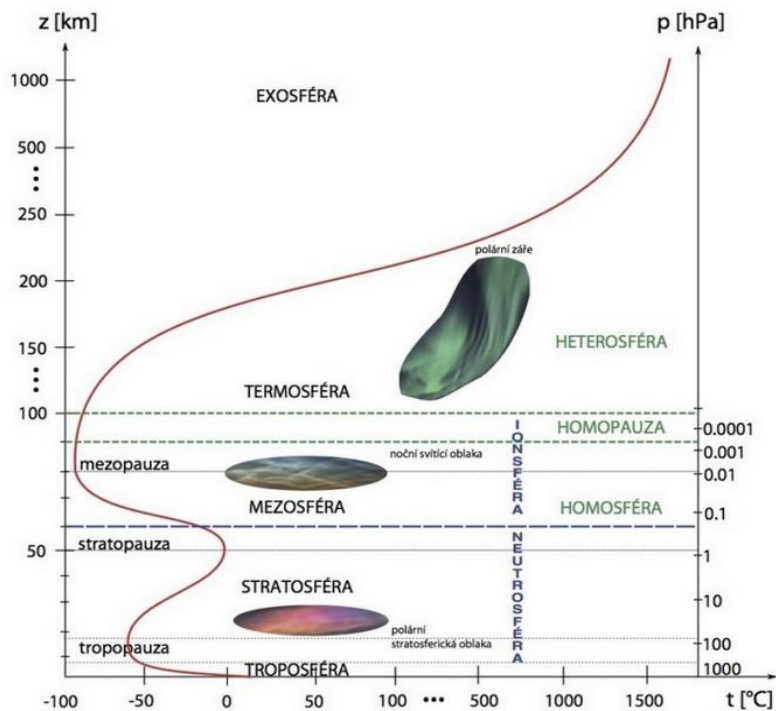
# 1 Medzná vrstva atmosféry

## 1.1 Popis atmosféry

V tejto kapitole si zdefinujeme niektoré základné pojmy dôležité pre našu prácu. Ako prvé si musíme zaviesť pojem atmosféra. Pod pojmom zemská atmosféra budeme chápať vrstvu plynnej zmesi obklopujúcu zemský povrch, ktorá je k Zemi priťahovaná tiažovou silou. Atmosféra oddeľuje zemský povrch od medziplanetárneho priestoru, takisto ho chráni pred kozmickým žiarením, nebezpečným vplyvom ultrafialového žiarenia a silnými zmenami teploty. Atmosféru na základe fyzikálnych vlastností môžeme rozdeliť do nasledujúcich vrstiev.

Najspodnejšia vrstva, ktorá interaguje s povrchom Zeme, je **troposféra** siahajúca do výšky v priemere okolo 11 km. Pre túto vrstvu je charakteristickou vlastnosťou úbytok teploty v závislosti na výške. Ďalej nasleduje **stratosféra**, v ktorej sa vďaka ozónu pohlcuje ultrafialové žiarenie, ktoré silno ohrieva vrstvu. Vo výške od 50 km do 80 km sa nachádza **mezosféra**. Vo vrchných severných častiach mezosféry počas leta je možné pozorovať výskyt striebřistých oblakov s veľmi jemnou štruktúrou, ktoré sa pohybujú rýchlosťou 40 až 50 km/h. **Termosféra**, vyznačujúca sa veľkou elektrickou vodivosťou vďaka obsahu veľkého množstva elektricky nabitých častíc, a **exosféra** zaplňujúca zbytok atmosférického obalu tvoria najvyššie vrstvy atmosféry.

Všetky meteorologické javy sa odohrávajú v spodných vrstvách a keďže vo výške 100 km je hustota vzduchu rovná jednej milióntine hustoty na povrchu, budeme uvažovať pre účely klasickej fyziky, že hrúbka sa rovná spomínaným 100 km. Pohyb vzduchu vo voľnej atmosfére v horizontálnej rovine je určený tlakovými silami a silami Coriolisovými, ktoré sú výsledkom rotácie Zeme okolo vlastnej osi, tiažovou silou, vertikálnym tlakovým gradientom a vztlakovými silami, ktoré súvisia s teplotným zvrstvením atmosféry vo vertikálnom smere [5].



Obrázok 1.1 Vrstvy atmosféry [8]

## 1.2 Medzná vrstva atmosféry

Najnižšiu časť troposféry nazývame **medzná vrstva atmosféry**. Táto vrstva je priamo ovplyvnená vlastnosťami povrchu, akými sú napr. jeho štruktúra, zmena teploty meniac sa v čase kratšom než dĺžka dňa. V tejto vrstve je pohyb určený šmykovým napätím, tlakovou a Coriolisovou silou v horizontálnej rovine, tiažovou a vztlakovou silou v smere vertikálnom. Dôležitou vlastnosťou MVA je, že prúdenie v nej je prevažne turbulentné, a preto tam dochádza k výraznému prenosu hybnosti, tepla, vlhkosti. Oblasť MVA je veľmi ovplyvnená ľudskou činnosťou a interakciou so zemským povrchom, čo má za následok šírenie znečisťujúcich častíc. Znečistené ovzdušie je problém, ktorý negatívne ovplyvňuje život a zdravie človeka ako takého. S rastom populácie je spojený rast industrializácie, čo vedie k zväčšeniu množstva škodlivých látok v ovzduší.

V dnešnej dobe je nutné sa týmto problémom zaoberať, aby sme lepšie predpovedali chovanie takéhoto znečistenia. Modelovanie znečistenia pomocou fyzikálneho modelu je časovo a finančne nevýhodné, taktiež je zložité napodobniť parametre prúdenia v zmenšenej mierke. Preto pre prognózu výskytu znečisťujúcich častíc využívame matematické modelovanie. Matematickým modelovaním rozumieme metódy založené na riešení základných rovníc popisujúcich prúdenie, disperziu a transport prímiesí. Tieto rovnice riešime

na základe veľkého množstva numerických metód, a taktiež za pomoci výpočtovej techniky, pretože analytické riešenie je možné len pri veľmi zjednodušených limitných prípadoch, ktoré nám dávajú len hrubý odhad hľadaného riešenia.

Pre simulovanie turbulentného prúdenia môžeme využívať množstvo výpočtových systémov ako sú OpenFOAM, Ansys, Simcenter, Altair, atď. Medzi známe numerické modely pre simulovanie ovzdušia patrí model ALADIN, WRF, ICON. Model ALADIN, ktorý používa ČHMU, je určený pre krátkodobú predpoveď atmosférických procesov v mezo-beta mierke (rádovo s rozmermi siete 10 km). Využíva systém rovníc zachovania, ktoré rieši spektrálnou metódou a sem-implicitnou semi-lagrangeovou schémou. Pokročilým a moderným systémom pre meteorologické modelovanie prúdenia v atmosfére nad mestskou zástavbou je model PALM. Je založený na riešení Navier-Stokesových rovníc pomocou LES alebo RANS modelov.

### 1.3 Základné rovnice prúdenia

Prúdenie v MVA uvažujeme ako pohyb viskózne tekutiny, ktorou môžeme popísať zákonmi mechaniky a termodynamiky. Tieto zákony sú vyjadrené parciálnymi diferenciálnymi a algebrickými rovnicami, ktoré vyjadrujú zákony zachovania fyzikálnych veličín vzťahovaných k určitému objemu. Veličiny obsiahnuté v týchto rovnicach sú hmotnosť, rýchlosť prúdenia, energia, tlak a teplota. Tieto fyzikálne veličiny sú závislé na čase a polohe. Medzi rovnice popisujúce prúdenie tekutiny v MVA patrí [3]:

- Rovnica kontinuity – zákon zachovania hmoty
- Navier-Stokesove rovnice – zákon zachovania hybnosti
- Rovnica energie – zákon zachovania energie
- Stavová rovnica plynov

Podrobné odvodenie stavovej rovnice plynov, rovnice energie a entalpie, Navier-Stokesových rovníc a rovnice kontinuity je možno nájsť napr. v [2] alebo [4].

### 1.3.1 Rovnica kontinuity

Rovnica kontinuity je matematickým vyjadrením zákona zachovania hmoty v danom objeme. Obecnú rovnicu kontinuity pre prúdenie tekutiny je možné v diferenciálnom tvare vyjadriť nasledovne:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1.1)$$

kde  $\rho$  je hustota tekutiny a  $v_j$  predstavuje zložky vektora rýchlosti prúdenia. V tejto rovnici a ďalšom texte budeme používať Einsteinove sumačné pravidlo. Ak uvažujeme prúdenie nestlačiteľnej tekutiny, tak môžeme hustotu tekutiny považovať za konštantnú a rovnicu (1.1) prepísať na tvar [10]

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1.2)$$

### 1.3.2 Navier-Stokesove rovnice

Pohybové rovnice matematicky popisujúce zákon zachovania hybnosti nazývame Navier-Stokesove rovnice. V diferenciálnom tvare je ich možno zapísať ako

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho G_i \quad (1.3)$$

kde  $\tau_{ij}$  je tenzor napätí spôsobenými vnútornými silami medzi molekulami viskózne tekutiny a  $G_i$  je zložka vektoru objemových síl v kontrolnom objeme vzťahnutú na jednotku hmotnosti. Ak budeme predpokladať, že hustota tekutiny je v závislosti na čase konštantná, rovnicu (1.3) upravíme na tvar

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + G_i \quad (1.4)$$

Vzduch ako zmes plynov vyplňujúcich MVA budeme považovať za Newtonskú tekutinu, preto pre zložky tenzoru napätia bude platiť

$$\tau_{ij} = -\delta_{ij} \left( p + \frac{2}{3} \mu \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) + \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.5)$$

kde  $\delta_{ij}$  predstavuje Kroneckerov symbol ( $\delta_{ij} = 1$  ak  $i = j$  a  $\delta_{ij} = 0$  pre  $i \neq j$ ),  $\mu$  označuje dynamickú viskozitu tekutiny a  $p$  je tlak. Ďalej pri dosadení rovníc (1.2) a (1.5) do rovnice (1.4) získame po úprave derivácií tvar Navier-Stokesových rovníc pre nestlačiteľnú tekutinu:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \right) + G_i \quad (1.6)$$

V našej práci zanedbáme vplyv zložiek objemových síl v kontrolnom objeme, a preto výsledný tvar rovnice bude

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \right) \quad (1.7)$$

kde pre kinetickú viskozitu tekutiny platí vzťah  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ .

### 1.3.3 Rovnica pre transport pasívnej prímеси

V užšom slova zmysle znečistením atmosféry rozumieme prímеси, ktoré sa do zemskej atmosféry dostali ako priamy alebo nepriamy produkt ľudskej činnosti človeka. Tieto znečisťujúce častice vo vzduchu sa väčšinou rozplynú, a tým sa stávajú súčasťou atmosférického aerosólu. Medzi najväčších tvorcov znečisťujúcich prímесí patrí poľnohospodársky a automobilový priemysel. Avšak ako zdroj znečistenia si môžeme predstaviť aj napr. vrchol komína, ropnú rafinériu, sopku chrliacu sopečný prach. V tejto práci za pasívnu prímес (znečisťujúcu prímес) budeme považovať nehygroskopický aerosól, táto látka nebude chemicky reagovať s atmosférou. Transportnú rovnicu pre pasívnu prímес si vyjadríme ako [2]:

$$\frac{\partial(\rho_p C)}{\partial t} + v_j \frac{\partial(\rho_p C)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( D \frac{\partial(\rho_p C)}{\partial x_j} \right) + \rho_p f_C \quad (1.8)$$

kde  $\rho_p$  je hustota prímеси,  $D$  je molekulárna difúzia,  $f_C$  je zdrojová funkcia a koncentráciu prímеси možno vyjadriť ako

$$C = \frac{\rho_p}{\rho_p + \rho} \quad (1.9)$$

Odvodenie rovnice (1.8) sme prevzali zo zdroja [2].

### 1.3.4 Podobnostné čísla využívané v práci

#### Reynoldsovo číslo

Charakterizuje pomer medzi zotrvačnými a trecími silami. Definujem ho vzťahom

$$Re = \frac{L_0 U_0}{\nu} \quad (1.10)$$

kde  $L_0$  vyjadruje charakteristický rozmer,  $U_0$  je charakteristická rýchlosť a  $\nu$  označuje kinematická viskozita.

#### Schmidtovo číslo

Schmidtovo číslo je bezrozmerné číslo, ktoré charakterizuje pomer prenosu hybnosti kontaminantu a jej difúzie v tekutine.

$$Sc = \frac{\nu}{D} \quad (1.11)$$

## 2 Blasiusov problém

### 2.1 Prandtlova medzná vrstva

Aj keď, ako je uvedené v kapitole 1.2, prúdenie v MVA je prevažne turbulentné, my budeme v tejto práci skúmať jednoduché laminárne prúdenie tekutiny s malou viskozitou. Laminárnym obtekaním telies, vplyvom závislosti prúdenia na viskozite tekutiny a spôsobom ako možno zjednodušiť Navier-Stokesove diferenciálne rovnice pre získanie približného riešenia limitných prípadov prúdenia, sa zaoberal na začiatku 20. storočia Ludwig Prandtl. Uvažujme laminárne obtekané teleso tekutinou s charakteristickou rýchlosťou  $U_\infty$ . Pri obtekaní telesa vzniká v jeho bezprostrednej blízkosti tenká medzná vrstva, ktorú nazývame aj ako Prandtlova medzná vrstva. Táto vrstva je veľmi tenká oblasť v blízkosti telesa, ktorá je ovplyvnená trením medzi povrchom a tekutinou. V tejto vrstve má na rýchlosť prúdenia veľký vplyv viskozita tekutiny. Na základe experimentov budeme predpokladať, že v mieste kontaktu telesa s tekutinou je rýchlosť nulová. Medzná vrstva má vplyv na výsledný rýchlostný profil prúdenia tekutiny, ktorý sa mení z nulovej hodnoty na hodnotu rýchlosti voľného prúdu [11].

Rýchlostný profil prúdenia nad povrchom môžeme rozdeliť do dvoch oblastí. Ako prvá je vrstva blízko telesa, kde normálový gradient rýchlosti k ploche je značný, a kde aj malá viskozita má dôležitý význam, ako je vyššie zmienené. Trecie šmykové napätie

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial z} \quad (2.1)$$

môže dosahovať pomerne významné hodnoty. V druhej oblasti sa vyskytuje už zanedbateľný normálový gradient rýchlosti, a takisto vplyv viskozity je veľmi malý. Hrúbka medznej vrstvy je úmerná Reynoldsovému číslu. Pre zjednodušenie sa v tejto práci budeme zaoberať 2D prípadom prúdenia, kde v horizontálnom smere bude ležať  $x$ -ová os a  $z$ -ová bude vo vertikálnom smere na ňu kolmá. V nasledujúcich rovniciach použijeme pre označenie zložiek vektora rýchlosti  $\vec{v}$  symboly  $u, v$ , kde  $u$  je rýchlosť v smere  $x$ -ovej osi a  $v$  je rýchlosť v smere osi  $z$ . Ďalej si rozpíšeme rovnice (1.2) a (1.7) len do zložiek v smere osi  $x$ , keďže predpokladáme dominantné prúdenie v tomto smere a získame [11]:



$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (2.3)$$

Ďalej budeme predpokladať, že

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \gg \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.4)$$

a preto rovnice, ktorými L.Prandtl popísal laminárne prúdenie v medznej vrstve vyjadríme v tvare:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (2.6)$$

s okrajovými podmienkami

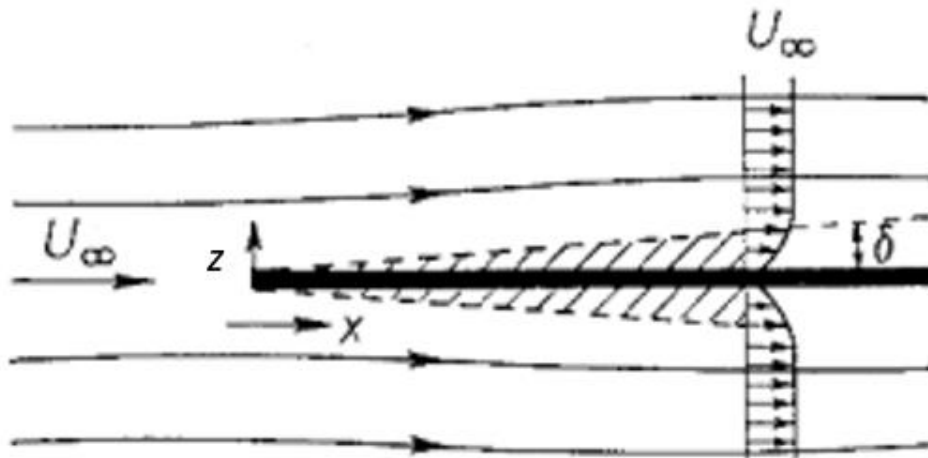
$$u(x, 0, t); v(x, 0, t) = 0 \quad (2.7)$$

$$u(x, \infty, t) = U(x, t) \quad (2.8)$$

kde  $\rho$  je hustota tekutiny. Odvodenie rovníc (2.5) a (2.6) z Navier-Stokesových rovníc a rovnice continuity vid' [11].

## 2.2 Blasiusovo riešenie

Najjednoduchším príkladom Prandtlovej medznej vrstvy je Blasiusov problém. Ako už vyplýva z názvu, týmto prípadom sa prvýkrát zaoberal H. Blasius (1908) vo svojej dizertačnej práci. V tomto prípade budeme predpokladať ustálené prúdenie nestlačiteľnej tekutiny nad polo-nekonečnou tenkou plochou doskou. Pre lepšie analytické odvodenie Blasiusovho problému si zavedieme karteziánsky súradnicový systém  $x; z$ , ktorého počiatok položíme na začiatok polo-nekonečnej dosky,  $x$ -ová os bude rovnobežná s doskou a  $z$ -ová os bude kolmá na dosku. Na vstupe budeme uvažovať ustálené prúdenie rovnobežné s osou  $x$  so stálym voľným prúdom  $U_\infty$ , vid' Obr. 2.1 [11].



Obrázok 2.1 Medzná vrstva nad plochou doskou [11]

Tlak v riešenej oblasti budeme považovať za konštanty preto

$$\frac{dp}{dx} = 0 \quad (2.9)$$

Z rovníc medznej vrstvy (2.5) a (2.6) potom pre ustálené prúdenie tekutiny plynú rovnice:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (2.11)$$

s okrajovými podmienkami

$$z = 0 \Rightarrow u = 0 \wedge v = 0; \quad z \rightarrow \infty \Rightarrow u = U_\infty \quad (2.12)$$

Rýchlostný profil  $u$  sa bude vyvíjať vzhľadom na polohu, v ktorej sa bude nachádzať. V každom bode  $x$  sa zmení v dôsledku trenia medzi doskou a prúdom tekutiny. Podobnosť získaných profilov rýchlosti prúdenia môžeme navzájom porovnávať použitím vhodného charakteristického rozmeru. Vhodným charakteristickým rozmerom pre rýchlosť  $u$  môžeme považovať rýchlosť  $U_\infty$ , zatiaľ čo pre súradnicu  $z$  „hrúbku medznej vrstvy“  $\delta(x)$ , ktorú si odvodíme neskôr. Podobnosť rýchlostného profilu môžeme teda zapísať pomocou bezrozmernej rýchlosti:

$$\frac{u}{U_\infty} = \varphi(\eta) \quad (2.13)$$

kde funkcia  $\varphi(\eta)$  je nezávislá na súradnici  $x$  a nezávislá premenná

$$\eta = \frac{z}{\delta(x)} \quad (2.14)$$

Veľkosť  $\delta(x)$  je ovplyvnená trením, tzn. viskóznymi účinkami. Viskozita spôsobuje prenos hybnosti smerom od steny. Hodnota hrúbky medznej vrstvy závisí na prenose hybnosti v smere od steny. Čas potrebný pre časticu s rýchlosťou  $U_\infty$  prekonať vzdialenosť  $x$  vyjadríme vzťahom:

$$t = \frac{x}{U_\infty} \quad (2.15)$$

Na druhej strane čas, za ktorý sa musí uskutočniť prenos hybnosti cez hrúbku vrstvy, zapíšeme ako [11]

$$t = \frac{\delta(x)^2}{\nu} \quad (2.16)$$

Zrovnáním a úpravou rovníc (2.15) a (2.16) získame vzťah pre hrúbku medznej vrstvy v závislosti na ose  $x$  v tvare

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{2x\nu}{U_\infty}} \quad (2.17)$$

Ďalej dosadením rovnice (2.17) do (2.14) získame rovnicu pre

$$\eta = z \sqrt{\frac{U_\infty}{2x\nu}} \quad (2.18)$$

Pole rýchlosti prúdenia je možné popísať pomocou prúdovej funkcie  $\psi$ , pomocou ktorej sú zložky rýchlosti prúdenia definované nasledovne:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (2.19)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.20)$$

Takto zavedené zložky automaticky spĺňujú rovnicu kontinuity. Na základe odvodenia prúdovej funkcie z rovnice (2.19) si zavedieme bezrozmernú prúdovú funkciu  $f(\eta)$  závislú len na premennej  $\eta$ . Odvodenie je zrejmé z nasledujúcej rovnice:

$$\psi = \int_0^z u dz = \int_0^\eta U_\infty \delta_x \varphi(\eta) d\eta = U_\infty \delta_x f(\eta) = \sqrt{2\nu x U_\infty} f(\eta) \quad (2.21)$$

kde  $\delta_x = \delta(x)$  je hrúbka medznej vrstvy v konkrétnom bode  $x$ . Výsledné rýchlostné profily pre zložky rýchlostí prúdenia odvodíme z predchádzajúcich rovníc ako

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} = U_\infty f'(\eta) \quad (2.22)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) = \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{2x}} (\eta f' - f) \quad (2.23)$$

Dosadením rovníc (2.19) a (2.20) do rovnice (2.10) získame

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} \quad (2.24)$$

Po dosadení rovnice (2.21) do rovnice (2.24) a úprave, dostávame nelineárnu diferenciálnu rovnicu 3. rádu

$$f''' + ff'' = 0 \quad (2.25)$$

Spolu s okrajovými podmienkami

$$\eta = 0: \quad f = 0; \quad f' = 0 \quad (2.26)$$

$$\eta \rightarrow \infty: \quad f' = 1 \quad (2.27)$$

sa táto rovnica nazýva Blasiusov problém.

## 2.3 Numerické riešenie Blasiusovho problému

Blasiusov problém sme popísali nelineárnou diferenciálnou rovnicou 3. rádu, ktorá spolu s okrajovými podmienkami (2.26) a (2.27) predstavuje okrajovú úlohu pre obyčajnú diferenciálnu rovnicu. Riešenie okrajových úloh pre diferenciálne rovnice je možné získať pomocou rôznych numerických metód, ako sú napríklad diferenčné metódy, metódy Galerkinovho typu atď. Pre náš prípad sme využili metódu strel'by.

### 2.3.1 Metóda strel'by

Riešenie okrajovej úlohy za pomoci metódy strel'by spočíva v tom, že riešenie okrajovej úlohy prevedieme na riešenie počiatkovej úlohy. Ako prvé si nelineárnu obyčajnú diferenciálnu rovnicu 3. rádu zapíšeme v tvare

$$f''' = q(\eta, f, f', f'') \quad \text{pre } \eta \in \langle 0; \infty \rangle, \quad (2.28)$$

pre ktorú aby bola splnená podmienka existencie a jednoznačnosti riešenia musí platiť, že  $\frac{\partial q}{\partial f}; \frac{\partial q}{\partial f'}; \frac{\partial q}{\partial f''}$  sú spojité na oblasti  $C \subset R^4$ , čo pre náš prípad platí. Ďalej funkciu  $q$  vyjadríme ako:

$$q(\eta, f, f', f'') = -ff'' \quad (2.29)$$

spolu s okrajovými podmienkami

$$f(0) = 0 \quad (2.30)$$

$$f'(0) = 0 \quad (2.31)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} f'(\eta) = 1 \quad (2.32)$$

Pri riešení tejto okrajovej úlohy budeme považovať, že okrajová podmienka (2.32) bude splnená v konečnom bode  $B$ , ktorý je v dostatočnej vzdialenosti. To znamená, že okrajovú podmienku (2.32) nahradíme okrajovou podmienkou

$$f'(B) = 1 \quad (2.33)$$

Ďalej Blasiusov problém si prevedieme na sústavu nelineárnych rovníc 1. rádu

$$F' = G(\eta, F) \quad (2.34)$$

$$F = \begin{pmatrix} f \\ f' \\ f'' \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

$$G = \begin{pmatrix} f' \\ f'' \\ -ff'' \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

kde okrajové podmienky (2.30),(2.31) a (2.33) nahradíme počiatocnými

$$F(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \xi \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

Našou úlohou je nájsť takú hodnotu  $\xi$ , aby riešenie počiatocnej úlohy bolo zároveň riešením okrajovej úlohy. To znamená, že budeme hľadať hodnotu  $\xi$ , tak aby riešenie počiatocnej úlohy splnilo okrajovú podmienku (2.33). Hodnotu funkcie  $F(B, \xi)$  získame pomocou numerickej metódy RK4 a hodnotu  $\xi$  pomocou metódy sečníc [7].

### 2.3.2 Metóda sečníc

Metóda sečníc sa využíva pri riešení nelineárnych rovníc. Metóda sečníc spočíva v tom, že najskôr si zvolíme dve hodnoty  $\xi_0$  a  $\xi_1$  a následne nájdeme pre tieto body funkčné hodnoty  $F(B, \xi_0)$  a  $F(B, \xi_1)$ . Cez body  $F(B, \xi_0)$  a  $F(B, \xi_1)$  vedieme sečnicu. Priesečník takto získanej sečnice s osou  $x$  si označíme  $\xi_2$  a jeho funkčnú hodnotu  $F(B, \xi_2)$ . Ďalšiu hodnotu vypočítame pomocou  $\xi_1, \xi_2, F(B, \xi_1)$  a  $F(B, \xi_2)$ . Tento postup budeme opakovať dovtedy, až rozdiel hodnôt  $\xi_{n-1} - \xi_n$  nebude menší ako zvolená presnosť výpočtu. V našom prípade priesečník je bod sečnice s priamkou rovnobežnou s osou  $x$  a prechádzajúcou bodom  $F(B, \xi) = 1$ . Algoritmus budem opakovať až pokiaľ nebude splnená okrajová podmienka (2.33) s dostatočnou presnosťou. Hodnoty  $F(B, \xi_n)$  napočítame metódou Runge-Kutta a novú hodnotu  $\xi_{n+1}$  hľadáme na základe vzťahu [9]

$$\xi_{n+1} = \xi_n - \frac{F(B, \xi_n)}{F(B, \xi_n) - F(B, \xi_{n-1})} (\xi_n - \xi_{n-1}) \quad (2.38)$$

### 2.3.3 Runge-Kuttova metóda

Metódy Runge-Kutta sú jednokrokové metódy pre numerické riešenie Cauchyovej úlohy. V našom prípade riešime danú úlohu štandardnou metódou RK4 [4] v tvare:

$$F' = G(\eta, F) \quad (2.39)$$

$$F_{n+1} = F_n + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (2.40)$$

$$k_1 = G(\eta_n, F_n) \quad (2.41)$$

$$k_2 = G\left(\eta_n + \frac{h}{2}, F_n + k_1 \frac{h}{2}\right) \quad (2.42)$$

$$k_3 = G\left(\eta_n + \frac{h}{2}, F_n + k_2 \frac{h}{2}\right) \quad (2.43)$$

$$k_4 = G(\eta_n + h, F_n + k_3 h) \quad (2.44)$$

## 2.4 Odvodenie súčiniteľa odporu trenia

Na základe vypočítaných profilov prúdenia sme schopný dopočítať súčiniteľ odporu trenia plochej dosky. Ako prvé si zadefinujeme vzťah pre odpor plochej dosky, ktorú jednostranne obteká tekutina, ako [11]

$$F_D = b \int_0^l \tau_0(x) dx \quad (2.45)$$

kde  $b$  je šírka dosky,  $l$  je dĺžka dosky a šmykové napätie

$$\tau_0 = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = \mu U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{2\nu x}} f''(0) \quad (2.46)$$

Dosadením rovnice (2.46) do rovnice (2.45) získame vzťah

$$F_D = \mu U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{2\nu}} f''(0) \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{x}} = b U_\infty f''(0) \sqrt{2\mu \varrho l U_\infty} \quad (2.47)$$

kde  $\varrho$  je hustota tekutiny. Z rovnice (2.47) vyplýva že odpor dosky je úmerný s  $U_\infty^{3/2}$  a  $l^{1/2}$ .

Súvisí to s faktom, že zadné časti dosky prispievajú k celkovému odporu relatívne menšou mierou ako na jej začiatku. Pre bezrozmerný súčiniteľ odporu platí

$$c_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \varrho U_\infty^2 b l} = \frac{b U_\infty f''(0) \sqrt{2\mu \varrho l U_\infty}}{\frac{1}{2} \varrho U_\infty^2 b l} = \frac{f''(0) \sqrt{8}}{\sqrt{\frac{U_\infty l}{\nu}}} \cong \frac{1,328}{\sqrt{Re}} \quad (2.48)$$

Pre nami uvažovaný prípad musí byť Reynoldsovo číslo  $Re < 10^6$  [11].

# 3 Numerické riešenie pomocou výpočtového programu OpenFOAM

## 3.1 Program OpenFOAM

OpenFOAM je programový open source balík, produkovaný a spravovaný spoločnosťou OpenCFD Limited pod licenciou GNU (General Public Licence). Využíva sa na numerické výpočty prúdenia stlačiteľných a nestlačiteľných tekutín, taktiež zabezpečuje pre-processing a post-processing. V tejto kapitole si popíšeme ako prebieha riešenie diferenciálnych rovníc, pre ktoré program OpenFOAM využíva numerickú metódu konečných objemov (MKO), a takisto si predstavíme numerickú metódu SIMPLE [12].

## 3.2 Metóda konečných objemov

Je to metóda, na základe ktorej prevádzame parciálne diferenciálne rovnice na sústavu algebrických rovníc. Základný princíp metódy konečných objemov spočíva v rozdelení celej počítanej oblasti na konečný počet malých kontrolných objemov (KO), pre ktoré použijeme integrálny tvar rovníc zákonov zachovania, v ktorých aproximujeme vhodným spôsobom jednotlivé členy. Oblasť je rozdelená na konečný počet kontrolných objemov pomocou siete, ktorá definuje hranice kontrolných objemov. Popis nami používanej siete je možné nájsť v kapitole 3.3.1. Metódu konečných objemov spolu so schémou typu cell centre využívame pre diskretizáciu v priestore. Všetky neznáme ukladáme do ťažiska bunky, kde sú vyjadrené ako stredné hodnoty veličín v danom kontrolnom objeme  $V_{i,j}$ :

$$\vec{v}_{i,j}(t) = \frac{1}{V_{i,j}} \int_{V_{i,j}} \vec{v}(x, z, t) dV \quad (3.1)$$

V metóde konečných objemov vychádzame z rovníc zachovania (1.2) a (1.7), ktoré zintegrujeme cez kontrolný objem  $V$

$$\int_{V_{i,j}} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} dV = 0 \quad (3.2)$$



$$\int_{V_{i,j}} \frac{\partial v_i}{\partial t} dV + \int_{V_{i,j}} v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV = -\frac{1}{\rho} \int_{V_{i,j}} \frac{\partial p}{\partial x_i} dV + \nu \int_{V_{i,j}} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} dV \quad (3.3)$$

a pomocou Gaussovej vety prevedieme na tvar

$$\int_{\partial V} v_j dS_j = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_{i,j}} v_i dV + \int_{\partial V} v_j v_i dS_j = -\frac{1}{\rho} \int_{\partial V} p dS_j + \nu \int_{\partial V} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dS_j \quad (3.5)$$

kde  $\partial V$  je hranica kontrolného objemu a

$$dS_j = \vec{n} \cdot dS \quad (3.6)$$

kde  $\vec{n}$  je normálový vektor na stenu kontrolného objemu a  $S$  je plocha kontrolného objemu.

Keďže tok vektorového poľa cez celú plochu bunky sa rovná súčtu hodnôt tokov cez jednotlivé steny bunky zapíšeme rovnice (3.4) a (3.5) nasledovne

$$\sum_k \int_{S_k} v_j dS_j = 0 \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_{i,j}} v_i dV + \sum_k \int_{S_k} v_j v_i dS_j = \sum_k -\frac{1}{\rho} \int_{S_k} p dS_j + \sum_k \nu \int_{S_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dS_j \quad (3.8)$$

kde  $S_k$  je plocha steny. Aby sme mohli dané plošné integrály vypočítať, museli by sme poznať priebeh funkcií na celej hranici kontrolného objemu, preto plošné integrály aproximujeme obdĺžnikovou metódou. Pre veličinu  $\phi$  bude mať tvar

$$\int_{S_k} \phi dS_j = \phi_k \vec{n}_k S_k \quad (3.9)$$

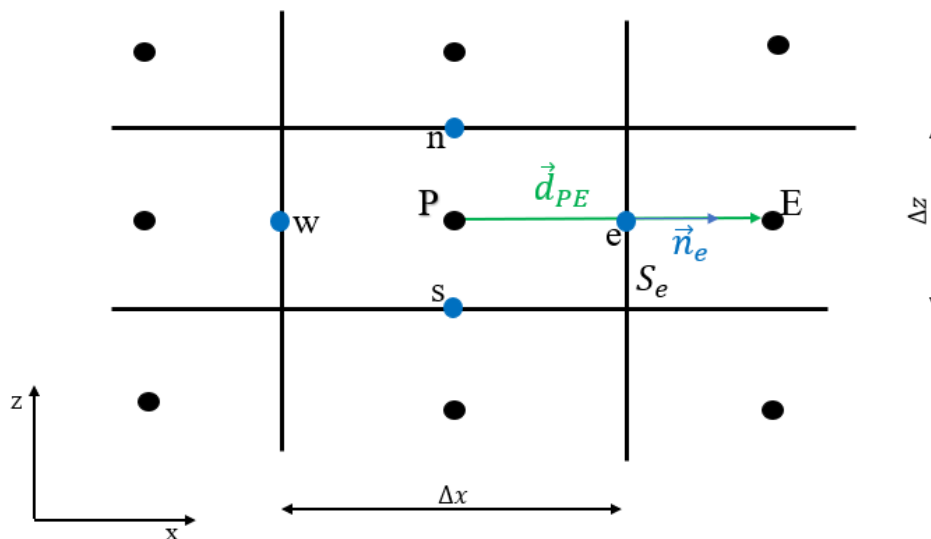
kde  $\phi_k$  je hodnota funkcie veličiny  $\phi$  v ťažisku plochy  $S_k$ . Aproximácia obdĺžnikovým pravidlom spočíva vtom, že hodnotu plošného integrálu nahradíme súčinom hodnoty funkcie v bode, ktorý sa nachádza v strede steny, a veľkosťou plochy steny kontrolného objemu. Hodnotu veličiny  $\phi_k$  na stene  $S_k$ , viď Obr. 3.1, získame interpoláciou zo susedných kontrolných objemov [4].

## 3.3 Realizácia MKO v OpenFOAM-e

### 3.3.1 Sieť

Základom numerického riešenia metódou konečných objemov je popísať oblasť vhodným typom siete. Na generovanie siete v OpenFOAM-e sme použili implementovanú funkciu *blockMesh*. Použili sme karteziánsku ortogonálnu sieť, ktorá je zobrazená na Obr 3.1. Definícia symbolov uvedených na Obr. 3.1 je nasledovná:

- hodnoty členov rovníc (3.7) a (3.8), vzťahnutých do ťažiska bunky, označujeme  $\phi_K, \phi_P$
- interpolovanú hodnotu na stene bunky  $\phi_k$
- súradnice bodov ako  $x_k, x_P$
- vektor spájajúci stredy dvoch susedných kontrolných objemov značíme  $\vec{d}_{PK}$ ,
- normálový vektor na plochu steny ako  $\vec{n}_k$
- veľkosť plochy steny ako  $S_k$
- indexy  $K, k$  nahradíme indexom danej steny ( $e - east, s - south, w - west, n - north$ )



Obrázok 3.1 Karteziánska 2D sieť

### 3.3.2 Interpolácia hodnôt

Interpolácia hodnôt slúži k získaniu hodnoty na stene KO prostredníctvom hodnôt v susedných kontrolných objemoch. Typ interpolačnej schémy v OpenFOAM-e nastavujeme v **interpolationSchemes**. V našej práci používame lineárnu interpoláciu (central differencing scheme – CDS) alebo interpoláciu upwind (upwind differencing scheme – UDS).

Lineárna interpolácia je druhého rádu presnosti. V OpenFOAMe sa označuje pod názvom *linear*. Lineárnu interpoláciu vyjadríme vzťahom

$$\phi_e = \lambda_e \phi_E + (1 - \lambda_e) \phi_P \quad (3.10)$$

kde koeficient

$$\lambda_e = \frac{x_e - x_P}{x_E - x_P} \quad (3.11)$$

Interpoláciou prostredníctvom schémy upwind aproximujeme hodnotu  $\phi_e$  v strede steny hodnotou v proti prúdovom smere. Toto schéma je prvého rádu presnosti a v OpenFOAMe využívame pre neho syntax *upwind*. Keďže interpolácia prostredníctvom UDS závisí na smere prúdenia,  $\phi_e$  nadobúda hodnoty:

$$\phi_e = \begin{cases} \phi_P & \text{ak } \vec{v}_e \cdot \vec{n}_e > 0 \\ \phi_E & \text{ak } \vec{v}_e \cdot \vec{n}_e < 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

### 3.3.3 Diskretizácia konvektívnych členov

Pri diskretizácii konvektívnych členov používame Gaussovu vetu a hodnoty získame interpolačnou schémou upwind. Nastavenie diskretizácie prebieha v **divSchemes**.

Matematicky popíšeme diskretizáciu konvektívneho členu nasledovne:

$$\sum_k \int_{S_k} v_j v_i dS_j \approx \sum_k v_j|_k v_i|_k dS_j|_k \quad (3.13)$$

### 3.3.4 Diskretizácia difúzných členov

Taktiež difúzne členy diskretizujeme pomocou Gaussove vety. Pri tejto diskretizácii je nutné aproximovať aj normálový gradient. Pre nastavenie diskretizácie difúzných členov využívam v programe OpenFOAM **laplacianSchemes** a **snGradSchemes**. Diskretizácia má tvar

$$\sum_k v \int_{S_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dS_j \approx \sum_k v \left. \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|_k \cdot dS_j|_k \quad (3.14)$$

kde gradient funkcie  $\phi$  na stene  $S_k$  aproximujeme centrálnou diferenciou v tvare

$$\text{grad}(\phi) = \frac{\phi_P - \phi_K}{|\vec{d}_{PK}|} \quad (3.15)$$

### 3.4 SIMPLE algoritmus

V našej práci uvažujeme ustálené prúdenie tekutiny, ktoré sa v závislosti na čase nemení, pre ktoré využívame riešenie metódu SIMPLE. Názov SIMPLE je skratka pre Semi-Implicit method for Pressure-Linked Equations. Tento algoritmus je vhodný ak riešime stacionárny problém. Ide o iteratívny postup typu predictor – corrector, kde sa najskôr nájde riešenie rovnice hybnosti (predictor), ktoré však nespĺňa rovnicu kontinuity. Toto riešenie sa následne opraví, tak aby spĺňovalo aj rovnicu kontinuity, tento postup sa iteratívne opakuje. Zložky rýchlostí získame integráciou momentovej rovnice a korekciu tlaku napočítame z Laplaceovej rovnice, vid' [4]. Samotný algoritmus pozostáva z nasledujúcich krokov:

1. Začneme s výpočtom rýchlostného poľa a tlakovej korekcie v novom čase  $t_{n+1}$  s použitím riešenia  $\vec{v}_i^n$  a  $p^n$ .
2. Nové zložky rýchlostí  $\vec{v}_i^{m*}$  získame integráciou rovnice momentovej rovnice .
3. Zostavíme a vyriešime rovnicu pre tlakovú korekciu  $p'$ .
4. Vykonáme korekciu rýchlosti a tlaku, aby sme získali rýchlostné pole  $\vec{v}_i^m$ , ktoré bude spĺňať rovnicu kontinuity, a nového tlaku  $p^m$ .
5. Vrátime sa do kroku 2 a opakujeme algoritmus pokiaľ korekcie nebudú zanedbateľné.
6. Prejdeme do ďalšieho časového kroku [4].

Numerická integrácia rovníc je v programe OpenFOAM realizovaná prostredníctvom implicitnej metódy BDF2 (Backward Differentiation Formula with second order accurate).

#### 3.4.1 Relaxačné faktory

Relaxačné faktory využívame v pri výpočte korekcií tlaku a rýchlosti. Používame ich na zlepšenie stability výpočtu, najmä pri riešení problémov v ustálenom stave. Relaxácia funguje tak, že obmedzuje veľkosť premennej, ktorá sa mení z jednej iterácie na druhú.

Relaxačné faktory nadobúdajú hodnoty  $\alpha \in (0, 1)$ . Rovnice pre výpočet novej hodnoty zapíšeme v tvare

$$p^{m+1} = p^m + \alpha_p(p') \quad (3.16)$$

$$\vec{v}_i^{m+1} = \vec{v}_i^m + \alpha_{\vec{v}}(\vec{v}_i^{m*} - \vec{v}_i^m) \quad (3.17)$$

Optimálna voľba hodnoty relaxačného faktora je taká, ktorá je dostatočne malá na zabezpečenie stabilného výpočtu, ale dostatočne veľká na to, aby výpočet bol čo najrýchlejší.

### 3.5 Riešenie lineárnych rovníc

Pre výpočet lineárnych rovníc vzniknutých pri riešení momentovej rovnice implicitnou schémou v programe OpenFOAM používame solver GAMG (Geometric-algebraic multi-grid solvers). GAMG pracuje na princípe generovania rýchleho riešenia na hrubej sieti s malým počtom buniek a následne toto riešenie použije ako počiatočný odhad na získanie presného riešenia na konečnej sieti. Tento spôsob riešenia je rýchlejší ako štandardné metódy, kde zväčšenie rýchlosti prvého riešenia na hrubšej sieti preváži dodatočné náklady na zjemnenie siete a mapovanie dát. Riešenie na jednotlivých sieťach je získané Gauss-Seidelovou iteratívnou metódou [12].

## 4 Výsledky

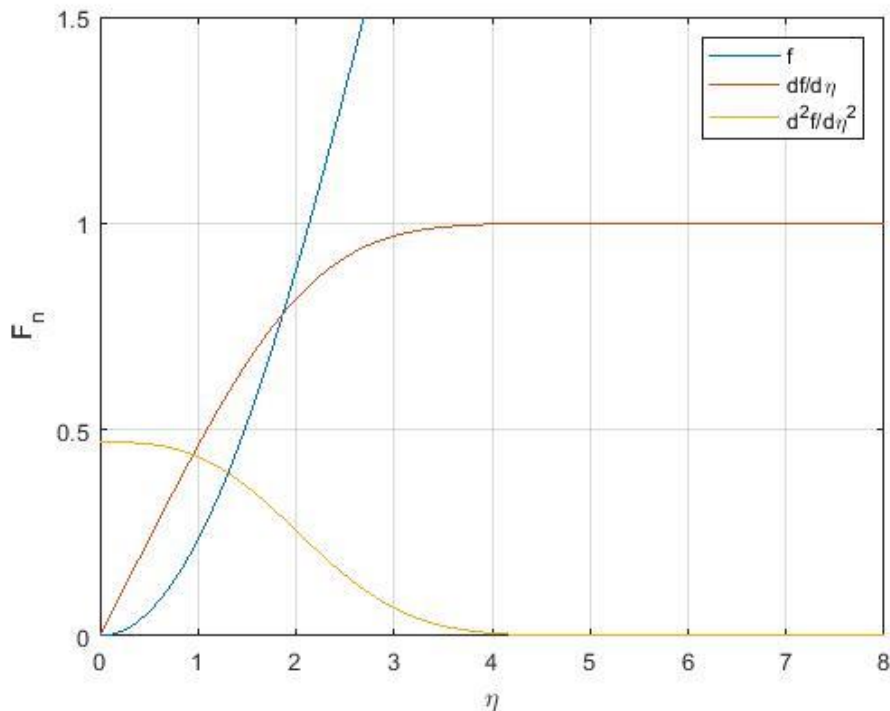
V tejto kapitole zhrnieme výsledky práce. Najskôr budeme numericky riešiť Blasiusov problém. Ďalej sa budeme zaoberať výpočtom laminárneho prúdenia nad plochým terénom (doskou) použitím softwaru OpenFOAM. Následne si vyhodnotíme nezávislosť numerického výpočtu na voľbe sieti, výpočtový čas v závislosti na veľkosti relaxačného faktora a zistíme hodnotu koeficientu odporu trenia medzi doskou a tekutinou. V poslednej časti budeme skúmať transport a disperziu pasívneho kontaminantu.

### 4.1 Výsledok numerického riešenia Blasiusovho problému

Blasiusov problém [viď kapitola 2.2] sme riešili numerickými metódami popísanými v kapitole 2.3. K výpočtu sme využili program Matlab, kde sme vytvorili algoritmus, s ktorým sme vypočítali priebeh rýchlostných profilov v horizontálnom a vertikálnom smere, a taktiež zistili hodnotu súčiniteľa odporu plochej dosky. Pri výpočte sme pomocou metódy streľby zistili hodnotu počiatočnej podmienky pre  $f''(0)$ , ktorá sa rovná hodnote 0,4696. Získaná hodnota je totožná s tou, akú uvádza zdroj [11], z toho môžeme konštatovať, že naše riešenie vytvoreným algoritmom je správne. Správnosť výpočtu podporuje aj Obr.4.1, na ktorom je vidieť graf priebehu funkcie  $f(\eta)$ , ktorý je podobný grafu uvádzaného takisto v zdroji [6]. Výslednú hodnotu počiatočnej podmienky sme získali pomocou metódy streľby, metódy sečníc, metódy RK4 po 7 iteráciách a čas výpočtu v programe Matlab-e trval 73,28 s. Numerické riešenie sme napočítali s presnosťou

$$|\xi_n - \xi_{n-1}| < 10^{-5} \quad (4.1)$$

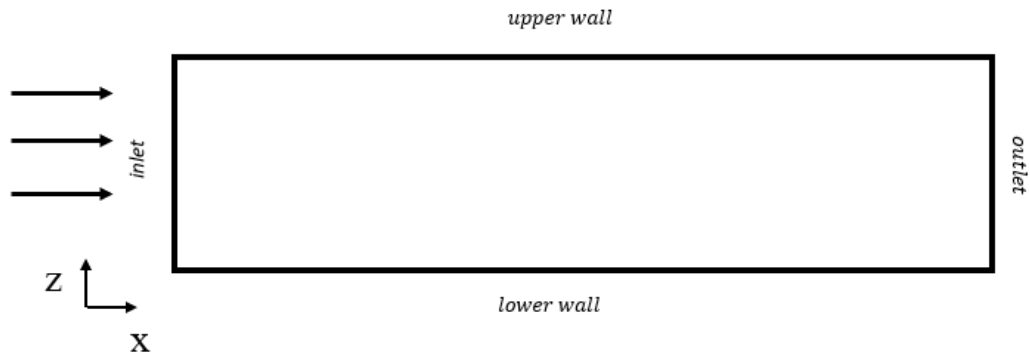
kde  $\xi_n$  je hodnota počiatočnej podmienky v n-iterácií a  $\xi_{n-1}$  je počiatočná podmienka z predchádzajúcej iterácii.



Obrázok 4.1 Priebeh funkcie  $f$  a jej derivácií v závislosti na  $\eta$  v intervale  $\langle 0; 8 \rangle$

## 4.2 Prúdenie nad plochým terénom

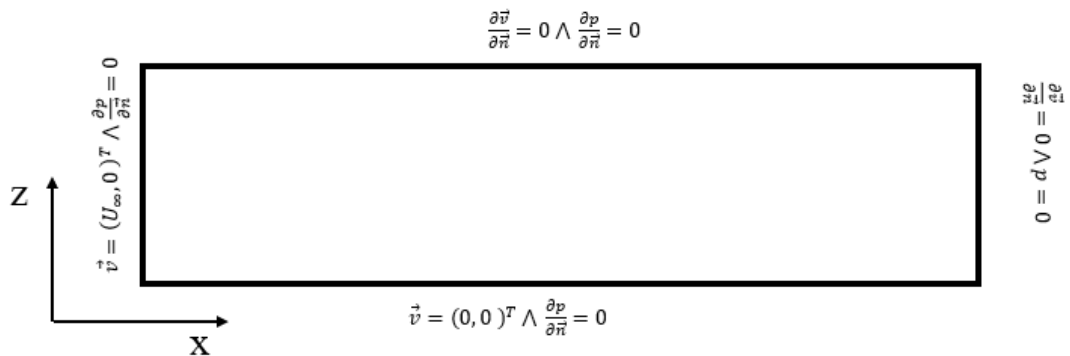
Zaoberáme sa 2D laminárnym stacionárnym prúdením nad plochým terénom (doskou). Uvažujem oblasť v tvare obdĺžnika kde spodný okraj (lower wall) predstavuje plochý terén (dosku). Dĺžka oblasti je 1000 m a výška je 100 m. Pre diskretizáciu oblasti sme použili karteziánsku ortogonálnu sieť s rôznymi krokmi siete, na ktorej sme nastavili exponenciálne zahustenie smerom k doske na osi  $z$ . Skúmame dva prípady prúdenia, kde rýchlosť tekutiny na vstupe sme v prvom prípade nastavili na hodnotu  $U_\infty = 1 \text{ m s}^{-1}$  a v druhom  $U_\infty = 10 \text{ m s}^{-1}$ . Typ uvažovanej tekutiny sme charakterizovali kinematickou viskozitou  $\nu = 0.01 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ . Zvolená hodnota kinematickej viskozity zodpovedá oleju SAE 20W pri teplote  $-17,8 \text{ }^\circ\text{C}$  [13].



Obrázok 4.2 Výpočtová oblasť

Na hranici oblasti uvažujeme nasledujúce okrajové podmienky:

- **Inlet** (vstup) – Dirichletova okrajová podmienka pre rýchlosť a homogénna Neumannova okrajová podmienka pre tlak.
- **Outlet** (výstup) – homogénna Neumannova okrajová podmienka pre rýchlosť a Dirichletova okrajová podmienka pre tlak.
- **Upper wall** (horná stena) – homogénna Neumannova okrajová podmienka pre rýchlosť aj tlak.
- **Lower wall** (spodná stena) – homogénna Dirichletova okrajová podmienka pre rýchlosť a homogénna Neumannova okrajová podmienka pre tlak.



Obrázok 4.3 Numerická oblasť a jej okrajové podmienky

### 4.3 Výsledky numerického riešenia ustáleného prúdenia nad plochým terénom

Získané numerické výsledky z programu OpenFOAM sme zrovnali s riešením Blasiusovho problému. Zrovnanie výsledkov sme uskutočnili v dvoch miestach  $x = 500$  m



(polovica dosky) a  $x = 750$  m ( tri štvrtiny dosky). Keďže prúdenie v medznej vrstve je závislé na veľkosti Reynoldsova čísla, ako uvádzame v kapitole 2.1, skúmali sme jeho vplyv na riešenie. Reynoldsove číslo závisí na kinematickej viskozite tekutiny, charakteristickej rýchlosti a charakteristickom rozmere, ktorý je v prípade prúdenia nad doskou vzdialenosť od jej začiatku. Aby sme porovnali výsledky vo väčších intervaloch Reynoldsovo čísla, volili sme dve vstupné rýchlosti. Na základe zvolených parametrov sme vyjadrili hodnoty  $Re$  nasledovne:

Reynoldsove číslo v bode  $x = 500$  m

$$Re = \frac{x U_{\infty}}{\nu} = \frac{500 * 1}{0,01} = 5 \cdot 10^4 \text{ pre } U_{\infty} = 1 \text{ ms}^{-1} \quad (4.2)$$

$$Re = \frac{x U_{\infty}}{\nu} = \frac{500 * 10}{0,01} = 5 \cdot 10^5 \text{ pre } U_{\infty} = 10 \text{ ms}^{-1} \quad (4.3)$$

Reynoldsove číslo v bode  $x = 750$  m

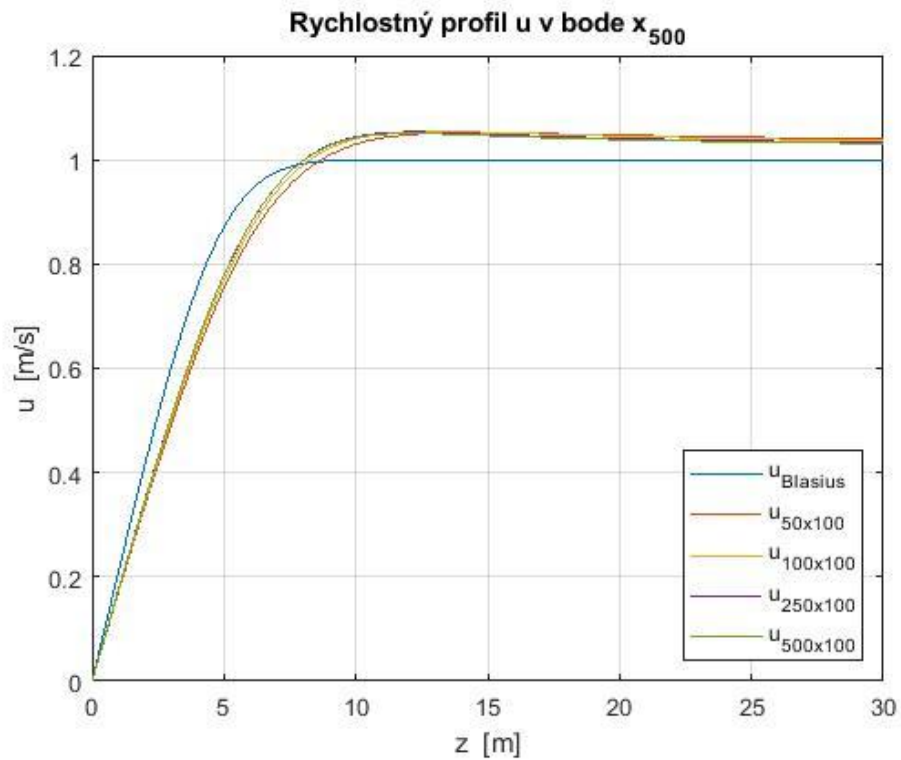
$$Re = \frac{x U_{\infty}}{\nu} = \frac{750 * 1}{0,01} = 7,5 \cdot 10^4 \text{ pre } U_{\infty} = 1 \text{ ms}^{-1} \quad (4.4)$$

$$Re = \frac{x U_{\infty}}{\nu} = \frac{750 * 10}{0,01} = 7,5 \cdot 10^5 \text{ pre } U_{\infty} = 10 \text{ ms}^{-1} \quad (4.5)$$

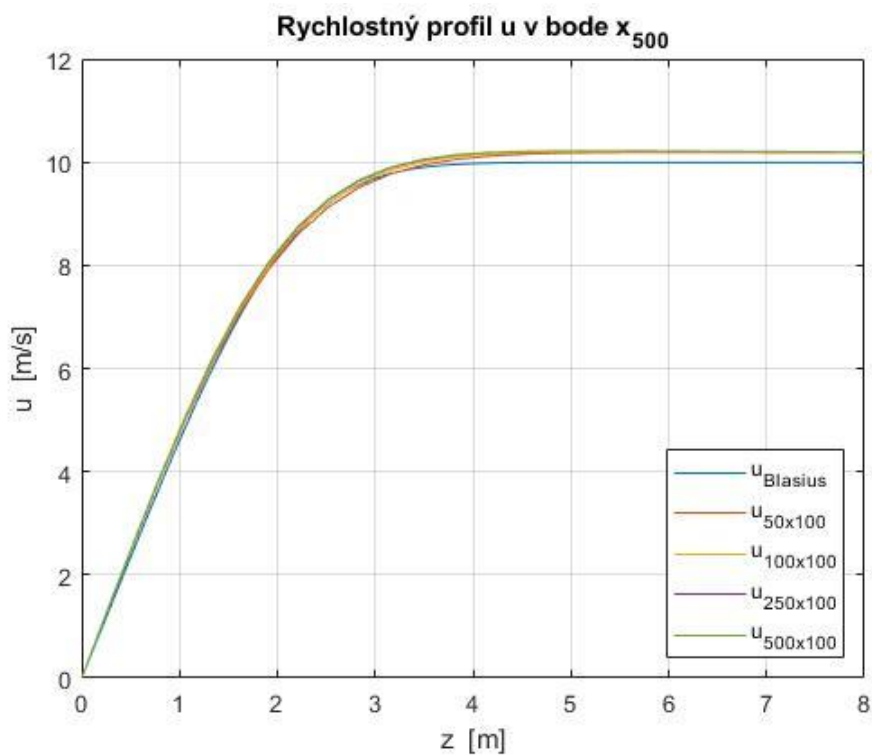
Všetky hodnoty  $Re$  splňujú predpoklad Blasiusovho riešenia, v ktorom uvažujeme oblasť laminárneho prúdenia tekutiny, kde Reynoldsovo číslo  $Re < 10^6$  [11].

Pre posúdenie vplyvu siete na riešenie sme uskutočnili sadu výpočtov, v ktorých sme sieť zjemňovali nezávisle v  $x$ -ovom a  $z$ -ovom smere a skúmali jej vplyv na získané profily rýchlostí. Pri zjemňovaní siete v smere  $z$  sme použili siete 100x50, 100x100, 100x250, 100x500 a v smere  $x$  sme použili siete 50x100, 100x100, 250x100, 500x100, to znamená napr. že sieť 100x50 má 100 buniek v  $x$ -ovom smere a v  $z$ -ovom smere je počet buniek 50.

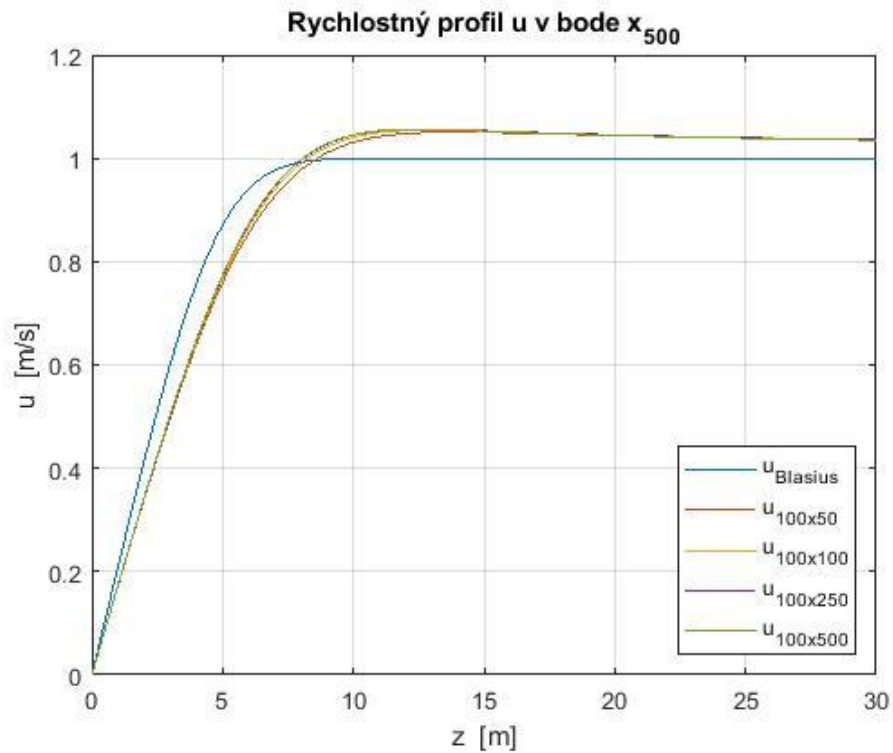
Na Obr. 4.4, 4.5, 4.8, 4.9 vidíme grafy profilov rýchlosti  $u$  vo vertikálnom smere v závislosti na zjemňovaní siete v smere  $x$ , na Obr. 4.6, 4.7, 4.10, 4.11 môžeme pozorovať závislosť zjemňovania siete v smere  $z$ . V oboch prípadoch môžeme konštatovať, že rýchlostné profily napočítane pomocou rôznych sietí sú veľmi podobné a teda numerické riešenie je nezávislé na sieti.



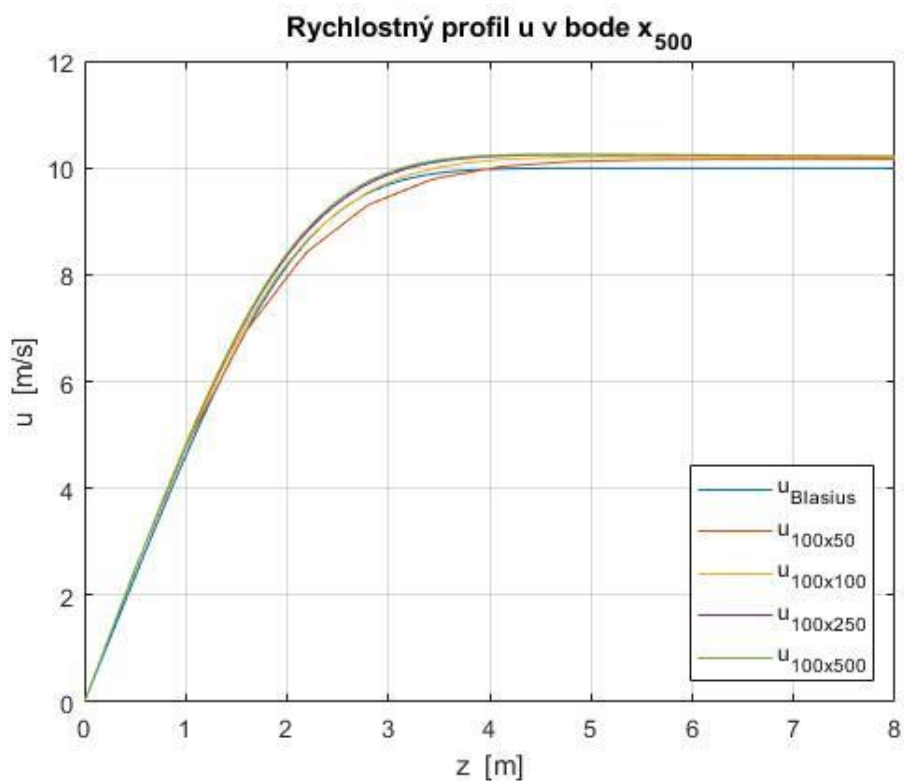
Obrázok 4.4 Profil zložky rýchlosti  $u$  v bode  $x = 500$  m v závislosti na zjemnení siete v smere  $x$  pri vstupnej rýchlosti  $U_{\infty} = 1 \text{ m s}^{-1}$



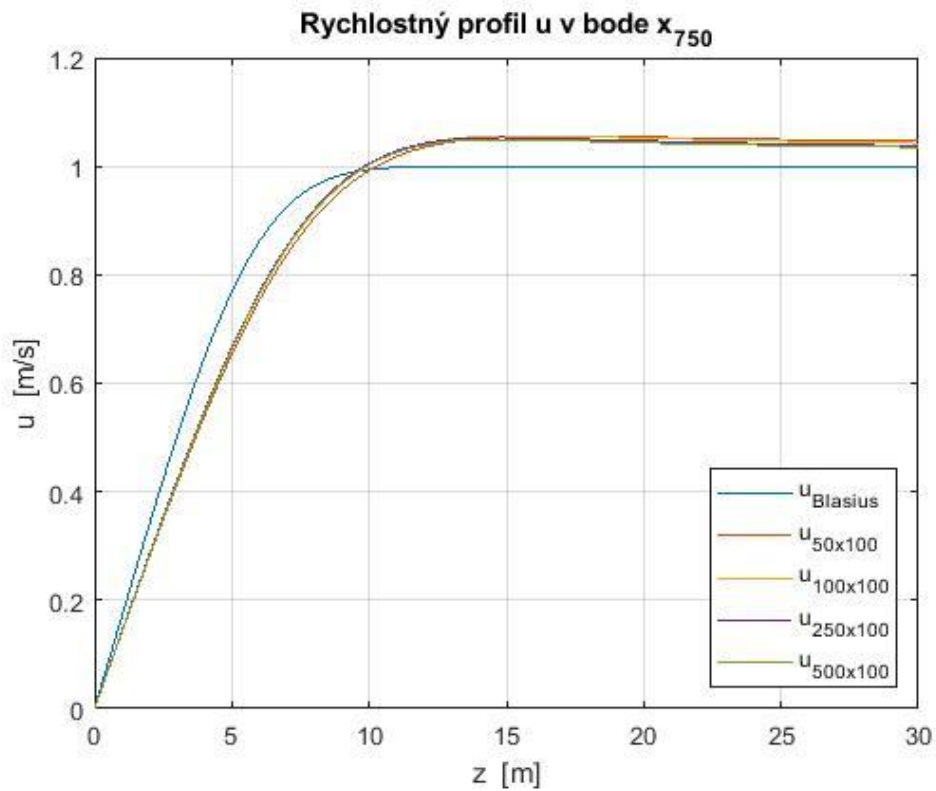
Obrázok 4.5 Profil zložky rýchlosti  $u$  v bode  $x = 500$  m v závislosti na zjemnení siete v smere  $x$  pri vstupnej rýchlosti  $U_{\infty} = 10 \text{ m s}^{-1}$



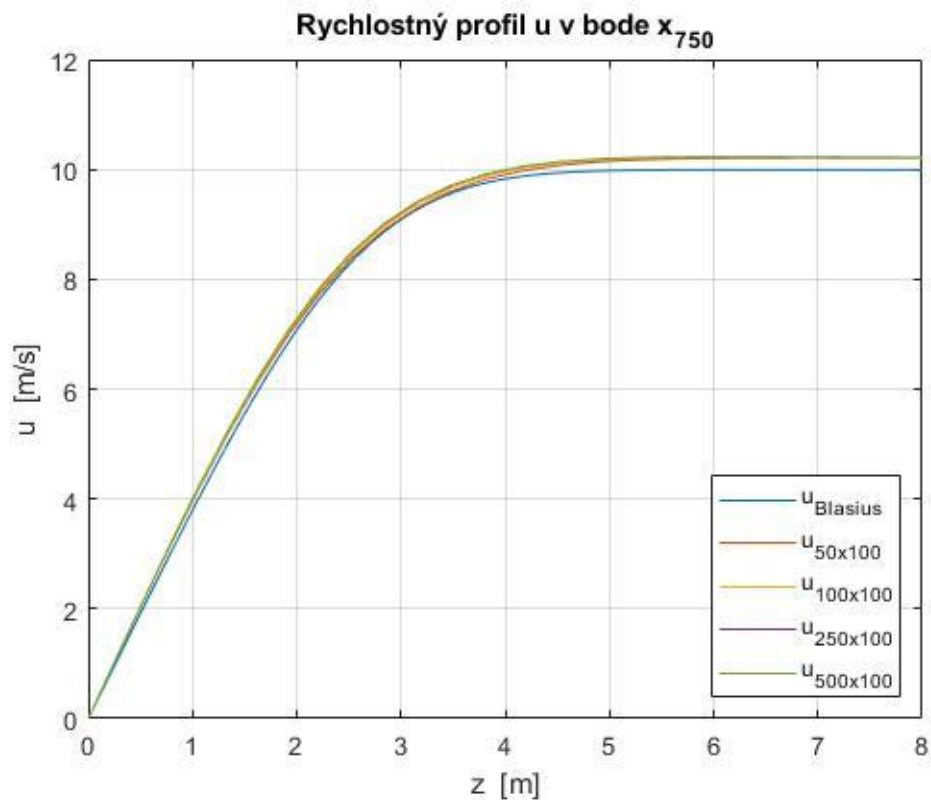
Obrázok 4.6 Profil zložky rýchlosti  $u$  v bode  $x = 500$  m v závislosti na zjemnení siete v smere  $z$  pri vstupnej rýchlosti  $U_{\infty} = 1 \text{ m s}^{-1}$



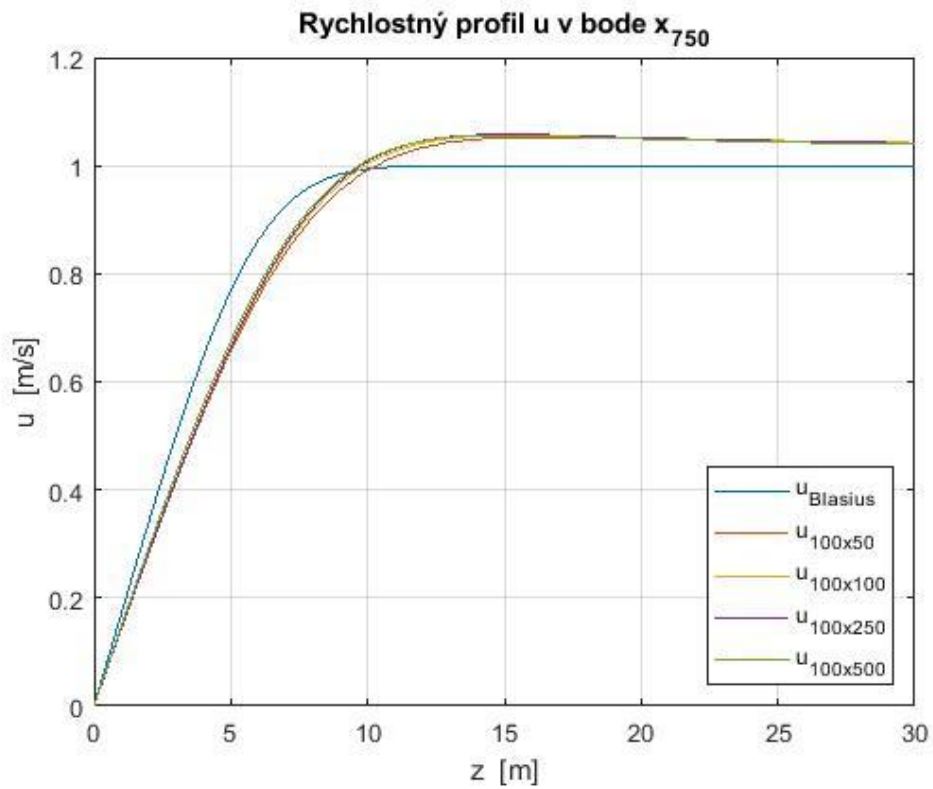
Obrázok 4.7 Profil zložky rýchlosti  $u$  v bode  $x = 500$  m v závislosti na zjemnení siete v smere  $z$  pri vstupnej rýchlosti  $U_{\infty} = 10 \text{ m s}^{-1}$



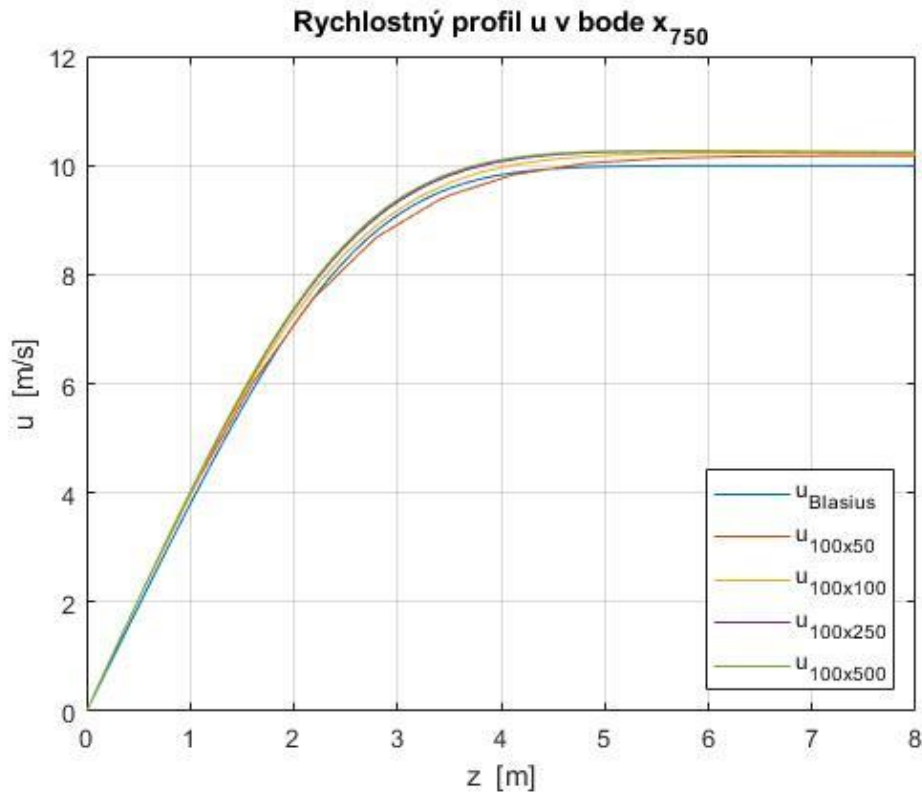
Obrázok 4.8 Profil zložky rýchlosti  $u$  v bode  $x = 750$  m v závislosti na zjemnení siete v smere  $x$  pri vstupnej rýchlosti  $U_{\infty} = 1 \text{ m s}^{-1}$



Obrázok 4.9 Profil zložky rýchlosti  $u$  v bode  $x = 750$  m v závislosti na zjemnení siete v smere  $x$  pri vstupnej rýchlosti  $U_{\infty} = 10 \text{ m s}^{-1}$



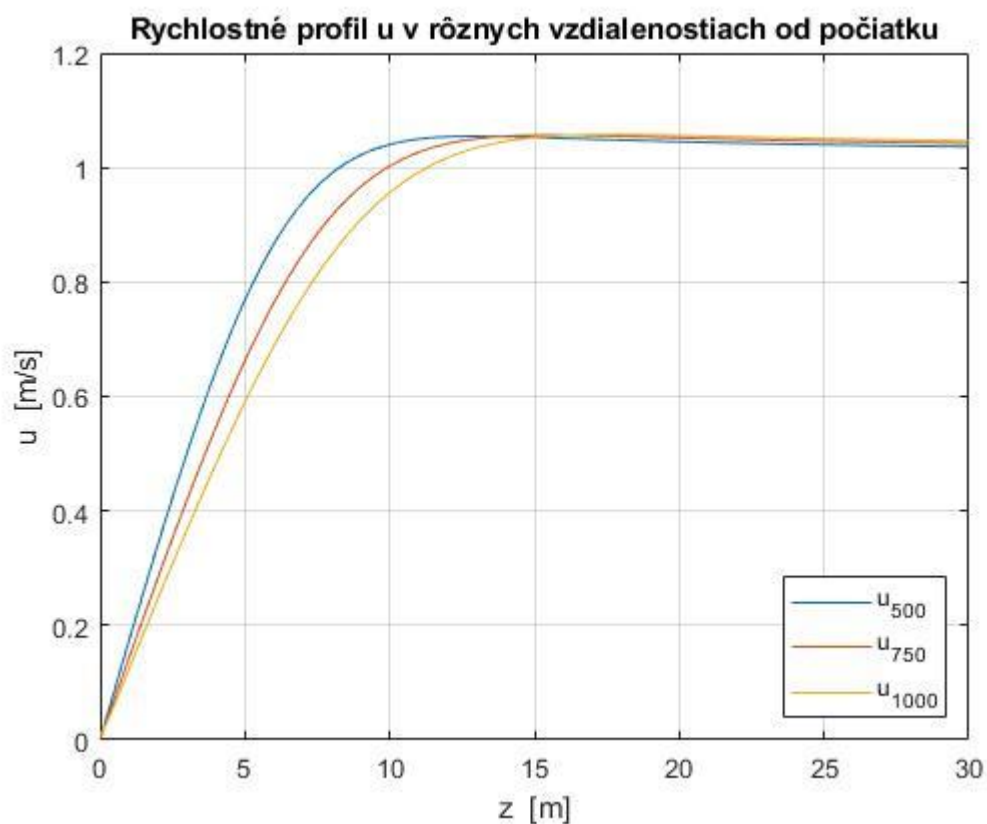
Obrázok 4.10 Profil zložky rýchlosti  $u$  v bode  $x = 750$  m v závislosti na zjemnení siete v smere  $z$  pri vstupnej rýchlosti  $U_{\infty} = 1 \text{ m s}^{-1}$



Obrázok 4.11 Profil zložky rýchlosti  $u$  v bode  $x = 750$  m v závislosti na zjemnení siete v smere  $z$  pri vstupnej rýchlosti  $U_{\infty} = 10 \text{ m s}^{-1}$

Ak porovnáme navzájom obrázky, kde sme zmenili len vstupnú rýchlosť prúdenia, zistíme, že pri vyššom Reynoldsovom čísle výsledky numerického riešenia lepšie aproximujú analytické riešenie Blasiusovho problému. V prípade  $U_\infty = 1 \text{ ms}^{-1}$  vidíme, že šírka a rýchlosti v medznej vrstve sú väčšie než u Blasiusovho riešenia. Rozdiel môže byť spôsobený použitou okrajovou podmienkou na hornej stene, kde  $u \neq U_\infty$ .

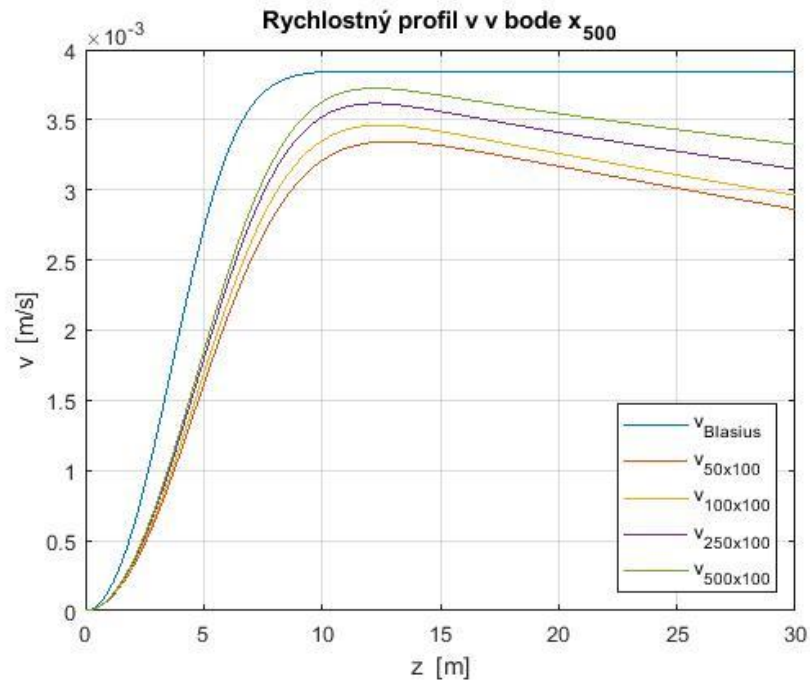
Na Obr. 4.12 sú vidieť rýchlostné profily  $u$  v horizontálnom smere vo vzdialenostiach  $x=500\text{m}$  (polovica dosky),  $x=750\text{m}$  (tri štvrtiny dosky) a  $x=1000\text{m}$  (koniec dosky). Z tohto obrázku pozorujeme očakávaný vývoj medznej vrstvy nad doskou. Tento vývoj je spôsobeným vplyvom trenia medzi tekutinou a doskou.



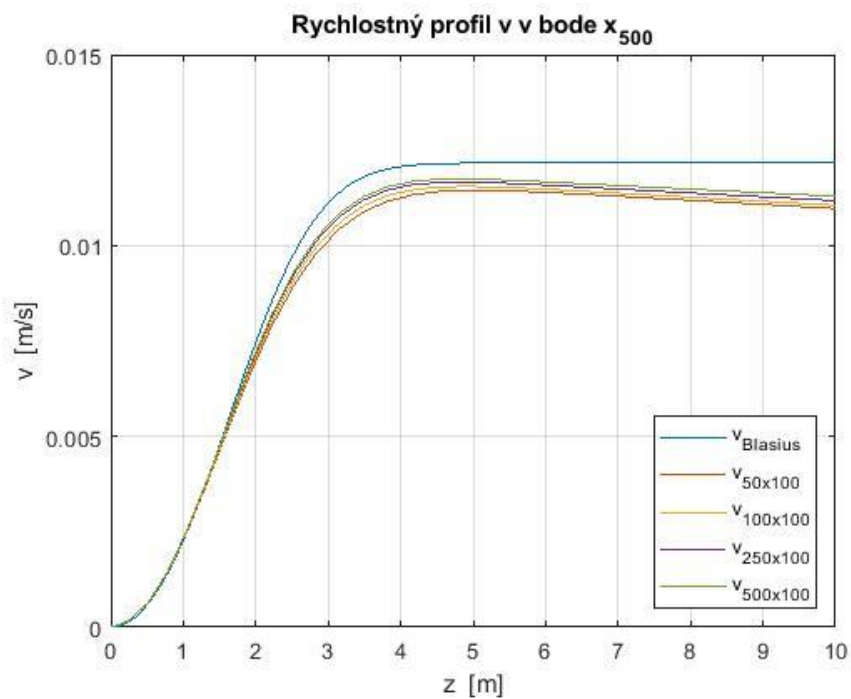
Obrázok 4.12 Rýchlostné profily  $u$  napočítané na sieti  $100 \times 100$  so vstupnou rýchlosťou  $U_\infty = 1 \text{ ms}^{-1}$  v rôznych vzdialenostiach

V nasledujúcich Obr. 4.13 až 4.16 skúmame priebeh vertikálnej rýchlosti  $v$  v závislosti na zjemňovaní siete v smere  $x$  a na vstupnej rýchlosti. Profily rýchlosti  $v$  pre  $U_\infty = 10 \text{ ms}^{-1}$  sú veľmi podobné pre každú použitú sieť. V prípade  $U_\infty = 1 \text{ ms}^{-1}$  pozorujeme väčší vplyv siete než pri vyššej vstupnej rýchlosti. Najlepšie aproximuje Blasiusovo riešenie profil napočítaný na najhustejšej sieti  $500 \times 100$ . Celkovo môžeme konštatovať, že dominantná zložka rýchlosti  $u$  je pre nami používané siete nezávislá. Pre

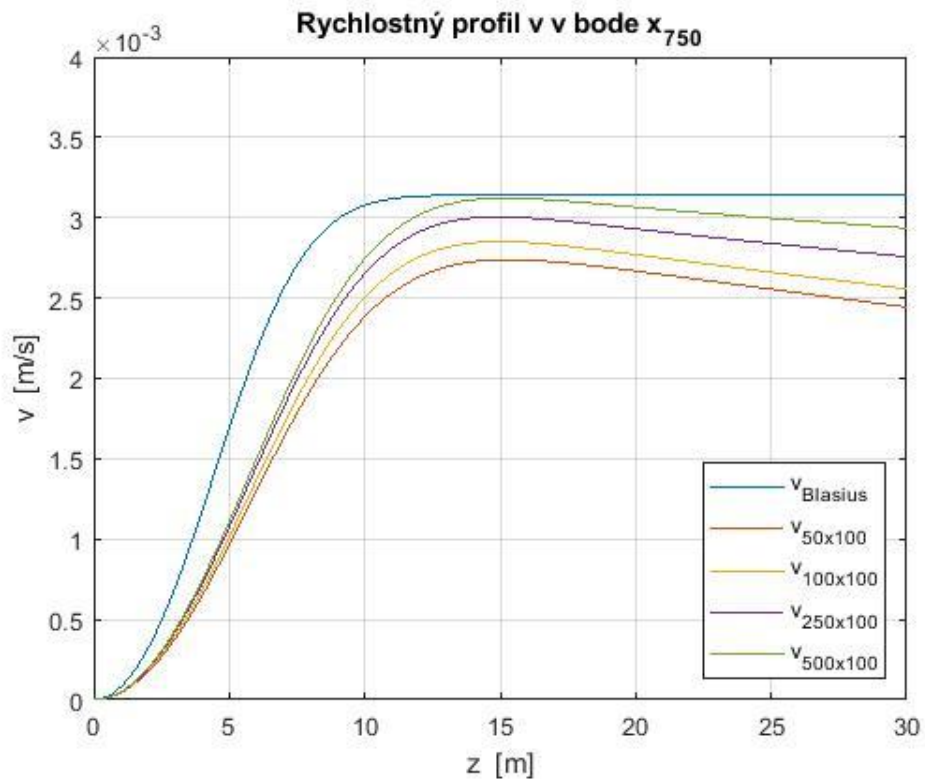
zložky  $v$  môžeme pozorovať zlepšovanie aproximácie so zjemňovaním siete v prípade  $U_\infty = 1 \text{ ms}^{-1}$ . Zložky rýchlosti  $v$  sú však o niekoľko rádov menšie než zložky  $u$ , a preto môžeme konštatovať, že celkové riešenie profilu je nezávislé na sieti.



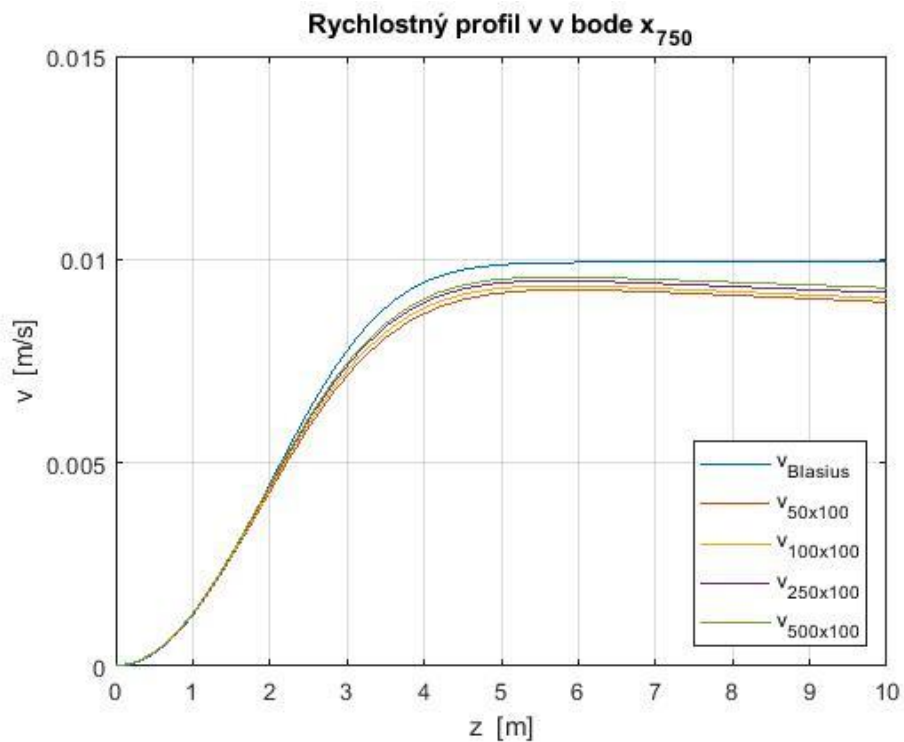
Obrázok 4.13 Profil zložky rýchlosti  $v$  v bode  $x = 500 \text{ m}$  v závislosti na zjemnení siete v smere  $x$  pri vstupnej rýchlosti  $U_\infty = 1 \text{ ms}^{-1}$



Obrázok 4.14 Profil zložky rýchlosti  $u$  v bode  $x = 500 \text{ m}$  v závislosti na zjemnení siete v smere  $x$  pri vstupnej rýchlosti  $U_\infty = 10 \text{ ms}^{-1}$



Obrázok 4.15 Profil zložky rýchlosti  $u$  v bode  $x = 750$  m v závislosti na zjemnení siete v smere  $x$  pri vstupnej rýchlosti  $U_\infty = 1 \text{ ms}^{-1}$



Obrázok 4.16 Profil zložky rýchlosti  $u$  v bode  $x = 750$  m v závislosti na zjemnení siete v smere  $x$  pri vstupnej rýchlosti  $U_\infty = 10 \text{ ms}^{-1}$



## 4.4 Súčiniteľ odporu trenia

Na základe našich výpočtov sme schopný vyhodnotiť hodnotu trecieho koeficientu na doske. Odvodenie vzťahu pre výpočet koeficientu sme uskutočnili v kapitole 2.4. Pre pripomenutie má vzťah pre výpočet súčiniteľa tvar:

$$c_D = \frac{f''(0)\sqrt{8}}{\sqrt{Re}} \quad (4.6)$$

Hodnotu súčiniteľa  $c_D$  sme schopný spočítať z analytického riešenia, ale aj na základe numerického riešenia vo výpočtovom programe. Výsledné hodnoty sú

$$c_{D\text{Blasius}} = \frac{f''(0)\sqrt{8}}{\sqrt{Re}} \cong \frac{0,4946 \cdot \sqrt{8}}{\sqrt{7,5 \cdot 10^5}} = 0,00162 \quad (4.7)$$

$$c_{D\text{OpenFOAM}} = \frac{f''_{OF}(0)\sqrt{8}}{\sqrt{Re}} \cong \frac{0,5017 \cdot \sqrt{8}}{\sqrt{7,5 \cdot 10^5}} = 0,00164 \quad (4.8)$$

kde  $f''_{OF}$  sme získali pomocou konečnej diferencie z rýchlostného profilu  $u$  v bode  $x = 750$  m na sieti  $100 \times 100$  so vstupnou rýchlosťou  $U_\infty = 10 \text{ ms}^{-1}$

$$f''_{OF} \cong \frac{\Delta f'}{\Delta \eta} \quad (4.9)$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{U_\infty \Delta f'}{\frac{\Delta \eta}{\sqrt{\frac{U_\infty}{2xv}}}} \Rightarrow f''_{OF} \cong \frac{\Delta f'}{\Delta \eta} = \sqrt{\frac{2xv}{U_\infty^3}} \frac{\Delta u}{\Delta z} \quad (4.10)$$

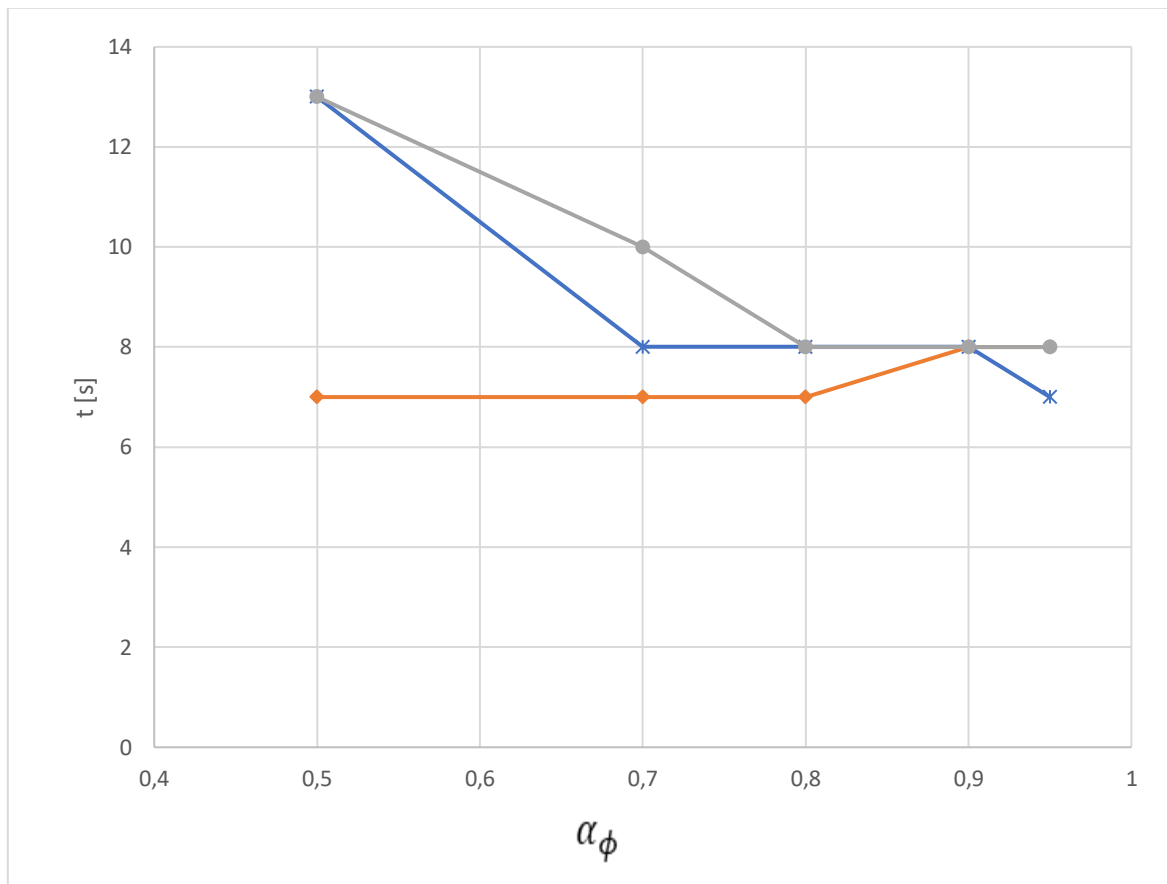
$$\frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{u_1 - u_0}{z_1 - z_0} \quad (4.11)$$

Vypočítane hodnoty sa od seba líšia približne o 1,2 %. Keďže tento rozdiel je relatívne malý môžeme prehlásiť, že získaná hodnota koeficienta odporu trenia pomocou numerického riešenia je správna.

## 4.5 Priebeh výpočtu

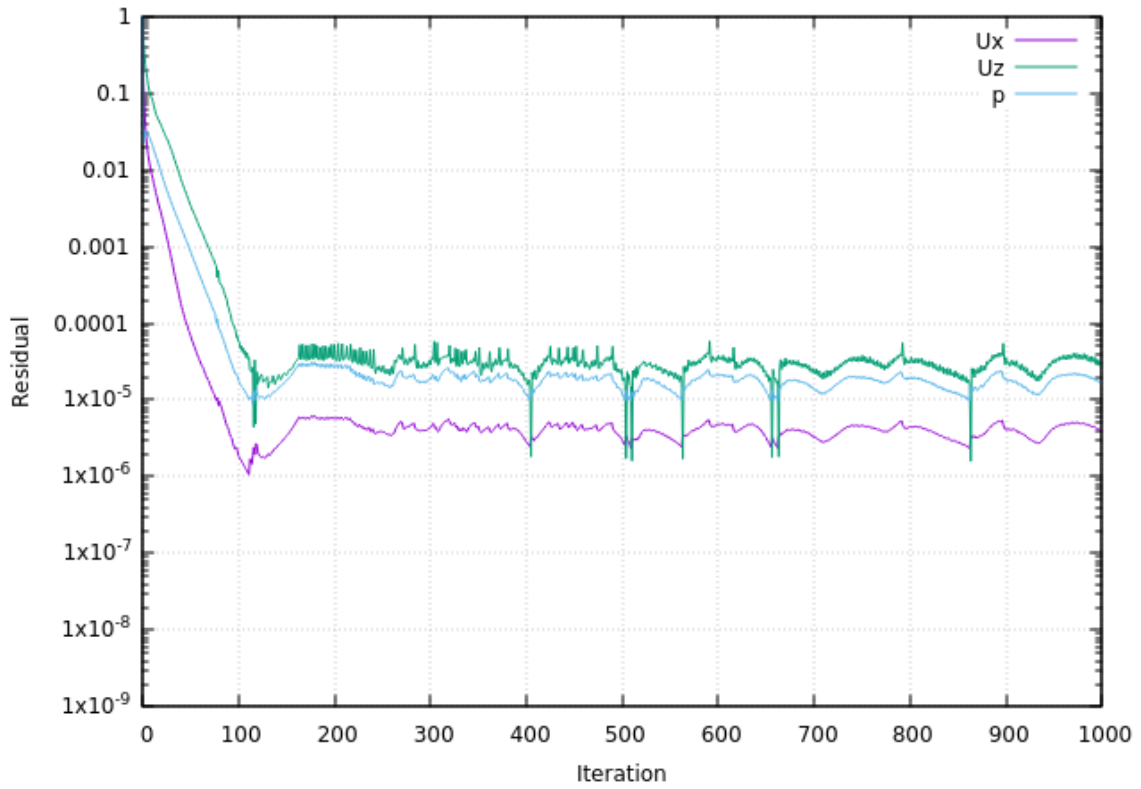
V tejto práci sme tiež skúmali závislosť výpočtového času a presnosti riešenia na voľbe relaxačného faktora pre rýchlosť  $\alpha_{\bar{v}}$  a tlak  $\alpha_p$ . Zrovnanie priebehu závislostí sme uskutočnili na sieti  $100 \times 100$ . Na Obr 4.17 vidíme graf závislosti výpočtového času na voľbe relaxačného faktora.

Oranžová krivka vyjadruje závislosť len na voľbe faktora pre relaxáciu tlaku pričom  $\alpha_{\bar{v}} = 0.9$  a modrá krivka znázorňuje opačný prípad, to znamená závislosť na meniacom sa relaxačnom faktore  $\alpha_{\bar{v}}$  a konštantnom  $\alpha_p$ . Sivou krivkou sme vyjadrili závislosť pre naraz sa meniace relaxačné faktory s rovnakými hodnotami. Z priebehu závislostí vidíme, že závislosť priebehu na relaxačnom faktore pre tlak nemá veľký význam na čas výpočtu. Na druhú stranu zvýšenie  $\alpha_{\bar{v}}$  vedie k rýchlejšiemu výpočtu zhruba o 46 %.

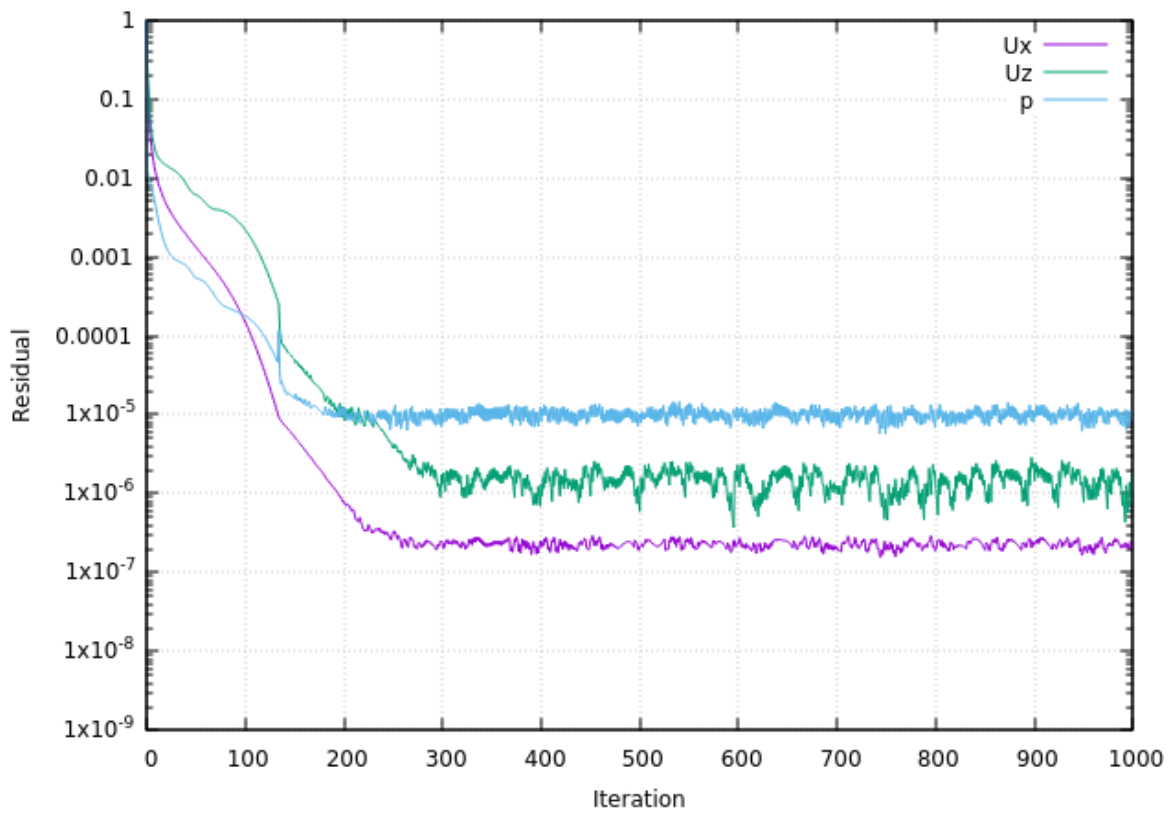


Obrázok 4.17 Celkový čas výpočtu v závislosti na voľbe relaxačného faktora

Pozorovaním Obr. 4.18 a Obr. 4.19 je vidieť, že presnosť numerického riešenia sa so znižujúcim relaxačným faktorom zväčšuje. Ďalej sme zistili, že rýchlosť konvergencie riešenia je závislá na voľbe relaxačného faktora. Ako je zrejmé z obrázkov Obr. 4.18 a Obr. 4.19 ak zvolíme menší relaxačný faktor pre rýchlosť prúdenia  $\alpha_{\bar{v}}$ , riešenie konverguje pomalšie a zároveň vidíme menšie oscilácie riešenia. Čas potrebný na skonvergovanie riešenia vo variante pre  $\alpha_{\bar{v}} = 0,5$  bol 3,9 s a pre  $\alpha_{\bar{v}} = 0,9$  bol 1,6 s.



Obrázok 4.18 Priebeh rezíduí na sieti 100x100, pri použití relaxačných faktorov  $\alpha_{\vec{v}} = 0,9$  a  $\alpha_p = 0,9$



Obrázok 4.19 Priebeh rezíduí na sieti 100x100, pri použití relaxačných faktorov  $\alpha_{\vec{v}} = 0,5$  a  $\alpha_p = 0,9$

## 4.6 Výsledky rozptylu pasívnej prímеси

V tejto práci sme riešili prenos a rozptyl pasívnej prímеси, ktorú predstavuje napr. komín továrne alebo ropnú rafinériu, z ktorých sa šíri znečistenie. Numerickú simuláciu sme realizovali prostredníctvom programu OpenFOAM, v ktorom sme metódou konečných objemov riešili rovnicu (1.8). Simulovali sme dve úlohy. Ako prvé sme skúmali rozptyl znečistenia vo voľnej atmosfére s konštantným rýchlostným profilom  $u(x, z) = U_\infty$  a ďalší prípad bol rozptyl nad plochým terénom, ktorým sme napodobnili disperziu znečistenia v MVA. Zrovnanie správnosti riešenia, pre prípad s konštantným rýchlostným profilom rovnobežným so súradnicou  $x$ , sme uskutočnili pomocou Gaussového rozptylu, ktorý popisuje priebeh koncentrácie znečistenia v priestore z bodového zdroja. Gaussov rozptyl pre nami počítaný prípad sme vyjadrili rovnicou v tvare

$$c(x, z) = \frac{Q}{4\pi D r} e^{-U_\infty \frac{r-x}{2D}} \quad (4.12)$$

kde  $Q$  je hodnota koncentrácie bodového zdroja,  $D$  je difúzny koeficient a

$$r = \sqrt{x^2 + z^2} \quad (4.13)$$

Rovnicu (4.12) sme prevzali zo zdroja [1].

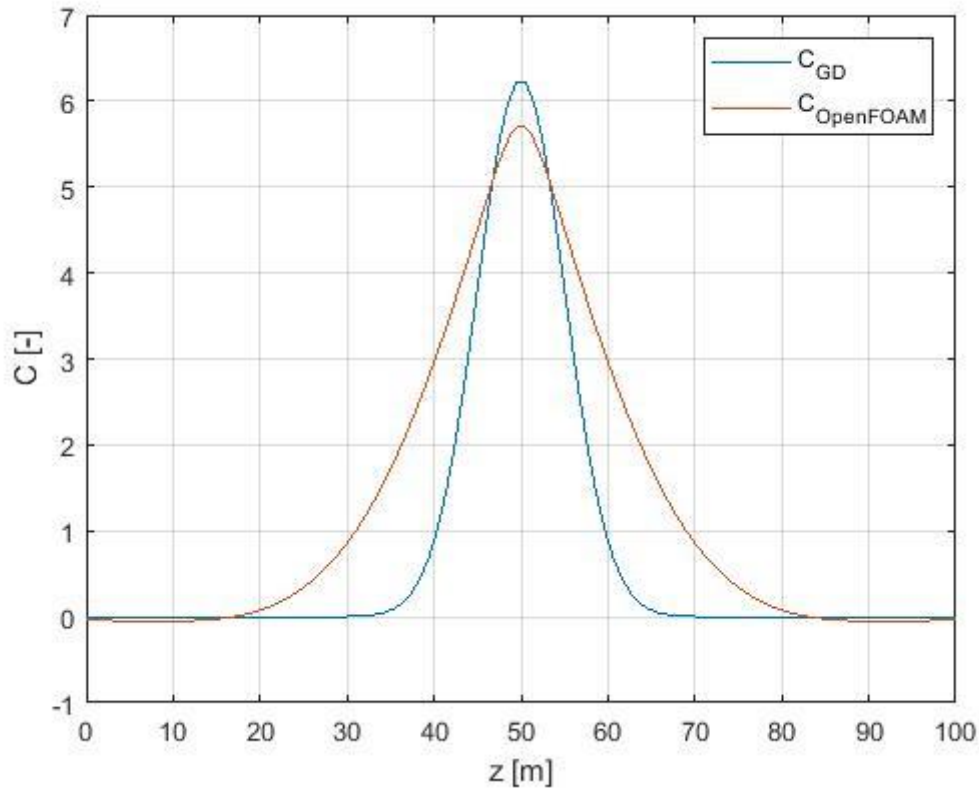
V prvej úlohe sme riešili oblasť 1000x100 m. Bodový zdroj sme umiestnili v tejto oblasti do výšky 50 m a vzdialenosti 10 m od počiatku. Výpočet sme uskutočnili na sieti 100x100 pri vstupnej rýchlosti  $U_\infty = 1 \text{ ms}^{-1}$ , koncentrácia prímеси na zdroji  $Q$  bola nastavená na hodnotu 1 a difúzny koeficient sa rovnal

$$D = \frac{\nu}{Sc} = \frac{10^{-2}}{0,7} = 0,0143 \text{ m}^2\text{s}^{-1} \quad (4.14)$$

Na vstupe a výstupe oblasti boli nastavené homogénne Neumannove okrajové podmienky pre koncentráciu a na hornej a spodnej stene homogénne Dirichletove okrajové podmienky. Pre rýchlosť prúdenia sme na vstupe, hornej a dolnej stene nastavili Dirichletovu okrajovú podmienku  $u = U_\infty$  a na výstupe homogénnu Neumannovu okrajovú podmienku.

Na Obr. 4.20 vidíme zrovnanie vertikálneho rozptylu koncentrácie s analytickým riešením v bode  $x = 100$  m vzdialeného od zdroja znečistenia 90 m. Kvalitatívne numerické riešenie odpovedá nášmu očakávaniu. Kvantitatívna zhoda nie je príliš dobrá. Nami napočítané maximum koncentrácie je nižšie a dochádza pri ňom k výraznejšiemu rozptylu. To

môže byť spôsobené numerickou viskozitou schémy. Jedná sa ale o prvé výsledky a tejto téme sa bude potreba ďalej venovať.



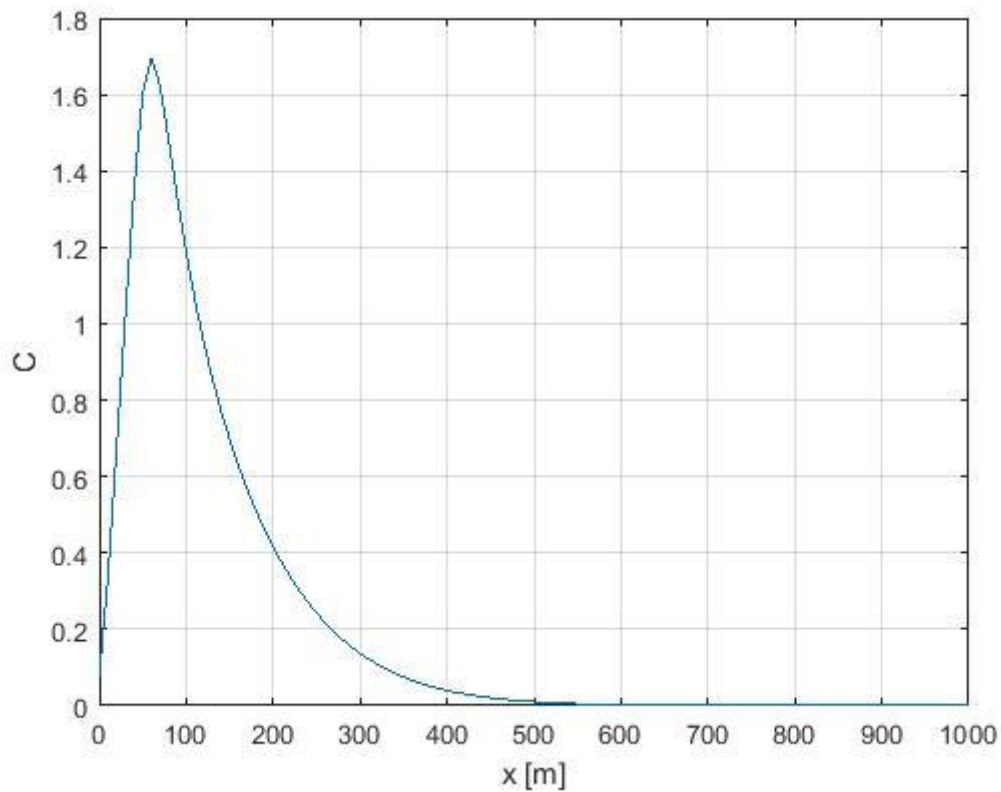
Obrázok 4.20 Porovnanie profilu priebehu koncentrácie napočítaného pomocou programu OpenFOAM s Gaussovým rozptylom znečistenia v rovine  $xz$  v bode  $x = 100$  m

V druhom prípade sme simulovali rozptyl pasívneho kontaminantu nad plochým terénom, ktorý bol riešený v kapitole 4.2. Použili sme oblasť s napočítaným prúdovým polom pre  $U_\infty = 1 \text{ ms}^{-1}$ , kde na vstupe oblasti bola nastavená homogénna Dirichletova okrajová podmienka a na ostatných hraniciach homogénne Neumannove okrajové podmienky pre koncentráciu. Bodový zdroj sa nachádzal vo výške 23 m a vzdialenosti 50 m od počiatku. Výsledky simulácie nad plochým terénom sme zobrazili na Obr. 4.21 a Obr.4.22. Na obrázku Obr. 4.21 vidíme pole koncentrácií, ktorých výsledok kvalitatívne odpovedá nášmu očakávaniu.



Obrázok 4.21 Simulácia rozptylu pasívnej prímеси nad plochým terénom

Na Obr. 4.22 sme graficky vyjadrili závislosť priebehu prízemnej koncentrácie pasívneho kontaminantu na súradnici  $x$ . Najväčšia koncentrácia prímеси je cca 10 m od zdroja. Od tejto polohy koncentrácia znečistenia klesá.



Obrázok 4.22 Závislosť prízemnej koncentrácie so súradnicou  $x$  na povrchu dosky

## Záver

Táto práca je inšpirovaná prúdením a rozptylom znečistenia v MVA. Na začiatku sme si popísali zemskú atmosféru a rozdelili do vrstiev. Zadefinovali sme si pojem medznej vrstvy atmosféry a výskyt znečistenia, ktorý je súčasťou prostredia v MVA. Prúdenie v medznej vrstve atmosféry sme popísali Navier-Stokesovými rovnicami a rovnicou kontinuity, a taktiež sme zaviedli rovnicu pre pasívny kontaminant.

V našej práci sme uvažovali 2D laminárne prúdenie tekutiny nad plochým terénom. K popisu prúdenia sme analyticky odvodili Blasiusove riešenie prúdenia nad tenkou plochou doskou, ktoré má tvar obyčajnej nelineárnej diferenciálnej rovnice 3. rádu a spolu s okrajovými podmienkami tvorí okrajovú úlohu pre obyčajnú diferenciálnu rovnicu. Numerické riešenie tejto okrajovej úlohy sme uskutočnili na základe jej prevedenia na počiatočnú úlohu pomocou metódy streľby. Taktiež sme si odvodili súčiniteľ odporu trenia dosky s tekutinou, ktorého hodnotu sme porovnávali s numerickým riešením.

Ďalej sme numerické výpočty realizovali v programe OpenFOAM, kde sme riešili laminárne prúdenie na plochou doskou a rozptyl pasívnej prímеси z bodového zdroja vo voľnej atmosfére a nad plochým terénom. Pre diskretizáciu rovníc zákonov zachovania v OpenFOAM-e sme využili metódu konečných objemov v spojení s Gaussovou vetou. Numerickú oblasť sme popísali karteziánskou ortogonálnou sieťou. Na výpočet tlakového a rýchlostného poľa sme využili SIMPLE algoritmus.

Výsledok riešenia okrajovej úlohy vypočítanej metódou streľby sa zhoduje s výsledkom uvedeným v zdroji [11]. Z porovnania numerických výsledkov prúdenia s Blasiusovým problémom sme zistili, že profily dominantnej zložky  $u$  vektora rýchlosti  $\vec{v}$  sú podobné bez ohľadu na to, ak sieť zjemňujeme nezávisle v smere  $x$  a  $z$ . Preto konštatujeme, že numerické riešenie je nezávislé na sieti. Na základe získaných výsledkov sme pozorovali lepšiu aproximáciu Blasiusovho riešenia numerickým riešením pri väčšom Reynoldsovom čísle. Zistili sme, že pri zvyšovaní hodnoty relaxačného faktora pre rýchlosť sa zrýchľuje výpočtový čas, no zároveň klesá presnosť výpočtu a riešenie viacej osciluje.

Rozptyl pasívneho kontaminantu vo voľnej atmosfére sme porovnali s Gaussovým rozptylom. Numerický výsledok vykazoval väčšiu disperziu ako analytické riešenie a menšiu hodnotu maxima koncentrácie. Umiestnením bodového zdroja do laminárneho prúdu tekutiny nad plochým terénom sme simulovali transport a disperziu znečistenia.

# Bibliografia

1. **Arya, S. Pal.** *Air pollution meteorology and dispersion*. New York : Oxford University Press, 1999. ISBN 0-19-50739-3.
2. **Bednář, J. a Zikmunda, O.** *Fyzika mezní vrstvy atmosféry*. Praha : Academia, 1985.
3. **Beneš, L.** Numerické řešení proudění v mezní vrstvě atmosféry. Praha : ČVUT, 2000.
4. **Ferziger, J. H. a Perić, M.** *Computational methods for Fluid dynamics*. Berlin : Springer, 2002. ISBN 3-540-42074-6.
5. **Jaňour, Z.** *Modelování mezní vrstvy atmosféry*. Praha : Academia, 2019. ISBN 978-80-200-2854-9.
6. **Mattioli, F.** Fluid dynamics. *Elements of fluid dynamics*. [Online] 2008. [Datum: 20. 3 2022.] <http://www.fluidynamics.it/ELEMENTS.HTM>.
7. **Míka, S., Příklad, P. a Brander, M.** *Speciální numerické metody*. Plzeň : Academia, 2006. ISBN 80-86843-13-0.
8. **Peštová, Z.** Meteopress. [Online] Meteopress spol s.r.o., 22. 2 2019. [Datum: 11. 5 2022.] <https://www.meteopress.cz/vysvetleni/na-jake-vrstvy-se-deli-atmosfera/>.
9. **Růžičková, I. a Hlavička, R.** Numerické metody. Brno : VUT FSI.
10. **Řezníček, H.** Okrajové podmínky pro stratifikované proudění. Praha : MFF ÚK, 2014.
11. **Schlichting, H. a Gersten, K.** *Boundary-layer theory*. Berlin : Springer, 2017. ISBN 978-3-662-52919-5.
12. **CFD Direct.** *User Guide*. [Online] CFD Direct Ltd, 2021. [Datum: 15. 5 2022.] <https://cfd.direct/openfoam/user-guide-v8/>.
13. **E-konstruktor.** *Kinematická a dynamická viskozita látek*. [Online] 9. 9 2013. [Datum: 20. 5 2022.] <https://e-konstruktor.cz/prakticka-informace/kinematicka-a-dynamicka-viskozita-latek>.