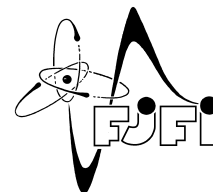


ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE  
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská



# **Statistické vlastnosti termodynamického částicového plynu s kombinovaným potenciálem**

## **Statistical properties of thermodynamic particle gas with combined potential**

Diplomová práce

Autor: **Bc. Vít Pánek**  
Vedoucí práce: **doc. Mgr. Milan Krbálek, Ph.D.**  
Akademický rok: 2021/2022

## ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Student: Bc. Vít Pánek

Studijní program: Aplikované matematicko-stochastické metody

Název práce (česky): Statistické vlastnosti termodynamického částicového plynu s kombinovaným potenciálem

Název práce (anglicky): Statistical properties of thermodynamic particle gas with combined potential

### Pokyny pro vypracování:

- 1) Vysvětlete motivaci pro studium matematických vlastností plynů s kombinovanými interakcemi.
- 2) Sumarizujte základní známé matematické poznatky o statistice částicových systémů.
- 3) Stanovte podmínky, za nichž je částicový systém zadán GIG-generátorem superpoissonovský.
- 4) Dokažte nebo vyvráťte hypotézu, že v termodynamickém plynu s čistě repulzivním potenciálem je statistická kompresibilita menší nebo rovna jedné.
- 5) Analyticky řešte rovnováhu částicového plynu s krátkodosahovým kombinovaným potenciálem. Výsledky validujte za použití numerického modelu.
- 6) Testujte hypotézu, že dopravní plyn se střednědosahovým kombinovaným potenciálem generuje GIG-distribované rozestupy mezi částicemi. Užijte k tomu numerickou reprezentaci plynu.

Doporučená literatura:

- 1) M. Krbálek, F. Šeba, M. Krbálková, Super-random states in vehicular traffic — Detection & explanation, Physica A 585, 2022, 126418.
- 2) M. Krbálek, Equilibrium distributions in a thermodynamical traffic gas, J. Phys. A: Math. Theor. 40, 2007, 5813-5821.
- 3) M. Krbálek, P. Šeba, Spectral rigidity of vehicular streams (Random Matrix Theory approach), J. Phys. A: Math. Theor. 42, 2009, 345001.
- 4) S. Mitra, S. Washington, On the nature of over-dispersion in motor vehicle crash prediction models, Accident Analysis and Prevention 39, 2007, 459–468.
- 5) B. Jorgensen, Statistical Properties of the Generalized Inverse Gaussian Distribution, Lecture Notes in Statistics 9, New York: Springer-Verlag, 1982.

Jméno a pracoviště vedoucího diplomové práce:

Doc. Mgr. Milan Krbálek, Ph.D.

Katedra matematiky FJFI ČVUT v Praze, Trojanova 13, 120 00 Praha 2

Jméno a pracoviště konzultanta:


Datum zadání diplomové práce: 31.10.2021

Datum odevzdání diplomové práce: 2.5.2022

Doba platnosti zadání je dva roky od data zadání.

V Praze dne 01.11.2021

  
.....  
garant oboru

  
.....  
vedoucí katedry



  
.....  
děkan

*Poděkování:*

Chtěl bych zde poděkovat svému školiteli docentu Mgr. Milanu Krbálkovi, Ph.D. za pečlivost, nekonečnou trpělivost, ochotu, vstřícnost a odborné i lidské zázemí při vedení mé diplomové práce.

*Čestné prohlášení:*

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně a uvedl jsem všechnu použitou literaturu.

V Praze dne 2. května 2022

Vít Pánek



*Název práce:*

## **Statistické vlastnosti termodynamického částicového plynu s kombinovaným potenciálem**

*Autor:* Bc. Vít Pánek

*Obor:* Matematické inženýrství

*Zaměření:* Aplikované matematicko-stochastické metody

*Druh práce:* Diplomová práce

*Vedoucí práce:* doc. Mgr. Milan Krbálek, Ph.D., České vysoké učení technické v Praze, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, Katedra matematiky

*Abstrakt:* Tato práce se zabývá revizí potenciálů pro model termodynamického dopravního plynu. Počáteční část této práce je věnována úvodu do statistického odhadování odstupů vozidel, balančních částicových systému a jeho charakteristik. Důležitou částí je numerický model, který testuje analyticky odvozené charakteristiky modelů s různými potenciály. Dále obsahuje větu o subpoissonovskosti repulzivních systémů a její důkaz. Posledně se v této práci zkoumá rozdělení roztečí, které vyprodukoval numerický model termodynamického dopravního plynu se střednědosahovým kombinovaným potenciálem.

*Klíčová slova:* balanční částicové systémy, deflekce, distribuce roztečí, kombinovaný potenciál, Metropolis - Hastings, repulzivní systémy, rozptyl roztečí, statistická kompresibilita, statistické odhadování odstupů vozidel (VHM), termodynamický dopravní plyn, zobecněné inverzní Gaussovo rozdělení(GIG)

*Title:*

## **Statistical properties of thermodynamic particle gas with combined potential**

*Author:* Bc. Vít Pánek

*Abstract:* This paper deals with the revision of potentials for the thermodynamic traffic gas model. The initial part of this work is devoted to an introduction to the statistical estimation of vehicle spacing, balancing particle systems and their characteristics. Important part is a numerical model that tests the analytically derived characteristics of models with different potentials. It also contains a theorem on subpoisson repulsive systems and its proof. Finally, this paper examines the distribution of the spacings produced by a numerical model of a thermodynamic transport gas with a medium-range combined potential.

*Key words:* balanced particle systems, clearance distribution, clearance variance, combined potential, deflection, generalized inverse Gaussian distribution (GIG), Metropolis-Hastings, repulsive particle system, statistical compressibility, thermodynamical traffic gas, vehicular headway modelling (VHM)

# Obsah

Úvod	8
<b>1 Základní veličiny VHM</b>	<b>9</b>
1.1 Motivace . . . . .	9
1.2 Základní veličiny VHM . . . . .	10
1.3 Model termodynamického dopravního plynu . . . . .	11
1.4 Interakční síly a jejich specifikace . . . . .	12
1.5 Celková energie částicového systému . . . . .	16
1.6 Stochastický popis . . . . .	16
<b>2 Balanční částicové systémy</b>	<b>18</b>
2.1 Třída balancovaných hustot . . . . .	18
2.2 Balanční částicový systém - BČS . . . . .	19
2.3 Charakteristiky částicového systému . . . . .	20
2.4 Klasifikace částicových systémů . . . . .	22
2.5 Zástupci třídy $\mathcal{B}$ . . . . .	24
<b>3 Podmínky superpoissonovského BČS</b>	<b>28</b>
3.1 Systémy podobné Poissonovým . . . . .	33
<b>4 Numerický model</b>	<b>36</b>
4.1 Sestavení algoritmu . . . . .	37
<b>5 Analytické modely a jejich numerická simulace</b>	<b>39</b>

5.1	Bezinterakční systém . . . . .	39
5.2	Model s logaritmickým potenciálem . . . . .	42
5.3	Model s hyperbolickým potenciálem . . . . .	44
<b>6</b>	<b>Model s kombinovaným potenciálem</b>	<b>46</b>
6.1	Model s kombinovaným potenciálem . . . . .	46
6.1.1	Analytické odvození rovnovážného rozdělení . . . . .	46
6.2	Algoritmická realizace . . . . .	48
6.2.1	Parametry pro rozptyl větší než 1 . . . . .	48
6.2.2	Parametry pro rozptyl menší než 1 . . . . .	53
6.2.3	Parametry pro rozptyl roven 1 . . . . .	59
<b>7</b>	<b>Kompresibilita v systémech s repulzivním potenciálem</b>	<b>61</b>
7.1	Subpoissonovskost repulzivního částicového systému . . . . .	61
<b>8</b>	<b>Dopravní plyn se střednědosahovým kombinovaným potenciálem</b>	<b>65</b>
	<b>Závěr</b>	<b>71</b>
<b>A</b>	<b>Odvození kompresibility a deflektce</b>	<b>73</b>

# Úvod

Tato práce spadá do oblasti statistického odhadování odstupů vozidel neboli *Vehicular Headway Modeling* (VHM). VHM je disciplína fyziky dopravy, která analyzuje a predikuje změny stavu mikrostruktury dopravního systému zapříčiněné změnou makroveličin daného systému. Dopravní systém můžeme simulovat na modelu termodynamického dopravního plynu. Takový model, jak v analytické tak numerické verzi, lze modifikovat. Hlavní náplní této práce je model termodynamického dopravního plynu s kombinovaným potenciálem. Účelem této práce je prohloubení znalostí o dopravních systémech, ve kterých mezi řidiči nepůsobí pouze síla odpuzivá, ale i síla atraktivní. Zjištění existence přitažlivé složky potenciálu a popis chování řidiče s takovým potenciálem je velice aktuální problém. Tuto praktickou představu převedeme do teorie částicových systémů, kde interakční síly jednotlivých částic nejsou založené pouze na odpuzivosti sousedních částic, ale i na přitažlivosti.

Numerický model termodynamického dopravního plynu založený na modifikovaném algoritmu Metropolis - Hastings simuluje distribuci vozidel na vozovce nebo spíše v tomto případě systému částic. Matematickou teorii pro pohyb částic napodobující pohyb založený na psycho-sociální interakci zaštituje teorie balancovaných částicových systémů. Zejména distribuce GIG (*Generalized Inverse Gaussian*), pocházející z rodiny balancovaných hustot, má v tomto oboru významné zastoupení, jelikož byla odvozena analyticky z jistého dopravního modelu a zároveň velmi dobře popisuje empirická data.

V úvodních dvou kapitolách se čtenář seznamuje s problematikou statistického modelování odstupů vozidel, balančními částicovými systémy a jejich základními charakteristikami. V následující třetí kapitole je více rozebrána problematika superpoissonovských stavů v kontextu rozptylu světlostí a určení, kdy nastávají na základě dosavadních aproximací. Další kapitoly se věnují numerickému modelu, který je postaven pro volitelný potenciál. Tento model bude postupně ověřovat analyticky odvozené charakteristiky balančních částicových systémů s různými potenciály a parametry. Kapitola 7 se věnuje větě o klasifikaci systémů dle statistické rigidity pro zobecněný repulzivní potenciál. Poslední kapitola je věnována implementaci modelu se střednědosahovým kombinovaným potenciálem. Cílem této kapitoly je testování hypotézy, zda-li takový model produkuje GIG - distribuované rozestupy mezi částicemi. Páteřním materiálem pro tuto práci jsou přednášky z předmětu 01MMD - Matematické modelování dopravy a skriptum [7].

Tato práce spojuje a volně navazuje na předchozí odborné práce autora, a to bakalářskou [10] a výzkumný úkol [11]. První práce se zabývala superpoissonovskými stavy, tedy stavy kde působí kombinovaný potenciál. Druhá uvedená práce se studovala systémy, kde je potenciál střednědosahový. Cílem diplomové práce je nejen prozkoumání vlastností systémů s kombinovaným krátkodosahovým potenciálem, ale i s několika dalšími variantami potenciálů. Na následujících stránkách se podíváme na zběžný úvod do této problematiky a přesněji popíšeme základní pojmy.



# Kapitola 1

## Základní veličiny VHM

### 1.1 Motivace

Tato práce se zaměřuje zejména na studium matematických vlastností plynů s kombinovaným potenciálem. Jak již bylo v úvodu řečeno, jedná se o práci zasazenou do tématu fyziky dopravy, konkrétněji modelování odstupů vozidel neboli Vehicular Headway Modeling (VHM). Základní veličinou v oblasti modelování odstupů vozidel je právě časový nebo prostorový odstup mezi vozidly. Jelikož se každý řidič v dopravním toku chová a vyhodnocuje dopravní situace rozdílně, nelze přesně deterministicky předpokládat jeho reakci. Jeho chování je tedy do určité míry náhodné a nemůžeme s jistotou říci, jaký budou mít konkrétní vozidla odstup. Proto se na tuto veličinu nahlíží jako na náhodnou a můžeme říci pouze s určitou pravděpodobností, jak velké rozestupy se budou na vozovce objevovat. Co se týče čistě praktických důsledků této disciplíny, lepší odhadování rozvržení vozidel na vozovce a komplexní pochopení dopravního toku umožňuje lépe odhadovat kapacity vozovek, predikovat přetížení dopravní sítě a bezpečnější provoz. Díky práci matematiků v tomto oboru mohou například dopravní inženýři mnohem efektivněji navrhovat výstavbu nových komunikací a zlepšovat tak procesy s dopravou spojené, což se pozitivně projevuje na celé řadě odvětví jak ekonomických, tak bezpečnostních. Další vliv může mít tento obor v rychle rozvíjející se oblasti autonomního řízení, které může podrobně zmapované lidské chování a s ním související problémy z dopravního toku vyřadit.

Pro popis dopravních systémů lze použít model částicového termodynamického plynu, který přenáší znalosti fyziky termodynamických systémů na systémy řízené psycho-sociálními silami. Tento model prozkoumal již mnoho variant dopravních systémů. Ukázalo se, že nejlépe tyto systémy popisují pravděpodobnostní rozdělení z třídy balancovaných hustot, kterou podrobněji rozebereme později. Většina prozkoumaných systémů však předpokládala, že řidiči resp. částice interagují pouze na základě, dá se říci, pudu sebezáchovy, což znamená, že jediné síly, které na částici působí, jsou síly odpudivé. Pokud toto přeneseme na dopravní realitu, znamená to, že každý řidič se na vozovce chová tak, aby se cítil bezpečně a podle toho volí rozestupy tak, aby se vyvaroval srážce. Proto se nepřibližuje k následujícímu vozidlu příliš blízko, a právě tato pomyslná odpudivá síla řidiči brání se přiblížit příliš těsně k následujícímu vozidlu. Systémy, ve kterých působí pouze odpudivé síly, jež jsou ovlivňovány pouze následujícím (tedy sousedním) vozidlem, jsou však poměrně dobře prozkoumány. Nabízí se ale mnoho dalších méně probádaných problémů. Jsou to například systémy, kde síly a k nim příslušný potenciál nejsou jen krátkodosahové (tzn. interakce jen se sousedními vozidly) ale i střednědosahové. To ale není vše. Ukázalo se,

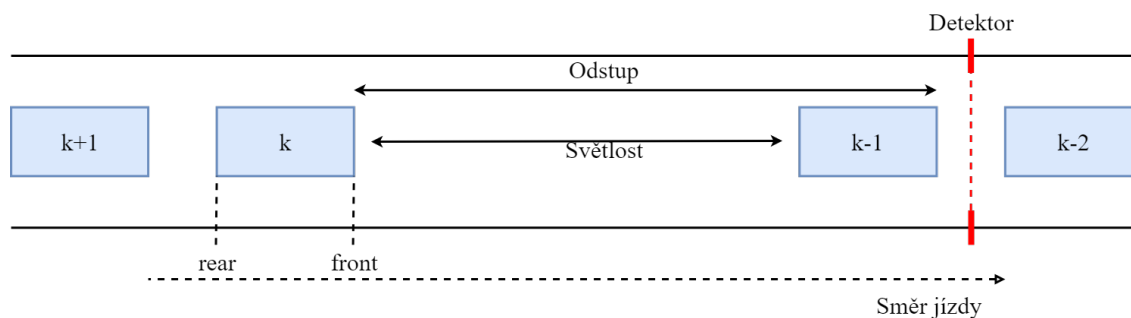
že pro popis určitých situací na vozovce představa síly s čistě odpudivým potenciálem nestačí. V těchto situacích, označovaných jako superpoissonovské stavy, silový potenciál nemá pouze jednu odpudivou složku, ale i složku přitažlivou. Jedná se o atraktivní sílu, která nutí řidiče dojíždět řidiče před sebou a v určitých chvílích překonává složku odpudivou. Popis těchto stavů je aktuálním problémem, jelikož první článek pojednávající o této problematice [8] vyšel až v počátku roku 2022.

## 1.2 Základní veličiny VHM

Každý člověk je jiný a tato skutečnost se samozřejmě propíše i do světa fyziky dopravy, a to alespoň do té doby, dokud budou vozidla řídit lidé. Každý člověk jiný a tedy i chování každého jedince na vozovce se liší. Tím se myslí například reakční čas, řidičská zdatnost, agresivita a mnoho dalších faktorů. Působením všech těchto vlastností je pak chování jednotlivého vozidla v dopravním toku z makroskopického hlediska náhodné, a tím pádem i rozestupy mezi vozidly jsou náhodné veličiny, které lze matematicky popsat za pomoci teorie pravděpodobnosti.

Dopravní tok lze popisovat z makroskopického a mikroskopického hlediska. Z toho makroskopického jsou určujícími veličinami například průměrná rychlost, intenzita nebo hustota provozu. Pokud se tyto veličiny budou měnit, bude to působit změny v dopravní mikrostruktuře, kterou popisují veličiny jako například okamžitá rychlost vozidla nebo rozestupy. Pro pořádek jen uved' me, že v práci se objevují pojmy jako rozestupy, světlosti či rozteče mezi vozidly, všechny tyto termíny mají stejný význam.

Mikroveličiny jsou ilustrovány na obrázku 1.1. Modré obdélníky značí čtyři vozidla v systému  $k$  vozidel a černé šipky značí prostorové veličiny - odstup (*headway*) a světlost (*clearance*). Červeně je zde vyznačena linie detektoru, který zaznamenává data o rozestupech mezi vozidly.



Obrázek 1.1: Znázornění odstupu a světlosti.

Pojmem prostorový resp. časový odstup se rozumí vzdálenost mezi stejnými prvky vozu (např. přední nárazníky) resp. časový rozdíl zaznamenaný detektorem mezi indikacemi stejných prvků po sobě jedoucích vozidel, typicky právě uvedené přední nárazníky.

Prostorovou nebo také časovou světlost bychom mohli zavést analogicky s jediným rozdílem. Liší se v tom, že v tomto případě se jedná o čistou vzdálenost resp. časový interval, který začíná detekcí zadního nárazníku vedoucího vozidla a končí detekcí předního nárazníku vozidla následujícího.

### 1.3 Model termodynamického dopravního plynu

Jak již název napovídá, model je odvozen od termodynamického plynu, který je zasazen do tematiky fyziky dopravy. V původním termodynamickém významu se jedná o teplotní lázeň o teplotě  $T$ , ve které se neuspořádaně pohybují částice. S rostoucí teplotou  $T$  se částice pohybují více, s klesající zase méně. Při nulové teplotě se částice nepohybují a uspořádanost systému se nemění, naopak pokud by teplota lázně rostla nade všechny meze, částice velmi výrazně se pohybují a míra neuspořádanosti systému je maximální. Spojkou mezi dopravním systémem a teplotní lázní je tzv. stochastická rezistivita  $\beta$ . Jedná se o veličinu vyjadřující odolnost vůči stochastickým vlivům a s teplotou  $T$  je propojena následujícím vztahem

$$\beta = \frac{1}{K_B \cdot T},$$

kde  $K_B$  je Boltzmannova konstanta. Tuto velmi důležitou veličinu si můžeme představit jako míru stresu řidiče. Při nulové hodnotě řidič může jet dle svých preferencí a nic ho neomezuje, to ve skutečnosti odpovídá situacím s velmi nízkou hodnotou hustoty provozu. Naopak pokud  $\beta$  roste, zvyšuje se i stres řidiče z důvodu dalších omezení na jeho pohyb. V pohybu už nemá plnou volnost a svoji jízdu musí více přizpůsobovat situaci a dalším vozům v jeho okolí. Rostoucí hodnota stochastické rezistivity  $\beta$  je spojená s rostoucí hustotou dopravního toku a jedná se tedy o veličinu přímo závislou na počtu vozidel na sledovaném úseku,  $\beta = \beta(\rho)$ , kde  $\rho$  je hustota provozu (typicky počet vozidel na jeden kilometr).

Na jednotlivé dopravní veličiny lze pohlížet jako na náhodné veličiny, které jsou popsány příslušnými hustotami pravděpodobnosti. Z toho důvodu lze sestavit model, který bude určité dopravní situace simulovat. V této práci je použit model termodynamického dopravního plynu, který lze pomocí volby rozdílných parametrů a potenciálů modifikovat tak, abychom pokryli různé situace dopravního toku. Snahou takového modelu je získat matematické předpovědi a statistické vlastnosti pro rozdělení uvedených mikroveličin dopravního proudu, resp. v této diplomové práci zejména rozdělení a rozptyl světlostí.

Nejjednodušším modelem dopravního toku je částicový plyn o  $N$  částicích, které se pohybují na jednodimenzionální křivce. Jednotlivé částice resp. vozidla se nemohou předjíždět, srazit nebo z této křivky vybočit. Lze si to představit jako jednosměrnou komunikaci bez vjezdů a výjezdů, avšak pro algoritmickou realizaci budeme tento pohyb uvažovat jako pohyb po kružnici. Počet částic na takové komunikaci je pevný, nemají možnost měnit pořadí a pro zajištění stálého počtu částic na sledovaném úseku délky  $L$  si zde zavedeme periodicitu okrajových podmínek následovně:

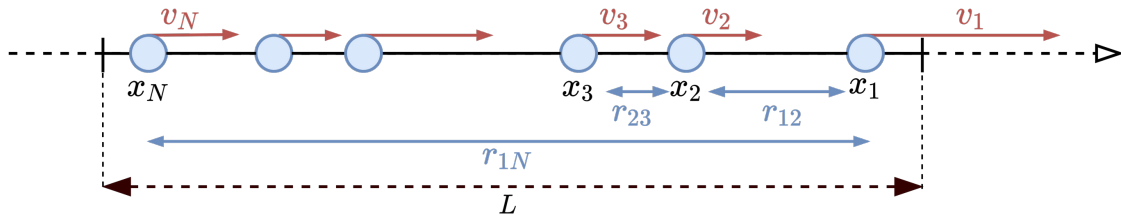
$$x_{k+N}(\tau) = x_k(\tau) + L, \quad v_{k+N}(\tau) = v_k(\tau), \quad k \in \{1, 2, \dots, N\},$$

kde  $x_k(\tau)$  značí lokaci  $k$ -té částice v čase  $\tau$  a  $v_k(\tau)$  značí okamžitou rychlost  $k$ -té částice v čase  $\tau$ .

Různé vzdálenosti mezi částicemi můžeme na obrázku 1.2 vidět označené jako  $r_{ik}$  a nazveme je roze-stupy. Uvedené indexy  $i, k$  představují  $i$ -tou a  $k$ -tou částici. Symbolem  $r_{ik}$  potom zavedeme vzdálenost mezi těmito částicemi a vypočteme ji jako

$$r_{ik} = |x_k - x_i|,$$

kde  $i, k \in \hat{N}$ . V této práci dále užíváme výraz roze-stupy pro vzdálenost či časový interval mezi sousedními částicemi, pokud nebude explicitně uvedeno jinak.



Obrázek 1.2: Částicový plyn na úsečce délky  $L$ .

## 1.4 Interakční síly a jejich specifikace

Ve výše uvedeném zavedení modelu bylo řečeno, že se částice nesmí předjíždět ani srazit. Přece jen se ale pohybují a k zajištění bezkolizního systému je zapotřebí zavést síly, které mezi částicemi působí. Za pomoci těchto interakčních sil lze simulovat běžné dopravní situace, kdy se řidič snaží brzděním zamezit srážce s vozidlem před ním. Tyto síly mají psycho-sociální původ, jedná se vlastně o instinktivní chování, které závisí také na zkušenostech řidiče a současném stavu dopravního toku. Tato síla se zvětšuje se zmenšujícím se rozstupem mezi sousedními vozidly a v limitním případě rozstupu blížícího se k nule roste nade všechny meze. Naopak s rostoucí vzdáleností se tato síla zmenšuje a slábne. V limitním případě se zvyšující se vzdáleností nade všechny meze je síla nulová. Abychom toto shrnuli, síla  $F(r)$  je interakční síla působící v částicovém systému, na kterou je kladen požadavek bezkoliznosti

$\lim_{r \rightarrow 0^+} F(r) = +\infty$  a požadavek vymizení interakce pro velké vzdálenosti  $\lim_{r \rightarrow +\infty} F(r) = 0$ , kde  $r$  je vzdálenost mezi vozidly.

Těmto požadavkům vyhovuje třída hyperbolických funkcí

$$F(r) = \frac{1}{r^\gamma},$$

kde  $\gamma \in (0, +\infty)$ . Otázkou však je, jakou hodnotu by parametr  $\gamma$  měl nabývat a v jakých situacích. K silovému popisu a každé síle také náleží odpovídající silový potenciál  $\varphi(r)$ , který je v jednodimenzionálních prostorech zaveden následovně:

$$F(r) = \frac{d\varphi}{dr} \Leftrightarrow \varphi(r) = - \int_0^r F(s) ds + C.$$

Potenciály se dále dělí dle dosahovosti interakčních sil, jelikož řidič nemusí nutně interagovat pouze s nejbližšími vozidly, ale jeho rozhodování na vozovce ovlivňují i další vzdálenější vozidla. Označíme si symbolem  $I_k$  množinu indexů částic (řidičů), se kterými  $k$ -tý řidič interaguje. Uvedeme zde pouze dva typy potenciálů dle dosahu v systému o  $N$  částicích.

- *Krátkodosahový potenciál*  
 $I_k = \{k - 1, k + 1\}$  a  $k$ -tá částice interaguje jen s předchozí a následující částicí.
- *Střednědosahový potenciál*  
 $I_k = \{k - m, k + m : m \in \hat{s}\}$ , kde  $s$  je přirozené číslo určující délku dosahu a platí  $1 < s \ll N$ .  $k$ -tá částice interaguje s nejbližšími sousedy až po  $k - s$ -tou resp.  $k + s$ -tou částicí včetně.

Většina práce se věnuje krátkodosahovým potenciálům, avšak v poslední kapitole je testována i verze střednědosahová. V tabulce 1.1 je přehled potenciálů rozdělených dle hodnoty parametru  $\gamma \in (0, +\infty)$ .

Název potenciálu	$\gamma$	$\varphi(r)$
mocninný potenciál	$(0, 1)$	$\frac{1}{\gamma-1} r^{1-\gamma}$
logaritmický potenciál	1	$-\ln(r)$
subhyperbolický potenciál	$(1, 2)$	$\frac{1}{\gamma-1} \left(\frac{1}{r}\right)^{\gamma-1}$
(vyvážený) hyperbolický potenciál	2	$\frac{1}{r}$
superhyperbolický potenciál	$> 2$	$\frac{1}{\gamma-1} \left(\frac{1}{r}\right)^{\gamma-1}$

Tabulka 1.1: Přehled potenciálů v závislosti na parametru  $\gamma$ .

V této práci jsou použity dva potenciály a jejich kombinace. Tyto dva potenciály mají hodnotu  $\gamma$  rovnu jedné a dvěma, tudíž se jedná o potenciál logaritmický a hyperbolický, tedy

- Logaritmický:  $\varphi(r) = -\ln(r)$ .
- Hyperbolický:  $\varphi(r) = \frac{1}{r}$ .
- Kombinovaný:  $\varphi(r) = \kappa \cdot \ln(r) + \frac{1}{r}$ .

Na obrázku 1.3 můžeme vidět průběh sil příslušících k prvním dvěma potenciálům.

Dále je nutné k potenciálům zmínit směr interakce. Doposud jsme na potenciál kladli pouze požadavky na to, že potenciál musí být při velmi blízkých interakcích částic velice odpudivý. Ve většině dopravních situacích tomu tak skutečně je a potenciál působí čistě repulzivně, což i první dva potenciály - hyperbolický a logaritmický splňují. Jsou to monotónní funkce s limitou v nule rovnou nekonečnu a limitu v nekonečnu mají nulovou. Monotónnost však už nemusí platit pro třetí jmenovaný potenciál, a to potenciál kombinovaný. Blíže se proto kombinovanému potenciálu věnuje nadcházející sekce.

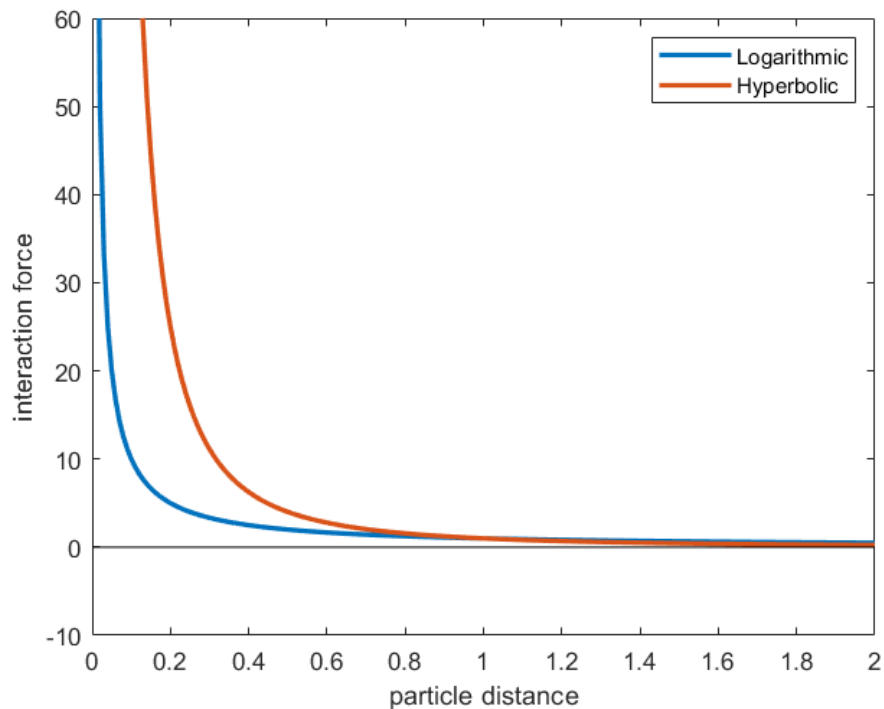
## Kombinovaný potenciál

Kombinovaný potenciál je tvaru

$$\varphi(r) = \kappa \cdot \ln(r) + \frac{1}{r}, \quad (1.1)$$

kde  $\kappa$  je tzv. silový koeficient vyjadřující poměr mezi přitažlivou složkou  $\ln(r)$  a odpudivou složkou  $\frac{1}{r}$ . Ukázalo se, že pro popis určitých situací už čistě odpudivý potenciál nestačí a právě tyto situace velmi dobře simuluje potenciál s přitažlivou složkou. Taková funkce sice již není monotónní, ale požadavky bezkoliznosti a vymizení interakce pro velké vzdálenosti splňuje. Na obrázku 1.4 můžeme vidět průběh funkce interakční síly příslušící kombinovanému potenciálu. Příslušná síla je pouze záporná derivace potenciálu, tedy

$$F(r) = -\frac{\kappa}{r} + \frac{1}{r^2}.$$



Obrázek 1.3: Průběh funkcí interakční síly pro hyperbolický a logaritmický potenciál.

Můžeme vidět, že tato síla zabrání srážce, tedy

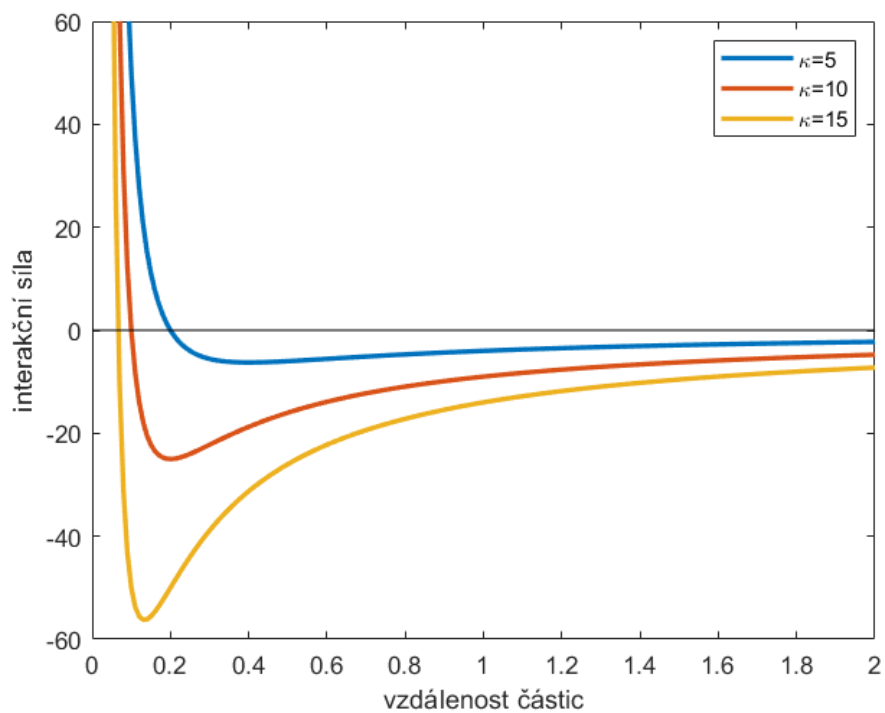
$$\lim_{r \rightarrow 0^+} F(r) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \left( -\frac{\kappa}{r} + \frac{1}{r^2} \right) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{-\kappa r + 1}{r^2} = +\infty,$$

a zároveň pro velké vzdálenosti interakce rychle vymizí, což je patrné z toho, že

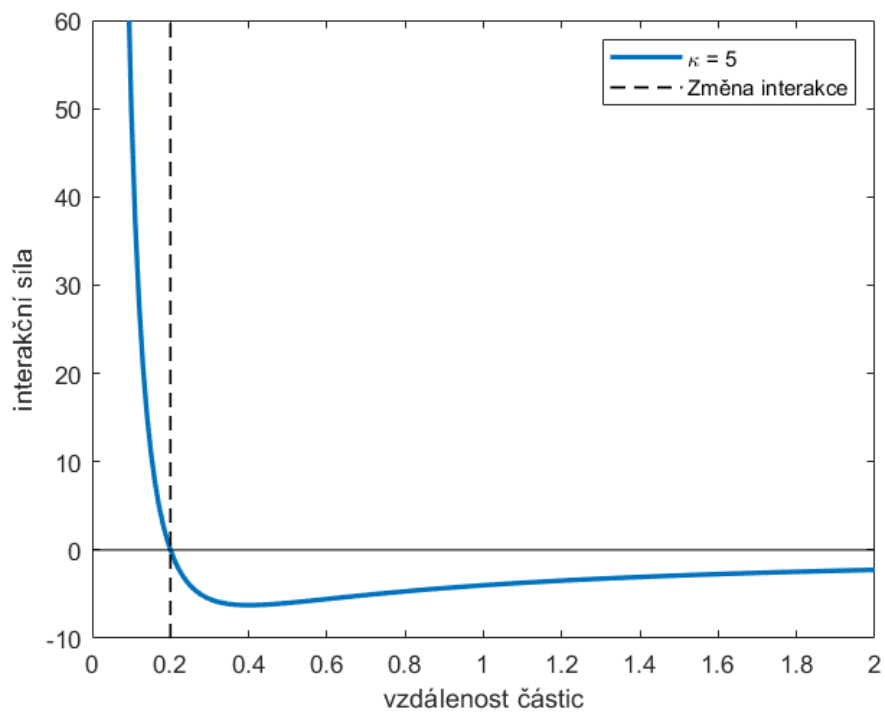
$$\lim_{r \rightarrow +\infty} F(r) = \lim_{r \rightarrow +\infty} -\frac{\kappa}{r} + \frac{1}{r^2} = 0.$$

Z důvodu lepší viditelnosti průběhu jsou zvolené hodnoty parametru  $\kappa$  velmi vysoké. Díky tomu si může čtenář udělat lepší představu o tom, jak průběh takové funkce vypadá.

Pokud se podíváme na obrázek 1.5, můžeme vidět průběh síly a přerušovanou čáru značící změnu trendu interakce. Vlevo od přerušované čáry síla vykazuje relativně vysoké kladné hodnoty, což značí silnou repulzi. Jedná se o oblast velmi malých rozestupů. Naopak vpravo od přerušované čáry funkce klesne pod nulu a síla je v tomto intervalu přitažlivá. V porovnání s odpudivou částí je tato síla mnohem slabší, avšak důležitá je samotná existence přitažlivosti. Tato část je vysvětlením pro donedávna nepopsané stavy dopravního proudění, ke kterým se blíže dostaneme v sekci 2.4.



Obrázek 1.4: Průběh funkce interakční síly pro různé hodnoty silového koeficientu.



Obrázek 1.5: Průběh funkce interakční síly pro  $\kappa = 5$ .

## 1.5 Celková energie částicového systému

Obecně částicové systémy mají v závislosti na volbě potenciálu  $\varphi$  potenciální a kinetickou energii. Potenciální energie je definována jako součet hodnot potenciálů všech částic systému a označujeme ji písmenem  $U$ , tedy

$$U = \sum_{k=1}^N \sum_{i \in I_k} \varphi_{ki}(r_{ik}),$$

kde  $N$  je celkový počet částic,  $r_{ik}$  rozteč mezi  $i$ -tou a  $k$ -tou částicí a  $I_k$  je indexová množina určená dosahovostí zvoleného potenciálu (viz str. 12). Zápis potenciální energie se také často používá ve zkráceném zápisu  $U = \sum_{k=1}^N \varphi_k$ . Kinetická energie je zavedena předpisem

$$T = \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{2} (v_k - w_k)^2,$$

kde  $m_k$  značí hmotnost a  $v_k$  rychlost  $k$ -té částice. Symbolem  $w_k$  značíme optimální rychlost  $k$ -té částice. Pokud se všechny částice pohybují svou optimální rychlostí, celý systém je v klidovém - stacionárním stavu. V takovém stavu je celková energie  $H = T + U$  konstantní. V našem případě nám pro určení stacionárního stavu bude stačit pouze aproximace předchozího tvrzení, a to ta, že systém se nachází ve stacionárním stavu, pokud je potenciální energie téměř konstantní a její hodnota tedy fluktuuje kolem jedné stálé hodnoty. Pro zkoumání statistických vlastností rozdělení světlostí i pro algoritmické simulace dopravního toku je přítomnost stacionarity systému nezbytná, jelikož informace o distribuci světlostí se ze systému sbírá, pouze pokud se v tomto stavu právě nachází. Uklidňující je však fakt, že částicový systém do stacionárního stavu vždy směřuje.

## 1.6 Stochastický popis

Popis částicových systémů se provádí na pravděpodobnostní úrovni. Celý systém je tedy popsán v čase  $\tau$  pomocí sdružené hustoty pravděpodobnosti

$$P(\vec{v}, \vec{r}) = P(v_1(\tau), v_2(\tau), \dots, v_N(\tau), r_1(\tau), r_2(\tau), \dots, r_N(\tau)),$$

díky které může být definován stacionární stav jako derivace podle času

$$\frac{\partial P(\vec{v}, \vec{r})}{\partial \tau} = 0.$$

Z teorie statistické fyziky je pak tvar této sdružené hustoty pravděpodobnosti následující

$$P(\vec{v}, \vec{r}) = \frac{1}{Z_N} e^{-\frac{H(\vec{v}, \vec{r})}{k_B T}}, \quad (1.2)$$

kde normalizační konstanta  $Z_N$  nebo také partiční suma je vypočtena standardně za podmínky

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} P(\vec{v}, \vec{r}) d(\vec{v}, \vec{r}) = 1$$



a  $H$  je příslušný hamiltonián. My však budeme uvažovat pouze krátkodosahové homogenní systémy na úsečce, resp. kružnici, tedy systémy, kde částice interaguje pouze se svými nejbližšími sousedy. Zároveň jsou v systému všechny potenciály totožné a hmotnost všech částic je stejná. Sdružená hustota pravděpodobnosti (1.2) potom přejde do tvaru, který všechny naše požadavky na systém zohledňuje

$$P(\vec{v}, \vec{r}) = \frac{1}{Z_N(L)} e^{-\beta T} e^{-\beta U} \delta\left(L - \sum_{k=1}^N r_k\right) \theta(\vec{r}), \quad (1.3)$$

kde  $L$  je délka úsečky,  $T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (v_k - w_k)^2$ ,  $U = \sum_{k=1}^N \varphi(r_k)$ ,  $\delta(\cdot)$  je Diracova funkce a  $\theta(\cdot)$  je Heavisideova funkce. Parametr  $\beta$  je nezáporné číslo odpovídající stochastické rezistivitě. Takový tvar funkce zahrnuje krátkodosahovost, homogenitu, kladné rozteče a splnění okrajových podmínek. Již bylo předesíláno, že středem pozornosti této práce je statistický popis rozestupů, proto funkci (1.3) vyintegrujeme přes všechny rychlosti a dostaneme rozdělení pravděpodobnosti rozestupů

$$P(\vec{r}) = \frac{1}{Z_N(L)} e^{-\beta U} \delta\left(L - \sum_{k=1}^N r_k\right) \theta(\vec{r}).$$

Nejzásadnější rovnost nás však ještě čeká. V případě že budeme chtít znát rozdělení pouze sousední rozteče, potom je zapotřebí znát marginální hustotu z hustoty sdružené  $P(\vec{r})$  pouze pro jediné  $r$ , např.  $r_1$ . Tudiž vyintegrováním všech ostatních  $r_2, \dots, r_N$  získáme hustotu pravděpodobnosti  $g(r_1)$ , pro kterou je v teorii termodynamického dopravního plynu odvozen obecně platný vztah

$$g(r) = \theta(r) \frac{Z_{N-1}(L-r)}{Z_N(L)} e^{-\beta\varphi(r)}, \quad (1.4)$$

kde člen  $Z_{N-1}(L-r)$  odpovídá partiční sumě systému  $N-1$  částic na úseku délky  $L-r$ . V případě, že by čtenář měl zájem o detailnější postup pro odvození obecné formule pro distribuce světlostí, může nahlédnout do skript [7].

## Kapitola 2

# Balanční částicové systémy

### 2.1 Třída balancovaných hustot

Než se přesuneme k jednotlivým definicím a k samotné definici této třídy, můžeme nahlédnout do tabulky 2.1, kde vidíme přehled často používaných symbolů.

symbol	název
$\mathcal{L}(\mathbb{R})$	třída integrabilních funkcí na $\mathbb{R}$
$\text{PC}(\mathbb{R})$	třída po částech spojitých funkcí na $\mathbb{R}$
$\mathcal{B}$	třída balancovaných hustot
$\theta(x)$	Heavisideova funkce
$\mathcal{L}[f(x)]$	Laplaceův obraz funkce $f(x)$
★	operace konvoluce

Tabulka 2.1: Přehled používaných symbolů.

Náhodné veličiny, jako jsou odstupy či světlosti, jsou popsány odpovídajícími hustotami pravděpodobnosti nebo distribucemi. Rozdělení těchto veličin nejlépe popisují funkce ze třídy balancovaných hustot. Funkce náležící do této třídy  $h(x) \in \mathcal{B}$  jsou funkce  $h(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  splňující následující podmínky:

1.  $\text{Ran}(h) \subset \mathbb{R}_0^+$
2.  $h(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$
3.  $\text{Dom}(h) = \mathbb{R}$
4.  $h(x) \in \text{PC}(\mathbb{R})$
5.  $\text{supp}(h) \subset \langle 0, +\infty \rangle$
6. balanční axiom:  $\exists \kappa \in \mathbb{R}^+$   
 $\alpha > \kappa \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)e^{\alpha x} = +\infty,$   
 $\alpha < \kappa \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)e^{\alpha x} = 0.$

Jelikož budeme při dalších výpočtech využívat vlastnosti této třídy, některé si zde uvedeme. Pokud máme nějakou funkci  $h(x) \in \mathcal{B}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$  a platí  $x^n h(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ . Pak číslo

$$\mu_n(h) = \int_{\mathbb{R}} x^n h(x) dx$$

nazveme  $n$ -tým momentem  $h(x)$ . Momenty takových hustot lze provázat elegantním vztahem s Laplaceovými obrazy těchto hustot a jejich derivacemi. Laplaceův obraz funkce  $h(x) \in \mathcal{B}$  označíme symbolem  $H(s)$  a definujeme jako

$$H(s) = \mathcal{L}[h(x)] = \int_{\mathbb{R}} h(x)e^{-sx} dx.$$

Vztah mezi Laplaceovým obrazem a momenty funkcí je následující

$$H(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H^{(k)}(0)}{k!} s^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \mu_k(h)}{k!} s^k.$$

Z tohoto vztahu plyne rovnost

$$H^{(k)}(0) = (-1)^k \mu_k(h). \quad (2.1)$$

Můžeme tedy  $k$ -tou derivaci funkce  $H(s)$  v bodě  $s = 0$  vyjádřit pomocí momentů funkce  $h(x)$ .

Mezi nejvýznamnější zástupce třídy balancovaných hustot řadíme exponenciální, gamma nebo GIG rozdělení. Tyto zástupce si o něco níže s krátkým popisem uvedeme.

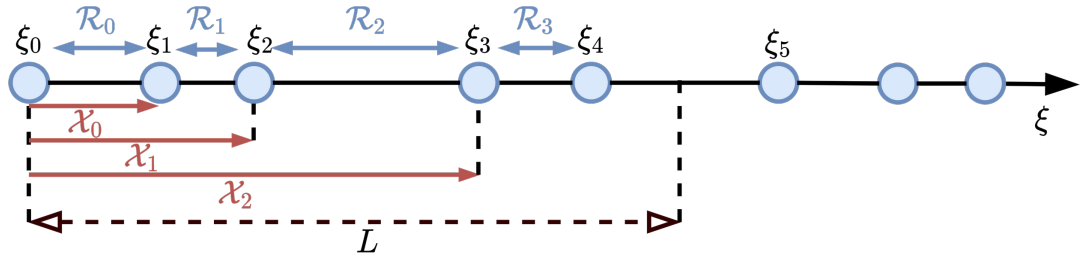
## 2.2 Balanční částicový systém - BČS

Dříve než definujeme balanční částicový systém, uvedeme si zde základní tři veličiny částicového systému. Budeme uvažovat jednodimenzionální částicový systém s pevně umístěnou částicí v počátku, kterou budeme nazývat referenční. Na obrázku 2.1 polohu referenční částice značíme  $\xi_0$ . Jednotlivé polohy částic budeme značit  $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ , ale pracovat budeme spíše se vzdálenostmi mezi částicemi. Mezi tři základní veličiny částicových systémů patří:

1. *Rozteče sousedních částic*, které definujeme jako posloupnost náhodných veličin  $(\mathcal{R}_k)_{k=0}^{+\infty}$ , které jsou
  - absolutně spojitě,
  - nezáporné.
2. *Multirozteče*, což jsou vzdálenosti dané částice od částice referenční. Tedy  $\mathcal{X}_k$  je vzdálenost  $(k+1)$ . částice od referenční částice.  $k$ -tou multirozteč definujeme vztahem

$$\mathcal{X}_k = \sum_{i=0}^k \mathcal{R}_i.$$

3. *Intervalová frekvence*  $N_L$ , jež určuje počet částic vyskytujících se v intervalu  $(0, L)$  za referenční částicí.  $N_L$  je diskrétní náhodná veličina parametrizovaná hodnotou  $L$ , popsána pravděpodobností  $\mathcal{P}[N_L = k]$ , tedy pravděpodobností výskytu  $k$  částic v intervalu  $(0, L)$ .



Obrázek 2.1: Veličiny částicového systému.

Balančním částicovým systémem rozumíme posloupnost multiroztečí  $(X_k)_{k=0}^{+\infty}$  zavedených předpisem  $X_k = \sum_{n=0}^k R_n$  splňující axiomy:

1. *Axiom nezávislosti*: Posloupnost  $(R_n)_{n=0}^{+\infty}$  je posloupností nezáporných, absolutně spojitých, stejně rozdělených a nezávislých náhodných veličin.
2. *Axiom balancovaného generátoru*: Hustota pravděpodobnosti  $h(x)$  veličiny  $R_0$  (tzv. generátor balancovního částicového systému) patří do třídy  $\mathcal{B}$  balancovaných hustot, tj.  $h(x) \in \mathcal{B}$ .

Takový systém nazveme škálovaným balančním částicovým systémem, splňuje-li navíc generátor vlastnost  $h(x) \in \mathcal{B}_{11}$ , tj. střední hodnoty všech roztečí jsou rovny jedné,  $E(R_0) = E(R_1) = E(R_2) = \dots = 1$ .

Balanční částicový systém, jehož rozteče jsou nezávislé a stejně rozdělené, je plně zadán generátorem  $h(x)$ , kde  $R_0, R_1, R_2, \dots \sim h(x)$ . Pro výše uvedené veličiny platí následující vztahy:

- $X_k = \sum_{m=0}^k R_m \sim \star_{m=0}^k h(x)$ .
- $\mathbb{P}[N_L = k] = H_{k-1}(L) - H_k(L)$ ,  
kde  $H_k(x)$  jsou distribuční funkce příslušné multiroztečím  $X_k \sim H_k(x)$  a případ, kdy  $k = 0$ , zdefiniujeme jako  $H_{-1}(L) \equiv 1$ . Vzhledem k zavedení částicového systému pro ně platí, že

$$H_k(x) = \int_{-\infty}^x g_k(y) dy, \quad g_k(x) = \star_{m=0}^k h(x).$$

Díky těmto vztahům je možné definovat částicový systém podle jeho generátoru  $h(x)$  a zaměřovat jednotlivé popisy.

## 2.3 Charakteristiky částicového systému

V této sekci si uvedeme statistické charakteristiky částicového systému, nejprve prvního řádu. Tzv. shluková funkce nultého druhu částicového systému je definována standardně jako

$$r(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x)$$

a shluková funkce prvního druhu

$$s(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} k g_k(x),$$

kde  $g_k(x)$  je hustota pravděpodobnosti  $k$ -té rozteče. Střední hodnotu intervalové frekvence v libovolném částicovém systému definujeme jako

$$E(N_L) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \mathbb{P}[N_L = k].$$

Pro tuto charakteristiku platí:

$$E(N_L) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \mathbb{P}[N_L = k] = \sum_{k=1}^{+\infty} k \left[ \int_0^L g_{k-1}(x) dx - \int_0^L g_k(x) dx \right],$$

jelikož je shluková funkce  $r(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x)$  omezená na každém intervalu  $\langle 0, L \rangle$  a řada  $\sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x)$  na něm stejnoměrně konverguje, můžeme zaměnit sumu a integrál, a tedy dostáváme rovnost

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k \left[ \int_0^L g_{k-1}(x) dx - \int_0^L g_k(x) dx \right] = \int_0^L \sum_{k=1}^{+\infty} k [g_{k-1}(x) - g_k(x)] dx.$$

Po rozepsání sumy se jednotlivé členy  $g_k(x)$  odečtou a dostaneme

$$\int_0^L \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \sum_{k=0}^n g_k(x) - n g_n(x) \right] dx = \int_0^L \left[ \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x) - \lim_{n \rightarrow +\infty} n g_n(x) \right] dx,$$

kde limita  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n g_n(x)$  je rovna nule kvůli nutné podmínce pro konvergenci řady  $\sum_{k=0}^{+\infty} k g_k(x)$ . Finální tvar je tedy

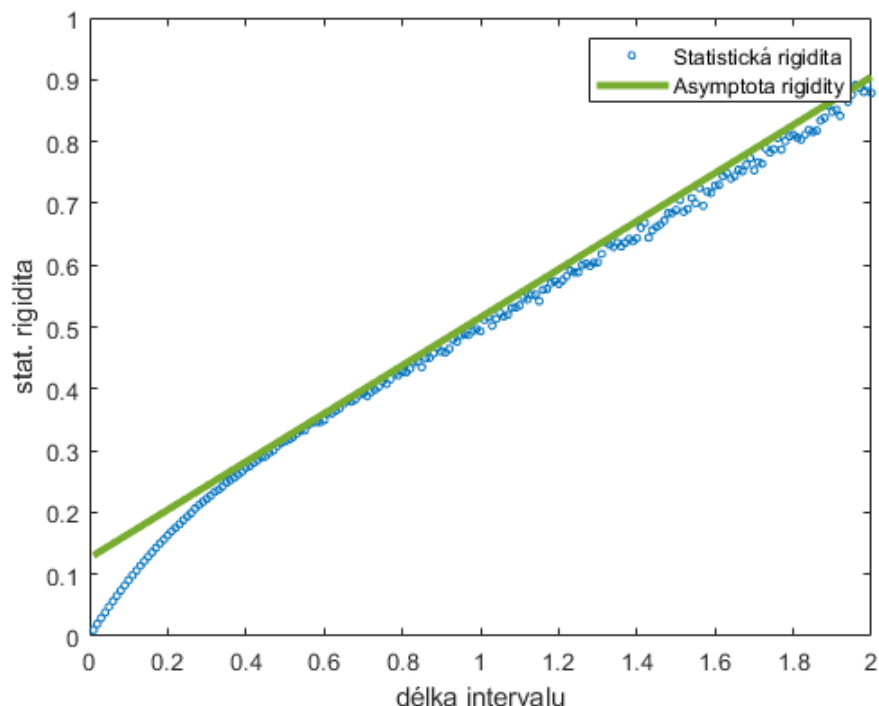
$$E(N_L) = \int_0^L \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x) dx = \int_0^L r(x) dx := \lambda(L). \quad (2.2)$$

Střední hodnotu intervalové frekvence na intervalu délky  $L$  označíme symbolem  $\lambda(L)$  a budeme ji nazývat *trendovou funkcí*. Z uvedených vztahů je zřejmé, že střední hodnota intervalové frekvence neboli trendové funkce závisí pouze na volbě generátoru částicového systému  $h(x)$ . Další charakteristikou prvního řádu je střední hodnota multiroztečí.

Mezi charakteristiky druhého řádu zařadíme rozptyly roztečí, multiroztečí, druhý moment intervalové frekvence a statistickou rigiditu. Poslední z uvedených charakteristik nás v tuto chvíli bude zajímat nejvíce. Jedná se o statistickou rigiditu někdy také označovanou jako stochastickou, pomocí níž lze klasifikovat náhodné stavy v částicových systémech. Značíme ji symbolem  $\Delta(L)$  a definujeme vztahem

$$\Delta(L) = E(N_L - L)^2.$$

V krátkodosahovém balančním částicovém systému je statistická rigidita úzce spjata s rozptylem roztečí sousedních částic skrze asymptotu, ke které se upíná (viz ilustrační obrázek 2.2), kde jednotlivé parametry přímky lze vypočítat analyticky.



Obrázek 2.2: Ilustrační obrázek rigidity a její asymptoty.

Statistická rigidita se upíná k výrazné lineární asymptotě a její směrnici a intercept lze v krátkodosahových systémech spočítat bez potřeby znalosti explicitní podoby funkce  $\Delta(L)$ . Aproximace této funkce je tedy přímka  $\Delta(L) \approx \chi L + \delta$ . Parametry takové asymptoty jsou zásadní pro klasifikaci částicového systému a míry náhodnosti chování systému. Pojmem *kompresibilita* budeme dále rozumět směrnici asymptoty statistické rigidity a budeme ji značit symbolem  $\chi$ . *Deflekcí* rozumíme zmíněný intercept a označíme ho symbolem  $\delta$ . V krátkodosahových systémech odpovídá kompresibilita  $\chi$  rozptylu škálovaných roztečí

$$\chi = \text{Var}(\mathcal{R}) = \mu_2 - 1 \quad (2.3)$$

a deflekcí lze dopočítat pomocí následující rovnice

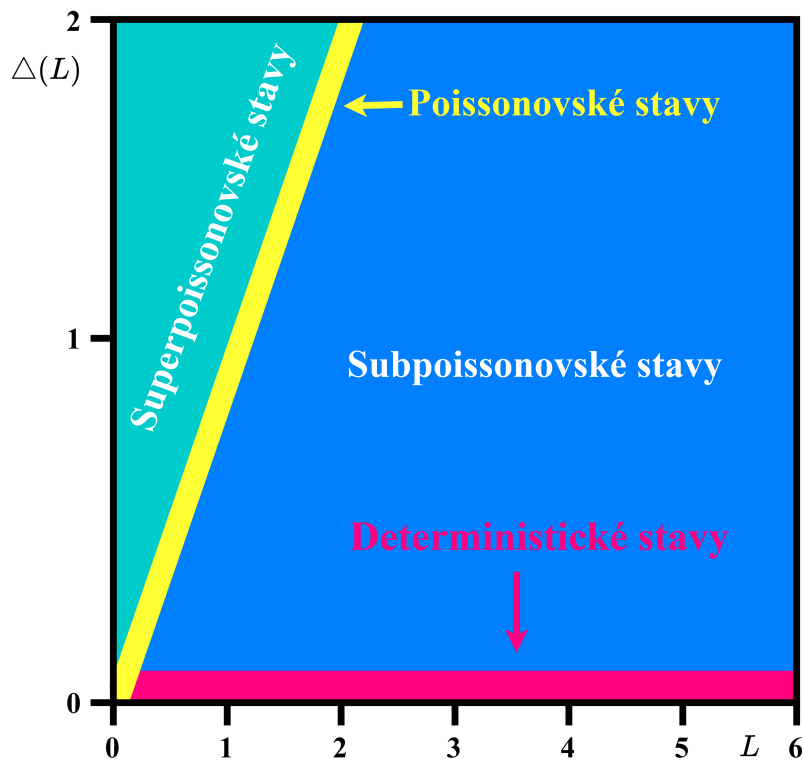
$$\delta = \frac{1}{6}(9\mu_2^2 - 9\mu_2 - 4\mu_3 + 6), \quad (2.4)$$

kde  $\mu_k = \mu_k(h)$  jsou momenty generátoru BČS. Odvození směrnice a interceptu pochází z práce [11], pokud by čtenáře zajímalo detailní odvození těchto dvou výše zmíněných rovností, může nahlédnout do příloh (viz příloha A).

## 2.4 Klasifikace částicových systémů

BČS lze na základě statistické rigidity klasifikovat do čtyř stavů:

- Deterministický stav



Obrázek 2.3: Klasifikace stavů BČS na základě statistické rigidity.

- Subpoissonovský stav
- Poissonovský stav
- Superpoissonovský stav

Na obrázku 2.3 můžeme vidět rozdělení jednotlivých systémů. Opět uvedeme poznámku pro pořádek z důvodu, že v textu tyto pojmy občas zaměňuji, např. částicový systém se nachází v subpoissonovském stavu je ekvivalentní tvrzení, že se jedná o subpoissonovský systém.

Červeně je označen stav, kdy je rigidita a tím pádem i kompresibilita nulová a stochastická rezistivita  $\beta$  roste nade všechny meze. Systém je maximálně uspořádaný, jednotlivé částice nemají žádnou volnost vlastního pohybu a jsou rozloženy ekvidistantně. Tento stav je spíše teoretický, protože by vylučoval jakékoliv stochastické vlivy, které jsou v realitě vždy přítomné. Tento systém označujeme také jako Diracův BČS.

Modrá plocha značí hodnoty stochastické rigidity, které odpovídají stavu subpoissonovskému, který zahrnuje většinu dopravních situací. Jedná se o situaci, kdy jednotliví účastníci provozu či částice jsou sice omezováni ostatními účastníky, avšak stále mají určitou volnost v rozhodování o svém pohybu. V takovém případě kompresibilita leží v intervalu (0, 1).

Žlutě je vyznačená část stavů poissonovských. V tomto stavu je stochastická odolnost nulová a kompresibilita rovna jedné. Jednotlivé částice na sebe vůbec nereagují, mají absolutní volnost v rozhodování a rozestupy mezi nimi jsou proto velmi rozptýlené. V empirických dopravních souborech lze tuto situaci nalézt při velmi nízké hustotě provozu (do 5 vozidel na kilometr dálnice). Protože řidiči v takto řídkém

provozu nejsou téměř vůbec ovlivňováni sousedními řidiči, mají maximální volnost v rozhodování, a ta připoustí nejvyšší úroveň stochastického šumu v systému.

Jako poslední jsou superpoissonovské stavy označené zeleně. Řekneme, že balanční částicový systém je superpoissonovský, pokud je zjištěná kompresibilita větší než jedna. To by v krátkodosahovém systému znamenalo, že v takovém případě jsou realizace náhodné veličiny světlostí ještě více rozptýleny, než ve stavech poissonovských, kde o sobě jednotlivé částice v podstatě nevědí. Tyto stavy jsou však detekovány při vyšší hustotě provozu (přibližně do 40 vozidel na kilometr), a tím pádem mezi řidiči (resp. částicemi) nějaké odpudivé síly působit musí. Vysvětlením je právě volba potenciálu a objevení přitažlivé složky síly. Pokud by v systému působily striktně odpudivé síly, pak takový stav nemůže nikdy nastat. Je-li v systému částic zjištěna kompresibilita větší než jedna, pak lze logicky předpokládat, že mezi prvky v tomto systému působí také přitažlivé síly. Tato přitažlivá síla má podobně jako běžnější odpudivá síla psychosociální původ. V automobilové dopravě se superpoissonovské podmínky vyskytují například při nižší hustotě provozu v rychlém pruhu dálnice. Řidiči nacházející se v rychlejším dálničním pruhu mají tendenci dohnat vozidlo jedoucí před nimi a tato tendence je příčinou přitažlivého silového impulsu. Dalším důvodem pro zvýšení kompresibility nad teoretickou mez poissonovského systému je skutečnost, že při nižších hustotách dopravního proudu je možné předjíždění a střídání pruhů. To způsobuje superpoissonovské chování dopravního proudu (viz [8]).

## 2.5 Zástupci třídy $\mathcal{B}$

Abychom spojili dosavadní informace o stavech BČS a jejich klasifikaci, uvedu zástupce třídy balancovaných hustot až na tomto místě.

### Exponenciální rozdělení

Exponenciální rozdělení bylo použito pro obor VHM jako jedno z prvních. V té době pro popis dopravního proudu postačovalo, jelikož doprava nebyla příliš hustá. Obecný předpis takového rozdělení je následující

$$g_E(x) = \theta(x)Ae^{-\lambda x},$$

kde  $A$  a  $\lambda$  jsou kladné konstanty. Po škálování, tedy položení nultého a prvního momentu rovno jedné, dostáváme exponenciálu  $g_E(x) = \theta(x)e^{-x}$  viz obr. 2.4.

Pro rozptyl náhodné veličiny  $X$  se škálovaným exponenciálním rozdělením platí

$$\text{Var}(X) = \mu_2(g_E) - \mu_1^2(g_E) = 2 - 1.$$

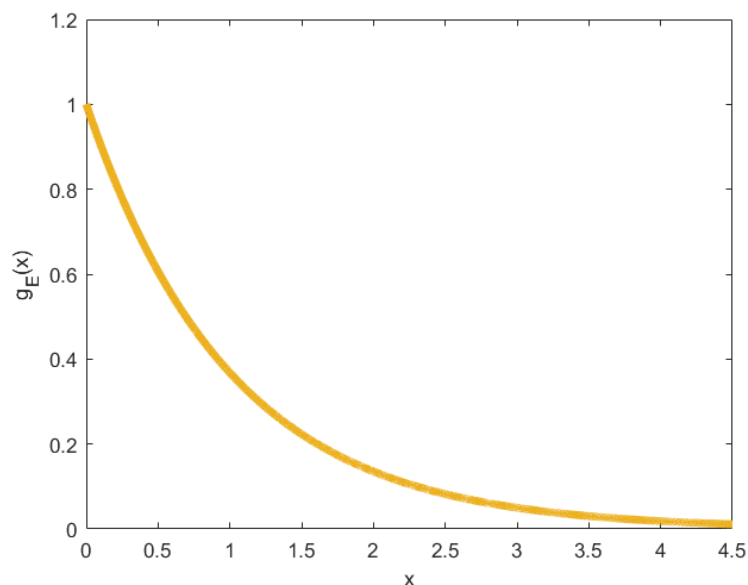
Rozptyl je tedy roven jedné a v krátkodosahových systémech odpovídá poissonovským stavům.

### Gamma rozdělení

Obecný tvar tohoto rozdělení je

$$g_\Gamma(x) = \theta(x)Ax^{\alpha-1}e^{-\lambda x},$$





Obrázek 2.4: Tvar škálovaného exponenciálního rozdělení.

kde  $A$ ,  $\alpha$  a  $\lambda$  jsou kladné konstanty. Po škálování přechází tato funkce do tvaru

$$g_{\Gamma}(x) = \theta(x) \frac{\lambda^{\lambda}}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\lambda x}, \quad (2.5)$$

$$\text{kde } \Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx.$$

Toto rozdělení bylo poprvé použito pro účely VHM v šedesátých letech, bylo už poměrně přesné i pro hustší dopravu, avšak jeho slabina je popis pro malé vzdálenosti. V této části zaostává oproti reálným situacím, kdy je malých rozestupů jen velmi málo. Opět spočteme rozptyl náhodné veličiny  $X$  se škálovaným rozdělením a dostaneme

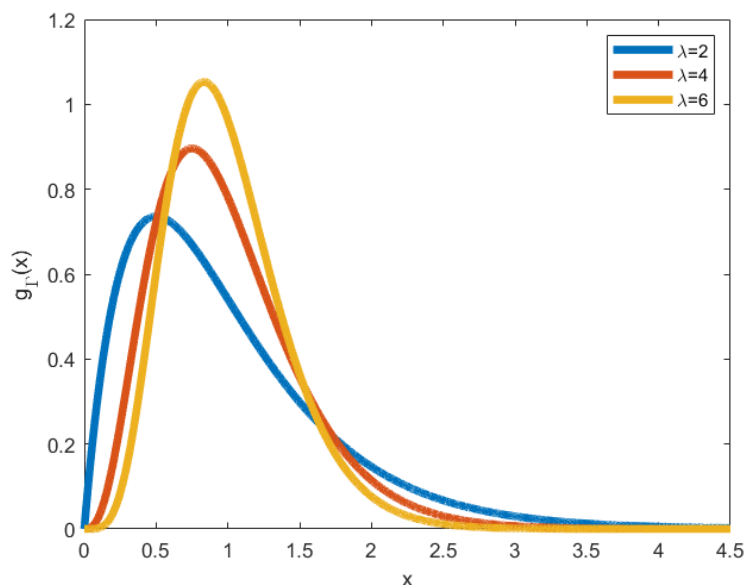
$$\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda},$$

přičemž  $\lambda$  je větší nebo rovna jedné, a to kvůli spojitosti funkce (2.5). Tím pádem se rozptyl nachází v intervalu  $0 < \text{Var}(X) \leq 1$ . To v krátkodosahových systémech, kde platí rovnost rozptylu roztečí a kompresibility, zahrnuje převážně subpoissonovské stavy.

### Generalized Inversed Gaussian - GIG

Poslední uvedené rozdělení GIG je pro statistické odhadování odstupů vozidel nejzajímavější. Hlavní odlišností této hustoty od ostatních zástupců je existence platů v nule, kterou vykazují i empirická data. Jedná se vlastně o lepší popis v oblasti malých vzdáleností, který u předchozího rozdělení zaostává. Rozdělení  $g(x)$  splňuje tento trend malých vzdáleností, tedy  $g(x)$  má plát v nule, pokud

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0) : \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{x^n} = 0.$$



Obrázek 2.5: Tvar škálovaného gamma rozdělení pro různé hodnoty parametru  $\lambda$ .

I díky této vlastnosti GIG nejpřesněji popisuje rozdělení odstupů vozidel v dopravním proudu. Obecný GIG je tvaru

$$g_{GIG} = A\theta(x)x^\alpha e^{-\frac{\beta}{x}} e^{-\lambda x},$$

kde parametry  $A$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$  jsou kladné a parametr  $\alpha$  leží v  $\mathbb{R}$ . Škálování u tohoto rozdělení je o něco komplexnější problém, proto uvedeme rovnou škálovaný tvar tohoto rozdělení:

$$g_{GIG}(x) = \Theta(x) \left( \sqrt{\frac{\lambda}{\beta}} \right)^{\alpha+1} \frac{x^\alpha}{2K_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} e^{-\frac{\beta}{x}} e^{-\lambda x},$$

kde  $\lambda > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\alpha$  je reálné číslo a  $K_{\alpha+1}$  je Macdonaldova funkce řádu  $\alpha + 1$ . Besselova modifikovaná funkce druhého druhu označována také jako Macdonaldova funkce je definována předpisem

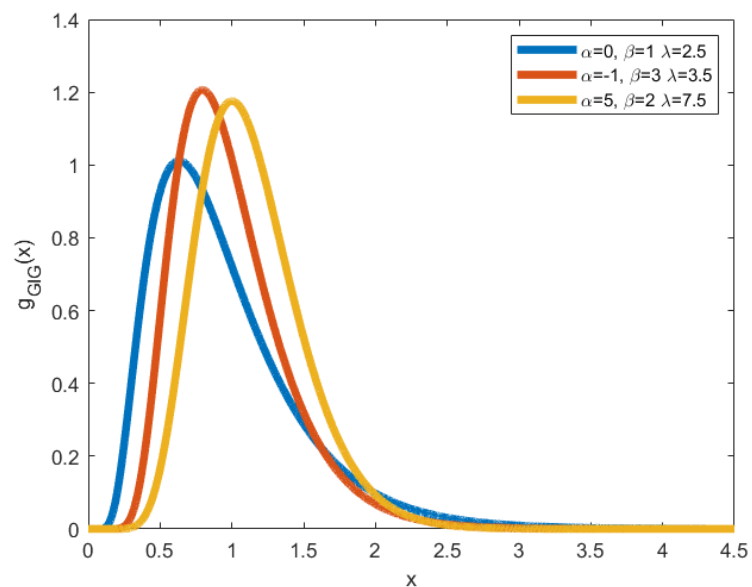
$$K_\alpha(x) = x^{-\alpha} 2^{\alpha-1} \int_0^{+\infty} y^{\alpha-1} e^{-\frac{x^2}{4y}} e^{-y} dy.$$

Na škálování rozdělení GIG je potřeba splnit tzv. škálovací podmínku  $\alpha + \beta + 2 > 0$ . Dále existují další omezení, která budou uvedena v kapitole 3. Rozptyl náhodné veličiny  $X$  s inverzní zobecněnou gaussovou funkcí lze zjednodušit do tvaru

$$\text{Var}(X) = \frac{\alpha + \beta + 2}{\lambda} - 1.$$

V závislosti na volbě jeho parametrů je tudíž možné se v krátkodosahovém systému dostat jak do stavu poissonovského, subpoissonovského, tak do superpoissonovského.

Vlastnosti systémů pro různé typy potenciálů, generátorů jsou zajímavým bodem ke zkoumání, proto se v nadcházející kapitole zaměříme na stanovení podmínek, při jakých je částicový systém zadaný GIG



Obrázek 2.6: Tvar GIG rozdělení pro různé kombinace parametrů.

generátorem superpoissonovský. Dále tu máme dva čistě odpudivé potenciály - logaritmický a hyperbolický, u nichž z předchozích kapitol víme, že mají kompresibilitu menší než jedna. Nabízí se tedy otázka, jestli není možné spojit jednotlivé stavy a potenciály více obecně. Tou otázkou je, zda je v krátkodosahovém termodynamickém plynu s čistě repulzivním potenciálem statistická kompresibilita vždy menší než jedna? Tato otázka je v kapitole 7 rozpracována podrobněji.

## Kapitola 3

# Podmínky superpoissonovského BČS

Jak již bylo zmíněno, balanční částicové systémy se za určitých podmínek mohou nacházet v různých stavech - superpoissonovský, poissonovský, subpoissonovský. V této kapitole se zabývám tím, za jakých podmínek a při jaké kombinaci parametrů se tyto systémy ve vyjmenovaných stavech nachází. Zejména nás bude zajímat první zmíněný stav, a to ten superpoissonovský. Každopádně si zmíníme i kombinace parametrů pro systém poissonovský a subpoissonovský, jelikož nám především fázový diagram parametrů  $\alpha, \beta$  utvoří lepší představu o prostoru parametrů funkce GIG a jeho propojení se stavy balančních částicových systémů, tedy balančních částicových systémů takových, které jsou generovány rozdělením GIG. Toto rozdělení si zde opět uvedeme,

$$g_{GIG}(x) = \Theta(x) \left( \sqrt{\frac{\lambda}{\beta}} \right)^{\alpha+1} \frac{x^\alpha}{2K_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} e^{-\frac{\beta}{x}} e^{-\lambda x} \quad (3.1)$$

kde  $\lambda > 0, \beta > 0, \alpha$  je reálné číslo a  $K_{\alpha+1}$  je Macdonaldova funkce. Aby mohl být GIG škálováný, tyto parametry  $\alpha, \beta$  a  $\lambda$  musí dodržovat tzv. škálovací podmínku. Dále musí splňovat nerovnosti, které plynou ze vztahů obecných momentů funkce GIG. Tyto podmínky byly převzaty z práce [9].

Omezující podmínky tedy jsou:

- Škálovací podmínka:  $\alpha + \beta + 2 > 0$ ,
- horní omezení:  $\alpha + \beta - \lambda(\alpha, \beta) + 2 > 0$ ,
- dolní omezení:  $\alpha + \beta - \lambda(\alpha, \beta) + 1 < 0$ .

Parametr  $\lambda$  je tedy funkcí parametrů  $\alpha, \beta$ , a to v následujícím aproximativním tvaru:

- Pro  $\alpha > -1$ ,

$$\lambda \approx \alpha + \beta + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} e^{-\sqrt{\frac{4\beta}{6+\alpha}}}, \quad (3.2)$$

- pro  $\alpha \leq -1$ ,

$$\lambda \approx \alpha + \beta + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} e^{-\sqrt{\frac{4(\alpha+\beta+2)}{6-\alpha}}}. \quad (3.3)$$

Je nutné ještě podotknout, že vztahy pro funkci  $\lambda$  jsou sice aproximativní, avšak poměrně přesné. Pro velké hodnoty  $\beta$  takřka splývá se svojí asymptotou a pro malé hodnoty  $\beta$  velmi dobře popisuje skutečný průběh parametru.

Obecné podmínky pro GIG jsou nyní vyřešené a přidáme další omezení, ale nyní ne už na funkci GIG jako takovou, ale na jednotlivé stavy BČS. Tato omezení se budou odvíjet od kompresibility, jelikož to je směrnice statistické rigidity, která právě určuje příslušnost k určitému stavu. Navíc již víme, že v krátkodosahových BČS se kompresibilita rovná rozptylu roztečí, které jsou rozděleny právě podle funkce GIG. V práci [10] se podařilo odvodit rekurentní vztah pro  $k$ -tý moment  $g_{GIG}$ ,

$$\mu_k(g_{GIG}) = \frac{\beta}{\lambda} \mu_{k-2}(g_{GIG}) + \frac{\alpha + k}{\lambda} \mu_{k-1}(g_{GIG}), \quad (3.4)$$

kteřý platí pro  $k \geq 2$ , neboť předpokládáme, že  $\mu_0(g_{GIG}) = \mu_1(g_{GIG}) = 1$ . Při dosazení  $k = 2$  získáme

$$\mu_2(g_{GIG}) = \frac{\beta + \alpha + 2}{\lambda},$$

tím pádem příslušný rozptyl  $\text{Var}(X) = \mu_2 - \mu_1^2$ , je tvaru

$$\text{Var}(X) = \frac{\beta + \alpha + 2}{\lambda} - 1. \quad (3.5)$$

Pro různé stavy klademe na rozptyl omezení kolem jedničky, shrnuto níže:

- Superpoissonovský stav:  $\text{Var}(X) > 1$ .
- Poissonovský stav:  $\text{Var}(X) = 1$ .
- Subpoissonovský stav:  $\text{Var}(X) < 1$ .

Nyní dáme vše dohromady a rozdělíme si podmínky na dvě oblasti, a to pro oblast  $\alpha$  větší než mínus jedna a oblast  $\alpha$  menší nebo rovna mínus jedné. Začneme první oblastí  $\alpha > -1$ . Parametry  $\lambda, \beta$  funkce (3.1) jsou v první řadě kladné. Dále dosadíme aproximaci (3.2) do dolního a horního omezení

- Dolní omezení

$$1 + \alpha + \beta - \alpha - \beta - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} e^{-\sqrt{\frac{4\beta}{6+\alpha}}} < 0,$$

z čehož nám vyplyne nerovnost

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-\sqrt{\frac{4\beta}{6+\alpha}}} < 0.$$

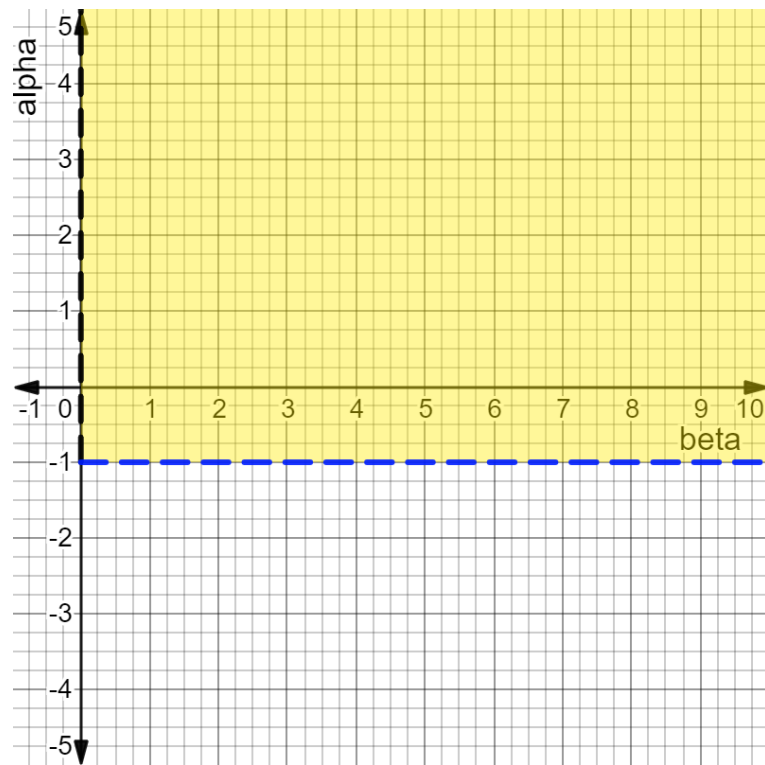
- Horní omezení

Provedeme analogicky a dostaneme nerovnost

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-\sqrt{\frac{4\beta}{6+\alpha}}} > 0.$$

Žlutou plochu splňující všechny podmínky pro existenci či škálování funkce 3.1 lze vidět na obrázku 3.1.

Nyní přidáme podmínky na rozptyl, které získáme jednoduchým dosazením aproximace  $\lambda$  do vzorce pro rozptyl funkce  $g_{GIG}$ :



Obrázek 3.1: Plocha splňující škálovací a existenční omezení funkce GIG pro  $\alpha > -1$ .

- $\text{Var}(X) > 1$

$$\alpha + \beta + 1 - e^{-\sqrt{\frac{4\beta}{6+\alpha}}} < 0$$

- $\text{Var}(X) = 1$

$$\alpha + \beta + 1 - e^{-\sqrt{\frac{4\beta}{6+\alpha}}} = 0 \quad (3.6)$$

- $\text{Var}(X) < 1$

$$\alpha + \beta + 1 - e^{-\sqrt{\frac{4\beta}{6+\alpha}}} > 0$$

Na obrázku 3.2 můžeme vidět modře označenou plochu - ta odpovídá rozptylu menšímu než jedna, žlutá značí rozptyl roven jedné a zeleně je označená část větší než jedna.

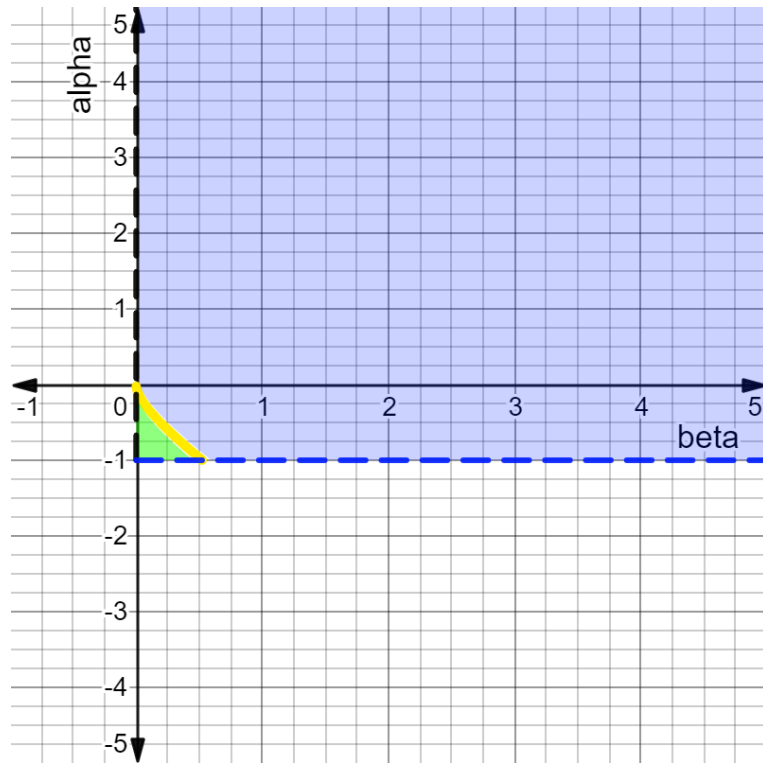
Totožný postup by byl i pro druhou část, tedy část kde  $\alpha \leq -1$ . Proto zde jen vypíši jednotlivé rovnice a nerovnice.

- $\beta > 0, \lambda > 0$  a škálovací podmínka
- Dolní omezení

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-\sqrt{\frac{4(\beta+\alpha+2)}{6-\alpha}}} < 0.$$

- Horní omezení

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-\sqrt{\frac{4(\beta+\alpha+2)}{6-\alpha}}} > 0.$$



Obrázek 3.2: Rozdělení parametrů  $\alpha, \beta$  dle výsledného rozptylu ( $\text{Var}(X) < 1$  - modrá,  $\text{Var}(X) = 1$  - žlutá,  $\text{Var}(X) > 1$  - zelená).

- $\text{Var}(X) > 1$

$$\alpha + \beta + 1 + e^{-\sqrt{\frac{4(\beta+\alpha+2)}{6-\alpha}}} < 0$$

- $\text{Var}(X) = 1$

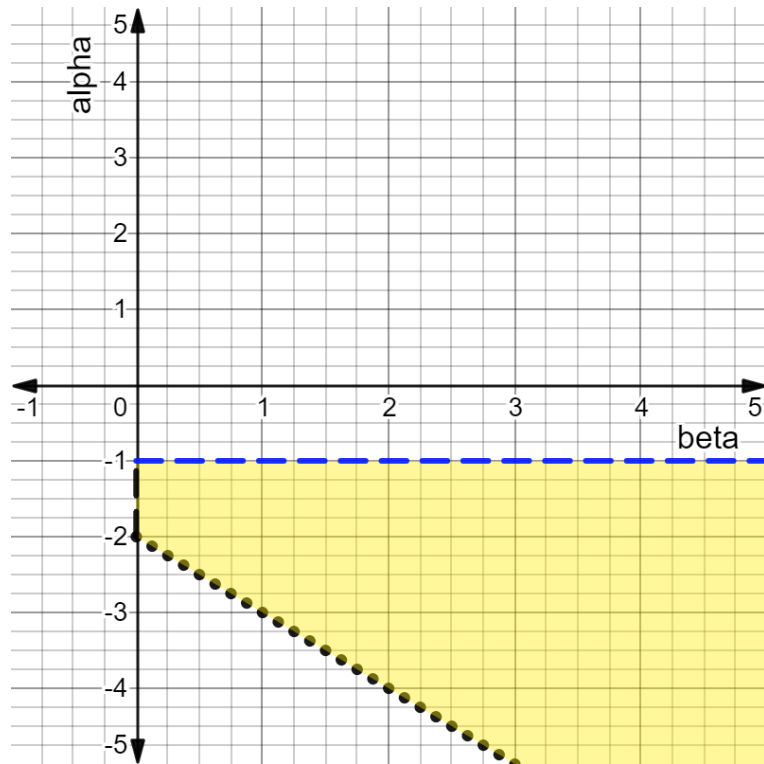
$$\alpha + \beta + 1 + e^{-\sqrt{\frac{4(\beta+\alpha+2)}{6-\alpha}}} = 0 \quad (3.7)$$

- $\text{Var}(X) < 1$

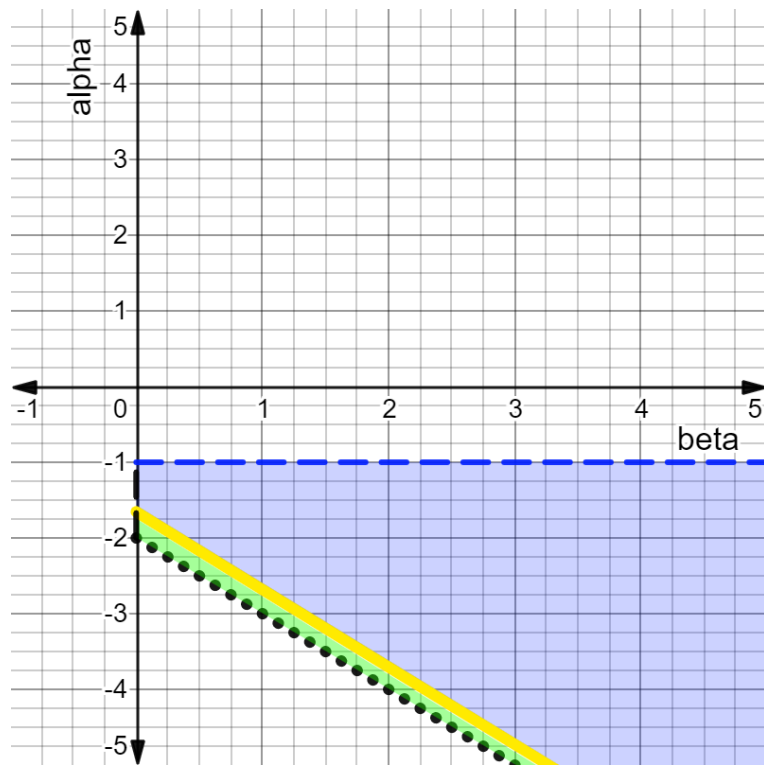
$$\alpha + \beta + 1 + e^{-\sqrt{\frac{4(\beta+\alpha+2)}{6-\alpha}}} > 0$$

Plochu vymezenou omezujícími podmínkami lze vidět na obrázku 3.3. Můžeme si povšimnout, že zde přibyla tečkovaná linie, která je určena škálovací podmínkou. Další obrázek 3.4 opět rozděluje prostor parametrů  $\alpha, \beta$  dle rozptylu.

Tyto výsledky znovu spojíme do jednoho a podíváme se více do detailu. Na obrázku 3.5, můžeme vidět prostor parametrů  $g_{GIG}$ , který je barevně rozlišen dle hodnoty rozptylu. Pokud bychom generovali BČS za pomoci funkce  $GIG$ , která by splňovala všechny zmíněné podmínky, měli bychom již vědět, jak bude systém vypadat ve svém stacionárním stavu. Spojíme nyní hodnoty rozptylu s jednotlivými stavy. Ještě jen připomeneme, že rovnost rozptylu roztečí a kompresibility platí pouze pro krátkodosahové BČS. Rozptyl žluté linie odpovídá poissonovským systémům, modrá subpoissonovským a zelená superpoissonovským. Pro  $\alpha \leq -1$  je kombinace parametrů vedoucí k jednotkovému rozptylu určena rovnicí (3.7). Tato křivka se s rostoucím  $\beta$  přimyká ke hranici škálovací podmínky  $\alpha + \beta + 2 > 0$ . Podíváme se tedy na

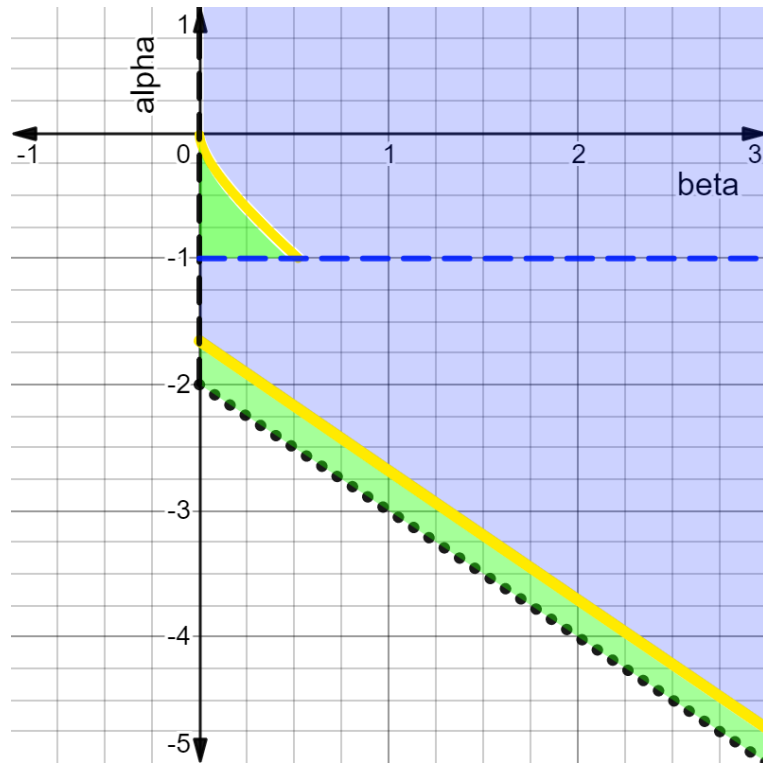


Obrázek 3.3: Plocha splňující škálovací a existenční omezení funkce GIG pro  $\alpha \leq -1$ .



Obrázek 3.4: Rozdělení parametrů  $\alpha, \beta$  dle výsledného rozptylu ( $\text{Var}(X) < 1$  - modrá,  $\text{Var}(X) = 1$  - žlutá,  $\text{Var}(X) > 1$  - zelená).





Obrázek 3.5: Rozdělení parametrů  $\alpha, \beta$  dle výsledného rozptylu.

jejich rozdíl limit v nekonečnu,

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} (\alpha + \beta + 2) - \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left( \alpha + \beta + 1 + e^{-\sqrt{\frac{4(\beta+\alpha+2)}{6-\alpha}}} \right) =$$

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left( 1 - e^{-\sqrt{\frac{4(\beta+\alpha+2)}{6-\alpha}}} \right) = 1 - 1 = 0$$

Prostor pro možné kombinace rozptylu většího než jedna se tedy dále a dále zužuje. Takový to fázový diagram nám dává poměrně dobrý přehled o tom, jaké parametry volit a jaký výsledek očekávat v numerických modelech a simulacích.

### 3.1 Systémy podobné Poissonovým

Modře označené systémy jsou subpoissonovské, protože kombinace parametrů  $\alpha, \beta$  je taková, že odpudivá složka přebije přitažlivou a potlačí její účinky. Otázkou však je, jak vlastně definovat žlutou linii, která se označuje systém, jež se velmi podobá poissonovským systémům. Víme však, že v takových systémech působí síly, jak přitažlivé, tak odpudivé. Podíváme se na to tedy blíže, a to z pohledu statistické rigidity, resp. její asymptoty. Poissonův systém je v krátkodosahových případech charakterizován kompresibilitou rovnou jedné a nulovou deflekcí. V předchozí kapitole máme již kompresibilitu (2.3) a deflekcii (A.7) vyjádřenou. Nyní jen do těchto dvou rovnic dosadíme momenty pro rozdělení GIG a k výpočtu třetího momentu použijeme rekurentní vzorec (3.4). Kompresibilita, jak již víme, odpovídá

rozptylu

$$\chi = \frac{\alpha + \beta + 2}{\lambda} - 1, \quad (3.8)$$

deflektce má po dosazení momentu  $g_{GIG}$  tvar

$$\delta = \frac{1}{6} \left[ 9 \frac{(\alpha + \beta + 2)^2}{\lambda^2} - 9 \frac{\alpha + \beta + 2}{\lambda} - \frac{4\beta}{\lambda} - 4 \frac{(\alpha + 3)(\alpha + \beta + 2)}{\lambda^2} + 6 \right]. \quad (3.9)$$

Protože nám škálovací podmínky neumožňují dojít k Poissonovu rozdělení, vezmeme si neškálovanou verzi, jen abychom demonstrovali charakteristiky  $\chi$  a  $\delta$  pro Poissonův stav.

$$g_{GIG}(x) = \Theta(x) A x^\alpha e^{-\frac{\beta}{x}} e^{-\lambda x}$$

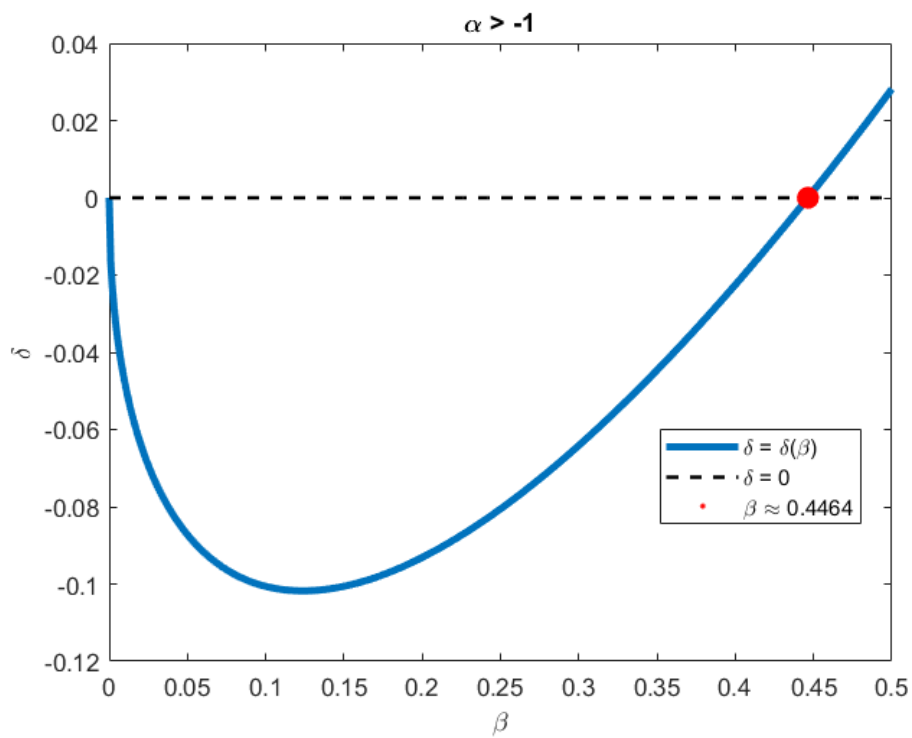
Z obecného tvaru GIG se můžeme dostat k exponenciálnímu rozdělení při volbě parametrů  $\alpha = 0$  a  $\beta = 0$ . Po škálování viz sekce 2.5, získáme exponenciálu a parametr  $\lambda = 1$ . Po prostém dosazení do vzorců (3.8), (3.9) získáme parametry statistické rigidity odpovídající Poissonovu systému, tedy  $\chi = 1$  a  $\delta = 0$ .

Jak je to se žlutou linií v obrázku 3.5? Vyberu nyní několik bodů, které na této linii leží a napočítám kompresibilitu a deflektci. Jelikož jsou rovnice (3.6), (3.7) implicitní, řešil jsem tuto úlohu numericky. Úlohu jsem počítal následujícím způsobem:

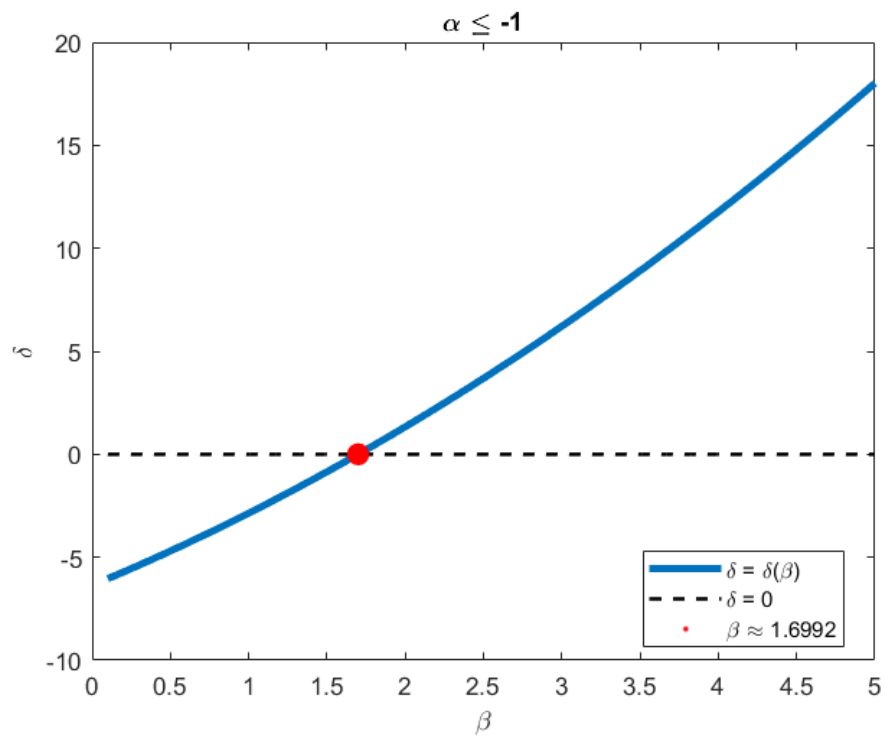
1. Rozdělil jsem si úlohy na dva případy, a to  $\alpha > -1$  resp.  $\alpha \leq -1$ ,
2. pro hodnoty  $\beta = \{0.001, 0.101, 0.102\dots, 0.5\}$ , resp.  $\beta = \{0.01, 0.11, 0.12\dots, 5\}$  jsem vyčíslil hodnotu  $\alpha$  podle rovnice (3.6), resp. (3.7),
3. parametr  $\lambda$  je vypočten dle rovnice (3.2), resp. (3.3),
4. napočítané hodnoty parametrů  $\alpha, \beta, \lambda$  dosadím do rovnice (3.9), tím získám výsledné  $\delta$ .

Tímto způsobem je napočten průběh deflektce (3.9) v závislosti na parametru  $\beta$ . Ve všech jednotlivých bodech je kompresibilita rovna jedné, protože parametry splňují rovnosti (3.6), resp. (3.7). Na obrázcích 3.7, 3.6 můžeme vidět, že deflektce je pro určité hodnoty parametru  $\beta$  záporná, pro jiné kladná. Obě tyto varianty tvoří systémy podobné Poissonovým, avšak pro kladné hodnoty deflektce je v těchto systémech fluktuace počtu částic na intervalu délky  $L$  větší (u záporných menší) než u Poissonova systému. Dále si také můžeme povšimnout, že jsou zde červené body, které přesně splňují požadavek na Poissonův systém,  $\chi = 1$  a zároveň  $\delta = 0$ . To nás vede k otázce, co se v těchto bodech děje? Představují tyto body rovnováhu mezi stochastickým šumem, přitažlivou a odpudivou silou, takovou, že se jednotlivé vlivy vyruší? Jsou toto Poissonovy systémy?

Pro hodnoty parametru  $\alpha > -1$  jsou hodnoty deflektce velmi blízko nulové hodnotě, a proto by se pravděpodobně měly podobat Poissonovým systémům více. Pro hodnoty  $\alpha \leq -1$  jsou však hodnoty  $\delta$  už od nuly velmi vychýlené. Na modely s parametry ležící na této křivce se podíváme v kapitole 6.



Obrázek 3.6: Deflektce pro  $\alpha > -1$ .



Obrázek 3.7: Deflektce pro  $\alpha \leq -1$ .

## Kapitola 4

# Numerický model

Jedním z důležitých přínosů této práce je numerický model sepsaný v prostředí *MATLAB*, který umožňuje v krátkém čase uskutečnit velké množství simulací pro různá nastavení interakce a parametrů. Je navíc sepsaný uživatelsky přívětivě a může si v podstatě kdokoliv vygenerovat velké množství dat pro požadované parametry, potenciály atd. Pro zkoumání efektů změn parametrů, dosahovostí a typů potenciálů na chování částicových systémů je tak tento program velmi vhodný, proto ho předám k dalšímu použití. Vstup můžete vidět níže.

```
%% Volba parametrů
alpha=-1.5940;
beta = 0.9303;
koefSumu = 0.9;
dosah = 1;
potencial = 'combined'; %logarithmic, hyperbolic, combined
kappa = -alpha/beta;

pocet_iteraci = 30000;
pocet_castic = 100;
pocet_behu = 200;
```

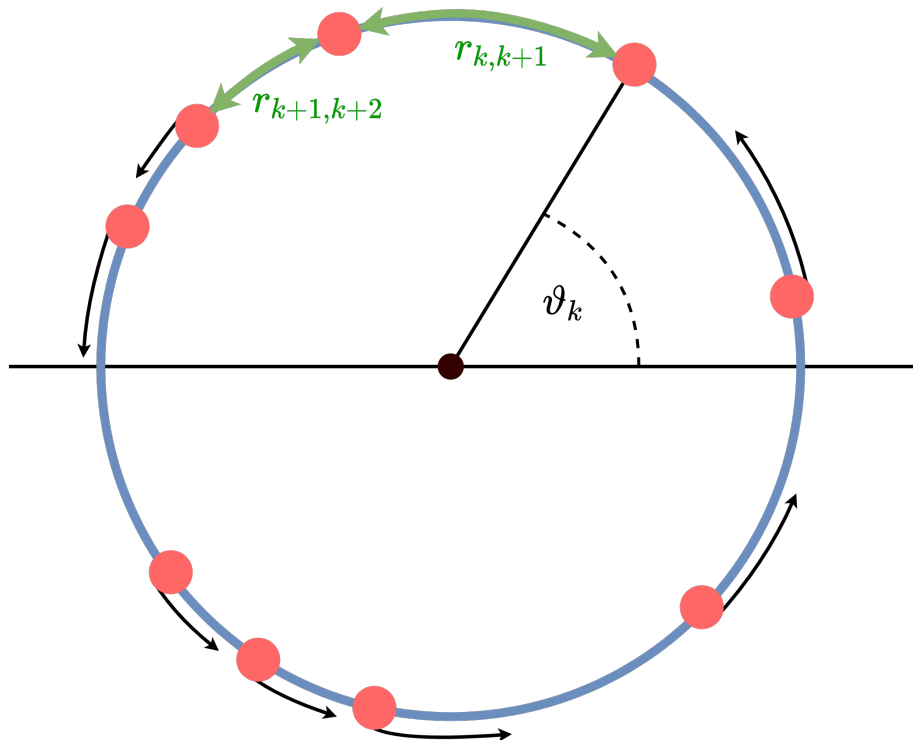
Standardně budu používat 30 000 iterací, 100 částic, 200 běhů a koeficient šumu 0.9. Na počtu částic by nemělo příliš záležet, jelikož velikost kružnice se počtu částic přizpůsobuje. Počet iterací je raději zvolen vyšší, jelikož takový počet iterací je obvykle poměrně vysoko nad potřebným počtem iterací k dosažení stacionárního stavu, a tak se můžeme s klidem spolehnout na to, že data nesbíráme dříve než je vhodné. Počet běhů je zvolen také vyšší, než by byl potřeba, ale více dat a výsledků nám vyhladí finální křivky a poskytne stabilnější výstupy. Ostatní parametry jsou zde uvedeny jen pro ilustrační účely.

Díky komplexnímu generátoru, proto numericky zreviduji uvedené potenciály a pro krátkodosahové systémy ověřím informaci uvedenou v předchozích kapitolách, zdali kombinace parametrů  $\alpha, \beta$  spadající do superpoissonovské oblasti opravdu generuje systémy s rozptylem větším než nula. V poslední kapitole také testuji hypotézu, zdali při vyšším dosahu interakce mají rozteče stále GIG rozdělení. Nejprve se ale podíváme na to, jak vypadá průběh jedné iterace algoritmu.

## 4.1 Sestavení algoritmu

Jak již bylo řečeno v kapitole 1, potenciály se dělí dle dosahovosti interakčních sil. Krátkodosahový uvažuje interakci pouze sousedních částic, zatímco střednědosahový uvažuje interakci s  $k$  nejbližšími sousedy dané částice. Převáděno do dopravní reality, jedná se o situaci, kdy chování řidiče, tedy zrychlení či zpomalení, ovlivňuje nejen první vozidlo před ním, ale i několik předcházejících. Počet vozidel ovlivňujících chování řidiče je právě určen volbou dosahu.

Modifikovaný algoritmus Metropolis-Hastings použijeme pro variantu systému s volitelným dosahem a libovolným potenciálem. Jedná se o kruhovou variantu systému, tedy  $N$  částic se pohybuje po kružnici délky  $d$ , kde částice nemohou měnit pořadí - účel takového systému je simulace jednosměrné komunikace, kde se jednotlivá vozidla nemohou předjíždět viz obrázek 4.1.



Obrázek 4.1: Kruhová varianta systému.

Symbolem  $\beta$  označíme stochastickou rezistivitu a koeficient šumu označíme symbolem  $\sigma$ . Písmeno  $D$  má význam dosahu interakce, tudíž při volbě  $D = 1$  je systém krátkodosahový a při volbě například  $D = 3$  interaguje částice ještě s dalšími dvěma. Umístění částice v čase  $t$  popíšeme úhlovými lokacemi  $\vartheta_1(t) < \vartheta_2(t) < \dots < \vartheta_N(t)$ . Rozteč mezi  $j$ -tou a  $k$ -tou částicí v čase  $t$  definujeme vztahem

$$r_{jk}(t) = \frac{N}{2\pi} \arccos(\cos[\vartheta_j(t) - \vartheta_k(t)]).$$

Nejprve pevně zvolíme parametry  $\beta \geq 0$ ,  $\sigma > 0$ , počet částic  $N$ , dosah  $D$  a vybereme požadovaný potenciál  $\varphi$ . Libovolně zvolíme počáteční rozmístění  $\vartheta_1(0) < \vartheta_2(0) < \dots < \vartheta_N(0)$  a spočteme počáteční

potenciální energii

$$U(0) = - \sum_{j=1}^D \sum_k \varphi(r_{k,k+j}(0)).$$

Jedna iterace algoritmu probíhá v následujících krocích.

1. Z času  $t$  přecházíme na  $t + 1$ .
2. Vypočteme aktuální potenciální energii

$$U(t) = - \sum_{j=1}^D \sum_k \varphi(r_{k,k+j}(t)).$$

3. Zvolíme libovolně index  $\ell \in \hat{N}$ .
4. Vygenerujeme číslo  $\delta$  z rovnoměrného rozdělení na intervalu  $(-1, 1)$ .
5. Definujeme předpokládanou pozici  $\ell$ -té částice jako  $\vartheta_\ell(t + 1) = \vartheta_\ell(t) + \delta \frac{2\pi}{N} \sigma$ .
6. Pokud se  $\ell$ -tá částice v čase  $t + 1$  dostane před  $\ell + 1$  částici v čase  $t$ , tedy  $\vartheta_\ell(t + 1) \geq \vartheta_{\ell+1}(t)$  nebo se dostane za  $\ell - 1$  částici v čase  $t$ , tedy  $\vartheta_\ell(t + 1) \leq \vartheta_{\ell-1}(t)$ , pak se vrátíme zpět do bodu 1. V takovém případě zachováme úhlové lokace i potenciální energii stejnou jako v čase  $t$ , tedy  $\vec{\vartheta}(t + 1) = \vec{\vartheta}(t)$ ,  $U(t + 1) = U(t)$ . V případě, že částice zůstane v kroku  $t + 1$  mezi svými sousedními částicemi, pokračujeme na krok 7.
7. Vypočteme potenciální energii po posunutí pouze  $\ell$ -té částice

$$W = - \sum_{j=1}^D \sum_k \varphi(r_{k,k+j}(t + 1)),$$

kde  $\vartheta_k(t + 1) = \vartheta_k(t)$  pro všechny  $k \neq \ell$ .

8. Pokud se hodnota potenciální energie snížila nebo zůstala stejná, tj.  $W \leq U(t)$ , pak  $U(t + 1) = W$ .
9. Pokud se hodnota potenciální energie zvýšila, pak vypočteme tzv. Boltzmannův faktor  $h = e^{-\beta(W-U(t))}$  a vygenerujeme číslo  $\gamma$  z rovnoměrného rozdělení na intervalu  $(0, 1)$ .
10. V tuto chvíli se vracíme zpět do bodu 1.

## Kapitola 5

# Analytické modely a jejich numerická simulace

V téhle kapitole budeme používat především rovnici (1.4), kterou již nyní modifikujeme pro konkrétní potenciály. Pro jednotlivé potenciály odvodíme příslušnou hustotu pravděpodobnosti roztečí a následně otestujeme numerický model, zdali simulace částicových systémů s daným potenciálem odpovídají matematické teorii. Odvození rovnovážných stavů jsou v této práci ve zkrácené verzi, pokud by čtenář měl zájem analytické odvození rovnovážných stavů probádat se všemi technickými detaily, může nahlédnout do [7]. Použiji zde také Laplaceovu transformaci, proto ji hned zkrájed uvedu

$$\mathcal{L}[\delta(x - \mu)](s) = e^{-\mu s}. \quad (5.1)$$

### 5.1 Bezinterakční systém

V tomto systému mezi sebou částice neinteragují a jsou tím pádem maximálně nezávislé. To odpovídá stavu, kdy je stochastická rezistivita  $\beta$  nulová. Tím pádem hustota pravděpodobnosti rozdělení roztečí (1.4) přechází do tvaru

$$g_E(r) = \theta(r) \frac{Z_{N-1}(L-r)}{Z_N(L)}.$$

Rozepíšeme si tedy partiční sumu  $Z_N(L)$ .

$$Z_N(L) = \int_{\mathbb{R}^N} \delta\left(L - \sum_{k=1}^N r_k\right) \theta(\vec{r}) \, d\vec{r}.$$

Použijeme Laplaceovu transformaci partiční sumy

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[Z_N(L)](s) &= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \delta\left(L - \sum_{k=1}^N r_k\right) \theta(\vec{r}) e^{-sL} \, d\vec{r} \, dL \stackrel{(5.1)}{=} \int_{\mathbb{R}^N} \theta(\vec{r}) e^{-s \sum_{k=1}^N r_k} \, d\vec{r} = \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}} \theta(r) e^{-sr} \, dr \right)^N = (\mathcal{L}[\theta(r)])^N = \frac{1}{s^N}, \end{aligned}$$

na výsledný výraz použijeme zpětnou Laplaceovu transformaci a získáme

$$Z_N(L) = \frac{L^{N-1}}{(N-1)!}.$$

Do hledané hustoty můžeme  $Z_N$  nyní dosadit a získáme hustotu pravděpodobnosti

$$g_E(r) = \theta(r) \frac{(L-r)^{N-2} (N-1)!}{(N-2)! L^{N-1}} = \theta(r) \frac{N-1}{L} \left(1 - \frac{r}{L}\right)^{N-2}.$$

Stále však nejsme spokojeni a chtěli bychom univerzálnější řešení, které není příliš závislé na parametrech, proto budeme uvažovat systém škálovaný, kterého lze dosáhnout za pomoci zvolení délky úsečky rovnu počtu částic, tedy  $L = N$ . Zároveň nás zajímá chování systému většího počtu částic, a proto budeme počítat chování v limitním případě, kdy počet částic roste nade všechny meze:

$$g_E(r) = \theta(r) \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{N-1}{N} \left(1 - \frac{r}{N}\right)^{N-2} = \theta(r)e^{-r}.$$

Tímto postupem jsme tedy získali informaci o tom, jak by mělo vypadat rozdělení sousedních rozestupů mezi částicemi v případě systému, který je maximálně náhodný. Jedná se o škálované exponenciální rozdělení, které ostatně odpovídá Poissonovým systémům. Nyní však přijde řada na numerický model, který otestuje analytické odvození. Model budeme zapínat s následujícím nastavením:

```
%% Volba parametrů
beta = 0;
koefSumu = 0.9;
dosah = 1;
potencial = 'logarithmic'; %logarithmic, hyperbolic_multi, combined

pocet_iteraci = 30000;
pocet_castic = 100;
pocet_behu = 200;
```

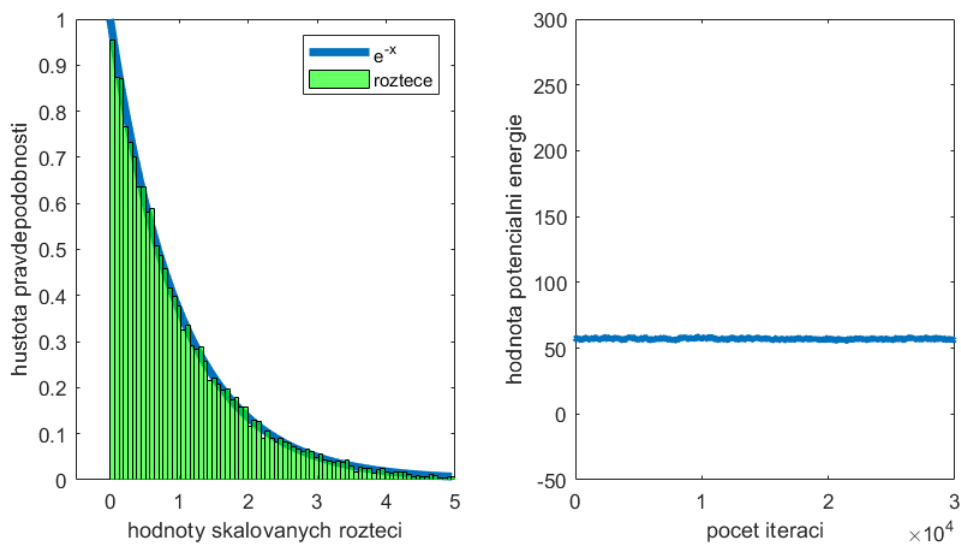
Na obrázku 5.1 vlevo můžeme vidět, že rozdělení roztečí skutečně odpovídá exponenciálnímu rozdělení, a to velmi přesně. Také lze na obrázku vpravo ověřit, že se nacházíme ve stacionárním stavu. Na volbě potenciálů by logicky nemělo v bezinterakčním systému záležet, proto příkládám ještě jednu simulaci s nastavením,

```
%% Volba parametrů
beta = 0;
koefSumu = 0.9;
dosah = 1;
potencial = 'combined'; %logarithmic, hyperbolic_multi, combined

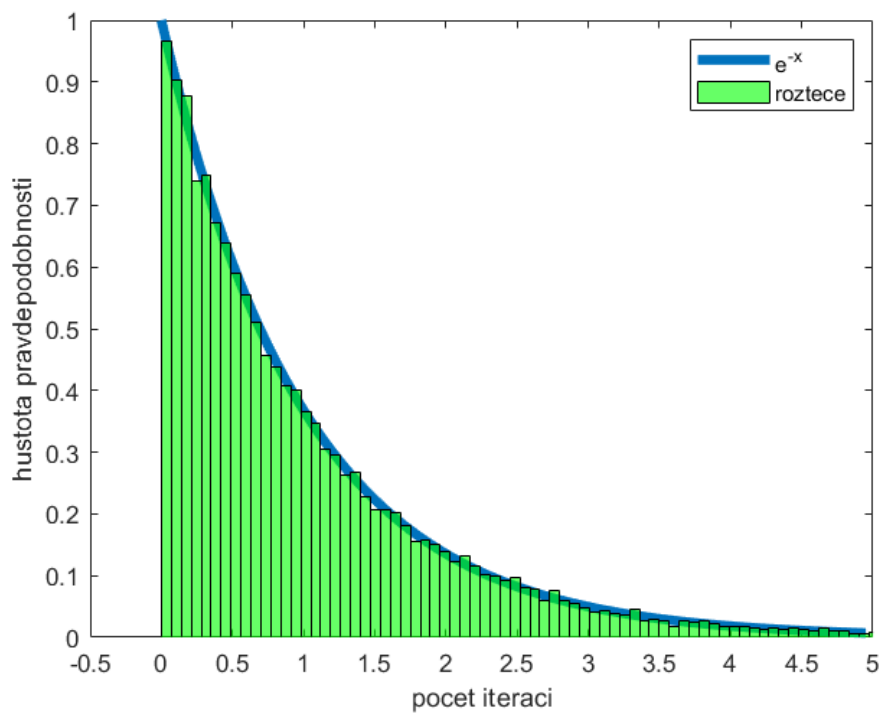
pocet_iteraci = 30000;
pocet_castic = 100;
pocet_behu = 200;
```

kde je použit kombinovaný potenciál. Jedná se o krátkodosahový systém a rozptyl dat také velmi přesně odpovídá předpokládanému výsledku. Rozptyl pro 5.1 je roven 1.0068, rozptyl pro 5.2 je roven 0.9916.





Obrázek 5.1: Rozdělení roztečí při  $\beta = 0$  a průběh potenciální energie.



Obrázek 5.2: Rozdělení roztečí při  $\beta = 0$  se simulací využívající kombinovaný potenciál.

## 5.2 Model s logaritmickým potenciálem

S logaritmickým potenciálem si lze rozdělení roztečí odvodit několika způsoby, a to v závislosti na hodnotách parametru  $\beta$ . První způsob vede na Erlangovo rozdělení, druhý na Gamma rozdělení. Předpis finální hustoty je pro obě varianty stejný, ačkoliv Erlangovo rozdělení je odvozeno pouze pro celočíselné hodnoty  $\beta$ , zatímco Gamma rozdělení je odvozeno pro nezáporné hodnoty stochastické rezistivity.

Hustotou pravděpodobnosti  $g_{\Gamma}$  pro rozdělení světlostí v systému s logaritmickým potenciálem je

$$g_{\Gamma}(r|\beta) = \theta(r) \frac{(\beta + 1)^{\beta+1}}{\Gamma(\beta + 1)} r^{\beta} e^{-(\beta+1)r} \quad (5.2)$$

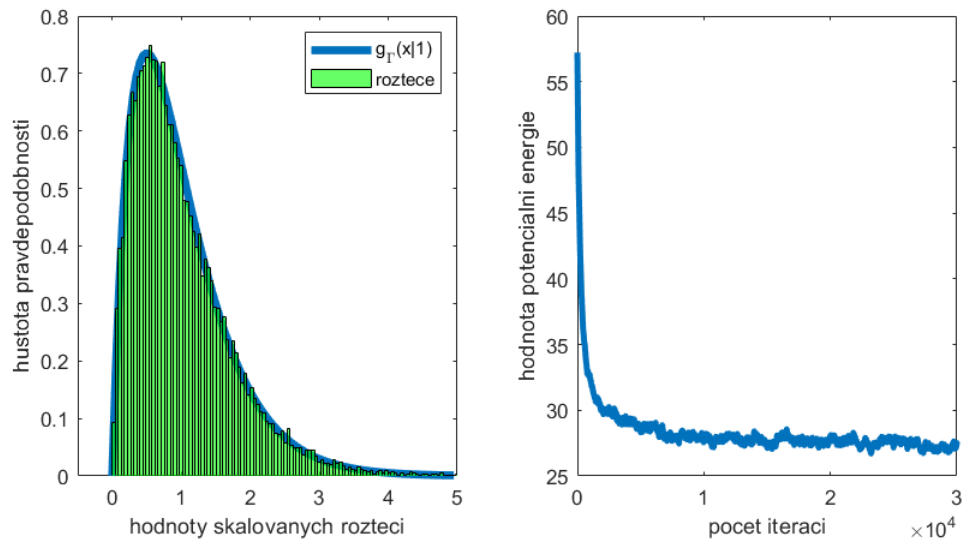
Hodnota rozptylu náhodné veličiny  $X$  s rozdělením (5.2) je

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{\beta + 1}.$$

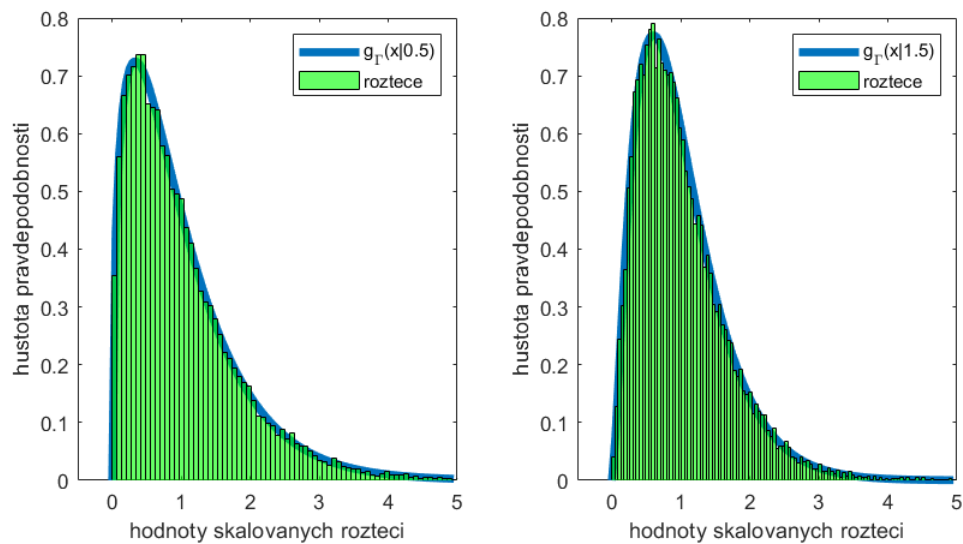
Tohoto vztahu využijeme a porovnáme s výstupy numerické simulace. Výsledky v tabulce 5.1 jsou zaokrouhleny na dvě desetinná místa.

$\beta$	0.5	1	1.5	2	2.5	3
rozptyl simulace	0.67	0.52	0.43	0.35	0.3	0.27
rozptyl teoretický	0.67	0.50	0.40	0.33	0.29	0.25

Tabulka 5.1: Tabulka rozptylů roztečí v závislosti na hodnotě  $\beta$ .



Obrázek 5.3: Rozdělení roztečí při  $\beta = 1$  se simulací využívající logaritmický potenciál.



Obrázek 5.4: Rozdělení roztečí při  $\beta = 0.5$  a  $\beta = 1.5$  se simulací využívající logaritmický potenciál.

### 5.3 Model s hyperbolickým potenciálem

Tento model získáme z rovnosti odvozené pro obecný krátkodosahový potenciál

$$g(r) = \frac{Z_{N-1}(l-r)}{Z_N(L)} f(r),$$

kde  $f(r) = \theta(r)e^{-\beta\varphi(r)}$ . Výsledkem odvození v obecné rovině je funkce

$$g(r) = \frac{\theta(r)}{F(\lambda)} e^{-\beta\varphi(r)} e^{-\lambda r}. \quad (5.3)$$

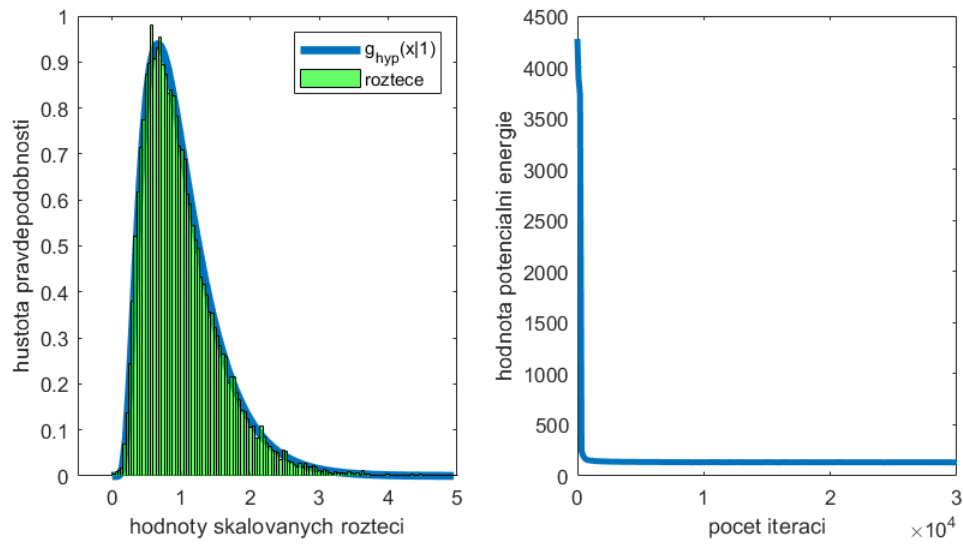
Pokud dosadíme  $\varphi(r) = \frac{1}{r}$ , tedy hyperbolický potenciál do obecné rovnice (5.3) a hustotu naškálujeme, získáme tak tvar hustoty pravděpodobnosti pro rozdělení rozestupů částic v rovnovážném systému, kde působí hyperbolický potenciál, tedy

$$g_{hyp}(r|\beta) = \theta(r) \frac{\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{\beta}K_1^{-1}(2\sqrt{\beta\lambda})} e^{-\frac{\beta}{r}} e^{-\lambda r}.$$

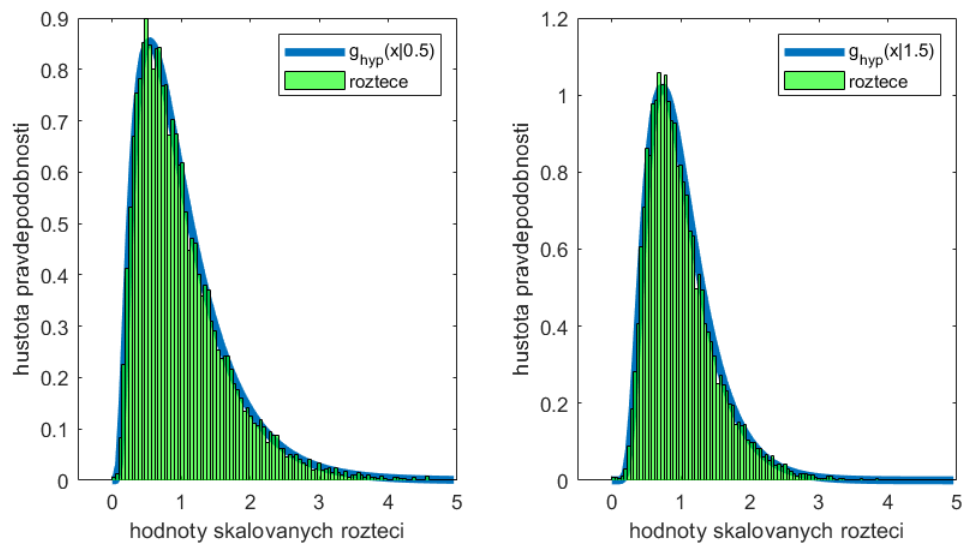
Jelikož  $g_{hyp}$  je jen speciálním případem GIGu pro  $\alpha = 0$ , tato konstanta  $\lambda$  je totožná s konstantou  $\lambda$  pro rozdělení GIG, což v tomto případě vede na aproximaci (3.2). Tímto krokem tedy přecházíme k tomu, že  $g_{hyp}$  má pouze jeden parametr  $\beta$ . Mimo grafické validace potvrzuje teorii i tabulka rozptylů 5.2, kde teoretický rozptyl je vypočten podle vzorce (3.5).

$\beta$	0.5	1	1.5	2	2.5	3
rozptyl simulace	0.45	0.32	0.25	0.21	0.18	0.16
rozptyl teoretický	0.45	0.32	0.24	0.20	0.17	0.14

Tabulka 5.2: Tabulka rozptylů roztečí v závislosti na hodnotě  $\beta$ .



Obrázek 5.5: Rozdělení roztečí při  $\beta = 1$  se simulací využívající hyperbolický potenciál.



Obrázek 5.6: Rozdělení roztečí při  $\beta = 0.5$  a  $\beta = 1.5$  se simulací využívající hyperbolický potenciál.

## Kapitola 6

# Model s kombinovaným potenciálem

### 6.1 Model s kombinovaným potenciálem

Nakonec si uvedeme ještě model s kombinovaným potenciálem, tedy s potenciálem (1.1). Simulace zejména tohoto modelu nás budou velmi zajímat, jelikož můžeme porovnat nastavení parametrů pro superpoissonovské stavy podle kapitoly 3. Systémy s kombinovaným potenciálem můžeme popsat rozdělením GIG, které si pro případ kombinovaného potenciálu odvodíme.

#### 6.1.1 Analytické odvození rovnovážného rozdělení

V této sekci se nepatrně vrátíme k odvození rozdělení, které mají rozteče v krátkodosahovém systému, v případě, že používáme kombinovaný potenciál. Odrazíme se od rovnice (5.3), která lze použít pro nalezení rovnovážného stavu termodynamického dopravního plynu s libovolným krátkodosahovým potenciálem. Konkrétní rozdělení pro popis systému s kombinovaným potenciálem však nemáme naškálované a neznáme funkci  $F(\lambda)$ , proto se úloha nalezení rovnovážného stavu s použitím rovnice (5.3) redukuje na nalezení hodnoty  $F(\lambda)$  pro rovnici

$$g(r) = \frac{\theta(r)}{F(\lambda)} e^{-\beta(\kappa \ln(r) + \frac{1}{r})} e^{-\lambda r},$$

kde  $F(\lambda)$  je Laplaceův obraz funkce  $f(r)$ , která definována jako  $\theta(r)e^{-\beta\varphi(r)}$ . Tuto transformaci si tedy rozepíšeme

$$F(\lambda) = \mathcal{L}[f(r)](\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\beta(\kappa \ln(r) + \frac{1}{r})} e^{-\lambda r} dr.$$

Exponenciální funkci s dosazeným potenciálem nyní rozdělíme na dvě. Odtud

$$\int_0^{+\infty} r^{-\beta\kappa} e^{-\frac{\beta}{r}} e^{-\lambda r} dr. \tag{6.1}$$

V tuto chvíli pro přehlednost uvádíme Macdonaldovu funkci

$$\frac{x^\alpha}{2^{a-1}} K_a(x) = \int_0^{+\infty} y^{a-1} e^{-\frac{x^2}{4y}} e^{-y} dy. \quad (6.2)$$

Funkce (6.1) je zřetelně podobná s Macdonaldovou funkcí, proto se ji za pomoci triviální substituce  $t = \lambda r$ , pokusíme více přiblížit tvaru Macdonaldovy funkce. Také si člen  $-\beta\kappa$  přeznačíme na symbol  $\alpha$ .

$$(6.1) = |subst.| = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{\lambda^\alpha} e^{-\frac{\beta\lambda}{t}} e^{-t} \frac{dt}{\lambda},$$

členy, které nejsou závislé na proměnné, podle které se integruje, vytkneme před integrál

$$\frac{1}{\lambda^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-\frac{\beta\lambda}{t}} e^{-t} dt.$$

Nyní už je podobnost jistě zřejmá, jelikož

$$\left\| \begin{array}{l} \alpha = a - 1 \\ \frac{x^2}{4} = \beta\lambda \\ x = \sqrt{4\beta\lambda} = 2\sqrt{\beta\lambda} \end{array} \right\|$$

Podle těchto záměn, můžeme finální tvar odvodit s pomocí (6.2).

$$\frac{1}{\lambda^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-\frac{\beta\lambda}{t}} e^{-t} dt = \frac{1}{\lambda^{\alpha+1} 2^\alpha} K_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda}),$$

po provedení kosmetických úprav získáváme finální tvar

$$F(\lambda) = 2 \left( \sqrt{\frac{\beta}{\lambda}} \right)^{\alpha+1} K_{\alpha+1}(\sqrt{\beta\lambda}).$$

Toto dosadíme do (5.3) a výsledná funkce je funkcí rozložení roztečí v rovnovážném stavu v modelu termodynamického dopravního plynu s krátkodosahovým repulzivním potenciálem, tedy

$$g(r) = \theta(r) \left( \sqrt{\frac{\lambda}{\beta}} \right)^{\alpha+1} \frac{x^\alpha}{2K_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} e^{-\frac{\beta}{r}} e^{-\lambda r}.$$

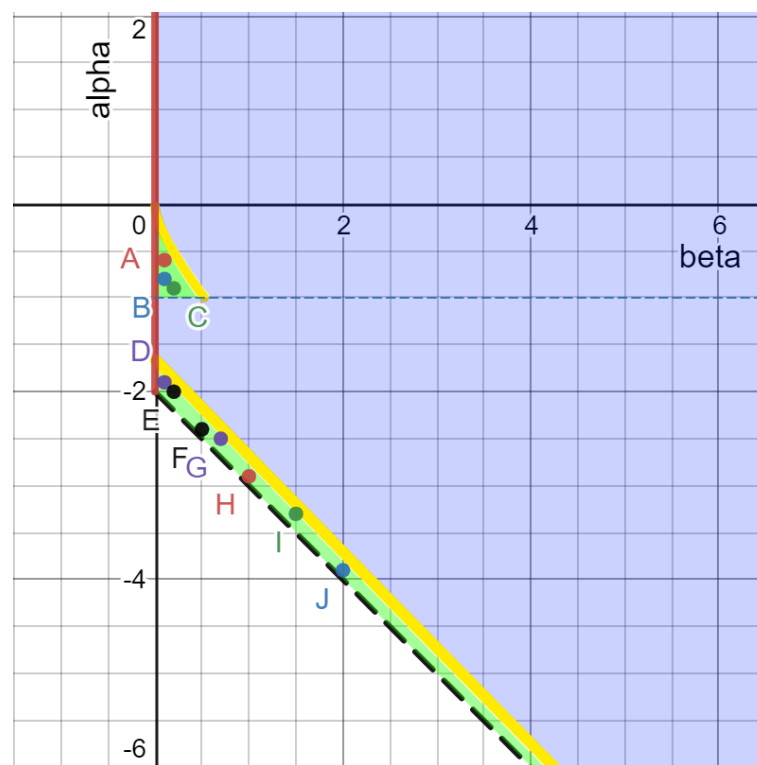
Příjemnou zprávou je, že toto rozdělení je zobecněné Gaussovo rozdělení (3.1) a je možné tak nadále využívat znalostí balančních částicových systémů. Rozdělení  $g(r)$  v tomto tvaru budeme nadále používat ve všech simulacích, ve kterých bude prokázáno, že se jedná o rozdělení rovnovážné.

## 6.2 Algoritmická realizace

Nyní pro spuštění simulace budeme volit další parametr  $\alpha$  a použijeme znalost prostoru parametrů  $\alpha, \beta$  pro volbu kombinací. Pokud se podíváme na obrázek 3.5 je zřejmé, že rozptyl větší než 1 může nastat pouze při  $\alpha$  záporném. Tato skutečnost správně zapadá do kontextu, jelikož aby mohl být rozptyl krátkodosahového systému větší než jedna, musí zde působit atraktivní síly. Pokud by bylo  $\alpha \geq 0$ , potom by parametr  $\kappa \leq 0$ , což by ve výsledku znamenalo, že původně atraktivní složka potenciálu  $\varphi(r) = \kappa \ln(r) + \frac{1}{r}$  by působila stejným směrem jako složka odpuzivá. Tím by se potenciál stal repulzivní na obou složkách a rozptyl by tak nemohl přesáhnout hranici poissonovského systému.

### 6.2.1 Parametry pro rozptyl větší než 1

Náhodně jsem vybral 10 bodů spadajících do oblasti rozptylu většího než jedna, viz obrázek 6.1. V tabulce 6.1 vidíme, s jakými parametry byly jednotlivé simulace spouštěny. Názvy bodů si ponecháme i ke značení příslušných histogramů.

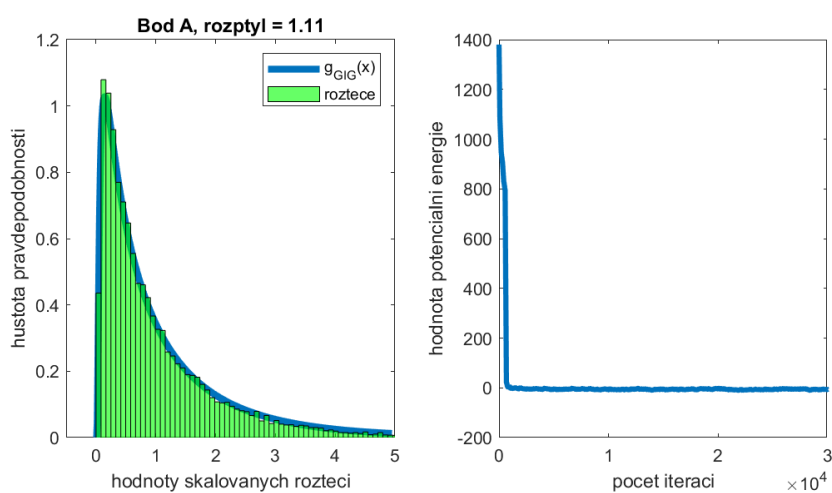


Obrázek 6.1: Body A – J určující vstupní parametry modelu s kombinovaným potenciálem.

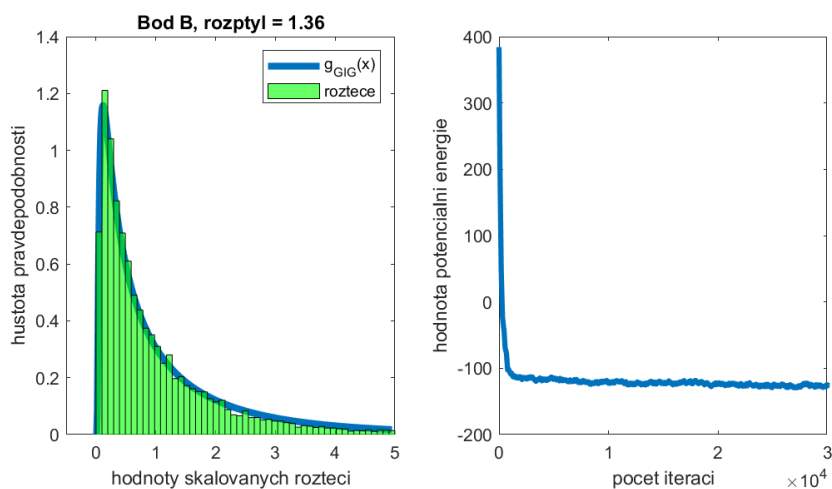


	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
souřadnice tvaru $[\beta, \alpha]$	[0.1, -0.6]	[0.1, -0.8]	[0.2, -0.9]	[0.1, -1.9]	[0.2, -2]
	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	<i>I</i>	<i>J</i>
souřadnice tvaru $[\beta, \alpha]$	[0.5, -2.4]	[0.7, -2.5]	[1, -2.9]	[1.5, -3.3]	[2, -3.9]

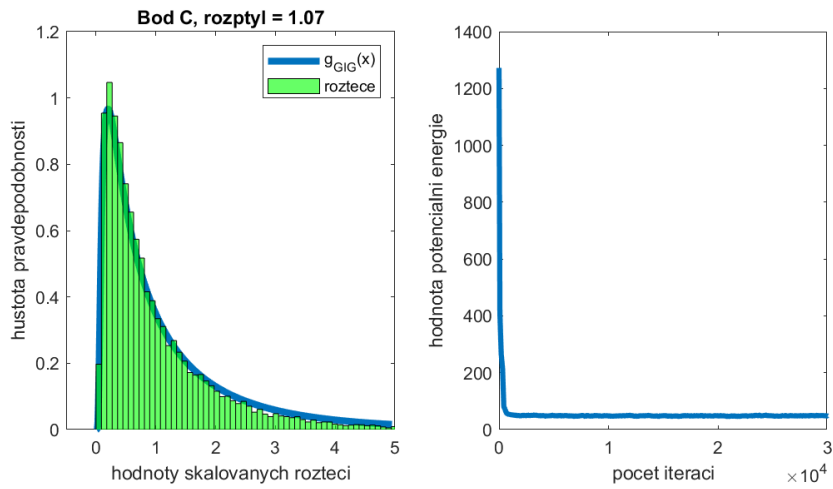
Tabulka 6.1: Tabulka bodů v prostoru parametrů  $\alpha, \beta$ .



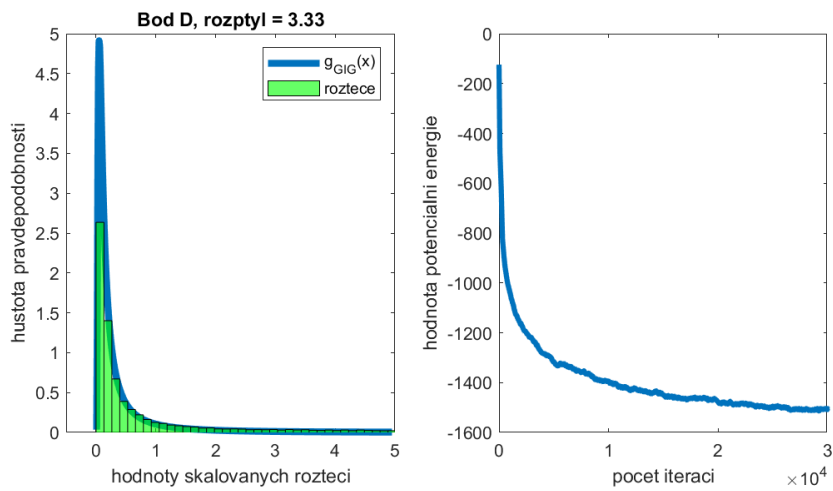
Obrázek 6.2: Bod A.



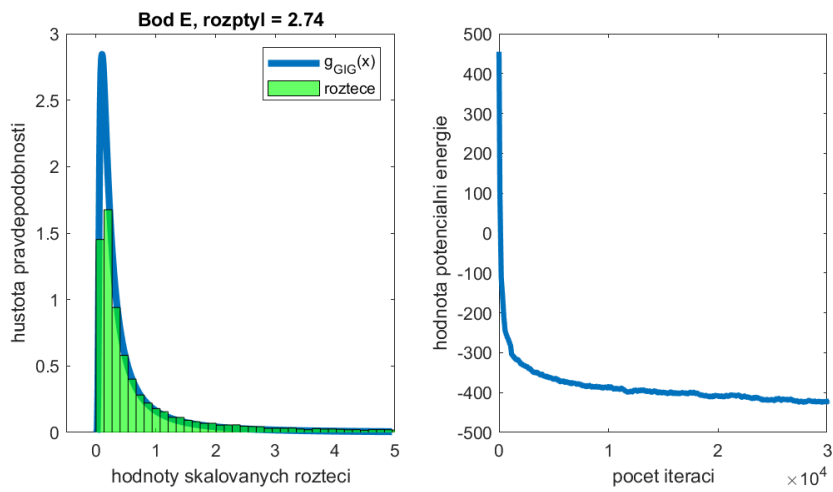
Obrázek 6.3: Bod A.



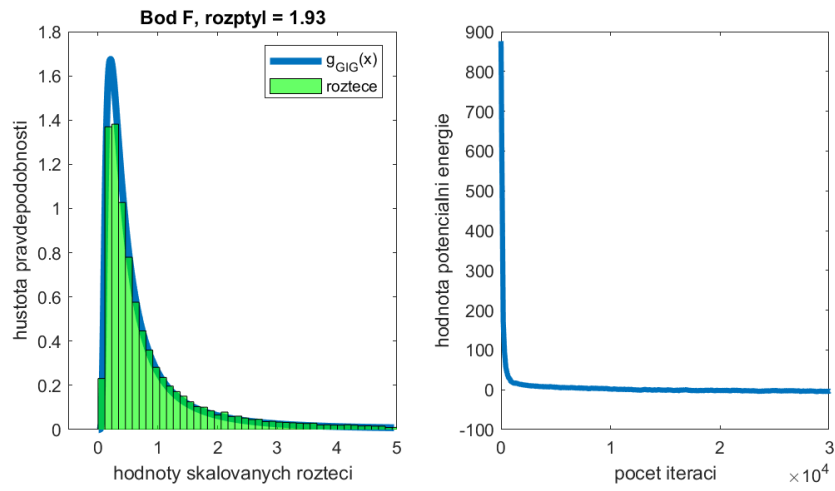
Obrázek 6.4: Bod C.



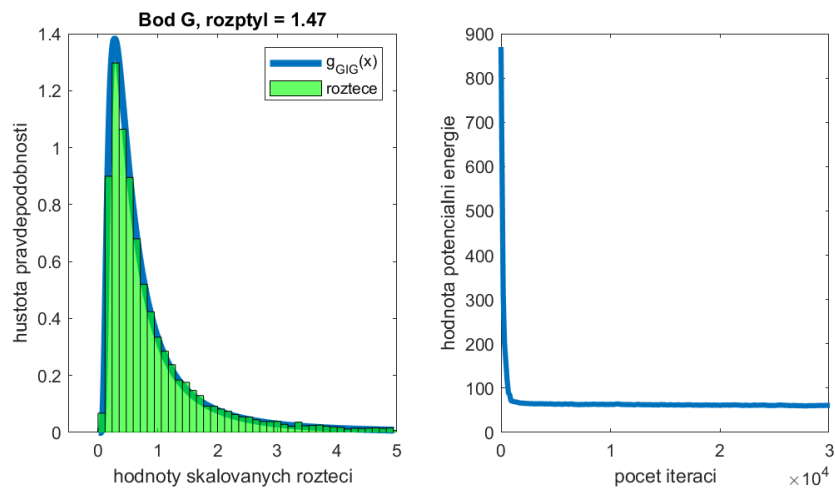
Obrázek 6.5: Bod D.



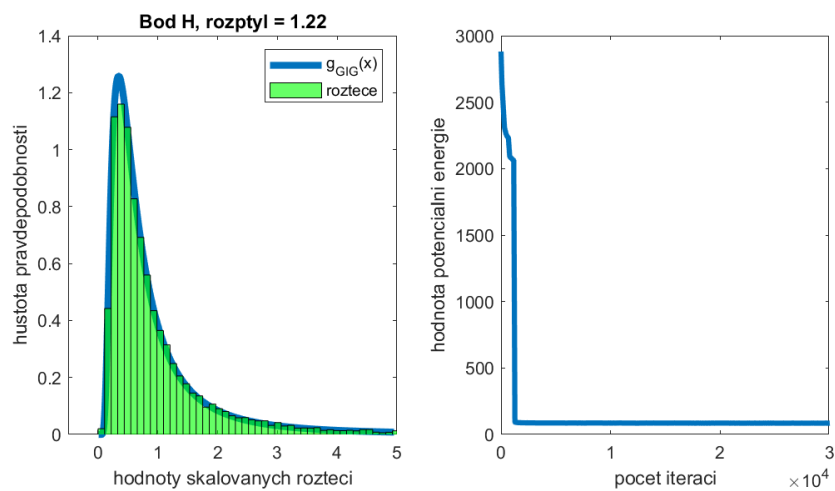
Obrázek 6.6: Bod E.



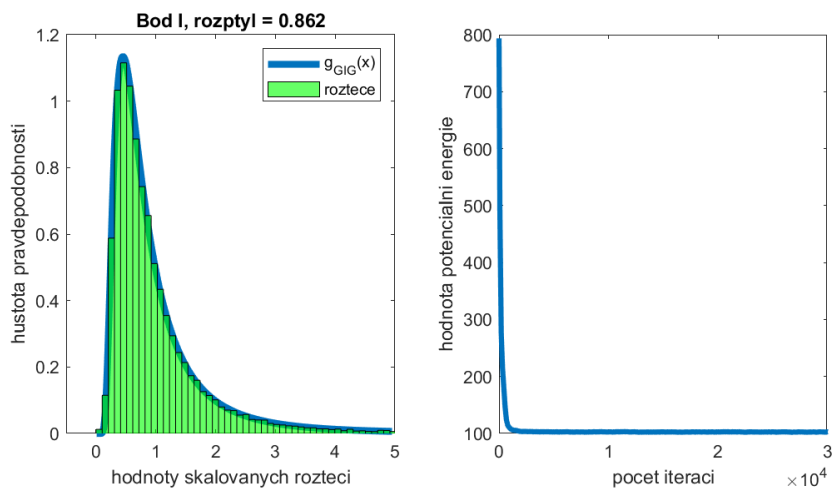
Obrázek 6.7: Bod *F*.



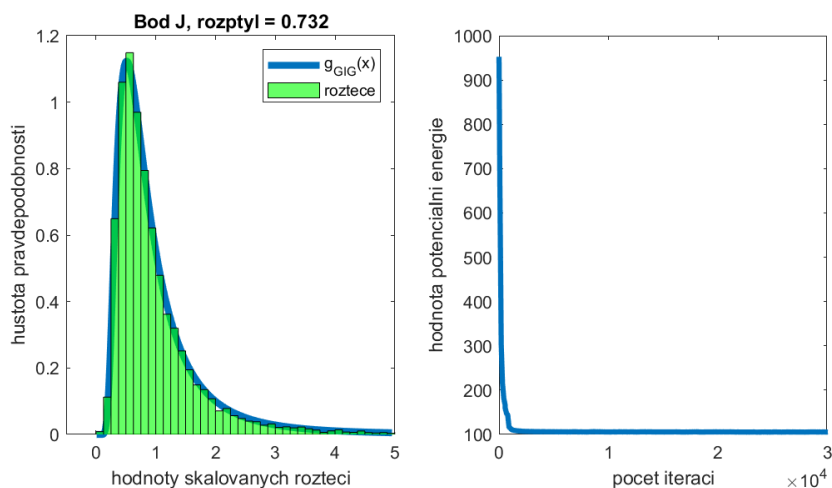
Obrázek 6.8: Bod *G*.



Obrázek 6.9: Bod *H*.



Obrázek 6.10: Bod *I*.



Obrázek 6.11: Bod *J*.

V tabulce 6.2 vidíme, že se nyní teoretický rozptyl a rozptyl simulací velmi liší. Zejména se jedná o body *F*, *H*, *J*, které leží velmi blízko linii škálovací podmínky. Body *A–H* však skončily s rozptylem větším než jedna, což je příznivý výsledek z hlediska klasifikace dle kompresibility. Možným vysvětlením pro body *I*, *J*, které skončily s rozptylem menším než jedna, i přestože dle parametrů by měly končit s rozptylem větším než jedna, je skutečnost, že při vyšších hodnotách  $\beta$ , které je závislé na hustotě provozu, se v reálných situacích superpoissonovské stavy již neobjevují. Každopádně tyto výsledky simulací modelu, který je v jiných případech velmi přesný, vyvolávají otázku, kde tato chyba nastává.

Je velice pravděpodobné, že by se mohla skrývat za aproximacemi parametrů, jelikož se tyto body nachází velmi blízko u hranic existence škálované funkce GIG. Hodnoty parametru  $\lambda$  jsou velmi malé, zejména pro body *F*, *H*, *J* popořadě 0.0020, 0.0045, 0.0090. Tato zjištění jsou motivací pro další bádání v problematice škálování funkce GIG a zpřesňování aproximací, v nejlepším případě nalezení analytického vztahu.

body	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
rozptyl simulace	1.11	1.36	1.07	3.33	2.74
rozptyl teoretický	1.42	2.09	1.80	2.14	2.10
body	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	<i>I</i>	<i>J</i>
rozptyl simulace	1.93	1.47	1.22	0.862	0.732
rozptyl teoretický	49.63	1.95	21.31	1.74	10.17

Tabulka 6.2: Tabulka rozptylů roztečí v závislosti na hodnotě  $\alpha$  a  $\beta$ .

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
souřadnice tvaru $[\beta, \alpha]$	[0.2, 0.3]	[0.5, -0.5]	[1.5, 0.5]	[0.1, -1.4]	[0.3, -1.6]
	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	<i>I</i>	<i>J</i>
souřadnice tvaru $[\beta, \alpha]$	[0.8, -1.5]	[1, -1.9]	[1.5, -1.4]	[1.6, -2.3]	[2, -2.9]

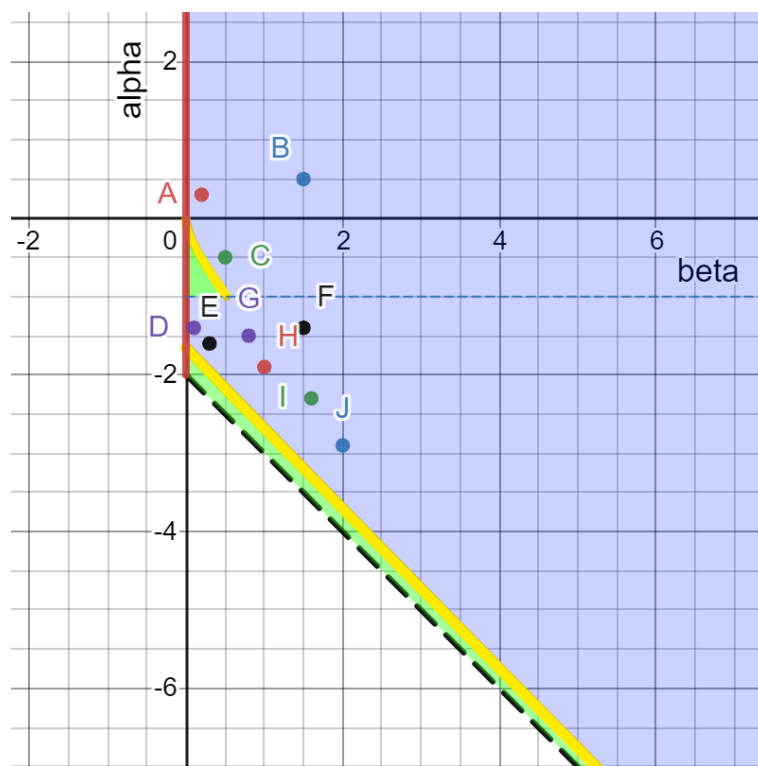
Tabulka 6.3: Tabulka bodů v prostoru parametrů  $\alpha, \beta$ .

### 6.2.2 Parametry pro rozptyl menší než 1

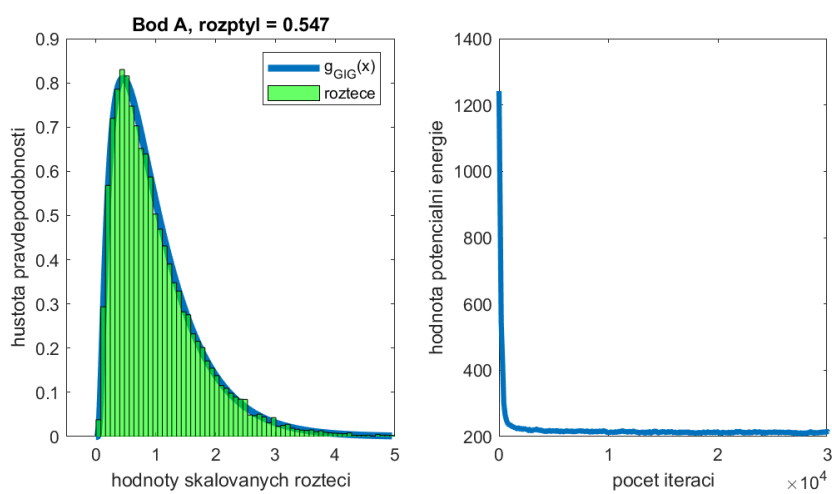
V této části budu vybírat body z oblasti označené modře, tedy oblast s očekávaným rozptylem menším než jedna. Postup bude obdobný jako u předchozí sekce.

body	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
rozptyl simulace	0.55	0.55	0.23	2.33	1.55
rozptyl teoretický	0.52	0.63	0.21	0.49	0.48
body	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	<i>I</i>	<i>J</i>
rozptyl simulace	0.66	0.63	0.35	0.47	0.42
rozptyl teoretický	0.28	0.31	0.18	0.27	0.30

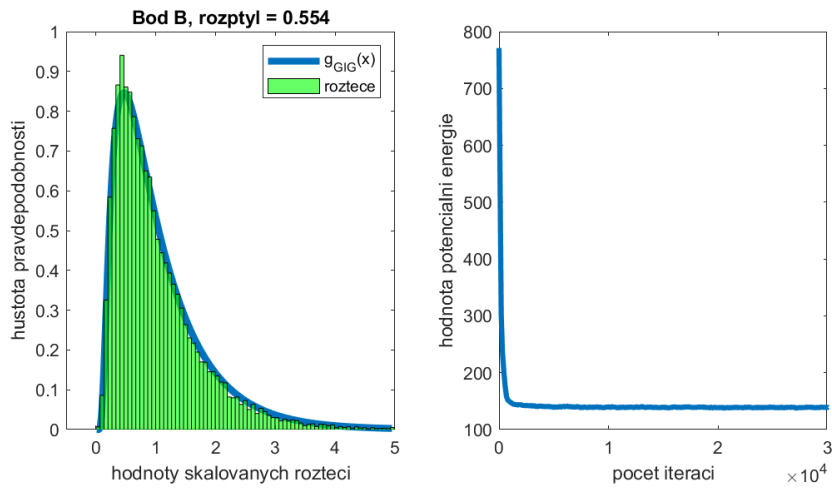
Tabulka 6.4: Tabulka rozptylů roztečí v závislosti na hodnotě  $\alpha$  a  $\beta$ .



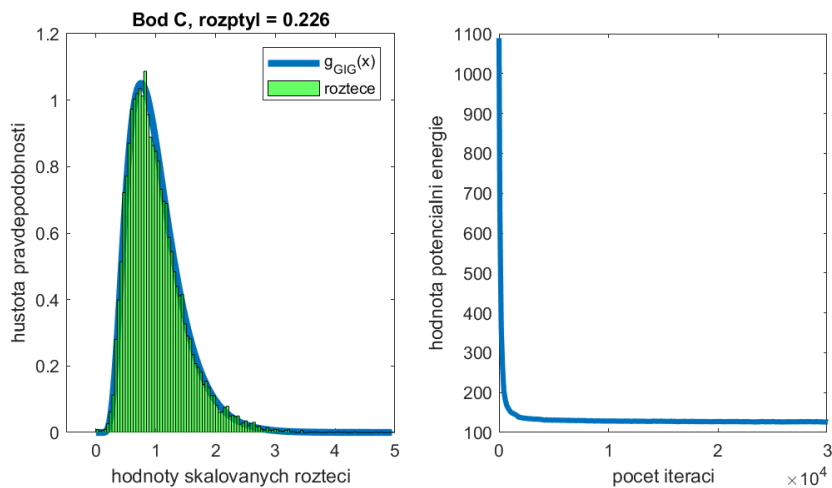
Obrázek 6.12: Body A – J určující vstupní parametry modelu s kombinovaným potenciálem.



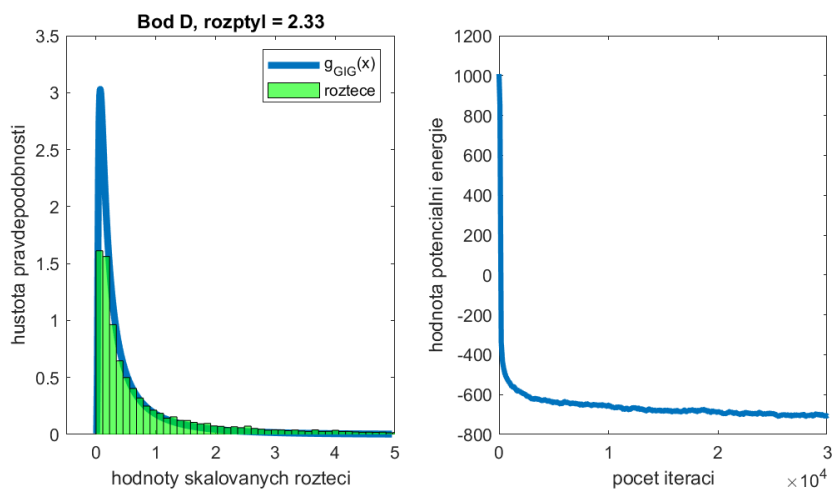
Obrázek 6.13: Bod A.



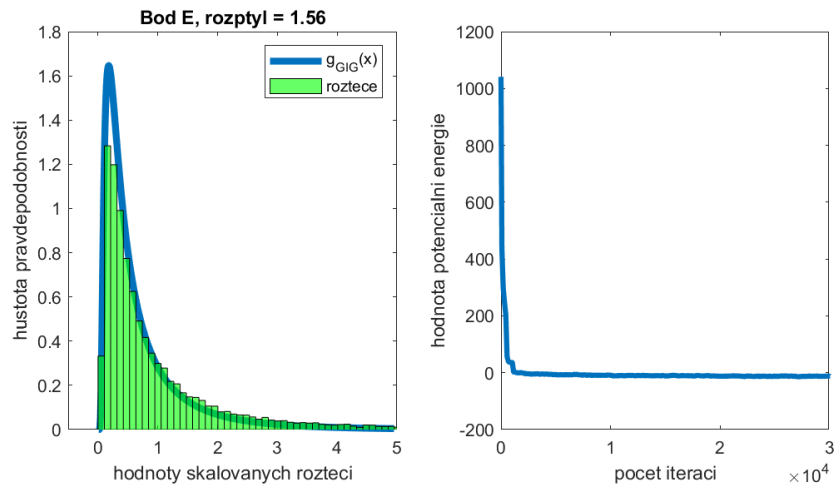
Obrázek 6.14: Bod A.



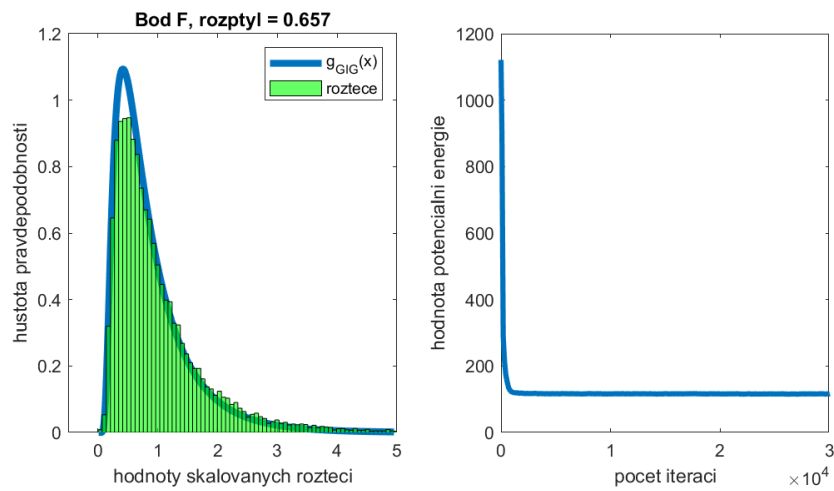
Obrázek 6.15: Bod C.



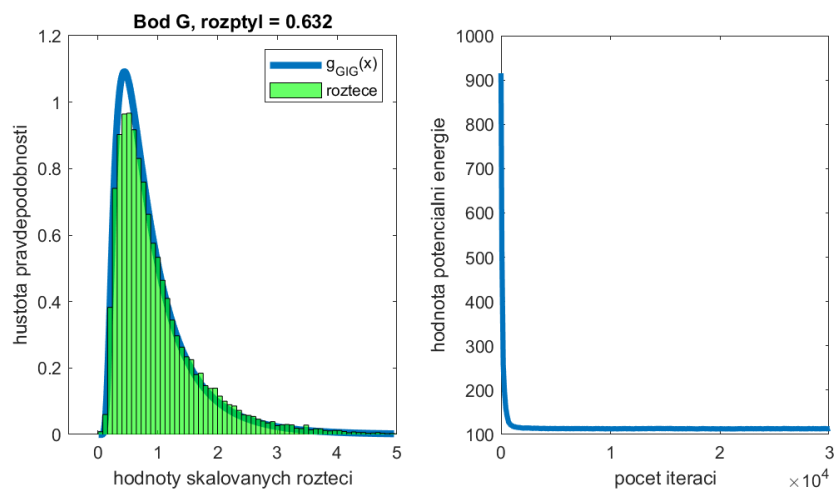
Obrázek 6.16: Bod D.



Obrázek 6.17: Bod *E*.

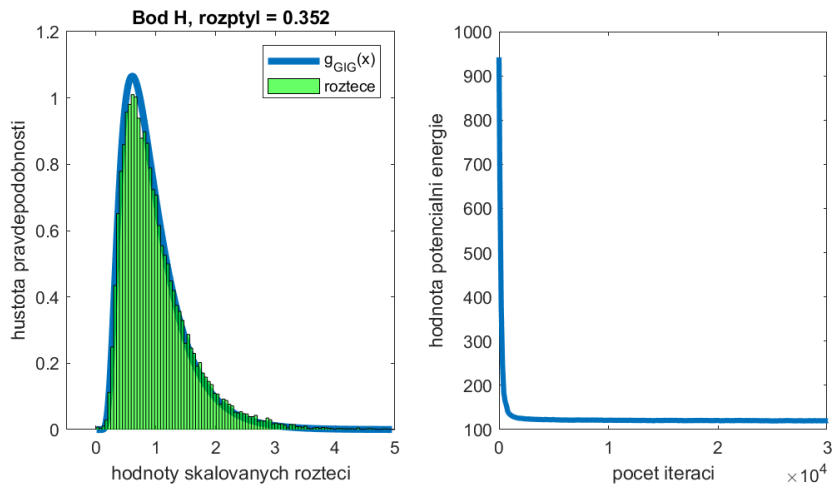


Obrázek 6.18: Bod *F*.

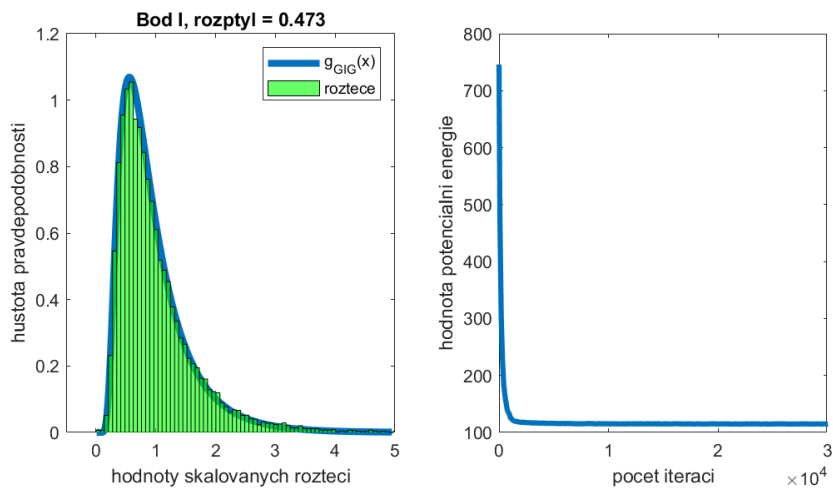


Obrázek 6.19: Bod *G*.

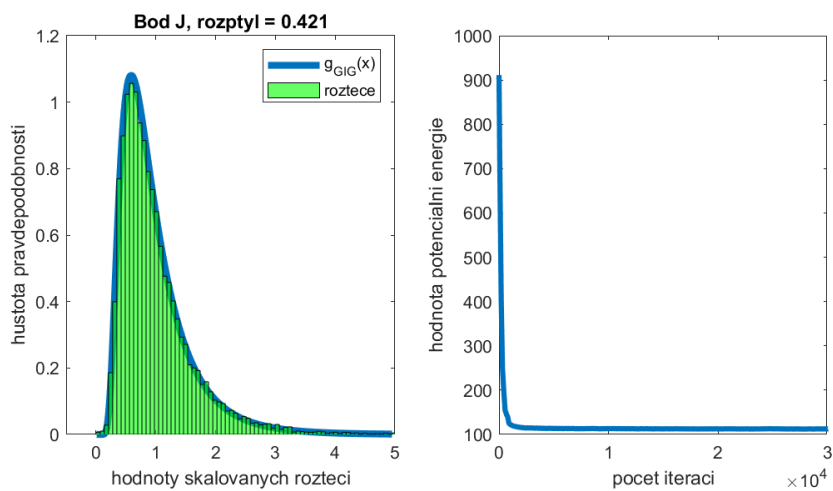




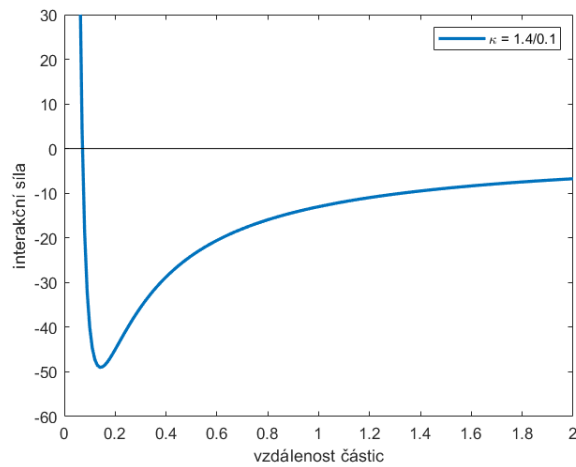
Obrázek 6.20: Bod *H*.



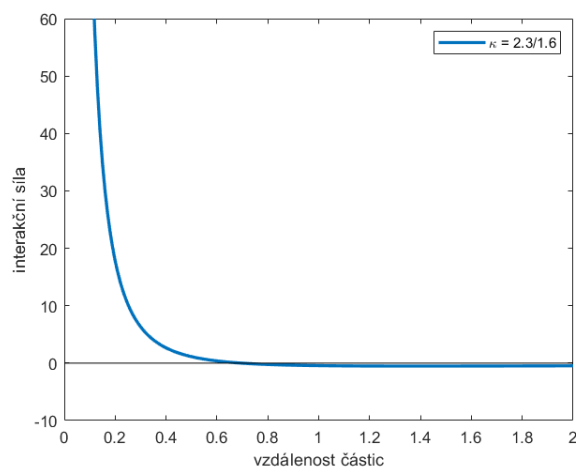
Obrázek 6.21: Bod *I*.



Obrázek 6.22: Bod *J*.



Obrázek 6.23: Průběh síly pro bod  $D$  ze sekce 6.2.2.

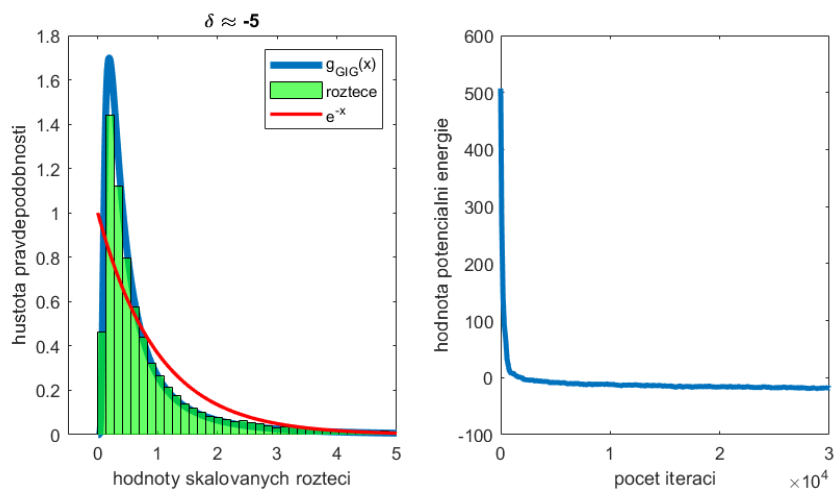


Obrázek 6.24: Průběh síly pro bod  $I$  ze sekce 6.2.1.

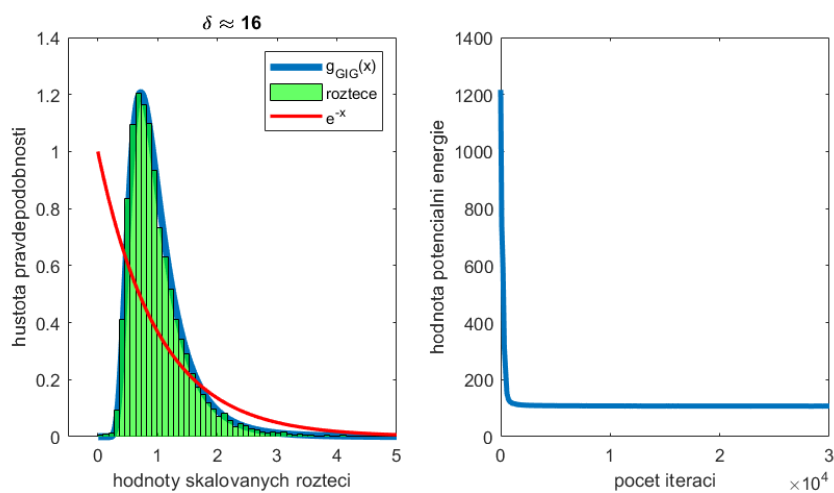
Dle tabulky 6.4 vidíme, že se rozptyly od teoretického opět liší, a to hlavně v případech, kdy je  $\alpha$  záporná a působí atraktivní síla. Výsledky pro simulace nesplňující očekávané výsledky v sekcích 6.2.1 a 6.2.2 lze opodstatnit za pomoci grafů průběhu příslušných sil. Na obrázku 6.23 vidíme, že přestože se dle teoretického rozptylu ovlivněného aproximací  $\lambda$  nacházíme v oblasti s rozptylem menším než jedna, průběh síly vykazuje výraznou atrakci. Naopak na obrázku 6.24 můžeme vidět, že v tomto případě je síla částečně atraktivní, ale jen velmi slabě, a proto nedokáže dostatečně rozptýlit rozdělení rozestupů mezi částicemi.

### 6.2.3 Parametry pro rozptyl roven 1

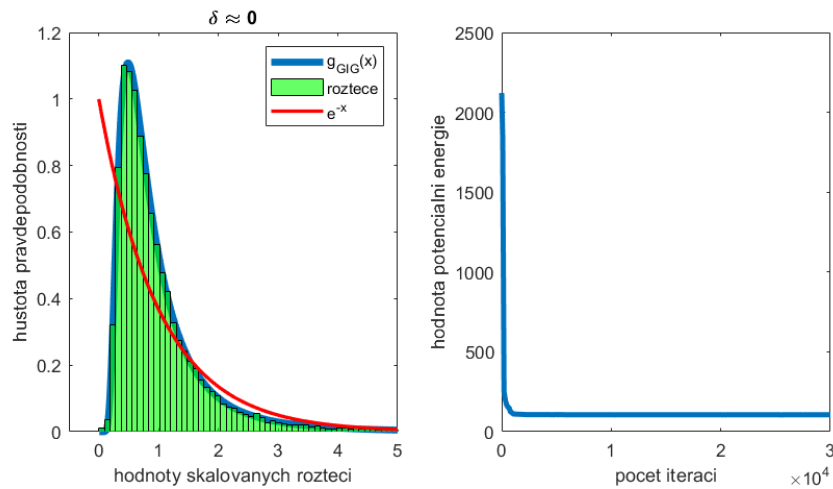
Zde využijeme poznatky z kapitoly 3. Zajímat nás bude, jak vypadá rozdělení roztečí jednak pro nulový bod deflekcce značený červeně, ale i pro body, které mají deflekcí od nuly vychýlenou. Histogramy proložíme funkcí GIG a porovnáme s exponenciální funkcí z bezinterakčních systémů. Nejprve body s vychýlenou deflekcí, pro  $\alpha \leq -1$  je to například kombinace parametrů  $\alpha = -2.0654$  a  $\beta = 0.4$ . Pro takovou kombinaci je  $\delta$  přibližně  $-5$ . Tuto simulaci můžeme vidět na obrázku 6.25. Z druhé strany, tedy kde je  $\delta$  výrazně kladné, si můžeme vzít například parametry  $\alpha = -6.4557$  a  $\beta = 4.7$ . V tomto případě je  $\delta \approx 16$ . Výsledek simulace je na obrázku 6.26.



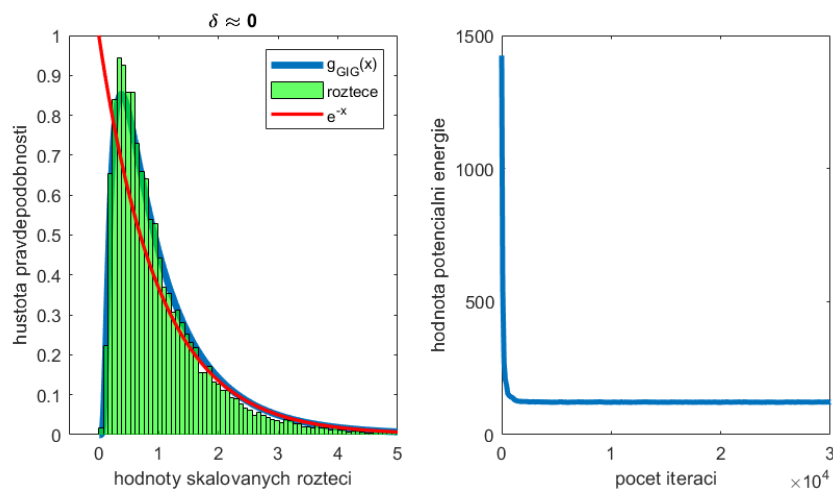
Obrázek 6.25: Numerická simulace pro  $\alpha = -2.0654$  a  $\beta = 0.4$ .



Obrázek 6.26: Numerická simulace pro  $\alpha = -6.4557$  a  $\beta = 4.7$ .



Obrázek 6.27: Numerická simulace pro  $\alpha = -3.3984$  a  $\beta = 1.6992$ .



Obrázek 6.28: Numerická simulace pro  $\alpha = -0.8929$  a  $\beta = 0.4464$ .

Pro  $\alpha \leq -1$  odpovídá červený bod, tedy bod kdy je deflektce nulová a kompresibilita rovna jedné, parametrům  $\beta \approx 1.6992$  a  $\alpha = -3.3984$ . Algoritmickou realizaci můžeme vidět na obrázku 6.27. Pro část, kde je  $\alpha > -1$  se odpovídají nulové deflektci parametry  $\alpha = -0.8929$  a  $\beta = 0.4464$ . Algoritmickou realizaci můžeme vidět na obrázku 6.28. Ani jedno z těchto rozdělení zdaleka neodpovídá Poissonově systému a exponenciálnímu rozdělení. Lze tedy předpokládat, že v systémech o těchto parametrech přitažlivé a odpudivé síly působí a není bezinterakční. Rovnováhu vzhledem ke stochastickému šumu, přitažlivosti a odpudivosti dle daných pozorování nesplňuje. Tímto zjištěním se tak narušuje dosavadní klasifikace systémů dle stochastické rigidity a její směrnice. S ohledem na zjištěné poznatky bude v budoucnu nutné zvážit, zda by jednotlivé stavy vzešlé z klasifikace podle hladiny kompresibility neměly být pojmenovány jinak než dosud. Ukázalo se totiž, že zatímco stavy Poissonova BČS jsou (v řeči hladiny kompresibility) skutečně poissonovské, tak ale existují i poissonovské stavy (tedy stavy s kompresibilitou rovnou jedné), jejichž generátorem není exponenciální funkce, a tudíž se nejedná o Poissonovy částicové systémy.

## Kapitola 7

# Kompresibilita v systémech s repulzivním potenciálem

Úkolem této kapitoly je dokázat nebo vyvrátit hypotézu, že v krátkodosahovém systému s obecným, čistě repulzivním potenciálem je statistická kompresibilita menší nebo rovna jedné. Jaké jsou tedy požadavky na daný potenciál a systém? Repulzivním částicovým systémem rozumíme systém, jež má za generátor funkci  $g(x)$  (5.3). Po potenciálu  $\varphi(x)$  požadujeme, aby v potenciálu nebyly žádné nespojitosti, což by ani fyzikálně nedávalo smysl, tedy aby to byla spojitá funkce a měla spojitou derivaci na intervalu  $(0, +\infty)$ . Jak již bylo řečeno, požadujeme pouze odpudivost, tzn. že první derivace potenciálu  $\varphi$  je záporná na intervalu  $(0, +\infty)$ . Dále musí, jako každý potenciál v této práci, splňovat podmínku bezkoliznosti a vymizení interakcí pro velké vzdálenosti. Poslední jsou kladeny podmínky na limity první derivace potenciálu  $\lim_{x \rightarrow 0_+} \varphi'(x) = -\infty$  a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi'(x) = 0$ . Výhodou je, že funkce  $g(x)$  s takto obecně zvoleným potenciálem splňuje balanční axiomy i balanční kritérium a repulzivní částicový systém je zároveň i balančním částicovým systémem.

V době, kdy byla diplomová práce zadána, tato hypotéza o omezenosti rozptylu světlostí v krátkodosahových repulzivních systémech nebyla potvrzena. Nyní už je sestrojena věta o subpoissonovskosti repulzivního částicového systému [Lhotáková, Nábělek, Krbálek]. Důkaz této věty provedu na následujících stranách.

### 7.1 Subpoissonovskost repulzivního částicového systému

Balanční částicový systém s repulzivním generátorem (5.3) je pro  $\beta$  kladné vždy subpoissonovský. To je znění věty, které chceme dokázat. Pohybujeme se v krátkodosahových škálovaných systémech, kde rozptyl světlostí je roven kompresibilitě viz 2.3. Rozptyl splňuje rovnost  $\text{Var}(X) = \mu_2(g) - \mu_1^2(g)$ . Systém je škálovaný, a tudíž  $\mu_1(g) = 1$ . Proto dokazování této věty přechází k důkazu, že druhý moment funkce (5.3) je menší než 2. K tomuto tvrzení dojdeme za pomoci bližších znalostí parametrů  $\alpha, \beta, \lambda$  a konstanty  $A$ . Nejprve si vezmeme integrál, o kterém, vzhledem k požadavkům na potenciál, víme, že je záporný. Jedná se o integrál

$$\int_{\mathbb{R}} A\theta(x)\varphi'(x)x^{\alpha+1}e^{-\beta\varphi(x)}e^{-\lambda x} dx.$$

V mezích integrálu uvážíme Heavisideovu funkci a na integrál použijeme metodu per partes, kde

$$\begin{aligned} u &= Ax^{\alpha+1}e^{-\lambda x} & v' &= \varphi'(x)e^{-\beta\varphi(x)} \\ u' &= A(\alpha+1-\lambda x)x^\alpha e^{-\lambda x} & v &= -\frac{1}{\beta}e^{-\beta\varphi(x)} \end{aligned}$$

Tímto rozdělíme integrál na dvě části, a to

$$\left[ -\frac{A}{\beta}x^{\alpha+1}e^{-\beta\varphi(x)}e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{A}{\beta}(\alpha+1-\lambda x)x^\alpha e^{-\lambda x}e^{-\beta\varphi(x)} dx.$$

První již zintegrovaná část je po dosazení mezních hodnot 0 a  $+\infty$  nulová a zbyde nám pouze druhá část, tedy integrál. Tento integrál za pomoci linearit integrálu opět rozdělíme a získáme

$$\frac{\alpha+1}{\beta} \int_0^{+\infty} Ax^{\alpha+1}e^{-\beta\varphi(x)}e^{-\lambda x} dx - \frac{\lambda}{\beta} \int_0^{+\infty} Ax^{\alpha+1}e^{-\lambda x}e^{-\beta\varphi(x)} dx,$$

tyto dva integrály jsou nultým a prvním momentem našeho rozdělení  $g(x)$ , o kterém však předpokládáme, že je škálované, proto oba integrály mají hodnotu jedna a výsledkem je po sečtení zlomek

$$\frac{\alpha+1-\lambda}{\beta}.$$

Pokud tedy nyní půjdeme po rovnostech zpět, uvidíme, že jsme začínali toto odvození s tím, že první integrál je záporný, a tudíž máme nerovnost

$$0 > \frac{\alpha+1-\lambda}{\beta}.$$

Jelikož je  $\beta$  kladné, můžeme jím nerovnici přenásobit a tím už se dostáváme ke vztahu

$$\lambda > \alpha+1.$$

Tuto skutečnost využijeme k dalšímu dílčímu tvrzení, ze kterého nám vyplyne informace o konstantě  $A$ . Opět využijeme toho, že funkce  $g(x)$  je škálovaná a uvážíme Heavisideovu funkci,

$$1 = \int_0^{+\infty} Ax^\alpha e^{-\beta\varphi(x)}e^{-\lambda x} dx \leq \int_0^{+\infty} Ax^\alpha e^{-(\alpha+1)x} dx,$$

člen  $e^{-\beta\varphi(x)}$  jsme také omezili 1, protože  $\beta$  je kladné a potenciál repulzivní. Poslední integrál lze vypočítat pomocí substituce  $t = (\alpha+1)x$ , která vede na integrál Gamma funkce. Integrál je tedy

$$\int_0^{+\infty} Ax^\alpha e^{-(\alpha+1)x} dx = A \frac{\alpha!}{(\alpha+1)^{\alpha+1}},$$

z čehož vyplývá, že

$$A \geq \frac{(\alpha+1)^{\alpha+1}}{\alpha!} > 1.$$

Pomalou ale jistě se blížíme k důkazu tvrzení, že  $\mu_2(g) < 2$ , důležitým poznatkem však je, že pro všechna kladná  $x$  se výrazy  $e^{-\beta\varphi(x)}$ ,  $e^{-\lambda x}$  s přibývajícím hodnotou parametrů  $\beta$  a  $\lambda$  zmenšují. Zároveň dolní hranice pro parametr  $\lambda$  je  $\alpha + 1$  a toto využijeme v omezení druhého momentu,

$$\mu_2(g) = \int_0^{+\infty} Ax^{\alpha+2} e^{-\beta\varphi(x)} e^{-\lambda x} dx \leq \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \lim_{\lambda \rightarrow \alpha+1} \int_0^{+\infty} Ax^{\alpha+2} e^{-\beta\varphi(x)} e^{-\lambda x} dx,$$

provedeme nyní stejné omezení u druhého momentu, jako jsme provedli u předchozí části a oddělíme limity a integrál, protože integrand už nyní nebude závislý na parametrech  $\beta$ ,  $\lambda$ , mimo  $A$ , které je závislé na  $\beta$ ,  $\lambda$ .

$$\mu_2(g) \geq \int_0^{+\infty} x^{\alpha+2} e^{-(\alpha+1)x} dx \cdot \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \lim_{\lambda \rightarrow \alpha+1} A(\beta, \lambda)$$

Tento integrál lze nyní vyřešit substitucí  $t = (\alpha + 1)x$  a jelikož je

$$A = \left( \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-\beta\varphi(x)} e^{-\lambda x} dx \right)^{-1},$$

potom se výraz limit dá vyjádřit v řeči Gamma funkcí

$$\lim_{\beta \rightarrow 0^+} \lim_{\lambda \rightarrow \alpha+1} A(\beta, \lambda) = \frac{(\alpha + 1)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha + 1)}.$$

Integrál i limity lze tím pádem vyřešit, a tím se dostáváme k nerovnosti

$$\mu_2(g) \geq \frac{\Gamma(\alpha + 3)(\alpha + 1)^{\alpha+1}}{(\alpha + 1)^{\alpha+3}\Gamma(\alpha + 1)} = \frac{\alpha + 2}{\alpha + 1} = 1 + \frac{1}{\alpha + 1}.$$

Tím jsme završili důkaz o omezenosti druhého momentu repulzivního generátoru, jehož důsledek je výjimečně důležitý pro teorii balancovaných částicových systémů. Jeho důsledek je věta o subpoissonovskosti repulzivního částicového systému, tedy že BČS s repulzivním generátorem (5.3) je pro kladné hodnoty parametru  $\beta$  vždy subpoissonovský. Abychom toto tvrzení řádně dokončili, připomeneme si určité souvislosti. V tomto případě se jedná o krátkodosahový systém, pro který platí, že rozptyl roztečí je roven kompresibilitě, což je směrnice asymptoty statistické rigidity, pomocí které je možné klasifikovat částicové systémy. Systém subpoissonovský je charakterizován rozptylem světlostí menším než jedna. Vezmeme si tedy rozptyl roztečí v krátkodosahovém systému

$$\text{Var}(\mathcal{R}) = \chi = \mu_2(g) - \mu_1^2(g).$$

Systém je navíc škálovaný, takže  $\mu_1 = 1$  a pokud přidáme čistou repulzi, získáme informaci o druhém momentu, a to  $\mu_2 < 2$ . Tím pádem je

$$\text{Var}(\mathcal{R}) = \mu_2(g) - 1 < 1.$$

Tím je celý důkaz dokončen a můžeme tuto část uzavřít. Pokud ve škálovaném systému působí pouze odpudivé síly, pak nemůže směrnice asymptoty statistické rigidity překonat hodnotu jedné. Statistickou rigidity lze pak z dopravních dat snadno dopočítat a právě tato věta umožňuje spolehlivé určení přítomnosti přitažlivých sil v případě, že odhadnutá kompresibilita přesahuje hodnotu jedna. Závěrem bych

ještě ale podotkl, že to z pohledu empirických dat neznamena, že pokud kompresibilita je menší nebo rovna jedné, pak se přitažlivé síly v systému nenachází. V rámci zkoumání kombinovaného potenciálu a přitažlivých sil, by po vyřešení této věty byla rozlišitelnost sil, působících v systémech s rozptylem světlostí menší než jedna, zajímavým problémem k řešení. Dále se po dosažení tohoto výsledku ve spojitosti se zjištěními v kapitole 5 také domnívám, že pokud je v systému naměřena kompresibilita rovna jedné a rozdělení světlostí neodpovídá exponenciálnímu rozdělení, pak je tu silné podezření, že i v takovém systému musí atraktivní síly působit.



## Kapitola 8

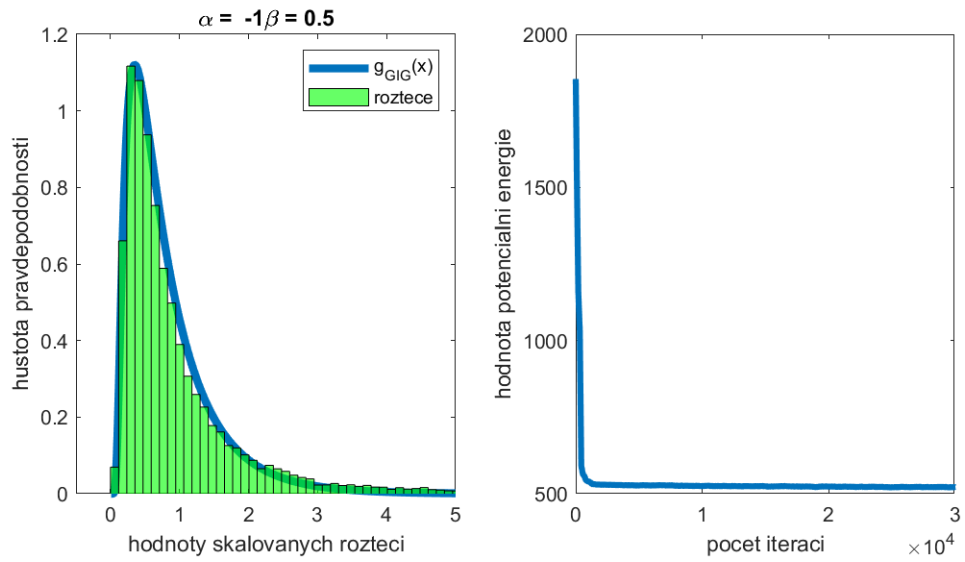
# Dopravní plyn se střednědosahovým kombinovaným potenciálem

Posledním úkolem této práce bylo testovat hypotézu, zdali numerický model termodynamického dopravního plynu se střednědosahovým potenciálem generuje GIG distribuované rozestupy mezi částicemi. Použijeme tedy kombinovaný potenciál a interakční dosah roven 3. S tímto nastavením budeme model postupně spouštět pro různé kombinace parametrů. Celý proces začne nagenrováním dat za pomocí numerického modelu. Poté pomocí metody momentů (viz [9]) budeme odhadovat parametry pro škálovanou verzi distribuce GIG. Máme tedy dva vzorky dat, u kterých budeme provádět dvouvýběrový test dobré shody (Goodness of fit) Kolmogorov-Smirnov. Vstup bude vypadat následovně:

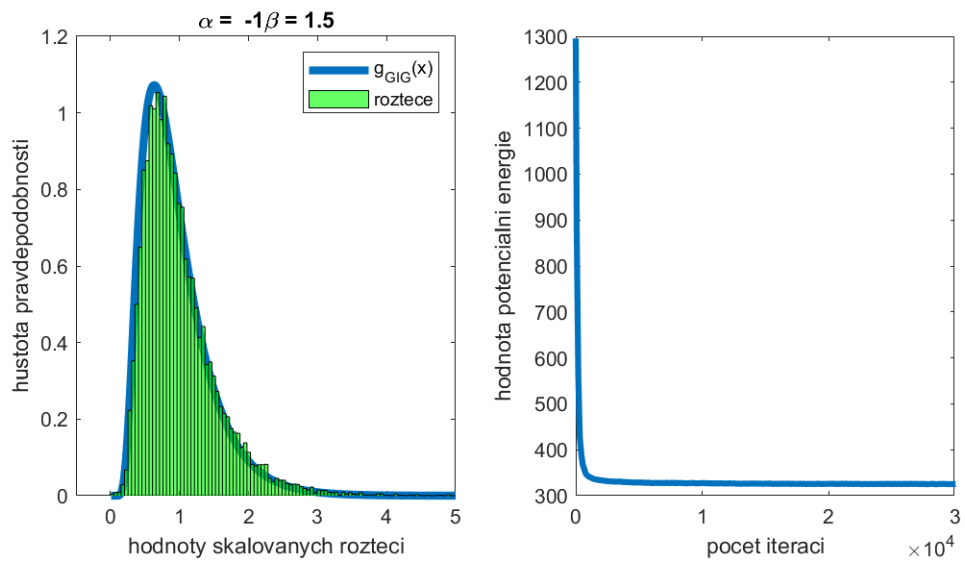
```
%% Volba parametrů
beta = 1;
alpha= 1.5;
koefSumu = 0.9;
dosah = 3;
potencial = 'combined'; %logarithmic, hyperbolic, hyperbolic_multi, combined
kappa = -alpha/beta;

pocet_iteraci = 30000;
pocet_castic = 100;
pocet_behu = 200;
```

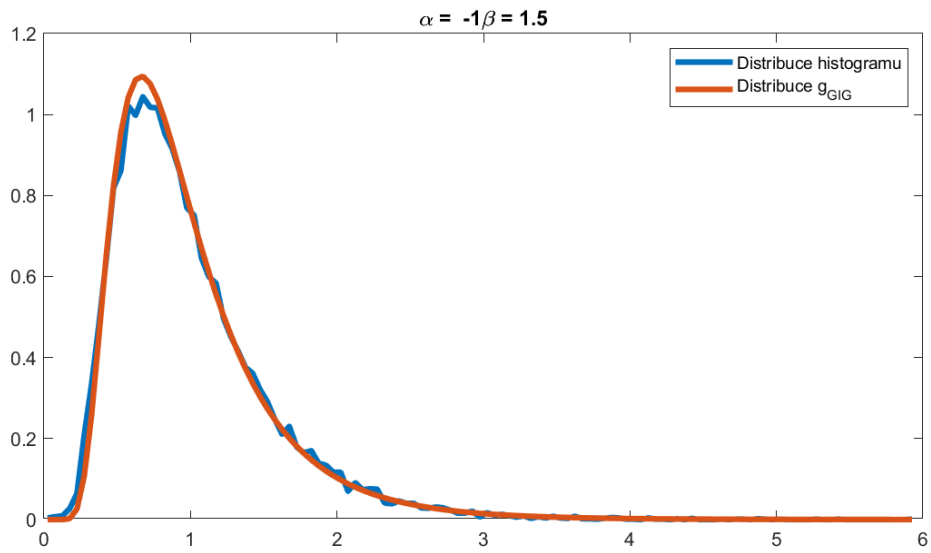
Výsledky simulací můžete vidět na obrázcích 8.1-8.7. Křivky, které prokládají histogramy, jsou funkce  $g_{GIG}$ , jehož parametry jsou parametry dosazené na vstupu do simulace - taková funkce odpovídá krátkodosahovému systému. Naopak na obrázcích porovnávajících modrou a červenou křivku, je  $g_{GIG}$ , tedy červená křivka  $g_{GIG}$  s odhadnutými parametry pomocí metody momentů. V histogramech je pro zvoleno rozdělení pro krátkodosahový systém z toho důvodu, aby čtenář mohl porovnat změnu oproti systému střednědosahovému. Na obrázcích s odhadnutým  $g_{GIG}$  je vyobrazení vstupu do testování hypotézy shodnosti distribucí. Podle grafických výsledků už můžeme tušit, že všechny tyto testy skončily s totožným výsledkem, a to nezamítnutím hypotézy o shodnosti distribucí na hladině 0.05.



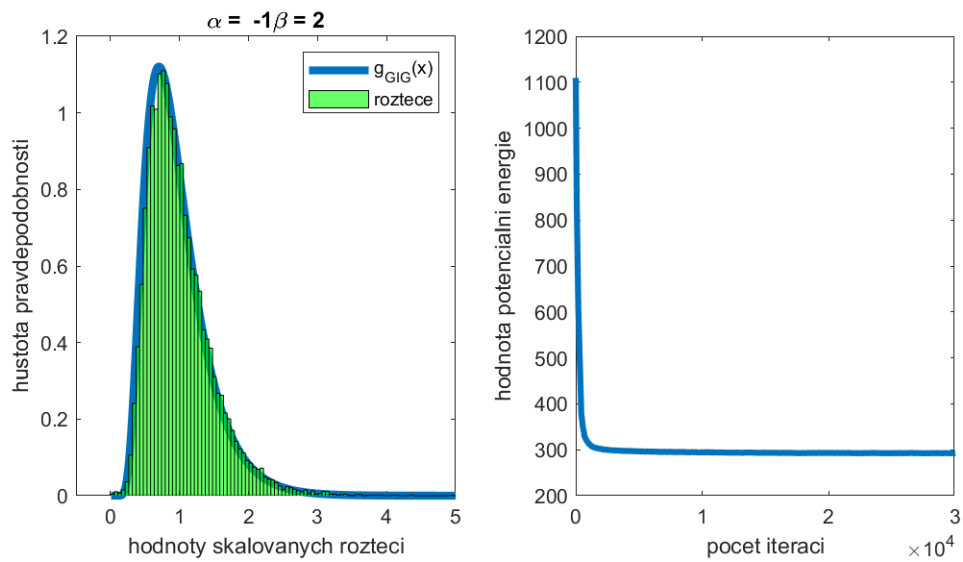
Obrázek 8.1: Realizace středněsahového kombinovaného potenciálu.



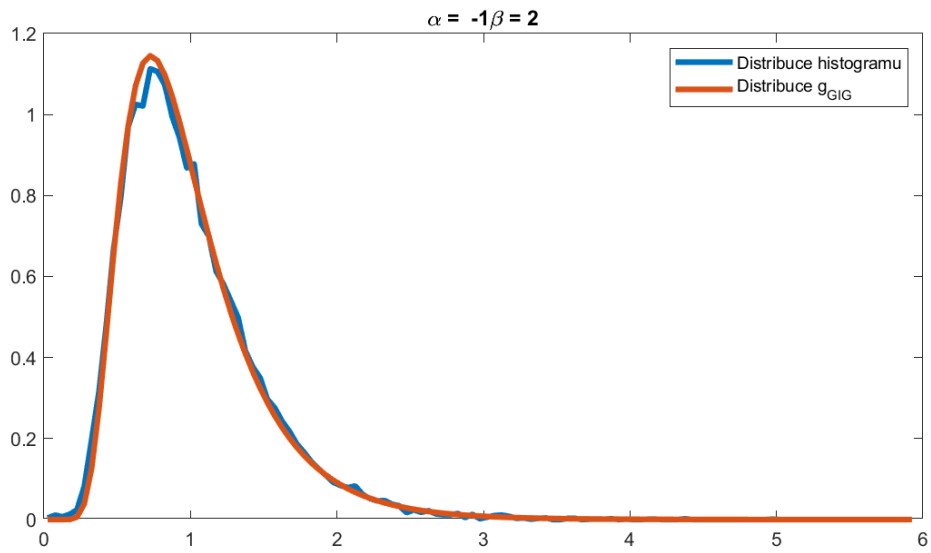
Obrázek 8.2: Realizace středněsahového kombinovaného potenciálu.



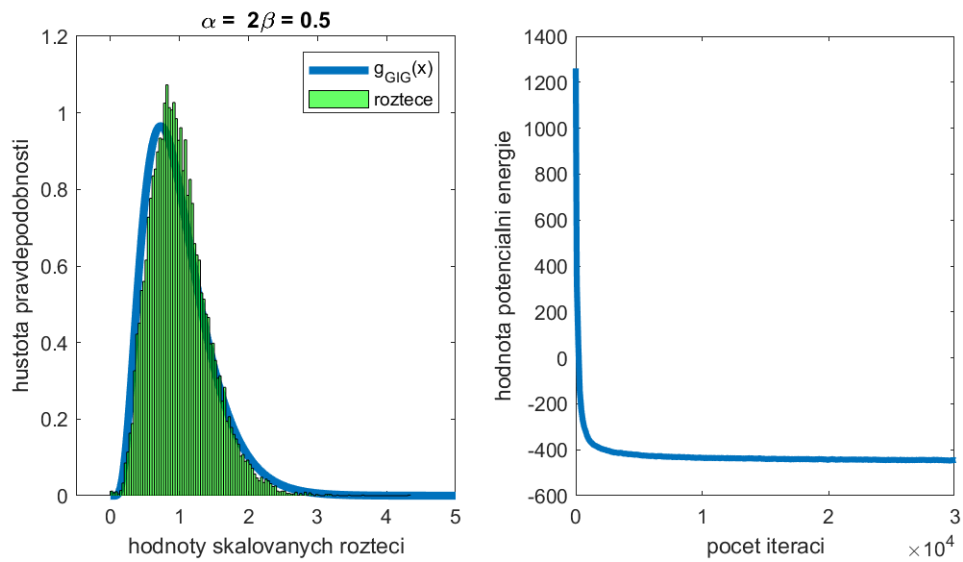
Obrázek 8.3: Porovnání distribuce histogramu a  $g_{GIG}$ .



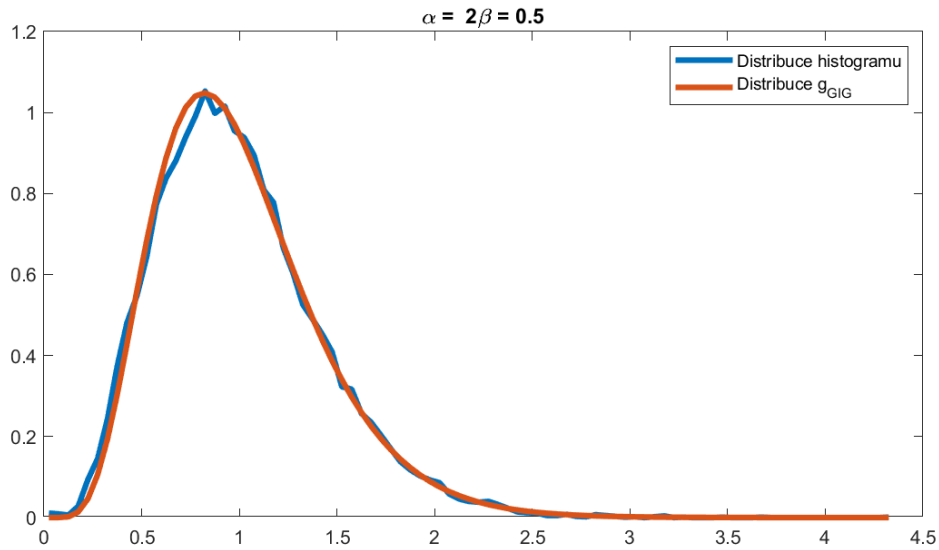
Obrázek 8.4: Realizace střednědosahového kombinovaného potenciálu.



Obrázek 8.5: Porovnání distribuce histogramu a  $g_{GIG}$ .



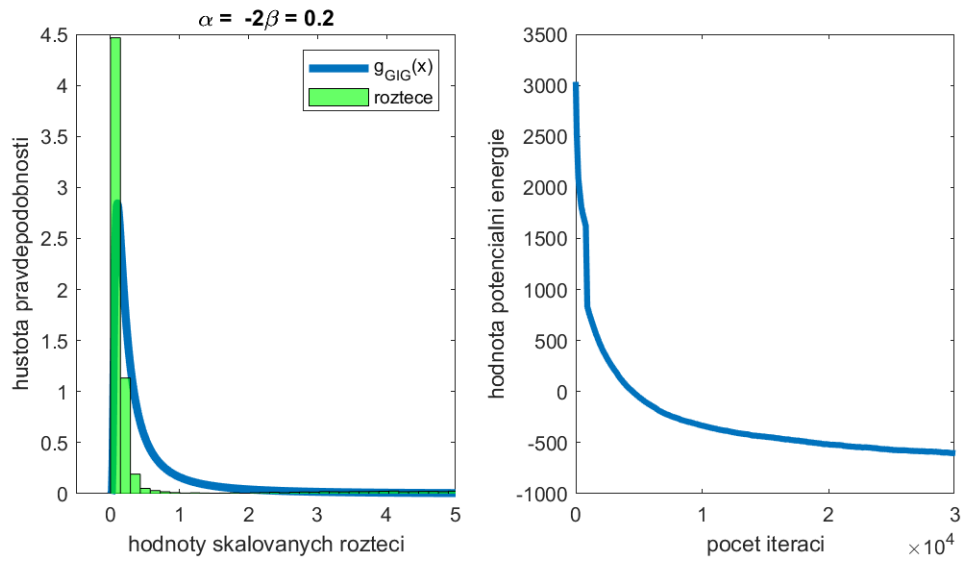
Obrázek 8.6: Realizace střednědosahového kombinovaného potenciálu.



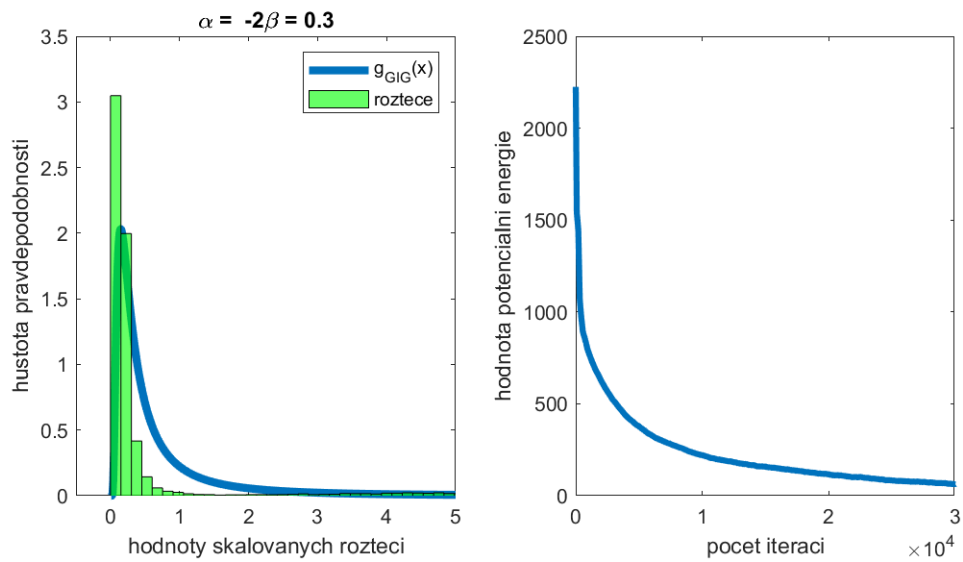
Obrázek 8.7: Porovnání distribuce histogramu a  $g_{GIG}$ .

Problémovými jsou však simulace pro malé hodnoty  $\beta$  (přibližně  $<0.3$ ) a zároveň záporné hodnoty  $\alpha$ . Výsledky těchto simulací, můžete vidět na obrázcích 8.8, 8.9, kde vidíme, že jsou velmi vzdáleny od rozdělení krátkodosahového systému. Vysvětlením je příliš velký silový koeficient  $\kappa$ , který je definován jako  $\kappa = -\frac{\alpha}{\beta}$ . V případě, že je  $\beta$  malé a  $\alpha$  záporné výrazně větší v absolutní hodnotě než  $\beta$ , potom  $\kappa$ , které určuje intenzitu působení přitažlivých sil je příliš vysoké. Vlivem vyšší dosahovosti systému a velké přitažlivosti se tak tvoří shluky částic, které nemají tendenci se rozpojovat, jelikož atraktivní síla je příliš velká.

Abychom to shrnuli, v případě, že používáme kladné hodnoty  $\alpha$ , pak kombinovaný potenciál je potenciálem čistě repulzivním. V takových případech se potvrzuje hypotéza o GIG distribuovaných rozestupech mezi částicemi. Dále GIG distribuované rozestupy zaznamenáváme, pokud záporné  $\alpha$  není v absolutní hodnotě příliš velké (v porovnání s parametrem  $\beta$ ). V případě, že je přitažlivé působení velmi silné, pak se v systémech částice shlukují a testy o dobré shodě s rozděleným GIG jsou tak zamítnuty.



Obrázek 8.8: Realizace středněsahového kombinovaného potenciálu.



Obrázek 8.9: Realizace středněsahového kombinovaného potenciálu.

# Závěr

Na počátku této práce se čtenář seznámil se základními veličinami VHM, modelem termodynamického dopravního plynu, balančními systémy a jejich základními charakteristikami. Jedna z charakteristik byla podrobněji rozpracována, a to statistická rigidita. U této charakteristiky se podařilo analyticky odvodit tvar asymptoty, ke které se rigidita velmi blízko za počátkem upíná. Důležitá je však její směrnice (kompresibilita) a intercept (deflektce), což jsou charakteristiky, podle kterých lze částicové systémy klasifikovat. Ukázalo se však, že nynější klasifikace nepočítá s určitými stavy systémů s kombinovaným potenciálem. Při určitém nastavení parametrů lze takový systém dostat do stavu, který je z hlediska kompresibility a deflektce nerozpoznatelný od Poissonova systému, přičemž jeho distribuce světlostí neodpovídá exponenciálnímu rozdělení a je jisté, že v systému nějaké síly působí. To motivuje ke zvážení klasifikace stavů dle kompresibility, resp. možnému oddělení této klasifikace od systému s kombinovaným potenciálem nebo určení upřesňujících předpokladů pro tuto klasifikaci.

Třetí kapitola měla za úkol určit rozložení parametrů  $\alpha, \beta$  v závislosti na rozptylu světlostí. Tento rozptyl s příslušnými parametry by v ideálním stavu měl korespondovat se systémem, který je generovaný za použití stejných parametrů. Ukázalo se však, že tento vztah je v určitých oblastech narušen z důvodu nepřesné aproximace pro nízké hodnoty parametru  $\lambda$ . Domněnka vycházející z této práce však předpokládá, že vhodnější resp. přesnější způsob určení superpoissonovských stavů by mohl fungovat prostřednictvím silového koeficientu, který určuje sílu atraktivní interakce. V závislosti na volbě vstupních parametrů do simulace  $\alpha, \beta$  lze tento koeficient určit. Ve specifických případech, kde dle teoretického rozptylu by atraktivní síly neměly mít příliš silný vliv, je tento koeficient dostatečně velký na to, aby systém ovlivnil natolik, že jeho rozptyl světlostí překlene hranici rozptylu poissonovského systému.

Ve čtvrté kapitole je stručný popis používaného numerického modelu, který je oproti minulým verzím násobně zrychlen, což umožňuje generovat větší množství výsledků a provádět simulace pro mnoho kombinací parametrů. Zároveň je model přizpůsoben zaměnitelnosti typů potenciálů, dosahu interakce a dalších parametrů. Z toho důvodu poskytnu příslušný kód k dalšímu použití.

Kapitola o kompresibilitě v krátkodosahových repulzivních systémech obsahuje větu o subpoissonovskosti těchto systémů. Tato věta je zcela zásadní pro teorii částicových systémů, jelikož nám dává jistotu, že pokud se v systému nachází pouze odpuzivý potenciál, pak rozptyl světlostí nemůže přerůst hodnotu 1. Z toho si tedy můžeme přímo vyvodit fakt, že pokud je naměřený rozptyl roztečí v systému větší než jedna, pak to nutně implikuje přítomnost atraktivních sil. To však neznamená, že atraktivní síly se vyskytují v systémech, kde jsme je dosud nehledali, a to v subpoissonovských. Atraktivní síly se vyskytují i v systémech, kde je kompresibilita menší než 1, v těchto systémech jsou však velmi slabé a jejich účinky se tak zřetelně neprojeví na výsledném rozptylu světlostí. Tato práce tak nabízí zajímavý problém k řešení, což je detekce přitažlivých sil v subpoissonovských systémech nebo také nalezení vztahu, který by propojil parametry  $\alpha, \beta$  se silou působící v systému, tak aby bylo možné předem rozpoznat,

zdali je koeficient  $\kappa$  dostatečně silný na to, aby atraktivní síly výrazně ovlivňovaly rozdělení poloh částí v rovnovážném stavu.

Předmětem poslední části byl model termodynamického dopravního plynu se střednědosahovým kombinovaným potenciálem. Úkolem bylo zjistit, zdali takový model generuje GIG - distribuované rozestupy mezi částicemi. Ve většině případů se tato hypotéza potvrdila, avšak byly nalezeny určité oblasti parametrů, které tuto hypotézu zamítají. Jsou to právě oblasti, kde je vliv silového potenciálu příliš silný a z důvodu střednědosahovosti systému se v simulacích tvoří shluky částic, které se ze shluku již nemohou odpojit, protože přitažlivá síla je příliš velká. V této práci je vyobrazen jen zlomek možných a provedených simulací, proto pro účely oboru VHM rád poskytnu numerický model sepsaný v prostředí *MATLAB*, pomocí kterého je možné si simulace vyzkoušet.

Námětem na další zkoumání či odbornou práci by mohla být problematika kvantifikace efektu působení atraktivních a repulzivních sil v částicových systémech. Tento problém byl rozebrán v kapitole 3 z pohledu rozptylu světlostí. Jelikož je ale rozptyl funkce  $g_{GIG}$  počítán za pomocí aproximací, není tento způsob rozlišení příliš přesný. Zajímavé by tak bylo zkoumání souvislostí mezi volbou parametrů  $\alpha, \beta$ , tvarem a statistickými vlastnostmi příslušné síly a výsledným rozptylem v simulovaném systému.



## Příloha A

# Odvození kompresibility a deflektce

Statistická rigidita se upíná k výrazné lineární asymptotě a naším cílem bude odhadnout její směrnici a intercept bez potřeby znalosti explicitní podoby funkce  $\Delta(L)$ . Parametry takové asymptoty jsou zásadní pro klasifikaci částicového systému a míry náhodnosti chování systému. Pojmeme *kompresibilita* budeme dále rozumět směrnici asymptoty statistické rigidity a budeme ji značit symbolem  $\chi$ . *Deflektci* označíme zmíněný intercept a označíme ho symbolem  $\delta$ . Pro výpočet těchto parametrů je nutné nejprve vyjádřit druhý moment intervalové frekvence v řeči trendové a shlukové funkce, tedy

$$E(N_L^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \mathbb{P}(N_L = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \int_0^L g_{k-1}(x) - g_k(x) dx.$$

Po provedení záměny integrálu a sumy přejdeme k

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \int_0^L g_{k-1}(x) - g_k(x) dx = \int_0^L \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 g_{k-1}(x) dx - \int_0^L \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 g_k(x) dx.$$

V sumě druhého členu přeznačíme indexy na  $k = \ell - 1$  a poté zpět ke  $\ell = k$ . Pro  $k = 0$  v první sumě je člen nulový a proto můžeme přepsat rovnost do tvaru

$$\begin{aligned} & \int_0^L \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 g_{k-1}(x) dx - \int_0^L \sum_{k=1}^{+\infty} (k-1)^2 g_{k-1}(x) dx = \int_0^L \sum_{k=1}^{+\infty} (2k-2+1) g_{k-1}(x) dx = \\ & = 2 \int_0^L \sum_{k=1}^{+\infty} (k-1) g_{k-1}(x) dx + \int_0^L \sum_{k=1}^{+\infty} g_{k-1}(x) dx = 2 \int_0^L s(x) dx + \int_0^L r(x) dx, \end{aligned}$$

kde funkce  $s(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (k-1) g_{k-1}(x)$  je rovna konvoluci dvou funkcí  $r(x)$ , tedy

$$2 \int_0^L s(x) dx + \int_0^L r(x) dx = 2 \int_0^L (r \star r)(x) dx + \int_0^L r(x) dx = 2r(L) \star \lambda(L) + \lambda(L).$$

V poslední rovnosti jsme použili vztah  $\int_0^L (r \star r)(x) dx = r(L) \star \int_0^L r(x) dx$ . Výsledkem je tedy rovnost

$$E(N_L^2) = 2r(L) \star \lambda(L) + \lambda(L) \quad (\text{A.1})$$

V předchozím textu jsme zavedli vše potřebné pro vyjádření funkce  $\Delta(L)$  ve tvaru obsahujícím pouze shlukovou a trendovou funkci. To je užitečné, jelikož můžeme využít vlastností Laplaceova obrazu těchto funkcí a vyjádřit rigiditu pouze v závislosti na generátoru částicového systému. Laplaceův obraz  $R(s) = \mathcal{L}[r(x)](s)$  je totiž Laplaceův obraz nekonečného součtu hustot  $k$ -tých roztečí, máme tedy

$$\mathcal{L}[r(x)] = \mathcal{L}\left[\sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x)\right] = \mathcal{L}\left[\sum_{k=0}^{+\infty} \star_k h(x)\right] = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathcal{L}[\star_k h(x)],$$

kde Laplaceův obraz konvoluce funkcí je součin obrazů jednotlivých funkcí, tudíž

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathcal{L}[\star_k h(x)] = \sum_{k=0}^{+\infty} \prod_{k=0}^{+\infty} \mathcal{L}[h(x)] = \sum_{k=0}^{+\infty} H^{k+1}(s),$$

kde  $H(s)$  je Laplaceův obraz generátoru balančního částicového systému  $h(x)$ . Jelikož funkce  $|H(s)|$  je pro všechna  $s \in (0, +\infty)$  menší než jedna, můžeme řadu  $\sum_{k=0}^{+\infty} H^{k+1}(s)$  sečíst jako geometrickou řadu, a proto

$$\sum_{k=0}^{+\infty} H^{k+1}(s) = \frac{H(s)}{1 - H(s)}.$$

Konečným výsledkem tohoto odvození je vztah

$$R(s) = \frac{H(s)}{1 - H(s)}. \quad (\text{A.2})$$

Po provedení jednoduché úpravy, použití vztahu (A.1) a definice (2.2) si rozepíšeme statistickou rigitu do tvaru

$$\Delta(L) = E(N_L - L)^2 = E(N_L^2) - 2L \cdot E(N_L) + L^2 = 2r(L) \star \lambda(L) + \lambda(L) - 2L\lambda(L) + L^2 \quad (\text{A.3})$$

Na statistickou rigiditu ve tvaru (A.3) použijeme Laplaceovu transformaci:

$$\mathcal{L}[\Delta(L)] = 2R(s) \frac{R(s)}{s} + \frac{R(s)}{s} + 2 \frac{sR'(s) - R(s)}{s^2} + \frac{2}{s^3}. \quad (\text{A.4})$$

Pro zjednodušení zápisu budeme dále člen  $H(s)$  značit pouze písmenem  $H$  a  $k$ -tý moment  $\mu_k(h)$  generátoru  $h(x)$  pouze  $\mu_k$ . Po přenásobení rovnice (A.4) členem  $s^3$  a použití vztahu (A.2) dostaneme rovnost do šikovního tvaru

$$s^3 \mathcal{L}[\Delta(L)] = 2 + sH \frac{s-2}{1-H} + 2s^2 \frac{H^2 + H'}{(1+H)^2}. \quad (\text{A.5})$$

Jelikož cílem výpočtu je odhadnout asymptotu rigidity, do rovnice výše zahrneme aproximaci

$$\Delta(L) \doteq \chi L + \delta.$$

Laplaceovým obrazem této aproximace je

$$\mathcal{L}[\chi L + \delta] = \frac{\chi}{s^2} + \frac{\delta}{s}.$$

Dosadíme aproximaci do rovnosti (A.5) a dostaneme tvar rovnice ze kterého je možné za pomoci MacLaurinova rozvoje vypočítat hodnotu kompresibility  $\chi$  a deflektce  $\delta$ . Funkci na pravé straně rovnice (A.5) označíme písmenem  $B(s)$ . Dohromady tedy máme

$$\chi s + \delta s^2 \doteq \underbrace{2 + sH \frac{s-2}{1-H} + 2s^2 \frac{H^2 + H'}{(1+H)^2}}_{B(s)}.$$

Dle MacLaurinova rozvoje je funkce  $B(s)$  rovna řadě  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B^{(k)}}{k!} s^k$ , tudíž člen  $\chi s$  je roven druhému členu uvedené MacLaurinovy řady funkce  $B(s)$  a  $\delta s^2$  třetímu, tedy

1. 
$$\chi = B'(0), \tag{A.6}$$

2. 
$$\delta = \frac{1}{2} B''(0). \tag{A.7}$$

Abychom mohli určit kompresibilitu a deflektci je zapotřebí zderivovat funkci  $B(s)$ . První derivace funkce  $B(s)$  po několika kosmetických úpravách je následující:

$$B'(s) = \underbrace{\frac{2sH}{1-H}}_{(a)} + \underbrace{\frac{s^2 H'}{(1-H)^2}}_{(b)} + \underbrace{\frac{-2H(1-H) + 2sH' + 4sH^2}{(1-H)^2}}_{(c)} + 2s^2 \underbrace{\frac{2HH' + H'' - HH'' + 2(H')^2}{(1-H)^3}}_{(d)}.$$

Požadovaná kompresibilita bude tedy rovna limitě pro  $s$  se blíží k nule zprava  $\lim_{s \rightarrow 0^+} B'(s)$ . Po celou dobu uvažujeme škálovaný systém, tudíž nulový i první moment generátoru částicového systému  $h(x)$  je roven jedné. Připomeňme si zde rovnost (2.1), která svazuje Laplaceův obraz generátoru s jeho momenty,

$$H^{(k)}(0) = (-1)^k \mu_k(h),$$

kde  $\mu_0 = \mu_1 = 1$ . Z tohoto důvodu si můžeme povšimnout, že všechny limity členů (a), (b), (c), (d) jsou typu  $\frac{0}{0}$ . Nabízí se tedy řešit limity využitím l'Hospitalova pravidla. Další výpočty nám usnadní pomocný výpočet limity

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s}{1-H} \stackrel{l'H}{=} \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{-1}{H'(s)} \stackrel{(2.1)}{=} 1, \tag{A.8}$$

a proto známe i hodnotu této limity

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \left( \frac{s}{1-H} \right)^2 = 1. \tag{A.9}$$

Výpočet každé limity (a), (b), (c), (d) provedeme zvlášť.

(a)

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{2sH}{1-H} = 2 \lim_{s \rightarrow 0^+} H(s) \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s}{1-H} \stackrel{(A.8)}{=} 2$$

(b)

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s^2 H'}{(1-H)^2} \stackrel{(A.9)}{=} 1 \cdot H'(0) = -1$$

(c)

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{-2H(1-H) + 2sH' + 4sH^2}{(1-H)^2} &\stackrel{l'H}{=} \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{4HH' + 4H^2 + 8sHH' + 2sH''}{-2(1-H)H'} \stackrel{l'H}{=} \\ \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{4H'H' + 4HH'' + 16HH' + 8sH'H' + 8sHH'' + 2H'' + 2sH'''}{ -2(H'' - H'H' - HH'') } &\stackrel{(2.1)}{=} \\ \frac{4 + 4\mu_2 - 16 + 2\mu_2}{-2(\mu_2 - 1 - \mu_2)} &= 3\mu_2 - 6 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0^+} 2s^2 \frac{2HH' + H'' - HH'' + 2(H')^2}{(1-H)^3} &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{2s^2}{(1-H)^2} \frac{2HH' + H'' - HH'' + 2(H')^2}{(1-H)} = \\ \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{2s^2}{(1-H)^2} \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{2HH' + H'' - HH'' + 2(H')^2}{(1-H)} &\stackrel{(A.9)}{=} 2 \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{2HH' + H'' - HH'' + 2(H')^2}{(1-H)} \stackrel{l'H}{=} \\ 2 \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{2H'H' + 2HH'' + H''' - H'H'' - HH''' + 4H'H''}{(-H')} &\stackrel{(2.1)}{=} 2(2 - \mu_2) = 4 - 2\mu_2 \end{aligned}$$

Všechny limity máme vypočtené, stačí dát předešlé výsledky dohromady a dostaneme kýženou kompresibilitu, tedy

$$\chi = \lim_{s \rightarrow 0^+} [(a) + (b) + (c) + (d)] = \mu_2(h) - 1 \quad (A.10)$$

Tento výsledek je pro další zkoumání statistické rigidity velmi přínosný, jelikož směrnice její asymptoty, tedy kompresibilita, je ve škálovaném systému rovna rozptylu roztečí sousedních částic  $\mathcal{R}$ . Výslednou kompresibilitu můžeme tím pádem vyjádřit jako

$$\chi = \text{Var}(\mathcal{R}).$$

Snadnější část je hotová a nyní přijde na řadu výpočet deflektce, který je výpočetně náročnější. Jedná se však o stejné úpravy, pouze jsou použity vícekrát (zejména l'Hospitalovo pravidlo). Dle rovnosti (A.7) je pro vypočtení deflektce potřebné vyčíslit druhou derivaci funkce  $B(s)$  v bodě nula. Jelikož je výpočet těchto derivací poměrně nepřehledný, budeme derivovat funkci  $B'(s)$  po částech (a), (b), (c), (d). Uvedeme si zde další pomocné limity:

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \left( \frac{s}{1-H} \right)' = \frac{\mu_2}{2}, \quad (A.11)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \left[ \left( \frac{s}{1-H} \right)^2 \right]' = \mu_2, \quad (A.12)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{H + H'}{1-H} = \mu_2 - 1, \quad (A.13)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \left( \frac{H + H'}{1-H} \right)' = \frac{\mu_2^2 - \mu_3}{2}. \quad (A.14)$$

Všechny pomocné limity jsou vypočtené za pomoci l'Hospitalova pravidla a kvůli zkrácení zápisu samotného výpočtu budou užitečné. Jak již bylo řečeno druhou derivaci  $B(s)$  a následné limity budeme hledat po částech takto:

$$B''(s) = (a)' + (b)' + (c)' + (d)'. \quad (\text{A.15})$$

Člen  $(a)$  tedy zderivujeme:

$$(a)' = \left(2H \frac{s}{1-H}\right)' = 2H' \frac{s}{1-H} + 2H \left(\frac{s}{1-H}\right)'$$

Derivace je upravená do tvaru, ze kterého lze limita za použití rovností (A.8), (A.11), (2.1) přímočaře vypočítat,

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \left[2H' \frac{s}{1-H} + 2H \left(\frac{s}{1-H}\right)'\right] \stackrel{(\text{A.8})(\text{A.11})(2.1)}{=} -2 + 2 \frac{\mu_2}{2} = \mu_2 - 2. \quad (\text{A.16})$$

Druhá část, tedy člen  $(b)'$ , lze vypočítat obdobně:

$$(b)' = \left[H' \left(\frac{s}{1-H}\right)^2\right]' = H'' \left(\frac{s}{1-H}\right)^2 + H' \left[\left(\frac{s}{1-H}\right)^2\right]'$$

Nyní je člen  $(b)'$  ve tvaru, který lze za pomoci vztahů (2.1), (A.9) a (A.12) vypočítat bez větších obtíží následovně

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} H'' \left(\frac{s}{1-H}\right)^2 + H' \left[\left(\frac{s}{1-H}\right)^2\right]' \stackrel{(2.1)(\text{A.9})(\text{A.12})}{=} \mu_2 - \mu_2 = 0. \quad (\text{A.17})$$

Třetí člen  $(c)'$  zde rozepsaný nebude, jelikož jeho výpočet je zdouhavý a nepřehledný. Průběh samotného výpočtu je ale vcelku jasný. Pro člen  $(c)'$  spočítáme limitu v nule zprava. Pokud použijeme třikrát l'Hospitalovo pravidlo, výsledek limity třetího členu bude

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} (c)' = -\frac{4\mu_3}{3} - 4\mu_2 + 3\mu_2^2 + 4. \quad (\text{A.18})$$

Zbývá už jen poslední část  $(d)$ , kterou si ještě před derivací upravíme do tvaru

$$(d) = 2H'' \left(\frac{s}{1-H}\right)^2 + 4H' \left(\frac{s}{1-H}\right)^2 \frac{H+H'}{1-H}.$$

Nyní si lze povšimnout, že  $(d)$  v takovém tvaru směřuje k použití pomocných limit. Můžeme tedy zderivovat

$$(d)' = 2H''' \left(\frac{s}{1-H}\right)^2 + 2H'' \left[\left(\frac{s}{1-H}\right)^2\right]' + 4H'' \left(\frac{s}{1-H}\right)^2 \frac{H+H'}{1-H} + 4H' \left[\left(\frac{s}{1-H}\right)^2\right]' \frac{H+H'}{1-H} + 4H' \left(\frac{s}{1-H}\right)^2 \left(\frac{H+H'}{1-H}\right)'$$

Limitu provedeme ze použití pomocných limit (A.9), (A.12), (A.13) a (A.14). Výslednou limitou tedy bude

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} (d)' = -2\mu_3 + 2\mu_2^2 + 4\mu_2(\mu_2 - 1) - 4\mu_2(\mu_2 - 1) + 2\mu_3 - 2\mu_2^2 = 0. \quad (\text{A.19})$$

Cílem bylo vyčíslit funkci  $B(s)''$  v bodě nula. Jelikož  $B''(0) = \lim_{s \rightarrow 0^+} [(a)' + (b)' + (c)' + (d)']$  máme již vše potřebné, stačí pouze dosadit vypočítané limity (A.16), (A.17), (A.18) a (A.19). Dosadíme do vztahu (A.7), tedy

$$\delta = \frac{1}{6}(9\mu_2^2 - 9\mu_2 - 4\mu_3 + 6). \quad (\text{A.20})$$

V balančním částicovém systému se statistická rigidita velmi rychle přimyká k lineární asymptotě, proto lze rigiditu aproximovat vztahem  $\Delta(L) \doteq \chi L + \delta$ . Pro škálovaný balanční částicový systém jsme dokázali vypočítat kompresibilitu  $\chi$  i defleksi  $\delta$ , a proto rigiditu můžeme aproximovat vztahem

$$\Delta(L) = (\mu_2 - 1)L + \frac{1}{6}(9\mu_2^2 - 9\mu_2 - 4\mu_3 + 6) + o(1),$$

pro  $L \rightarrow +\infty$ .

# Literatura

- [1] Jorgensen B., *Statistical Properties of the Generalized Inverse Gaussian Distribution*, Lecture Notes in Statistics 9, New York: Springer-Verlag, 1982.
- [2] Krbálek M., *Equilibrium distributions in a thermodynamical traffic gas*, J. Phys. A: Math. Theor. 40, 5813–5821, 2007.
- [3] Krbálek M. *Theoretical predictions for vehicular headways and their clusters*, J. Phys. A: Math. Theor. 46, 445101, 2013.
- [4] Krbálek M., Apeltauer J., Apeltauer T., Szabová Z., *Three methods for estimating a range of vehicular interactions*, Physica A 491, 112–126, 2018.
- [5] Krbálek M., Krbálková M., *3s-Unification for Vehicular Headway Modeling*, Proceedings of SPMS, Dobřichovice, ISBN 978-80-01-06501-3, 2018.
- [6] Krbálek M., Šeba P., *Spectral rigidity of vehicular streams (Random Matrix Theory approach)*, J. Phys. A: Math. Theor. 42, 345001, 2009.
- [7] Krbálek M., Vacková J., *Matematické modelování dopravy*, Česká technika - nakladatelství ČVUT, Praha, 2022.
- [8] Krbálek M., Šeba F., Krbálková M., *Super-random states in vehicular traffic - Detection & explanation*, Physica A 585, 126418, 2022.
- [9] Lhotáková L., *Testování účinnosti odhadovacích metod pro GIG-distribuovaná data*, Výzkumný úkol, FJFI ČVUT v Praze (školitel doc. Mgr. Milan Krbálek, Ph.D.), 2021.
- [10] Pánek V., *Supernáhodné stavy termodynamického dopravního plynu a jejich matematické vlastnosti*, Bakalářská práce, FJFI ČVUT v Praze (školitel doc. Mgr. Milan Krbálek, Ph.D.), 2020.
- [11] Pánek V., *Statistická kompresibilita v systémech se střednědosahovými potenciály*, Výzkumný úkol, FJFI ČVUT v Praze (školitel doc. Mgr. Milan Krbálek, Ph.D.), 2021.
- [12] Víšek J. Á., *Statistická analýza dat*, Vydavatelství Českého vysokého učení technického v Praze, ISBN 80-01-01735-4, 1997.
- [13] Zvára K., *Pravděpodobnost a matematická statistika*, Matfyzpress, ISBN 978-80-7378-218-4, 2012.