

**České vysoké učení technické v Praze  
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská  
Katedra fyzikální elektroniky**

**Diplomová práce  
Bc. Lejla Oweisová**

**Praha – 2022**

**České vysoké učení technické v Praze  
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská  
Katedra fyzikální elektroniky**

# **Modelování absorpce laserového záření v plazmatu trasováním paprsků**

**Diplomová práce**

Autor práce: **Bc. Lejla Oweisová**  
Vedoucí práce: **prof. Ing. Richard Liska, CSc.**  
Školní rok: **2021/2022**

Před svázáním místo této stránky **vložíte zadání práce** s podpisem děkana (v jedné kopii práce bude list s originálem podpisu).

Toto bude jediný oboustranný list ve Vaší práci!

## **Poděkování**

Tímto bych ráda poděkovala vedoucímu mé diplomové práce panu prof. Ing. Richardu Liskovi, CSc. za mnoho cenných rad, ochotu, trpělivost a čas, který mi věnoval. Také bych na tomto místě chtěla poděkovat své rodině za jejich podporu v průběhu celého mého studia.

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracovala samostatně a že jsem uvedla veškerou použitou literaturu.

V Praze dne 2. května 2022

Bc. Lejla Oweisová

Název práce **Modelování absorpce laserového záření v plazmatu trasováním paprsků**  
Autor Lejla Oweisová  
Obor Informatická fyzika  
Druh práce Diplomová práce  
Vedoucí Prof. Ing. Richard Liska, CSc.  
Konzultat Ing. Milan Kuchařík, Ph.D.

## Abstrakt

Tato diplomová práce se zabývá modelováním absorpce laserového záření v plazmatu. Laserem generované plazma modelujeme 2D hydrodynamickým kódem na lagrangeovské mřížce pohybující se spolu s plazmatem. Laserový svazek se rozdělí na mnoho paprsků a absorpce energie těchto paprsků v materiálu je popsána různými modely. První z těchto modelů je absorpce na kritické ploše, ve které trajektorie paprsků není nijak ovlivněna plazmatem a uvažujeme absorpci energie paprsku v první buňce s nadkritickou hustotou volných elektronů, na kterou daný paprsek při průchodu mřížkou narazí. Druhý model je absorpce trasováním paprsků, ve kterém se paprsky na hranách buněk ohýbají dle Snellova zákona a část energie každého paprsku, daná inverzním brzdným zářením, se absorbuje v každé buňce, kterou paprsek prochází. Trasování paprsků budeme provádět ve 2D i ve 3D. Ve 2D zůstává jak hydrodynamika, tak i paprsky v 2D cylindrické  $r, z$  souřadné soustavě. Ve 3D používáme 2D hydrodynamiku a mřížku vytvořenou opsáním 2D mřížky kolem svislé osy  $z$ . Každá buňka tak je prstencem, jehož stěny jsou výseče kuželů, válců nebo rovin. Paprsky potom ve 3D procházejí těmito prstenci a ohýbají se na jejich stěnách. Modely absorpce jsou otestovány a porovnány na vzorových příkladech interakce laserových svazků s terčíkem.

*Klíčová slova:* absorpce laseru, trasování paprsků, laserem generované plazma

Title        **Modelling laser absorption in plasma using ray-tracing**  
Author      Lejla Oweisová  
Supervisor Prof. Ing. Richard Liska, CSc.

## **Abstract**

This Master thesis deals with modelling of laser absorption in plasma. Laser generated plasma is modelled using a 2D hydrodynamic code on a Lagrangian mesh, which moves with the plasma. The laser beam is divided into many rays and the absorption of these rays is computed using various models. The first of these models is critical surface absorption, in which ray trajectories are unaffected by the plasma and we assume energy deposition in the first cell the ray enters, which has overcritical electron density. The second model is absorption using ray-tracing, in which rays refract at cell edges according to Snell's law, and some portion of each rays' energy, determined by inverse bremsstrahlung, is deposited in each cell the ray passes through. We will develop both 2D and 3D ray-tracing models. In the 2D model we use 2D hydrodynamics and rays in a 2D cylindrical  $r, z$  coordinate system. In 3D we use 2D hydrodynamics and a 3D mesh that is created by rotating the 2D mesh around the vertical  $z$  axis. Each cell is then a ring and its walls are sectors of cones, cylinders or planes. The rays then propagate through these rings and refract at their edges. These models are tested and compared using test cases simulating interaction of laser beams with targets.

*Key words:* laser absorption, ray-tracing, laser generated plasma

# Obsah

Úvod	9
<b>1 Hydrodynamika</b>	<b>10</b>
<b>2 Mechanismy absorpce</b>	<b>11</b>
2.1 Absorpce na kritické ploše . . . . .	11
2.2 Absorpce inverzním brzdným zářením . . . . .	11
<b>3 Modelování absorpce</b>	<b>13</b>
3.1 Geometrie simulace . . . . .	13
3.2 Popis a absorpce laserového svazku . . . . .	14
3.3 Dvoudimenzionální metoda . . . . .	16
3.3.1 Simulace absorpce na kritické ploše . . . . .	17
3.3.2 Simulace pomocí trasování paprsků . . . . .	18
3.4 Rozšíření na tři dimenze . . . . .	22
3.4.1 Hledání průsečíků ve třech dimenzích . . . . .	23
3.4.2 Snellův zákon ve 3D . . . . .	25
3.4.3 Šikmý dopad . . . . .	28
3.4.4 Celkový algoritmus . . . . .	31
<b>4 Numerické problémy</b>	<b>34</b>
4.1 Rozpoznání původního bodu od nového průsečíku . . . . .	34
4.2 Vstup do buňky příliš blízko vrcholu . . . . .	35
4.3 Kvadratické rovnice a hledání průsečíku v blízkosti osy $z$ . . . . .	36
<b>5 Výsledky simulací</b>	<b>38</b>
5.1 Parametry simulací . . . . .	38
5.2 Simulace pro kolmě dopadající paprsky . . . . .	39
5.3 Šikmý dopad . . . . .	45
<b>6 Závěr</b>	<b>49</b>
<b>Literatura</b>	<b>50</b>



# Úvod

Jaderná fúze je slibným způsobem, jakým by lidstvo mohlo získávat energii, který není závislý na fosilních palivech a nevytváří by skleníkové plyny. Oproti štěpným jaderným reakcím je bezpečnější a nevytváří radioaktivní odpad. Proto se vědci již mnoho let pokouší dosáhnout řízené jaderné fúze na Zemi. Dva způsoby, jak dosáhnout stlačení a ohřátí pro zapálení fúze, jsou magnetické udržení v tokamacích a inerciální udržení pomocí laserů.

Při inerciálním udržení je palivo v terčíku zahříváno a stlačováno lasery s vysokou intenzitou [1]. Experimenty interakcí laserů s terčíky probíhají například v NIF (National Ignition Facility) v Lawrence Livermore National Laboratory v Kalifornii [2], v Laser Mégajoule ve Francii [3] nebo zde v Česku na laserovém systému PALS [4].

Pro teoretickou podporu těchto výzkumů je třeba umět modelovat interakci laseru s terčíkem, abychom mohli studovat absorpci laserové energie v materiálu. Dodání energie terčíku laserem způsobí jeho ohřev a expanzi [5]. Vzniká tím plazma, které se dá popsat hydrodynamickými rovnicemi jako stlačitelná, nevazká tekutina. Za jistých předpokladů se k modelování laserovému generovaného plazmatu používají modely, které řeší hydrodynamické rovnice v diskretizovaném prostoru. Jelikož u laserového plazmatu dochází v průběhu simulace k velkým změnám objemu plazmatu, hodí se k jeho simulování lagrangeovský přístup, při kterém je v průběhu simulace v každé buňce konstantní hmotnost a síťka se pohybuje spolu s plazmatem.

Nejjednodušší způsob, jak modelovat absorpci laserové energie v materiálu, je absorpce na kritické ploše [6]. Využíváme znalosti, že laser dané vlnové délky se může šířit pouze v plazmatu s podkritickou hustotou elektronů. Nejvíce energie laseru se pak absorbuje v blízkém okolí kritické plochy (plocha s kritickou hustotou volných elektronů). Používá se také model trasování paprsků [7]. V tomto modelu předpokládáme postupnou absorpci energie laseru při průchodu prostředím. Laserový svazek se rozdělí na mnoho paprsků nesoucích část jeho výkonu. Sleduje se průchod paprsků výpočetní mřížkou, při kterém se budou paprsky uvnitř buněk pohybovat po přímkách a na hranách buněk bude docházet k lomu dle Snellova zákona. V každé buňce, kterou paprsek projde, se inverzním brzdným zářením absorbuje určité množství jeho energie, které je dané dráhou paprsku a efektivní srážkovou frekvencí plazmatu, která dává absorpční koeficient. Další modely pro absorpci energie laseru v prostředí jsou např. rezonanční absorpce [8, 9], absorpce způsobená nestabilitami či metoda tlustých paprsků [10].

V této práci vytváříme model, který na pohyblivé výpočetní mřížce simuluje absorpci laseru dvěma z výše zmíněných modelů absorpce laserové energie. Ve dvoudimenzionální mřížce vytvoříme model absorpce na kritické ploše a model pro absorpci paprsků inverzním brzdným zářením pomocí trasování paprsků. Hlavním cílem této práce pak bude vytvoření modelu pro simulaci absorpce paprsků inverzním brzdným zářením ve třech dimenzích s možností šikmého dopadu laserových paprsků. Předšlé modely totiž počítaly pouze s kolmým dopadem paprsků, ovšem v praxi jsou velice často využívány šikmé svazky. Model pro trasování paprsků ve třech dimenzích je také potřebný pro simulování náhodného rozptylu paprsků v pěnových terčících [11]. Model trasování paprsků ve 3D, který v této práci představíme, bude využívat 2D hydrodynamiku na cylindricky symetrické  $r, z$  mřížce. Trojdimenzionální mřížka se vytvoří opsáním původní 2D mřížky okolo svislé osy  $z$ . Každá

buňka pak bude prstencem a hrany buněk budou části povrchů kuželů, případně válců nebo rovin. Laserový svazek, který se ve dvou dimenzích rozdělil na mnoho paprsků, rozdělíme ve 3D ještě jednou a rozložíme jej po kružnici okolo svislé osy. Pro modelování šikmého dopadu paprsků na terčik pak tuto kružnici ještě nakloníme o požadovaný úhel. Takto rozložené paprsky budeme trasovat výpočetní sítí a počítat jejich absorpci inverzním brzdným zářením. Tyto modely implementujeme do hydrodynamického kódu PALE [12], otestujeme je na vzorových případech a porovnáme získané výsledky ze simulací s absorpcí na kritické ploše a 3D ray-tracingem s kolmým i šikmým dopadem paprsků na terčik.

# 1 Hydrodynamika

V této práci popisujeme problematiku interakce laseru s plazmatem pomocí hydrodynamického modelu. Abychom ho mohli použít, musí být plazma kvazineutrální. To znamená, že v libovolném makroskopickém objemu musí být celková nábojová hustota nulová, tedy musí platit rovnice

$$n_e = Z n_i,$$

kde  $n_i$  a  $n_e$  jsou hustoty iontů, resp. elektronů (počet iontů, resp. elektronů na jednotku objemu) a  $Z$  je ionizace (střední počet redukovaných elektronů k jednomu iontu).

Dalším předpokladem je, že bychom chtěli popisovat plazma jako spojité prostředí (kontinuum), a tudíž by měly být střední volné dráhy  $\lambda$  částic menší než charakteristická délka plazmatu  $L$ . Také požadujeme, aby bylo rychlostní rozložení částic v plazmatu Gaussovské (nebo jemu blízké), a aby byla v plazmatu lokální termodynamická rovnováha (všechny částice mají stejnou střední kinetickou energii a stejnou teplotu).

K popisu používáme Eulerovy rovnice v Lagrangeovském tvaru popisující nevázkou tekutinu ve formě zákonů zachování hmotnosti (1.1), hybnosti (1.2) a energie (1.3)

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad (1.1)$$

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} + \rho \operatorname{grad} p = 0 \quad (1.2)$$

$$\rho \frac{d\epsilon}{dt} + p \operatorname{div} \vec{u} = -\operatorname{div} \vec{I} + \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} T), \quad (1.3)$$

kde  $\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{dt}$  je rychlost,  $\rho$  je hustota,  $p$  je tlak,  $\epsilon = \frac{E}{\rho} - \frac{\vec{u}^2}{2}$  je vnitřní energie na jednotku hmoty a  $E$  je celková energie na jednotku objemu,  $\vec{I}$  je intenzita laseru (hustota toku energie laseru),  $\kappa$  je tepelná vodivost a  $T$  je teplota. Ta je v plazmatu dána tepelným pohybem částic, a jelikož bývá teplota v plazmatu vysoká, budeme ji udávat v elektronvoltech ( $E = k_B T$ ,  $1 \text{ eV} \approx 11\,600 \text{ K}$ ).

Derivace  $\frac{d}{dt}$  je lagrangeovskou derivací podél trajektorie a obsahuje parciální časovou derivaci spolu s konvektivní částí:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \operatorname{grad}.$$

Zákony zachování jsou pak doplněny stavovou rovnicí  $p = p(\rho, \epsilon)$  udávající závislost tlaku na vnitřní energii a hustotě. V kódu je možné používat stavovou rovnici ideálního plynu nebo stavovou rovnici *QEOS*, v této práci budeme při simulacích používat rovnici pro ideální plyn:

$$p = \epsilon \rho (\gamma - 1), \quad (1.4)$$

kde  $p$  je tlak,  $\epsilon$  je vnitřní energie na jednotku hmoty,  $\rho$  je hustota a  $\gamma = c_p/c_v$  je plynová konstanta (poměr tepelných kapacit).

## 2 Mechanismy absorpce

### 2.1 Absorpce na kritické ploše

Známe disperzní vztah pro šíření elektromagnetických vln s frekvencí  $\omega$  v plazmatu

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2, \quad (2.1)$$

kde  $c$  je fázová rychlost světla,  $\vec{k}$  je vlnový vektor a  $\omega_p$  je plazmová frekvence daná vztahem:

$$\omega_p^2 = \frac{e^2 n_e}{\epsilon_0 m_e} = \frac{4\pi e^2 n_e}{m_e}, \quad (2.2)$$

kde  $n_e$  je hustota elektronů,  $\epsilon_0$  je plazmová frekvence,  $m_e$  je jejich hmotnost, a  $e$  je náboj [13].

Vidíme, že pro  $\omega < \omega_p$  je  $k^2 < 0$  a vlna se tedy v takovém plazmatu nemůže šířit. Uvažujeme-li pevnou frekvenci elektromagnetického vlnění  $\omega$ , můžeme z rovnosti  $\omega = \omega_p$  určit podmínku pro šíření vlny v plazmatu v závislosti na hustotě volných elektronů  $n_e$ . Po úpravách a dosazení za  $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi c}{\lambda}$ , kde  $f$  je frekvence a  $\lambda$  je vlnová délka světla ve vakuu, získáme vztah, který nám dává tzv. kritickou hustotu volných elektronů

$$n_e^{crit} = \frac{m_e \pi c^2}{e^2 \lambda^2}. \quad (2.3)$$

Elektromagnetická vlna se tedy v plazmatu může pohybovat jen při hustotě volných elektronů nižší než  $n_e^{crit}$ .

Při modelu absorpce na kritické ploše se laser po příchodu do oblasti s nadkritickou hustotou absorbuje, přičemž uživatel zadává, jaká část energie laseru se absorbuje a jaká se odrazí.

### 2.2 Absorpce inverzním brzdným zářením

Při absorpci inverzním brzdným zářením bereme v potaz elektron-iontové srážky (Coulombovská interakce), které způsobují absorpci vlny (tzv. inverse bremsstrahlung absorption). Když dochází ke srážkám elektronů s ionty, mění se uspořádaná oscilační rychlost elektronů na neuspořádanou tepelnou rychlost, vlna dodává elektronům energii oscilace v poli a srážky mění kinetickou energii oscilací na tepelnou. Takto dochází v důsledku interakce nabitých částic mezi sebou k absorpci laserové vlny [14].

Máme-li  $\nu_{ei}$  efektivní frekvenci srážek elektronů s ionty, pak dostaneme následující vztah pro relativní permitivitu [13]:

$$\epsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu_{ei}^2} + i \frac{\nu_{ei}}{\omega} \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu_{ei}^2}. \quad (2.4)$$

Víme, že reálná část relativní permitivity plazmatu je daná kvadrátem indexu lomu  $n$  a tedy

$$n^2 = \Re(\epsilon_r) = 1 - \frac{n_e}{n_e^{crit}}. \quad (2.5)$$

Budeme-li používat paprskové přiblížení a označíme-li  $\frac{d}{ds}$  jako derivaci podél trajektorie paprsku, můžeme transport výkonu podél dráhy paprsku počítat pomocí obyčejné diferenciální rovnice

$$\frac{dQ}{ds} = -\kappa_{ib}Q, \quad (2.6)$$

kde  $\kappa_{ib}$  je absorpční koeficient inverzního brzděného záření:

$$\kappa_{ib} = \frac{2\omega}{c} \Im(\sqrt{\epsilon_r}). \quad (2.7)$$

Výkon absorbovaný inverzním brzděným zářením  $\Delta Q$  podél trajektorie paprsku  $s$  spočítáme z počátečního výkonu  $Q_{in}$  podle vztahu

$$\Delta Q = Q_{in} - Q_{out} = Q_{in}(1 - e^{\int \kappa_{ib} ds}), \quad (2.8)$$

kde  $\int \kappa_{ib} ds$  je integrál podél dráhy paprsku.

### 3 Modelování absorpce

V této kapitole popíšeme samotné modely pro simulování absorpce laseru v plazmatu mechanismy popsány v kapitole 2.

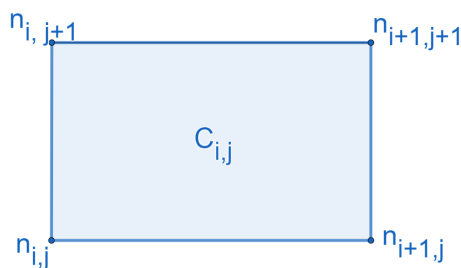
#### 3.1 Geometrie simulace

Při řešení hydrodynamických rovnic používáme Lagrangeovskou metodu, ve které je výpočetní síť fixovaná na tekutinu (v každé buňce je konstantní hmotnost) a pohybuje se s tekutinou. Toto se hodí pro simulace laserového plazmatu, při kterých se obvykle výrazně mění velikost výpočetní oblasti. Síť i všechny buňky jsou na počátku obdélníkové, v průběhu času se indexy buněk a vrcholů v rámci sítě nemění, buňky zůstávají čtyřúhelníkové, ale síť ani buňky už nemusí být pravoúhlé. Oproti tomu v Eulerovské metodě je výpočetní síť nepohyblivá a tok hmoty probíhá mezi buňkami.

Jelikož musí výpočetní mřížka v Lagrangeovské metodě sledovat pohyb tekutiny, může v průběhu simulace dojít k degradaci mřížky (například vznik nekonvexních či převrácených buněk). Proto kombinujeme Lagrangeovskou metodu s Eulerovským přístupem v tzv. ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) metodě, u které se po několika Lagrangeovských krocích mřížka vyhlazuje, a poté se provede remapování konzervativních veličin na novou vyhlazenou výpočetní síť [15].

Používáme tzv. staggered diskretizaci, ve které jsou vektorové veličiny (kinematické - tj. poloha a rychlost) dány v uzlech sítě a skalární (termodynamické veličiny jako hustota, tlak, vnitřní energie a teplota) v buňkách.

V našem modelu je při kolmém dopadu intenzita laserového svazku rozložena cylindricky symetricky podél osy šíření, proto budeme pro simulaci volit válcové souřadnice. Ve dvou dimenzích budeme pracovat se čtyřúhelníkovou sítí, která bude mít vodorovnou osu  $r$  a svislou osu  $z$ . V této síti budeme mít na vodorovné ose  $n_i$  buněk, možné  $r$ -ové indexy buněk  $i_c$  budou tedy z intervalu  $i_c \in \{1, 2, \dots, n_i\}$  a pro indexy uzlů bude  $i_n \in \{1, 2, \dots, n_i, n_i + 1\}$ . Obdobně na svislé ose  $z$  budeme mít  $n_j$  buněk a proto  $z$ -ové indexy buněk a uzlů budou  $j_c \in \{1, 2, \dots, n_j\}$ , resp.  $j_n \in \{1, 2, \dots, n_j, n_j + 1\}$ . Vrchol o souřadnicích  $i, j$  budeme značit  $n_{i,j}$  a buňku s indexy  $i, j$  budeme značit  $C_{i,j}$ , přičemž v naší mřížce platí, že pro libovolné  $i, j$  z daného rozmezí je vrchol  $n_{i,j}$  levým dolním vrcholem buňky  $C_{i,j}$ , viz obrázek 3.1.

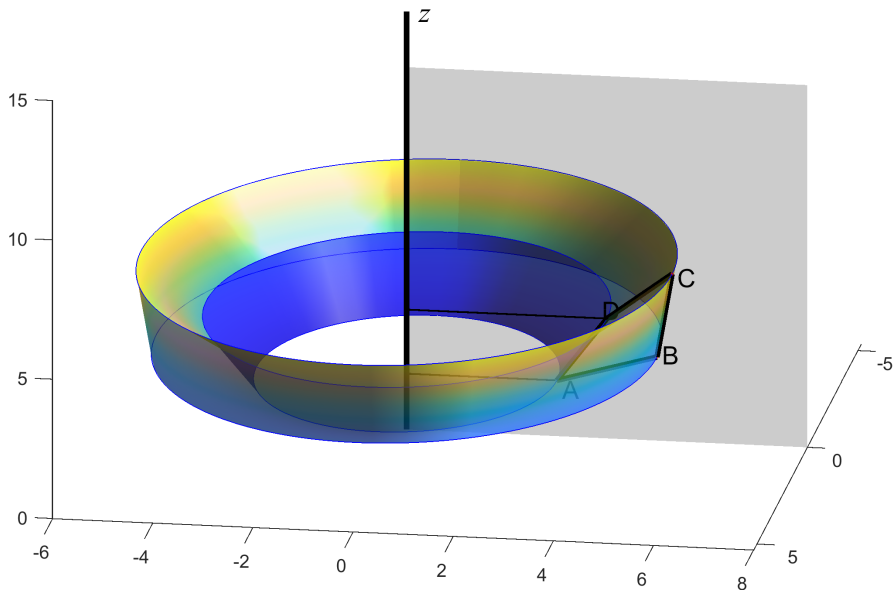


Obrázek 3.1: Příklad indexování buněk a vrcholů v naší mřížce pro ortogonální buňku.

Rozšíření na 3 dimenze pak provedeme přidáním třetí osy. Osa  $r$  bude nyní osou  $y$ , osa  $z$

bude novou osou  $z$  a přidáme třetí osu, osu  $x$ , tak, aby byl systém pravotočivý.

Abychom mohli studovat průchod laseru i ve třech dimenzích, opíšeme cylindricky symetricky naši 2D mřížku okolo osy  $z$ . Tímto způsobem vytvoříme třidimenzionální mřížku, jejíž buňky jsou prstence. Hrany těchto buněk jsou pak části povrchů kuželů (případně válců nebo rovin - dle úhlu, který svírá hrana ve 2D s osou  $z$ ), viz obrázky 3.2 a 3.3.



Obrázek 3.2: Prsteneček, který byl vytvořen opsáním čtyřúhelníku ABCD, ležícího v rovině YZ, okolo osy  $z$ . Toto je obecný případ, kde jsou všechny jeho stěny tvořeny výsečemi povrchů kuželů, pro svislé či vodorovné hrany to mohou být výseče povrchu válce či roviny.

## 3.2 Popis a absorpce laserového svazku

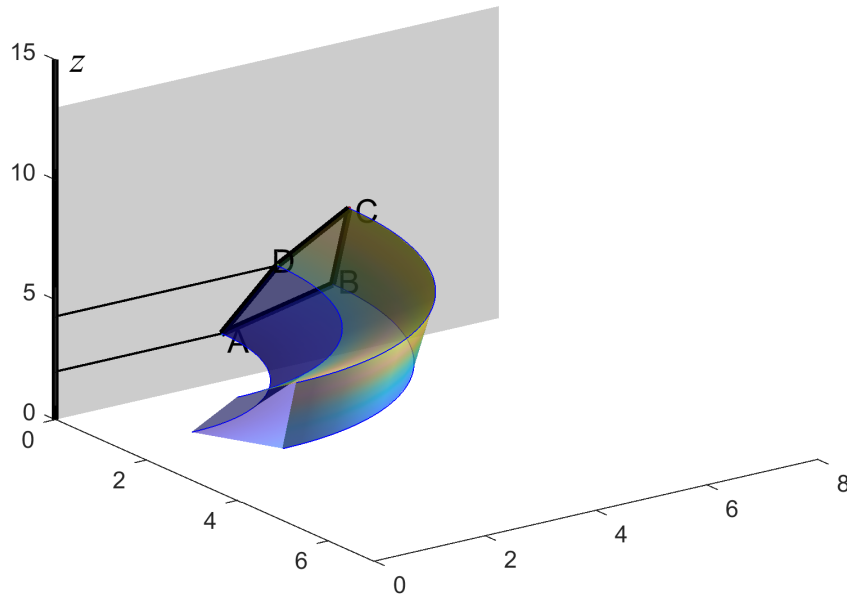
Ve výše popsané mřížce budeme sledovat průchod laserového svazku. Laserový svazek rozdělíme na jednotlivé paprsky, počet paprsků bude v simulaci větší než počet buněk, tj. na každou buňku připadá několik paprsků, a každý paprsek bude nést výkon daný intenzitou laseru v závislosti na prostoru a čase a šířkou paprsku.

Takové rozdělení nám bude ve dvou dimenzích pro kolmý dopad laseru stačit. Ve třech dimenzích ještě každý takový paprsek pak rozdělíme na  $N$  paprsků rozložených po kružnici se středem v ose  $z$ , která je leží v rovině rovnoběžné s rovinou XY. Budeme chtít také simulovat šikmý dopad, ve kterém se tato kružnice ještě nakloní a posune, více o tom v kapitole 3.4.3. Pro každý paprsek pak budeme sledovat jeho trajektorii v síti a absorpci.

V naší 2D válcové geometrii uvažujeme intenzitu laseru danou vztahem

$$I(r, t) = I_{max} e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} e^{-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2}, \quad (3.1)$$

kde  $\tau = t_{FWHM}/(2\sqrt{\ln(2)})$ ,  $t_{FWHM}$  je časový interval, ve kterém je intenzita laseru větší



Obrázek 3.3: Čtvrtinový řez prstencem z obrázku 3.2.

než polovina maximální intenzity ( $I > \frac{1}{2}I_{max}$ ), a  $r_0 = r_f / \sqrt{\ln(5)}$ , kde  $r_f$  je poloměr fokusu, tedy kružnice, do které jde 80% energie laseru [15]. Ve 3D pak bude každý paprsek ještě rozdělen na  $N$  paprsků rozložených po kružnici a každému z těchto paprsků bude náležet  $\frac{1}{N}$ -násobek původního výkonu paprsku.

Pro kolmý dopad laseru budeme předpokládat, že laser bude do materiálu (a tedy do naší mřížky) vstupovat shora (tj. proti směru osy  $z$ ). Intenzita paprsků bude tedy na počátku ve tvaru  $\vec{I} = (0, 0, I(r, t))$ , kde  $I$  je intenzita laseru z (3.1).

Výkon  $Q_r$  nesený paprskem  $r$  na 1 radián bude

$$Q_r = I_r r_r d_r, \quad (3.2)$$

kde  $r$  je  $r$ -ová souřadnice paprsku a  $d_r$  je tloušťka paprsku. Absorpci laseru pak budeme počítat buď mechanismem absorpce na kritické ploše nebo absorpcí inverzním brzdným zářením. Při absorpci na kritické ploše se bude paprsek absorbovat v první buňce s nadkritickou hustotou volných elektronů danou vztahem (2.3). Výkon  $Q_r$  paprsku daný vztahem (3.2) se absorbuje jeho přičtením k poli divergence intenzity v dané buňce. K poli divergence intenzity v první nadkritické buňce, do které paprsek vstoupí, tedy přičteme hodnotu danou průběhem intenzity laseru v prostoru  $I_{r,laser}$ , šířkou paprsku  $d_r$ , polohou paprsku  $r_{laser}$ , účinností absorpce laseru  $u_{laser}$ , která musí být předem zadána jako vstupní parametr, a objemem buňky  $V_{i,j}$ :

$$[\text{div}\vec{I}]_{i,j} = [\text{div}\vec{I}]_{i,j} - \frac{1}{V_{i,j}} d_r I_{r,laser} u_{laser} r_{laser} \quad (3.3)$$



Polohou paprsku násobíme, jelikož používáme cylindrické souřadnice a každý paprsek ve skutečnosti nese výkon v celém mezikruží daném polohou a šířkou paprsku. Při takovémto použití výpočtu plochy mezikruží bychom měli vztah ještě vynásobit  $2\pi$ , my však budeme používat vztahy pro jeden radián jako v celém kódu.

Při absorpci inverzním brzděným zářením se bude část výkonu paprsku absorbovat v každé buňce, kterou paprsek projde, a opět ji budeme přičítat k poli divergence intenzity v těchto buňkách. Pro každou buňku  $C_{i,j}$ , kterou paprsek  $r$  projde, bude platit:

$$[\text{div}\vec{I}]_{i,j} = [\text{div}\vec{I}]_{i,j} - \frac{Q_r}{V_{i,j}}(1 - f), \quad (3.4)$$

kde hodnota  $f$  je dána na základě vztahu (2.2) jako

$$f = e^{-|L_{i,j}\kappa_{i,j}|}, \quad (3.5)$$

kde  $L_{i,j}$  je vzdálenost, kterou paprsek urazil v dané buňce  $C_{i,j}$  a  $\kappa_{i,j}$  je koeficient inverzního brzděného záření v buňce  $C_{i,j}$ . Touto hodnotou potom snížíme výkon paprsku

$$Q_r \leftarrow Q_r f. \quad (3.6)$$

### 3.3 Dvoudimenzionální metoda

Tato práce je rozšířením předchozího modelu pro trasování paprsků ve 2D síti [16]. V této kapitole vysvětlím algoritmy pro trasování průchodu paprsků ve 2D.

U všech modelů je prvním krokem nalezení buňky, kterou bude paprsek vcházet do mřížky. Jelikož paprsky vstupují do mřížky shora, bude  $z$ -ová souřadnice této buňky rovna  $n_j$ . Zatím uvažujeme pouze kolmý vstup paprsků do mřížky, bude tedy stačit jen srovnávání  $r$ -vé souřadnice paprsku se souřadnicemi sousedících vrcholů na úrovni  $n_j + 1$ , dokud nenalezneme hranu, kterou bude paprsek procházet.

Definujme si body A, B, C, D následovně: vchází-li paprsek do buňky, označíme hranu, kterou vchází, CD, přičemž bod D bude z pohledu paprsku napravo a bod C bude z pohledu paprsku nalevo. Takto bude buňka definovaná vrcholy A, B, C, D proti směru hodinových ručiček, nezávisle na orientaci buňky v mřížce, viz obrázek 3.4. Toto se hodí, jelikož se tvar mřížky v čase mění a paprsek nemusí vždy procházet buňkami logicky dolů, a to ani kdyby se pohyboval pouze svisle. Poněvadž si stále uchováváme informaci o tom, kterému bodu z A, B, C, D odpovídá který vrchol mřížky, můžeme vždy zase zjistit, jak je buňka vůči mřížce orientovaná, a proto můžeme z pouhé znalosti nových bodů C a D zjistit, jestli bude paprsek z buňky  $C_{i,j}$  putovat v mřížce logicky nahoru, tedy do buňky  $C_{i,j+1}$ , dolů - tj. buňka  $C_{i,j-1}$ , doleva - tj. buňka  $C_{i-1,j}$  nebo doprava - tj. buňka  $C_{i+1,j}$ . Zároveň určíme i nové body A a B. Tento algoritmus pojmenujme `next_cell`.

Pro simulaci absorpce na kritické ploše i pro trasování paprsku, ve kterém se směr paprsku při průchodu plazmatem mění, budeme první potřebovat rozhodnout, kterou buňkou paprsek do mřížky vstoupí. V obou případech je před vstupem do mřížky směr paprsků stejný

(tj. kolmo proti směru osy  $z$ ) a můžeme proto použít stejný postup.

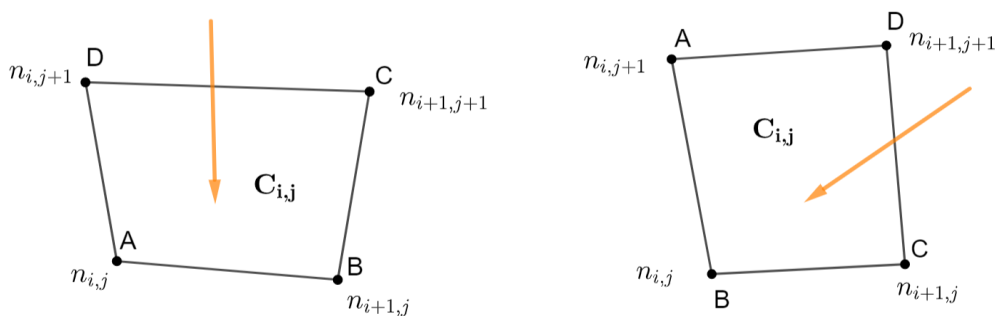
Pro vstupní buňku paprsku musí platit, že  $r_{laser}$  bude mezi  $r$ -ovou souřadnicí bodu D a bodu C, ozn.  $r_C$  a  $r_D$ , obdobné značení budeme používat pro body A a B. Víme-li, které vrcholy buňky, do které paprsek vstupuje, korespondují s body C a D, budeme znát i body A a B a souřadnice samotné vstupní buňky.

### 3.3.1 Simulace absorpce na kritické ploše

V modelu absorpce na kritické ploše předpokládáme, že plazma neovlivňuje trajektorii laseru a paprsky jdou rovně dolů proti směru osy  $z$ . Každou buňkou bude do mřížky vcházet určitý počet paprsků s danou  $r$ -ovou souřadnicí, označme si souřadnici aktuálně sledovaného paprsku jako  $r_{laser}$ . Budeme sledovat průchod paprsku naší pohybující se mřížkou a přitom budeme kontrolovat, jestli paprsek neopustil mřížku a jestli jsme nedošli do buňky s nadkritickou hustotou volných elektronů - pokud ne, divergence intenzity v dané buňce se nezmění, pokud ano, paprsek se absorbuje a divergence intenzity se změní o výkon paprsku.

Z obrázku 3.4 lze vidět, že máme pouze tři možné hrany, kterými může rovně putující paprsek vystoupit z buňky. Je zřejmé, že:

1. pokud bude platit, že  $r_{laser} < r_A$ , paprsek vyjde z buňky levou hranou  $\rightarrow$  bod A bude novým bodem C, bod D zůstává stejný
2. pokud bude platit  $r_A < r_{laser} < r_B$ , paprsek vyjde z buňky spodní hranou  $\rightarrow$  body A a B budou nyní pořadě body D a C
3. pokud bude platit  $r_{laser} > r_B$ , paprsek vyjde z buňky pravou hranou  $\rightarrow$  bod B bude novým bodem D, bod C zůstává stejný



Obrázek 3.4: Obrázek orientace buněk. Nalevo vidíme paprsek vstupující do buňky  $C_{ij}$  zvrchu v souladu s původní orientací mřížky, bod A tedy koresponduje s vrcholem  $n_{i,j}$ . Napravo vstupuje paprsek do buňky její pravou hranou z pohledu mřížky, a bod A odpovídá vrcholu  $n_{i,j+1}$ . Analogicky by se pak měnila orientace bodů, kdyby paprsek vcházel pravou nebo spodní stranou buňky.

Pokud paprsek vyjde z mřížky, zkontrolujeme, jestli k tomu nedošlo v důsledku zakřivení mřížky, k čemuž v naší simulaci dochází z důvodu expanze plazmové korony, která může

být nekonvexní. Poté dále sledujeme, jestli paprsek do mřížky znovu nevstoupí. Pokud ne, přejdeme na další paprsek.

Pokud dojdeme do buňky s nadkritickou hustotou volných elektronů, absorbuje se výkon daného paprsku mechanismem popsáním v kapitole 3.2 a k divergenci intenzity v dané buňce se přičte výkon paprsku dle vztahu (3.3). Poté přejdeme na sledování průchodu paprsku dalšího.

Celý výše popsaný algoritmus je shrnut v algoritmu 1.

---

**Algoritmus 1:** Algoritmus pro simulaci absorpce na kritické ploše

---

```

1 inicializace fyzikálních veličin
2 RAYS : for  $k \leftarrow 1$  to  $n_i \cdot N_{rays\_per\_cell}$  do
3    $r_{laser} \leftarrow r$ -ová souřadnice paprsku  $k$ 
4    $i \leftarrow$  hodnota, pro kterou platí:  $[n_{i,nj+1}]_r < r_{laser} < [n_{i+1,nj+1}]_r$  //nalezení
   buňky vstupu
5    $C \leftarrow n_{i+1,nj+1}$ 
6    $D \leftarrow n_{i,nj+1}$ 
7    $A \leftarrow n_{i,nj}$ 
8    $B \leftarrow n_{i+1,nj}$ 
9   PRŮCHOD : while  $i <> 0$  and  $i <> n_i + 1$  and  $j <> 0$  and  $j <> n_i + 1$  do
10    next_cell( $i, j, A, B, C, D, r_{laser}$ )
11    if paprsek opustil mřížku then
12      hledáme novou vstupní buňku, pokud ji nalezneme, získáváme nové  $i$ ,
      návrat k řádku 5
13      pokud nenalezneme, exit PRŮCHOD
14    end
15  end
16  absorpce paprsku v buňce  $C_{i,j}$  přičtením divergence intenzity podle vztahu (3.3)
17 end

```

---

### 3.3.2 Simulace pomocí trasování paprsků

V modelu trasování paprsků budeme brát v potaz i vliv podkritického plazmatu na trajektorii paprsků a absorpci energie inverzním brzdícím zářením. Při sledování trajektorie paprsků mřížkou budeme tedy potřebovat i  $z$ -ovou souřadnici paprsku, poloha paprsku bude tedy dána bodem  $(r_{laser}, z_{laser})$ , který je průsečíkem paprsku a hrany CD buňky. Dále bude nutné si uchovat informaci o aktuální hodnotě výkonu paprsku  $Q_{laser}$ , která se bude průběžně absorbovat, a úhel  $\alpha$ , který aktuálně paprsek svírá se zápornou osou  $-z$  (tj. paprsek směřující svisle dolů bude mít  $\alpha = 0$ ). Když paprsek při průchodu mřížkou narazí na hranici dvou buněk, použijeme Snellův zákon, který říká, že na hranici dvou prostředí s různými indexy lomu dojde k lomu daném vztahem

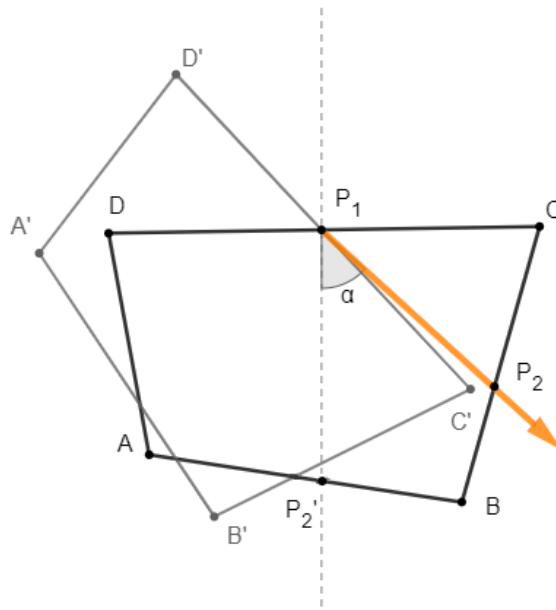
$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin(\varphi_2)}{\sin(\varphi_1)}, \quad (3.7)$$

kde  $n_1$  a  $n_2$  jsou indexy lomu v prvním a druhém prostředí a  $\varphi_1$  a  $\varphi_2$  jsou úhly vstupu a výstupu paprsku od směru gradientu hustoty volných elektronů  $\nabla n_e$  v bodě lomu, tj. průsečík paprsku s hranou buňky. Hrana mezi dvěma buňkami nemusí být kolmá na gradient.

Stejně jako u absorpce na kritické ploše musíme pro každý paprsek nejdříve najít buňku, kterou vstupuje do mřížky. Na hranici mřížky lom neuvažujeme, proto bude na začátku  $\alpha = 0$ .

Opět budeme muset použít algoritmus, který rozhodne, kterými buňkami bude paprsek procházet. Tento úkol je nyní náročnější než u absorpce na kritické ploše, jelikož paprsky nyní nemusí být rovnoběžné s osou  $z$ , nýbrž s ní svírají určitý úhel  $\alpha$ . Pokusíme se tuto úlohu převést na problém, který se dá řešit algoritmem `next_cell` z předchozí kapitoly. Abychom mohli stejně jako v předchozím případě porovnávat  $r$ -ové souřadnice laseru a bodů A, B, C, D bez ohledu na úhel  $\alpha$  a souřadnici laseru  $z_{laser}$ , přejdeme rotací do souřadného systému, ve kterém bude aktuální směr paprsku rovnoběžný s novou osou  $z'$ .

Toho docílíme tím, že provedeme rotaci vrcholů buňky, do které paprsek vstoupil, o úhel  $\alpha$  ve směru hodinových ručiček. Rotace se provede kolem bodu  $P_1$ , což je průsečík paprsku s hranou buňky (bod, kterým paprsek do buňky vstoupil), a který má v původní i ve zrotované soustavě stejné souřadnice  $(r_{laser}, z_{laser})$ , viz obrázek 3.5. S takto zrotovanými body A', B', C', D' pak můžeme porovnávat aktuální  $r_{laser}$ , jakoby paprsek mířil svisle dolů podél osy  $z'$  - viz svislá přerušovaná čára na obrázku 3.5.



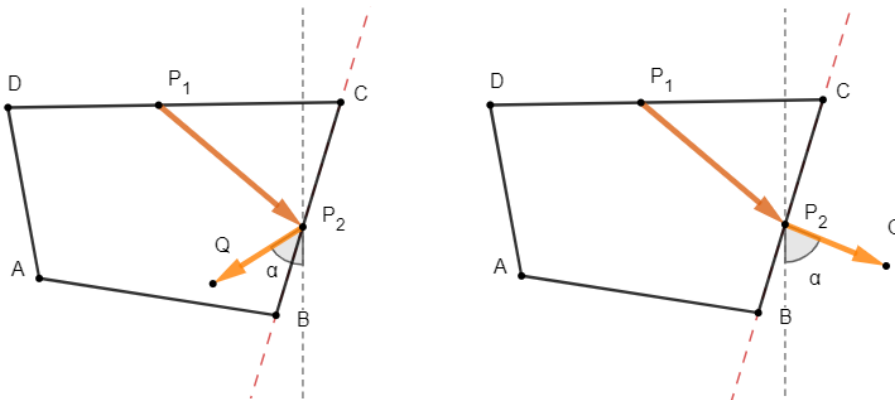
Obrázek 3.5: Příklad rotování vrcholů buňky A, B, C, D ve směru hodinových ručiček o úhel  $\alpha$ , který svírá paprsek s osou  $z'$ , okolo bodu  $P_1$ , což je bod, kterým paprsek do této buňky vstoupil. Takto rotované vrcholy značíme na obrázku čárkovaně. Bod  $P'_2$  je průsečíkem smyšleného paprsku, který míří svisle dolů z bodu  $P_1$ . Výsledný nový průsečík paprsku s buňkou  $P_2$  získáme rotací bodu  $P'_2$  o úhel  $\alpha$  proti směru hodinových ručiček.

Použili jsme tedy algoritmus `next_cell` v čárkované soustavě. Tímto najdeme bod  $P'_2$ , tedy průsečík paprsku s buňkou v rotované soustavě a získáme informaci o tom, kterou hranou paprsek z buňky vychází. Poté získáme bod  $P_2$  rotací bodu  $P'_2$  zpět o úhel  $\alpha$  proti směru

hodinových ručiček. Bod  $P_2$  je vstupním bodem paprsku do následující buňky, z jehož znalosti už určíme, do které buňky paprsek vstupuje, a které vrcholy této nové buňky označíme jako nové A, B, C, D. Úhel, který bude paprsek po tomto lomu svírat s osou  $z$  bude nyní novým úhlem  $\alpha$ .

Avšak při lomu paprsku na rozhraní daném gradientem hustoty volných elektronů  $\nabla n_e$  a indexy lomu těchto buněk může dojít k tomu, že se paprsek odrazí zpět do staré buňky, místo aby vstoupil do buňky nové. Nyní je třeba rozhodnout, jestli paprsek po aplikaci Snellova zákona vstoupí do nové buňky nebo se odrazí do původní.

Zvolme bod Q tak, že se z bodu  $P_2$  posuneme o libovolnou vzdálenost ve směru daném úhlem  $\alpha$  (například  $Q = [Q_r, Q_z]$ , kde  $Q_r = P_{2,r} + \sin \alpha$  a  $Q_z = P_{2,z} - \cos \alpha$ ), viz obrázek 3.6. Zda-li se paprsek odrazil zpět při lomu na hraně buňky zjistíme tak, že vezmeme přímku danou touto hranou (na obrázku 3.6 vyobrazena jako červená přerušovaná čára) a spočítáme, jestli se bod Q nachází ve stejné polorovině dané touto přímkou jako libovolný bod staré buňky, který se na této přímce nenachází. Například u případu nakresleného na obrázku 3.6 můžeme porovnat, jestli se bod Q nachází ve stejné polorovině jako libovolný z bodů A či D. Pokud ano, paprsek se vrací zpět do staré buňky, což je případ na levém obrázku. Naopak na pravém obrázku se bod Q nachází mimo starou buňku a paprsek tedy vstupuje do buňky nové.



Obrázek 3.6: Obrázek k popisu postupu rozhodování, zda se paprsek při lomu odrazí zpět do předchozí buňky, nebo z ní vystoupí. Na levém obrázku se zvolený bod Q, který vznikl posunutím z bodu  $P_2$  ve směru  $\alpha$ , nachází ve stejné polorovině dané přímkou procházející body C a B jako body A a D, a paprsek se odrazí zpět do staré buňky. Naopak na pravém obrázku se bod Q nachází v opačné polorovině a paprsek z buňky vychází.

Při takto popsaném postupu paprsku mřížkou se také zabýváme absorpcí inverzním brzdným zářením v každé buňce, kterou paprsek prochází. Při té se v buňkách k divergenci intenzity přičte část výkonu paprsku dle vztahu (3.2) a výkon paprsku se zmenší dle vztahu (3.2). Pokud se naprostá většina původní výkonu paprsku (ozn.  $Q_{original}$ ) absorbuje, tedy pokud  $Q_{laser} \ll Q_{original}$ , ukončíme průchod paprsku a budeme se zabývat paprskem následujícím.

Trasování paprsků ve 2D je srhnuto v algoritmu 2.

---

**Algoritmus 2:** 2D ray-tracing algoritmus

---

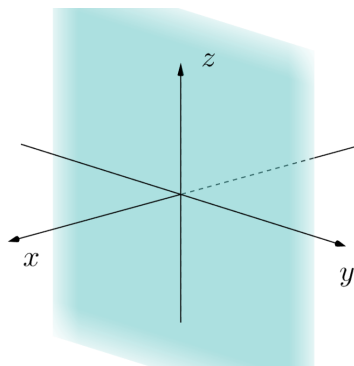
```
1 inicializace fyzikálních veličin  $\nabla n_e \leftarrow$  v uzlech napočítáme gradient hustoty
   volných elektronů
2 RAYS : for  $k \leftarrow 1$  to  $n_i \cdot N_{rays\_per\_cell}$  do
3    $Q_{laser}, Q_{original} \leftarrow$  výkon k-tého paprsku
4    $r_{laser} \leftarrow$   $r$ -ová souřadnice paprsku  $k$ 
5    $i \leftarrow$  hodnota, pro kterou platí:  $[n_{i,nj+1}]_r < r_{laser} < [n_{i+1,nj+1}]_r$  //nalezení
   buňky vstupu
6    $C \leftarrow n_{i+1,nj+1}$ 
7    $D \leftarrow n_{i,nj+1}$ 
8    $A \leftarrow n_{i,nj}$ 
9    $B \leftarrow n_{i+1,nj}$ 
10   $z_{laser} \leftarrow$   $z$ -ová souřadnice průsečíku hrany CD s paprskem
11   $\alpha \leftarrow 0$ 
12   $r_P \leftarrow r_{laser}, z_P \leftarrow z_{laser}$ 
13   $current\_cell \leftarrow C_{i,nj}$ 
14  PRŮCHOD : while  $i <> 0$  and  $i <> n_i + 1$  and  $j <> 0$  and  $j <> n_i + 1$  do
15     $\alpha \leftarrow$  modulo( $\alpha, 2\pi$ )
16     $old\_cell \leftarrow current\_cell$ 
17     $C_{ij}, r_P, z_P \leftarrow$  nalezneme následující buňku a souřadnice nového průsečíku
   výše popsaným algoritmem používajícím rotace buňky, viz obrázek 3.5
18     $current\_cell \leftarrow C_{ij}$ 
19     $n_1, n_2 \leftarrow$  indexy lomu v buňce  $old\_cell$ , resp.  $current\_cell$ 
20     $\nabla n_e^{loc} \leftarrow$  call interpolate_ne_grad v bodě  $[r_P, z_P]$ 
21     $\varphi_{in} \leftarrow$  úhel dopadu paprsku na rozhraní daném  $\nabla n_e^{loc}$ 
22    if  $|\frac{n_1}{n_2} \sin \varphi_{in}| < 1$  then
23       $\alpha = \alpha + (\varphi_{in} - \arcsin(\frac{n_1}{n_2} \sin \varphi_{in}))$ 
24    else
25       $\alpha = \alpha + 2\varphi_{in} + \pi$ 
26    end
27     $L \leftarrow \sqrt{(z_P - z_{laser})^2 + (r_P - r_{laser})^2}$  //vzdálenost, kterou
   paprsek urazil v buňce
28     $Q_{laser} \leftarrow Q_{laser} \exp(\kappa_{ib,old\_cell} L)$ 
29     $[\text{div} \vec{I}]_{old\_cell} \leftarrow [\text{div} \vec{I}]_{old\_cell} + \frac{Q_{laser}}{V_{old\_cell}} (1 - \exp(\kappa_{ib,old\_cell} L))$ 
30     $z_{laser} \leftarrow z_P, r_{laser} \leftarrow r_P$ 
31    if došlo k odrazu then
32       $current\_cell \leftarrow old\_cell, C, D \leftarrow D, C$ , určení nových A a B
33    end
34    výpočet absorpce, zmenšení  $r\_power$ 
35    if  $Q_{laser} < 10^{-6} \cdot Q_{original}$  then
36      exit PRŮCHOD //intenzita zanedbatelná, ukončujeme
37    end
38  end
39 end
```

---

### 3.4 Rozšíření na tři dimenze

Zde si popíšeme rozšíření algoritmu pro trasování paprsků pro tři dimenze [7, 17, 18]. Paprsky tedy budeme uvažovat ve 3D a cylindricky symetrické buňky budou ve tvaru prstýnků jako na obrázcích 3.2 a 3.3. Z postupu pro dvě dimenze využijeme stejný algoritmus pro hledání vstupní buňky, ten však budeme moci použít pouze pro případy, ve kterých laser míří kolmo na terčík. Budeme používat stejné značení pro vrcholy buněk a stejnou orientaci. Také využijeme funkci `next_cell`.

Ve dvou dimenzích jsme měli vodorovnou osu  $r$  a svislou osu  $z$ . Ve třech dimenzích přejmenujeme osu  $r$  na osu  $y$ . Náš dvoudimenzionální algoritmus tedy probíhal v rovině  $YZ$ . Nyní přidáme ještě osu  $x$ , výsledný souřadný systém můžeme vidět na obrázku 3.7. Když tedy budeme paprsek dělit na více paprsků na kružnici, budeme rotovat původní souřadnice paprsku, jejichž  $x$ -ová hodnota je nulová, mimo z rovinu  $YZ$ . Tento algoritmus bude kombinací 2D a 3D. Hydrodynamika a vrcholy mřížky budou dvoudimenzionální, třídimenzionální buňky z nich budou až poté vytvořeny výše zmíněnou rotací okolo osy  $z$ . Oproti tomu samotné paprsky se budou pohybovat 3D prostorem a jejich průsečíky s buňkami budou body ve třech dimenzích.



Obrázek 3.7: Souřadnicový systém, který používáme pro 3D trasování paprsků. V modře vyznačené rovině  $YZ$  (tj. rovina  $x = 0$ ) se nachází 2D mřížka, ve které probíhaly celý předchozí dvoudimenzionální algoritmy.

Významný rozdíl mezi 2D a 3D algoritmy pak bude v postupu pro hledání průsečíků paprsků s hranami, jelikož ve 3D hrany nebudou úsečky, ale výřezy povrchů válců, rovin či kuželů. Do rovnic pro kužel, válec či rovinu dosadíme parametrický vztah pro paprsek, a z problému pro hledání průsečíku se tedy stane řešení rovnice pro parametr.

Další podstatný rozdíl bude ve výpočtu lomu či odrazu na rozhraní buněk podle Snellova zákona. Směr paprsku ve třech dimenzích už nemůžeme popsat jen úhlem  $\alpha$ , který paprsek svírá s osou  $z$ . Pro popis směru paprsku budeme nyní potřebovat směrový vektor  $\vec{x}$ . Lom či odraz dle Snellova zákona pak spočítáme pomocí soustavy rovnic pro souřadnice vektoru dávajícího nový směr paprsku.

### 3.4.1 Hledání průsečíků ve třech dimenzích

Prvním důležitým krokem při rozšíření mřížky na tři dimenze je rozhodnout, jaké tvary budou popisovat naše třídimenzionální buňky. Každá hrana buňky svírá určitý úhel s osou  $z$ , a podle toho jí přiřadíme tvar. Z úsečky  $AB$  se stane:

$$\begin{cases} \text{válec,} & \text{pokud } |A_y - B_y| < \varepsilon \\ \text{rovina,} & \text{pokud } |A_z - B_z| < \varepsilon \\ \text{kužel,} & \text{v ostatních případech,} \end{cases}$$

přičemž jsme zvolili  $\varepsilon = 4 \times 10^{-10}$ . Zdůrazněme znovu, že v tomto souřadnicovém systému leží vrcholy buněk v rovině  $YZ$ , mají tedy nulové  $x$ -ové souřadnice, osa  $y$  je zde vodorovná a osa  $z$  je svislá, viz obrázek 3.7. Nyní můžeme každou hranu popsat pomocí rovnic roviny, válce nebo kuželu, jejichž jsou součástí:

$$\begin{aligned} z = d, & & \text{pro rovinu,} \\ x^2 + y^2 = r^2, & & \text{pro válec,} \\ x^2 + y^2 = a^2(z - V)^2 & & \text{pro kužel,} \end{aligned} \quad (3.8)$$

kde  $d$  je parametry určující rovinu, která je kolmá na osu  $z$ ,  $r$  je poloměr válce, jehož osa je osa  $z$ ,  $V$  je  $z$ -ová souřadnice vrcholu kuželu, který leží na ose  $z$ , a  $a^2$  má význam  $\tan^2 \theta$ , kde  $\theta$  je úhel, který svírá příslušná hrana, ze které kužel vznikl, s osou  $z$ .

Pro trasování paprsku touto mřížkou pak potřebujeme najít průsečíky paprsku s těmito tvary. Paprsek je popsán parametrickou rovnicí:

$$\mathcal{R}(t) = P + t\vec{v}, \quad (3.9)$$

kde  $t \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$  je parametr,  $P = (P_x, P_y, P_z)$  je libovolný bod, kterým paprsek prochází, a  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$  je směrový vektor paprsku, který bude v našem případě normalizovaný.

Po dosazení rovnice paprsku (3.9) do (3.8) získáme rovnice pro parametr  $t$  [19]:

$$\begin{aligned} c(P_z + tv_z) = d, & & \text{pro rovinu,} \\ 2t^2 + (2P_x v_x + 2P_y v_y)t + (P_x^2 + P_y^2) = r^2, & & \text{pro válec,} \\ At^2 + 2Bt + C = 0 & & \text{pro kužel,} \end{aligned} \quad (3.10)$$

kde  $A$ ,  $B$  a  $C$  v rovnici pro kužel jsou rovny

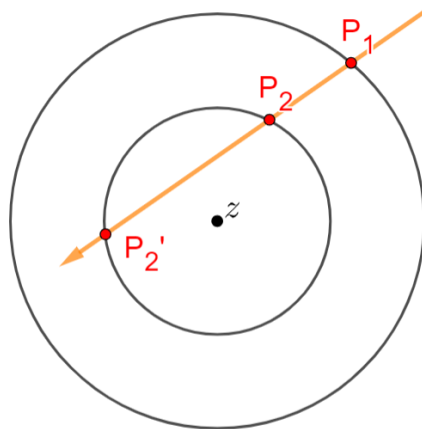
$$\begin{aligned} A &= v_x^2 + v_y^2 - a^2 v_z^2 \\ B &= P_x v_x + P_y v_y - P_z v_z - V v_z \\ C &= P_x^2 + P_y^2 + a^2 V^2 + a^2 P_z^2 - a^2 2V P_z. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Vypočtením příslušné rovnice dostaneme hodnotu parametru  $t$ . Pak dosadíme  $t$  do rovnice paprsku 3.9 a za bod  $P$  zvolíme souřadnice starého průsečíku, kterým paprsek do buňky vstoupil. Tím získáme průsečík paprsku s tělesem vzniklým z dané hrany. U válce a u kužele



můžeme získat až dvě různá řešení pro  $t$  a tedy dva různé průsečíky. Při průchodu každou buňkou hledáme průsečíky paprsků se všemi čtyřmi hranami, můžeme mít tedy až 8 možných průsečíků. Ze všech získaných průsečíků se všemi tvary hran nakonec vybereme jeden správný touto eliminací:

- U kuželu uvažujeme jen tu polovinu, ve které leží daná hrana.
- Musí platit, že  $z$ -ová složka průsečíku nesmí být výše než vyšší bod hrany, jejíž tvar paprsek protíná, a níže než nižší bod této hrany (tímto se zabýváme pouze u kuželu a válce).
- Musí platit, že vzdálenost bodu od osy  $z$  nesmí být větší než vzdálenost pravého bodu hrany a menší než vzdálenost levého bodu hrany, jejíž tvar paprsek protíná (tímto se zabýváme pouze u kuželu a roviny).
- Hodnota  $t$  nesmí být záporná - to by znamenalo opačný směr paprsku.
- Musí platit, že  $t > \varepsilon$ , kde  $\varepsilon$  je velmi malé a jeho hodnotu volíme pomocí délky nejkratší hrany buňky, více o tom budeme pojednávat v kapitolách 4.1 a 4.2.
- Nakonec ze všech zbylých průsečíků vybereme ten bod, který je nejbližší starému průsečíku, viz obrázek 3.8



Obrázek 3.8: Pohled shora na průchod paprsku prstencovou buňkou. První červený průsečík  $P_1$  je vstupní průsečík paprsku do buňky, průsečíky  $P_2$  a  $P_2'$  jsou nově nalezené průsečíky. Je možné, že oba splňují všechny podmínky (a)-(e), a proto zde musíme aplikovat ještě podmínku (f), která nám dá jako správné řešení průsečík  $P_2$ . Vybráním průsečíku, který je nejbližší vstupnímu bodu paprsku do buňky  $P_1$ , jsme vybrali průsečík, kterým paprsek z buňky určitě vystupuje. Kvůli zakřivení buněk by se totiž mohlo jednat také o průsečík, kterým paprsek do buňky znovu vstupuje nebo kterým z něj znovu vystupuje.

Tento postup nyní shrneme v algoritmu 3. Ten tedy popisuje, jak získáme průsečík, kterým paprsek vystupuje z buňky. Dalším krokem bude zjistit, jak se bude paprsek chovat na rozhraní buněk.

---

**Algoritmus 3:** Algoritmus pro hledání průsečíků paprsku s buňkou danou opsáním čtyřúhelníku ABCD

---

```

1 subroutine where_next
2 for sousedící body  $P_1, P_2$  from  $\{A, B, C, D\}$  do
3   if  $|P_{1,y} - P_{2,y}| < \varepsilon$  then
4      $prus_1, prus_2 \leftarrow$  vyřeš rovnici z pro válec z (3.10)
5   else if  $|P_{1,z} - P_{2,z}| < \varepsilon$  then
6      $prus_1 \leftarrow$  vyřeš rovnici z pro rovinu z (3.10)
7   else
8      $prus_1, prus_2 \leftarrow$  vyřeš rovnici z pro kužel z (3.10)
9   end
10 end
11  $prusecik\_novy \leftarrow$  výsledek po eliminaci podle pravidel, aby zbyl správný průsečík
12  $current\_cell, A, B, C, D \leftarrow$  nová buňka daná nalezeným průsečíkem, call
    next_cell

```

---

### 3.4.2 Snellův zákon ve 3D

Získáním průsečíku jsme zjistili, kterou stěnou prstence bude paprsek vystupovat ze své aktuální buňky, a mezi kterými dvěma buňkami tedy bude probíhat lom, případně odraz. Obdobně jako v trasování paprsků ve 2D budeme na rozhraní dvou buněk aplikovat Snellův zákon (3.7), abychom našli nový směr paprsku po lomu, případně odrazu.

Nyní je naším úkolem naleznout nový směrový vektor popisující směr paprsku. Při tomto hledání budeme potřebovat tři pomocné roviny:

1. Rovina  $p$ , ve které leží samotný paprsek i gradient hustoty volných elektronů. V této rovině k lomu dochází.
2. Rovina  $r$ , která je kolmá na rovinu  $p$  a kolmá na gradient hustoty.
3. Rovina  $k$ , která je kolmá na obě předchozí roviny a prochází gradientem hustoty volných elektronů.

Náš hledaný nový směrový vektor paprsku  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$  musí splňovat následující podmínky:

- (a) Vektor musí být jednotkový:

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = 1 \quad (3.12)$$

- (b) Vektor musí ležet v rovině dané gradientem hustoty volných elektronů a paprskem, tj. rovina  $p$ :

$$a_p v_x + b_p v_y + c_p v_z = d_p, \quad (3.13)$$

kde  $a_p, b_p, c_p$  a  $d_p$  jsou parametry určující rovinu  $p$ .

- (c) Vektor musí svírat s gradientem hustoty volných elektronů úhel  $\theta_2$  daný Snellovým zákonem (3.7)

$$\cos \theta_2 = \nabla n_e \vec{v}, \quad (3.14)$$

kde  $\nabla n_e$  i  $\vec{v}$  jsou normalizované.

Tímto získáme soustavu jedné kvadratické a dvou lineárních rovnic. Jako řešení můžeme získat až dva lineárně nezávislé vektory, označme si je  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ . Tyto vektory budou tedy z rovnice (3.13) ležet v rovině  $p$  a zároveň budou osově symetrické, kde osa bude rovina  $k$ . Nyní musíme z těchto dvou vektorů vybrat ten správný. Rovina  $k$  rozdělí prostor na dva polo-prostory a správné řešení musí být vektor, který neleží ve stejném poloprostoru jak původní starý směrový vektor paprsku. Napočítáme tedy dvě testovací řešení posunutím průsečíku o každý z vektorů, a poté jejich dosazením do rovnice roviny  $k$  a dosazením starého průsečíku paprsku s buňkou dle znaménka výsledků rozhodneme, který vektor je hledané řešení, tj. které řešení je na opačné straně roviny  $k$ , než na které je starý průsečík. Tento postup je shrnut v algoritmu 4.

---

**Algoritmus 4:** Algoritmus pro výpočet nového směru paprsku ze Snellova zákona ve 3D

---

```

1 subroutine bunka_lom
2  $\vec{v}_{stary}, \nabla n_e \leftarrow$  směrový vektor paprsku, gradient hustoty volných elektronů
3  $\theta_1 \leftarrow$  úhel mezi  $\vec{v}_{stary}$  a  $\nabla n_e$ 
4 if  $\nabla n_e \parallel \vec{v}_{stary}$  or  $\nabla n_e = \vec{0}$  then
5   |  $\vec{v}_{novy} \leftarrow \vec{v}_{stary}$  // ( $\vec{v}_{stary}$  a  $\nabla n_e$  jsou rovnoběžné, nebo  $\nabla n_e$  je
   | nulový  $\implies$  nebude lom/odraz)
6 else
7   r_coeffs  $\leftarrow$  koeficienty roviny  $r$ , tj. rovina kolmá na gradient el. hustoty
   | procházející průsečíkem
8   p_coeffs  $\leftarrow$  koeficienty roviny  $p$ , tj. rovina, ve které leží paprsek i gradient
   | hustoty volných elektronů
9   k_coeffs  $\leftarrow$  r_coeffs  $\times$  p_coeffs, koeficienty roviny  $k$ 
10  if  $\frac{n_1}{n_2} \sin(\theta_1) > 1$  then
11  | odraz  $\leftarrow$  true
12  |  $\theta_2 \leftarrow \theta_1$ 
13  else
14  | odraz  $\leftarrow$  false
15  |  $\theta_2 \leftarrow \arcsin(\frac{n_1}{n_2} \sin(\theta_1))$ 
16  end
17   $\vec{v}_1, \vec{v}_2, pocet\_reseni \leftarrow$  vyřeš soustavu rovnic (3.12), (3.13), (3.14)
18  if  $pocet\_reseni = 2$  then
19  |  $\vec{v}_{novy} \leftarrow$  vybereme správné řešení z  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ , které bude ležet v opačném
   | poloprostoru daném k_coeffs než vektor  $\vec{v}_{stary}$ 
20  else if  $pocet\_reseni = 1$  then
21  |  $\vec{v}_{novy} \leftarrow \vec{v}_1$ 
22  else
23  | řešení  $\nexists$ , error
24  end
25 end

```

---

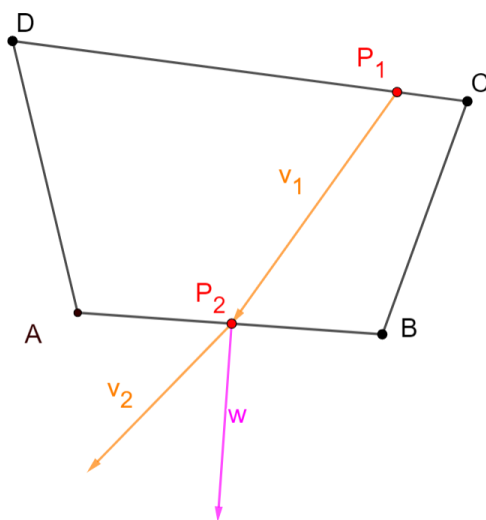
Nakonec musíme rozhodnout, jestli po nalezení nového směru paprsku Snellovým zákonem nedošlo k návratu do předchozí buňky. K tomu může dojít i v případě, že nenastal odraz, a stejně tak nemusí k návratu do staré buňky dojít, přestože došlo k odrazu. Rozhraní lomu totiž není totožné s hranami buněk.

Pro případ válce a roviny budeme k tomuto problému přistupovat podobně jako ve 2D, viz kapitola 3.3.2. Sestrojí se tedy testovací bod posunutím průsečíku o vektor, tento bod dosadíme do rovnice příslušného tvaru a znaménko výsledku porovnáme s výsledkem pro starý průsečík.

Pro kužel tentokrát nebudeme konstruovat testovací bod, ale využijeme gradient na povrch kuželu. Tento gradient spočítáme v bodě průsečíku paprsku s hranou z funkce pro kužel

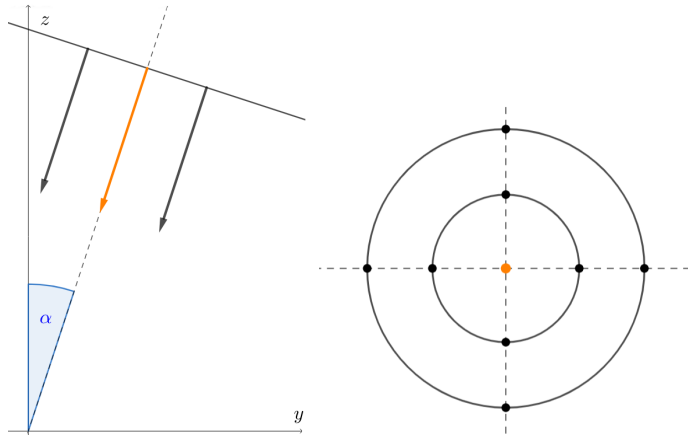
$$x^2 + y^2 - a^2(z - V)^2,$$

kde hodnoty  $a$  a  $V$  známe, protože jsme kužel vytvářeli z hrany, když jsme hledali průsečíky. Tento gradient si označme jako  $\vec{g}$ . Další vektory, které využijeme, budou starý vektor paprsku, který určoval jeho směr před použitím Snellova zákona, ozn.  $\vec{v}_1$ , a vektor dávající nový směr paprsku po použití Snellova zákona, ozn.  $\vec{v}_2$ .



Obrázek 3.9: Ukázka rozložení vektorů používaných při rozhodování, jestli vstupuje paprsek po lomu či odrazu daném Snellovým zákonem do sousední buňky nebo jestli se vrací zpět do původní buňky. Bod  $P_1$  je starý průsečík, kterým paprsek přišel do této buňky, vektor  $\vec{v}_1$  dává směr paprsku před aplikací Snellova zákona. Z bodu  $P_2$  pak míří vektor  $\vec{v}_2$ , který udává aktuální směr paprsku. Růžově je vyznačen vektor  $\vec{w}$ , který je kolmý na hranu, se kterou paprsek protíná. Pomocí znaménka skalárního součinu vektorů  $\vec{v}_2 \cdot \vec{w}$  (tj. průmětu vektoru  $\vec{v}_2$  do směru  $\vec{w}$ ) pak můžeme určit, jestli paprsek postupuje do sousední buňky nebo jestli se vrací zpět do původní buňky.

První bychom chtěli získat vektor  $\vec{w}$ , který by byl kolmý na povrch kuželu a zároveň mířil ven z buňky, o které se snažíme rozhodnout, jestli se do ní vracíme. Pokud bude hodnota  $\vec{g} \cdot \vec{v}_1$  kladná, bude  $\vec{w}$  rovno  $\vec{g}$ , jinak bude  $\vec{w} = -\vec{g}$ . Tuto situaci můžeme vidět na obrázku



Obrázek 3.10: Konfigurace pro šikmě dopadající paprsky. Nalevo vidíme pohled na rovinu YZ. Osový paprsek je vyznačen oranžově a svírá s osou  $z$  úhel  $\alpha$ . Na obrázku vpravo pak vidíme pohled v rovině kolmé na osový paprsek, která je v levném obrázku vyznačena přerušovanou čarou. Počátky paprsků jsou zde rozloženy na soustředných kružnicích se středem v počátku osového paprsku.

3.9. Nyní, pokud bude hodnota skalárního součinu  $\vec{w} \cdot \vec{v}_1$  kladná, znamená to, že paprsek postupuje dále do sousední buňky, zatímco pokud bude záporná, znamená to návrat zpět do původní buňky. V limitním případě, kdy bude platit  $|\vec{w} \cdot \vec{v}_1| < \varepsilon$ , dochází k tomu, že je paprsek téměř rovnoběžný s povrchem kuželu vytvořeného danou hranou. Toto ošetříme tak, že směr paprsku uměle velmi mírně nakloníme tak, aby paprsek mířil ven do sousední buňky. Tímto nakloněním vytvoříme chybu, která je daleko menší než jiné chyby těchto výpočtů. Tento postup je shrnut v algoritmu 5.

Celý algoritmus pro průchod jednoho konkrétního paprsku mřížkou shrneme v algoritmu 6. Tento algoritmus ještě neprovádí inicializaci parametrů ani hledání vstupu paprsku do mřížky. Pro každý paprsek tedy procházíme buňkami, po vstupu do určité buňky známe jeho poslední průsečík s buňkou a nový směrový vektor. Funkcí `where_next` hledáme výstupní průsečík z buňky. Tím zjistíme následující buňku a s využitím indexu lomu v této nové buňce spočítáme pomocí Snellova zákona nový směr paprsku. Poté pomocí funkce `same_cell` rozhodneme, zda jsme se po aplikaci Snellova zákona nevrátili do původní buňky, a odečteme absorbovaný výkon paprsku na základě vzdálenosti, kterou paprsek v buňce urazil. Pokud tento výkon klesne pod malý násobek původního výkonu paprsku nebo pokud vystoupíme z mřížky, je průchod ukončen.

### 3.4.3 Šikmý dopad

Případ šikmého dopadu paprsků se od kolmého dopadu bude lišit při rozmístění a určení směru paprsků na začátku simulace a při hledání vstupních buněk. U šikmého dopadu budou paprsky také rozloženy na kružnici, tentokrát ale tato kružnice nebude celá v rovině s konstantním  $z$ . Rovina, ve které se tato kružnice nachází, bude posunuta a rotována tak, aby výsledné paprsky svíraly námi zvolený úhel  $\alpha$  s osou  $z$  a aby byly v dostatečné vzdálenosti od terčíku.

---

**Algoritmus 5:** Algoritmus pro rozhodnutí o návratu paprsku do předchozí buňky

---

```
1 subroutine same_cell
2 if tvar je rovina nebo válec then
3    $T \leftarrow P_2 + \frac{1}{2}|CD|\vec{v}_2$  //sestrojíme testovací bod
4   if tvar je rovina then
5      $m_1 \leftarrow T_z - d$  //dosazení testovacího bodu do rovnice roviny
6      $m_2 \leftarrow P_{1,z} - d$  //dosazení starého bodu do rovnice roviny
7   else
8      $m_1 \leftarrow (T_x^2 + T_y^2)^{\frac{1}{2}} - r$  //dosazení testovacího bodu do rovnice
      válce
9      $m_2 \leftarrow (P_{1,x}^2 + P_{1,y}^2)^{\frac{1}{2}} - r$  //dosazení starého bodu do rovnice
      válce
10  end
11  if  $m_1 \cdot m_2 > 0$  then
12    návrat
13  end
14 end
15 if tvar je kužel then
16    $\vec{g} \leftarrow \nabla(x^2 + y^2 - a^2(z - V)^2)|_{P_2}$  //výpočet vektoru kolmého na
      povrch kuželu
17   if  $\vec{g} \cdot \vec{v}_1 < 0$  then
18      $\vec{w} \leftarrow -\vec{g}$ 
19   else
20      $\vec{w} \leftarrow \vec{g}$ 
21   end
22   if  $|\vec{w} \cdot \vec{v}_2| < \varepsilon$  then
23     nakloníme vektor  $\vec{v}_2$  //paprsek je téměř rovnoběžný s povrchem
      válce, nakloníme jej
24   end
25   if  $|\vec{w} \cdot \vec{v}_2| < 0$  then
26     návrat
27   end
28 end
```

---

---

**Algoritmus 6:** Průchod jednoho paprsku mřížkou

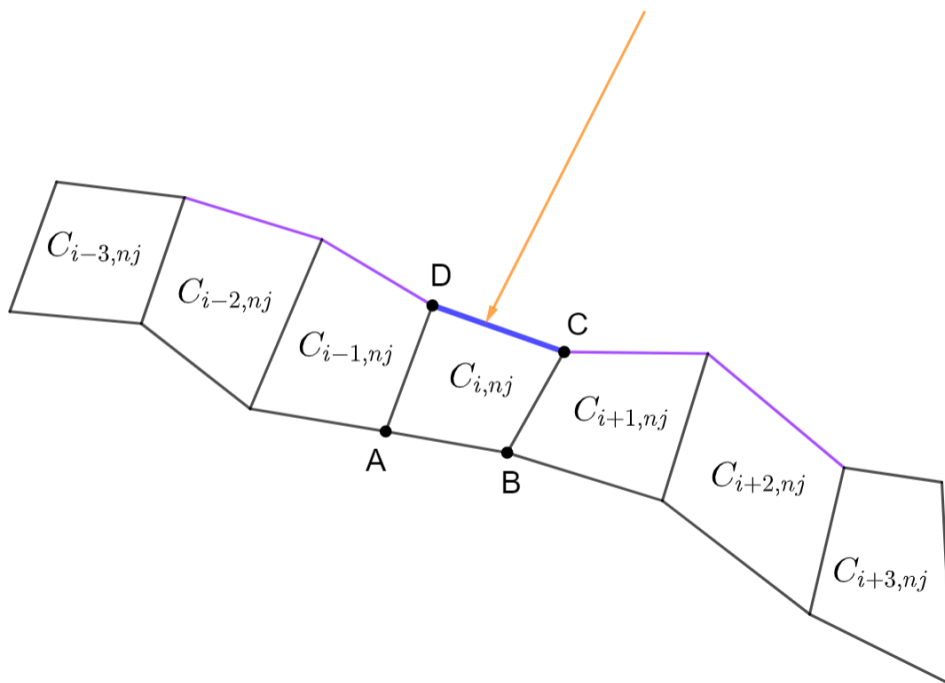
---

```
1 PRUCHOD :
2 while  $i <> 0$  and  $i <> ni + 1$  and  $j <> 0$  and  $j <> ni + 1$  do
3    $P_1 \leftarrow P_2$  (tj. prusecik_stary  $\leftarrow$  prusecik_novy)
4    $\vec{v}_{old} \leftarrow \vec{v}_{new}$ 
5   old_cell  $\leftarrow$  current_cell
6    $P_2, current\_cell \leftarrow$  call where_next //viz algoritmus 3
7    $n_1, n_2 \leftarrow$  indexy lomu v buňkách old_cell, resp. current_cell
8    $\nabla n_e^{loc} \leftarrow$  call interpolate_ne_grad v bodě  $P_2$ 
9    $\vec{v}_{new} \leftarrow$  call bunka_lom( $\nabla n_e^{loc}, P_2, n_1, n_2$ )
10  old_cell, current_cell  $\leftarrow$  call same_cell
11   $L \leftarrow \sqrt{(P_{1,x} - P_{2,x})^2 + (P_{1,y} - P_{2,y})^2 + (P_{1,z} - P_{2,z})^2}$ 
12   $[\text{div} \vec{I}]_{old\_cell} \leftarrow [\text{div} \vec{I}]_{old\_cell} + \frac{Q_{laser}}{V_{old\_cell}} (1 - \exp(\kappa_{ib,old\_cell} L))$ 
13   $Q_{laser} \leftarrow Q_{laser} \exp(\kappa_{ib,old\_cell} L)$ 
14  if  $r\_power < 10^{-6} \cdot Q_{original}$  then
15  |   exit PRUCHOD //intenzita zanedbatelná, ukončujeme průchod
16  end
17 end
```

---

Nejdůležitější roli bude hrát osový paprsek, okolo kterého jsou ostatní kružnice centrovány. Ten se bude nacházet v rovině  $x = 0$ , bude pro zvolený úhel  $\alpha$  mířit do počátku naší souřadné soustavy a jeho svislá souřadnice bude zvolena tak, aby byly paprsky v průběhu simulace vždy dostatečně vysoko. Ostatní paprsky se poté rozmístí po kružnicích v rovině kolmé na směr osového paprsku, viz obrázek 3.10.

První je třeba nalézt vstupní buňku osového paprsku. Jelikož se osový paprsek nachází v rovině  $x = 0$ , můžeme tuto úlohu řešit jako 2D problém výpočtu průsečíku paprsku s úsečkami. Poté, co najdeme vstupní buňku pro osový paprsek, se začneme zabývat ostatními paprsky. Pro ty už musí být výpočty ve třech dimenzích. Abychom nemuseli pro každý paprsek počítat průsečíky s mnoha kužely pro každou buňku, zjednodušíme si výpočty tím, že si vždy zapamatujeme vstupní buňku paprsku ze stejného řezu v předchozí kružnici. To je možné, protože paprsky jsou rozmístěné velmi blízko sebe a na každou buňku připadá mnoho paprsků. Na obrázku 3.11 vidíme paprsek, který dopadá na modře označenou hranu CD buňky  $C_{i,j}$ . Pro následující paprsky, které budou dopadat ze stejného řezu jako tento, se bude pak na vstup testovat hrana buňky  $C_{i,nj}$ , pokud nenajdeme průsečík, zkusíme fialově označené hrany vedlejších buněk  $C_{i+1,nj}$ ,  $C_{i-1,nj}$ ,  $C_{i-2,nj}$  a  $C_{i+2,nj}$ . Pokud ani zde nenajdeme průsečík, zkusíme hrany další hrany ve směru vzdalujícím se od osy z (ve směru rostoucího indexu  $i$ ), tj. hrany buněk  $C_{i+3,nj}$ ,  $C_{i+4,nj}$ , ..  $C_{ni,nj}$ . Ke vstupu do těchto vzdálenějších buněk tomuto může dojít, pokud jsou paprsky téměř paralelní s vnějšími hranami mřížky.



Obrázek 3.11: Na tomto obrázku vidíme paprsek, který šikmě dopadá na mřížku. Paprsek dopadá na modře označenou hranu a vstupuje do buňky  $C_{i,j}$ . Pro následující paprsky ze stejného řezu při hledání vstupní buňky první zkusíme najít průsečík paprsku s buňkou  $C_{i,j}$ , pokud jej nenajdeme, zkusíme potom buňky  $C_{i+1,nj}$ ,  $C_{i-1,nj}$ ,  $C_{i+2,nj}$  a  $C_{i-2,nj}$  a pak dále buňky s rostoucím indexem  $i$ .

### 3.4.4 Celkový algoritmus

Nyní, když jsme si v předchozích kapitolách podrobněji popsali důležité algoritmy využívané v této metodě pro trasování paprsků, si shrneme celý algoritmus pro trasování paprsků ve 3D, viz algoritmus 7 pro kolmě dopadající paprsky a algoritmus 8 pro šikmě dopadající paprsky.

V obou algoritmech první inicializujeme počáteční fyzikální veličiny další proměnné.

Při kolmém dopadu můžeme poté rovnou začít iterovat přes paprsky v cyklu RAYS. Díky cylindrické symetrii vstupují všechny paprsky rozložené po kružnici okolo osy  $z$  do mřížky stejnou hranou, a proto zde můžeme získat vstupní buňku pro všechny z nich už zde. Získáme hodnotu výkonu aktuálního paprsku  $Q_{laser}$  a vydělíme ji počtem paprsků, na které jej rozložíme, abychom získali výkony pro jednotlivé paprsky na kružnici. Podobně získáme úhel  $\varphi_{rays}$ , o který se paprsky budou rotovat. Počátečním vektorem směru paprsku  $\vec{v}_{new}$  bude mířit kolmo dolů proti směru osy  $z$ .

V cyklu RING pak iterujeme přes jednotlivé paprsky rozložené po kružnici. Původní paprsek má nulovou  $x$ -ovou souřadnici a při rozložení paprsku na kružnici pak souřadnice dalších paprsků získáme rotováním původního paprsku o úhel  $m \cdot \varphi_{rays}$  v rovině XY, kde  $m \in \{0, 1, \dots, N_{rays\_in\_ring} - 1\}$ . Takto rozmístěné paprsky pak trasujeme postupem popsáním v algoritmu 6.



---

**Algoritmus 7:** 3D ray-tracing algoritmus pro kolmo dopadající paprsky

---

```
1 inicializace fyzikálních veličin  $\rho, n, p, \epsilon...$ 
2  $\nabla n_e \leftarrow$  v uzlech napočítáme gradient hustoty volných elektronů
3  $N_{rays\_in\_ring} \leftarrow$  zvolíme, na kolik paprsků na kružnici budou paprsky rozloženy
   RAYS: for  $k \leftarrow 1$  to  $ni \cdot N_{rays\_per\_cell}$  do
4    $Q_{laser}, Q_{original} \leftarrow$  výkon k-tého paprsku
5    $i, A, B, C, D, current\_cell \leftarrow$  zjistíme vstupní buňku paprsku do mřížky
6    $\varphi_{rays} \leftarrow \frac{2\pi}{N_{rays\_in\_ring}}$  //úhel dávající rozložení paprsků na
   kružnici
7    $r\_power \leftarrow \frac{Q_{laser}}{N_{rays\_in\_ring}}$  //výkon jednotlivých paprsků vzniklých
   rozložením aktuálního paprsku po kružnici
8    $\vec{v}_{new} \leftarrow (0, 0, -1)$ 
9   RING: for  $m \leftarrow 0$  to  $N_{rays\_in\_ring} - 1$  do
10     $\theta \leftarrow m \cdot \varphi_{rays}$ 
11     $(x, y, z)_{laser\_old} \leftarrow$  zvolení rozložení vstupujícího paprsku na základě  $\theta$ 
12     $prusecik\_novy, (x, y, z)_{laser\_new} \leftarrow$  nalezení průsečíku paprsku se vstupní
   buňkou
13    PRUCHOD: trasujeme průchod paprsku mřížkou podle algoritmu 6
14  end
15 end
```

---

Pro šikmě dopadající paprsky je algoritmus na začátku trochu odlišný. První musíme ze zvolené výšky  $h$  a úhlu  $\alpha$  pro osový paprsek spočítat jeho směrový vektor. Pro osový paprsek poté najdeme vstupní buňku hledáním průsečíku paprsku s úsečkami. Index této buňky si zapamatujeme pro pozdější výpočty. V cyklu RAYS získáme výkon paprsku a spočítáme úhel pro zvolený počet paprsků na kružnici.

V cyklu RING poté iterujeme přes jednotlivé paprsky, které budou rozloženy po kružnici. První spočítáme úhel, o který bude počátek paprsku otáčen, obdobně jako v algoritmu 7. Pomocí tohoto úhlu pak spočítáme souřadnice počátku paprsku, který má být v rovině kolmé na vektor osového paprsku, a být na kružnici se středem v bodě počátku osového paprsku. Pro paprsek daný tímto počátkem a stejným směrovým vektorem, jaký jsme napočítali pro osový paprsek, pak hledáme vstupní buňku hledáním průsečíku ve třech dimenzích. První zkusíme najít průsečík paprsku s hranou, kterou do mřížky vstoupil předchozí paprsek se stejným  $m$ , poté zkusíme sousední hrany, jak je naznačeno na obrázku 3.11, dokud nenajdeme průsečík. Index nalezené buňky si pak zase uložíme do pole `prev_cells`.

Po takto nalezeném vstupním bodu paprsku do mřížky pak obdobně jako u kolmého dopadu pokračujeme algoritmem 6.

---

**Algoritmus 8:** 3D ray-tracing algoritmus šikmě dopadající paprsky

---

```
1 inicializace fyzikálních veličin  $\rho, n, p, \epsilon...$ 
2  $\nabla n_e \leftarrow$  v uzlech napočítáme gradient hustoty volných elektronů
3  $\alpha, h \leftarrow$  zvolený úhel a výška šikmých paprsků
4  $\vec{v}_{old}, (x, y, z)_{laser\_old} \leftarrow$  spočítej počáteční vektor a bod paprsku pomocí  $\alpha, h$ 
5  $i, A, B, C, D, (x, y, z)_{laser\_new} \leftarrow$  najdi vstupní buňku a průsečík osového paprsku
6 prev_cells[:]  $\leftarrow i$  //zapamatujeme si, kterou buňkou osový
   paprsek vstoupil pro zjednodušení budoucích výpočtů
7  $N_{rays\_in\_ring} \leftarrow$  zvolíme, na kolik paprsků na kružnici budou paprsky rozloženy
8 RAYS: for  $k \leftarrow 1$  to  $ni \cdot N_{rays\_per\_cell}$  do
9    $Q_{laser}, Q_{original} \leftarrow$  výkon  $k$ -tého paprsku
10   $\varphi_{rays} \leftarrow \frac{2\pi}{N_{rays\_in\_ring}}$  //úhel dávající rozložení paprsků na
   kružnici
11   $r\_power \leftarrow \frac{Q_{laser}}{N_{rays\_in\_ring}}$  //výkon jednotlivých paprsků vzniklých
   rozložením aktuálního paprsku po kružnici
12  RING: for  $m \leftarrow 0$  to  $N_{rays\_in\_ring} - 1$  do
13     $\theta \leftarrow m \cdot \varphi_{rays}$ 
14     $(x, y, z)_{laser\_old} \leftarrow$  zvolení rozložení vstupujícího paprsku na základě  $\theta$ 
15     $\vec{v}_{new} \leftarrow \vec{v}_{old}$ 
16     $i, A, B, C, D, (x, y, z)_{laser\_new}, current\_cell \leftarrow$  nalezení vstupní buňky
   paprsku do mřížky a průsečíku paprsku s touto buňkou s využitím
   prev_cells[m]
17    prev_cells[m]  $\leftarrow i$ 
18    PRUCHOD: trasujeme průchod paprsku mřížkou podle algoritmu 6
19  end
20 end
```

---

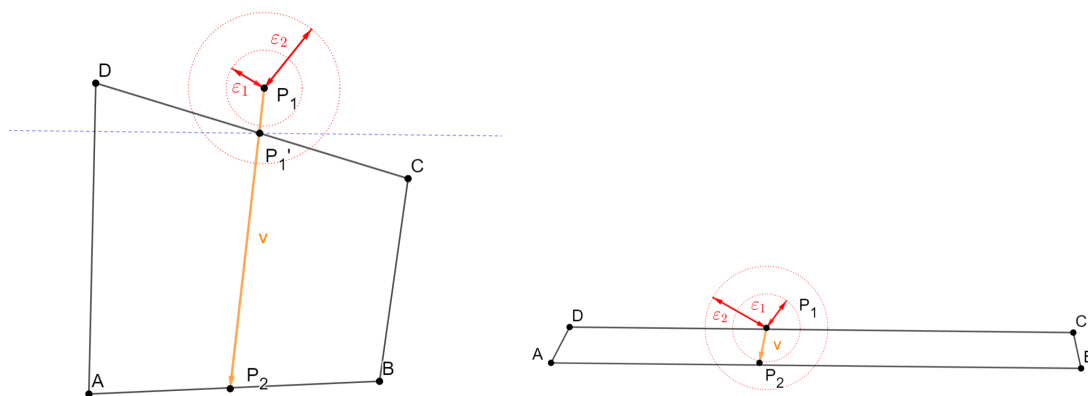
## 4 Numerické problémy

V této kapitole se budeme zabývat některými numerickými problémy, na které jsme při vytváření tohoto 3D ray-tracing modelu narazili. Tyto problémy nastávají většinou jen ve speciálních případech, které budou níže popsány, a vznikají především jako důsledky toho, že se simulace provádí na pohyblivé mřížce.

### 4.1 Rozpoznání původního bodu od nového průsečíku

Jak jsme zmínili v kapitole 3.4.1, při trasování paprsků řešíme rovnice (3.10) pro neznámou  $t$ , kterou pak dosadíme do rovnice paprsku (3.9), abychom získali průsečíky paprsku se stěnami, které jsou výseče kuželů (příp. válců nebo rovin) danými rotací hran buněk. Hodnoty  $t$ , které budou záporné, zahodíme, jelikož se jedná o paprsek a ten míří pouze ve směru vektoru. Nulové  $t$  pak náleží původnímu bodu  $P$  z rovnice paprsku, v našem případě původnímu průsečíku paprsku se stěnou, kterou do buňky vstoupil.

Velmi málo nakloněné stěny jsou reprezentovány přiblížením roviny kolmé na osu  $z$ , jejíž výška je dána průměrem  $z$ -ových souřadnic koncových bodů dvoudimenzionálních hran definujících danou stěnu. Analogicky téměř svislé hrany ve dvou dimenzích pak ve 3D reprezentujeme přiblížením válce, jehož průměr je dán průměrem  $y$ -ových souřadnic koncových bodů hrany.



Obrázek 4.1: Dva příklady problému rozpoznání původního průsečíku od nového. Na levém obrázku vidíme situaci, kde máme starý průsečík  $P_1$  a nově nalezený průsečík  $P_1'$ . Tento průsečík ovšem není opravdový nový výstupní průsečík paprsku s hranou, našli jsme jej jako nový průsečík, jelikož byla hrana  $CD$  aproximována rovinou označenou modrou přerušovanou čarou, skutečný nový průsečík je bod  $P_2$ . Pro malé epsilon  $\varepsilon_1$  bychom si tento nesprávný průsečík  $P_1'$  ponechali, s  $\varepsilon_2$  bychom jej zahodili. Na pravém obrázku vidíme velice úzkou buňku, ve které by naopak pro větší  $\varepsilon_2$  hrozilo, že bychom skutečný nový průsečík  $P_2$  zahodili, a potřebujeme použít menší  $\varepsilon_1$ .

Kvůli této aproximaci se může stát, že nově nalezený průsečík je ve skutečnosti původní průsečík  $P$  paprsku s hranou, kterou do buňky vstoupil. To je ošetřeno volbou  $\varepsilon_{cell}$ , které je odvozené od délky nejkratší hrany buňky. Nebudeme pak brát v potaz pouze průsečíky, pro

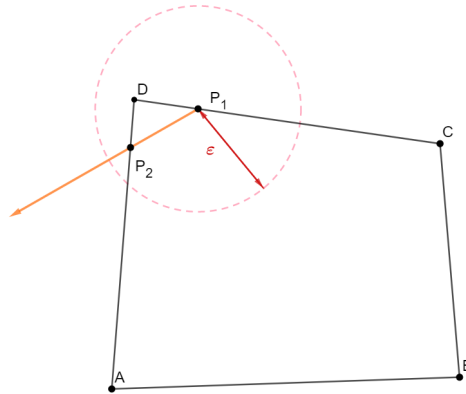
keré bude  $t < \varepsilon_{cell}$ . Toto epsilon tedy musí být velmi malé, protože především na začátku simulace jsou buňky velice úzké, proto jsme to zvolili jako závislé na nejkratší hraně. Na obrázku 4.1 vidíme ukázkou obou případů. Na vrchním obrázku máme... na spodním obrázku...

Díky často malé hodnotě  $\varepsilon_{cell}$  se ale může stát, že neeliminujeme tento počáteční vstupní průsečík do buňky (jak jsme zmínili, poslední krok eliminace vybírá nejbližší průsečík). Oproti 2D se ve třech dimenzích díky zakřivení stěn buněk už může stát, že paprsek vyjde stejnou stěnou, kterou přišel. Průsečíky se vstupní stěnou tedy nemůžeme ignorovat.

Tento problém tedy vyřešíme tak, že pokud bude existovat jeden nebo více potenciálních průsečíků splňujících podmínky (a)–(e) z kapitoly 3.4, bude novým průsečíkem takový z nich, který bude nejbližší původnímu vstupnímu průsečíku ze všech ostatních potenciálních průsečíků - vyjma průsečíku s původní hranou. Pokud tedy nalezneme pouze průsečík se vstupní hranou CD, bude tento průsečík novým průsečíkem, ale pokud budou nalezeny i jiné průsečíky splňující naše podmínky, bude novým průsečíkem nejbližší z ostatních průsečíků.

## 4.2 Vstup do buňky příliš blízko vrcholu

Další problém může nastat, pokud paprsek vstoupí do nové buňky a jeho průsečík se vstupní hranou  $P_1$  je velice blízko jednomu z vrcholů této hrany. Jestli totiž zároveň bude i nový průsečík paprsku ozn.  $P_2$ , kterým z buňky vstupuje viz obrázek 4.2, velice blízko tomuto vrcholu, posune se paprsek v rámci buňky jen velice málo a hodnota  $t$  bude velmi malá. Může tedy dojít k zahazení tohoto průsečíku eliminací popsanou v sekci 4.1.



Obrázek 4.2: Situace popsaná v sekci 4.2. Průsečík paprsku se vstupní hranou  $P_1$  je příliš blízko bodu  $D$  (měřítko je pro názornost, zde neodpovídá realitě). Vzdálenost nového průsečíku  $P_2$  od bodu  $P_1$  je tedy menší než  $\varepsilon$  a je nutné paprsek uměle posunout dále od bodu  $D$ .

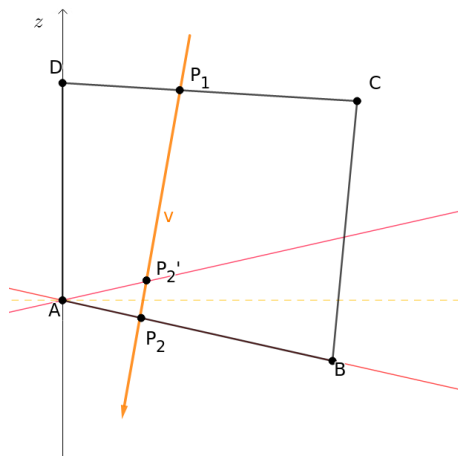
Aby se této situaci předešlo, pokud se stane, že paprsek vstoupí do buňky a jeho průsečík s hranou buňky je velmi blízko jednomu z vrcholů této hrany, uměle posuneme tento průsečík dál od tohoto vrcholu. Podobně jako v kapitole 3.4.2, ve které jsme uměle naklonili paprsek, aby nebyl rovnoběžný s povrchem stěny, i zde vytváříme chybu, která je ale v rámci celé simulace zanedbatelná.

### 4.3 Kvadratické rovnice a hledání průsečíku v blízkosti osy $z$

Když sledujeme průchod paprsku mřížkou, jejíž stěny jsou převážně výseče kuželů, řešíme v každém kroku velmi mnoho kvadratických rovnic ve známém tvaru  $ax^2 + bx + c = 0$ , konkrétně jsou to rovnice dané vztahy (3.10) a (3.11). Při řešení kvadratických rovnic může často docházet k problémům kvůli odčítání, které se provádí při výpočtu diskriminantu  $D = b^2 - 4ac$ . Některým z nich se předejde tím, že kvadratické rovnice nejprve normalizujeme k  $a$ .

I tak se ale může stát, že při odčítání podobných čísel získáme výslednou hodnotu diskriminantu, který má být nulový, zápornou. Hodnota  $\varepsilon$ , pomocí které rozhodujeme, zda je diskriminant nulový (tzn. musí platit  $|D| < \varepsilon$ ), však zároveň nesmí být příliš velká. Tím totiž v mnoha případech získáme jedno řešení tam, kde by měla být dvě řešení. Tento problém vyřešíme nastavením asymetrického rozhodování o hodnotě diskriminantu, kdy v záporném směru je pro nulovost diskriminantu větší  $\varepsilon$  než v kladném. Nastavujeme jej tedy tak, abychom co nejméně zanedbávali potenciální řešení.

Problémy s velmi blízkými kořeny kvadratických rovnic se často vyskytují při hledání průsečíků příliš blízko u osy  $z$ . Kužely sestavené z hran mají vždy vrchol na ose  $z$ . To znamená, že první řada buněk u osy  $z$  má jeden z vrcholů hrany totožný s vrcholem kuželu. Tady může nastat problém, protože pokud paprsek prochází vrcholem, má kvadratická rovnice pro kužel z (3.10) pouze jedno řešení a diskriminant rovný nule. V těsné blízkosti vrcholu kuželů může tedy být diskriminant menší než  $\varepsilon$ , a budeme tedy dostávat pouze jedno řešení v případech, kde jsou dvě řešení velmi blízko sebe. Výsledné degenerované řešení nám dá průsečík, který se nachází někde mezi skutečnými dvěma správnými řešeními a takové řešení už nemusí splňovat například podmínku pro správnou hodnotu vertikální souřadnice průsečíku.



Obrázek 4.3: Situace popsaná v kapitole 4.3. Vidíme zde buňku, jejíž hrana AD je na ose  $z$ . Stěna získaná z hrany AB je tvořena výsečí kuželu, jehož vrchol je v bodě A (obdobně je tomu u hrany CD). Jeho průřez s rovinou YZ je vyznačen červenými přímkami. Pokud by byl hledaný průsečík  $P_2$  blízko bodu A, můžeme dostat velmi malou hodnotu diskriminantu, což pak způsobí ztrátu řešení  $P_2$  a  $P_2'$ , místo kterých dostaneme špatné řešení, které bude ležet mezi červenými přímkami.

Tento problém jsme opět vyřešili umělým posunutím průsečíku dál od osy  $z$ . Pokud se

stane, že se nenajde žádný průsečík paprsku se stěnami buňky, zkontrolujeme, jestli některý z vrcholů buňky neleží na ose  $z$ . Pokud ano, spočítáme třídimenzionální vzdálenost tohoto vrcholu od přímky dané paprskem. Pokud bude tato vzdálenost malá, bude stěna daná tímto vrcholem novou výstupní stěnou paprsku. Hledaný průsečík se bude nacházet velmi blízko tohoto vrcholu, a nový průsečík tedy vytvoříme posunutím tohoto vrcholu tak, abychom už nebyli tak blízko osy  $z$ . I zde tím vytváříme malou chybu, která se dá zanedbat.

## 5 Výsledky simulací

V této kapitole budeme prezentovat výsledky simulací interakce laserového záření s hliníkovým terčíkem. Využili jsme pro ně výše popsané 2D a 3D algoritmy v hydrodynamickém kódu PALE.

### 5.1 Parametry simulací

Pro simulace zavedeme určitou základní konfiguraci, a poté budeme měnit některé z parametrů této konfigurace a zabývat se jejich vlivem na výsledky. V základní konfiguraci uvažujeme puls záření o energii 100 J s Gaussovským průběhem v čase i v prostoru. Pološířka maxima pulsu (FWHM) je 400 ps a je v čase posunuta o 400 ps od počátku simulace, poloměr fokusu je 100  $\mu\text{m}$ . Do kružnice o poloměru fokusu dopadá 80 % energie laserového svazku.

Simulaci budeme provádět pro první a třetí harmonickou frekvenci laseru PALS, kterým odpovídá vlnová délka 1314 nm, resp. 438 nm. Jako základní konfiguraci budeme brát laser s třetí harmonickou frekvencí a kolmě dopadající paprsky, tj. paprsky rovnoběžné s osou z. Pro třetí harmonickou frekvenci získáme ze vztahu (2.3) hodnotu kritické hustoty volných elektronů rovnou 0,02007  $\text{g}/\text{cm}^3$ , pro 1. harmonickou frekvenci, která má třikrát větší vlnovou délku, pak bude kritická hustota devětkrát nižší.

Paprsky budou dopadat kolmo na hliníkový terčík, který popisujeme stavovou rovnicí ideálního plynu (1.4) s plynovou konstantou  $\gamma = 1,66$ . Terčík má tloušťku 20  $\mu\text{m}$ , poloměr 400  $\mu\text{m}$  a uvažujeme plnou ionizaci odpařeného plazmatu.

konfigurace	rozlíšení mřížky	% absorbované energie
základní	50 × 50	95.05
základní	100 × 100	95.11
základní s 1. harmonickou frekvencí	50 × 50	42.02
základní s 1. harmonickou frekvencí	100 × 100	40.43
základní s šikmým dopadem 10°	50 × 50	93.58
základní s šikmým dopadem 10°	100 × 100	95.11
základní s šikmým dopadem 20°	50 × 50	91.71
základní s šikmým dopadem 10° a s 1. harmonickou frekvencí	50 × 50	37.49
základní s šikmým dopadem 10° a s 1. harmonickou frekvencí	100 × 100	40.44

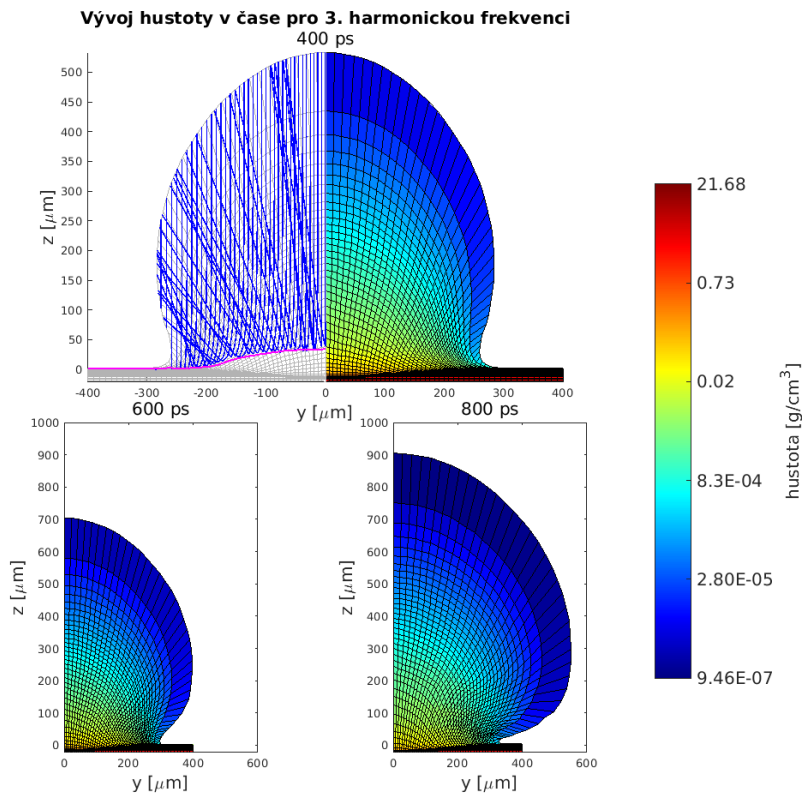
Tabulka 5.1: Podíly absorbovaných energií pro různé konfigurace.

Pokud nebude řečeno jinak, budeme vždy uvažovat simulaci probíhající ve 2D mřížce s  $50 \times 50$  původně obdélníkovými buňkami 10-ti paprsky na buňku. Ve 3D bude pak každá buňka prstencem zkonstruovaným postupem popsáným v kapitole 3.4. Výsledný podíl absorbované energie na této mřížce pak porovnáme s výsledky z mřížky  $100 \times 100$ . Jelikož chceme mít na horní hranici terčiku, kam dopadá laser, síť nejjemnější, tedy aby byly první ozářené buňky co nejmenší, musíme zvolit vhodný geometrický faktor  $q$ , kterým modifikujeme poměr velikostí sousedních buněk mřížky. Pro mřížku  $50 \times 50$  bude geometrický faktor ve směru osy  $z$  roven  $q_z = 0,85$  (tj. pro výšky sousedních buněk bude platit  $\Delta z_{j+1} = q_z \Delta z_j$ ) a ve směru osy  $r$  bude  $q_r = 1,01$ , tj.  $\Delta r_{i+1} = q_r \Delta r_i$ . Pro mřížku  $100 \times 100$  pak bude pro geometrický faktor ve směru osy  $z$  platit  $q_z = 0,895$  a ve směru osy  $y$  bude opět  $q_y = 1,01$ . Konečný čas simulací bude 800 ps.

V tabulce 5.1 můžeme vidět přehled, jaký poměr původní energie se absorboval při různých konfiguracích.

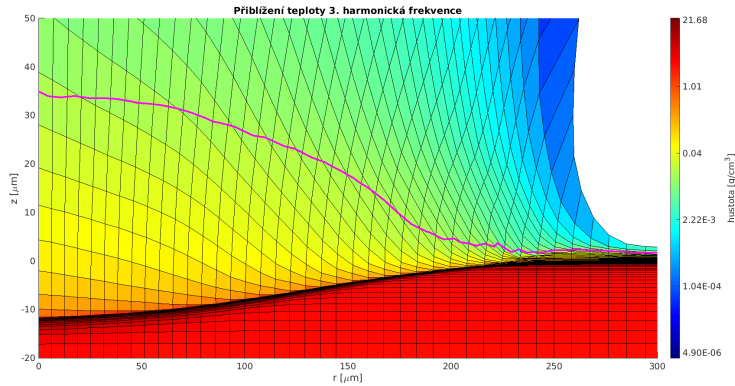
## 5.2 Simulace pro kolmě dopadající paprsky

V této sekci si ukážeme výsledky simulací pro kolmě dopadající paprsky. Budeme používat základní konfiguraci, tj. konfigurace s třetí harmonickou frekvencí laseru s vlnovou délkou 438 nm a konfiguraci s 1. harmonickou frekvencí laseru s vlnovou délkou 438 nm.



Obrázek 5.1: Vývoj hustoty v čase při základní konfiguraci. Na vrchním obrázku vidíme průchod paprsků mřížkou a hustotu v čase 400 ps. Kritická plocha je vyznačená růžově. Na spodních obrázcích vidíme hustoty v časech 600 ps a 800 ps.





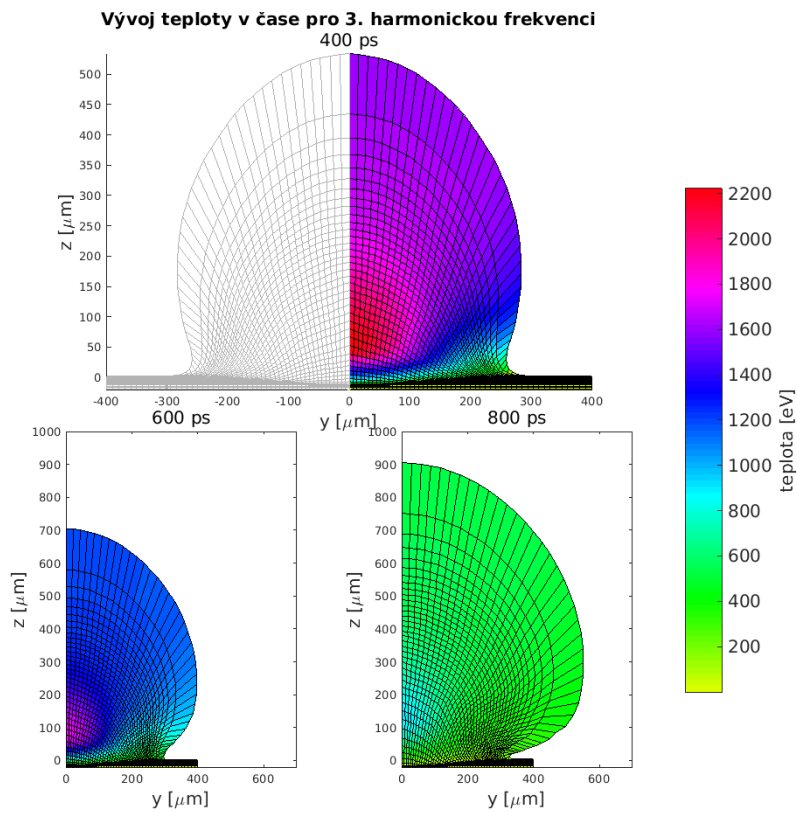
Obrázek 5.2: Přiblížení hustoty v blízkosti kritické plochy při základní konfiguraci v čase 400 ps. Kritická plocha je vyznačena růžově.

Na obrázku 5.1 vidíme vývoj hustoty při základní konfiguraci. Na levé straně horního obrázku vidíme průchod paprsků mřížkou v čase 400 ps. Kreslen je každý 10. paprsek. Růžově je vyznačena kritická plocha pro 3. harmonickou frekvenci laseru a můžeme vidět, jak se na ní paprsky ohýbají a odrážejí. Ohyb paprsků je dán Snellovým zákonem na stěnách buněk. Na spodních obrázcích pak vidíme hustotu v postupně se zvětšující koroně v časech 600 ps a 800 ps. Na obrázku 5.2 pak vidíme přiblížení grafu hustoty v čase 400 ps v oblasti kritické plochy.

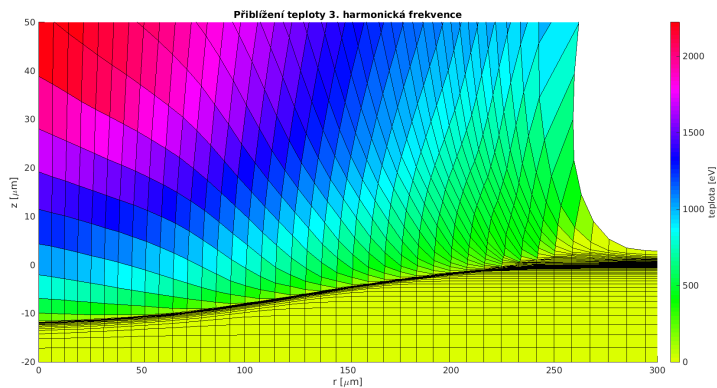
Na obrázku 5.3 vidíme vývoj teploty při základní konfiguraci. Na obrázku 5.4 vidíme přiblížení grafu teploty v oblasti kritické plochy.

Na obrázku 5.5 vidíme vývoj hustoty pro základní konfiguraci s 1. harmonickou frekvencí. Nalevo na vrchním obrázku je opět nakreslen průchod paprsků mřížkou, které se odrážejí od kritické plochy. Jelikož je vlnová délka 1. harmonické frekvence třikrát vyšší než vlnová délka pro 3. harmonickou frekvenci, je hodnota kritické hustoty volných elektronů pro 1. harmonickou frekvenci dle vztahu (2.3) devětkrát nižší než kritická hustota pro 3. harmonickou frekvenci. Kritická plocha je zde tedy výše, jak můžeme vidět i na přiblížení na oblast kritické plochy na obrázku 5.6, a paprsky pronikají méně hluboko než u třetí harmonické frekvence viz obrázek 5.1. Díky tomu se u záření s 1. harmonickou frekvencí absorbuje méně energie, jak můžeme vidět v tabulce 5.1.

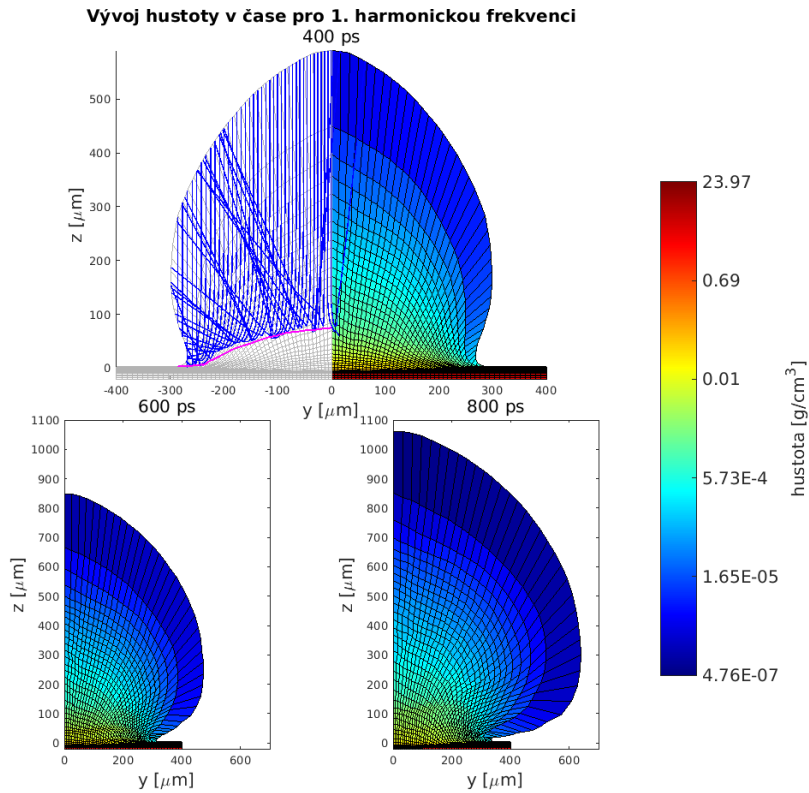
Provedli jsme porovnání modelů absorpce na kritické ploše s 3D trasováním paprsků. Jak bylo zmíněno v kapitole 3.2, u absorpce na kritické ploše je nutné zadat hodnotu účinnosti absorpce laseru  $u_{laser}$  jako vstupní parametr, který se pak použije pro výpočet absorpce pomocí vztahu (3.3). Tuto hodnotu jsme zvolili ze znalosti o tom, kolik % energie se absorbovalo při našich simulacích s trasováním paprsků, viz tabulka 5.1. Ukážeme si porovnání pro základní konfiguraci, pro absorpci na kritické ploše tedy zvolíme  $u_{laser} = 0.95$ . Získané výsledky simulace jsme porovnali s během z trasování paprsků se základní konfigurací.



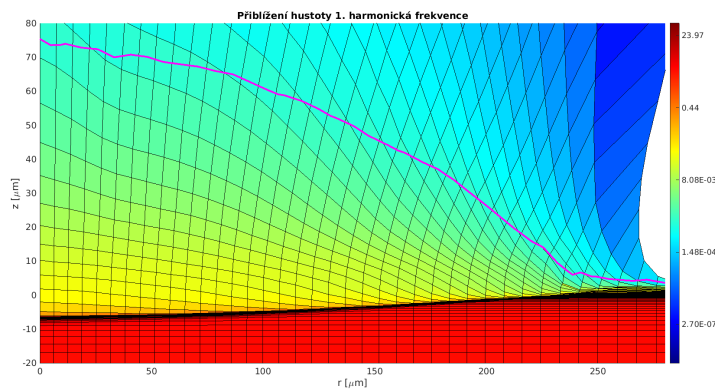
Obrázek 5.3: Vývoj teploty v čase při základní konfiguraci. Na vrchním obrázku vidíme teplotu v čase 400 ps. Na spodních obrázcích vidíme teploty v časech 600 ps a 800 ps.



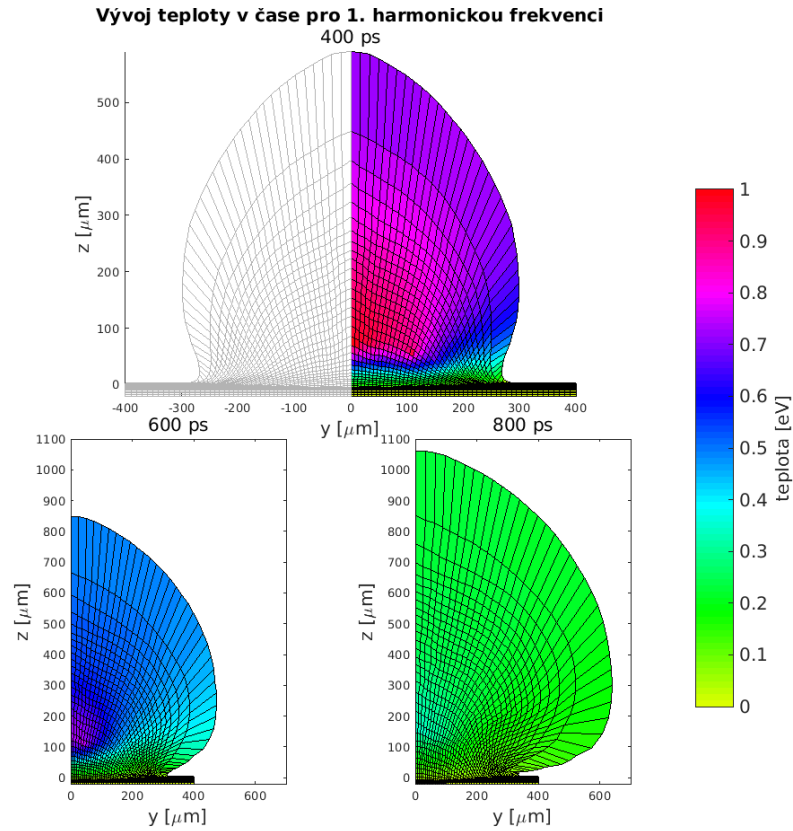
Obrázek 5.4: Přiblížení teploty v blízkosti kritické plochy při základní konfiguraci v čase 400 ps.



Obrázek 5.5: Vývoj hustoty v čase při konfiguraci s 1. harmonickou frekvencí. Na vrchním obrázku vidíme průchod paprsků mřížkou a hustotu v čase 400 ps. Kritická plocha je vyznačená růžově. Na spodních obrázcích vidíme hustoty v časech 600 ps a 800 ps.

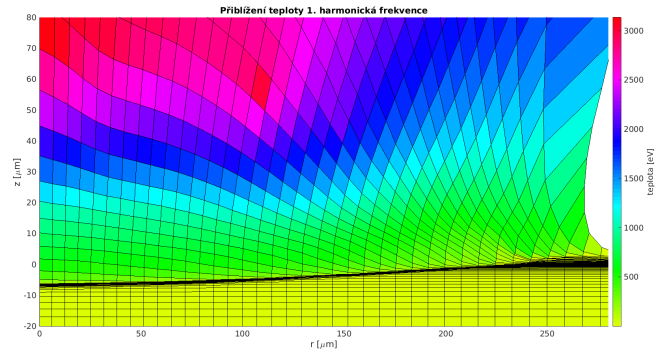


Obrázek 5.6: Přiblížení hustoty v blízkosti kritické plochy při konfiguraci s 1. harmonickou frekvencí v čase 400 ps.

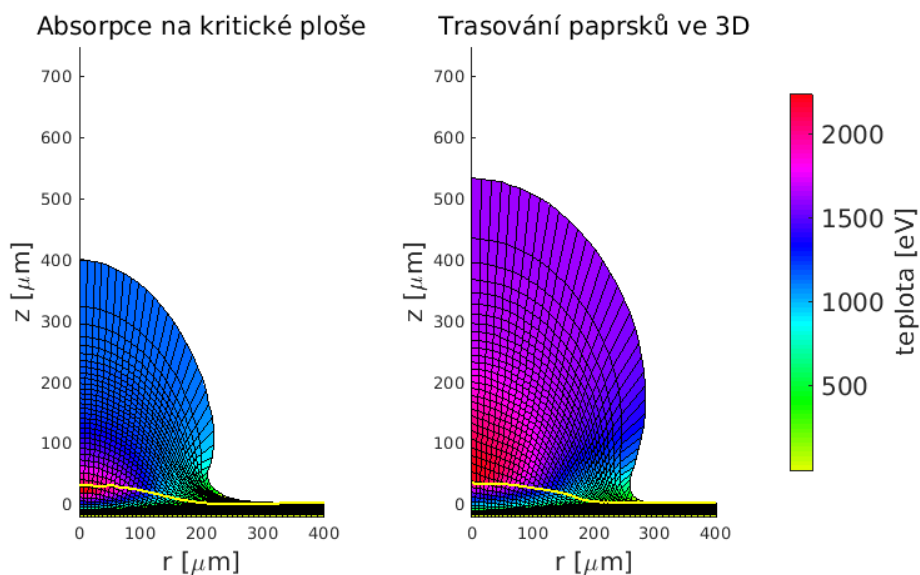


Obrázek 5.7: Vývoj teploty v čase při konfiguraci s 1. harmonickou frekvencí. Na vrchním obrázku vidíme teplotu v čase 400 ps. Na spodních obrázcích vidíme teploty v časech 600 ps a 800 ps.

Na obrázku 5.7 vidíme vývoj teploty v čase pro základní konfiguraci s 1. harmonickou frekvencí. Na prvním obrázku je opět výpočetní mřížka a teplota v čase 400 ps a na spodních obrázcích je vývoj teploty v časech 600 ps a 800 ps.



Obrázek 5.8: Přiblížení teploty v blízkosti kritické plochy při konfiguraci s 1. harmonickou frekvencí v čase 400 ps.



Obrázek 5.9: Porovnání teplot v čase 400 ps pro absorpci na kritické ploše (nalevo) a absorpci pomocí trasování paprsků ve 3D (napravo). V blízkosti kritické plochy, která je zde vyznačena žlutě, jsou teploty nejvyšší. Vidíme, že při absorpci na kritické ploše je korona menší a chladnější, což je důsledek toho, že se paprsky absorbují až u kritické plochy, zatímco u absorpce pomocí trasování paprsků se energie absorbuje postupně při průchodu paprsků mřížkou.

Na obrázku 5.9 vidíme porovnání teplot pro absorpci na kritické ploše a pro absorpci trasováním paprsků v čase 400 ps, kde kritická plocha je vyznačena žlutě. U absorpce na kritické ploše je korona chladnější a také méně expandovaná, a to jak do výšky tak do šířky. Při ray-tracingu se totiž energie paprsků absorbuje postupně při jejich průchodu mřížkou dolu ke kritické ploše i nahoru po odrazu paprsku, zatímco u absorpce na kritické ploše dochází k absorpci a tedy i zahřívání až u kritické plochy, jak můžeme vidět z hodnot teploty na obrázku. I u ray-tracingu se ale nejvíce energie absorbuje v blízkém okolí kritické plochy, proto je v obou případech v blízkosti kritické plochy teplota nejvyšší. U absorpce na kritické ploše dosahuje teplota v čase 400 ps maxima 2,24 keV a hustota 26,7 g/cm<sup>3</sup>. U 3D trasování paprsků pak dosahuje teplota v čase 400 ps maxima 2,22 keV a hustota 21,7 g/cm<sup>3</sup>. Oba případy mají maximální hustotu největší na rázové vlně, kde můžeme vidět nejvíce stlačené buňky. Na základě mechanismů popsaných v kapitole 3.2 pak víme, že v modelu absorpce na kritické ploše, kde se paprsky absorbují až v první nadkritické buňce, bude divergence intenzity nenulová jen v 1. řadě nadkritických buněk, zatímco v trasování paprsků s absorpcí inverzním brzdným zářením bude nenulová v celé podkritické oblasti.

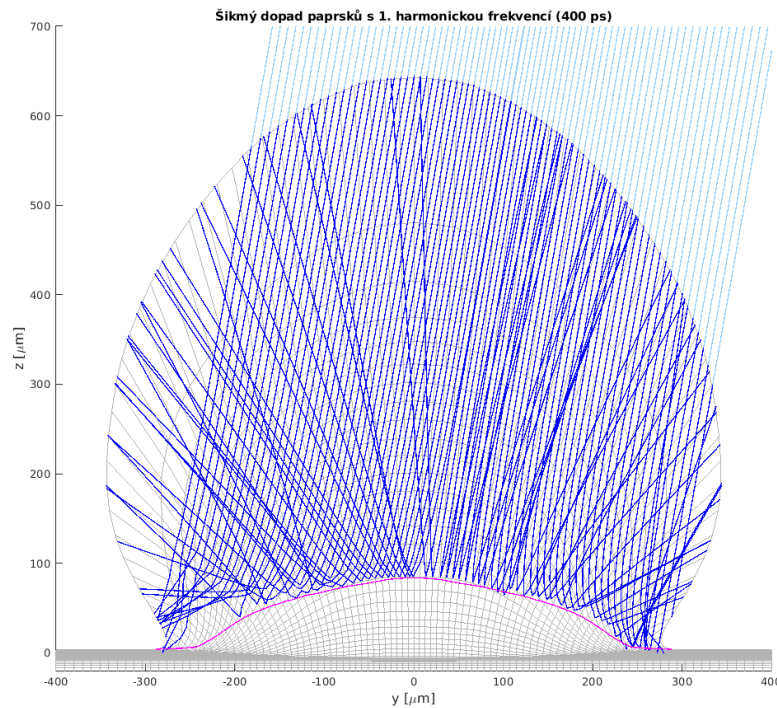
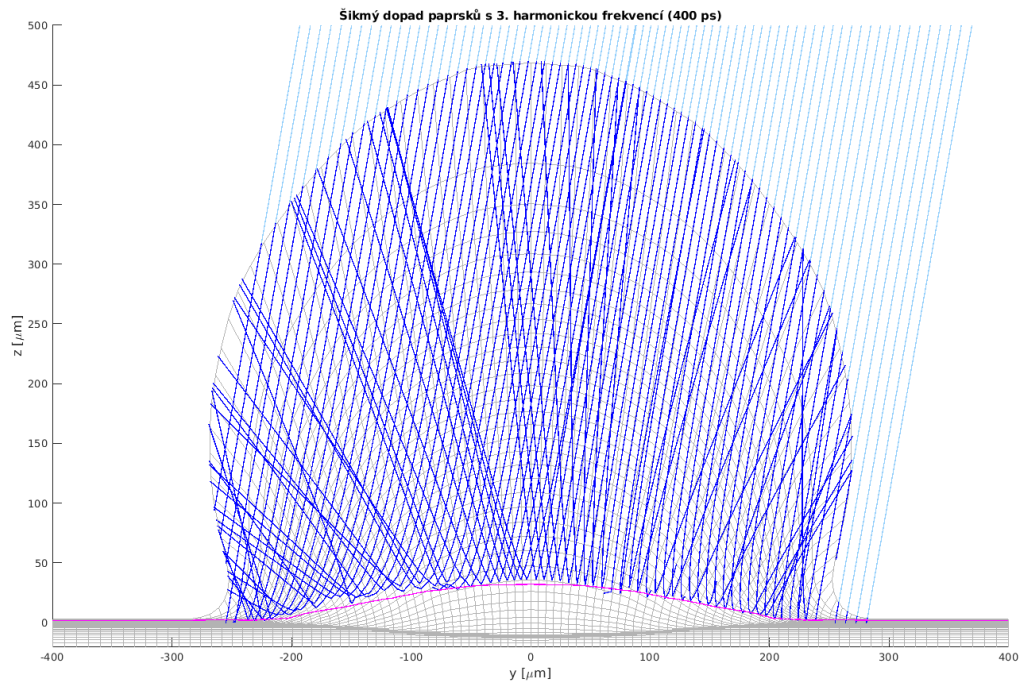
### 5.3 Šikmý dopad

V této sekci si ukážeme výsledky simulací pro základní konfiguraci, ovšem s šikmým dopadem paprsků na mřížku. Paprsky zde tedy už nebudou mířit svisle dolů rovnoběžně s osou  $z$ , ale budou se zápornou osou  $-z$  svírat úhel  $10^\circ$  nebo  $20^\circ$ .

Na obrázku 5.10 vidíme šikmých průchod paprsků mřížkou v rovině YZ, paprsky před vstupem do mřížky jsou nakresleny světle modrou barvou, a po vstupu tmavě modrou, kritická plocha je vyznačena růžově. Na horním obrázku jsou paprsky pro 3. harmonickou frekvenci a na spodním pro 1. harmonickou frekvenci, zase kreslíme každý 10. paprsek. Stejně jako u kolmého dopadu se paprsky na kritické ploše ohýbají a odrážejí a kritická plocha pro 1. harmonickou frekvenci se nachází výše než u 3. harmonické frekvence. Lom a odraz paprsků na kritické ploše je pro kolmě dopadající paprsky symetrický s osou  $z$ , proto jsme stačilo na obrázcích 5.1 a 5.5 nakreslit paprsky na pouze jedné polovině mřížky. Zde ale můžeme vidět, že u šikmě dopadajících paprsků tomu tak už není a že se paprsky na levé straně ohýbají a odrážejí pod větším úhlem než na pravé straně.

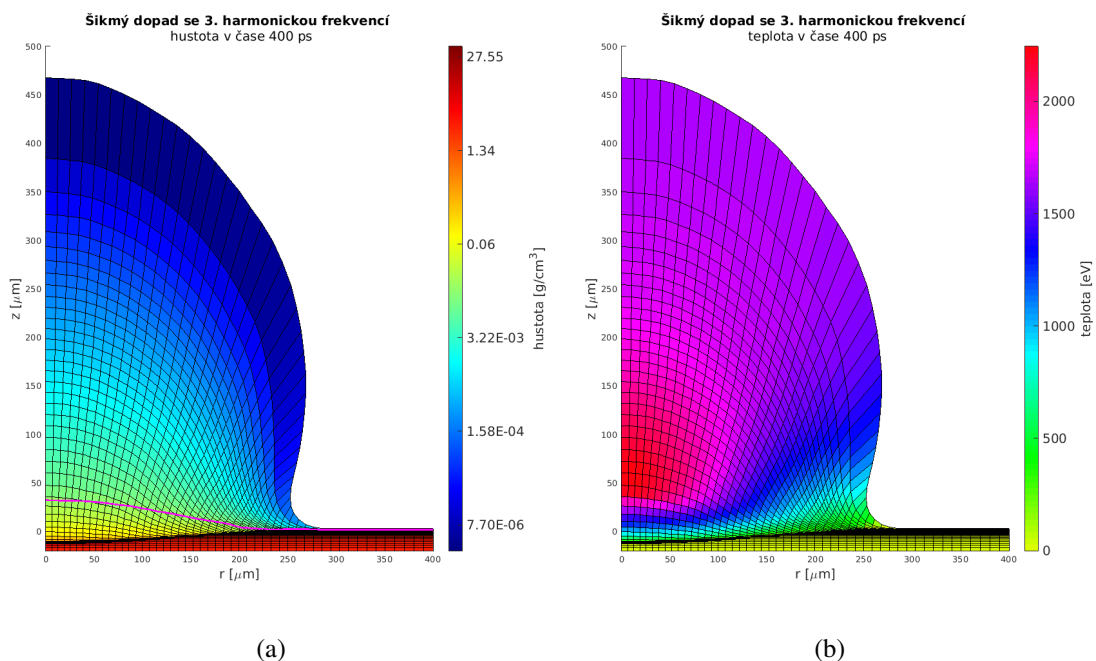
Na obrázku 5.11 vidíme hustotu a teplotu pro základní konfiguraci se šikmým dopadem paprsků v čase 400 ps a na obrázku 5.12 vidíme hustotu a teplotu pro základní konfiguraci se šikmým dopadem a 1. harmonickou frekvencí. Průběhy veličin se pro šikmý dopad s úhlem  $10^\circ$  příliš neliší od průběhů s kolmým dopadem, viz obrázky 5.1, 5.3, 5.5 a 5.7. Proto jsme pro porovnání kolmého a šikmého dopadu paprsků zvolili dopad paprsků pod úhlem  $20^\circ$  se základní konfigurací.

Na obrázku 5.13 vidíme nahoře porovnání tlaků pro kolmý a šikmý dopad v blízkosti rázové vlny v čase 400 ps. U kolmého dopadu je nad rázovou vlnou vyšší tlak, který stlačuje plazma na větší hustotu. V čase 400 ps dosahuje hustota u kolmého dopadu maximální hodnoty  $21,7 \text{ [g/cm}^3\text{]}$ , u šikmého dopadu  $18,4 \text{ [g/cm}^3\text{]}$ . Na spodním obrázku vidíme porovnání hustot pro oba případy v oblasti rázové vlny bez mřížky. Buňky jsou totiž v této oblasti velmi stlačené a mřížka příliš hustá.

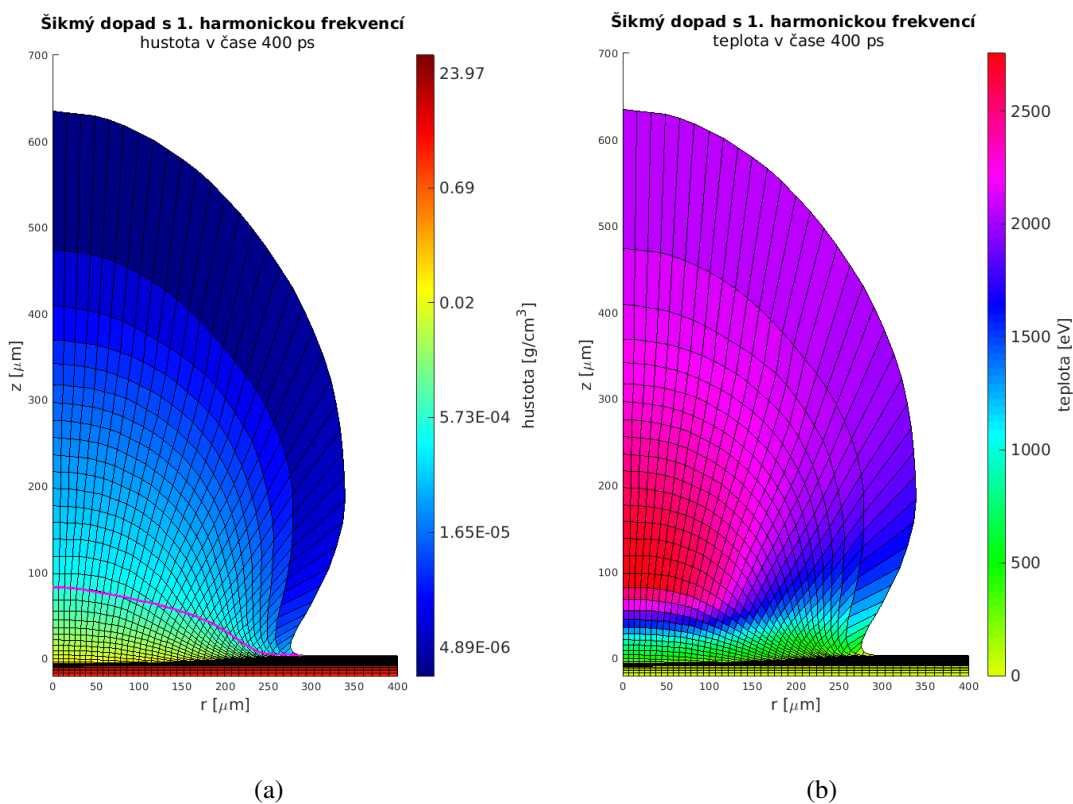


Obrázek 5.10: Průchod paprsků mřížkou ve 400 ps, ve při kterém paprsky dopadají na terčik pod úhlem  $10^\circ$  (tj. svírají úhel  $10^\circ$  se zápornou svislou osou). Na vrchním obrázku vidíme průchod paprsků mřížkou ve 400 ps pro základní konfiguraci a na spodním vidíme průchod paprsků mřížkou ve 400 ps pro 1. harmonickou frekvenci. Kritická plocha je na obou obrázcích vyznačena růžově.



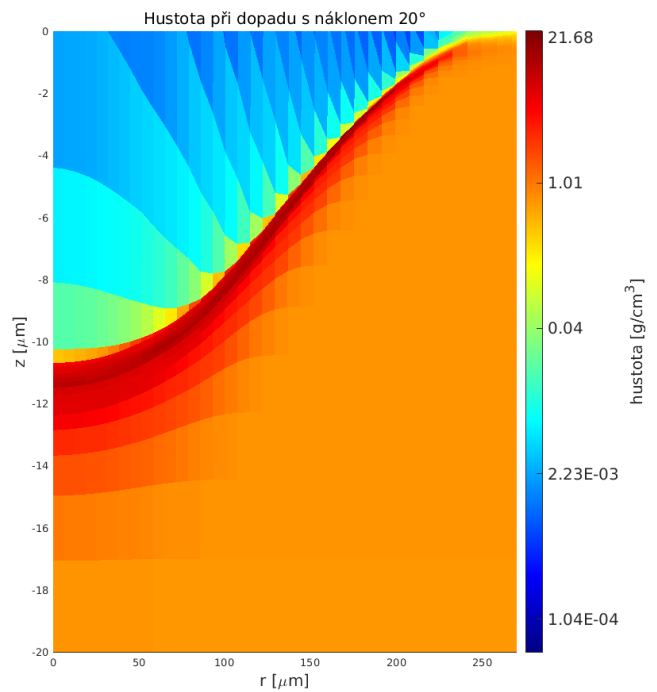
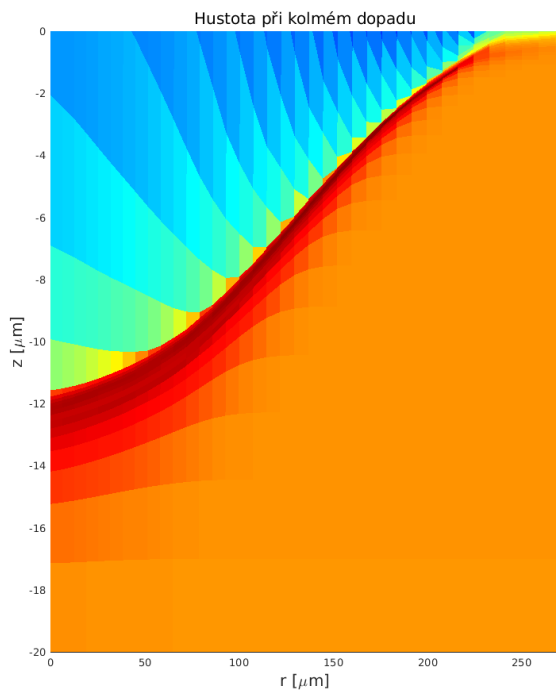
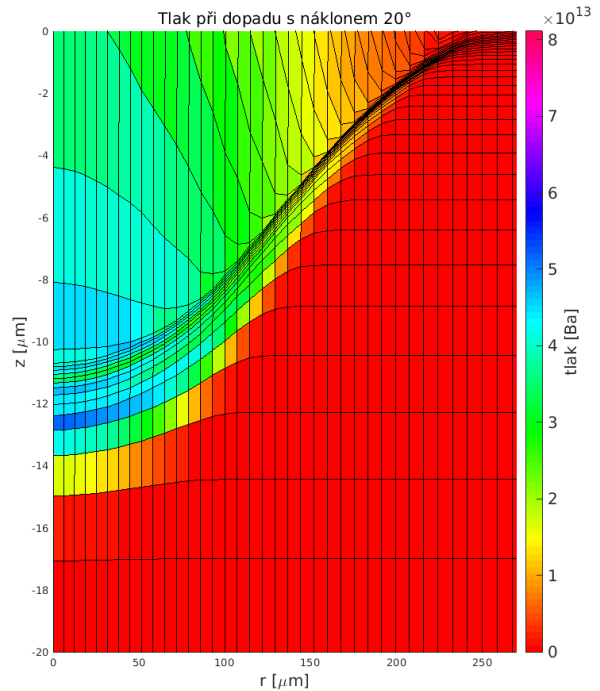
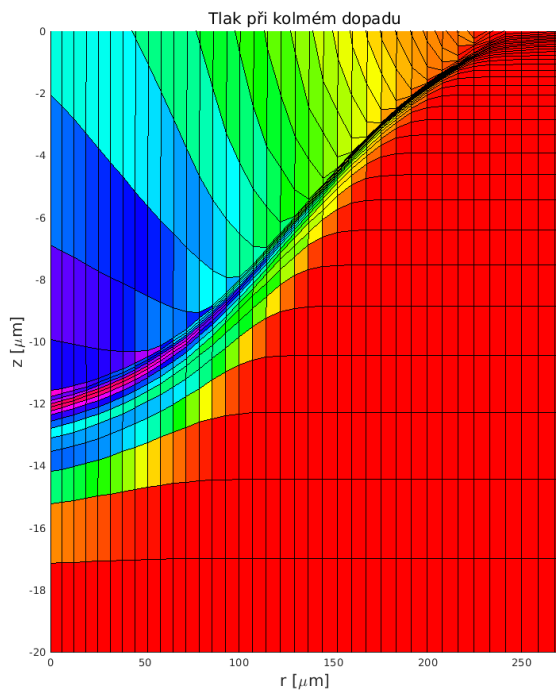


Obrázek 5.11: Hustota (a) a teplota (b) v čase 400 ps při základní konfiguraci s šikmým dopadem.



Obrázek 5.12: Hustota (a) a teplota (b) v čase 400 ps při základní konfiguraci s 1. harmonickou frekvencí a s šikmým dopadem.





Obrázek 5.13: Porovnání tlaků (nahore) a hustot (dole) pro kolmý dopad paprsků na terčik a pro dopad paprsků pod úhlem 20° při základní konfiguraci. U kolmého dopadu vidíme v oblasti rázové vlny vyšší tlak.

## 6 Závěr

V této práci bylo navrženo několik algoritmů pro simulování absorpce laserového záření, které byly poté implementovány do hydrodynamického kódu PALE. Prvním modelem je absorpce na kritické ploše, ve kterém předpokládáme průchod paprsků plazmatem bez ohybu a absorpci v první nadkritické buňce. Poté jsme vytvořili model trasování paprsků s absorpcí inverzním brzdným zářením ve 2D cylindrické symetrické  $r, z$  geometrii. Nakonec jsme vytvořili a představili model pro trasování paprsků ve 3D prostoru s 2D hydrodynamikou. Využili jsme přitom cylindrickou symetrii předchozí 2D souřadné soustavy. První bylo potřeba vytvořit 3D buňky této sítě opsáním 2D čtyřúhelníkových buněk okolo osy  $z$ . Tím vzniknou prstencové buňky, jejichž stěny jsou výseče kuželů, válců nebo rovin. Byl navržen algoritmus pro trasování paprsků v takto vytvořené mřížce s lomy či odrazy paprsků na stěnách dle Snellova zákona. Tyto algoritmy využívají řešení parametrických rovnic pro hledání průsečíků paprsků s tvary danými hranami 2D buněk a rovnic pro hledání nových směrů ve 3D pro aplikaci Snellova zákona. Tento model zahrnuje krom kolmého dopadu i možnost šikmého dopadu laserových svazků na terčik. Při výpočtech s těmito algoritmy jsme museli ošetřit některé numerické problémy, které nastaly jako důsledek toho, že simulace probíhá na pohyblivé výpočetní mřížce. Tyto problémy nastávaly především ve speciálních případech jako jsou vstup paprsku do buňky příliš blízko jednomu z vrcholů, příliš úzké buňky nebo hledání průsečíku paprsku se stěnou v blízkosti vrcholu kužele, jehož výsečí daná stěna je.

Tyto modely byly po implementaci otestovány na několika případech interakce laseru s hliníkovým terčikem. Testovali jsme případ s kolmo dopadajícím laserovým svazkem s 1. a 3. harmonickou frekvencí laseru PALS a porovnali jsme výsledky simulací získané z 3D trasování paprsků a z modelu absorpce na kritické ploše. V modelu absorpce na kritické ploše došlo k menšímu ohřátí a menší expanzi vzniklé korony, což je důsledek toho, že se laserové záření absorbuje až v první nadkritické buňce, zatímco při trasování paprsků se energie laseru absorbuje v průběhu celého průchodu paprsku mřížkou. Poté jsme testovali šikmý dopad paprsků na terčik pod úhlem  $10^\circ$ , který se příliš nelišil od kolmého dopadu. Porovnali výsledky kolmého dopadu svazku na terčik s šikmým dopadem paprsků pod úhlem  $20^\circ$ , kde jsme pozorovali u kolmého dopadu větší tlak a hustotu na vzniklé rázové vlně. Implementace 3D trasování paprsků rozšiřuje možnosti simulačního kódu PALE například o interakci s šikmými laserovými svazky.

## Literatura

- [1] S. Eliezer. *The Interaction of High-Power Lasers with Plasmas*. Institute of Physics, Bristol, England, 01 2002.
- [2] V. A. Smalyuk, C. R. Weber, and O. L. Landen. Review of hydrodynamic instability experiments in inertially confined fusion implosions on National Ignition Facility. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 62(1):014007, oct 2019.
- [3] J. L. Miquel and P. Vivini. The Laser Mega-Joule : LMJ PETAL status and Program Overview. *Journal of Physics: Conference Series*, 688:012067, 03 2016.
- [4] J. Ullschmied. Research activities at the PALS research infrastructure. *Radiation Effects and Defects in Solids*, 170(4):278–289, 2015.
- [5] J. H. Nuckolls, et al. Early steps toward inertial fusion energy (IFE) (1952 to 1962). *U.S. Department of Energy, Office of Scientific and Technical Information*, 6 1998.
- [6] J. Velechovský. Modelování absorpce laserového záření v plazmatu. *Výzkumný úkol, ČVUT FJFI*, 2010.
- [7] T. B. Kaiser. Laser ray tracing and power deposition on an unstructured three-dimensional grid. *Phys. Rev. E*, 61:895–905, Jan 2000.
- [8] S. J. Pestehe and M. Mohammadnejad. Semi-analytical model of laser resonance absorption in plasmas. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 52:065012, 02 2009.
- [9] J. Velechovský. Numerické modelování laserového plazmatu. *Diplomová práce, ČVUT FJFI*, 2011.
- [10] A. Colaitis, G. Duchateau, and P. Nicolaï. Towards modeling of nonlinear laser-plasma interactions with hydrocodes: The thick-ray approach. *Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics*, 89:033101, 03 2014.
- [11] J. Velechovský, J. Limpouch, R. Liska, and V. Tikhonchuk. Hydrodynamic modeling of laser interaction with micro-structured targets. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 58:095004, 09 2016.
- [12] R. Liska, M. Kuchařík, J. Limpouch, O. Renner, P. Váchal, L. Bednárik, and J. Velechovský. ALE method for simulations of laser-produced plasmas. In J. Fořt, J. Fürst, J. Halama, R. Herbin, and F. Hubert, editors, *Finite Volumes for Complex Applications VI Problems & Perspectives*, pages 857–873, Berlin, Heidelberg, 2011. Springer Berlin Heidelberg.
- [13] F.F. Chen. *Introduction to Plasma Physics*. Springer US, 1974.
- [14] W. Kruer. *The Physics Of Laser Plasma Interactions*. Avalon Publishing, 1988.
- [15] M. Kuchařík. Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) methods in plasma physics. *Di-zertační práce, ČVUT FJFI*, 2006.

- [16] L. Oweisová. Modelování absorpce laserového záření v plazmatu trasováním paprsků. *Výzkumný úkol, ČVUT FJFI*, 2020.
- [17] M. Temporal, S. Jacquemot, L. Bonnet, and A. Decoster. A three-dimensional ray-tracing code dedicated to x-ray laser amplification simulation. *Physics of Plasmas*, 8:1363–1370, 04 2001.
- [18] J. Velechovský. High-order numerical methods for laser plasma modeling. *Dizertační práce, ČVUT FJFI*, 2015.
- [19] P. J. Schneider and D. H. Eberly. Chapter 11 - Intersection in 3D. In P. J. Schneider and D. H. Eberly, editors, *Geometric Tools for Computer Graphics*, The Morgan Kaufmann Series in Computer Graphics, pages 481–662. Morgan Kaufmann, San Francisco, 2003.