



**ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE**

---

**Fakulta stavební  
Katedra inženýrské informatiky**

**Stochastické metody určování polohy a predikce pohybu objektů v  
prostoru**

**Stochastic Methods for Position Estimation and Object  
Movement Prediction**

**DISERTAČNÍ PRÁCE**

**Ing. Pavel Kulmon**

Doktorský studijní program: Stavební inženýrství

Studijní obor: Systémové inženýrství ve stavebnictví a investiční výstavbě

Školitel: doc. RNDr. Jiří Demel, CSc.

**Praha, 2022**

## PROHLÁŠENÍ

Jméno doktoranda: Pavel Kulmon

Název disertační práce: Stochastické metody určování polohy a predikce pohybu objektů v prostoru

Prohlašuji, že jsem uvedenou disertační práci vypracoval/a samostatně pod vedením školitele doc. RNDr. Jiřího Demela, CSc.

Použitou literaturu a další materiály uvádím v seznamu použité literatury.

Disertační práce vznikla v souvislosti s řešením projektu:

161 - 1611959A128 Stochastické metody určování polohy a predikce pohybu objektů v prostoru

V Praze dne 13.4.2022

.....  
podpis

---

# Abstrakt

Cílem této dizertační práce je návrh nového asociačního algoritmu určeného primárně pro systémy Multi-Static Primary Surveillance Radar (MSPSR). Systémy MSPSR spadají do kategorie pasivních multilateračních radarových systémů. Práce je rozdělena na čtyři kapitoly. První kapitola slouží jako úvod do problematiky určování polohy cílů v systémech MSPSR. Mimo samotného úvodu také obsahuje rešerši existujících postupů řešení asociace v systémech MSPSR společně s popisem jejich nedostatků a stanovením požadavků na nový algoritmus. Hlavním obsahem druhé kapitoly práce je pak vlastní publikační činnost autora (plné texty článků) jejímž tématem je právě zcela nový algoritmus asociace pro určení polohy cíle. Navrhovaný algoritmus je založený na Markov Chain Monte Carlo (MCMC) metodách a také neparametrickém apriorním rozdělení pro asociace které nese název Indian Buffet Process (IBP). K článkům je zde poskytnut teoretický úvod do MCMC metod a IBP a také krátká diskuze výsledků v člancích dosažených. Třetí kapitola se zabývá diskuzí zvoleného řešení, dosažených výsledků a možných dalších směrů výzkumu metodologie. Poslední kapitola slouží jako závěr této práce.

## **Klíčová slova:**

radar, určování polohy, tracking, MSPSR, bayesovská inference, MCMC, RJMCMC



---

# Abstract

The goal of this dissertation thesis is the development of brand new association algorithm intended to use in the Multi-Static Primary Surveillance Radar (MSPSR) systems. The MSPSR systems are included in the category of passive multilateration radar systems. The thesis is divided in to four chapters. The first chapter serves the purpose of introduction in to the matter of target position estimation in the MSPSR systems. After the introduction, the research of current solutions of the MSPSR association problem is included together with the description of their drawbacks which forms the requirements for the new algorithm. The second chapter is mainly consisted of the publication work of the author (article full texts) the main point of which is the brand new association algorithm for target position determination. The proposed algorithm is based on the Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo (RJMCMC) methods and the nonparametric association prior distribution with the name Indian Buffet Process (IBP). The articles are supplemented with short introduction in to the MCMC methods and the IBP. The chosen methodology and achieved results are discussed in the third chapter together with the ideas for future development. The last chapter concludes the thesis.

**Keywords:**

radar, positioning, tracking, MSPSR, bayesian inference, MCMC, RJMCMC



## Poděkování

Výčet lidí, kterým bych na tomto místě chtěl poděkovat, by zabral celý rozsah práce, proto tento výčet není ani zdaleka úplný. Na první místě bych chtěl poděkovat své rodině a přítelkyni za to, že mi poskytovali nekonečnou podporu v dobách, kdy jsem se nedržel nohama na zemi. Dále bych chtěl poděkovat všem kolegům z výzkumného oddělení společnosti ERA a.s., protože bez nich by tato práce ani nikdy nemohla vzniknout. Jmenovitě chci poděkovat Ing. Antonínu Heřmánkovi, Ph.D., Mgr. Martinovi Pelantovi, Ph.D. a Mgr. Petře Štukovské, Ph.D. Dále bych rád poděkoval svému školiteli Doc. RNDr. Jiřímu Demelovi, CSc., protože on věřil v dokončitelnost této práce i v dobách, kdy jsem si tím já nebyl jistý. V neposlední řadě také děkuji Doc. RNDr. Miladě Kočandrové, CSc.

---

# Obsah

<b>1</b>	<b>Multi-Static Primary Surveillance Radar</b>	<b>1</b>
1.1	Úvod . . . . .	1
1.2	Radar . . . . .	1
1.2.1	Primární radar . . . . .	2
1.2.2	Sekundární radar . . . . .	2
1.2.3	ADS-B . . . . .	2
1.2.4	Multilaterace . . . . .	3
1.2.5	ADS-C . . . . .	3
1.2.6	MSPSR . . . . .	3
1.3	Bistatický Radar . . . . .	4
1.3.1	Geometrie Bistatického Radaru . . . . .	4
1.3.2	Zpracování detekce v bistatickém prostoru . . . . .	7
1.3.3	Vedení cíle v bistatickém prostoru . . . . .	9
1.4	Multistatická Konfigurace . . . . .	15
1.4.1	Asociace bistatických tracků . . . . .	17
1.4.2	Určení polohy a rychlosti cíle . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Asociace bistatických tracků</b>	<b>25</b>
2.1	Úvod . . . . .	25
2.2	Teoretické základy . . . . .	25
2.2.1	Indian Buffet Process . . . . .	25
2.2.2	Monte Carlo Markovské Řetězce . . . . .	29
2.3	Články zabývající se využitím Bayesovského modelování . . . . .	34
2.3.1	Plný text článku [1] . . . . .	34
2.3.2	Plný text článku [2] . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Diskuze</b>	<b>65</b>
3.1	Vlastnosti algoritmu . . . . .	65
3.2	Analýza algoritmu . . . . .	67
3.3	Dosažené výsledky . . . . .	68
3.4	Budoucí práce . . . . .	70
3.4.1	Rozvoj modelu . . . . .	71
3.4.2	Vyhodnocení . . . . .	72



## OBSAH

<b>4 Závěr</b>	<b>73</b>
<b>Literatura</b>	<b>75</b>
<b>A Podíl autora na publikacích</b>	<b>83</b>
A.1 Publikace za období 1.10.2016 - 31.12.2017 . . . . .	83
A.2 Publikace za období od 1.1.2018 . . . . .	83

---

## Seznam obrázků

1.1	Schema procesu měření pomocí bistatického radaru. Sledujeme dvě různé cesty šíření rádiového signálu. Nepřímé šíření vzniká ve směru od vysílací antény ( $Tx$ ) k cíli ( $C$ ) a odtud směrem k přijímací anténě ( $Rx$ ). Druhá cesta je přímá od vysílače k přijímači. . . . .	4
1.2	Geometrická interpretace měřeného astronomického azimutu $\theta$ cíle ( $C$ ) a jeho elevace $\phi$ . . . . .	6
1.3	Ilustrativní vizualizace procesu přiřazení detekcí již vedeným cílům. V této situaci jsou v prostoru měření modelovány dohromady tři cíle (černá barva) různé délky a času začátku. Přejít mezi časovými epochami odpovídá přechodu mezi body pomocí černých šipek. Měření (červeně) jsou asociována k trackům, přičemž tato asociace je vyznačena pomocí šipky (zeleně). Některá měření nejsou ve své epoše přiřazena žádnému cíli. Pro jednoduchost je vyobrazen pouze kvadrant kladného bistatického range a rychlosti, ta ovšem může být i záporná. . . . .	9
1.4	Schematický model architektury systému zajišťujícího vedení cílů v kartézském souřadnicovém systému na základě bistatických měření. . . . .	15
2.1	Ilustrace beta prioru vah jednotlivých skrytých vlastností pro různé volby koeficientu $\frac{\alpha}{K}$ . Pro volbu $\alpha = K$ přechází prior na rovnoměrné rozdělení. . .	27
2.2	Ilustrace převodu binární matice (vlevo) na její zleva seřazenou formu (vpravo) tak, že významnost bitů klesá od prvního řádku. Černá reprezentuje 1 v binární matici, zatímco bílá reprezentuje 0. . . . .	28

---

## Seznam tabulek

3.1	Tabulka shrnující limity pro jednotlivé prvky 6D polohy cíle. . . . .	68
3.2	Tabulka dosažených výsledků pro metriku TP (správně určené polohy skutečně simulovaných cílů). Výsledky jsou zaokrouhleny na první desetinné číslo. . . . .	70
3.3	Tabulka dosažených výsledků pro metriku FN (počet simulovaných cílů jejichž poloha nebyla určena). Výsledky jsou zaokrouhleny na první desetinné číslo. . . . .	71
A.1	Tabulka shrnující podíl autora na jednotlivých publikacích na Katedře fyziky. . . . .	83
A.2	Tabulka shrnující podíl autora na jednotlivých publikacích na Katedře inženýrské informatiky. . . . .	84



---

# Multi-Static Primary Surveillance Radar

## 1.1 Úvod

Tato dizertační práce je věnována určení polohy vzdušného cíle na základě měření radarového systému, který je v literatuře označován jako Multi-Static Primary Surveillance Radar (MSPSR). V úvodu této kapitoly tedy stručně představíme různé typy radarových technologií, jejich základní princip fungování a také zdůrazníme jejich přednosti a slabé stránky. V dalších částech této kapitoly již detailněji popíšeme pouze jednotlivé aspekty samotného systému MSPSR, což čtenáři poskytne dostatečný teoretický základ pro studium dalších kapitol této práce, které se již věnují vlastnímu výzkumu.

## 1.2 Radar

Radarové technologie pro určování polohy vzdušných cílů jsou rozšířené a existuje několik různých typů, které se liší základním principem fungování a také požadavky na cíl, jehož poloha je určována. Mezinárodní organizace pro civilní letectví (ICAO, z anglického *International Civil Aviation Organization*) přidružená k Organizaci Spojených Národů (OSN) dělí tyto technologie (pro aplikace ve správě vzdušné dopravy (ATM, z anglického *Air Traffic Management*) následovně [3]

- Radar
  - primární radar
  - sekundární radar
  - sekundární radar s Mode-S
- samotné ADS-B
- multilaterace
- ADS-C.

### 1.2.1 Primární radar

Princip fungování primárního radaru je založený na jeho vlastním vysílači (obvykle umístěném na stejném místě jako přijímač), který vysílá signál o vysokém výkonu směrem k letícímu cíli, přičemž část tohoto signálu se od cíle odrazí zpět k přijímači radaru. Radar následně určí vzdálenost k cíli na základě časového rozdílu mezi vysláním a opětovným přijetím signálu. Výhodou tohoto systému je, že není vyžadována spolupráce cíle (např. vysílání určité zprávy). Nevýhody tohoto systému jsou vysoká citlivost na falešné cíle (nebo odrazy od nezájmových cílů, např. pozemní vozidla), absence identifikace cílů a vysoké náklady na systém.

### 1.2.2 Sekundární radar

Základní součástí systému sekundárního radaru je síť pozemních dotazovačů spolu s odpovídači, které se nacházejí na palubě zájmových cílů. Odpovědi přijaté od cílů umožňují určit jejich vzdálenost společně s např. elevací a azimutem cíle relativně k příslušnému dotazovači. Pulzní sekvence komunikačního protokolu mezi dotazovačem a odpovídačem jsou standardizovány. Hlavní komunikační protokoly se označují jako Mode 1 – 5 pro účely vojenské a Mode A-D a S pro účely civilní. Každý z protokolů má svá specifika, např. Mode A poskytuje identifikaci cíle, zatímco Mode C navíc poskytuje také výšku cíle z palubního barometru s rozlišením na 100 ft (cca. 30 m).

Mezi výhody sekundárního systému patří dostupnost identifikace cíle (odstranění nejistoty přiřazení nového měření některé z již existujících trajektorií) a také informace o výšce cíle, která může být použita ke zvýšení kvality polohové informace. Oproti primárnímu radaru má sekundární častější obnovu polohové informace. Mezi nevýhody patří nízká rozlišovací schopnost v úhlových měřeních (především azimut). Nevýhodou závislosti na Mode A/C komunikačních protokolech je absence detekce chyb v přijatých zprávách. Sekundární radar mívá obvykle problémy odlišení dvou vzájemně blízkých cílů z důvodu směšování přijatých pulzů (označováno jako garbling) a také nízkého rozlišení měření.

### 1.2.3 ADS-B

Automatic Dependent Surveillance - Broadcast (ADS-B) je označení komunikačního systému a zároveň protokolu umožňující přenos informací zaznamenaných palubními přístroji cíle. Jedná se o informace o geografické poloze (získaná z palubního GNSS přijímače), výšku určenou pomocí barometru, identifikace cíle, rychlost cíle, případně i informace ze senzorů náklonu a další.

Z hlediska pozemních stanic je radar založený na ADS-B levnou a jednoduchou variantou (malé rozměry přijímacích antén, malé energetické nároky). Zároveň tento systém poskytuje velkou četnost obnovy informací o cíli společně s vysokou přesností kvantitativních informací, protože k jejich měření dochází přímo u cíle. Nevýhodou je, že osazenost cílů systémem ADS-B se liší stát od státu, a to především podle stáří dané letky. Další nevýhodou může být závislost polohové informace na GNSS systémech, protože pokrytí (dostupnost satelitů) nebo dosažitelná přesnost nemusí být v místě cíle optimální.

### 1.2.4 Multilaterace

Multilaterační systémy využívají vysílání ze strany zájmových cílů, např. odpovědí v rámci již zmíněných komunikačních protokolů Mode nebo ADS. Na základě přijatých signálů (převážně ve formě pulzních dat) na větším množství přijímacích stanic jsou počítány rozdíly časů příchodu. Tyto rozdíly, přepočtené na délkovou informaci pomocí rychlostí šíření v daném prostředí, formují v prostoru hyperboloidy pro různé páry přijímacích stanic (dvojice časů příchodu, z nichž je počítán rozdíl) a poloha cíle je pak určena jako jejich průnik (poznamenejme, že tato představa je ilustrační, vzhledem k chybám měření je úloha řešena statisticky).

Tyto systémy mají převážně využití v oblastech s hustým provozem, jako jsou např. okolí letišť. Systém může být pasivní, parazitující na přítomnosti cizích dotazovačů, které podněcují cíle k vysílání odpovědí, nebo aktivní s vlastním dedikovaným dotazovačem. Klíčovým prvkem multilateračního systému je, vzhledem k dislokovanosti přijímacích stanic, také časová synchronizace, která redukuje chybu v časových rozdílech mezi stanicemi, která by byla způsobená lišícím se chodem jejich vlastních hodin. Synchronizace může být realizována navěšením se na systém GNSS nebo také vnitřní synchronizací z přeúčtení (ve smyslu většího množství nezávislých měření oproti počtu určovaných neznámých souřadnic) poloh cílů.

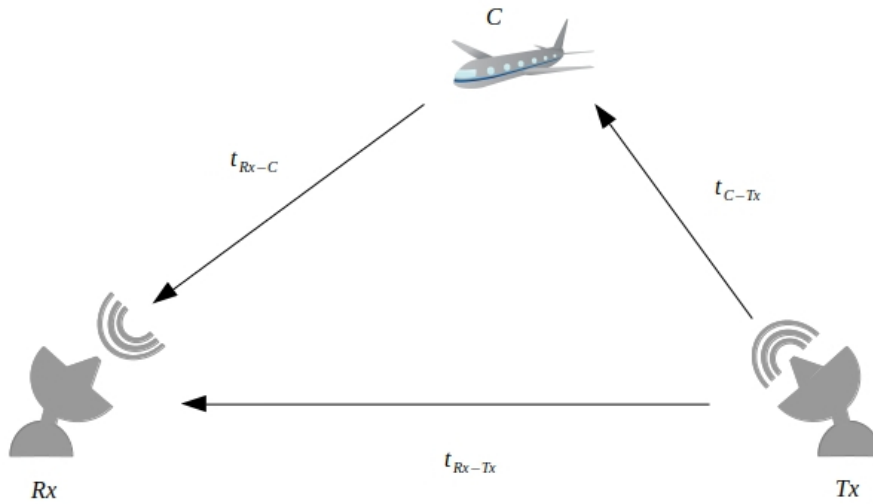
Výhodou multilateračního systému je, i přes to, že polohová informace je získávána nezávisle, možnost dekodování obsahu Mode zpráv a využití jejich obsahu ke zvýšení výkonnosti. Multilaterační systémy mají obvykle vysokou schopnost cíle detekovat a mohou se stát součástí některých z již zmíněných systémů. Mezi hlavní nevýhody multilateračních systémů patří vyšší náklady na jejich zřízení (větší množství vhodně umístěných stanovišť) a také závislost na míře vysílání cílů.

### 1.2.5 ADS-C

Automatic Dependent Surveillance - Contract (ADS-C) je podobně informačně bohatý protokol jako ADS-B a navíc obsahuje meteorologická data z okolí cíle. Je určený především pro oblasti bez komunikační infrastruktury, kde k přenosu jsou mimo jiné využívány satelity v okolí Země. Přenos každé zprávy je zpoplatněn samostatně, což je hlavní důvod proč tyto zprávy cíle nevysílají častěji než jednou za 10 – 15 minut.

### 1.2.6 MSPSR

Z hlediska předchozího dělení by systémy MSPSR spadaly do kategorie pasivních multilateračních systémů. Na rozdíl ale od multilateračních systémů založených na vysílání cílů je systém MSPSR založený na odrazech od povrchu cílů, přičemž odražený signál je emitovaný vysílačem, který není součástí radarového systému. V praktických aplikacích se využívá veřejného vysílání s frekvenční modulací (FM) (v Evropě se jedná o frekvenční rozsah 87.5 - 108.0 MHz) nebo modernějšího vysílání digitální televize pomocí Digital Video Broadcasting (DVB). Jeden takový vysílač společně s přijímačem přímého a odraženého signálu formuje jeden bistatický radar, jehož princip činnosti z hlediska určení polohy cíle je popsán v sekci 1.3. Komplexní MSPSR systém skládající se z většího množství přijímacích a vysílacích stanic je pak popsán v sekci 1.4.



Obrázek 1.1: Schema procesu měření pomocí bistatického radaru. Sledujeme dvě různé cesty šíření rádiového signálu. Nepřímé šíření vzniká ve směru od vysílací antény ( $Tx$ ) k cíli ( $C$ ) a odtud směrem k přijímací anténě ( $Rx$ ). Druhá cesta je přímá od vysílače k přijímači.

## 1.3 Bistatický Radar

Systém MSPSR je multistatický, sestávající se z většího množství bistatických radarů. V této sekci tedy popíšeme hlavní aspekty a vlastnosti bistatického radaru z pohledu určování polohy a dalších parametrů vzdušných cílů. Definujeme bistatické souřadnice, které tvoří bistatické měření. Dále popíšeme jejich statistické vlastnosti a postup zpracování detekcí v rámci bistatického prostoru, které jsou získávány v čase v rámci jednotlivých měřicích intervalů (obvykle periodických).

### 1.3.1 Geometrie Bistatického Radaru

Bistatický radar se sestává ze dvou stanovišť, přičemž na jednom z nich je umístěna vysílací anténa, zatímco na druhém z nich je umístěna anténa přijímací. Prozatím se omezíme na ideální situaci, kdy je v zájmovém prostoru přítomen pouze jeden cíl. Předmětem idealizovaného měření je zpoždění rádiového signálu, který se od vysílače šíří prostředím a odrazem od cíle dále na přijímací anténu, oproti takovému, který by se šířil prostředím nejkratší cestou na přijímací anténu. Tato situace je vizualizována na Obr. 1.1. Čas šíření odraženého signálu od cíle označíme  $t_{C-Tx} + t_{Rx-C}$  a čas šíření signálu putujícího po přímé cestě označíme  $t_{Rx-Tx}$ . Měřené zpoždění odraženého signálu vůči přímému je v literatuře označováno jako rozdíl času příchodu (TDOA, z anglického *time difference of arrival*) a obvykle se uvádí jako délková veličina  $r$  (z anglického *range* což je výchozí měřená veličina většiny typů radarů, v případě bistatického radaru se používá označení *bistatic range*), která je dána vztahem

$$\begin{aligned}
 r &= \|\mathbf{C} - \mathbf{Tx}\| + \|\mathbf{Rx} - \mathbf{C}\| - \|\mathbf{Rx} - \mathbf{Tx}\| \\
 &= c(t_{C-Tx} + t_{Rx-C} - t_{Rx-Tx})
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$



kde  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{R}_x$ ,  $\mathbf{T}_x$  označují souřadnice cíle, přijímací a vysílací stanice a  $c$  značí rychlost šíření světla v atmosféře.

Mimo časového zpoždění je předmětem měření bistatického radaru také bistatická rychlost cíle, která je dána jako časová změna právě bistatického zpoždění

$$v = \frac{d}{dt}(r) = \left( \frac{\mathbf{C} - \mathbf{T}_x}{\|\mathbf{C} - \mathbf{T}_x\|} + \frac{\mathbf{R}_x - \mathbf{C}}{\|\mathbf{R}_x - \mathbf{C}\|} \right)^T \mathbf{V} \quad (1.2)$$

kde závislost jednotlivých veličin  $\mathbf{C}$ ,  $r$ ,  $v$  na čase není explicitně uvedena. Polohy stanovišť  $\mathbf{R}_x$ ,  $\mathbf{T}_x$  považujeme vzhledem k době měření za časově neproměnné a  $\mathbf{V}$  značí vektor rychlosti cíle v kartézském prostoru. Poznamenejme, že stejně jako v případě bistatického range měříme přímo pouze časové zpoždění, tak v případě bistatické rychlosti měříme frekvenční posun  $\Delta f$  přijatého signálu odraženého od cíle vůči přímému. Převodu na bistatickou rychlost dosáhneme pomocí známé vlnové délky přímého signálu  $v = -\lambda\Delta f$ . Při použití alespoň třech bistatických radarů (za předpokladu úspěšného měření totožného cíle) můžeme měřením bistatického range a bistatické rychlosti určit nejen polohu ale i rychlost cíle v zájmovém kartézském prostoru.

V závislosti na signálovém zpracování v rámci bistatického prostoru jsou některé systémy schopné určit i bistatické zrychlení. Poznamenejme, že tento výpočet je značně náročný obzvláště při snaze o dosažení vyšších přesností určení hodnoty parametru. I v případech, kdy tento parametr není přímo měřen, ale je pouze odhadován v čase z příchozích měření bistatické vzdálenosti a rychlosti, je vhodné znát vztah mezi bistatickým zrychlením a parametry cíle v kartézském prostoru. Pro bistatické zrychlení platí

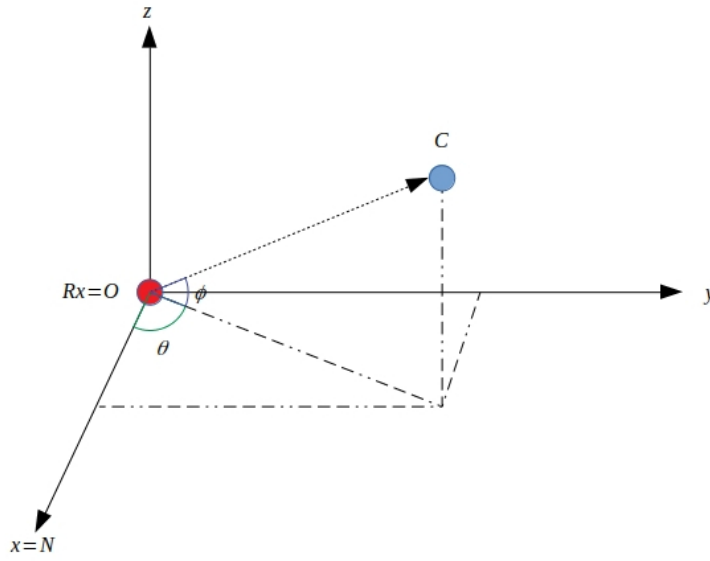
$$a = \frac{d}{dt}(v) = \frac{d}{dt} \left[ (\mathbf{v}_{Tx} + \mathbf{v}_{Rx})^T \mathbf{V} \right]$$

přičemž zrychlení cíle v kartézských souřadnicích označíme  $\mathbf{A}$ . Po dosazení získáme

$$a = (\mathbf{v}_{Tx} + \mathbf{v}_{Rx})^T \mathbf{A} + \mathbf{V}^T \left( \frac{\mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{v}_{Tx} \mathbf{v}_{Tx}^T}{\|\mathbf{C} - \mathbf{T}_x\|} + \frac{\mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{v}_{Rx} \mathbf{v}_{Rx}^T}{\|\mathbf{R}_x - \mathbf{C}\|} \right) \mathbf{V} \quad (1.3)$$

Rovnice (1.3) ilustruje fakt, že, díky nelineárnímu vztahu mezi bistatickým a kartézským prostorem, i cíl s nulovým zrychlením v kartézském prostoru (cíle letící rovnoměrným pohybem) může mít v bistatickém prostoru zrychlení nenulové. V dalších úvahách a aplikacích v rámci této práce považujeme za základní měření bistatickou polohu a rychlost.

Mimo bistatické vzdálenosti, rychlosti a zrychlení se v praxi lze také setkat s bistatickými radary, které umožňují (díky vhodné konstrukci antény) měření úhlových veličin, obvykle v místě přijímací antény (k anténě vysílače nemusíme mít vůbec přístup). Pro zápis geometrických vztahů je vhodné umístění přijímací antény radaru do lokální souřadné soustavy, jejíž počátek je ztotožněn s pozicí přijímače a osa  $x$  je ztotožněna se směrem k severu. Ilustrace této lokální soustavy společně s pozicí cíle a měřenými úhly je na Obr. 1.2. Umístění přijímací antény do středu soustavy je nezbytné a samotné ztotožnění osy  $x$  se směrem na sever nestačí, a to především z důvodu zakřivení země, které s rostoucí vzdáleností od středu vnáší chybu do určeného azimutu. Úhlové veličiny jsou pak, vzhledem k poloze přijímače  $\mathbf{R}_x = (x_{Rx}, y_{Rx}, z_{Rx})$  a cíle  $\mathbf{C} = (x_C, y_C, z_C)$ , dány



Obrázek 1.2: Geometrická interpretace měřeného astronomického azimutu  $\theta$  cíle ( $C$ ) a jeho elevace  $\phi$ .

vztahy

$$\theta = \arctan \left( \frac{y_C - y_{Rx}}{x_C - x_{Rx}} \right)$$

$$\phi = \arctan \left( \frac{z_C - z_{Rx}}{\|(x_C, y_C) - (x_{Rx}, y_{Rx})\|} \right)$$

kde  $\arctan(\cdot)$  značí cyklometrickou funkci inverzní k funkci tangens, která určí i informaci o kvadrantu.

Mimo označení bistatická vzdálenost a bistatická rychlost se můžeme u těchto veličin setkat také s přívlaskem eliptický. Tento fakt vyplývá už ze samotné definice bistatické vzdálenosti, která je pro volenou hodnotu totožná pro všechny takové body v prostoru, pro než je konstantní součet vzdáleností k oběma stanovištím. Uvažujme nyní hodnotu bistatické vzdálenosti, která není redukováná o délku základny (tj. vzdálenost mezi přijímačem a vysílačem)

$$r' = \|\mathbf{R}\mathbf{x} - \mathbf{C}\| + \|\mathbf{T}\mathbf{x} - \mathbf{C}\|$$

což je rovnice dvouosého rotačního elipsoidu s velikostí hlavní poloosy  $\frac{r'}{2}$ . Z geometrického hlediska můžeme rovnici tohoto elipsoidu také psát ve tvaru kvadratické formy

$$(x_C \ y_C \ z_C \ 1) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{10} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{20} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{30} \\ a_{10} & a_{20} & a_{30} & a_{00} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

kde pro prvky matice kvadratické formy  $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$  platí následující vztahy

$$\begin{aligned}
a_{11} &= 4 \left( x_{Rx}^2 + x_{Tx}^2 - 2x_{Rx}x_{Tx} - r'^2 \right) \\
a_{22} &= 4 \left( y_{Rx}^2 + y_{Tx}^2 - 2y_{Rx}y_{Tx} - r'^2 \right) \\
a_{33} &= 4 \left( z_{Rx}^2 + z_{Tx}^2 - 2z_{Rx}z_{Tx} - r'^2 \right) \\
a_{12} &= 4 (x_{Rx} - x_{Tx})(y_{Rx} - y_{Tx}) \\
a_{13} &= 4 (x_{Rx} - x_{Tx})(z_{Rx} - z_{Tx}) \\
a_{23} &= 4 (y_{Rx} - y_{Tx})(z_{Rx} - z_{Tx}) \\
a_{10} &= 2 (x_{Rx} - x_{Tx})(F^2 - E^2) + 2r'^2 (x_{Rx} - x_{Tx}) \\
a_{20} &= 2 (y_{Rx} - y_{Tx})(F^2 - E^2) + 2r'^2 (y_{Rx} - y_{Tx}) \\
a_{30} &= 2 (z_{Rx} - z_{Tx})(F^2 - E^2) + 2r'^2 (z_{Rx} - z_{Tx}) \\
a_{00} &= (E^2 - F^2)^2 - r'^2 (2E^2 + 2F^2 - r'^2)
\end{aligned}$$

kde  $E = \mathbf{R}\mathbf{x}\mathbf{R}\mathbf{x}^T$  a  $F = \mathbf{T}\mathbf{x}\mathbf{T}\mathbf{x}^T$ .

Eliptický přívlástek pro rychlost plyne z její definice, a to sice, že eliptická rychlost je průmětem kartézské rychlosti do normálového vektoru elipsoidu v místě výskytu cíle, přičemž tato normála je dána jako výslednice jednotkových vektorů ve směru jednotlivých stanovišť. Z této úvahy také vyplývají limity bistatické rychlosti cíle, vzhledem k jeho rychlosti v kartézském prostoru. Naznačené skalární součiny v rovnici (1.2) rozepíšeme pomocí úhlů  $\delta_{Tx}$  a  $\delta_{Rx}$ , které reprezentují úhly mezi spojnicemi jednotlivých stanovišť a cíle a vektorem jeho kartézské rychlosti

$$v = \|V\| (\cos \delta_{Tx} + \cos \delta_{Rx}). \quad (1.4)$$

Považujeme-li bistatickou rychlost z rovnice (1.4) za funkci dvou proměnných  $v(\delta_{Tx}, \delta_{Rx})$  potom tato funkce nabývá maxima pro bod  $(0, 0)$ , tedy  $v_{\max} = 2\|V\|$ , a minima pro bod  $(\pi, \pi)$ , tedy  $v_{\min} = -2\|V\|$ .

### 1.3.2 Zpracování detekce v bistatickém prostoru

V předchozí sekci jsme si vystačili s předpokladem, že se v prostoru měření nachází pouze jeden cíl, přičemž výsledkem měření (výstup signálového zpracování) je jeden vektor obsahující bistatickou polohu a rychlost tohoto cíle. V reálných situacích tento předpoklad není splněn a v zájmovém prostoru je přítomno neznámé množství cílů. Výsledkem signálového zpracování je pak množina takových vektorů bistatických souřadnic, které odpovídají všem statisticky významným detekcím (tedy s dostatečným odstupem signálu od šumového pozadí), které jsme v rámci měřicího intervalu z přijatých signálů určili. Poznamenejme, že zdrojem některých těchto detekcí nemusí být zájmový cíl, mohou být způsobené vícecestným šířením, odrazem od různých prvků prostředí a podobně. Detekce, které nerepresentují zájmové cíle, se souhrnně označují jako nepořádek (z anglického *clutter*).

Celé zpracování detekcí v rámci bistatického prostoru má za cíl formovat v bistatickém prostoru tracky. Track je označení pro v čase návaznou posloupnost detekcí, které k sobě

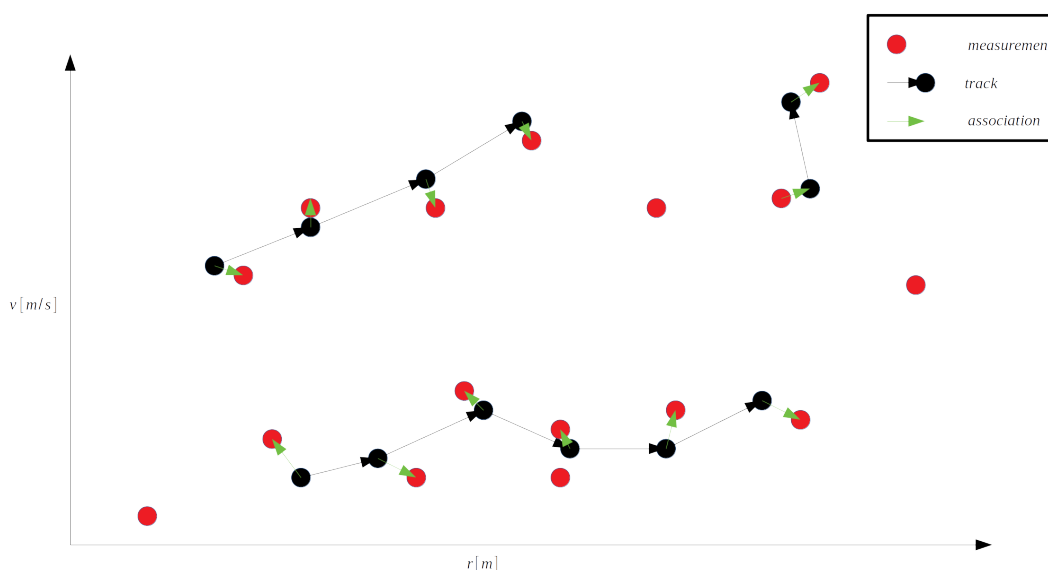
jsou přiřazovány tak, že je vysoká pravděpodobnost, že mají původ ve společném cíli, který se nachází v prostoru měření. V této části popíšeme mechanismus tohoto přiřazení, v další pak postup výpočtu odhadu nejpravděpodobnější polohy cíle na základě těchto detekcí.

Pokud se v měřeném prostoru vyskytují reálné cíle, pak primárním cílem asociace detekcí je systematicky v čase přiřazovat detekce pocházející od totožného cíle jednomu jedinému tracku. Tuto snahu komplikuje ten fakt, že detekce obsahují pouze informaci o poloze v bistatickém prostoru, společně s kovarianční maticí, která vyjadřuje chybu odhadu. Není tedy k dispozici žádný identifikátor, který by umožňoval jednoznačné přiřazení. Úlohu je tedy (vzhledem k chybám měření i stavových veličin bistatických tracků) nutné řešit v pravděpodobnostním smyslu. Pro tento účel byla vyvinuta celá řada algoritmů a jejich zevrubný popis je mimo téma této dizertační práce, proto se spokojíme pouze s krátkou rešerší.

Vzhledem k tomu, že předpoklad normálního rozdělení chyb měření i předpoklad Gaussovské aproximace stavových veličin bistatických tracků je zcela běžný, používá se jako standardní ohodnocení Mahalanobisova vzdálenost [4], která bere v úvahu i přesnost obou veličin. Základním „hladovým“ přiřazením je lokální nejbližší soused (LNN, z anglického *Local Nearest Neighbour*), který každému tracku přiřadí tu detekci, která je mu (vzhledem ke vzdálenostnímu ohodnocení) nejbližší. V případě konfliktu je upřednostněn track s menší vzdáleností. Sofistikovanější variantou algoritmu LNN je globální nejbližší soused (GNN, z anglického *Global Nearest Neighbour*), kde přiřazení je optimalizováno z hlediska celé množiny detekcí a tracků tak, aby suma vzdáleností výsledného přiřazení byla minimální [5].

Další rodinou asociačních algoritmů jsou ty, které jsou založené na hustotě pravděpodobnosti (PDA, z anglického *Probabilistic Data Association*) [6]. Na rozdíl od předešlých, v případě pravděpodobnostní asociace již nepožadujeme unikátní přiřazení jednoho měření k jednomu tracku ale připouštíme, že větší množství detekcí může pocházet od cíle, který je reprezentován bistatickým trackem. V tomto případě přichází na řadu bránování, které pro daný track určí kandidátní množinu měření na základě jejich limitní vzdálenosti. Poznamenejme, že Mahalanobisova vzdálenost má  $\chi^2$  rozdělení [7] s počtem stupňů volnosti, který je dán dimensí vektoru měření, a proto tato limitní vzdálenost je na základě volené hladiny pravděpodobnosti  $p$  odvozena jako kvantil tohoto rozdělení. Algoritmy PDA jsou odvozeny pro různé předpoklady korelovanosti odhadů jednotlivých tracků (v případě překryvu bran) [8], kvantifikaci pravděpodobnosti existence skutečných cílů [9] nebo snahy o linearizaci [10].

Doposud všechny uvedené algoritmy řeší asociaci měření v rámci jednoho intervalu příchozích dat s tím, že je-li přiřazení jednou provedeno a stavové veličiny tracků odhadnuty, již jej nerevidují. Naproti tomu např. algoritmus trackování více hypotéz (MHT, z anglického *Multiple Hypothesis Tracking*) [11] umožňuje zpětně některé tracky prohlásit za nepravděpodobné (na základě ohodnocení hypotézy přiřazení měření daného tracku) a zpětně je kompletně odstranit. Základem je, podobně jako v případě PDA, bránování, tedy pro každý track získáme množinu kandidátních detekcí. Pro přiřazení každé z detekcí vytvoříme novou asociační hypotézu a každá z těchto hypotéz získá své unikátní stavové veličiny. Přirozeně, bez revize hypotéz by takový přístup vedl k výpočetní explozi a zahlcení celého systému. Proto existuje celá řada strategií jak tracky v MHT algoritmu udržovat (a především jak odebírat hypotézy), aby se tomuto jevu předešlo. Stejně jako u předchozích algoritmů, i v případě MHT existuje celá řada jeho modifikací pro specifické



Obrázek 1.3: Ilustrativní vizualizace procesu přiřazení detekcí již vedeným cílům. V této situaci jsou v prostoru měření modelovány dohromady tři cíle (černá barva) různé délky a času začátku. Přechod mezi časovými epochami odpovídá přechodu mezi body pomocí černých šipek. Měření (červeně) jsou asociována k trackům, přičemž tato asociace je vyznačena pomocí šipky (zeleně). Některá měření nejsou ve své epoše přiřazena žádnému cíli. Pro jednoduchost je vyobrazen pouze kvadrant kladného bistatického range a rychlosti, ta ovšem může být i záporná.

případy a problémy.

Proces asociace bistatických detekcí k vedeným trackům můžeme názorně ilustrovat s předpokladem použití takového algoritmu přiřazení detekcí cílům, který jednomu cíli přiřadí maximálně jednu detekci. Taková situace je vizualizována na Obr. 1.3.

### 1.3.3 Vedení cíle v bistatickém prostoru

V předchozí sekci jsme shrnuli fungování bistatického radaru a také jsme uvedli a popsali měřené parametry polohy cíle v rámci tohoto radaru. Běžné zájmové cíle uvažované v rámci této práce nejsou nehybné, čímž je opodstatněna potřeba určovat jejich polohu v závislosti na čase.

Uvažujme nyní posloupnost časů  $\mathbf{t} = \{t_1, t_2, \dots, t_N\}$  a ke každému času vektor  $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^k$  pro  $n = 1, 2, \dots, N$ . Vektor  $\mathbf{x}_n$  označuje vektor zájmových parametrů jednoho cíle, což v rámci jednoho bistatického radaru může být jeho bistatický range a bistatická rychlost. Z hlediska cíle má pojem track, zavedený v předchozí sekci, význam posloupnosti stavových vektorů  $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^N$  odhadnutých z časové posloupnosti detekcí tomuto tracku přiřazených. Společně s pohybem cíle v kartézském prostoru dochází zároveň ke změně sledovaných parametrů (z geometrického hlediska ke změně nedochází při pohybu po elipsoidické ploše, nicméně vlivem chyb měření se i v takovém případě souřadnice mírně mění).

Vzhledem k tomu, že parametry cíle ani funkční vztah jejich změny v čase nikdy přesně neznáme, jeví se jako vhodné je modelovat pomocí nelineárního diskrétního stochastického

dynamického modelu

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}_{n+1}(\mathbf{x}_n, \mathbf{w}_n) \quad (1.5)$$

kde  $\mathbf{f}_n$  je obecně nelineární přechodová funkce stavového vektoru mezi epochami  $t_n$  a  $t_{n+1}$  a  $\mathbf{w}_n \in \mathbb{R}^k$  je vektor bílého šumu systému. Zahrnutím bílého šumu modelujeme ty změny stavového vektoru, které se jeví náhodně a nelze je popsat pomocí přechodové funkce  $\mathbf{f}$ , zatímco je lze dobře popsat pomocí náhodného procesu.

Pojem bílý šum je v literatuře používán v mnoha různých kontextech a proto jej zde specifikujeme. Jedno-dimenzionální bílý šum je formální časovou derivací spojitého náhodného procesu  $\beta(t)$ , který nazýváme Wienerův proces a který má následující vlastnosti

- $\beta(0) = 0$  s pravděpodobností 1,
- $\beta(t) - \beta(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$  pro  $t \leq s \leq 0$ ,
- pro časy  $s_0 > s_1 > s_2 > s_3$  jsou náhodné veličiny  $\beta(s_1) - \beta(s_0)$  a  $\beta(s_3) - \beta(s_2)$  vzájemně nezávislé.

Jedno-dimenzionální bílý šum pak můžeme formálně zapsat jako

$$w(t) = \frac{d\beta(t)}{dt}.$$

Vícerozměrný bílý šum  $\mathbf{w}(t) = (w_1(t), w_2(t), \dots, w_k(t))^T$  je pak pouze souborem jednorozměrných bílých šumů, jejichž vzájemnou závislost popisuje kovarianční matice  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ .

Rovnice (1.5) předpokládá, že známe přechodovou funkci  $\mathbf{f}_n$  mezi jednotlivými epochami. Pro složitější manévry modelované např. v kartézském prostoru, se lze setkat s formulací nelineárního spojitého dynamického systému [12] ve tvaru

$$d\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t), t) dt + \mathbf{B}(\mathbf{x}(t), t) d\beta(t). \quad (1.6)$$

Ať již uvažujeme dynamiku cíle v diskrétním či spojitém čase, je odhadované parametry cíle nutné založit na měřeních z radarového systému. Vztah mezi měřeními a stavovým vektorem formulujeme jako

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{h}_{n+1}(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{v}_{n+1}) \quad (1.7)$$

kde  $\mathbf{h}_{n+1}$  je obecně nelineární funkce převodu vektoru sledovaných veličin na vektor měřených veličin  $\mathbf{y}_{n+1}$  a  $\mathbf{v}_{n+1}$  je šum měření. Vhodným příkladem nelineárního převodu jsou vztahy (1.1) a (1.2) kde stavový vektor by obsahoval polohu a rychlost cíle v kartézském prostoru, zatímco vektor měření by obsahoval bistatické souřadnice cíle.

Máme tedy k dispozici dynamický model cíle v diskrétním či spojitém čase, přičemž v diskrétním čase jsou do systému dodávána zašuměná měření jako obecně nelineární

transformace stavového vektoru. Z důvodu stochastické podstaty celé formulace je vhodné stavový vektor modelovat jako náhodnou veličinu. Potom hledáme pravděpodobnostní rozdělení  $p(\mathbf{x}_{n+1}|\mathbf{y}_{1:n+1})$ , kde  $\mathbf{y}_{1:n+1}$  označuje množinu měření až do času  $t_{n+1}$ .

Pomocí Bayesovy věty můžeme tuto hustotu  $p(\mathbf{x}_{n+1}|\mathbf{y}_{1:n+1})$  psát ve tvaru

$$p(\mathbf{x}_{n+1}|\mathbf{y}_{1:n+1}) = \frac{p(\mathbf{y}_{n+1}|\mathbf{x}_{n+1})p(\mathbf{x}_{n+1}|\mathbf{y}_{1:n})}{\int p(\mathbf{y}_{n+1}|\mathbf{x}_{n+1})p(\mathbf{x}_{n+1}|\mathbf{y}_{1:n})d\mathbf{x}_{n+1}} \quad (1.8)$$

kde  $p(\mathbf{y}_{n+1}|\mathbf{x}_{n+1})$  je věrohodnost měření (z anglického *measurement likelihood*),  $p(\mathbf{x}_{n+1}|\mathbf{y}_{1:n})$  je apriorní rozdělení stavového vektoru  $\mathbf{x}_{n+1}$  (nebo také predikce, což zdůrazňuje, že rozdělení stavového vektoru není založeno na nejnovějším měření) a  $p(\mathbf{y}_{n+1}) = \int p(\mathbf{y}_{n+1}|\mathbf{x}_{n+1})p(\mathbf{x}_{n+1}|\mathbf{y}_{1:n})d\mathbf{x}_{n+1}$  je normalizační konstanta.

Obvyklým postupem při odhadování stavového vektoru  $\mathbf{x}$  je tzv. rekurzivní (nebo také sekvenční) filtrace, tedy v každé epoše  $t_{n+1}$  je do systému dodáno nové měření  $\mathbf{y}_{n+1}$  a pouze toto, s již odhadnutou hustotou  $p(\mathbf{x}_{n+1}|\mathbf{y}_{1:n})$  je použito k aktualizaci hustoty  $p(\mathbf{x}_{n+1}|\mathbf{y}_{1:n+1})$ . Pro tento účel se obecně zavádí dva předpoklady. První z nich je markovská vlastnost stavů

$$p(\mathbf{x}_{n+1}|\mathbf{x}_{1:n}, \mathbf{y}_{1:n}) = p(\mathbf{x}_{n+1}|\mathbf{x}_n)$$

která říká, že budoucí stavy systému jsou podmíněně nezávislé na všech informacích dostupných před epochou  $t_n$ . Druhým předpokladem je pak podmíněná nezávislost měření

$$p(\mathbf{y}_{n+1}|\mathbf{x}_{1:n+1}, \mathbf{y}_{1:n}) = p(\mathbf{y}_{n+1}|\mathbf{x}_{n+1})$$

tedy, že měření je závislé pouze na momentálním stavovém vektoru.

Pro řešení odhadu posteriorní hustoty  $p(\mathbf{x}_{n+1}|\mathbf{y}_{1:n+1})$  lze v literatuře najít velké množství postupů, přičemž každý z nich má své vlastní výchozí předpoklady týkající se funkcí  $\mathbf{f}_{n+1}(\mathbf{x}_n, \mathbf{w}_n)$  a  $\mathbf{h}_{n+1}(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{v}_n)$ . Zbylá část této sekce je věnována přehledu nejběžnějších technik s tím, že detailní informace čtenář nalezne v odpovídajících referencích.

Nejpoužívanější a neznámější je Kalmanův Filtr (KF) [13], který předpokládá, že obě funkce  $\mathbf{f}$  a  $\mathbf{h}$  jsou lineární a oba šумы jsou přidatné

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{F}_{n+1}\mathbf{x}_n + \mathbf{w}_{n+1} & \mathbf{w}_{n+1} &\sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_{n+1}) \\ \mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{H}_{n+1}\mathbf{x}_{n+1} + \mathbf{v}_{n+1} & \mathbf{v}_{n+1} &\sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_{n+1}). \end{aligned}$$

Díky těmto předpokladům můžeme predikční hustotu i posteriorní hustotu uvažovat v Gaussovském tvaru

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_{n+1}|\mathbf{x}_n) &= \mathcal{N}(\mathbf{m}_{n+1}^-, \mathbf{P}_{n+1}^-) \\ p(\mathbf{x}_{n+1}|\mathbf{y}_{1:n+1}) &= \mathcal{N}(\mathbf{m}_{n+1}, \mathbf{P}_{n+1}) \end{aligned}$$

přičemž parametry posteriorní hustoty lze nalézt pomocí jednoduchých maticových výpočtů

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{n+1} &= (\mathbf{H}_{n+1}\mathbf{P}_{n+1}^-\mathbf{H}_{n+1}^T + \mathbf{R}_{n+1})^{-1} \\ \mathbf{m}_{n+1} &= \mathbf{m}_{n+1}^- + \mathbf{P}_{n+1}^-\mathbf{H}_{n+1}^T\mathbf{S}_{n+1}(\mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{H}_{n+1}\mathbf{m}_{n+1}^-) \\ \mathbf{P}_{n+1} &= \mathbf{P}_{n+1}^- - \mathbf{P}_{n+1}^-\mathbf{H}_{n+1}^T\mathbf{S}_{n+1}\mathbf{H}_{n+1}\mathbf{P}_{n+1}^-\end{aligned}$$

kde  $\mathbf{P}_{n+1}$  značí odhad kovarianční matice odhadu stavového vektoru  $\mathbf{x}_{n+1}$ ,  $\mathbf{H}_{n+1}$  je transformační matice která realizuje lineární funkci  $\mathbf{f}_{n+1}$  a pravý horní index  $-$  značí predikovanou veličinu.

Předpoklad Gaussovské aproximace apriorní i aposteriorní hustoty se běžně zachovává i v případě, že transformační funkce  $\mathbf{f}_{n+1}$  a  $\mathbf{h}_{n+1}$  jsou nelineární. Jednou z nejjednodušších metod řešících tento problém je rozšířený Kalmanův Filtr (EKF) [14]. Tato varianta je hojně používána tam, kde nelinearita funkcí není příliš velká a je jednoduché vypočítat jejich parciální derivace. Transformační matice  $\mathbf{F}_{n+1}$  a  $\mathbf{H}_{n+1}$  jsou nahrazeny Jakobiho maticemi parciálních derivací

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_f &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_k} \end{pmatrix} \\ \mathbf{J}_h &= \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_k}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_k}{\partial x_k} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Poznamenejme, že linearizace pomocí parciálních derivací je běžně používána v případě spojitě formulace dynamického systému [15], kde je místo Taylorova rozvoje použit rozvoj Itô-Taylorův [16]. Jedním z nejjednodušších příkladů aplikace Itô-Taylorova rozvoje je Euler-Maruyamova diskretizace stochastické diferenciální rovnice. Časový interval  $\langle t_n, t_{n+1} \rangle$  rozdělíme na  $M$  pod-intervalů a následně pro  $j = 0, 1, \dots, M$  získáme

$$\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{x}_j + \mathbf{a}(\mathbf{x}_j, j) \Delta t + \mathbf{B}(\mathbf{x}_j, j) \Delta \beta_j \quad (1.9)$$

kde  $\Delta t$  je délka pod-intervalu a  $\Delta \beta_j$  je přírůstek Wienerova procesu, který má na základě jeho vlastností rozdělení  $\Delta \beta_j \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Delta t \mathbf{I})$ , kde  $\mathbf{I}$  je matice identity příslušných rozměrů. Mezi formulací rovnice (1.9) a obecnou rovnicí (1.5) si lze všimnout silné podobnosti. V zásadě jediný rozdíl je, že zatímco v případě systému (1.5) je časový krok obecně motivován časy nově příchozích měření, v případě formulace (1.9) je časový krok motivovaný dostatečně přesnou aproximací nelineárního spojitěho systému.

Na rozdíl od linearit transformačních funkcí, jako tomu je v případě Kalmanova Filtru, je předpoklad aditivity a Gaussovskosti šumu (systémového i měření) běžným předpokladem při řešení úlohy Bayesovské filtrace, především pak při numerických metodách řešení. Uvažuje nyní tedy (diskrétní) stochastický dynamický systém ve tvaru

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{f}_{n+1}(\mathbf{x}_n) + \mathbf{w}_{n+1} & \mathbf{w}_{n+1} &\sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_{n+1}) \\ \mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{h}_{n+1}(\mathbf{x}_{n+1}) + \mathbf{v}_{n+1} & \mathbf{v}_{n+1} &\sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_{n+1}).\end{aligned}$$



Díky uvedeným předpokladům vlastností šumu je také platný přibližný předpoklad Gaussovského tvaru apriorních i aposteriorních hustot (jedná se přirozeně jen o aproximaci) a výpočty jejich středních hodnot i kovariančních matic obecně vyžadují výpočty integrálů ve tvaru

$$I = \int g(\mathbf{x}) \mathcal{N}(\mathbf{x}|\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{P}}) d\mathbf{x} \quad (1.10)$$

kde  $\mathcal{N}(\mathbf{x}|\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{P}})$  značí hustotu vícerozměrného normálního rozdělení se střední hodnotou  $\hat{\mathbf{x}}$ , kovarianční maticí  $\hat{\mathbf{P}}$  a argumentem  $\mathbf{x}$ . Integrál (1.10) bude obvykle nahrazen konečnou sumou

$$I \approx \sum_{i=1}^N g(\mathbf{x}_i) \alpha_i \quad (1.11)$$

přičemž jednotlivé metody odlišuje především právě volba vah  $\alpha_i$  a bodů  $\mathbf{x}_i$  a tato volba také odlišuje kvalitu a vlastnosti aproximace (např. zachování momentů).

Na KF a EKF navazuje Unscentovaný Kalmanův Filtr (UKF), který používá právě numerickou aproximaci (1.11), přičemž  $\mathbf{x}_i$  jsou nazývány *sigma body*, protože jsou odvozeny přímo z kovarianční matice normálního rozdělení v argumentu integrálu

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x}_j &= \hat{\mathbf{x}} + \sqrt{\frac{k}{1-w_0}} \sqrt{\hat{\mathbf{P}}_j}, \quad \text{pro } j = 1, 2, \dots, k \\ \mathbf{x}_j &= \hat{\mathbf{x}} - \sqrt{\frac{k}{1-w_0}} \sqrt{\hat{\mathbf{P}}_{j-k}}, \quad \text{pro } j = k+1, k+1, \dots, 2k \\ w_j &= \frac{1-w_0}{2k}, \quad \text{pro } j = 1, 2, \dots, 2k \end{aligned}$$

kde  $w_0$  je parametr umožňující kontrolovat polohu bodů vzhledem ke střední hodnotě  $\hat{\mathbf{x}}$  a  $\sqrt{\hat{\mathbf{P}}_j}$  značí  $j$ -tý sloupec Choleskyho rozkladu kovarianční matice.

Dalším zástupcem z rodiny filtračních algoritmů, založených na řešení integrálu (1.11) jsou Kubaturní Kalmanovy Filtry (CKF) [17], které pro aproximaci využívají standardní kubaturní vzorce [18–20] určené pro výpočet vícerozměrných integrálů, jejichž argument obsahuje váhovou funkci ve tvaru normovaného normálního rozdělení. Jako příklad můžeme uvést kubaturní schema stupně  $d = 5$  popsané v [21]. Stupeň kubaturního schematu se obvykle odvozuje od polynomů, tedy pokud  $d = 5$  pak (1.11) není aproximací ale přesným výpočtem pro všechny funkce  $g$ , které lze nahradit polynomem pátého stupně. Kubaturní schemata daného stupně se liší v počtu bodů (a tím i ve výpočetní náročnosti), pro náš příklad  $N = 2k^2 + 1$  a body jsou voleny následovně

$$\begin{aligned}
(0, 0, \dots, 0) & \text{ s vahou } \alpha_0 = \frac{\sqrt{\pi^k} (k^2 - 7k + 18)}{18} \\
(v, 0, \dots, 0)_{FS} & \text{ s vahou } \alpha_1 = \frac{\sqrt{\pi^k} (4 - k)}{18} \\
(v, v, 0, \dots, 0)_{FS} & \text{ s vahou } \alpha_2 = \frac{\sqrt{\pi^k}}{36}
\end{aligned}$$

kde  $FS$  označuje množinu všech unikátních permutací souřadnic a také změny jejich znamének. Pro toto konkrétní kubaturní schema platí  $v = \sqrt{\frac{3}{2}}$ .

S ohledem na numerickou stabilitu při filtraci (především pak zachování pozitivní semi-definitnosti vypočtené kovarianční matice) je běžný požadavek  $\alpha_i \geq 0$ . Z tohoto důvodu by toto schema mohlo být použito pro dimenze stavových vektorů  $k > 4$ . Zevrubnější popis teorie kubaturních vzorců a jejich klasifikaci lze nalézt například v [22].

K výpočtu integrálu (1.10) lze přistoupit i randomizovaným způsobem, např. pomocí částicových filtrů (PF, z anglického *Particle Filters*) [23]. V případě částicových filtrů není nutný ani Gaussovský předpoklad tvaru posteriorní hustoty  $p(\mathbf{x}_{n+1}|\mathbf{y}_{1:n+1})$  a tato hustota dokonce ani nemusí umožňovat analytické výpočty pro provedení filtrace nebo generování vzorků podle této hustoty rozdělených. V takovém případě uvažujeme jinou hustotu  $q(\mathbf{x}_{n+1}|\mathbf{y}_{1:n+1})$ , pro kterou umíme generování vzorků realizovat, a která má totožný nosič jako funkce  $p$ . Pro každé  $\mathbf{x}_{n+1}$  tedy můžeme určovat reálnou konstantu působící jako měřítkový faktor mezi těmito hustotami

$$\omega(\mathbf{x}_{n+1}) = \frac{p(\mathbf{x}_{n+1}|\mathbf{y}_{1:n+1})}{q(\mathbf{x}_{n+1}|\mathbf{y}_{1:n+1})}.$$

Vzorky náhodně vybrané z  $q$  společně s vahami  $\omega$  mohou být přímo použity v rovnici (1.10) i za předpokladu, že váhovací funkce nemá tvar normálního rozdělení

$$I = \int g(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) d\mathbf{x} = \frac{\int g(\mathbf{x}) \omega(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}|\mathbf{y}) d\mathbf{x}}{\int \omega(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}|\mathbf{y}) d\mathbf{x}}$$

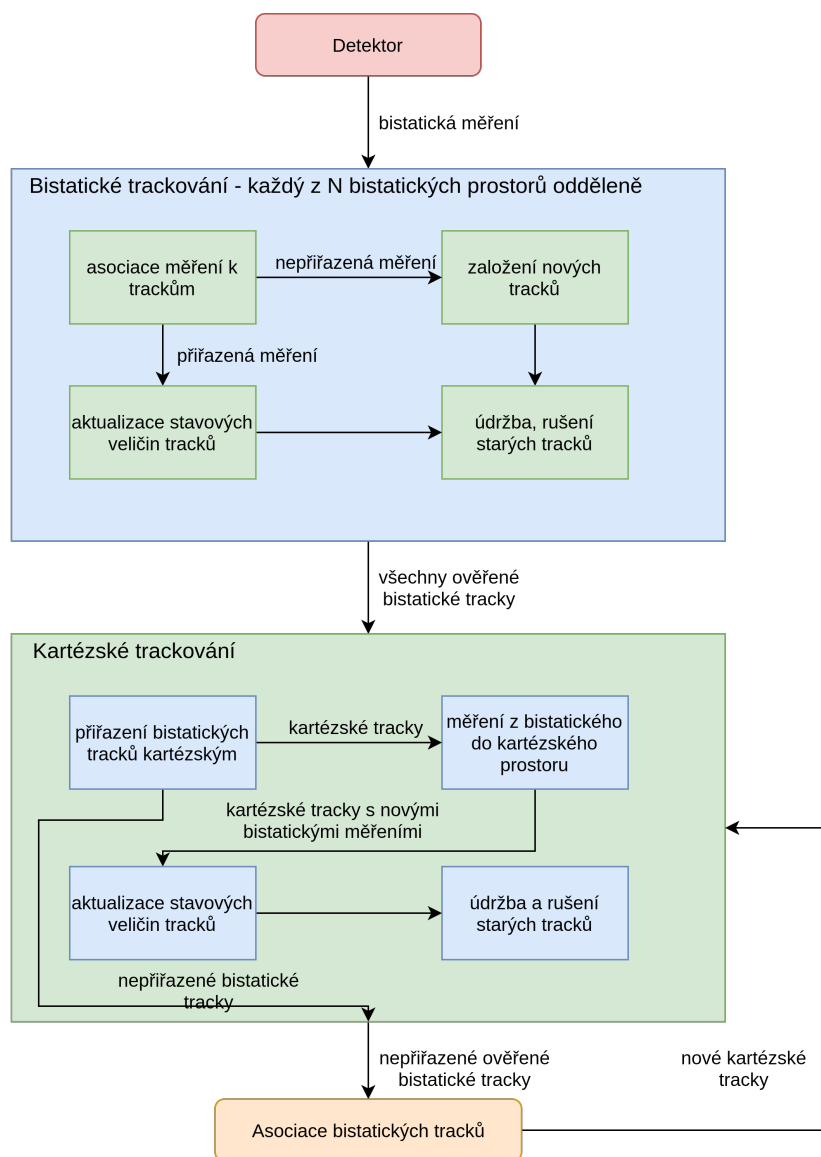
a pro  $N$  vygenerovaných vzorků z hustoty  $q$  získáme aproximaci integrálu

$$\begin{aligned}
I & \approx \sum_{i=1}^N g(\mathbf{x}^i) \tilde{\omega}(\mathbf{x}^i) \\
\tilde{\omega}(\mathbf{x}^i) & = \frac{\omega(\mathbf{x}^i)}{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \omega(\mathbf{x}^j)}.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Filtrace pomocí nahrazení integrálů konečnou sumou poskytuje výhodu velice snadné a efektivní paralelizace s relativně malými nároky na paměť. Existuje celá řada variant částicových filtrů a jejich modifikací. Zaujatého čtenáře odkážeme na monografii [24] nebo přehledový článek [25].

## 1.4 Multistatická Konfigurace

V této části stručně popíšeme použití bistatického radaru v multistatické konfiguraci, tedy v případě, kdy k vedení cílů chceme použít více než jen jeden přijímač a jeden vysílač. Z definic bistatických měření (1.1) a (1.2) je patrné, že multistatická konfigurace je navíc nezbytnou podmínkou aby radarový systém byl schopen poskytovat polohu cíle v 3D kartézské souřadnicové soustavě.



Obrázek 1.4: Schematický model architektury systému zajišťujícího vedení cílů v kartézském souřadnicovém systému na základě bistatických měření.

Architektura multistatického radarového systému uvažovaná v této sekci vychází z klasických návrhů pasivních systémů, kdy jsou prostory primárních měření (v našem případě bistatických detekcí) a zájmové prostory (v našem případě 3D kartézský prostor vedení) spravovány odděleně. Tato architektura je běžně používána a v literatuře lze její popis

nalézt např. v [26] nebo nověji v [27]. Schematický přehled je pak k dispozici na obrázku 1.4.

Uvažujme tedy  $N$  vzájemně nezávislých bistatických prostorů. Nezávislost požadujeme v geometrickém smyslu a její význam je takový, že žádné dva bistatické páry  $i$  a  $j$  nejsou plně totožné polohou svých stanovišť (přijímače a vysílače). V každém bistatickém páru dochází ke zcela nezávislému signálovému zpracování, jehož výsledkem je množina detekcí  $\{\mathbf{m}_i, \mathbf{M}_i\}^k$  pro každý bistatický prostor  $k$ . Tato množina detekcí obsahuje jak detekce všech detekovatelných cílů (poznamenejme, že cíl může být v blízkosti spojnice přijímače a vysílače bistatického páru a přesto nedetekovatelný, např. protože je v zákrytu) ale také falešné detekce vzniklé náhodným odrazem, vícecestným šířením nebo kumulací šumu. Tyto detekce jsou dále zpracovávány v rámci bistatického páru.

V prvním kroku je provedena asociace detekcí k již existujícím bistatickým trackům. Bez ohledu na použitý typ asocičního algoritmu získáme po zpracování detekcí množinu tracků  $\{\mathbf{x}_i, \mathbf{P}_i\}$ , jejichž stavové vektory jsou aktualizovány pomocí příchozích měření. V případě těch, kterým žádné měření přiřazeno nebylo, lze sladit stavové veličiny v čase s ostatními tracky pomocí predikčních mechanismů.

Množinu tracků máme k dispozici samostatně pro každý z  $N$  bistatických prostorů. Některé z tracků jsou zcela nové (založené některými z nepřřazených primárních měření), jiné jsou vedené již delší dobu. Obvykle se uvažuje určitý druh validačního mechanismu, obvykle ve formě požadavku aktualizace stavových veličin pomocí měření v alespoň  $L$  z  $M$  intervalů, kdy byla data k dispozici. Track je po splnění tohoto kritéria ve stavu ověřený a z hlediska popisované architektury trackovacího systému připravený postoupit do další fáze zpracování pro účast na vedení cílů v kartézském prostoru.

Jak jsme již zmínili v úvodu kapitoly, pro sestavení plně 3D kartézské polohy cíle resp. jeho 3D vektoru kartézské rychlosti potřebujeme znát jeho polohu v alespoň třech bistatických prostorech resp. jeho bistatickou rychlost v těchto prostorech. Detailním postupem sestavení této polohy resp. rychlosti se budeme zabývat v další sekci. K samotnému výpočtu polohy a rychlosti může ovšem dojít až tehdy, kdy máme k dispozici tři bistatické tracky z různých bistatických prostorů, které jsou obrazem totožného cíle. Stejně jako v případě přiřazení detekce bistatickému tracku, ani v tomto případě nemáme k dispozici žádný identifikátor, který by nám umožnil skupiny bistatických tracků sestavovat. Jejich sestavením se zabývá část trackovacího systému, která obstarává asociaci bistatických tracků (nebo také kartézskou asociaci) a tato část je zároveň hlavním předmětem této dizertační práce. Společně s algoritmy určení polohy cíle se tedy touto částí zabýváme detailněji v následující sekci.

Poslední fází zpracování dat v multistatickém systému je samotné vedení cíle v kartézském systému. Jednotlivým kartézským trackům jsou bistatická měření dodávána skrz napojení na bistatické tracky, které se účastnily jejich iniciace. Zároveň však, pokud některý kartézský track není doposud v některém z bistatických prostorů veden, ponechává systém možnost napojení na tavní bistatické tracky. Pokus o tato napojení se provádí ještě dříve, než jsou ověřené tracky odeslány do asociace bistatických tracků tak, aby se předcházelo zbytečnému zahlcení systému a zároveň vytváření falešných kartézských tracků.

### 1.4.1 Asociace bistatických tracků

V předchozí sekci jsme popsali a shrnuli celkový systémový pohled na systém vedení cílů, kde zdrojem informací o jejich poloze jsou detekce získané pomocí multistatické konfigurace bistatických radarů. Z popisu vyplývá, že jednou z klíčových částí je právě asociace bistatických tracků, která společně s algoritmy určení polohy a rychlosti cíle, realizuje přechod z bistatických do kartézského prostoru. Právě tato část je také hlavním tématem této práce a v této sekci ji podrobně popíšeme a poskytneme důkladnou rešerši dostupné literatury na toto téma.

Nejprve formulujme úlohu asociace bistatických tracků tak, jak je naznačena v předchozí sekci. Ověřené bistatické tracky jsou nejprve poskytnuty již existujícím kartézským vedením pro případné navázání v těch bistatických prostorech, kde daný kartézský track prozatím nemá data. Předpokládejme, že část bistatických tracků je takto odebrána a předána do kartézských vedení, nicméně podstatné množství jich zůstane nepřirazeno. Tyto bistatické tracky jsou pak vstupem jejich asociace.

Označme  $N$  celkový počet nezávislých bistatických párů a  $M_k$  pro  $k = 1, 2, \dots, N$  počet ověřených bistatických tracků vstupujících do asociace. Jak již bylo řečeno v sekci 1.3.1, pro sestavení plné polohy cíle je zapotřebí alespoň tři geometricky nezávislá měření bistatické polohy. Je tedy smysluplné hledat alespoň trojice bistatických tracků z různých bistatických prostorů. Na druhé straně cílem umístění a pokrytí systému je co největší detekovatelnost cílů napříč dvojicemi párů přijímač-vysílač. V tomto ohledu má smysl uvažovat skupiny až  $N$  tracků, což by odpovídalo cíli, jež má v každém bistatickém prostoru svůj track.

Uvažujme nyní množinu kombinací indexů  $k = 1, 2, \dots, N$  třídy  $l$  kterých je

$$C_l(N) = \binom{N}{k} \quad (1.13)$$

a jejich množinu si označme  $L$ . Pomocí bijektivního zobrazení z množiny přirozených čísel  $i = 1, 2, \dots, C_l(N)$  na množinu  $\mathcal{L}$  můžeme mezi jednotlivými kombinacemi  $L_i$  iterovat. Celkový počet potenciálních hypotéz o asociaci bistatických tracků tedy můžeme zapsat ve tvaru

$$K = \sum_{l=3}^N \sum_{i=1}^{C_l(N)} \prod_{j \in L_i} M_j. \quad (1.14)$$

Přirozeně, velká část z asociačních hypotéz nebude disjunktních, tedy některé hypotézy budou mít společné bistatické tracky. Tím vyvstává další problém, jak posoudit dvě různé hypotézy (které např. sdílí jeden či dva bistatické tracky) abychom vybrali tu správnou nebo alespoň pravděpodobnější. Eliminace falešných asociačních hypotéz, které by potenciálně mohly vést k falešným kartézským trackům, se v literatuře obecně nazývá slovem *deghosting*.

Asociace bistatických tracků a deghosting nejsou ani zdaleka novým tématem a existuje mnoho literatury, ze které lze čerpat. Obecná úloha přiřazení prvků z  $N$  seznamů, ve smyslu „tvrdého“ přiřazení (tedy jeden prvek ze seznamu  $i$  může být přiřazen maximálně jednomu prvků ze seznamu  $j$ ) je řešena v [28]. Úloha je zde řešena obecně s aplikací

sledování cíle v síti vysokofrekvenčních stanic určujících směr odkud přichází signál cíle, tedy s nelineární transformací stavového vektoru do prostoru měření. Mimo jiné jsou uvažována i falešná měření, nebo chybějící měření cíle v některých prostorech (seznamech měření). Díky tomu lze velmi snadno řešení převést i na případ asociace bistatických tracků. Protože úloha je sama o sobě NP-těžká, využívá řešení polynomiálního algoritmu pro 2-D přiřazení, který je aplikován postupně a optimum je hledáno s použitím Lagrangeovy relaxace pro penalizaci narušení omezujících podmínek (omezující podmínky vyplývají z požadavku na tvrdé přiřazení).

Článek [29] již řeší asociaci z hlediska bistatických měření. Redukce výpočetní náročnosti asociace se zde provádí za prvé pomocí projekce poloh do volené 2D roviny (tj. neřešíme plně 3D polohu cíle) a dále analogicky jako v případě [28] pomocí formování pouze párů měření (nebo tracků) z různých bistatických prostorů. Tyto páry pak v rovině formují dvojice elips měření, které mají zpravidla analyticky určitelné průsečíky. Kovarianční matice takto vypočtených poloh cílů jsou následně ošetřeny vzhledem k neznámé výšce a pomocí těchto kovariančních matic jsou pak polohy „shlukovány“ na základě Mahalanobisovi vzdálenosti. Pro jednotlivé shluky je pak určena věrohodnost přítomnosti cíle v dané oblasti vzhledem k počtu poloh ve shluku, na základě čehož je shluk prohlášen za cíl nebo falešný odraz. Toto testování lze provádět jednak v kartézském prostoru a nebo v prostoru měření. Navrhovaný algoritmus je dále rozveden v [30] a [31] a mimo jiné jsou využívány analytické vzorce pro výpočet kartézské polohy cíle z neúplných měření [32].

Alternativní postup vedení kartézských cílů je navržen v [33]. V článku je využita technika vedení track-before-detect (TBD), která eliminuje kompletně bistatickou část včetně detekčního procesu. Zobecněný věrohodnostní poměr je vyhodnocen přímo nad přijatým signálem, přičemž uvažované hypotézy jsou  $H_0$ : signál neobsahuje cíl a  $H_1$ : v signálu je obsažen odraz od cíle. Věrohodnostní poměr pro tyto dvě hypotézy je následně vyhodnocen přes celou předdefinovanou množinu poloh a rychlostí cíle, přičemž za určené polohy jsou označeny ty, kde poměr překročí volený práh. Poznamenejme, že vzhledem k architektuře uvažovaného systému, představené v předchozí sekci, je tento postup nevhodný.

Mimo samotného algoritmu sestavení skupin měření z různých zdrojů, lze deghosting také realizovat pomocí potlačení těch, pro které by výsledné parametry cíle (tedy především poloha a rychlost) byly silně nepravděpodobné. Pro reálné cíle v blízkosti zemského povrchu lze především uplatnit kritéria rychlosti. Tento způsob deghostingu byl detailně zkoumán v [34]. Prosté limity  $V_{min}$  a  $V_{max}$  zde byly převedeny do detailnější geometrické domény a odvozeny analytické vztahy pro ohraničení oblasti přípustných hodnot vzhledem k pohybu cíle. Uplatněním těchto oblastí lze efektivně vyloučit velké množství cílů s nepravděpodobnou rychlostí vzhledem k jejich poloze a pohybu a tím snížit počet falešných cílů.

Podobným směrem se ubíraly také úvahy autorů článku [35], kde jsou také uplatňovány limity výskytu cíle (v oblasti polohy a rychlosti). Celkový přístup byl ale odlišný a spočíval ve formování trojic bistatických měření (pomocí heuristického algoritmu 3D přiřazení vycházejícího z JPDA), které zakládaly nová kartézská vedení. Ta byla následně rušena buď v případě nesplnění limitů polohy a rychlosti, nebo překročením věrohodnosti tracku počítané na základě manévru cíle a přiřazených dalších měření. Význam počítané věrohodnosti znevýhodňoval ty tracky, jejichž manévry neodpovídaly reálnému cíli.

Odlišný postup asociace bistatických tracků byl zvolen v [36] a [37], přičemž oba články na sebe navazují. Nejdůležitějším krokem bylo použití Probabilistic Multiple Hypothesis Tracking (PMHT) přístupu. V rámci toho přístupu jsou jednotlivé asociace měření

k trackům považovány za nezávislé a celková věrohodnostní funkce přiřazení může být vyjádřena pomocí součinů a součtů přes bistatické prostory a uvažované tracky. Maxima této věrohodnostní funkce pak určují kandidátní asociace, které pokračují do dalšího stádia kartézského trackování.

Tématem testování odhadnutých poloh z kombinací bistatických měření se zabývaly články [38] a [39]. V obou případech byl zvolen postup testování velikosti zbytkové chyby vypočtené polohy zpětnou projekcí vypočtených kartézských souřadnic do prostoru měření. V případě [38] bylo kritérium maximální chyby odvozeno od předpokladu normálního rozdělení chyb v bistatických prostorech, díky čemuž má zbytková chyba  $\chi^2$  rozložení s počtem stupňů volnosti odvozeným od počtu určovaných a měřených parametrů. Oproti tomu v [39] je zbytková chyba převedena na dekadický logaritmus a pro ten je stanovena mezní hodnota.

Jak je vidět z provedené rešerše, v literatuře je dostupné velké množství různých přístupů k asociaci bistatických tracků a deghostingu. Některé se liší samotným algoritmickým pojetím asociace (příčemž algoritmus sám může zabraňovat formování falešných cílů) nebo jen uplatňovanými kritérii na výsledné polohy nebo kartézské tracky v průběhu vedení. Nyní tedy uvedeme několik problémů s dostupnými přístupy k problematice.

Prvním velice častým jevem je převod úlohy z prostoru 3D polohy a 3D rychlosti cíle na 2D polohu buď bez rychlosti, nebo s 2D rychlostí. Tento přístup se týká např. článků [29–31, 34, 38–42]. Ačkoli z hlediska problematiky výpočtu polohy cíle (kterou detailněji rozebereme v další sekci) práce pouze s 2D polohou přináší redukci výpočetní náročnosti, z hlediska deghostingu naopak situaci výrazně komplikuje. Neznámá výška cíle musí být kompenzována a to především v kovarianční matici cíle. Připomeňme, že bistatický range tvoří v prostoru elipsoidy, a proto se změnou výšky dochází ke změně polohy (příčemž míra této změny je dána vzdáleností od systému) a tudíž má její zanedbání vliv i na přesnost v uvažované 2D rovině. To přirozeně vede k větším nejistotám v asociaci a může následně vést k tvorbě falešných kartézských cílů. Poznamenejme, že v části literatury můžeme najít formulaci, že „převod úlohy do 3D je jednoduché“. U některých algoritmů je tato formulace sporná, u jiných nikoli. Nicméně i tam, kde si lze snadno domyslet převod na asociaci a deghosting ve 3D prostoru, nejsou v literatuře žádné výsledky a porovnání pro tuto modifikaci a je tedy otázka, jestli daný postup nedosahuje uváděné efektivity právě pouze při nasazení ve 2D.

Druhým problematickým bodem většiny v literatuře navrhovaných přístupů k deghostingu je uvažované sestavení multistatického systému. Sestavení multistatického systému je dáno polohami přijímacích a vysílacích stanic, ve zjednodušené formě pouze jejich počtem. V drtivé většině článků, např. [26, 31, 35, 36, 38, 40, 42–44], je uvažovaná multistatická konfigurace typu  $1/N$  nebo  $M/1$ , přičemž v poměru  $M/N$  označuje  $M$  počet přijímačů a  $N$  počet vysílačů. Takový předpoklad silně zjednodušuje situaci jak pro učení polohy cíle, kde např. uzavřené vzorce [43] nelze snadno upravit pro výpočet polohy cíle např. ze tří měření, pokud tato měření nemají společné ani jedno stanoviště, tak pro počet vzniklých průsečíků elips v rovině v případě uvažovaného 2D vedení (které je, jak jsme uvedli, časté), protože konfokální elipsy mohou mít maximálně dva průsečíky. Nejdůležitějším problémem je ovšem fakt, že v obecné konfiguraci  $M/N$  vzniká výrazně větší množství falešných kartézských vedení. Navzdory tomu, že konfigurace  $1/N$  či  $M/1$  jsou v literatuře časté, i konfigurace  $M/N$  mají své praktické využití, a lze je v literatuře nalézt [45, 46]. Obecné konfigurace multistatického systému mají využití především v těch aplikacích, kde je cílem určenou oblast co nejlépe pokrýt plně 3D vedením, ideálně

z přeurčení (tedy abychom měli nadbytečná měření, která snižují chybu odhadu).

Hlavním cílem této práce je, jak již bylo řečeno v úvodu, navrhnout alternativní algoritmus pro asociaci bistatických tracků a deghosting, který by eliminoval některé dílčí nedostatky zjištěné v algoritmech dostupných v literatuře. Požadavky na takový algoritmus bychom mohli shrnout do několika bodů.

- Algoritmus musí být od počátečního návrhu určen pro plnou 3D lokalizaci cílů (poloha i výška) tak, aby ani nebránil asociaci pouze dvojice bistatických měření, která 3D vedení schopná nejsou.
- Algoritmus musí předpokládat, že multistatická konfigurace je obecného typu  $M/N$ .
- Vzhledem k tomu, že asociace měření a vedení tracků (ať již v bistatickém nebo v kartézském prostoru) je realizována pomocí Bayesovského modelování, měla by i asociace bistatických tracků být řešena pomocí tohoto přístupu.
- Výpočetní náročnost algoritmu musí být kontrolovatelná s ohledem na dostupné prostředky systému, tak aby nedocházelo k jeho zahlcení. V tomto ohledu se jako vhodná možnost nabízí randomizovaný přístup.
- Výsledný algoritmus by měl předčít běžně používané algoritmy s ohledem na objektivní kritéria hodnocení asociace bistatických tracků.

### 1.4.2 Určení polohy a rychlosti cíle

Uvažujme nyní, že máme k dispozici informaci, která nám umožňuje identifikovat bistatické tracky totožného cíle napříč bistatickými prostory. Asociaci bistatických tracků provádíme právě za účelem odhadu této informace tak, abychom ji dále použili k určení polohy (rychlosti) cíle v zájmovém 3D kartézském prostoru.

V souladu se značením ze začátku kapitoly označíme skutečnou polohu cíle  $\mathbf{C}$  a jeho rychlost  $\mathbf{V}$ . Pro měřené bistatické souřadnice tohoto cíle v nějakém bistatickém prostoru  $i$  platí

$$\mathbf{y}_i = \begin{pmatrix} v \\ r \end{pmatrix} + \mathbf{v}_i \quad (1.15)$$

kde  $v, r$  jsou dány vztahy (1.1) a (1.2) upravenými pro polohy přijímače  $\mathbf{R}\mathbf{x}_i$  a vysílače  $\mathbf{T}\mathbf{x}_i$ , přičemž jejich index označuje příslušnost k bistatickému prostoru  $i$ . Náhodný vektor chyb měření má normální rozdělení s nulovým vektorem středních hodnot a známou kovarianční maticí

$$\mathbf{v}_i \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_i).$$

S ohledem na sekci 1.3.3 samozřejmě nechceme určovat polohu cíle přímo z bistatických měření, ale z vyfiltrovaných stavových vektorů tracků, které se projeví jako v čase trvalé a tudíž důvěryhodné. Na druhou stranu, tato modifikace má za následek pouze to, že zatímco v případě bistatických měření je kovarianční matice  $\mathbf{R}$  téměř či zcela diagonální, v případě stavových vektorů  $\mathbf{m}_{n+1}$  bistatických tracků je kovarianční matice  $\mathbf{P}_{n+1}$  zcela



obecná kovarianční matice. Poznamenejme, že definici kovarianční matice splňují i pozitivně semidefinitní matice, nicméně vzhledem k běžné potřebě výpočtů s její inverzí, kdy vlastní směr s nulovým vlastním číslem by působil problémy, se omezujeme pouze na matice pozitivně definitní. S ohledem na tyto skutečnosti lze považovat tvar (1.15) za dostačující a navíc výstižnější, neboť z hlediska určení polohy cíle v kartézském prostoru je i stavový vektor bistatického tracku měření.

Na základě informace o společném původu skupiny tracků  $\{\mathbf{y}_i\}_{i=1}^N$ , kde  $N$  zde označuje počet bistatických prostorů, ve kterých byl uvažovaný cíl identifikován, můžeme hledat kombinovanou polohu cíle  $\mathbf{P} = (\mathbf{C}, \mathbf{V})$

$$\hat{\mathbf{P}} = \arg \min_{\mathbf{P}} \sum_{i=1}^N (\mathbf{y}_i - \mathbf{h}(\mathbf{P}))^T \mathbf{R}_i^{-1} (\mathbf{y}_i - \mathbf{h}(\mathbf{P})). \quad (1.16)$$

Význam minimalizace (1.16) je následující. Pro každou kandidátní polohu  $\mathbf{P}$  bychom provedli její projekci do každého z  $N$  bistatických prostorů pomocí funkce  $\mathbf{h}(\mathbf{P})$ . Následně v každém prostoru  $i$  bychom vypočetli Mahalanobisovu vzdálenost mezi touto promítnutou polohou a polohou měřenou vzhledem ke kovarianční matici měřené polohy  $\mathbf{R}_i$ . Výsledný odhad polohy  $\hat{\mathbf{P}}$  získáme jako takovou polohu  $\mathbf{P}$ , pro kterou je součet těchto Mahalanobisových vzdáleností minimální. Poznamenejme, že výhodou tohoto přístupu je možnost přímo statisticky testovat, jestli nalezené vzájemné přiřazení bistatických tracků není chybné.

Každá z Mahalanobisových vzdáleností v sumě (1.16) má dva stupně volnosti, jejich součet (vzhledem k vzájemné nezávislosti) pak má  $2N - 6$  stupňů volnosti, přičemž tato suma (jako náhodná veličina, neboť její hodnota je dána náhodnými chybami měření) má stále  $\chi^2$  rozdělení s tímto počtem stupňů volnosti. Můžeme tedy porovnat minimální hodnotu minimalizované (účelové) funkce s kritickou hodnotou a posoudit, jestli je daná asociace na volené hladině pravděpodobnosti  $p$  přijatelná. Poznamenejme, že tento postup není konkrétním algoritmem, jako spíš matematickým popisem založeným na statistické podstatě věci vzhledem k nastoleným předpokladům.

Než přejdeme k rešerši literatury ohledně určování polohy cíle, naznačíme zde jednu obecnou metodu řešení rovnice (1.16) a to pomocí metody nejmenšího spádu [47]. Použití právě této metody je opodstatněno nelinearitou minimalizované funkce a také potenciálně velmi rychlou konvergencí této metody. Hlavním principem této metody je získání počátečního odhadu polohy cíle  $\mathbf{P}^0$  a pro  $k \geq 0$  iterativně počítáme

$$\mathbf{P}^{(k+1)} = \mathbf{P}^{(k)} + \alpha^{(k)} \mathbf{d}^{(k)}$$

dokud nedosáhneme konvergence na základě volených kritérií. Směr  $\mathbf{d}^{(k)}$  a velikost kroku  $\alpha^{(k)}$  volíme tak, aby pohyb směrem k minimu byl co nejrychlejší (ve smyslu počtu provedených kroků). Označme minimalizovanou funkci  $f(\mathbf{P})$ , tedy

$$f(\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^N (\mathbf{y}_i - \mathbf{h}(\mathbf{P}))^T \mathbf{R}_i^{-1} (\mathbf{y}_i - \mathbf{h}(\mathbf{P})) = \sum_{i=1}^N f_i(\mathbf{P}) \quad (1.17)$$

a její gradient vyjádříme pomocí diferenciálního operátoru  $\nabla$

$$\nabla f_i(\mathbf{P}) = -2\nabla \mathbf{h}_i(\mathbf{P})^T \mathbf{R}_i^T (\mathbf{y}_i - \mathbf{h}(\mathbf{P})) \quad (1.18)$$

přičemž  $\nabla \mathbf{h}_i(\mathbf{P})$  odpovídá Jakobiho matici. Pro funkci  $\mathbf{h}_i(\mathbf{P})$  přepočtu do bistatických souřadnic platí podle (1.1) a (1.2)

$$\mathbf{h}_i(\mathbf{P}) = \begin{pmatrix} r_i \\ v_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\mathbf{C} - \mathbf{T}\mathbf{x}_i\| + \|\mathbf{R}\mathbf{x}_i - \mathbf{C}\| - \|\mathbf{R}\mathbf{x}_i - \mathbf{T}\mathbf{x}_i\| \\ \left( \frac{\mathbf{C} - \mathbf{T}\mathbf{x}_i}{\|\mathbf{C} - \mathbf{T}\mathbf{x}_i\|} + \frac{\mathbf{R}\mathbf{x}_i - \mathbf{C}}{\|\mathbf{R}\mathbf{x}_i - \mathbf{C}\|} \right)^T V \end{pmatrix}.$$

Směr  $\mathbf{d}^{(k)}$  je směr spádu (tedy směr vedoucí k minimu) pokud je splněna podmínka

$$\mathbf{d}^{(k)} \nabla f(\mathbf{P}^{(k)}) < 0$$

pro  $\nabla f(\mathbf{P}^{(k)}) \neq \mathbf{o}$ . Jednou z možností určení směru  $\mathbf{d}^{(k)}$  je Newtonova metoda [47], pomocí které jej určíme jako

$$\mathbf{d}^{(k)} = -\mathbf{H}_f(\mathbf{P}) \nabla f(\mathbf{P}^{(k)})$$

kde  $\mathbf{H}_f(\mathbf{P})$  je Hessova matice druhých parciálních derivací. Koeficient  $\alpha^{(k)}$  hledáme tak, aby  $f(\mathbf{P}^{(k+1)}) < f(\mathbf{P}^{(k)})$  např. metodou půlení intervalu.

Kromě naznačeného zjevného řešení problému určení polohy přímo z jeho definice existuje v literatuře také velké množství zjednodušených postupů, které je vhodné použít, pokud jsou splněny jejich výchozí předpoklady. Na začátku rešerše této literatury poznamenejme, že problematika určení polohy cíle z elipsoidických bistatických měření a problematika určení polohy cíle z hyperboloidických bistatických měření (oproti součtu vzdáleností ke stanovištím se zde jedná o jejich rozdíly) jsou silně spjaté a tudíž i jejich literatura se velmi často prolíná.

V [48] je představena metoda lokalizace vysílače pomocí  $N + 1$  ( $N \geq 3$ ) přijímačů na základě množiny TDOA měření (hyperboloidických) za předpokladu, že jeden z přijímačů je centrální. Tento předpoklad je v souladu s běžným předpokladem z předchozí sekce zabývající se asociací bistatických tracků, tedy konfigurace  $N/1$ . Metoda samotná využívá převodu nelineárních rovnic TDOA (rozdíly euklidovských vzdáleností) na soustavu lineárních rovnic (pomocí neekvivalentních úprav) pro polohu cíle. Mimo samotné metody je v článku také poskytnuto odvození podmínek existence řešení a jejich počtu. Výhodou této metody je, že umožňuje zahrnout i charakteristiky chyb měření a tím nalézt řešení ve smyslu nejmenších čtverců.

Na článek [48] přímo navazuje [43], kde je metoda upravena pro případ elipsoidických TDOA měření pro konfiguraci  $1/N$ . Přijímač je s výhodou umístěn do středu lokální kartézské soustavy souřadnic, což vede ke zjednodušení výsledných rovnic. Kromě odvození výpočtu polohy cíle je v článku také naznačený jednoduchý analytický výpočet rychlosti cíle za předpokladu, že jsou k dispozici měření i bistatické rychlosti při známé (nebo odhadnuté) poloze cíle. Poznamenejme, že při silnější korelaci mezi měřenou bistatickou polohou a bistatickou rychlostí není odhadnutá poloha a rychlost optimální ve smyslu rovnice (1.16). Dalším pokračovatelem tohoto přístupu k určení polohy cíle je článek [49], který metodu rozšiřuje o nový způsob výpočtu neznámé konstanty v lineárních rovnicích určení polohy. Jeden z výpočtů této konstanty je vhodný za předpokladu nadbytečných měření, kdy její hodnota je určena z residuí, druhá metoda výpočtu bez přeúčtení byla

představena již v [43]. Mimo to je v [49] také představeno odvození kovarianční matice odhadu polohy cíle danou metodou.

Dalším zajímavým směrem určení polohy cíle je situace, kdy nemáme k dispozici dost měření na to, abychom určili plnou polohu (tedy aby počet geometricky nezávislých známých byl alespoň roven počtu geometricky nezávislých neznámých souřadnic) nicméně chceme, se zavedením určitých předpokladů, určit alespoň dílčí polohu. Této problematice se věnovali autoři článku [50], kteří tento problém označují jako inicializaci z nekompletních měření. Výhodou tohoto přístupu je, že vedení cíle může být zahájeno dříve (nemusíme čekat na dostatek vhodných měření) a tím je i větší využitelnost měření, která na takto zavedený cíl mohou být vázána. Nevýhodou je ovšem to, že není možné odhadnout (a kvantifikovat nejistotu tohoto odhadu) všechny požadované souřadnice.

Neurčité části stavového vektoru cíle jsou nahrazeny předpoklady ve formě pravděpodobnostního rozdělení tohoto parametru. Základní princip pak spočívá v rozdělení stavového vektoru na dvě části, kde první se sestává z odhadů z dostupných měření a druhá ze zmíněných apriorních předpokladů. Na práci [50] přímo navazuje článek [32] (zde je nutné poznamenat, že tato návaznost je věc přesvědčení autora této práce, předchozí článek [50] není v referencích článku [32] uveden, nicméně v článcích lze nalézt zcela identické obrázky a rovnice). V článku je původní myšlenka šířeji rozebrána pro případ vedení pouze z úhlových měření a je tedy pro případ TDOA vedení nepoužitelný a zde jej uvádíme pouze pro úplnost řešerše.

Neúplnou inicializaci polohy cíle, přesněji inicializaci pouze v nějaké horizontální rovině (bez určení chybějící souřadnice), rozebírá podrobněji článek [51]. Jako příklad je zde uvedeno zavedení cíle pouze ze dvou elipsoidických TDOA měření. Poloha cíle v takovém případě odpovídá křivce v prostoru, jejíž tvar je podobný poledníku elipsoidu, s tím že hladiny pravděpodobnosti rozdělení odhadu polohy cíle odpovídají obalu této křivky, který má nepravidelný tvar. Metoda řešení tohoto problému uvedená v [51] je založena na Gaussovské směsi, kdy popisovaný prostorový útvar je nahrazený jednotlivými trojrozměrnými rozděleními podél křivky tak, aby jejich hladinové plochy vyplňovali hladiny pravděpodobnosti skutečného rozdělení. Volba Gaussovské směsi je zde na místě, neboť dobře aproximuje většinu analyticky těžko popsatelných pravděpodobnostních rozdělení. Poznamenejme, že tento článek je výrazným rozšířením a obsahuje většinu poznatků obsažených v [52].



# Asociace bistatických tracků

## 2.1 Úvod

V této části prezentujeme výsledky vlastního výzkumu, publikovaného na odborné konferenci *IEEE Multisensor Fusion and Integration 2020* (indexována v databázi SCOPUS) a v recenzovaném časopise s impakt faktorem (3.576, Q1), který se týká asociace bistatických tracků, které jsou výsledky zpracování měření v jednotlivých bistatických prostorech.

Články spojuje použití Bayesovského modelování pro řešení samotné úlohy asociace bistatických tracků. V prvním z článků [1] je představen pravděpodobnostní model, jehož hlavní předností je použití specifického apriorního rozdělení pro asociční matici, která slouží pro přiřazení bistatických tracků ke kartézskému. Pro inferenci, získání posteriorního rozdělení, je pak použita metoda Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo, která nám umožňuje v průběhu inference provádět skoky mezi hypotézami o počtu přítomných cílů (reprezentovaných kartézskými tracky), což vede ke změně počtu určovaných parametrů. Pozdější článek, publikovaný v časopise [2] s impakt faktorem, na předchozí plně navazuje (je jeho výrazně rozšířenou verzí), poskytuje detailnější popis celého modelu a poskytuje detailnější analýzu dosažených výsledků, včetně analýzy konvergence sestaveného markovského řetězce na simulovaných datech.

V následujících sekcích poskytneme stručný teoretický úvod do dvou hlavních prvků použité metodologie, kterými jsou Indian Buffet Process a Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo, s odpovídající rešerší literatury. Dále již následují plné texty obou zmiňovaných článků, jejichž vložení do této práce umožňují licenční podmínky obou z vydavatelů.

## 2.2 Teoretické základy

### 2.2.1 Indian Buffet Process

Indian Buffet Process (IBP) je stochastický proces, který definuje rozdělení pravděpodobnosti nad třídami ekvivalence binárních matic s konečným, pevně daným počtem řádků a hypoteticky neomezeným počtem sloupců [53].

### 2.2.1.1 Konečný model skrytých vlastností

Před uvedením samotného modelu IBP je zapotřebí zavést konečný model skrytých vlastností, z něhož je IBP pak odvozen. Představme si model, v němž figuruje  $N$  objektů (reprezentujících pozorovanou realitu, např. data) a dále  $K$  skrytých vlastností těchto dat. Fakt, že objekt  $i$  vykazuje přítomnost vlastnosti  $k$  signalizujeme pomocí binární proměnné  $z_{ik}$ , přičemž pro všechny objekty a vlastnosti můžeme tuto informaci sumarizovat do binární matice  $\mathbf{Z}$ . Ke každé vlastnosti přiřazujeme hodnotu  $\pi_k$ , která reprezentuje pravděpodobnost, že libovolný objekt  $i$  bude mít právě vlastnost  $k$ . Seřadíme-li pravděpodobnosti pro jednotlivé vlastnosti do vektoru  $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_K)$ , můžeme pravděpodobnost celé matice  $\mathbf{Z}$  psát ve tvaru

$$p(\mathbf{Z}|\boldsymbol{\pi}) = \prod_{k=1}^K \prod_{i=1}^N p(z_{ik}|\pi_k) = \prod_{k=1}^K \pi_k^{m_k} (1 - \pi_k)^{N-m_k} \quad (2.1)$$

kde hodnota  $m_k$  označuje počet objektů, které mají přiřazenu skrytou vlastnost  $k$ .

Model v této podobě by byl závislý na volbě pravděpodobností jednotlivých vlastností, přičemž i tyto pravděpodobnosti by měly být věci statistické inference. Z tohoto důvodu je model doplněn o apriorní rozdělení pro tyto pravděpodobnosti tak, že jednotlivá  $\pi_k$  považujeme za vzájemně nezávislá (tedy vyšší pravděpodobnost výskytu vlastnosti  $k$  neříká nic o ostatních vlastnostech, což je jistě žádoucí). Jako apriorní rozdělení je voleno rozdělení Beta s parametry  $r, s$  a to z důvodu, že je vhodným rozdělením pro hodnoty, které reprezentují pravděpodobnosti nebo procenta (obecně kvantitativní nabývající hodnot z nějakého omezeného intervalu) a dále, protože se jedná o rozdělení konjugované vzhledem k Bernoulliho rozdělení jednotlivých binárních přiřazení [54]. Pravděpodobností rozdělení pro  $\pi_k$  má pak tvar

$$p(\pi_k) = \frac{\pi_k^{r-1} (1 - \pi_k)^{s-1}}{B(r, s)}$$

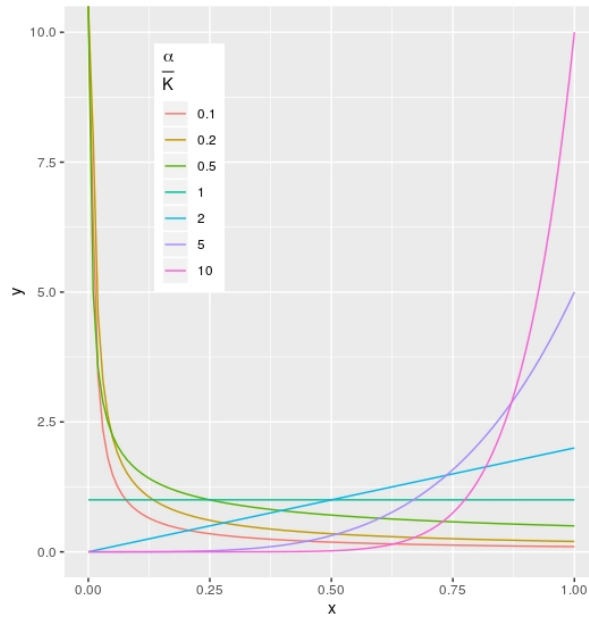
kde  $B(r, s)$  je Beta funkce

$$B(r, s) = \int_0^1 \pi_k^{r-1} (1 - \pi_k)^{s-1} d\pi_k = \frac{\Gamma(r) \Gamma(s)}{\Gamma(r + s)}.$$

Celý pravděpodobnostní model pak lze shrnout

$$\begin{aligned} \pi_k | r, s &\sim \text{Beta}(r, s) \\ z_{ik} | \pi_k &\sim \text{Bernoulli}(\pi_k). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Z důvodů, které budou dále zřejmé, provádíme volbu parametrů apriorního rozdělení  $r = \frac{\alpha}{K}$  a  $s = 1$ . Mimo jiné, volba  $s = 1$  zajišťuje, že pro poměry  $\frac{\alpha}{K} > 1$  je tvar hustoty pravděpodobnosti rostoucí funkce na intervalu  $(0, 1)$ , zatímco pro  $\frac{\alpha}{K} < 1$  má naopak tvar klesající funkce. Tvary hustot pravděpodobnosti pro různé hodnoty poměru  $\frac{\alpha}{K}$  jsou na Obrázku 2.1. Při znalosti apriorního rozdělení náhodné proměnné  $\pi_k$  se můžeme pokusit její vliv odstranit z výpočtu pravděpodobnosti matice  $\mathbf{Z}$  a to marginalizací. Díky konjugovanosti Beta a Bernoulliho rozdělení tak získáme tvar [55]



Obrázek 2.1: Ilustrace beta prioru vah jednotlivých skrytých vlastností pro různé volby koeficientu  $\frac{\alpha}{K}$ . Pro volbu  $\alpha = K$  přechází prior na rovnoměrné rozdělení.

$$P(\mathbf{Z}) = \prod_{k=1}^K \frac{\frac{\alpha}{K} \Gamma(m_k + \frac{\alpha}{K}) \Gamma(N - m_k + 1)}{\Gamma(N + 1 + \frac{\alpha}{K})} \quad (2.3)$$

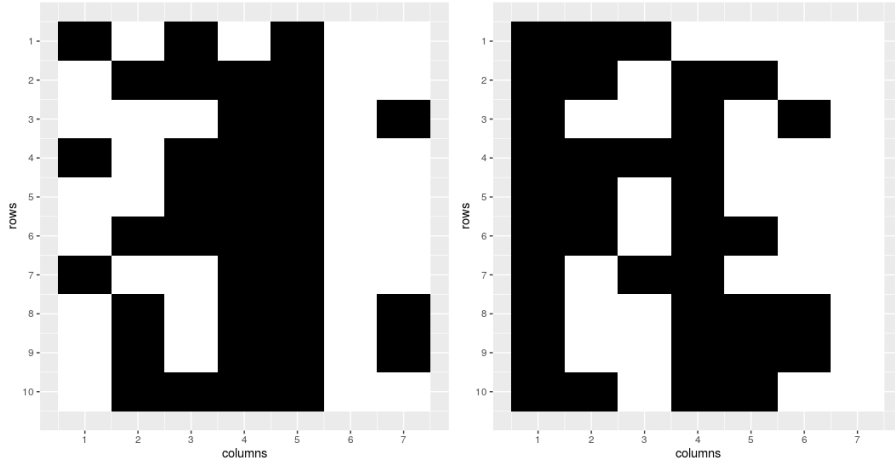
kde  $m_k$  značí počet objektů, pro které je  $z_{ij} = 1$ . Z odvozeného tvaru rozdělení binárních matic  $\mathbf{Z}$  v rovnici (2.3) je zjevné, že pořadí jednotlivých náhodných veličin je zaměnitelné, tedy, že na jejich pořadí nezáleží a že (vyjma parametrů  $N$ ,  $K$  a  $\alpha$ ) je pravděpodobnost konkrétní matice dána pouze obsazeností  $m_k$  jednotlivých vlastností.

### 2.2.1.2 Neomezený model skrytých vlastností

Konečný model skrytých vlastností předpokládá, že  $K$ , tedy počet vlastností, které v objektech chceme hledat, známe. Ve skutečnosti v celé řadě aplikací a také v případě asociace bistatických tracků je tento počet sám o sobě hledanou neznámou. Chceme mít tedy k dispozici model, který bude v tomto ohledu flexibilní.

Jedním z nástrojů jak sestavit bayesovský model s touto vlastností je předpokládat, že  $K$  může být potenciálně neohraňované [53]. Na druhou stranu, s rostoucím  $K$  budou matice  $\mathbf{Z}$  více a více řídké a pravděpodobnost každé z nich se bude limitně blížit nule. Tento problém lze vyřešit ustanovením tříd ekvivalence nad těmito binárními maticemi, které budou mít tu vlastnost, že seskupí tak velké množství matic, že stanovení pravděpodobnosti jednotlivých tříd bude možné. Jednou z možností je sestavení tříd ekvivalence zleva seřazených binárních matic *lof* (z anglického *left ordered form*) [56].

Transformaci na zleva seřazenou formu budeme značit pomocí operátoru *lof*( $\cdot$ ). Základní myšlenkou této transformace je interpretace jednotlivých sloupců matice jako binárních čísel s tím, že nejvýznamnější bit je přiřazen prvnímu řádku. Sloupce jsou následně seřazeny v pořadí podle dekadické hodnoty těchto binárních čísel. Třídou



Obrázek 2.2: Ilustrace převodu binární matice (vlevo) na její zleva seřazenou formu (vpravo) tak, že významnost bitů klesá od prvního řádku. Černá reprezentuje 1 v binární matici, zatímco bílá reprezentuje 0.

ekvivalence, do které matice  $\mathbf{Z}$  náleží označíme  $[\mathbf{Z}]$ . Poznamenejme, že uplatněním *lof* transformace se pravděpodobnost matice (2.3) nezmění. Příklad této transformace je vizualizován na Obrázku 2.2. Pro účely dalšího popisu pravděpodobnostního rozdělení nad binárními maticemi s potenciálně neohrazeným počtem sloupců zde zavedeme pojem historie. Historie vlastnosti  $k$  pro objekt  $i$  je binární vektor dimenze  $i - 1$  ve tvaru  $(z_{1k}, z_{2k}, \dots, z_{i-1k})$ . Celá historie vlastnosti  $k$  je pak binární vektor dimenze  $N$  ve tvaru  $(z_{1k}, z_{2k}, \dots, z_{Nk})$ . V rámci jedné binární matice  $\mathbf{Z}$  označíme počet vlastností, které mají totožnou historii  $h$  pomocí proměnné  $K_h$ . Pravděpodobnost celé třídy ekvivalence  $[\mathbf{Z}]$  je pak přirozeně dána pomocí

$$P([\mathbf{Z}]) = \sum_{\mathbf{Z} \in [\mathbf{Z}]} P(\mathbf{Z})$$

přičemž po dosazení z (2.3) a vyčíslení mohutnosti třídy ekvivalence získáme [53]

$$P([\mathbf{Z}]) = \frac{K!}{\prod_{h=0}^{2^N-1} K_h} \prod_{k=1}^K \frac{\frac{\alpha}{K} \Gamma(m_k + \frac{\alpha}{K}) \Gamma(N - m_k + 1)}{\Gamma(N + 1 + \frac{\alpha}{K})}. \quad (2.4)$$

I v případě pravděpodobnostního rozdělení pro třídy ekvivalence binárních matic (2.4) ovšem stále předpokládáme, že jsou matice konečné jak v počtu řádků tak v počtu sloupců. Potenciálně neomezený model v počtu vlastností objektů získáme limitním přechodem pro  $K \rightarrow \infty$  [55]

$$\lim_{K \rightarrow \infty} P([\mathbf{Z}]) = \frac{\alpha^{K_+} \exp(-\alpha H_N)}{\prod_{h=1}^{2^N-1} K_h!} \prod_{k=1}^{K_+} \frac{(N - m_k)! (m_k - 1)!}{N!}$$

kde  $K_+$  označuje počet sloupců, pro které platí  $m_k > 0$  a  $H_N = \sum_{j=1}^N \frac{1}{j}$  je harmonické číslo. Celkový počet vlastností a také jejich sdílení mezi jednotlivými objekty je tedy v odvozeném modelu propojen skrze parametr  $\alpha$ . V aplikacích ovšem často můžeme chtít



tyto počty regulovat nezávisle a bylo by tedy vhodné mít k dispozici model se dvěma parametry, kde každý by reguloval jinou vlastnost výsledných binárních matic.

Právě pro tento účel lze v literatuře [55] nalézt také dvou-parametrickou verzi IBP. Tato verze také vychází z konečného modelu (2.2) s tím, že parametry Beta rozdělení jsou voleny  $r = \frac{\alpha\beta}{K}$  a  $s = \beta$ , kde  $\beta$  je nový parametr přidáný k parametru  $\alpha$ . Pravděpodobnostní rozdělení konečné binární matice  $\mathbf{Z}$  marginalizované vzhledem k  $\pi_k$  pak má tvar

$$P(\mathbf{Z}) = \prod_{k=1}^K \frac{\Gamma(m_k + \frac{\alpha\beta}{K}) \Gamma(N - m_k + \beta) \Gamma(\frac{\alpha\beta}{K} + \beta)}{\Gamma(N + \frac{\alpha\beta}{K} + \beta) \Gamma(\frac{\alpha\beta}{K}) \Gamma(\beta)}.$$

Provedením limitního přechodu pro  $K \rightarrow \infty$  pro dvou-parametrický model získáme

$$P([\mathbf{Z}]) = \frac{(\alpha\beta)^{K_+} \exp(-\bar{K}_+)}{\prod_{h \geq 1} K_h!} \prod_{k=1}^{K_+} B(m_k, N - m_k + \beta) \quad (2.5)$$

kde  $\bar{K}_+ = \alpha \sum_{i=1}^N \frac{\beta}{\beta+i-1}$  je střední hodnota rozdělení  $K_+$  a tedy platí  $K_+ \sim \text{Poisson}(\bar{K}_+)$ . Rozdělení pravděpodobnosti nad *lof* třídami ekvivalence binárních matic (2.5) je použito v článku [1] v rovnici (3) a v článku [2] v rovnici (3).

Pro lepší ilustraci vzniku binárních matic s neomezeným počtem sloupců zde zmíníme ještě proces, který generuje patričné binární matice. Tento proces je založený na stravovací analogii a také opodstatňuje jméno celého aparátu (Indian Buffet Process) [55]. Jednotlivé objekty jsou zde nahrazeny zákazníky indického bufetu a vlastnosti jsou nahrazeny jídly, které jsou v bufetu nabízeny ve zdánlivě nekonečné řadě. První zákazník bistra začne začátku řady jídel, z nichž si nabídne od Poisson ( $\alpha$ ) prvních jídel. Následný zákazník, s pořadovým číslem  $i$ , si nabídne od každého z jídel, které bylo ochutnáno některým z dřívějších zákazníků, s pravděpodobností  $\frac{m_k}{\beta+i-1}$  (připomeňme, že  $m_k$  označuje počet zákazníků, kteří již jídlo  $k$  dříve ochutnali). Mimo to si také nabere od každého z Poisson ( $\frac{\alpha\beta}{\beta+i-1}$ ) dalších jídel, která doposud nikdo neochutnal. Poznamenejme, že tímto postupem generujeme matice, které nejsou v *lof* formě.

## 2.2.2 Monte Carlo Markovské Řetězce

### 2.2.2.1 Markovské Řetězce

V této části poskytujeme teoretické základy teorie markovských řetězců na obecných stavových prostorech. Jednotlivé pojmy jsou zavedeny pomocí definic, které na sebe postupně navazují tak, abychom mohli na konci této sekce definovat, za jakých podmínek konverguje markovský řetězec (vzhledem k normě totální variace) k jeho stacionární distribuci a to nezávisle na počátečním rozdělení stavů. Právě tato konvergence je nejdůležitějším výsledkem pro další sekci zabývající se Monte Carlo markovskými řetězci. Většina definic je převzatá z monografie [57] a také ze souhrnného článku [58].

V definicích značí  $\mathcal{X}$  množinu stavů markovského řetězce a systém jejích podmnožin  $\mathcal{B}(\mathcal{X})$  takový, že  $\mathcal{B}(\mathcal{X})$  je  $\sigma$ -algebra.

Definice: *Přechodové jádro* je funkce  $K$ , definovaná na množině  $\mathcal{X} \times \mathcal{B}(\mathcal{X})$  taková, že platí

- a)  $\forall x \in \mathcal{X}$ ,  $K(x, \cdot)$  je pravděpodobnostní míra,  
 b)  $\forall A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ ,  $K(\cdot, A)$  je měřitelné.

Definice: *Markovský řetězec* je posloupnost  $X_0, X_1, \dots, X_n$  náhodných proměnných, kterou zjednodušeně značíme  $(X_n)$ , kde pro libovolné  $t$ , podmíněné rozdělení  $X_t$  pro dané realizace  $x_0, x_1, \dots, x_{t-1}$  je stejné, jako podmíněné rozdělení  $X_t$  pouze pro danou realizaci  $x_{t-1}$ . Pomocí přechodového jádra markovského řetězce můžeme tuto podmínku psát ve tvaru

$$P(X_t \in A | x_0, x_1, \dots, x_{t-1}) = P(X_t \in A | x_{t-1}) = \int_A K(x_{t-1}, dx).$$

Podobně jako realizace náhodné veličiny je konkrétní bod z nosiče jejího pravděpodobnostního rozdělení, realizací markovského řetězce je řada těchto bodů  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Počet návštěv  $\eta_A$  markovského řetězce v množině  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$  je dán

$$\eta_A = \sum_{i=1}^n \mathbf{I}_A(X_i)$$

kde  $\mathbf{I}_A$  je charakteristická (indikátorová) funkce. Společně s přechodovým jádrem předchozí definice popisuje chování markovského řetězce, kdy pro každou předchozí realizaci  $x_{t-1}$  přechodové jádro určuje pravděpodobnostní rozdělení následujícího stavu  $X_t$ , přičemž realizace  $x_t$  je věcí náhodného výběru z tohoto rozdělení.

Abychom dosáhli kompletního popisu markovského řetězce, musíme kromě přechodového jádra navíc specifikovat počáteční rozdělení stavů  $P(X_0)$ . Naopak, pro určité typy markovských řetězců platí, že pokud se zajímáme o limitní vlastnosti markovských řetězců, na počátečním rozdělení nezáleží.

Definice: Posloupnost  $n$  přechodů v markovském řetězci takových, že  $X_0 = x$  a  $x_n \in A$  označíme  $K^n(x, A)$ . Pro  $n = 1$  platí  $K^1(x, A) = K(x, A)$ . Pro  $n > 1$  platí rekurzivní vztah

$$K^n(x, A) = \int_{\mathcal{X}} K^{n-1}(y, A) K(x, dy).$$

Definice: Je-li dána míra  $\phi$ , markovský řetězec  $(X_n)$  s přechodovým jádrem  $K(x, y)$  je  $\phi$ -*ireducibilní* pokud, pro každé  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$  s  $\phi(A) > 0$  existuje  $n$  takové, že  $K^n(x, A) > 0$  pro všechna  $x \in \mathcal{X}$ . Řetězec je silně  $\phi$ -ireducibilní, pokud  $n = 1$ .

Definice: *Množina C je malá*, pokud existuje  $m \in \mathbb{N}^*$  a míra  $\nu_m > 0$  taková, že

$$K^m(x, A) \geq \nu_m(A) \quad \forall x \in C, \forall A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}).$$

Definice: Markovský řetězec  $(X_n)$  který je  $\psi$ -ireducibilní, má *cyklus délky  $d$*  pokud existuje malá množina  $C$ , k ní  $M \in \mathbb{N}^*$  a pravděpodobnostní míra  $\nu_M$  tak, že  $d$  je největší společný dělitel čísel v množině

$$\{m \geq 1, \exists \delta_m > 0 \text{ tak že } C \text{ je malá množina } \nu_m \geq \delta_m \nu_M\}.$$

Definice: *Perioda markovského řetězce  $(X_n)$*  je definována jako délka  $d$  jeho cyklu.

Definice: Pro konečný stavový prostor  $\mathcal{X}$  se stav  $\omega \in \mathcal{X}$  nazývá *transientní*, pokud očekávaná hodnota počtu návštev tohoto stavu markovským řetězcem  $\mathbb{E}_\omega(\eta_\omega)$  je konečná. Stav se nazývá *rekurentní*, pokud  $\mathbb{E}_\omega(\eta_\omega) = \infty$ .

Definice: Markovský řetězec  $(X_n)$  má *atom*  $\alpha \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ , pokud existuje míra  $\nu > 0$  taková, že

$$K(x, A) = \nu(A) \quad \forall x \in \alpha, \forall A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}).$$

Pokud  $(X_n)$  je  $\psi$ -ireducibilní, potom je atom dosažitelný, pokud  $\psi(\alpha) > 0$ .

Definice: Markovský řetězec  $(X_n)$  je *rekurentní*, pokud

- a) existuje míra  $\psi$  taková, že je  $\psi$ -ireducibilní a
- b) pro každou množinu  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$  takovou, že  $\psi(A) > 0$  je  $\mathbb{E}_x(\eta_A) = \infty$  pro každé  $x \in A$ .

Markovský řetězec se nazývá *transientní*, pokud v podmínce b) platí, že  $\mathbb{E}_x(\eta_A)$  je konečné.

Definice: Pro množinu  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$  platí, že je *rekurentní podle Harrise*, pokud  $P_x(\eta_A = \infty) = 1$  pro všechna  $x \in A$ . Řetězec  $(X_n)$  je *rekurentní podle Harrise*, pokud existuje míra  $\psi$  taková, že  $(X_n)$  je  $\psi$ -ireducibilní a pro každou množinu  $A$  je  $\psi(A) > 0$  a  $A$  je *rekurentní podle Harrise*.

Definice:  $\sigma$ -konečná míra  $\pi$  je *invariantní* pro přechodové jádro  $K$ , pokud

$$\pi(B) = \int_{\mathcal{X}} K(x, B) \pi(dx) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}).$$

Pokud je  $\pi$  pravděpodobnostní míra, potom se rozdělení nazývá *stacionární*.

Definice: Pokud pro  $\psi$ -ireducibilní markovský řetězec existuje stacionární rozdělení, pak tento řetězec nazýváme *pozitivní*.

Definice: *Norma totální variace vzdálenosti* měř  $\mu_1, \mu_2$  na množině  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$  je

$$\|\mu_1 - \mu_2\|_{TV} = \sup_A |\mu_1(A) - \mu_2(A)|.$$

Definice: Pokud markovský řetězec  $(X_n)$  je rekurentní podle Harrise, pozitivní a aperiodický, potom pro libovolné počáteční rozložení stavů  $\mu$  a stacionární rozdělení  $\pi$  přechodového jádra řetězce platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \int_{\mathcal{X}} K^n(x, \cdot) \mu_{dx} - \pi(\cdot) \right\|_{TV} = 0. \quad (2.6)$$

Alternativně také můžeme psát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(x, A) = \pi(A).$$

Definice: Markovský řetězec  $(X_n)$  je *reversibilní* vzhledem k pravděpodobnostnímu rozdělení  $\pi$  na  $\mathcal{X}$ , pokud platí následující podmínka

$$\pi(dx) P(x, dy) = \pi(dy) P(y, dx) \quad x, y \in \mathcal{X}.$$

Podmínce rekurzivního markovského řetězce se také říká *podmínka vyváženosti*.

Definice: Markovský řetězec  $(X_n)$  s přechodovým jádrem  $K$  a stacionárním rozdělením  $\pi$  je *rovnoměrně ergodický*, pokud

$$\|K^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\| \leq M\rho^n \quad n = 1, 2, \dots$$

kde  $\rho \in (0, 1)$  a  $M \in (0, \infty)$ .

Definice: Markovský řetězec  $(X_n)$  s přechodovým jádrem  $K$  a stacionárním rozdělením  $\pi$  je *geometricky ergodický*, pokud

$$\|K^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\| \leq M(x)\rho^n \quad n = 1, 2, \dots$$

kde  $\rho \in (0, 1)$  a  $M(x) \in (0, \infty)$ .

### 2.2.2.2 Monte Carlo Markov Chain a Metropolis-Hastingsův algoritmus

Monte Carlo Markov Chain (MCMC) metody slouží pro generování vzorků rozdělených podle  $\pi(x)$  konstrukcí ergodického markovského řetězce  $(X_n)$ , jehož je  $\pi(x)$  stacionárním rozdělením. Jednou z nejrozšířenějších MCMC metod pro generování takového řetězce je Metropolis-Hastingsův (MH) algoritmus. Pro cílovou hustotu  $\pi(x)$  z níž chceme získat vzorky (jako stavy markovského řetězce) volíme podmíněnou hustotu  $q(y|x)$  která je taková, že její nosič pokrývá kompletně nosič  $\pi(x)$  a zároveň z ní umíme jednoduše generovat vzorky.

Algoritmus MH můžeme popsat následovně

1. náhodně vygenerujeme návrh  $Y_n$  dalšího vzorku (stavu řetězce) kde  $Y_n \sim q(y|x_n)$ ,
2. vygenerujeme náhodné číslo  $r$  z rovnoměrného rozdělení na intervalu  $(0, 1)$ , tedy  $r \sim \mathcal{U}(0, 1)$  které rozhodně o dalším stavu,
3. pravděpodobnost přijetí návrhu  $Y_n$  jako dalšího stavu řetězce je  $p(X_{n+1} = Y_n) = \rho(x_n, Y_n)$ , pravděpodobnost, že řetězec setrvá v současném stavu je  $p(X_{n+1} = x_n) = 1 - \rho(x_n, Y_n)$ ,

kde akceptační poměr se určí jako

$$\rho(x, y) = \min \left\{ \frac{\pi(y) q(x|y)}{\pi(x) q(y|x)}, 1 \right\}. \quad (2.7)$$

Obecně, až na degenerované případy, platí, že pro libovolnou návrhovou hustotu  $q(\cdot, \cdot)$  jejíž nosič obsahuje také nosič cílové hustoty  $\pi$  je  $\pi$  stacionární rozdělení markovského řetězce  $(X_n)$  získaného MH algoritmem. Tento fakt vyplývá z toho, že akceptační poměr (2.7) splňuje podmínku vyváženosti (2.2.2.1) pro libovolnou cílovou hustotu  $\pi$ . Dále, markovský řetězec získaný pomocí MH algoritmu je aperiodický a rekurentní podle Harrise a tudíž pro něj platí vlastnost (2.6) pro volenou cílovou hustotu  $\pi$ .

Jedním z omezení MH algoritmu je omezení stavového prostoru generovaného markovského řetězce tím, že všechny stavy musí mít stejnou dimenzi. V praxi se lze setkat s aplikacemi, kdy i tato samotná dimenze je jedním z parametrů, které chceme získat pomocí statistické inference. V původní práci [59] se můžeme setkat s příkladem odhadu počtu changepointů v časové řadě, přičemž jejich počet ovlivňuje také počet jejich poloh.

Podobnou úvahu můžeme rozšířit i na případ asociace bistatických tracků. Ve skutečnosti nevíme, kolik reálných cílů (pohybujících se v zájmovém vzdušném prostoru a které jsou zároveň systémem detekovatelné) máme v datech (bistatických tracích) k dispozici. V závislosti na jejich počtu (resp. na počtu cílů, které modelujeme) se mění i počet dalších určovaných parametrů, protože pro každý cíl chceme odhadnout 3 složky 3D polohy a 3 složky 3D rychlosti.

Teorie, která nám umožňuje řešit i tuto situaci, která byla zavedena v [59] a později výrazně rozšířena v [60], předpokládá existenci sdružené hustoty pravděpodobnosti

$$p(k, \boldsymbol{\theta}^{(k)}) = p(\boldsymbol{\theta}^{(k)}|k) p(k)$$

kde  $k$  označuje neznámou dimenzi a  $\boldsymbol{\theta}^{(k)}$  vektor určovaných parametrů vzhledem k této dimenzi. V souladu s dosavadním značením označíme  $x = (k, \boldsymbol{\theta}^{(k)})$  bod stavového prostoru a podle [59] pak lze sestavit příslušný markovský řetězec pomocí přechodového jádra  $K(\cdot, \cdot)$  splňujícího

$$\int_A \int_B K(x, dy) \pi(x) dx = \int_B \int_A K(y, dx) \pi(y) dy$$

pro cílovou stacionární hustotu pravděpodobnosti  $\pi(x)$  kde  $A \subset \mathcal{S}$  a  $B \subset \mathcal{S}$  přičemž  $\mathcal{S}$  opět označuje množinu možných stavů markovského řetězce.

Volená přechodová hustota  $q_m$  musí umožňovat pohyb řetězce v rámci totožné dimenze  $k$  (v literatuře se často užívá označení model, jako analogie k označení lineární model pro

$k = 2$  nebo kubický pro  $k = 4$ ) ale také mezi dimensemi  $k \rightarrow k'$  kde  $k \neq k'$ , přičemž tyto pohyby lze označit jako skoky (a proto zdůraznění, označení Reversible Jump). Zjednodušeně řečeno, Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo (RJMCMC) je teoretickým rozšířením MCMC pro přechody mezi stavy různých dimensí. Hlubší teoretický popis lze najít např. v [60] nebo [61].

## 2.3 Články zabývající se využitím Bayesovského modelování

### 2.3.1 Plný text článku [1]

Přenesení autorských práv k článku [1] při jeho publikaci na IEEE konferenci [62–64] nás zavazuje k zahrnutí následující poznámky k autorským právům

**Česky:** ©2021 IEEE. Přetištěno, s povolením, z P. Kulmon, “Bayesian Deghosting Algorithm for Multiple Target Tracking,” IEEE Int. Conf. Multisens. Fusion Integr. Intell. Syst., vol. 2020-Sept, no. 1, pp. 367–372, 2020.

**English:** ©2021 IEEE. Reprinted, with permission, from P. Kulmon, “Bayesian Deghosting Algorithm for Multiple Target Tracking,” IEEE Int. Conf. Multisens. Fusion Integr. Intell. Syst., vol. 2020-Sept, no. 1, pp. 367–372, 2020.

# Bayesian Deghosting Algorithm for Multiple Target Tracking

Pavel Kulmon<sup>1,2</sup>

**Abstract**—This paper deals with bistatic track association in classical Frequency Modulation (FM) based Multi Static Primary Surveillance Radar (MSPSR). We formulate deghosting procedure as Bayesian inference of association matrix between bistatic tracks and targets as well as target positions. To do that, we formulate prior probability distribution for the association matrix and develop custom Monte Carlo Markov Chain (MCMC) sampler, which is necessary to solve such a hybrid inference problem. Using simulated data, we compare the performance of the proposed algorithm with two others and show its superior performance in such a setup. At the end of the paper, we also outline further research of the algorithm.

## I. INTRODUCTION

Passive location systems are widely used in both civil and military applications. Due to their low hardware cost (no transmitters needed) they offer reliable solutions for covert operations and offer the advantage of fast deployment. Among the passive sensors, the Multi-Static Primary Surveillance radars (MSPSR) with bistatic geometry offer unique advantages. Foremost, no target transmission is necessary and due to the bistatic geometry, it is difficult to design such an aircraft surface, which would prevent the reflected signal to be spread in the receiver direction. The Frequency Modulation (FM) based MSPSR are used either separately or together with Single Frequency Network (SFN) systems which suffer from the transmitter uncertainty.

The usual MSPSR data processing architecture, which is also suggested e.g. in [1] is as follows. The primary data from signal processing and detection usually comprises of bistatic range and bistatic velocity. There are systems where the angle of arrival or angle of elevation is available, but it may not be everywhere. Tracking in bistatic coordinates (which is especially possible in FM based systems without the transmitter uncertainty) reduces the concentration of false measurements and also increases the precision of target bistatic coordinates [2]. After the validation phase, bistatic tracks from different receiver-transmitter pairs are associated and form groups of at least three bistatic tracks from distinct bistatic spaces. From each group of associated bistatic tracks a new Cartesian target is initiated [3]. In the process of the bistatic track association, the most important part is deghosting. Deghosting is a process of false association hypotheses elimination.

There are many solutions for the deghosting problem available in the literature [4]–[8]. Deghosting algorithm based on

evaluation of all possible bistatic track pairs combinations with modified clustering is available in [9]. This algorithm is primarily focused on SFN systems, however, it can be as effectively used for FM based system. A different approach is chosen in [6] which explores the usage of residual error as deghosting criterion, however only in the case of 2D localisation. In [4] another method based on multiple association algorithms and so-called supertargets formation was developed. This method can also be used for both SFN and FM based MSPSR systems. Multidimensional assignment problem is solved in [10] using Lagrangian relaxation technique with application to target localisation in network of direction finders.

All of the algorithms in the reference literature are based on evaluation of as many hypotheses as possible and use some kind of heuristic (such as Joint Probability Data Association (JPDA) without the computational complexity) to optimize the results. In this paper, we have decided to take the Bayesian approach which is already established in the radar literature mainly for the filtering purpose. We define the bistatic track association (deghosting) as Bayesian inference problem and develop Markov Chain Monte Carlo (MCMC) sampler to solve this discrete-continuous inference problem and find the most likely solution. To do that, we need to establish prior probability distribution for the modified association matrix which is introduced in the next section together with the proposed sampler. Then we compare the results of our new deghosting method with results obtained from two alternative deghosting algorithms. The comparison is done using simulated data with known truth. We illustrate the superior performance of our algorithm over the two others and also discuss the achieved results. In conclusion, we outline further work as well as unanswered questions.

## II. METHODOLOGY

### A. Assignment problem

The assignment problem in target tracking concerns with obtaining assignment matrix  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  where  $a_{ij} \in \{0, 1\}$  between two sets of entities  $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ . If  $a_{ij} = 1$  then we decide on assignment between entity  $i \in \mathcal{V}$  and  $j \in \mathcal{W}$ . Usually, we put some constraints on the form of the assignment matrix, such as uniqueness of the assignment. Such a constraint can be formulated using conditions

$$\begin{aligned} \sum_i a_{ij} &\leq 1 \\ \sum_j a_{ij} &\leq 1 \end{aligned} \quad (1)$$

<sup>1</sup>Pavel Kulmon is with Department of Applied Informatics, Czech Technical University in Prague, Czech Republic pavel.kulmon@fsv.cvut.cz

<sup>2</sup>Pavel Kulmon is with the Department of Research and Analysis, ERA a.s., Pardubice, Czech Republic p.kulmon@era.aero

which ensures that entities from one set are not shared between entities from the other set. However, there are situations where such a constraint is not appropriate, such as assignment between bistatic tracks and Cartesian targets in MSPSR target initiation/deghosting. If we are concerned with only one bistatic space, then in the simple case we can put the constraints (1) on the assignment matrix. By the simple case, we consider using a hard assignment decision which assigns bistatic detections to tracks and thus ensures probabilistic independence between two different Cartesian targets. For the rest of the paper, we will assume this condition to be fulfilled. However, one bistatic space is not enough to estimate target position and velocity in 3D Cartesian space. Therefore we usually need at least three bistatic spaces so that the target initiation/deghosting stage can be performed. Such a task usually consist of an evaluation of all possible combinations of bistatic tracks from different bistatic spaces of various cardinality (e.g. two or three tracks) and statistical testing of resulting Cartesian target positions. We suggest to keep the association matrix and establish new constraints, which would be concerned only with submatrix representing bistatic tracks from the same bistatic space. From the global point of view, the first condition in (1) no longer hold, on the contrary, we encourage the bistatic tracks from different bistatic spaces to share assignment to the same cartesian target (as we have already said, three tracks are necessary minimum, however, we want the target to be tracked in every bistatic space available). We can express the previous description of MSPSR assignment matrix  $\mathbf{A}'$  as

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^1 \\ \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}^{n_{BS}} \end{pmatrix} \quad (2)$$

where the upper index of submatrices denotes the index of particular bistatic space and  $n_{BS}$  is the overall number of bistatic spaces available. For any  $k$  we apply conditions (1) on the submatrix  $\mathbf{A}^k$ . From (2) is obvious that the more tracks share assignment to the same cartesian target (i.e. the more ones in the same columns while keeping conditions (1)) the fewer columns are necessary to express the assignment (i.e. the less Cartesian targets will be initiated). This is a desirable property because the problem with many of the deghosting algorithms is the number of possible track combinations which provide feasible results (i.e. an estimate of Cartesian position with small residual error). One of the ways how to incorporate this property into the solution of target initiation/deghosting process is the enumeration of all possible associations of all the cardinalities from  $n_{BS}$  to 3. Some of the associations can be dismissed based on the residual error, the other can be omitted because its tracks are already part of the feasible assignment of larger cardinality, which is preferred. However, in extreme cases the combinatorial complexity of this computation is unbearable. Another option is to

incorporate desired properties of the assignment matrix into its prior and evaluate not only probabilities of bistatic track assignments based on the residual error of Cartesian position but also the probability of assignment matrix with respect to this prior.

### B. Indian Buffet Process

Let us recall the properties of the assignment matrix. We want the initiated target (without loss of generality represented by columns) to be shared by multiple bistatic tracks from distinct bistatic spaces and, in the hard assignment setting, each bistatic track to be assigned to at most one initiated target. The number of targets is usually unknown or can be only roughly estimated. Therefore, another property of prior for assignment matrix is that it should be flexible enough with respect to the number of targets. This requirement is often used in nonparametric Bayesian modelling [11] as the structure of observed data may not be completely known. This is similar to the case of MSPSR target initiation/deghosting since we do not know which targets produced detections for which bistatic track. In the environment of nonparametric Bayesian statistic the prior distribution for binary matrices with a finite number of rows (the observed data) and a potentially infinite number of columns (the way the unknown number of columns is modelled) is defined using a simple generative process called *Indian Buffet Process* (IBP). The name of the generative process is derived from the metaphor used to describe the process. Description of the process together with its statistical properties can be found in [12]. The probability distribution of matrices, under which the order of targets is exchangeable requires us to define classes of equivalence between assignment matrices in such a way, that two matrices from the same class represent the same underlying structure in the data. The exchangeability is also desired property in MSPSR target initiation/deghosting because the order of targets is not important, as long as they are represented by the right set of bistatic tracks. The equivalence classes are defined using  $lof(\bullet)$  function [13] which represents columns of assignment matrix as binary numbers (assignment represents true value) with the first row being the most significant bit and then sorts them as integers. For any association matrix  $\mathbf{A}$  we denote its  $lof(\bullet)$  equivalence class as  $[\mathbf{A}]$ . With assignment matrices represented by equivalence class, we can define probability distribution for different classes. There are two versions of probability distributions for  $lof(\bullet)$  classes of binary matrices which differ in the number of parameters. The first version [11] depends only on parameter  $\alpha$ . This parameter controls sharing assignment between different bistatic tracks (in our application, with the restriction on bistatic space submatrices from (1)) and also the expected number of initiated targets. Since in the IBP for each row we sample from Poisson distribution to add new columns, in the limit case the number of columns is  $N\alpha$  where  $N$  is the row count of the association matrix (i.e. the number of



bistatic tracks over all of the bistatic spaces). The second probability distribution uses two parameters  $\alpha$  and  $\beta$ . In this representation,  $\alpha$  represents the average number of assignments for one bistatic track and  $\beta$  controls how the assignments to one particular target are shared between bistatic tracks (the smaller  $\beta$  the more the assignments are shared). For the rest of the paper, we will use the two parametric representation, since it allows better modelling of assignment matrices in MSPSR target initiation/deghosting. For any assignment matrix  $\mathbf{A}$  the probability of its *lof* ( $\bullet$ ) equivalence class is [12]

$$P([\mathbf{A}]) = \frac{(\alpha\beta)^{K_+}}{\prod_{h \leq 1} K_h!} \exp(-\bar{K}_+) \prod_{k=1}^{K_+} B(m_k, N - m_k + \beta). \quad (3)$$

where  $K_+$  is the number of assignment matrix columns with at least one 1 (i.e. targets with at least one piece of associated data),  $m_k$  is the number of associated data for column  $k$ ,  $K_h$  is the number of identical columns and  $\bar{K}_+$  is the expected number of columns for binary matrix distribution with parameters  $\alpha$  and  $\beta$  and is equal to

$$\bar{K}_+ = \alpha \sum_{i=1}^N \frac{\beta}{\beta - i + 1}. \quad (4)$$

In Fig. 1 the different IBP parameter values are visualized for different number of targets in four bistatic spaces with ideal assignment matrix. We can see, as the number of targets grows, the relative number of shared bistatic tracks decreases and hence the  $\beta$  parameters value increases.

### C. Sampler

In this section, we describe the proposed sampler used for parameter estimation in order to maximize the posterior probability with respect to observed data, model and prior distributions. Similarly, as in [14] we divide moves in the variable space into subsets such that moves in these subsets can be proposed and evaluated independently.

1) *Sampling new targets*: The first category of moves is the proposal of a completely new target. We can either pick states in bistatic spaces based on some kind of selection criteria (e.g. states from multiple targets where each of the targets is undetermined) or we select the states at random from the whole set. Holding on the assumptions from section II-A, we want hard assignments which imply no more than one track from one bistatic space assigned to any target. This influences the selection of the states as well because we want to select them from distinct bistatic spaces. This also puts the upper limit on the number of states which can be used to propose new targets and it is equal to the number of bistatic spaces. However, we need to take into account the possibility of a target which is observed in only three of those bistatic spaces. Using a larger number of states to initiate new target would make it hard for the sampler to establish such a target. Therefore we set the number of sates the move uses

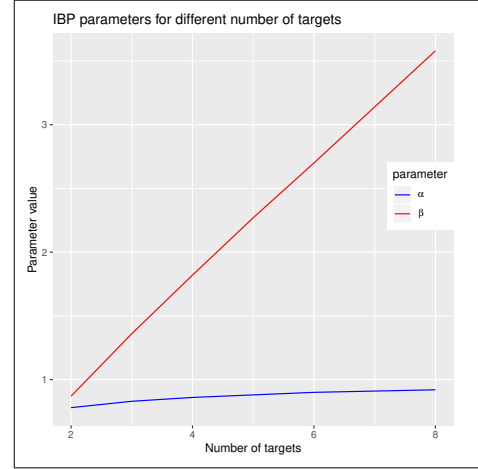


Fig. 1. Indian Buffet Process (IBP) prior parameter values for which the ideal assignment matrix has the highest probability.

to establish a new target to three. Another advantage of this approach is that we can use various closed-form solutions to obtain target position and velocity estimate [2]. All of the sampler moves are based on Metropolis-Hastings (MH) proposals [15] which is the general algorithm for Markov Chain Monte Carlo methods. There are also more advanced and faster samplers with potentially higher acceptance ratios, however, in the case of MH it is for us easier to compute the acceptance ratio and the performance of the algorithm is sufficient. Due to the numerical concerns, especially in the case of larger amounts of data, we decided to calculate first the logarithm of acceptance ratio and then take the exponential to propose the move.

We assume that the data in the bistatic spaces have a multivariate normal distribution with known mean vector  $\mathbf{z}$  and covariance matrix  $\mathbf{Z}$ . Here, for the sake of simplicity, we have dropped any indices (identification of measurement inside of bistatic space or the bistatic space itself). Probability logarithm of some target estimate  $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{v}})$  (again without identification), composed of target position  $\hat{\mathbf{p}}$  and velocity  $\hat{\mathbf{v}}$ , with respect to the data is given by

$$\log(p(\hat{\mathbf{x}}|\mathbf{z}, \mathbf{Z})) = -\frac{1}{2} \left( \frac{d}{\log(2\pi)} + \log(|\mathbf{Z}|) + (h(\hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{z})^T \mathbf{Z}^{-1} (h(\hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{z}) \right) \quad (5)$$

where  $h(\bullet)$  is projection of the cartesian position and velocity into bistatic coordinates. While sampling new target position, we create new assignment matrix  $\mathbf{A}'$  which has, at the time of sampling,  $K + 1$  columns (the new column corresponds to the new target and its assignment of data). Therefore, we have a new binary matrix with different probability under the prior distribution for assignment matrices. We need to take this information into account and thus the logarithm of MH acceptance ratio is as follows

$$\rho(\eta', \eta) = \frac{p(\mathcal{Z}|\mathbf{A}', \theta') p(\mathbf{A}'|\alpha, \beta)}{p(\mathcal{Z}|\mathbf{A}, \theta) p(\mathbf{A}|\alpha, \beta)} \quad (6)$$

where  $\eta = \{\mathbf{A}, \theta\}$  and  $\theta = \{\hat{\mathbf{x}}\}_{j=1}^{K_+}$  is the set of target estimates and similarly for the primed elements. The probability functions are given by (3) and

$$p(\mathcal{Z}|\mathbf{A}, \theta) = \prod_{a_{ij}=1} p(\hat{\mathbf{x}}_j|\mathbf{z}_i, \mathbf{Z}_i) \quad (7)$$

where the indices refer to the position in the association matrix, instead of e.g. bistatic space. It is obvious that in the situations with many established target estimates and data, we do not have to evaluate probabilities over the whole association matrix, but we only have to take into account the entries whose value has changed. This fact gives us a lot of space for computation optimizations. If the proposal of the new target estimate is accepted, the new association matrix  $\mathbf{A}'$  and a new set of target estimates  $\theta'$  is established. The association matrix has one more column than the previous one. The same holds of the new set of target estimates. Note that the acceptance ratio for proposing new targets can be high especially with respect to the potential number of false ideal intersections. This would lead to the constant creation of new targets which, due to the prior probability distribution on the association matrix, would be then eventually merged with previous estimates of the same target from a different set of data. To prevent this, we decided to put small penalisation  $\lambda_j$  on the data probability of new targets. The term (7) then becomes

$$p(\mathcal{Z}|\mathbf{A}, \theta) = \prod_{a_{ij}=1} p(\hat{\mathbf{x}}_j|\mathbf{z}_i, \mathbf{Z}_i) \exp(\lambda_j) \quad (8)$$

where

$$\lambda_j = \begin{cases} \lambda_j & \sum_{i=1}^N a_{ij} < 4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (9)$$

The penalisation is chosen in such a way, that the accepted proposals do not cause fragmentation of larger internally consistent group into smaller subsets of measurements. Our experiments show the importance of such a penalisation.

2) *Sampling common targets*: The second category of sampler moves is the proposal of assignment change from one target to another. The purpose of such a move is to concentrate assignment of track states to common target estimate in such a way, that the probability of this assignment is higher than before the change of assignment. This approach has two advantages. Foremost, we can propose changes for each entry of the assignment matrix independently from the others. I.e., in  $NK_+$  steps we can re-evaluate all the assignments and potentially merge separated groups into one larger target (larger in terms of assigned data). The second advantage is, that the selected IBP prior allows us to express the probability of the assignment change based only on the information about

other assignments to the same target. For any assignment matrix entry  $a_{ij}$  we propose its complement

$$\bar{a}_{ij} = \begin{cases} 1 & a_{ij} = 0 \\ 0 & a_{ij} = 1 \end{cases} \quad (10)$$

so we either establish or cancel the assignment. In the case of assignment establishment, with respect to constraints (1), we just set all the rest of the assignment matrix row to zero. However, if we cancel the assignment, the track state is no longer assigned to any target. That might cause some problem for the rest of the sampler. Therefore we select such a different target, which has minimal Mahalanobis distance. This approach showed itself as an effective one, but we might propose selecting alternative target at random, or using any other strategy.

Probability of assignment matrix entry  $a_{ij} = 1$  is [16]

$$p(a_{ij} = 1|\mathbf{A}, \alpha, \beta) = \frac{m^{-ij}}{N - m^{-ij} - \beta} \quad (11)$$

where  $m^{-ij}$  is the data count associated with the target  $j$  other (except) than track state  $i$ . We can see, that this probability does not depend on the data or estimated parameters and therefore we can write

$$p(a_{ij}|\mathbf{A}, \mathcal{Z}, \theta) = p(a_{ij}|\mathbf{A}) p(\mathbf{z}_i|\mathbf{Z}_i, \mathbf{a}_i, \theta) \quad (12)$$

where  $\mathbf{a}_i$  represents  $i$ -th row of the association matrix  $\mathbf{A}$ . The MH proposal acceptance ratio then can be expressed as

$$\rho(a_{ij}, \bar{a}_{i,j}) = \frac{p(a_{ij} = \bar{a}|\mathbf{A}) p(\mathbf{z}_i|\mathbf{Z}_i, \mathbf{a}_i, \theta)}{p(a_{ij} a|\mathbf{A}) p(\mathbf{z}_i|\mathbf{Z}_i, \mathbf{a}_i, \theta)} \quad (13)$$

where  $a$  is the current value of the assignment matrix entry. Part of the sampling procedures for common targets can be also such a move which would merge two targets into one. However, in our experiments, such a move was rarely accepted and added to computational complexity unnecessary burden. Testing assignments one matrix entry at the time has the same capability if the acceptance ratio is sufficiently high. Similarly, splitting one large target (with many inconsistent data associated to it), can be achieved using completely random proposal of new the target and then by the change of assignment for the rest of the tracks while sampling common targets. Sampling common targets is also the move where the target proposal can be cancelled if we reassign all of its data to different, more suitable, targets. Therefore we consider these two categories of moves sufficient and strongly capable to explore the variable space during the course of MCMC sampling.

3) *Sampling the clutter*: During the course of target proposals and bistatic state reassignments, we can find ourselves in such a situation, when the sampler accepted move leading to an internally inconsistent group of states. Such a group has a large residual error (common estimate from bistatic positions) but it is hardly divisible by already mentioned

moves. Therefore we need such a move for the sampler, which would exclude one of the states which is not consistent with the rest. In this move, we propose a new assignment matrix whose  $K + 1$ -th column has only one 1 at the index of the measurement we propose to exclude from its target. By following (8) we apply penalisation for this virtual target (virtual targets do not have enough measurements to establish its state vector) which allows us to differentiate between a valid group of states with larger residual error and completely inconsistent group. The MH acceptance ratio is then the same as in (6). The penalisation value for a single observation target needs to be designed with respect to precision of bistatic coordinates in order to establish high true proposal acceptance ratio.

### III. EVALUATION

In this section, we evaluate the performance of our new proposed algorithm. The evaluation is done using simulated data since they allow us to compare results with the actual truth, which is usually not available when dealing with data from the real system. For data simulation we set up an MSPSR system with two receivers and two transmitters, i.e. the system comprises of four bistatic spaces. We simulate targets in local 3D cartesian space (position and velocity) uniformly in a block-shaped space. The number of simulated targets ranges from 2 to 8. To make the situation closer to reality, all of the simulated targets are detected and tracked in all of the bistatic spaces, however, there are also bistatic tracks which do not represent any of the simulated targets. The number of additional false bistatic tracks is always equal to the number of simulated targets. Bistatic spaces in which those bistatic tracks are simulated is chosen randomly and uniformly. Bistatic positions of tracks are provided to the association with diagonal covariance matrix, with  $\sigma_r^2 = 1000m$  and  $\sigma_v^2 = 4m/s$ . Using repeated Monte Carlo simulation of data for a different simulated number of targets (and additional false bistatic tracks) we evaluate the number of true-positive (TP) associations, which is the number of associations created by the algorithm which correspond with the actual simulated targets. We also evaluate the number of false-positive (FP) associations, which is the number of associations created by the algorithm, which do not correspond with any of the simulated targets. Last important quantity is the number of false-negative (FN) associations, which is the number of simulated targets which the algorithm did not resolve. These three quantities are evaluated in each Monte Carlo run.

#### A. Reference Deghosting Algorithms

To make the evaluation more beneficial, we decided to employ two other deghosting algorithms to the same simulated data. First of the algorithms is a modification of the deghosting algorithm for Single Frequency Network (SFN) [9]. This algorithm can be easily used for FM based MSPSR system with the advantage of the absence of transmitter uncertainty. Due to the number of bistatic spaces available (the simulated system comprises of four bistatic spaces), we

TABLE I  
RESULTS FOR NEW METHOD

n. of targets / case	TP assoc.	FP assoc.	FN assoc.
2	2.0	0.0	0.0
3	3.0	0.0	0.0
4	4.0	0.4	0.0
5	5.0	0.0	0.0
6	6.0	1.0	0.0
7	7.0	1.2	0.0
8	7.4	2.1	0.6

initiate the Cartesian estimates from pairs of bistatic tracks in chosen  $z$  coordinate. The clustering procedure is then performed by the likelihood ratio test suggested in [9] with spatial false return density  $\rho_F = 1e^{-11}$  and  $p_D = 0.9$  for all of the bistatic spaces. In [5] it is suggested to take into account the error caused by replacing the unknown height with a constant. The correction is done in the covariance matrix through the linearization of the model, which may not work well with different geometries. This is particular may be responsible for a quite high number of false-positive associations (since they could not be merged with their actual neighbours). We refer to this method as the ellipse intersection method (EI method).

The second compared method is based loosely on a similar principle. However, instead of initiating from two measurements and coping with errors caused by unknown height, we initiate targets from all combinations of three measurements. If there is a target with more than three measurements, estimates from subsets of three measurements should be relatively close and we can test that using estimated Cartesian covariance matrices and Mahalanobis distance between the estimates. On the other hand, if there are two triplets from two different targets, they should be far apart from each other. By fusing the close groups and simple fusion rules (the larger group the better, the smaller Mahalanobis distance the better) we can create a feasible association algorithm. We refer to this algorithm as the three-dimensional method (3D method).

#### B. Results

As we have already mentioned, the performance comparison was done using simulated data. We have evaluated the number of true-positive (TP) associations, the number of false-negative (FN) associations and the number of false-positive (FP) associations. The TP and FN quantities are complementary and together they sum up to the number of simulated targets. The achieved values for all of the three metrics for the new proposed algorithm are available in Table I. The displayed values are the average from 50 Monte Carlo simulations of different target positions and bistatic spaces of false measurements, both of which were chosen at random with uniform distribution. As we can see, up to 5 targets can be resolved clearly, without almost any FP associations and no unresolved target. The number of unresolved targets stays low even for a higher number of simulated targets, however, due to the increased concentration of false bistatic tracks,

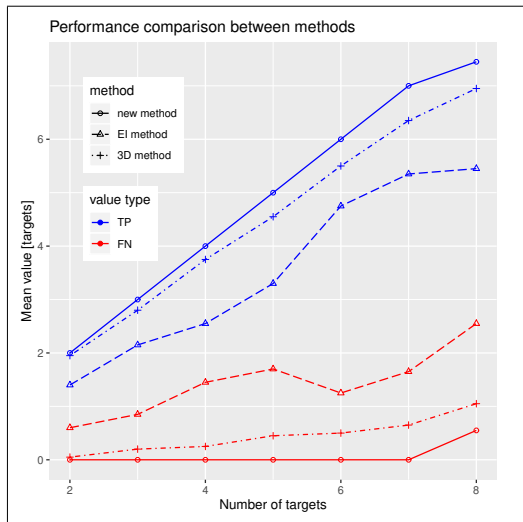


Fig. 2. Performance comparison between the tree methods. Two quantities, the number of true-positive (TP) resolved targets (blue) and false-negative (FN) unresolved targets (red) are visualised. Solid line together with circular points is used for the new algorithm, dashed line with triangular points for the ellipse intersection (EI) method and dash-dotted line with cross points for the three-dimensional (3D) method.

the number of FP associations (non-existent targets) grows. This is mainly due to the fact, that in our MSPSR geometry, there are plenty of false intersections from three ellipsoids. Many of them could be dismissed using kinematic limits and limits for the area of the target position. However, such restrictions were not applied in any of the methods used. Since the intersections are ideal from the geometric point of view, for example, an increase in bistatic position would not help.

To compare the performance of our new algorithm, we have run the same simulations for the other two deghosting methods, i.e. ellipsoid intersection (EI) method and three-dimensional (3D) method, with the same setup and number of Monte Carlo simulations. Comparison of all of the three methods is in Fig. 2. Methods are differentiated using line type (new method = solid, EI method = dashed, 3D method = dash-dotted) and TP and FN quantities are differentiated using line colour (TP = blue, FN = red). As we can see, in all of the cases the new method outperforms the other algorithms, i.e. the number of successfully resolved targets is always the highest for new method while the number of unresolved targets is always the lowest. These results are valid for the simulated geometry and parameters, however, the simulation illustrates the ability of the method to perform correct association in given conditions.

#### IV. CONCLUSIONS

In this paper, we have developed new deghosting algorithm based on a Bayesian approach. To do that, we have formulated prior probability distribution for the association matrix and developed custom MCMC sampler to solve the discrete-continuous inference problem. Although the description of

the sampler is detailed and sufficient, no analysis of its convergence and mixing properties were provided. This is our main goal for the future. Fast convergence together with low operation cost of single steps is crucial for the algorithm to outperform alternative ones not only concerning obtained results, but also with respect to computational complexity. On the other hand, our algorithm profits largely from parallelization when running multiple chains at once. The next important step for further research is to test the performance of our algorithm using data from the real radar system. However, so far the results suggest that our algorithm is a good step towards fully Bayesian radar data processing.

#### REFERENCES

- [1] A. A. Konovalov, "Target tracking algorithm for passive coherent location," *IET Radar, Sonar & Navigation*, vol. 10, no. 7, pp. 1228–1233, 2016. [Online]. Available: <http://digital-library.theiet.org/content/journals/10.1049/iet-rsn.2015.0482>
- [2] M. Malanowski, "Algorithm for target tracking using passive radar," *International Journal of Electronics and Telecommunications*, vol. 58, no. 4, pp. 345–350, 2012.
- [3] M. Malanowski and K. Kulpa, "Two methods for target localization in multistatic passive radar," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 48, no. 1, pp. 572–580, 2012.
- [4] S. Choi, D. F. Crouse, P. Willett, and S. Zhou, "Approaches to cartesian data association passive radar tracking in a DAB/DVB network," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 50, no. 1, pp. 649–663, 2014.
- [5] M. Daun and C. R. Berger, "Track initialization in a multistatic DAB/DVB-T network," *Proceedings of the 11th International Conference on Information Fusion, FUSION 2008*, pp. 722–729, 2008.
- [6] M. A. Hadi, R. Umar, M. Shoaib, M. Bilal, and K. Jamil, "Effectiveness of Deghosting Process for Multi-target Localization in Multistatic Passive Radar," *2018 15th European Radar Conference, EuRAD 2018*, pp. 142–145, 2018.
- [7] T. J. Wei and Y. H. Lun, "An empirical exploration of a simple deghosting method for multistatic radars," *IEEE National Radar Conference - Proceedings*, vol. 2015-June, no. June, pp. 1440–1445, 2015.
- [8] A. El Gonnouni and F. Lehmann, "Deghosting method for multiple target tracking in a single frequency network," *2014 International Radar Conference, Radar 2014*, pp. 1–6, 2014.
- [9] M. Daun and W. Koch, "Multistatic target tracking for non-cooperative illumination by DAB/DVB-T," *2008 IEEE Radar Conference, RADAR 2008*, no. 1, 2008.
- [10] S. Deb, M. Yeddapanudi, K. Pattipai, and Y. Bar-Shalom, "A generalized s-d assignment algorithm for multisensor-multitarget state estimation," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 33, no. 2 PART 1, pp. 523–538, 1997.
- [11] T. L. Griffiths and Z. Ghahramani, "Infinite Latent Feature Models and the Indian Buffet Process," *Advances in Neural Information Processing Systems 18*, pp. 475–482, 2005. [Online]. Available: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.60.3951>
- [12] Z. Ghahramani, T. L. Griffiths, and P. Sollich, "Bayesian Nonparametric Latent Feature Models," *Bayesian Statistics*, vol. 8, pp. 1–25, 2007. [Online]. Available: <http://ai.stanford.edu/~tadayuki/papers/miller-phd-dissertation11.pdf>
- [13] T. L. Griffiths and Z. Ghahramani, "The Indian Buffet Process: An Introduction and Review," *Journal of Machine Learning Research*, vol. 12, pp. 1185–1224, 2011.
- [14] E. B. Fox, M. C. Hughes, E. B. Sudderth, and M. I. Jordan, "Joint modeling of multiple time series via the beta process with application to motion capture segmentation," *Annals of Applied Statistics*, vol. 8, no. 3, pp. 1281–1313, 2014.
- [15] C. P. Robert, "The Metropolis-Hastings algorithm," *arXiv*, no. Mcmc, pp. 1–15, 2015. [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/1504.01896>
- [16] S. J. Gershman, P. I. Frazier, and D. M. Blei, "Distance Dependent Infinite Latent Feature Models," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 37, no. 2, pp. 334–345, 2015.

### **2.3.2 Plný text článku [2]**

Článek [2] byl publikován jako Open Access [65] v časopise Sensors který umožňuje jeho volnou reprodukci.

Article

# Reversible Jump MCMC for Deghosting in MSPSR Systems <sup>†</sup>

Pavel Kulmon 

Department of Applied Informatics, Czech Technical University in Prague, 166 29 Prague, Czech Republic; pavel.kulmon@fsv.cvut.cz

<sup>†</sup> This paper is an extended version of my conference paper: Kulmon, P. Bayesian Deghosting Algorithm for Multiple Target Tracking. In Proceedings of the 2020 IEEE International Conference on Multisensor Fusion and Integration for Intelligent Systems (MFI), Karlsruhe, Germany, 14–16 September 2020.

**Abstract:** This paper deals with bistatic track association and deghosting in the classical frequency modulation (FM)-based multi-static primary surveillance radar (MSPSR). The main contribution of this paper is a novel algorithm for bistatic track association and deghosting. The proposed algorithm is based on a hierarchical model which uses the Indian buffet process (IBP) as the prior probability distribution for the association matrix. The inference of the association matrix is then performed using the classical reversible jump Markov chain Monte Carlo (RJMCMC) algorithm with the usage of a custom set of the moves proposed by the sampler. A detailed description of the moves together with the underlying theory and the whole model is provided. Using the simulated data, the algorithm is compared with the two alternative ones and the results show the significantly better performance of the proposed algorithm in such a simulated setup. The simulated data are also used for the analysis of the properties of Markov chains produced by the sampler, such as the convergence or the posterior distribution. At the end of the paper, further research on the proposed method is outlined.

**Keywords:** FM; radar; MSPSR; Bayesian inference; deghosting; MCMC; reversible jump



**Citation:** Kulmon P. Reversible Jump MCMC for Deghosting in MSPSR Systems. *Sensors* **2021**, *21*, 4815. <https://doi.org/10.3390/s21144815>

Academic Editor: Andrzej Stateczny

Received: 6 May 2021

Accepted: 9 July 2021

Published: 14 July 2021

**Publisher's Note:** MDPI stays neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.



**Copyright:** © 2021 by the authors. Licensee MDPI, Basel, Switzerland. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

## 1. Introduction

Passive location systems are widely used in both civil and military applications. Due to their low hardware cost (no transmitters needed), they offer reliable solutions for covert operations and offer the advantage of fast deployment. Among the passive sensors, the multi-static primary surveillance radars (MSPSRs) with bistatic geometry offer unique advantages. Foremost, no target transmission is necessary and due to the bistatic geometry, it is difficult to design such an aircraft surface, which would prevent the reflected signal being spread in the receiver direction. The frequency modulation (FM)-based MSPSRs are used either separately or together with single-frequency network (SFN) systems which suffer from transmitter uncertainty.

The usual MSPSR data processing architecture, which is also suggested, e.g., in [1] is as follows. After signal reception and processing, the detection process is performed. This process produces primary data which is usually comprised of bistatic range and bistatic velocity. There are systems where the angle of arrival or angle of elevation is also available, but this requires a special kind of receiving antenna and therefore the angles are not available in every MSPSR system. Tracking in bistatic coordinates (which is especially possible in FM-based systems where the transmitter uncertainty is eliminated) reduces the concentration of false measurements and also increases the precision of target bistatic coordinates [2]. After the validation phase, bistatic tracks from different receiver-transmitter pairs are associated and form groups of at least three bistatic tracks from distinct bistatic spaces. From each group of associated bistatic tracks, a new Cartesian target is initiated [3]. The bistatic track association process usually includes the deghosting part, which is a method of false association hypothesis elimination. The deghosting can be either explicitly performed after forming all of the available hypotheses, or implicitly being part of the association process.

There are many solutions for the deghosting problem available in the literature [4–8]. A deghosting algorithm based on the evaluation of all possible bistatic track pair combinations with modified clustering is available in [9]. This algorithm is primarily focused on SFN systems; however, it can be as effectively used for an FM-based system. A different approach is chosen in [6] which explores the usage of residual error as a deghosting criterion, however, only in the case of 2D localisation. In [4], another method based on multiple association algorithms and so-called super targets formation was developed. This method can also be used for both SFN- and FM-based MSPSR systems. The multidimensional assignment problem is solved in [10] using the Lagrangian relaxation technique with an application to target localisation in the network of direction finders.

The majority of the deghosting algorithms available in the literature are based on the evaluation of as many association hypotheses as possible. These hypotheses are then reduced using some testing criterion or some association heuristic, such as the linearised joint probabilistic data association (JPDA) to optimise the results. However, there are also deghosting approaches which use the Bayesian approach. The Markov chain Monte Carlo data association (MCMCDA) [11] relies on the specifically designed path in the association space and defines the prior probability distribution on this association. This prior probability distribution can be influenced using design parameters such as the probability of detection or false target concentration, which are hard to estimate in real scenarios. Other Bayesian approaches such as probability hypothesis density (PHD) [12] or probabilistic multiple hypothesis track (PMHT) [13] use likelihood functions but do not formulate any prior or they use it only in the context of false measurements. In this paper, we also use the Bayesian approach for MSPSR deghosting, however, we define the bistatic track association as a Bayesian inference problem and develop the Markov chain Monte Carlo (MCMC) sampler to solve this discrete-continuous inference problem and determine the most likely solution. To do this, we need to establish prior probability distribution for the modified association matrix which is introduced in the subsequent sections together with the proposed sampler. This probabilistic model forms a novel deghosting algorithm for the MSPSR applications. We then compare the results of our new deghosting method with results obtained using two alternative deghosting algorithms. The comparison is performed using simulated data with known truth. We illustrate the superior performance of our algorithm over the two others and also discuss the achieved results. Moreover, the simulated data are used in the sampler to produce multiple long runs of the chain which is later analysed in order to assess its convergence. As this is an extended version of [14], the detailed convergence assessment and the rest of the detailed analysis is the additional contribution. Illustration of chain iterations in the Cartesian space and the target identification space are provided. At the end of the results section, the analysis of the discovered association hypotheses posterior distribution is presented. At the end of the paper, the results and methodology are discussed and the paper is concluded with the outline of further research.

## 2. Materials and Methods

### 2.1. Assignment Problem

The assignment problem in target tracking is concerned with obtaining the assignment matrix  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  where  $a_{ij} \in \{0, 1\}$  between two sets of entities  $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ . If  $a_{ij} = 1$ , then we decide on assignment between entity  $i \in \mathcal{V}$  and  $j \in \mathcal{W}$ . Usually, we put some constraints on the form of the assignment matrix, such as the uniqueness of the assignment. Such a constraint can be formulated using the following conditions:

$$\begin{aligned} \sum_i a_{ij} &\leq 1, \\ \sum_j a_{ij} &\leq 1, \end{aligned} \tag{1}$$

which ensures that entities from one set are not shared between entities from the other set. However, there are situations where such a constraint is not appropriate, such as assignment between bistatic tracks and Cartesian targets in MSPSR target initiation/deghosting. If we are concerned with only one bistatic space, then in the simple case, we can put the constraints (1) on the assignment matrix. In the simple case, we consider using a hard assignment decision that assigns bistatic detections to tracks and thus ensures probabilistic independence between two different Cartesian targets. For the rest of the paper, we will assume that this condition be fulfilled. However, one bistatic space is not enough to estimate the target position and velocity in 3D Cartesian space. Therefore, we usually need at least three bistatic spaces so that the target initiation/deghosting stage can be performed. Such a task usually consists of an evaluation of all possible combinations of bistatic tracks from different bistatic spaces of various cardinality (e.g., two or three tracks) and the statistical testing of resulting Cartesian target positions. We suggest keeping the association matrix and establish new constraints, which would only be concerned with a submatrix representing bistatic tracks from the same bistatic space. From the global point of view, the first condition in (1) no longer holds; on the contrary, we encourage the bistatic tracks from different bistatic spaces to share the assignment with the same Cartesian target (as we previously mentioned, a minimum of three tracks is necessary, however, we want the target to be tracked in every bistatic space available). We can express the previous description of MSPSR assignment matrix  $\mathbf{A}$  as

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^1 \\ \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}^{n_{BS}} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

where the upper index of submatrices denotes the index of a particular bistatic space and  $n_{BS}$  is the overall number of bistatic spaces available. For any  $k$ , we apply conditions (1) on the submatrix  $\mathbf{A}^k$ . From (2), it is obvious that the more tracks there are that share assignment with the same Cartesian target (i.e., the more ones there are in the same columns while keeping conditions (1)), the fewer columns are necessary to express the assignment (i.e., the less Cartesian targets will be initiated). This is a desirable property because the problem with many of the deghosting algorithms is the number of possible track combinations which provide feasible results (i.e., an estimate of the Cartesian position with small residual error). One of the ways to incorporate this property into the solution of the target initiation/deghosting process is the enumeration of all possible associations of all the cardinalities from  $n_{BS}$  to 3. Some of the associations can be dismissed based on the residual error, and the other can be omitted because its tracks are already part of the feasible assignment of a larger cardinality, which is preferred. However, in extreme cases, the combinatorial complexity of this computation is unbearable. Another option is to incorporate the desired properties of the assignment matrix into its prior and evaluate not only the probabilities of bistatic track assignments based on the residual error of Cartesian position, but also the probability of the assignment matrix concerning this prior.

## 2.2. Indian Buffet Process

Let us recall the properties of the assignment matrix. We want the initiated target (without loss of generality represented by columns) to be shared by multiple bistatic tracks from distinct bistatic spaces, and in the hard assignment setting, each bistatic track to be assigned to at most one initiated target. The number of targets is usually unknown or can be only roughly estimated. Therefore, another property of a prior for the assignment matrix is that it should be flexible enough concerning the number of targets. This requirement is often used in nonparametric Bayesian modelling [15] as the structure of observed data may not be completely known. This is similar to the case of MSPSR target initiation/deghosting since we do not know which targets produced detections of a given bistatic track. In the environment of nonparametric Bayesian statistics, the prior distribution for binary matrices



with a finite number of rows (the observed data) and a potentially infinite number of columns (the way the unknown number of columns is modelled) is defined using a simple generative process called Indian buffet process (IBP). The name of the generative process is derived from the metaphor used to describe the process. A description of the process together with its statistical properties can be found in [16]. The probability distribution of matrices, under which the order of targets is exchangeable, requires us to define classes of equivalence between assignment matrices in such a way, that two matrices from the same class represent the same underlying structure in the data. The exchangeability is also a desired property in MSPSR target initiation/deghosting because the order of targets is not important, as long as they are represented by the right set of bistatic tracks. The equivalence classes are defined using the  $lof(\bullet)$  function [17] which represents the columns of the assignment matrix as binary numbers (assignment represents a true value) with the first row being the most significant bit before sorting them as integers. For any association matrix  $\mathbf{A}$ , we denote its  $lof(\bullet)$  equivalence class as  $[\mathbf{A}]$ . With assignment matrices represented by equivalence class, we can define the probability distribution for different classes. There are two versions of probability distributions for  $lof(\bullet)$  classes of binary matrices which differ in the number of parameters. The first version [15] only depends on parameter  $\alpha$ . This parameter controls shared assignments between different bistatic tracks (in our application, with the restriction on bistatic space submatrices from (1)) and also the expected number of initiated targets. Since in the IBP for each row we sample from Poisson distribution to add new columns, in the limit case, the number of columns is  $N\alpha$  where  $N$  is the row count of the association matrix (i.e., the number of bistatic tracks over all of the bistatic spaces). The second probability distribution uses two parameters— $\alpha$  and  $\beta$ . In this representation,  $\alpha$  represents the average number of assignments for one bistatic track and  $\beta$  controls how the assignments to one particular target are shared between bistatic tracks (the smaller  $\beta$  is, the more the assignments are shared). For the rest of the paper, we will use the two-parameter representation, since it allows better modelling of assignment matrices in MSPSR target initiation/deghosting.

For any assignment matrix  $\mathbf{A}$ , the probability of its  $lof(\bullet)$  equivalence class is [16]:

$$P([\mathbf{A}]) = \frac{(\alpha\beta)^{K_+}}{\prod_{h \leq 1} K_h!} \exp(-\bar{K}_+) \prod_{k=1}^{K_+} B(m_k, N - m_k + \beta), \quad (3)$$

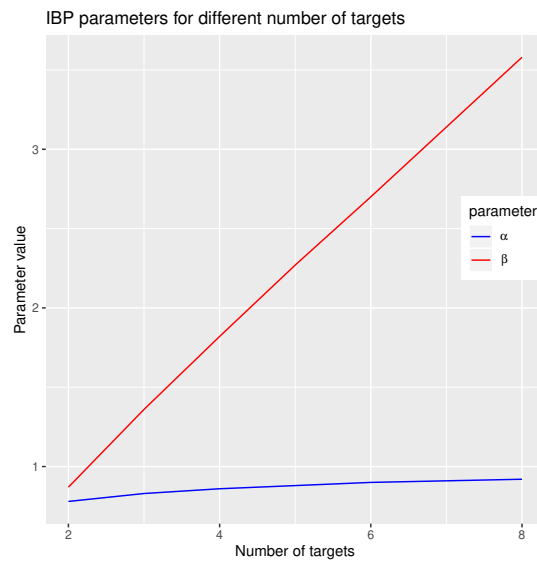
where  $K_+$  is the number of assignment matrix columns with at least one 1 (i.e., targets with at least one piece of associated data),  $m_k$  is the number of associated data for column  $k$ ,  $K_h$  is the number of identical columns and  $\bar{K}_+$  is the expected number of columns for binary matrix distribution with parameters  $\alpha$  and  $\beta$  and is equal to:

$$\bar{K}_+ = \alpha \sum_{i=1}^N \frac{\beta}{\beta - i + 1}. \quad (4)$$

In Figure 1, the different IBP parameter values are visualised for a different number of targets in four bistatic spaces with an ideal assignment matrix. We can see, as the number of targets grows, the relative number of shared bistatic tracks decreases and hence the  $\beta$  parameters value increases.

### 2.3. Sampler

In the subsequent sections, we describe the sampler used to solve the inference problem. This custom sampler is based on the design of a set of moves in the Markov chain that (a) reversibility (explained later) is assured and (b) the set together with respective proposal distribution allows us to efficiently explore the whole parametric space. In general, the sampler is based on the reversible jump Markov chain Monte Carlo (RJMCMC) theory, first introduced in [18]. Since its introduction, this method was extensively studied and used in many different applications, e.g., [19–22].



**Figure 1.** Indian buffet process (IBP) prior parameter values for which the ideal assignment matrix has maximum probability.

#### 2.4. RJMCMC

The reversible jump Markov chain Monte Carlo (RJMCMC) [18] is an extension of the MCMC class of algorithms for generating samples from probability distributions. In particular, RJMCMC extends the Metropolis–Hastings (M-H) [23] algorithm for the case, when “the number of unknown parameters is one of the unknown parameters” [22]. Such applications are called transdimensional since during the inference of the parameters, we are required to sometimes change the dimension of the parametric space. Such a description is certainly valid for the case of the deghosting problem in the MSPSR system, as it was presented in the Introduction. The core task is to decide which bistatic tracks belong to each other and thus effectively decide upon the number of valid combinations, i.e., the number of modelled targets. From the purely combinatoric perspective, even with the lower limit of three bistatic tracks per target and the upper limit of at most one bistatic track from one bistatic space, the number of options is usually very large. The geometrical perspective eliminates many of these options, however, such a process is computationally exhaustive.

The complications with reduced geometry (i.e., bistatic versus Cartesian space) together with no information about the possible target locations are one of the main reasons to use the RJMCMC methodology. The classical model selection methodology would not be applicable here because enumerating all of the possible models is very expensive. The comparison of different models would then bring even more difficulties such as how to ensure the combinations of as many bistatic tracks to be preferred. During the review of this paper, the use of the approximate Bayesian computation (ABC) [24] was proposed. While we agree that it could be used to solve the problem at hand, the design of an appropriate summary statistic would be in our opinion as complex a problem as the design of the RJMCMC sampler is.

We can think about different numbers of targets as different models. Each target is parametrised by its position  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$  and velocity  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  which are coupled in to the state vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6$ . Thus, different models (different numbers of targets) also differ in the number of parameters. For the model  $k$ , we denote by  $n_k$  the number of parameters of the model, which is equal to  $n_k = 6n_k^t$  where  $n_k^t$  is the number of targets in the model. We denote the point in the parametric space  $x = (k, \theta_k)$  where  $k$  is a label of the model and:

$$\theta_k = (\mathbf{x}_1^k, \mathbf{x}_2^k, \dots, \mathbf{x}_{n_k^t}^k). \quad (5)$$

The whole parametric space over which the problem is defined is then given by subspaces  $\mathcal{L}_k = \{k\} \times \mathbb{R}^{n_k}$  for one model, and thus, by taking the union  $\mathcal{L} = \bigcup_k \mathcal{L}_k$ , we obtain all possible parametrisations over the set of all model indices. One of the assumptions behind the sampling procedure is the decomposition of the joint density, given the data  $\mathcal{Z}$  (without specification of what they consist of):

$$p(k, \boldsymbol{\theta}_k, \mathcal{Z}) = p(k)p(\boldsymbol{\theta}_k|k)p(\mathcal{Z}|k, \boldsymbol{\theta}_k), \quad (6)$$

which follows from the idea that the probability density of parameters is easy to specify once the dimension is given, but otherwise very hard to formulate. In the same way, the posterior density factorisation is given by [18]

$$p(k, \boldsymbol{\theta}_k|\mathcal{Z}) = p(k|\mathcal{Z})p(\boldsymbol{\theta}_k|k, \mathcal{Z}). \quad (7)$$

Without getting too extensively into the theory of RJMCMC (more details on which can be found by an interested reader in the references of this section), we only emphasise that in this paper, it is only used as the extension of the classical M-H algorithm. Let us denote by  $x = (k, \boldsymbol{\theta}_k)$  the current state of the Markov chain. Using some (later specified) proposal distribution  $q(x, x')$ , we propose a new state  $x'$  which is accepted as the new state that the chain moves to with the probability:

$$\rho(x', x) = \min\left\{1, \frac{\pi(x')q(x', x)}{\pi(x)q(x, x')}\right\}, \quad (8)$$

where  $\pi$  is the target distribution of the chain, i.e., the distribution we would like the samples to be sampled from. Please note that (8) is a plain M-H acceptance ratio if for  $x$  and  $x'$  the model dimensions do not differ. The acceptance ratio is based on the notion of reversibility of the constructed chain (which ensures the existence of the stationary distribution) and also its ergodicity (which ensures the uniqueness of the stationary distribution) [25]. In RJMCMC [20], these assumptions are considered and by the measure-theoretic approach, these assumptions are extended to much more general state spaces such as  $\mathcal{L}$ . The equilibrium equation is formulated using the transition kernel  $\mathcal{K}$  of the Markov chain:

$$\int_{\mathcal{L}} \pi(dx)\mathcal{K}(x, dx') = \pi(dx'). \quad (9)$$

In the same manner, the reversibility for two subsets  $\mathcal{B}, \mathcal{B}' \subset \mathcal{L}$  can be expressed as

$$\int_{\mathcal{B}} \pi(dx)\mathcal{K}(x, \mathcal{B}') = \int_{\mathcal{B}'} \pi(dx')\mathcal{K}(x', \mathcal{B}). \quad (10)$$

This formulation guarantees the desired Markov chain to be constructed even for transdimensional models. For a more detailed description, please refer to [18–20,22,26].

### 2.5. Parametric Space

Let us describe the properties of the parametric space before we describe the full model and the sampler. We now assume that a fixed realisation of  $\mathbf{A}$ , the association matrix, is available. We denote the number of columns of  $\mathbf{A}$  by  $K$ , which also represents the current number of targets in the evaluated model. From the previous section, we can observe that  $n_k = K$ ; however, we need to drop the model index for the sake of notation simplicity as the association matrix and thus also the model is fixed. We assume the second condition in (1) to hold that the association must be consistent. For any  $i, j$  the  $a_{ij} = 1$  means that the  $j$ -th target is associated with (and therefore its position is given by)  $i$ -th bistatic measurement. We assume the measurement errors in bistatic space to come from a multivariate normal distribution and thus the measurements are sufficiently described by state vector  $\mathbf{z}_i \in \mathbb{R}^2$  (in our application, only the bistatic range and bistatic velocity are measured) and covariance matrix  $\mathbf{Z}_i \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ . The transformation function  $\mathbf{h}_i: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^2$  is

specific for each measurement  $i$  and is given by the positions of receivers and transmitters of the respective bistatic space that the measurement comes from. Note that for the set of measurements associated with one target, all of the transformation functions need to be independent. The likelihood function of the  $j$ -th target position  $\mathbf{x}_j$  concerning the  $i$ -th measurement can then be written as

$$p(\mathbf{x}_j|\mathbf{z}_i, \mathbf{Z}_i) = \mathcal{N}(\mathbf{h}(\mathbf{x}_j)|\mathbf{z}_i, \mathbf{Z}_i), \quad (11)$$

where  $\mathcal{N}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  denotes the multivariate normal distribution with the mean vector  $\boldsymbol{\mu}$  and covariance matrix  $\boldsymbol{\Sigma}$ , evaluated at the point  $\mathbf{x}$ . The choice of this likelihood function is natural. The detections in the bistatic space (the bistatic tracks are created using these detections) have their covariance matrix estimated from the signal properties in their neighbourhood. In this case, the actual measurement errors should be normally distributed. Then, if we assume a linear (or almost linear) target movement model in the bistatic space, normality is preserved. Since the measurements in different bistatic spaces are independent, the likelihood function of the target position  $\mathbf{x}_j$  conditioned by the whole association matrix is given by

$$p(\mathbf{x}_j|\mathbf{A}, \mathcal{Z}) = \prod_{a_{ij}=1} \mathcal{N}(\mathbf{h}_i(\mathbf{x}_j)|\mathbf{z}_i, \mathbf{Z}_i), \quad (12)$$

where by  $\mathcal{Z}$ , we denote the set of all measurements. Therefore, for a fixed realisation of  $\mathbf{A}$ , the target estimates  $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \{\hat{\mathbf{x}}_j\}_{j=1}^K$  can be found using, e.g., the method of maximum likelihood, by

$$\hat{\mathbf{x}}_j = \underset{\mathbf{x}_j}{\operatorname{argmax}} p(\mathbf{x}_j|\mathbf{A}, \mathcal{Z}), \quad (13)$$

and this maximisation can be naturally performed independently for each target in the model. Such an approach offers two advantages. First, there are numerous methods specifically designed to solve the problem (13). A straightforward solution for the case of normal likelihood cannot be used due to the nonlinearity of the function  $\mathbf{h}$ . Therefore, the solution has to be found using some iterative maximisation algorithm. Starting point  $\hat{\mathbf{x}}_j^0 = (\hat{\mathbf{p}}_j^0, \hat{\mathbf{v}}_j^0)$  can be found using three bistatic positions [27]

$$\hat{\mathbf{p}}_j^0 = \mathbf{a} + \mathbf{b}R_t, \quad (14)$$

where:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{s}, \\ \mathbf{b} &= (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{r}, \end{aligned} \quad (15)$$

and  $R_t$  is the distance between the target and central receiver station,  $\mathbf{r}$  is the vector of bistatic positions,  $\mathbf{S}$  is the row matrix of transmitter position coordinates and  $\mathbf{s} = \frac{1}{2}[(\mathbf{S}^{o2} \cdot \mathbf{i}) - \mathbf{r}^{o2}]$ ,  $\mathbf{i} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  is their vector. In the equation for  $\mathbf{s}$ , the operator  $\mathbf{B}^{o2}$  denotes the Hadamard second power of the matrix  $\mathbf{B}$ . Details of this approach together with its derivation and means to compute the velocity estimate can also be found in [2,27]. Once the initial estimate is obtained, the final estimate  $\hat{\mathbf{x}}_j$  can be found through the convex optimisation [28] or using the Newton method [29]. The second advantage of this approach is the efficient marginalisation of the target parameters from the sampled distribution. Once the association matrix is sampled, the probability distribution of target parameters is obtained using the maximum-likelihood method based on the bistatic tracks assigned. This makes the development of an efficient sampler much easier since we are only concerned with binary assignment variables. A similar approach was used in [30] where the transition probabilities in the hidden Markov model were estimated using the backward–forward algorithm.

## 2.6. Model

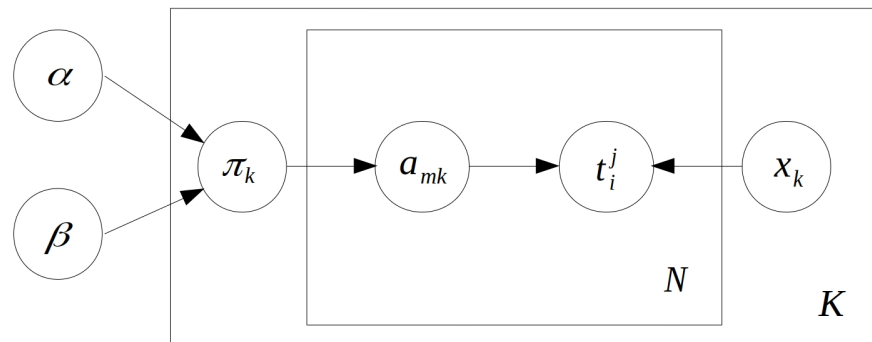
In the next section, we describe the sampling procedure which we use to perform moves across the whole parametric space. Here, we simply summarise the graphical model based on the prior probability distribution for the association matrix (3), which is formulated using the IBP, and the probability distribution of the data observed, conditioned on target parameters. The probability model arising from the definition of IBP [17] is given by

$$\begin{aligned}\pi_k | \alpha, \beta &\sim \text{Beta}\left(\frac{\alpha\beta}{K}, \beta\right), \\ a_{mk} | \pi_k &\sim \text{Bernoulli}(\pi_k),\end{aligned}\quad (16)$$

where  $\pi_k$  is the latent variable, connected for all of the matrix columns through the IBP parameters  $\alpha$  and  $\beta$ . By  $a_{mk}$ , we denote the  $m$ -th element of  $k$ -th column of the association matrix to prevent confusion with an indexation of bistatic tracks. To complete the probabilistic model, we denote by  $t_j^i$  the bistatic data of  $i$ -th track in  $j$ -th bistatic space. Using the notation of the previous section, we can write:

$$t_j^i | a_{m(i,j)k} = 1, \mathbf{x}_k \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{h}_j(\mathbf{x}_k), \mathbf{Z}_{m(i,j)}\right), \quad (17)$$

and here we use  $m(i, j) : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  as a transformation from a pair of indices (of bistatic track  $i$  in bistatic space  $j$ ) to a linear index. This is only a formality with no influence on the model. Having such a transformation simply allows us to differentiate between the transformation functions of different bistatic spaces. The overall structure of the model in graphical form is available in Figure 2.



**Figure 2.** Graphical visualisation of the bistatic tracks association model. Parameters  $\alpha$  and  $\beta$  define the Beta distributed (used in the definition of the IBP) hidden variables  $\pi_k$  for a matrix of  $K$  columns. Association matrix entries  $a_{mk}$  define the association between bistatic tracks  $t_j^i$  and targets  $x_k$ . By  $N$ , we denote the overall number of bistatic tracks available.

## 2.7. Basic Moves

The description of how we estimate the target parameters once the number of targets is given is presented in Section 2.5. Here, we analyse the options for the sampler to jump between the association matrices, either with the same number of columns or transdimensionally.

There are two general classes of transdimensional moves available in the literature on RJMCMC. The first class is the birth-and-death (BD) [18] class of moves and the second class is split-and-merge moves (SM) [21]. The BD class was introduced together with the new theory of RJMCMC [18], extensively analysed in the context of other MCMC methods [19] and also appears in newer papers concerning the RJMCMC theory [22,30,31]. The BD move assumes that if the currently assumed dimension is  $K$  (e.g., representing the number of changepoints in time-series or the number of targets), we can propose either

a decrease in the dimension ( $K - 1$ ) or its increase ( $K + 1$ ). In the applications available in the literature, such a process usually involves a type of parameter transformation as the  $K$  vectors of parameters are dependent. This is not true for the case of bistatic track association since we still preserve the second condition of (1) and single targets in the model are therefore independent (and so are its parameters). It is also possible to propose the BD move at random, i.e., in the case of the birth move, we can propose a random 6D vector of the new target parameters. There is no harm in the association consistency since the new target does not possess any bistatic tracks. However, we argue that concerning the high-dimensional space of target occurrence, this move would not be efficient. There is also a problem with the likelihood evaluation for a target without data, and we would need to propose some arbitrary likelihood function. In the case of a death move, similar problems arise. Randomly, we can propose some track to be deleted. However, we would end up with a set of unassigned bistatic tracks. Such an operation would break the consistency requirement of the association procedure. With this analysis, we decided not to implement BD moves in our sampler, despite the BD type of moves being considered as basic in the RJMCMC literature.

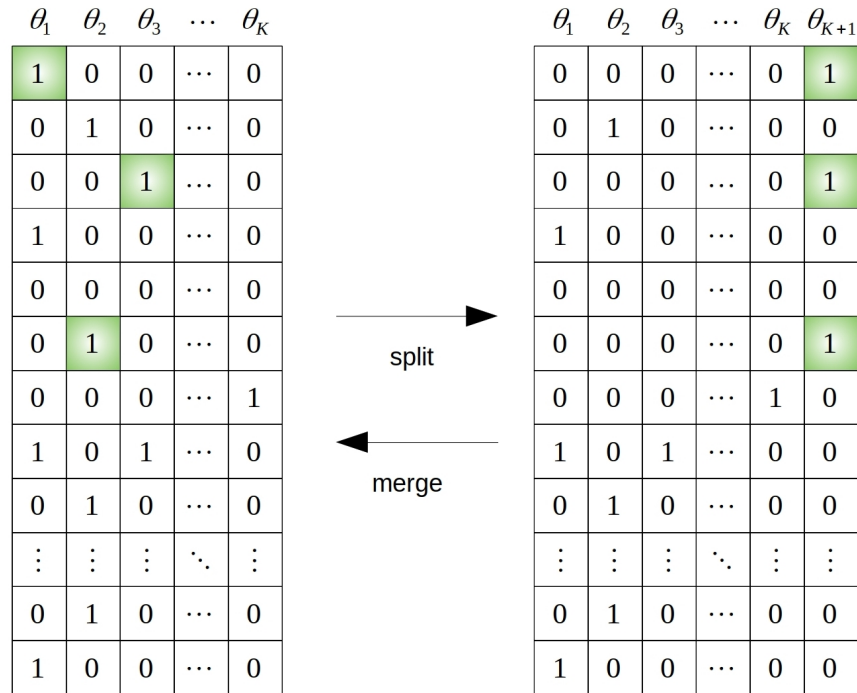
The second class of RJMCMC moves, called split-and-merge, was introduced in [32] and later extended in [21]. Again, the moves are proposed as a reversible pair so that the detailed balance condition (10) is still fulfilled. We start with the description of the split move. Let us suppose that  $K > 1$  and we generate random  $S \geq 3$ . By  $S$ , we denote the number of bistatic tracks we randomly select in existing targets (while preserving the association consistency) and we propose to establish a new target using this set of tracks. The move also contains the operation of removing selected tracks from their respective targets. The randomness of  $S$  is not necessary and its value should also be selected concerning the computational effort. Initiation from  $S = 3$  tracks is also possible and advisable with respect to the closed-form solution (14). In addition, selecting smaller sets of bistatic tracks rather than some large ones increases the acceptance ratio because the probability of set contamination by an inconsistent track is lower. Overall, the deterministic setting  $S \in \{1, 3, 4\}$  proved itself to be a good strategy. The case when  $S = 1$  is the special case of an SM move which serves to sample clutter targets. Such targets do not exist in the observed space; however, from the chain perspective, they serve as storage of inconsistent tracks (inconsistent with other targets). Another good modification is to prefer selecting tracks from those targets, which are either underdetermined, or the data likelihood (i.e., the column likelihood) is very low (hence the target is probably very inconsistent). The merge move is similarly designed. We pick one target at random. For every one of these target bistatic tracks, we (randomly) select some other target to which we would like to assign the bistatic track. This way, the pair is reversible since with every move, there is a way to return to the original state. An example of the SM reversible pair is available in Figure 3. We will now describe the reversible pair more formally from the point of the MH acceptance ratio. We denote by  $\mathbf{A}$  the current association matrix and by  $\mathbf{A}'$  the association matrix which would be the result of the proposed move (i.e., a matrix with  $K + 1$  columns in the case of the split move and  $K - 1$  columns in the case of the merge move). Similarly, we denote by  $\boldsymbol{\theta}$  the current set of target state vectors and by  $\boldsymbol{\theta}'$  the set of target state vectors of the proposed move. The acceptance ratio is then given by

$$\rho((\mathbf{A}', \boldsymbol{\theta}'), (\mathbf{A}, \boldsymbol{\theta})) = \min \left\{ 1, \frac{p(\mathcal{Z}|\mathbf{A}', \boldsymbol{\theta}')p(\mathbf{A}'|\alpha, \beta)q_m(\mathbf{A}', \mathbf{A})}{p(\mathcal{Z}|\mathbf{A}, \boldsymbol{\theta})p(\mathbf{A}|\alpha, \beta)q_m(\mathbf{A}, \mathbf{A}')} \right\}, \quad (18)$$

where the probability  $p(\mathbf{A}'|\alpha, \beta)$  is given by the IBP prior and is evaluated for the whole *lof* equivalence class. The proposal distribution  $q_m(\mathbf{A}', \mathbf{A})$  was described in the previous paragraph and the specific value depends on the number of targets and bistatic tracks available. Note that we use the ratio given by proposal distributions  $q_m(\mathbf{A}', \mathbf{A})/q_m(\mathbf{A}, \mathbf{A}')$  of the specific SM move instead of the distribution of all possible moves [21]. This significantly simplifies the computations. This transdimensional move changes the parameters of

some of the existing targets involved in the random selection. However, the parameters are solely given by the data contained in the bistatic tracks, the likelihood of which is evaluated as the first term in the acceptance ratio (18). With respect to this observation, we assume the Jacobian usually contained in the RJMCMC ratio [18] to be the identity matrix. The data likelihood in (18) arises from (11) as

$$p(\mathcal{Z}|\mathbf{A}, \boldsymbol{\theta}) = \prod_{a_{mk}=1} \mathcal{N}(\mathbf{z}_m | \mathbf{h}_m(\hat{\mathbf{x}}_k), \mathbf{Z}_m). \tag{19}$$



**Figure 3.** Matrix visualisation of the reversible split-and-merge move. Here, we mainly focus on the target-to-track association and omit the differences between bistatic spaces (although we assume the association to be consistent). Columns are labelled by  $\theta_j$ , which denotes the  $j$ -th target rather than the target state vector  $\mathbf{x}_j$  or its estimate  $\hat{\mathbf{x}}_j$ .

Concerning the already presented target parameters’ marginalisation, this quantity always represents the maximum likelihood value (both concerning the target state and the bistatic track data). Note that the acceptance ratio for proposing new targets can be high, especially concerning the potential number of false ideal intersections. This would lead to the constant creation of new targets which, due to the prior probability distribution of the association matrix, would then be eventually merged with previous estimates of the same target from a different set of data. To prevent this, we decided to put a small penalisation  $\lambda_j$  on the data probability of new targets. The term (19) then becomes:

$$p(\mathcal{Z}|\mathbf{A}, \boldsymbol{\theta}) = \prod_{a_{mk}=1} \mathcal{N}(\mathbf{z}_m | \mathbf{h}_m(\hat{\mathbf{x}}_k), \mathbf{Z}_m) \exp(\lambda_j), \tag{20}$$

where:

$$\lambda_j = \begin{cases} \bar{\lambda}_j & \sum_{i=1}^N a_{ij} < 4, \\ 0 & otherwise. \end{cases} \tag{21}$$

The penalisation constant  $\bar{\lambda}_j$  is chosen in such a way that the accepted proposals do not cause the fragmentation of the larger internally consistent group into smaller subsets of measurements. Our experiments show the importance of such a penalisation.

A different approach was taken in the case of the second type of moves we used. We call them reassignment (R). This move is not transdimensional because it does not change the number of targets in the model. Hence, the regular MH acceptance ratio applies. From the current assignment matrix,  $\mathbf{A}$ , we randomly select one entry  $a_{ij}$  and propose its change to a complement value  $\bar{a}_{ij}$ . Since the association consistency has to be preserved, we also select some  $a_{il}$ , which, in the current state of the chain, has the value  $a_{il} = \bar{a}_{ij}$ . The complement value is defined as

$$\bar{a}_{ij} = \begin{cases} 1 & a_{ij} = 0, \\ 0 & a_{ij} = 1. \end{cases} \quad (22)$$

Note that for the first case of (22), there is only one  $l$  possessing the complement value, while for the second case, any  $l \neq j$  is available. This, together with the actual values of  $N$  and  $K$ , defines the transition distributions  $q_m$  of this move. There is also the option to propose the assignment change in a deterministic way. For every  $a_{ij}$ , there is either  $K - 1$  or 1 options to change the assignment. The number of entry selections is  $NK$  and therefore the complexity of such a deterministic proposal would be  $\mathcal{O}(NK^2)$ . Note, however, that the proposals are not independent and for the reversibility to be preserved, different conditions need to be developed. The probability of the assignment matrix having the value  $a_{ij} = 1$  follows from the two-parametric IBP prior to the distribution [33] and is given by

$$p(a_{ij} = 1 | \mathbf{A}, \alpha, \beta) = \frac{m^{-ij}}{N - m^{-ij} - \beta}, \quad (23)$$

where  $m^{-ij}$  is computed as the number of tracks assigned to the target  $j$  excluding the track  $i$ . As in the case of SM move, we denote here by  $\mathbf{A}'$  the new assignment matrix with changed value  $a'_{ij}$  and  $a'_{il}$  at their respective positions. The acceptance ratio in general would be (with the modified proposal distribution  $q_m$ ) the same as in (18). However, there is a large space for the optimisation of computational cost. For both directions of this MCMC move, only the  $i$ -th and  $l$ -th columns of the association matrix are changed. Due to this, only  $\hat{\mathbf{x}}_j$  and  $\hat{\mathbf{x}}_l$  change value and therefore change the data likelihood. Moreover, the probability with respect to the prior is given by (23) rather than (3) which also significantly simplifies the computation. We also exploited the independence of single columns concerning the data likelihood and therefore we can write the acceptance ratio in the following form:

$$\rho((\mathbf{A}', \boldsymbol{\theta}'), (\mathbf{A}, \boldsymbol{\theta})) = \min \left( 1, \frac{\prod_{k \in \{j,l\}} \left[ \prod_{i,a'_{ik}} \mathcal{N}(\mathbf{z}_i | \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}'_k), \mathbf{Z}_i) \right] p(a'_{ij} = \bar{a}_{ij}, a'_{il} = a_{ij} | \mathbf{A}', \alpha, \beta) q_m(\mathbf{A}', \mathbf{A})}{\prod_{k \in \{j,l\}} \left[ \prod_{i,a_{ik}} \mathcal{N}(\mathbf{z}_i | \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k), \mathbf{Z}_i) \right] p(a_{ij} = \bar{a}_{ij}, a_{il} = a_{ij} | \mathbf{A}, \alpha, \beta) q_m(\mathbf{A}, \mathbf{A}')} \right). \quad (24)$$

### 2.8. Sampling Procedure

In this section, we illustrate the sampling algorithm which is composed of all steps presented in the previous sections.

The initiation is given by the generative process of the IBP distribution, which is described in detail in [16]. This generative process is naturally modified so that the conditions (1) are fulfilled (concerning the bistatic space and the proposed targets). The result of this procedure is the association matrix  $\mathbf{A}$ , the columns of which represent the proposed targets. Target parameters are estimated with regard to the number of associated tracks. In Section 2.2, we denoted  $m_k$  the number of ones in  $k$ -th column of the association matrix. In our application, this quantity also represents the number of bistatic tracks assigned to the  $k$ -th target. If  $m_k \in \{1, 2\}$  we are unable to initiate the target with full parameters. Therefore, we randomly generate the 6D target position in the area of measurement and find its projection onto the ellipsoid surface ( $m_k = 1$ ) or onto the ellipse obtained as the curve of two ellipsoid intersections ( $m_k = 2$ ). This random initiation serves mainly visualisation purposes as the target position is marginalised again once a new measurement

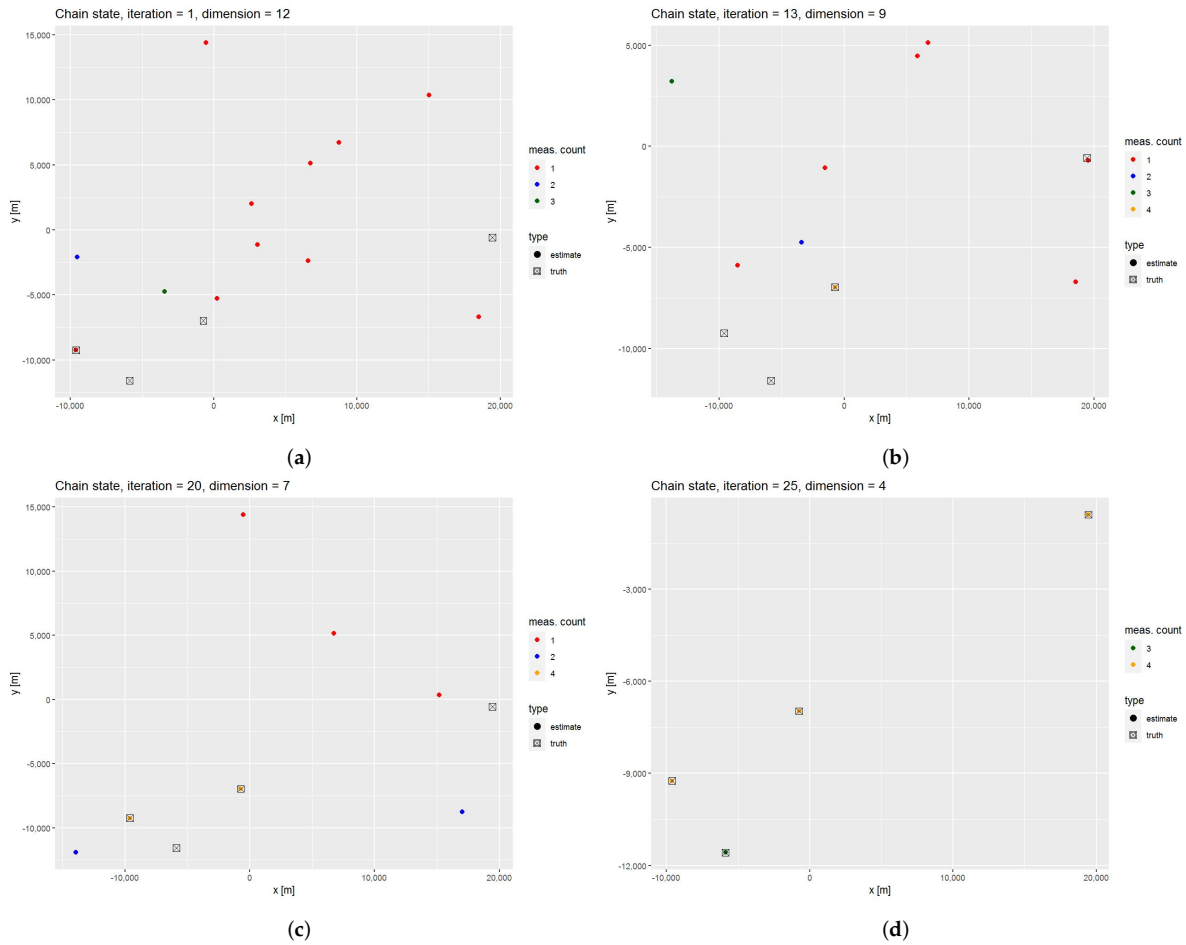


is added or some measurement is removed. If  $m_k \geq 3$  and all of the measurements share a common receiver or transmitter, the initiation is solved using Equations (14) and (15). Otherwise, if  $m_k \geq 3$  but there is no common focus of the ellipsoids of measurement, the initiation is solved in a more general way, using (13) where the maximisation itself is solved using the log-likelihood and gradient descent algorithms. The same initiation scheme is used through the whole sampling process whenever target position estimation is needed.

The sampling process, given the initial chain state, proceeds as follows. At each iteration, we try to propose one SM move and one R move. Proposal distributions of these moves were described in the previous section together with their respective acceptance probabilities. If the proposal is accepted (i.e., if the realisation of the random variable  $U \sim \text{Uniform}(0, 1)$  is smaller or equal to the ratio  $\rho((\mathbf{A}', \boldsymbol{\theta}'), (\mathbf{A}, \boldsymbol{\theta}))$ ) the affected columns are modified together with the corresponding target positions. This way, the sampler travels through the parametric space described in Section 2.5. Some of the samples will have different dimensions (i.e., the number of targets) than the others. Note that even if two samples have the same dimension, it does not mean that the target positions have to be the same, since the assignment of tracks to targets can be completely different. For tracking purposes, however, we do not need the whole distribution (described by the obtained set of samples), but rather the “best estimate”, in some sense, is required. Obvious and widely used choices are the maximum a posteriori (MAP) estimate and the maximum likelihood (ML) estimate. In our experiments, the ML estimate was used, which also corresponds to the way in which the target positions are marginalised.

We illustrate the way in which the chain moves between dimensions using one specific chain. The simulation parameters are not important in this case, as we are only concerned with the way the chain moves in the parametric space. The algorithm performance analysis, for which the simulation parameters are important, is provided in the results section of this paper. There were four targets simulated in the area of measurement, three of them with measurements in four bistatic spaces, one of them with only three measurements, and no false measurements were included.

Four different chain states (target positions in the  $x - y$  plane) together with the actual target positions are available in Figure 4. Note that even though we illustrated the target states in the  $x - y$  plane, the whole computation was performed in the 6D space described in Section 2.5 and the simulated targets also have different  $z$  coordinates. As we can see, the chain was initiated with highly separated bistatic measurements (10 one measurement targets, 1 two measurement target and 1 three measurement target) and with the initial dimension  $n_1^t = 12$ . Note that only one of the initial target states corresponds to the actual target position. During the first few iterations, mainly the SM moves were accepted, which led to the creation of the first four measurement targets at iteration 13 and the second one at iteration 20. Both of these targets correspond to the actual targets. In the later iterations, SM and R moves are accepted at approximately the same rate and at iteration 25, all actual target positions were resolved. This illustrates the capability of the sampler to travel through the states with different dimensions. Even though we selected interesting iterations for illustration purposes, the dimension can also grow between iterations. This is solely dependent on the value of the acceptance ratio.



**Figure 4.** Four different iterations of the chain. At each iteration, we differentiate between estimates with the different number of bistatic measurements (red for one bistatic measurement, blue for two, green for three and yellow for four bistatic measurements). Dot marks are used for estimated positions and boxes for the true target positions: (a) chain state at the first iteration with 12 initiated targets, none of the four measurement targets and only one nearby the true target location; (b) chain state at the 13th iteration with 9 estimated targets, one of them consisting of four measurements; (c) chain state at the 20th iteration with 7 estimated targets, two of them consisting of four measurements, both of them nearby the true target’s location; and (d) chain state at the 25th iteration with 4 estimated targets, each corresponding to the true target’s location.

### 3. Results

In this section, we evaluate the performance of our new proposed algorithm. The evaluation was performed using simulated data since these allow us to compare results with the actual truth, which is usually not available when dealing with data from the real system. For the data simulation, we set up an MSPSR system with two receivers and two transmitters, i.e., the system comprises four bistatic spaces. Positions of the sites are available in Table 1. We simulated targets in a local 3D Cartesian space (position and velocity) uniformly in a block-shaped space. The number of simulated targets ranges from 2 to 8. To make the situation closer to reality, all simulated targets were detected and tracked in all bistatic spaces, however, there were also bistatic tracks that did not represent any of the simulated targets. The number of additional false bistatic tracks is always equal to the number of simulated targets. The bistatic space in which those bistatic tracks were simulated was randomly and uniformly chosen. Bistatic positions of the tracks were provided to the association with a diagonal covariance matrix, with the variance of bistatic

range  $\sigma_r^2 = 1000$  m and the variance of bistatic velocity  $\sigma_v^2 = 4$  m/s. Using the repeated Monte Carlo simulation of data for a different simulated number of targets (and additional false bistatic tracks), we evaluated the number of true-positive (TP) associations, which is the number of associations created by the algorithm which correspond with the actual simulated targets. We also evaluated the number of false-positive (FP) associations, which is the number of associations created by the algorithm, which did not correspond with any of the simulated targets. The last important quantity is the number of false-negative (FN) associations, which is the number of simulated targets which the algorithm did not resolve. These three quantities were evaluated in each Monte Carlo run. The IBP hyperparameters were set to  $\alpha = 0.25$  and  $\beta = 1.9$ .

**Table 1.** Cartesian coordinates of four site positions, two receivers (Rx) and two transmitters (Tx).

Site Type	x (m)	y (m)	z (m)
Rx	8311.076	−3793.234	246.0192
Rx	−9001.145	−1833.460	267.4876
Tx	1260.241	5365.893	233.9839
Tx	−1260.366	−9750.959	306.8714

### 3.1. Reference Deghosting Algorithms

To make the evaluation more beneficial, we decided to employ two other deghosting algorithms on the same simulated data. The first of the algorithms is a modification of the deghosting algorithm for a single frequency network (SFN) [9]. This algorithm can be easily used for FM-based MSPSR system with the advantage of the absence of transmitter uncertainty. Due to the number of bistatic spaces available (the simulated system comprises four bistatic spaces), we initiated the Cartesian estimates from pairs of bistatic tracks in the chosen  $z$  coordinate. The clustering procedure was then performed by the likelihood ratio test suggested in [9] with spatial false return density  $\rho_F = 1e^{-11}$  and  $p_D = 0.9$  for all bistatic spaces. In [5], it is suggested to take into account the error caused by replacing the unknown height with a constant. The correction was done in the covariance matrix through the linearisation of the model, which may not work well with different geometries. This in particular may be responsible for quite a high number of false-positive associations (since they could not be merged with their actual neighbours). We refer to this method as the ellipse intersection method (EI method).

The second compared method is loosely based on a similar principle. However, instead of initiating from two measurements and coping with errors caused by unknown height, we initiate targets from all combinations of the three measurements. If there is a target with more than three measurements, the estimates from subsets of three measurements should be relatively close and we can test that using the estimated Cartesian covariance matrices and Mahalanobis distance between the estimates. On the other hand, if there are two triplets from two different targets, they should be far apart from each other. By fusing the close groups and simple fusion rules (the larger the group the better, and the smaller the Mahalanobis distance the better), we can create a feasible association algorithm. We refer to this algorithm as the three-dimensional method (3D method).

### 3.2. Results

As we already mentioned, the performance comparison was performed using simulated data. We evaluated the number of true-positive (TP) associations, the number of false-negative (FN) associations, and the number of false-positive (FP) associations. The TP and FN quantities are complementary and together they sum up the number of simulated targets. The achieved values for all of the three metrics for the new proposed algorithm are available in Table 2.

**Table 2.** Association results for the new proposed method. Average numbers of true-positive (TP), false-positive (FP), and false-negative (FN) associations from 100 Monte Carlo simulations are shown.

n. of Targets/Case	TP Assoc.	FP Assoc.	FN Assoc.
2	2.0	0.0	0.0
3	3.0	0.0	0.0
4	4.0	0.4	0.0
5	5.0	0.0	0.0
6	6.0	1.0	0.0
7	7.0	1.2	0.0
8	7.4	2.1	0.6

The displayed values are the average from 100 Monte Carlo simulations of different target positions and bistatic spaces of false measurements, both of which were chosen at random with uniform distribution. As we can see, up to five targets can be clearly resolved, without almost any FP associations and no unresolved target.

The number of unresolved targets stays low even for a higher number of simulated targets, however, due to the increased concentration of false bistatic tracks, the number of FP associations (non-existent targets) grows. This is mainly because in our MSPSR geometry, there are plenty of false intersections of the three ellipsoids. Many of them could be dismissed using kinematic limits and limits for the area of the target position. However, such restrictions were not applied in any of the methods used. Another possible reason for the number of FP associations is the natural inclination of the mixture models to the overestimation of the number of components. Our findings are consistent with the theoretical analysis provided in [34].

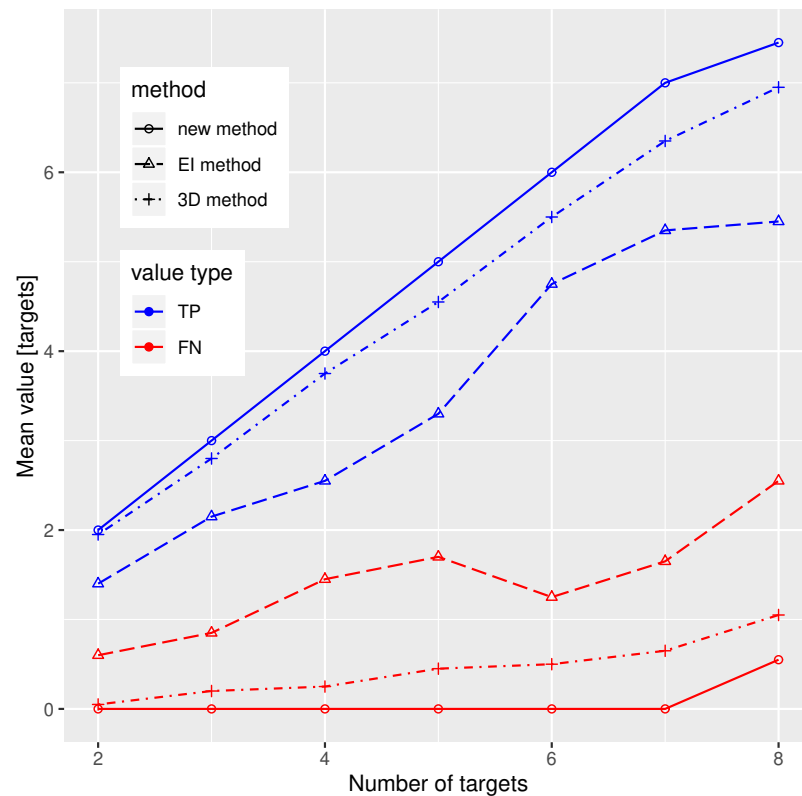
To compare the performance of our new algorithm, we must run the same simulations for the other two deghosting methods, i.e., the ellipsoid intersection (EI) method and three-dimensional (3D) method, with the same setup and number of Monte Carlo simulations. The comparison of all of the three methods is in Figure 5. Methods are differentiated using line type (new method = solid, EI method = dashed, 3D method = dash-dotted) and TP and FN quantities are differentiated using line colour (TP = blue, FN = red). As we can see, in all cases, the new method outperforms the other algorithms, i.e., the number of successfully resolved targets is always the highest for the new method, while the number of unresolved targets is always the lowest. These results are valid for the simulated geometry and parameters, however, the simulation illustrates the ability of the method to perform the correct association under the given conditions.

### 3.3. Convergence Analysis

In this section, we present the results concerning the convergence of the proposed sampler. The results obtained using the simulated data presented in the previous section suggest a good performance in comparison with the alternative algorithms as well as the ability of the proposed method to associate true targets while avoiding the creation of false ones. However, positive results (even if it would be using data from a real radar system) do not guarantee the correctness of the sampler. By the correctness of the sampler, we usually mean that the stationary distribution of the chain produced by the sampler corresponds to the desired one and whether the chain (of a certain length) may have achieved its stationary distribution. Answering both questions simultaneously is very difficult. In this section, we focus on the latter one, i.e., we analyse whether there is some stationary distribution which is eventually achieved by each chain of a certain length that the sampler produces. There are two different ways to perform such an analysis [35]. The first of them assumes some information about the target density being available, which is then incorporated into the analysis. The second way is purely experimental and is based on running multiple different

chains and then analysing the differences between the results achieved by the chains. We chose the second way for incorporating information about the target density would be very difficult. The methods for the analysis of multiple runs of the Markov chain were also adapted for the purposes of transdimensional Monte Carlo methods [36]. However, this modification is not suitable in our case, as it requires us to select a set of parameters which retain the same meaning across all possible models.

Performance comparison between methods



**Figure 5.** Performance comparison between the three methods. Two quantities, the number of true-positive (TP) resolved targets (blue) and false-negative (FN) unresolved targets (red) are visualised. Solid line together with circular points are used for the new algorithm, dashed line with triangular points for the ellipse intersection (EI) method and dash-dotted line with cross points for the three-dimensional (3D) method.

As we described in Section 2.5, the target positions, which are continuous variables by nature, are marginalised using maximum-likelihood estimates, which helps the sampler as it does not have to propose the positions at random. This also means that we do not need to include these parameters in the analysis of the chain convergence and we only need to deal with the assignment matrix which defines them completely. Since dealing with the two-dimensional assignment matrix is impractical, we can reduce it to a one-dimensional vector variable. This reduction directly follows from the usage of the IBP prior mentioned in Section 2.2, where the probability distribution is formulated for the whole class of equivalence. This is achieved by transforming the columns of the association matrix into binary numbers, where the first row is interpreted as the most significant bit.

By forming the actual integers, for each association matrix  $\mathbf{A}_j^i$  at the  $j$ -th iteration of  $i$ -th chain, we obtain a vector of integers:

$$\boldsymbol{\tau}_j^i = \left( \tau_{j1}^i, \tau_{j2}^i, \dots, \tau_{jK_j^i} \right) \quad (25)$$

where  $K_j^i$  is the number of columns of the matrix  $\mathbf{A}_j^i$ . By preserving the conditions (1), we guarantee the numbers obtained in one iteration being unique, i.e.,  $\tau_{jk}^i \neq \tau_{jl}^i$  for any  $k \neq l$ . The analysis of  $\boldsymbol{\tau}_j^i$  between different chains or parts of one particular chain generates two problems. First of all, the variable  $\boldsymbol{\tau}_j^i$  varies in dimension (just as the association matrix does) not only between chains but also between different iterations of one particular chain. The second problem arises from the integral nature of the values in the vector  $\boldsymbol{\tau}_j^i$ . For integer values, usual test statistics such as  $\hat{R}$  [35] are impractical. An overview of test procedures for Markov chains taking values from a categorical variable is presented in [37]. We used the  $\chi^2$  test originally proposed in [38] which states the null hypothesis  $H_0$  that all of the analysed chain segments contain sequences of random samples obtained using a common distribution to all chains in the analysis. The alternative hypothesis  $H_1$  is that the distributions of single chains are different. Note that even if the single chains achieved a stationary distribution, the test would reject the null hypothesis provided that they are not the same for all chains. The rejection of the null hypothesis therefore either states that the sampler does not provide chains with a stationary distribution or that it is different for each chain. For now, let us reduce the association matrix at each iteration  $j$  of each chain  $i$  into the single number  $K_j^i$ . This way, the chains consist of scalar discrete variables. Let us have  $s$  different chain segments and the set of all unique observed target counts  $\boldsymbol{\kappa} = (\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_r)$ . For each chain  $i$ , we evaluated  $f_{kl}^i$  as the number of transitions from dimension  $\kappa_k$  to dimension  $\kappa_l$ . The test statistic of the null hypothesis was then given by [37]

$$X_f^2 = \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^r \sum_{l \in R_k} \frac{f_k^i (\hat{p}_{kl}^i - \hat{p}_{kl})^2}{\hat{p}_{kl}} \quad (26)$$

where:

$$\begin{aligned} f_k^i &= \sum_{l=1}^r f_{kl}^i \\ \hat{p}_{kl} &= \frac{\sum_{i=1}^s f_{kl}^i}{\sum_{i=1}^s f_k^i} \\ \hat{p}_{kl}^i &= \frac{f_{kl}^i}{f_k^i} \\ R_k &= \{k | \hat{p}_{kl} > 0\}. \end{aligned} \quad (27)$$

According to [38], this test statistic follows the  $\chi^2$  distribution with the degrees of freedom given by

$$\sum_{k=1}^r (a_k - 1)(b_k - 1) \quad (28)$$

where:

$$\begin{aligned} a_k &= |\{i : f_k^i > 0\}| \\ b_k &= |\{l : \hat{p}_{kl} > 0\}|. \end{aligned} \quad (29)$$

We generated 10 independent chains from the sampler, using simulated data from the previous section. Each of the chains contained 10,000 samples (i.e., we worked with long runs of the sampler). The analysed segments were then obtained by taking the second half of each chain, i.e., each segment contained 5000 samples. Then, the test statistic (26) was calculated and the value  $X_f^2 = 8.33$  with  $n = 10$  degrees of freedom was obtained. Since

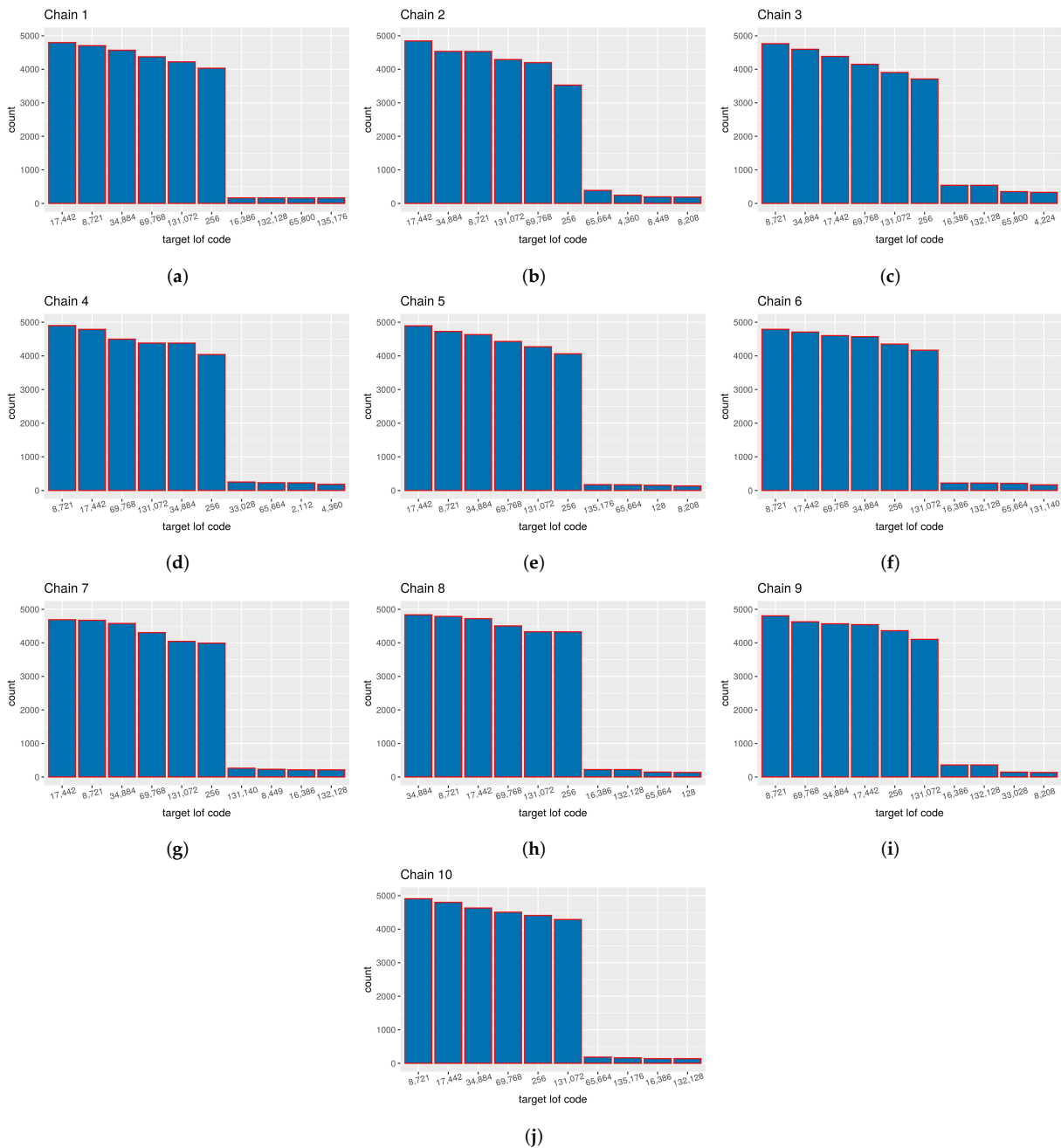
the assumed probability distribution of the test statistic was  $\chi^2$ , the value of the cumulative density function is 0.40. Therefore, the p-value is 0.60 which allows us to accept the null hypothesis with the usual significance level  $\alpha = 0.05$  and even  $\alpha = 0.1$ . This test has shown us that the sampler proposed in Section 2 produces chains, which converge to a common stationary distribution concerning the assignment matrix dimension.

An appropriate method for the analysis of vectors  $\tau_j^i$  is not known to the authors of this paper. However, once we validate the convergence concerning the number of targets, we can perform the graphical validation of the obtained targets using the histogram of their counts in different chains. Such a histogram is presented in Figure 6. As the chain travels through the parametric space, it discovers multiple different target proposals expressed as columns of the association matrix. Each column can be transformed using the procedure described in Section 2.2, which is used to form classes of equivalence over association matrices. These codes are common even for different runs of the sampler because they are bound to the source data, provided that the ordering of bistatic tracks was not changed. Note that this does not have anything to do with the exchangeability property of the IBP prior, but rather it is a necessary condition for the identification of the specific associated groups of bistatic tracks across the iterations of single chains as well as between multiple chains. We can see that the first six targets in each histogram are the same codes, only with different ordering and counts. These six codes correspond to the true simulated targets and two separated clutter measurements. The rest of the histograms are random targets with rather small counts, which are results of the probabilistic nature of the MCMC method.

Another interesting question is, once the convergence has been verified, what is the uncertainty of the model posterior probabilities estimated from the chains produced by the sampler. For this purpose, we decided to use the approach developed in [39]. The analysis is based on the estimation of the Markov chain transition matrix where the states represent the current model. In our case, each model is differentiated by its vector of *lof* codes presented in Section 2.2. Note that each model can have a different dimension and therefore the number of codes can be also different. We assigned one numeric label to each unique model and these labels were used in the sampler output. Then, the matrix of frequencies  $\mathbf{N}$  consisting of entries  $n_{ij}$  was built, which represent the number of transitions from a model with label  $i$  to a model with label  $j$ . The matrix  $\mathbf{N}$  is then used as input to the sampled transition matrix  $\mathbf{P}^{(r)}$  prior distribution, which was proposed to be:

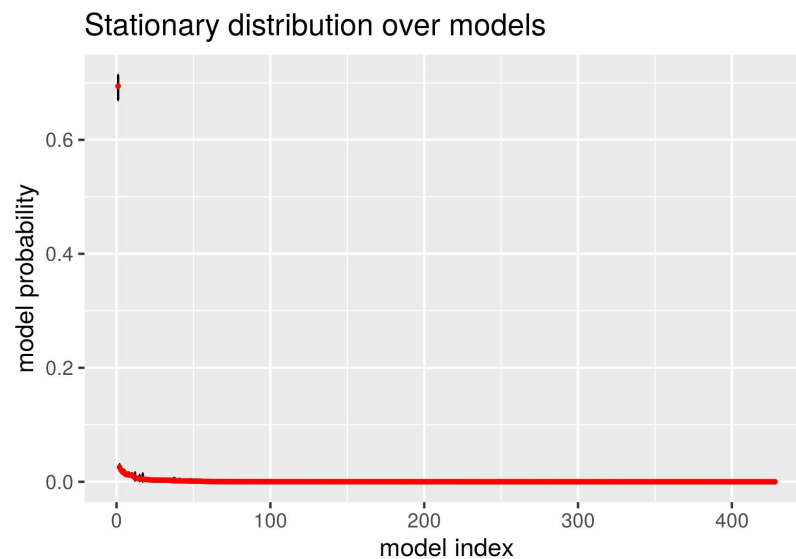
$$\mathbf{p}_i^{(r)} \sim \mathcal{D}(n_{i1} + \epsilon, n_{i2} + \epsilon, \dots, n_{iI}) \quad (30)$$

where  $\mathbf{p}_i^{(r)}$  denotes the  $i$ -th row of the sampled transition matrix  $\mathbf{P}^{(r)}$ ,  $I$  denotes the overall number of models,  $\mathcal{D}$  denotes the Dirichlet distribution and  $\epsilon$  is the prior parameter. The prior parameter was set to  $\epsilon = 1/I$ , as it is suggested in [39] for better numerical stability. The samples of the stationary distribution are generated using the normalised eigenvector of  $\mathbf{P}^{(r)}$  corresponding to the unit eigenvalue. For the rest of the procedure, please refer to the original paper [39]. The resulting model posterior probabilities, together with the fifth and the ninety-fifth percentiles (vertical black bar) are plotted in Figure 7.



**Figure 6.** Histogram of top 10 count target lof codes: (a) histogram from chain no. 1; (b) histogram from chain no. 2; (c) histogram from chain no. 3; (d) histogram from chain no. 4; (e) histogram from chain no. 5; (f) histogram from chain no. 6; (g) histogram from chain no. 7; (h) histogram from chain no. 8; (i) histogram from chain no. 9; and (j) histogram from chain no. 10.





**Figure 7.** Stationary distribution over the models encountered in the chains produced by the sampler. Red points represent the median and the black bars represent the range between the 5th and 95th percentile. The model labels were assigned again after the posterior evaluation so that they are sorted in descending order. The distinction between the first and the rest of the models is visible and holds even with respect to the precision.

#### 4. Discussion

The bistatic track association and deghosting method presented in this paper relies on two techniques. The first of them was the IBP prior distribution for the association matrix and the second one is the RJMCMC inference procedure with a custom set of moves related to the bistatic track association problem.

The suitability of the IBP prior was analysed in Section 2.2. The main argument for its usage is the exchangeability property, which allows us to compose targets and tracks with arbitrary ordering without any influence on the results. The second argument would be the two-parameter version of the distribution. The two parameters can be used to set the expected number of the association matrix columns (i.e., the expected number of targets). This property can also be observed in the results for the simulated data where the number of false-positive targets (i.e., the number of excess columns) is kept relatively low, even for a higher number of tracks. The real-world justification of this approach is the direct connection between the number of targets assumed to be present in the area of measurement and the association scheme (i.e., the association between bistatic and Cartesian spaces). Such a connection is usually missing in the classical deghosting algorithms and we see this as an improvement achieved by the proposed method.

In Section 3, the method assessment using the simulated data was presented. First of, the ability of the proposed method to solve the association problem was tested. This was achieved through the repeated simulation of target measurements and the resolved targets were compared with the known truth. The evaluation of true-positive and false-negative associations suggests a good ability of the method to successfully resolve the actual targets. This is emphasised via a comparison with two alternative algorithms, both of which are outperformed by the proposed method. However, due to the geometrical properties of the bistatic geometry and the nature of the method, the number of false-positive associations grows with the number of actual targets and the number of false measurements. Note, however, that the growth is slower than in the case of the compared algorithms. Since the proposed method is a Markov chain Monte Carlo (MCMC) method, it was considered necessary to assess the convergence of the chains produced by the sampler

and to analyse the resulting stationary distribution. This assessment was performed in two steps, both of which used 10 long runs of the sampler with 10,000 iterations (but only the second half of each chain was used in the analysis). In the first part of the analysis, the convergence with respect to the number of resolved targets was performed. For this purpose, the  $\chi^2$  test for categorical data was utilised and the calculated test statistic verified with a high level of significance that the chains were from a common distribution of the number of targets. The second part of the chain analysis was based on the estimation of the transition matrix between different models (i.e., different association matrices), which is suitable for the transdimensional MCMC. The models with a varying number of parameters were reduced to a single number, the model label. In addition, using the Dirichlet prior for the transition probabilities between models, this analysis allowed us to assess the model posterior probabilities as well as the precision of these probabilities. The graphical results suggest that there is only one model with significant posterior probability and this probability is known with relatively high precision. All of the three analyses verified the good performance of the proposed bistatic track association and deghosting method.

From the modelling perspective, as it was pointed out by the reviewers, the sensitivity of the results with respect to the prior and proposal probability distribution was not analysed. However, as a matter of future work, we plan to provide a comparison of the results using different priors on the association matrix, as this is the key component of our model. However, as far as we know, there are not many probability distributions which do possess the same properties as the two parametric IBP probability distributions. One of the interesting options would be to use the prior used in [11] and compare the results.

The most computationally expensive part is the marginalisation of the target states. At every proposed step, the association of bistatic tracks is changed for a certain subset of targets. For every target influenced by this change in association, we need to compute again the target position in the maximum likelihood sense. The starting point of each such maximisation is computed using the closed form method (14), where the most computationally expensive operation is the multiplication of the coordinate matrix  $\mathbf{S}$  transposed by itself. The inverse of this product is just an inverse of  $3 \times 3$  matrix and this inverse is used in the rest of the computation for one target. Only a few iterations are required to correct this initial estimate, if necessary (e.g., if there are measurements which do not fit into the closed form initiation scheme). The number of iterations is also dependent on the precision that is required. We argue that, with respect to the usual targets, if the change in position is less than 0.01 m, the iterations can be stopped. If the maximisation is performed iteratively, the most computationally expensive part is the evaluation of the normal likelihood function, where the exponent corresponds to the Mahalanobis distance. The inversion of the measurement matrix can be solved by precomputation (the data do not change during the inference) and is even easier in the case where we have the same measurement precision for all data. Partial derivatives of the projections from the Cartesian to any of the bistatic spaces can be expressed in closed form. For the rest of the computation, the complexity is comparable to any other classical MCMC method.

The main limitation of the experiments performed in this paper is the bistatic setup. The simulation of the real setup used two transmitters and two receivers. There are systems with many more sites of both kinds, however, they are rarely used in the literature, e.g., [1–5]. In this regard, the setup with more than one receiver and more than one transmitter seems to be more general. The limitation with respect to the number of simulated targets is also present, since the simulation results were only evaluated up to eight simulated targets. However, this is not so uncommon in the tracking literature [1,2] and others. Together with the limitations in the simulation setup design, one of the limitations is the simulation itself. However, the experiments with real data were spared as a matter of future work, since the results' analysis and data description would take up most of the manuscript. Other limitations such as the fixed choice of the proposal distribution were already mentioned; however, we do believe that the results are nonetheless convincing.

## 5. Conclusions

In this paper, we developed a new bistatic track association and deghosting algorithm. The core of the algorithm is based on the Bayesian approach, namely the hierarchical model which utilises Indian buffet process (IBP) as the prior distribution for the association matrix between the bistatic and Cartesian spaces. The inference of the targets was performed using the reversible jump Markov chain Monte Carlo (RJMCMC), which allowed the method to naturally traverse across association hypotheses with a varying number of targets. In this paper, detailed descriptions of the Bayesian model, the parametric space and the sampler moves are provided. The method assessment was performed using a simulated bistatic setup where the simulated data contained both missing and false measurements. The results show a good performance in comparison with two alternative algorithms. The simulated data were also used to analyse the statistical properties of the chains produced by the sampler in terms of convergence and posterior probabilities. Using statistical testing, the convergence with respect to the number of targets was verified. Further research will be concerned with the sensitivity analysis with respect to the prior probability distribution and assessment of the method using data from a real radar system.

**Funding:** This research was funded by the Grant Agency of the Czech Technical University in Prague grant number SGS20/103/OHK1/2T/11.

**Institutional Review Board Statement:** Not applicable.

**Informed Consent Statement:** Not applicable.

**Data Availability Statement:** Not applicable.

**Conflicts of Interest:** The author declares no conflict of interest.

## References

1. Konovalov, A.A. Target tracking algorithm for passive coherent location. *IET Radar Sonar Navig.* **2016**, *10*, 1228–1233. [CrossRef]
2. Malanowski, M. Algorithm for target tracking using passive radar. *Int. J. Electron. Telecommun.* **2012**, *58*, 345–350. [CrossRef]
3. Malanowski, M.; Kulpa, K. Two methods for target localization in multistatic passive radar. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.* **2012**, *48*, 572–580. [CrossRef]
4. Choi, S.; Crouse, D.F.; Willett, P.; Zhou, S. Approaches to cartesian data association passive radar tracking in a DAB/DVB network. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.* **2014**, *50*, 649–663. [CrossRef]
5. Daun, M.; Berger, C.R. Track initialization in a multistatic DAB/DVB-T network. In Proceedings of the 11th International Conference on Information Fusion, Cologne, Germany, 30 June–3 July 2008; pp. 722–729. [CrossRef]
6. Hadi, M.A.; Umar, R.; Shoaib, M.; Bilal, M.; Jamil, K. Effectiveness of Deghosting Process for Multi-target Localization in Multistatic Passive Radar. In Proceedings of the 2018 15th European Radar Conference, Madrid, Spain, 26–28 September 2018; pp. 142–145. [CrossRef]
7. Wei, T.J.; Lun, Y.H. An empirical exploration of a simple deghosting method for multistatic radars. *IEEE Natl. Radar Conf. Proc.* **2015**, *2015*, 1440–1445. [CrossRef]
8. El Gonnouni, A.; Lehmann, F. Deghosting method for multiple target tracking in a single frequency network. In Proceedings of the 2014 International Radar Conference, Lille, France, 13–17 October 2014; pp. 1–6. [CrossRef]
9. Daun, M.; Koch, W. Multistatic target tracking for non-cooperative illumination by DAB/DVB-T. In Proceedings of the 2008 IEEE Radar Conference, Rome, Italy, 26–30 May 2008. [CrossRef]
10. Deb, S.; Yeddanapudi, M.; Pattipai, K.; Bar-Shalom, Y. A generalized s-d assignment algorithm for multisensor-multitarget state estimation. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.* **1997**, *33*, 523–538. [CrossRef]
11. Oh, S.; Russell, S.; Sastry, S. *Markov Chain Monte Carlo Data Association for Multiple-Target Tracking*; University of California: Berkeley, CA, USA, 2005; Volume 5, pp. 1–32. [CrossRef]
12. Mahler, R.P. Multitarget Bayes Filtering via First-Order Multitarget Moments. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.* **2003**, *39*, 1152–1178. [CrossRef]
13. Choi, S.; Crouse, D.; Willett, P.; Zhou, S. Multistatic target tracking for passive radar in a DAB/DVB network: Initiation. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.* **2015**, *51*, 2460–2469. [CrossRef]
14. Kulmon, P. Bayesian Deghosting Algorithm for Multiple Target Tracking. In Proceedings of the 2020 IEEE International Conference on Multisensor Fusion and Integration for Intelligent Systems (MFI), Karlsruhe, Germany, 14–16 September 2020; pp. 367–372. [CrossRef]
15. Griffiths, T.L.; Ghahramani, Z. Infinite Latent Feature Models and the Indian Buffet Process. Available online: <http://mlg.eng.cam.ac.uk/zoubin/papers/ibptr.pdf> (accessed on 14 July 2021).

16. Ghahramani, Z.; Griffiths, T.L.; Sollich, P. Bayesian Nonparametric Latent Feature Models. *Bayesian Stat.* **2007**, *8*, 1–25. [[CrossRef](#)]
17. Griffiths, T.L.; Ghahramani, Z. The Indian Buffet Process: An Introduction and Review. *J. Mach. Learn. Res.* **2011**, *12*, 1185–1224. [[CrossRef](#)]
18. Green, P.J. Reversible jump Markov chain Monte Carlo computation Bayesian model determination. *Biometrika* **1995**, *82*, 711–732. [[CrossRef](#)]
19. Cappé, O.; Robert, C.P.; Rydén, T. Reversible jump, birth-and-death and more general continuous time Markov chain Monte Carlo samplers. *J. R. Stat. Soc. Ser. B Stat. Methodol.* **2003**, *65*, 679–700. [[CrossRef](#)]
20. Hastie, D.I. Towards Automatic Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo. Ph.D. Thesis, University of Bristol, Bristol, UK, 2005.
21. Jain, S.; Neal, R.M. A Split-Merge Markov Chain Monte Carlo Procedure for the Dirichlet Process Mixture Model. *J. Comput. Graph. Stat.* **2004**, *13*, 158–182. [[CrossRef](#)]
22. Green, P.J.; Hastie, D.I. Reversible Jump MCMC. *Genetics* **2009**, *155*, 1391–1403.
23. Robert, C.P. The Metropolis-Hastings algorithm. *arXiv* **2015**, arXiv:1504.01896.
24. Sunnåker, M.; Busetto, A.G.; Numminen, E.; Corander, J.; Foll, M.; Dessimoz, C. Approximate Bayesian Computation. *PLoS Comput. Biol.* **2013**, *9*, e1002803. [[CrossRef](#)]
25. Gamerman, D.; Lopes, H.F. *Markov Chain Monte Carlo: Stochastic Simulation for Bayesian Inference*, 2nd ed.; Taylor & Francis: Abingdon, UK, 2006; p. 343.
26. Lopes, H.F. A Note on Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo; Technical Report. 2006. Available online: <http://hedibert.org/wp-content/uploads/2014/01/rjmmc.pdf> (accessed on 30 June 2021).
27. Malanowski, M. An algorithm for 3D target localization from passive radar measurements. *Photonics Appl. Astron. Commun. Ind. High-Energy Phys. Exp. 2009* **2009**, *7502*, 75021B. [[CrossRef](#)]
28. Chalise, B.K.; Zhang, Y.D.; Amin, M.G.; Himed, B. Target localization in a multi-static passive radar system through convex optimization. *Signal Process.* **2014**, *102*, 207–215. [[CrossRef](#)]
29. Kok, M.; Dahlin, J.; Schön, T.B.; Wills, A. Newton-based maximum likelihood estimation in nonlinear state space models. *IFAC-PapersOnLine* **2015**, *48*, 398–403. [[CrossRef](#)]
30. Fox, E.B.; Hughes, M.C.; Sudderth, E.B.; Jordan, M.I. Joint modeling of multiple time series via the beta process with application to motion capture segmentation. *Ann. Appl. Stat.* **2014**, *8*, 1281–1313. [[CrossRef](#)]
31. Fox, E.B.; Sudderth, E.B.; Jordan, M.I.; Willsky, A.S. Sharing Features among Dynamical Systems with Beta Processes. *Adv. Neural Inf. Process. Syst.* **2009**, *22*, 549–557.
32. Richardson, S.; Green, P.J. On Bayesian Analysis of Mixtures with an Unknown Number of Components. *J. R. Stat. Soc. Ser. B* **1997**, *59*, 731–792. [[CrossRef](#)]
33. Gershman, S.J.; Frazier, P.I.; Blei, D.M. Distance Dependent Infinite Latent Feature Models. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* **2015**, *37*, 334–345. [[CrossRef](#)] [[PubMed](#)]
34. Miller, J.W.; Harrison, M.T. A simple example of Dirichlet process mixture inconsistency for the number of components. *arXiv* **2013**, arXiv:1301.2708.
35. Brooks, S.P.; Gelman, A. General methods for monitoring convergence of iterative simulations. *J. Comput. Graph. Stat.* **1998**, *7*, 434–455. [[CrossRef](#)]
36. Castelloe, J.; Zimmerman, D. *Convergence Assessment for Reversible Jump MCMC Samplers*; Technical Report; Department of Statistics and Actuarial Science, University of Iowa: Iowa City, IA, USA, 2002.
37. Deonovic Benjamin, E.; Smith Brian, J. Convergence diagnostics for MCMC draws of a categorical variable. *arXiv* **2017**, arXiv:1706.04919.
38. Billingsley, P. Statistical Inference for Markov Processes. *Ann. Math. Stat.* **1961**, *31*, 12–49. [[CrossRef](#)]
39. Heck, D.W.; Overstall, A.M.; Gronau, Q.F.; Wagenmakers, E.J. Quantifying uncertainty in transdimensional Markov chain Monte Carlo using discrete Markov models. *Stat. Comput.* **2019**, *29*, 631–643. [[CrossRef](#)]

---

## Diskuze

V předchozí kapitole jsme představili výsledky samostatného výzkumu autora práce, které byly publikovány jako krátký článek na konferenci a také jako výrazně delší a rozšířená verze článku v impaktovaném časopise. Hlavním předmětem tohoto výzkumu byl vývoj nového algoritmu pro asociaci bistatických tracků, který je určen pro řešení přechodu mezi bistatickými a kartézským prostorem určování a vedení polohy cílů v systému MSPSR, který byl představen v kapitole 1. V této kapitole byla také provedena rešerše existujících způsobů řešení této problematiky, která lze najít v odborné literatuře. Na základě této rešerše byly také stanoveny základní požadavky na nově navrhovaný algoritmus, jejichž splnění je nezbytné pro dosažení lepších výsledků v porovnání se současným stavem. V této kapitole tedy srovnáme tyto požadavky stanovené v kapitole 1 s výsledky výzkumu prezentovanými v kapitole 2 a také shrneme dosažené výsledky včetně výsledku porovnání s konkurenčními algoritmy. V závěru kapitoly nastíníme další možné směry rozvoje navržené metody a další náměty pro její výzkum.

### 3.1 Vlastnosti algoritmu

Na úvod této sekce shrneme požadavky z kapitoly 1 které vyplývají z rešerše současných metod asociace bistatických tracků a deghostingu.

- Algoritmus musí být od počátečního návrhu určen pro plnou 3D lokalizaci cílů (poloha i výška) tak, aby ani nebránil asociaci pouze dvojice bistatických měření, která 3D vedení schopná nejsou.
- Algoritmus musí předpokládat, že multistatická konfigurace je obecného typu  $M/N$ .
- Vzhledem k tomu, že asociace měření a vedení tracků (ať již v bistatickém nebo v kartézském prostoru) je realizována pomocí Bayesovského modelování, měla by i asociace bistatických tracků být řešena pomocí tohoto přístupu.
- Výpočetní náročnost algoritmu musí být kontrolovatelná s ohledem na dostupné prostředky systému, tak aby nedocházelo k jeho zahlcení. V tomto ohledu se jako vhodná možnost nabízí randomizovaný přístup.
- Výsledný algoritmus by měl předčit běžně používané algoritmy s ohledem na objektivní kritéria hodnocení asociace bistatických tracků.

Požadavek návrhu asociačního algoritmu tak, aby byl plně kompatibilní s 3D vedením je splněn, a to především díky způsobu jakým jsou z cílové hustoty marginalizovány parametry polohy cíle. Jejich odhad je v každém kroku proveden pomocí Maximum-Likelihood (ML) odhadu buď přímo z rovnice (1.16) nebo ve zjednodušených případech pomocí uzavřených vzorců z článku [49]. Tímto postupem eliminujeme nejistotu v odhadnuté výšce cíle a stejně tak v odhadnuté rychlosti nebo její vertikální složce. Zároveň také celková posteriorní hustota pravděpodobnosti je určována nad 6D prostorem (3D poloha a 3D výška) výskytu cíle.

Jakékoli předpoklady o typu multistatické konfigurace (tedy předpoklady o počtu přijímačů či vysílačů) jsou eliminovány „zploštěním“ sítě párů pozemních stanic do lineární řady bistatických prostorů (lineární, protože v asociační matici tato řada tvoří osu řádků) bez ohledu na jejich vzájemné vztahy na základě sdílení (nebo nesdílení) vysílací nebo přijímací stanice. Jediný předpoklad, který se týká multistatické konfigurace je, že každý geometricky nezávislý bistatický prostor se v této řadě nachází jen jednou a proto každý přináší novou nezávislou polohovou informaci. Nicméně tento předpoklad není nijak restriktivní a je také z hlediska asociace bistatických tracků nutný.

Žádný z v literatuře dostupných přístupů k řešení asociace bistatických tracků doposud neposkytoval skutečně Bayesovský přístup. Tento přístup vyžaduje stanovení apriorní hustoty rozdělení nad hledanými parametry a také stanovení funkce věrohodnosti pozorovaných dat, za předpokladu znalosti hodnoty hledaných parametrů. V rámci námi vyvinutého přístupu je stanoveno apriorní rozdělení pro binární asociační matici mezi bistatickými tracky z různých bistatických prostorů a jednotlivými modelovanými cíli, jejichž počet je jednou z nepřímo hledaných (skrytých) proměnných v modelu.

Tato skutečnost, tedy neznámý (a vzhledem k podstatě úlohy také potenciálně neomezený) počet cílů klade vysoké nároky na tento prior, které dobře splňuje rozdělení které se v literatuře vyskytuje pod názvem Indian Buffet Process (IBP). Mimo splnění požadavků na nekladení restrikcí na počet sloupců asociační matice mezi bistatickými tracky a modelovanými cíli také jeho parametrizace umožňuje např. podněcovat k co největšímu sdílení těchto cílů mezi přiřazenými tracky. V praxi tak předáváme informaci, že pokud je to přípustné vzhledem k velikosti zbytkové chyby, preferujeme kartézské cíle sestavené z co největšího množství geometricky nezávislých bistatických tracků.

Potřeba stanovení apriorního rozdělení nad samotnými polohami modelovaných kartézských tracků je z praktických důvodů eliminována marginalizací těchto parametrů. Jejich odhad je (jak již bylo zmíněno v předchozím odstavci) tak redukován, pro dané asociační schema, na ML odhad. Tento postup je opodstatněn za prvé tím, že pro polohu cílů jsme v literatuře nenalezli žádné vhodné apriorní rozdělení, museli bychom se tedy uchýlit k nějaké formě neinformativního prioru. Za druhé, pokud by i samotné polohy měly být předmětem iterativního numerického odhadu, mohlo by to mít výrazný vliv na celkový počet iterací požadovaných k dosažení uspokojivých výsledků. Z tohoto pohledu se marginalizace jeví jako vhodný krok. Řešení odhadu posteriorní hustoty ve vytvořeném Bayesovském modelu je pak řešeno pomocí Reversible-Jump Markov Chain Monte Carlo (RJMCMC), které je voleno především kvůli neznámému počtu cílů, protože řetězec pak musí přecházet mezi stavy s různou dimensí.

S použitím iterativního RJMCMC souvisí i možnost kontroly výpočetní náročnosti. Nabízí se např. varianta nechat iterace běžet do doby, než vyprší časový limit (a systém musí zpracovat novou sadu dat), přičemž další výpočty (kartézské vedení) pracuje s doposud nejlepšími dosaženými výsledky. Samozřejmě, výpočet lze ukončit také před

vypršením časového limitu, pokud byl dosažen limitní počet iterací nebo diagnostika konvergence rozhodla o dosažení dostatečně kvalitních výsledků. Tento přístup je výrazným vylepšením oproti stávajícím výčtovým metodám, kde pozastavení výpočtu před jeho dokončením neposkytuje žádnou kvantitativní informaci o kvalitě doposud dosaženého výsledku.

Výsledky v publikovaných článcích potvrzují vyšší kvalitu asociace bistatistických tracků, které je dosaženo navrženým algoritmem v porovnání s dvěma stávajícími, nicméně jejich podrobnému rozboru se budeme věnovat v dalších odstavcích.

## 3.2 Analýza algoritmu

Běžným postupem ověření validity algoritmu asociace bistatistických tracků je porovnání pomocí simulovaných dat. Simulovaná data umožňují přímo kontrolu známých pozic cílů, které můžeme porovnat s pozicemi cílů které jsou výstupem z asociačního algoritmu. Na druhou stranu, velmi často se v literatuře můžeme setkat s ověřením, které kombinuje samotnou asociační část s kartézským vedením [29]. V případě ověření našeho algoritmu v článku [1] i [2] jsme zvolili Monte Carlo přístup k testování schopnosti algoritmu určit správné polohy (tedy správně sestavit bistatistické tracky).

Opakovanou simulací poloh cílů v zájmové oblasti, které pak byly přepočteny do bistatistických souřadnic, a následným vyhodnocením pomocí asociačního algoritmu jsme zjistili průměrné chování algoritmu pro různé polohy (a tudíž i různé geometrické vztahy) cílů. Mimo měření samotných cílů jsme simulaci obohatili o falešná měření, jejichž koncentrace roste úměrně počtu simulovaných cílů (což je relativně věrná simulace skutečného systému). Samotné výsledky vyhodnocení pomocí této simulace budou probrány v rámci samostatné sekce diskuze.

Protože samotný způsob nalezení řešení asociační úlohy je v případě navrženého algoritmu založený na MCMC metodě, bylo nezbytné ověřit i jeho konvergenci z hlediska markovského řetězce. Analytický důkaz konvergence markovského řetězce lze získat pouze pro speciální případy, nikoli však obecně. Proto se v MCMC metodách běžně uchylujeme k numerickému statistickému testování konvergence [66]. Problém s testováním konvergence v případě RJMCMC spočívá ve výběru sledované hodnoty, pro niž chceme ověřit konvergenci, což je přístup navrhovaný v [66,67] a který je běžně používaný pro numerické ověření konvergence v případě klasického MCMC.

Pro náš případ jsme tedy zvolili dvojí ověření. V prvním kroku jsme provedli statistické testování nulové hypotézy, že všechny testované části Markovských řetězců (získané jako druhá polovina z deseti různých řetězců z velmi dlouhých běhů našeho RJMCMC) obsahují náhodné proměnné pocházející ze stejného kategorického rozdělení. Tyto náhodné proměnné, pro každý vzorek získaných řetězců byly vytvořeny transformací na jednu skalární hodnotu, počet sestavených cílů (tedy, počet sloupců asociační matice v daném kroku). Detailní popis celé procedury lze nalézt v článku [2] a pro teoretický základ použité metody můžeme čtenáře odkázat na původní článek [68]. Statistickým testováním došlo k potvrzení nulové hypotézy na vysoké hladině pravděpodobnosti, že testované úseky všech deseti řetězců pocházejí z totožného rozdělení. Výsledek testu také říká, že toto společné rozdělení je s vysokou pravděpodobností stacionární pro markovské řetězce produkované naším algoritmem.

Mimo samotné konvergence jsme se také zabývali posteriorním rozdělením nad jednotlivými modely, které získané markovské řetězce navštívili. Modelem se v tomto případě rozumí množina sestavení cílů, tedy konkrétní asociační matice. Pro redukci problému s nestejnými dimensemi těchto matic můžeme uvažovat, že se každá matice redukuje na množinu *lof* kódů cílů, přičemž způsob získání těchto kódů je popsán v sekci 2.2.1.2. Nicméně i tyto množiny se mohou lišit počtem svých prvků. Proto je můžeme seřadit (např. podle pořadí kdy byl daný model poprvé objeven nějakým markovským řetězcem, a postupně očíslovat od 1 do  $N$ , přičemž množiny lišící se pouze v pořadí *lof* kódů mají stejné číslo. Z deseti Marovských řetězců, každý o 5000 vzorcích, jsme tímto postupem získali více než 400 modelů.

Samotná analýza je pak založena na postupu z [69], přičemž tato metodologie je navržena právě pro trans-dimezionální MCMC metody. Naše indexy množin *lof* kódů slouží jako proměnná  $z^t$  která pro každý prvek markovského řetězce označuje, který model je momentálně uvažován. Pomocí relativních četností jednotlivých modelů v řetězcích bychom mohli odhadnout posteriorní pravděpodobnosti těchto modelů, nicméně tento odhad postrádá statistický popis své nejistoty. A právě tento odhad poskytuje metodologie z [69] která je založena na Bayesovském odhadu přechodových pravděpodobností mezi jednotlivými modely přičemž jako apriorní rozdělení prvků přechodové matice mezi modely je zvoleno Dirichletovo rozdělení. Na základě této analýzy bylo zjištěno, že mezi navštívenými modely je pouze jeden s výrazně vysokou posteriorní pravděpodobností ( $\sim 0.7$ ) přičemž rozsah 99% intervalu pravděpodobnosti této hodnoty je  $< 0.1$ . Pravděpodobnosti ostatních modelů jsou oproti nejvýznačnějšímu zanedbatelné (i s ohledem na přesnosti určených posteriorních pravděpodobností). Poznamenejme, že v článku byla poskytnuta vizualizace, kde jsou modely přechíslovány tak, aby pravděpodobnosti byly seřazeny od největší po nejmenší. Toto řazení nijak nezkrsluje výsledky, protože řazení jednotlivých modelů není pevně dané a vizualizace tímto získává na přehlednosti.

### 3.3 Dosažené výsledky

souřadnice	minimum	maximum
$x$ [m]	$-2 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^4$
$y$ [m]	$-2 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^4$
$z$ [m]	$-2 \cdot 10^2$	$8 \cdot 10^3$
$v_x$ [m/s]	-50	50
$v_y$ [m/s]	-50	50
$v_z$ [m/s]	-25	10

Tabulka 3.1: Tabulka shrnující limity pro jednotlivé prvky 6D polohy cíle.

Dosažené výsledky jsme částečně popsali již v předchozích dvou sekcích. Součástí dosažených výsledků je splnění všech bodů z kapitoly 1 které obsahovaly požadavky na nově navržený algoritmus asociace bistatických tracků. Protože navržené řešení je založené na MCMC metodě, jsou součástí dosažených výsledků také statistické testy konvergence generovaných markovských řetězců. V této části se tedy již budeme věnovat poslední samostatné výsledkové části, a to je samotné nasazení nového algoritmu v simulované situaci a následné porovnání se schopností konkurenčních algoritmů tuto situaci řešit.



Simulovaný scénář je založený na jedné konkrétní multistatické situaci, která je typu 2/2, obsahuje tedy více než jeden přijímač a více než jeden vysílač. Použitím této multistatické konfigurace tedy umožníme testovat požadavky kladené na algoritmus. Jednotlivé stanice jsou uspořádány do tvaru diamantu, kdy na protilehlých vrcholech leží vždy stanice stejného typu. Poznamenejme, že se jedná o simulaci reálně nasazeného systému, který byl použit k testování algoritmů asociace detekcí k trackům v bistatickém prostoru v článku [45] a který byl vyvíjen pro potřeby Armády České Republiky (AČR). Tento systém je (z důvodu pokrytí) určen především pro vedení cílů uvnitř konvexního obrazce tvořeného stanicemi a v jejich blízkém okolí. Z toho důvodu jsme omezili generované kartézské souřadnice cílů v kartézském prostoru pomocí limitů v ose. Nastavené limity shrnuje Tab. 3.1.

Počet generovaných poloh cílů byl postupně volen v rozsahu (2, 10), přičemž tato volba vycházela především z našich zkušeností z reálných systémů kde počet nově zaváděných cílů (pokud k zavedení došlo) se pohyboval v tomto rozsahu. Přepočtem do bistatických souřadnic jednotlivých bistatických prostorů (párů přijímač - vysílač) jsme simulovali nejpravděpodobnější odhady poloh bistatických tracků. Tyto polohy jsme pak zašuměli pomocí známé kovarianční matice v bistatickém prostoru, přičemž hodnoty prvků této kovarianční matice jsou opět dány reálnými předpoklady dosažitelné přesnosti měření systému, jehož vysílače vysílají v pásmu L-Band [45].

Pro dosažení realističtější simulace jsme v bistatických prostorech také náhodně generovali polohy bistatických tracků, které neměly původ v žádném ze simulovaných cílů v kartézském prostoru. Taková simulace odpovídá situaci, kdy se v prostoru měření nachází cíl, který ale není dostatečně silně detekovatelný ve více bistatických prostorech, resp. v tolika bistatických prostorech, aby mohl být zavedený v prostoru kartézském. V reálné situaci ovšem takové bistatické tracky nejsme schopni odlišit od těch, které jsou vedené v dostatečně velkém množství bistatických prostorů a proto se asociace bistatických tracků musí účastnit veškeré bistatické tracky které prozatím nejsou součástí žádného kartézského vedení a zároveň jsou v bistatickém prostoru vedené (a aktualizované pomocí detekcí) po dostatečně dlouhou dobu, abychom si s vysokou pravděpodobností byli jistí, že se nejedná o tracky falešné. Protože v reálných systémech obvykle koncentrace neasociovatelných bistatických tracků roste s počtem cílů které se nacházejí v zájmovém prostoru, i v našem případě generujeme náhodné bistatické tracky v počtu momentálně simulovaných kartézských cílů. Tyto bistatické tracky jsou pak náhodně (s rovnoměrným rozdělením) rozprostřeny přes všechny bistatické prostory.

Následné vyhodnocení jsme pak provedli statisticky. Tedy, simulaci popsanou v předchozím odstavci, jsme pro každý simulovaný počet cílů provedli celkem stokrát a výsledné vyhodnocení výkonnosti získali jako průměr z dosažených výsledků pro jednotlivé simulace. Předmětem vyhodnocení je správné určení polohy cílů, které byly skutečně simulovány (TP, z anglického *True Positive*), určení polohy cíle který simulován nebyl (FP, z anglického *False Positive*) a neschopnosti určit polohu nějakého simulovaného cíle (FN, z anglického *False Negative*). Poznamenejme, že tento typ vyhodnocení je v rámci literatury o asociaci bistatických tracků zcela unikátní svou komplexností.

Kromě navrhovaného algoritmu jsme vyhodnocení provedli také se dvěma konkurenčními algoritmy pro asociaci bistatických tracků, které jsou založené na metodách z [29–31, 35, 46, 70, 71] a je tedy zjevné, že se jedná o často využívaný asociační postup se kterým chceme nově navrhovaný porovnat. Základním principem je sestavení hypotetických poloh cílů na základě formování dvojic (metoda průniku elips označena EI)

počet cílů	TP (nová metoda)	TP (EI)	TP (3D)
2	2.0	1.4	2.0
3	3.0	2.2	2.8
4	4.0	2.6	3.8
5	5.0	3.3	4.6
6	6.0	4.8	5.5
7	7.0	5.4	6.3
8	7.4	5.5	7.0
9	8.3	6.7	7.6
10	8.9	7.7	7.9

Tabulka 3.2: Tabulka dosažených výsledků pro metriku TP (správně určené polohy skutečně simulovaných cílů). Výsledky jsou zaokrouhleny na první desetinné číslo.

nebo trojic (formuje odhady v 3D prostoru, označena 3D) geometricky nezávislých bistatických tracků, přičemž tento přístup pro vhodné multistatické konfigurace ( $1/N$  nebo  $M/1$ ) umožňuje použití uzavřených vzorců pro odhad polohy cíle [26]. Sestavené kandidátní polohy se k sobě dále vzájemně statisticky asociují (na základě vypočtených kovariančních matic odhadnutých poloh) a testují se hypotézy o tom, jestli daný shluk poloh mohl vzniknout náhodným šumem v bistatických datech, nebo se jedná o systematický shluk s původem v cíli který se nachází v prostoru měření. Pro detailní popis algoritmu můžeme čtenáře odkázat na [70].

Jak již bylo zmíněno výsledkem vyhodnocení jsou průměrné hodnoty metrik TP a FN ze 100 nezávislých (Monte Carlo) simulací situace v bistatických prostorech. Dosažené výsledky pro metriku TP jsou shrnuté v Tab. 3.2 a pro metriku FN v Tab. 3.3. Z výsledků je patrné, že námi nově navržená metoda asociace bistatických tracků předčí konkurenční, běžně používané, v počtu správně rozpoznaných cílů (nejvyšší hodnoty) a tím pádem i v počtu nerozpoznaných (nejnižší hodnoty). Počet nadbytečných cílů, které algoritmus vytvoří ale neodpovídají simulované skutečnosti, shrnuje metrika FP. Tato metrika byla v publikovaných článcích vypočtena pouze pro nově navrhovaný algoritmus. K vyhodnocení pro algoritmy EI a 3D nedošlo proto, že i podle původního návrhu v článku [29] se počítá s filtrací hypotetických poloh cílů během fáze trackování v kartézském prostoru a proto těchto nadbytečných poloh cílů může být skutečně velké množství. Tento předpoklad se ovšem nijak nedotýká vyhodnocených metrik TP a FN a vyhodnocení se tedy omezilo na ně.

### 3.4 Budoucí práce

V předchozích třech odstavcích jsme detailně popsali dosažené výsledky navrhovaného algoritmu z hlediska původně stanovených požadavků (které jsme formulovali na základě rešerše literatury zabývající se asociací bistatických tracků), z hlediska analýzy a rozboru navrženého algoritmu a také z hlediska dosažených výsledků pomocí simulovaných bistatických dat, kde nám jako referenční hodnoty posloužily výsledky dosažené pomocí konkurenčních algoritmů. V závěrečné sekci této kapitoly se budeme zabývat oblastmi potenciálního dalšího rozvoje algoritmu který jsme v této práci navrhli.

počet cílů	FN (nová metoda)	FN (EI)	FN (3D)
2	0.0	0.6	0.0
3	0.0	0.8	0.2
4	0.0	1.4	0.2
5	0.0	1.7	0.4
6	0.0	1.2	0.5
7	0.0	1.6	0.7
8	0.6	2.5	1.0
9	0.7	2.1	1.4
10	1.1	2.3	2.0

Tabulka 3.3: Tabulka dosažených výsledků pro metriku FN (počet simulovaných cílů jejichž poloha nebyla určena). Výsledky jsou zaokrouhleny na první desetinné číslo.

### 3.4.1 Rozvoj modelu

První směr rozvoje se týká samotného modelu, pro nějž se snažíme získat posteriorní hustotu. Jak je zmíněno v kapitole 2, volíme apriorní rozdělení pravděpodobnosti pouze pro samotnou asociační matici ve tvaru Indian Buffet Processu (IBP), přičemž pro samotné polohy cílů apriorní rozdělení nevolíme a vlastně ani nezkoumáme posteriorní hustotu, neboť polohy jsou získány marginalizací na základě konkrétní asociace a to ve smyslu maximální věrohodnosti (ML). V rámci publikace článku [2] byla právě apriorní hustota polohy předmětem diskuze s jedním z recenzentů. V publikaci tvrdíme, že taková hustota není pro náš případ k dispozici a proto ji neuvažujeme. Recenzent tvrdil, že obecně takovou hustotu formulovat lze, nicméně neuvedl konkrétní námět. V případě vedení cílů mimo zóny válečného konfliktu, kde lze předpokládat jisté (i když ne předem dané) letové trasy se nabízí podobný postup jako v případě [72]. Z dlouhodobého pozorování určité oblasti, která může být definována jako oblast kde je daný systém schopen 3D vedení cílů, lze odvodit prostorové mapy, které mohou být dále použity jako apriorní hustota výskytu cílů).

Samotný výzkum by bylo vhodné provést i pro apriorní rozdělení asociační matice. V našem výzkumu jsme použili IBP, který byl vybrán na základě rešerše literatury protože splňuje kladené požadavky a svou parametrizací umožňuje příznivě ovlivnit výsledky inference. Na druhou stranu, v maticích produkovaných IBP nelze nijak zohlednit kategorizaci dat (tedy dělení na různé bistatické prostory) a už vůbec ne vyloučení obsazení jednotlivých prvků matice jedničkami tak, že k jednomu cíli jsou přiřazeny dva bistatické tracky z totožného bistatického prostoru. V rámci algoritmu samotného toto není problém, protože takové matice nejsou ani navrhovány. Na druhou stranu, i třídy ekvivalence těchto matic mají v IBP nenulovou pravděpodobnost. To vede k tomu, že určitá masa pravděpodobnosti v IBP leží nad třídami ekvivalence matic, které v rámci našeho modelu nepřipadají v úvahu. Tento jev pak může výrazně zpomalit konvergenci markovských řetězců, což je z hlediska nasazení v reálném provozu nevýhodné protože dochází k neekonomickému nakládání s výpočetními prostředky. Vývoj vhodného rozdělení pravděpodobnosti pro asociační matice by si vyžádal rozsáhlý teoretický výzkum který je výrazně nad rámec této dizertační práce.

S rozvojem modelu souvisí i hlubší teoretická analýza jeho vlastností. V předchozí sekci

jsme shrnuli výsledky jeho analýzy pomocí empirického vyhodnocení na základě dlouhých úseků produkovaných markovských řetězců. Použitá metodologie je založená na obecně uznávaných statistických metodách které se pro hodnocení vlastností MCMC používají. Na druhou stranu se lze velmi často setkat i s velice komplexními modely, pro než se podaří dokázat jejich vlastnosti teoretickou cestou a na dosažené výsledky se dá následně výrazně více spolehnout. Podobně jako v případě apriorního rozdělení pro asociační matice v našem modelu, i tato část výzkumu je časově náročná a mimo rámec této dizertační práce.

### 3.4.2 Vyhodnocení

V předchozí sekci jsme představili výsledky porovnání nově navrhovaného algoritmu s konkurenčními pro případ simulace několika cílů, jejichž bistatické polohy jsou zatížené šumem a některé z nich jsou falešné (neodpovídají skutečnému cíli). Jakkoli je toto vyhodnocení sofistikované v porovnání s ostatní literaturou, nejedná se o reálná data. Vyhodnocení na reálných datech s sebou vždy nese nečekané problémy (neshoda mezi skutečným šumem bistatických poloh a udávanými hodnotami, vyšší/nížší koncentrace neasociovatelných bistatických tracků, fluktuace detektability cílů a další) a proto je vždy rozhodujícím faktorem až funkčnost algoritmu v reálných situacích. Pro takové účely je ovšem nezbytné mít k dispozici reálný radarový systém (typu MSPSR), jehož pořizovací náklady jsou v řádech desítek milionů dolarů, a v něm nasazenou verzi asociačního algoritmu. Autor této práce, díky svému zaměstnání u firmy ERA a.s. která se vývojem takové technologie zabývá, má k podobným systémům přístup. Nicméně reálně pořízených nahrávek je k dispozici minimum a je obtížné v nich vytipovat zajímavou vzdušnou situaci (z hlediska počtu cílů). Samostatným problémem je pak to, že většina zmíněného vývoje se provádí pro účely obrany a to nejen České Republiky (ČR) a proto většina dat podléhá buď obchodnímu tajemství, nebo přímo utajení. Z tohoto důvodu v rámci dosavadního vývoje algoritmu nedošlo k ověření na reálných datech.

## Závěr

V této práci jsme se zabývali asociací bistatických tracků, které jsou výsledkem zpracování detekcí pořízených v jednotlivých párech přijímač - vysílač. Smyslem této asociace je přechod od bistatických souřadnic do souřadnic kartézských, které umožňují vedení cíle v zájmovém prostoru, přičemž tuto informaci již lze vizualizovat operátorovi systému. Asociace bistatických tracků je tak velmi důležitou součástí celého systému Multi-Static Primary Surveillance Radar (MSPSR).

V úvodní kapitole jsme se seznámili s principem bistatického radaru z hlediska určování polohy cílů. Definovali jsme základní bistatická měření, jejich geometrické i statistické vlastnosti. Seznámili jsme se se způsobem získání časové návaznosti které se dosahuje asociací bistatických měření k již vedeným cílům v bistatickém prostoru, přičemž tato měření jsou dále používána ke statistickému zpracování za účelem získání nejpravděpodobnější polohy cíle v rámci páru přijímač - vysílač. Popsali jsme požadavky na přechod z bistatického do kartézského prostoru který je limitován především vedením cíle v dostatečném počtu geometricky nezávislých bistatických prostorů.

Kromě vysvětlení základního cíle asociace bistatických tracků jsme zde také předložili rešerši postupů řešení této úlohy, které lze nalézt v dostupné literatuře. V rámci této rešerše jsme také identifikovali běžné nedostatky dostupných řešení, jako jsou např. konkrétní předpoklad typu multistatické konfigurace MSPSR systému (tedy předpoklad pouze jednoho přijímače či pouze jednoho vysílače) nebo předpoklad dostatečnosti určení polohy cíle v nějaké volené výšce (tedy nikoli plně 3D polohy a 3D rychlosti). Na základě těchto identifikovaných nedostatků jsme sestavili seznam požadavků na nově vyvíjený algoritmus, které musí splňovat. Na závěr první kapitoly jsme představili základní princip určení polohy a rychlosti cíle za předpokladu, že již máme k dispozici množinu bistatických tracků totožného cíle. Určení polohy cíle z bistatických tracků je nezbytnou a nedílnou součástí asociace bistatických tracků.

Ve druhé kapitole jsme představili výsledky vlastní autorské práce a to v podobě plných textů článků publikovaných na mezinárodní konferenci mezinárodní organizace Institut pro elektrotechnické a elektronické inženýrství (IEEE, z anglického *Institute of Electrical and Electronics Engineers*) a také v časopise s impakt faktorem Sensors (detailní informace o publikacích a podílu autora jsou v příloze A).

Oba články se zabývají návrhem nového algoritmu asociace bistatických tracků, přičemž metodologie je založená na Bayesovském modelování. Navržený Bayesovský model využívá Indian Buffet Process (IBP) jako apriorní hustotu pravděpodobnosti pro asso-

ciační matici mezi bistatickými tracky a navrhovanými kartézskými cíli. Toto konkrétní apriorní rozdělení jsme zvolili, protože umožňuje plynule přecházet mezi hypotézami o různém počtu kartézských cílů, které lze z bistatických tracků sestavit. Tato vlastnost je nezbytná, protože informace o počtu cílů není před provedením samotné asociace známa.

Z důvodu potřeby plynule přecházet mezi různými variantami počtu cílů (které jsou realizovány pomocí počtu sloupců asociční matice) jsme pro hledání aposteriorní hustoty pravděpodobnosti poloh cílů zvolili Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo (RJM-CMC) což je varianta MCMC vhodná právě pro tento typ problémů. Pro konkrétní asociční hypotézu jsme samotné polohy cílů hledali pomocí metody maximální věrohodnosti (ML) popsané v závěru první kapitoly.

Navržený způsob asociace bistatických tracků jsme v článku podrobili numerické analýze konvergence s ohledem na počet cílů i s ohledem na konkrétní modely (tedy konkrétní sadu kartézských cílů) a na základě statistického testování jsme konvergenci potvrdili. Schopnosti algoritmu určit správné polohy cílů jsme také otestovali pomocí sofistikované simulace bistatických tracků, které sloužili jaké zdrojová data pro asociaci. Výsledky asociace jsme následně porovnali se simulovanou realitou a vyhodnotili počty správně určených poloh cílů a počty cílů, jejichž polohy algoritmus vůbec nenalezl. Vyhodnocení jsme provedli také na dvou konkurenčních algoritmech které jsou běžně používány a jsou popsány v rešerši literatury z první kapitoly. Z tohoto porovnání, na základě 100 simulací bistatických tracků, jsme vypočetli průměrné hodnoty a pro simulované počty cílů jsme potvrdili, že nově navržený algoritmus vždy správně rozpozná větší množství simulovaných cílů než konkurenční algoritmy.

Ve třetí kapitole této práce jsme se pak zabývali diskuzí dosažených výsledků a to jak z hlediska analýzy samotného navrhovaného algoritmu, dosažených výsledků tak především z hlediska nedokončené práce, resp. jeho slabin. I přes to, že jsme identifikovali velké množství směrů možného rozvoje nové metody, prokázali jsme zároveň, že metoda funguje a lze ji použít pro asociaci bistatických tracků. Mimo to jsme také prokázali, že pomocí navrženého algoritmu lze potenciálně dosáhnout lepších výsledků než s použitím jiných, v literatuře běžně používaných postupů.

---

## Literatura

- [1] Kulmon, P. Bayesian Deghosting Algorithm for Multiple Target Tracking. *IEEE International Conference on Multisensor Fusion and Integration for Intelligent Systems*, volume 2020-Septe, 2020: pp. 367–372, doi: 10.1109/MFI49285.2020.9235215. URL <https://ieeexplore.ieee.org/document/9235215>
- [2] Kulmon, P. Reversible Jump MCMC for Deghosting in MSPSR Systems. *Sensors*, volume 21, 2021: p. 23.
- [3] ICAO. Guidance Material on Comparison of Surveillance Technologies. 2007, doi: [http://www.icao.int/APAC/Documents/edocs/cns/gmst\\_technology.pdf](http://www.icao.int/APAC/Documents/edocs/cns/gmst_technology.pdf).
- [4] Mahalanobis, P. C. On The Generalized Distance In Statisitcs. 1936.
- [5] Konstantinova, P.; Udwarev, A.; Semerdijev, T. A study of a target tracking method using Global Nearest Neighbor algorithm. *Vojnotehnicki glasnik*, 2006: pp. 160–167, ISSN 0042-8469, doi: 10.5937/vojtehg0602160r.
- [6] Blackman, S.; Popoli, R. *Design and Analysis of Modern Tracking Systems*. Artech House, 1999, 1230 pp.
- [7] Friendly, M.; Monette, G.; Fox, J. Elliptical insights: Understanding statistical methods through elliptical geometry. *Statistical Science*, volume 28, 2013: pp. 1–39, ISSN 08834237, doi: 10.1214/12-STS402.
- [8] Bar-shalom, Y.; Daum, F.; Huang, J. I. M. The Probabilistic DataAssociation Filter. *IEEE Control Systems Magazine*, volume 29, 2009: pp. 82–100, doi: 10.1109/MCS.2009.934469.
- [9] Musicki, D.; Evans, R.; Stankovic, S. Integrated probabilistic data association. *Transaction on Automatic Control*, volume 39, 1994: pp. 1237–1241, ISSN 16130073, doi: 10.1017/CBO9781107415324.004.
- [10] Baum, M. Linear-time JPDAF based on many-2-many approximation of marginal association probabilities. *Electronics Letters*, volume 51, 2015: pp. 1526–1528, ISSN 0013-5194, doi: 10.1049/el.2015.1411. URL <http://digital-library.theiet.org/content/journals/10.1049/el.2015.1411>

- [11] Blackman, S. Multiple hypothesis tracking for multiple target tracking. *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine*, volume 19, 2004: pp. 5–18, ISSN 0885-8985, doi: 10.1109/MAES.2004.1263228. URL <http://ieeexplore.ieee.org/lpdocs/epic03/wrapper.htm?arnumber=1263228>
- [12] Crouse, D. Basic tracking using nonlinear continuous-time dynamic models. *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine*, volume 30, 2015: pp. 4–41, ISSN 08858985, doi: 10.1109/MAES.2014.130074, target dynamic models.
- [13] Kalman, R. E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *Journal of Basic Engineering*, volume 82, 1960: p. 35, ISSN 00219223, doi: 10.1115/1.3662552. URL <http://fluidsengineering.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1430402>
- [14] Terejanu, G. Extended kalman filter tutorial. *Technical Report: Extended Kalman Filter Tutorial*, 2003: p. 7. URL <http://homes.cs.washington.edu/~todorov/courses/cseP590/readings/tutorialEKF.pdf>
- [15] Crouse, D. F. Itô-Taylor Expansion Moments for Continuous-Time State Propagation. 2019.
- [16] Kloeden, P. E.; Platen, E. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer-Verlag Berlin, second edition, 1995, ISBN 3-540-54062-8, 668 pp.
- [17] Arasaratnam, I.; Haykin, S.; Hurd, T. R. Cubature Kalman filtering for continuous-discrete systems: Theory and simulations. *IEEE Transactions on Signal Processing*, volume 58, 2010: pp. 4977–4993, ISSN 1053587X, doi: 10.1109/TSP.2010.2056923.
- [18] Stroud, A. H. *Approximate Calculation of Multiple Integrals*. Prentice-Hall International, 1971, 442 pp.
- [19] Cools, R. An encyclopaedia of cubature formulas. *Journal of Complexity*, volume 19, 2003: pp. 445–453, ISSN 0885064X, doi: 10.1016/S0885-064X(03)00011-6, zbl 1061.41020.
- [20] Lu, J.; Darmofal, D. L. Higher-Dimensional Integration With Gaussian Weight for Applications in Probabilistic Design. *SIAM Journal on Scientific Computing*, volume 26, 2004: pp. 613–624.
- [21] Orive, R.; Santos-Leon, J.; Spalevic, M. Cubature Formulae for the Gaussian Weight, Some Old and New Rules. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, volume 49, 2018: pp. 210–243, ISSN 10689613, doi: 10.1553/etna.
- [22] Cools, R. Advances in multidimensional integration. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, volume 149, 2002: pp. 1–12, ISSN 03770427, doi: 10.1016/S0377-0427(02)00517-4.
- [23] Arulampalam, M. S.; Maskell, S.; Gordon, N.; et al. A tutorial on particle filters for online nonlinear/nongaussian bayesian tracking. *Bayesian Bounds for Parameter Estimation and Nonlinear Filtering/Tracking*, volume 50, 2007: pp. 723–737, ISSN 1053587X, doi: 10.1109/9780470544198.ch73.



- [24] Sarrka, S. *Bayesian Filtering and Smoothing*. Cambridge University Press, third edition, 2014, 232 pp.
- [25] Cappe, O.; Godsill, S.; Moulines, E. An Overview of Existing Methods and Recent Advances in Sequential Monte Carlo. *Proceedings of the IEEE*, volume 95, 2007: pp. 899–924, ISSN 0018-9219, doi: 10.1109/JPROC.2007.893250. URL <http://www.irisa.fr/aspi/legland/ref/cappe07a.pdf>
- [26] Malanowski, M. Algorithm for target tracking using passive radar. *International Journal of Electronics and Telecommunications*, volume 58, 2012: pp. 345–350, ISSN 20818491, doi: 10.2478/v10177-012-0047-x.
- [27] Konovalov, A. A. Target tracking algorithm for passive coherent location. *IET Radar, Sonar and Navigation*, volume 10, 2016: pp. 1228–1233, ISSN 1751-8784, doi: 10.1049/iet-rsn.2015.0482. URL <http://digital-library.theiet.org/content/journals/10.1049/iet-rsn.2015.0482>
- [28] Deb, S.; Yeddanapudi, M.; Pattipaii, K.; et al. A generalized s-d assignment algorithm for multisensor-multitarget state estimation. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, volume 33, 1997: pp. 523–538, ISSN 00189251, doi: 10.1109/7.575891.
- [29] Daun, M.; Koch, W. Multistatic target tracking for non-cooperative illumination by DAB/DVB-T. *2008 IEEE Radar Conference, RADAR 2008*, 2008, doi: 10.1109/RADAR.2008.4720986.
- [30] Daun, M.; Berger, C. R. Track initialization in a multistatic DAB/DVB-T network. *Proceedings of the 11th International Conference on Information Fusion, FUSION 2008*, 2008: pp. 722–729, doi: 10.1109/ICIF.2008.4632282.
- [31] Daun, M. Deghosting in passive air surveillance systems. *11-th INTERNATIONAL RADAR SYMPOSIUM*, 2010: pp. 1–8.
- [32] Berger, C. R.; Daun, M.; Koch, W. Low complexity track initialization from a small set of non-invertible measurements. *Eurasip Journal on Advances in Signal Processing*, 2008, ISSN 16876172, doi: 10.1155/2008/756414.
- [33] Hack, D. E.; Patton, L. K.; Kerrick, A. D.; et al. Direct Cartesian detection, localization, and de-ghosting for passive multistatic radar. *Proceedings of the IEEE Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop*, 2012: pp. 45–48, ISSN 2151870X, doi: 10.1109/SAM.2012.6250538.
- [34] Yi, J.; Wan, X.; Zhao, Z.; et al. Evaluation of velocity threshold constraint to de-ghosting in single frequency network based passive radar. *Proceedings International Radar Symposium*, volume 2, 2013: pp. 1043–1048, ISSN 21555753.
- [35] Gonnouni, A. E.; Lehmann, F. Deghosting method for multiple target tracking in a single frequency network. *2014 International Radar Conference, Radar 2014*, 2014: pp. 1–6, doi: 10.1109/RADAR.2014.7060378.

- [36] Choi, S.; Crouse, D. F.; Willett, P.; et al. Approaches to cartesian data association passive radar tracking in a DAB/DVB network. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, volume 50, 2014: pp. 649–663, ISSN 00189251, doi: 10.1109/TAES.2013.120431.
- [37] Choi, S.; Crouse, D.; Willett, P.; et al. Multistatic target tracking for passive radar in a DAB/DVB network: Initiation. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, volume 51, 2015: pp. 2460–2469, ISSN 00189251, doi: 10.1109/TAES.2015.130270.
- [38] Wei, T. J.; Lun, Y. H. An empirical exploration of a simple deghosting method for multistatic radars. *IEEE National Radar Conference - Proceedings*, volume 2015-June, 2015: pp. 1440–1445, ISSN 10975659, doi: 10.1109/RADAR.2015.7131221.
- [39] Hadi, M. A.; Umar, R.; Shoaib, M.; et al. Effectiveness of Deghosting Process for Multi-target Localization in Multistatic Passive Radar. *2018 15th European Radar Conference, EuRAD 2018*, 2018: pp. 142–145, doi: 10.23919/EuRAD.2018.8546637.
- [40] Yi, J.; Wan, X.; Cheng, F.; et al. Deghosting for Target Tracking in Single Frequency Network Based Passive Radar. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, volume 51, 2015: pp. 2655–2668, ISSN 00189251, doi: 10.1109/TAES.2015.130424.
- [41] Kleef, J. V.; Bergmans, J.; Kester, L.; et al. Multiple-hypothesis trilateration and tracking with distributed radars. *2006 9th International Conference on Information Fusion, FUSION*, 2006, doi: 10.1109/ICIF.2006.301617.
- [42] Chalise, B. K.; Zhang, Y. D.; Amin, M. G.; et al. Target localization in a multi-static passive radar system through convex optimization. *Signal Processing*, volume 102, 2014: pp. 207–215, ISSN 01651684, doi: 10.1016/j.sigpro.2014.02.023. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.sigpro.2014.02.023>
- [43] Malanowski, M. An algorithm for 3D target localization from passive radar measurements. *Photonics Applications in Astronomy, Communications, Industry, and High-Energy Physics Experiments 2009*, volume 7502, 2009: p. 75021B, ISSN 0277786X, doi: 10.1117/12.837596.
- [44] Tharmarasa, R.; Nandakumaran, N.; McDonald, M.; et al. Resolving transmitter-of-opportunity origin uncertainty in passive coherent location systems. *Signal and Data Processing of Small Targets 2009*, volume 7445, 2009: p. 744506, ISSN 0277786X, doi: 10.1117/12.826410.
- [45] Kulmon, P.; Stukovska, P. Assessing Multiple-Target Tracking Performance Of GNN Association Algorithm. 2018, ISBN 9783736995451, pp. 1–10.
- [46] Klein, M.; Millet, N. Multireceiver passive radar tracking. *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine*, volume 27, 2012: pp. 26–36, ISSN 08858985, doi: 10.1109/MAES.2012.6373909.
- [47] Quarteroni, A.; Sacco, R.; Saleri, F. *Numerical Mathematics*. Springer-Verlag New York, 2000, 669 pp.

- [48] Mellen, G.; Pachter, M.; Raquet, J. Closed-Form Solution for Determining Emitter Location Using Time Difference of Arrival Measurements. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, volume 39, 2003: pp. 1056–1058.
- [49] Malanowski, M.; Kulpa, K. Two methods for target localization in multistatic passive radar. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, volume 48, 2012: pp. 572–580, ISSN 00189251, doi: 10.1109/TAES.2012.6129656.
- [50] Daun, M.; Berger, C. R.; Koch, W. Track initialization from incomplete measurements. *INFORMATIK 2006 - Informatik für Menschen, Beiträge der 36. Jahrestagung der Gesellschaft für Informatik e.V. (GI)*, volume 1, 2006: pp. 334–338.
- [51] Daun, M.; Kaune, R. Gaussian Mixture initialization in passive tracking applications. *13th Conference on Information Fusion, Fusion 2010*, 2010, doi: 10.1109/icif.2010.5711980.
- [52] Kaune, R. Gaussian Mixture ( GM ) Passive Localization using Time Difference of Arrival ( TDOA ). 2009, pp. 2375 – 2381.
- [53] Griffiths, T. L.; Ghahramani, Z. The Indian Buffet Process: An Introduction and Review. *Journal of Machine Learning Research*, volume 12, 2011: pp. 1185–1224, ISSN 15324435, doi: 10.1016/j.biotechadv.2011.08.021.Secreted.
- [54] Walck, C.; Group, P. P. Hand-book on STATISTICAL DISTRIBUTIONS for experimentalists. *Hand-book on STATISTICAL DISTRIBUTIONS for experimentalists*, 2007: pp. 26–35, ISSN  $\mu$ null $\mu$ , doi: 10.1002/etep.2265. URL <http://www.stat.rice.edu/~dobelman/textfiles/DistributionsHandbook.pdf>
- [55] Ghahramani, Z.; Griffiths, T. L.; Sollich, P. Bayesian Nonparametric Latent Feature Models. *Bayesian Statistics*, volume 8, 2007: pp. 1–25, ISSN 1098-6596, doi: 10.1017/CBO9781107415324.004. URL <http://ai.stanford.edu/~tadayuki/papers/miller-phd-dissertation11.pdf>
- [56] Griffiths, T. L.; Ghahramani, Z. Infinite latent feature models and the Indian buffet process. 2005.
- [57] Robert, C. P.; Casella, G. *Monte Carlo Statistical Methods*. Springer-Verlag New York, i edition, 1999, 521 pp.
- [58] Roberts, G. O.; Rosenthal, J. S. General state space markov chains and MCMC algorithms. *Probability Surveys*, volume 1, 2004: pp. 20–71, ISSN 15495787, doi: 10.1214/154957804100000024.
- [59] Green, P. J. Reversible jump Markov chain Monte Carlo computation Bayesian model determination. *Biometrika*, volume 82, 1995: pp. 711–732.
- [60] Green, P. J.; Hastie, D. I. Reversible jump MCMC. 2009.
- [61] Brooks, S.; Gelman, A.; Jones, G. L.; et al. *Handbook of Markov Chain Monte Carlo*. Chapman & Hall/CRC, i edition, 2011, 620 pp.

- [62] Center, I. A. Conference Authors: Post Your Papers. 2021. URL <https://conferences.ieeeauthorcenter.ieee.org/get-published/post-your-paper/>
- [63] Center, I. A. Conference Authors: About Transferring Copyright to IEEE. 2021. URL [conferences.ieeeauthorcenter.ieee.org/get-published/about-transferring-copyright-to-ieee/](https://conferences.ieeeauthorcenter.ieee.org/get-published/about-transferring-copyright-to-ieee/)
- [64] Center, I. A. IEEE Article Sharing and Posting Policies. 2021.
- [65] Contributors, W. Open Access - Wikipedia , the Free Encyclopedia. 2021. URL [https://en.wikipedia.org/wiki/Open\\_access](https://en.wikipedia.org/wiki/Open_access)
- [66] Brooks, S. P.; Gelman, A. General methods for monitoring convergence of iterative simulations)? *Journal of Computational and Graphical Statistics*, volume 7, 1998: pp. 434–455, ISSN 15372715, doi: 10.1080/10618600.1998.10474787.
- [67] Brooks, S.; Gelman, A. Some Issues in Monitoring Convergence of Iterative Simulations. *Computing Science and Statistics*, 1998: pp. 30–36.
- [68] Benjamin, E. D.; Brian, J. S. Convergence diagnostics for MCMC draws of a categorical variable. *arXiv*, 2017, ISSN 23318422.
- [69] Heck, D. W.; Overstall, A. M.; Gronau, Q. F.; et al. Quantifying uncertainty in transdimensional Markov chain Monte Carlo using discrete Markov models. *Statistics and Computing*, volume 29, 2019: pp. 631–643, ISSN 15731375, doi: 10.1007/s11222-018-9828-0.
- [70] Koch, W. Advanced Target Tracking for Applications in Multistatic Systems. *Educational Notes RTO-EN-SET-133*, 2011: pp. 1–32.
- [71] Franken, D.; Zeeb, O. Tracking and data fusion with the Hensoldt Passive Radar System. *MIKON 2018 - 22nd International Microwave and Radar Conference*, 2018: pp. 404–407, doi: 10.23919/MIKON.2018.8405238.
- [72] Opitz, F.; Dästner, K.; Roseneckh-köhler, B. V. H.; et al. Data Analytics and Machine Learning based on Trajectories. *NATO SET-262 RSM on artificial intelligence for military multisensor fusion*, 2018: pp. 1–12.
- [73] Pokorný, P.; Šmejkal, F.; Kulmon, P.; et al. Numerical solution of deformation of circular membrane of liquid lens under uniform hydrostatic pressure. 2017, ISBN 9781510611054, ISSN 1996756X, doi: 10.1117/12.2269505.
- [74] Pokorný, P.; Šmejkal, F.; Kulmon, P.; et al. Calculation of nonlinearly deformed membrane shape of liquid lens caused by uniform pressure. *Applied Optics*, volume 56, 2017, ISSN 21553165, doi: 10.1364/AO.56.005939.
- [75] Pokorný, P.; Šmejkal, F.; Kulmon, P.; et al. Modelling of influence of spherical aberration coefficients on depth of focus of optical systems. 2017, ISBN 9781510611054, ISSN 1996756X, doi: 10.1117/12.2270082.

- [76] Pokorný, P.; Šmejkal, F.; Kulmon, P.; et al. Deformation of a prestressed liquid lens membrane. *Applied Optics*, volume 56, 2017, ISSN 21553165, doi: 10.1364/AO.56.009368.
- [77] Pokorný, P.; Kulmon, P.; Šmejkal, F.; et al. Srovnání metod výpočtu tvaru membrány kapalinové čočky zatížené rovnoměrným tlakem. *Jemná mechanika a optika*, volume 62, 2017: pp. 148 – 154.
- [78] Kulmon, P.; Stukovska, P.; Hermanek, A. Singular Spectrum Analysis of Bistatic Tracks. 2019, ISBN 9781728117157, pp. 76–80, doi: 10.1109/SPS.2019.8881969.
- [79] Kulmon, P.; Stukovska, P. Bistatic Track Association Based on Singular Spectrum Analysis. 2019.



## Podíl autora na publikacích

Doktorské studium autora probíhalo od 1.10.2016 do roku 2022. Do konce roku 2017 probíhalo studium na Katedře fyziky pod vedením Prof. Mikše na oboru Fyzikální a materiálové inženýrství. Po té došlo ke změně katedry (Katedra inženýrské informatiky), oboru (Systémové inženýrství ve stavebnictví a investiční výstavbě) a také školitele, jímž se stal Doc. Demel. Výčet publikací je tedy rozdělen na období působení na Katedře fyziky a období působení na Katedře inženýrské informatiky.

### A.1 Publikace za období 1.10.2016 - 31.12.2017

Publikace na kterých se autor podílel (až do 25% spoluautorství) během svého působení na Katedře fyziky přehledně shrnuje tabulka A.1.

článek	typ	rok	počet autorů	autorský podíl [%]
[73]	stat' (sborník, SCOPUS, SPIE)	2017	8	12.5
[74]	článek (SCOPUS, IF - 1.980)	2017	8	12.5
[75]	stat' (sborník, SCOPUS, SPIE)	2017	6	16.67
[76]	článek (SCOPUS, IF - 1.980)	2017	8	12.5
[77]	článek	2017	4	25

Tabulka A.1: Tabulka shrnující podíl autora na jednotlivých publikacích na Katedře fyziky.

### A.2 Publikace za období od 1.1.2018

Publikace na kterých se autor podílel během svého působení na Katedře inženýrské informatiky přehledně shrnuje tabulka A.2. V případě dvou nejnovějších publikací je autor jediným autorem.

článek	typ	rok	počet autorů	autorský podíl [%]
[45]	stat <sup>2</sup> (sborník, SCOPUS, IEEE)	2018	2	80
[78]	stat <sup>2</sup> (sborník, SCOPUS, IEEE)	2019	3	60
[79]	stat <sup>2</sup> (sborník, SCOPUS, IEEE)	2019	2	80
[1]	stat <sup>2</sup> (sborník, SCOPUS, IEEE)	2020	1	100
[2]	článek (SCOPUS, IF - 3.576)	2021	1	100

Tabulka A.2: Tabulka shrnující podíl autora na jednotlivých publikacích na Katedře inženýrské informatiky.