

Institute of Applied Mathematics

Ing. Petr Siegl, Ph.D.

Steyrergasse 30/III  
8010 GrazTel. +43 316 873 8126  
Faxsiegl@tugraz.at  
www.math.tugraz.at/~siegl/

Posudek oponenta na diplomovou práci Bc. Lukáše Heribana

Graz, 16. května 2022

Název práce: *Nelokální aproximace obecných relativistických delta interakcí*

Předložená diplomová práce se zabývá jednodimenzionálním Diracovým operátorem s obecně nesamosdruženou bodovou interakcí. Toto téma je velmi aktuální a výborně zapadá do intenzivního studia spektrálních a funkcionálně analytických vlastností nesamosdružených a navíc relativistických operátorů v současné matematické literatuře.

Práce je rozdělena do pěti kapitol. V úvodu je stručně shrnuta fyzikální motivace, první matematické práce (Šeba, 1989 a Benvegnu a Dabrowski, 1994) o samosdružených bodových interakcích pro Diracův operátor a také cíle práce. Druhá kapitola je nejprve zaměřena na definici Diracova operátoru s bodovou interakcí (Def. 2.1.1), ověření, že tento operátor je hustě definovaný a uzavřený (Thm. 2.1.2), a nalezení sdruženého operátoru (Thm. 2.1.4). Dále jsou studovány nelokální aproximace bodových interakcí a je dokázána stejnoměrná konvergence rezolvent (Thm. 2.2.1 a 2.2.2). Třetí kapitola se zabývá spektrální a pseudospektrální analýzou Diracova operátoru s bodovou interakcí a její nelokální aproximací. Spektrum pro bodové interakce je zcela určeno (Thm. 3.1.1), je pozorován efekt náhlých spektrálních přechodů (Thm. 3.2.1) a tento je dále vysvětlen pomocí provedené pseudospektrální analýzy (Thm. 3.3.1). Vlastní hodnoty pro nelokální aproximace jsou popsány pomocí algebraické rovnice (Thm. 3.4.1), je vyšetřen charakter bodového spektra mimo esenciální spektrum (Thm. 3.4.2) a je také dokázána konvergence vlastních hodnot v případě izolované vlastní hodnoty limitního operátoru s bodovou interakcí. Ve čtvrté kapitole je detailně studována nerelativistická limita v případě obecných bodových interakcí (Thm. 4.2.1) i nelokálních aproximací (Thm. 4.3.1). Poslední kapitola stručně shrnuje dosažené výsledky.

Práce je velmi pečlivě vypracovaná, jasně dokládá úspěšné studium pokročilých partií funkcionální analýzy i vybraných vědeckých článků a především obsahuje množství nových vlastních výsledků, které jsou důkladně odvozeny a dokázány. Student jednoznačně splnil zadání diplomové práce, navíc dosažené výsledky jsou publikovatelné v odborné literatuře.

Na studenta mám tyto otázky a podněty k zamyšlení pro případný další výzkum:

1. Ve větě 3.4.3 se dokazuje konvergence vlastních hodnot pro nelokální aproximace. Je možné získat přesnější výsledek s odhadem na rychlost konvergence?

2. V citovaném článku [14] je zavedena klasifikace nesamosdružených bodových interakcí pro Laplacův operátor na grafu pomocí existence Cayleyho transformace matic popisujících interakce. Spektrální přechody pro Diracův operátor se zdají být analogické situaci pro Laplacův operátor při přechodu mezi regulární a iregulární interakcí. Pro možné další studium Diracova operátoru s bodovými interakcemi by bylo vhodné se pokusit zobecnit zmíněnou klasifikaci, případně i pro operátory na grafech, a prozkoumat její souvislost s pozorovanými spektrálními přechody.
3. Obsažené výsledky jsou jednodimenziální. Jaké největší (pokud nějaké) komplikace je potřeba očekávat při pokusu o zobecnění výsledků do vyšších dimenzí?

Vzhledem k výše uvedenému zcela jednoznačně navrhuji hodnotit tuto diplomovou práci známkou **A – výborně** a doporučuji ji k obhajobě inženýrského titulu.

Ing. Petr Siegl, Ph.D.