

Geometrické principy navigace

Geometric Principles of Navigation

Šárka Voráčová

*Dept. of Applied Mathematics, Fac. of Transportation Sciences, CTU Prague
Na Florenci 25, 110 00 Praha, Czech Republic
email: voracova@fd.cvut.cz*

Abstract. Navigation is defined as the science of getting a craft or person from one place to another. The historical development of navigation embraces great geometrical principles, the practical design of instruments of observation and wide-ranging methods of calculation. The geometrical nature of methods has not changed since the days of sail and offers an interesting historical perspective for any applied mathematics course.

Similarly, the problem of Apollonius is closely related to the location problems in radio and satellite navigation. These ancient problems are still important in context of new technologies and new navigation systems.

Keywords: Astronavigation, Hyperbolic navigation, Multilateration, GPS

Klíčová slova: Astronavigace, hyperbolická navigace, Multilaterace, GPS

1 Úvod

Pod pojmem navigace rozumíme umění nalézt cestu k danému cíli, neztratit se na dlouhých cestách a znát svou polohu na moři i na souši. V průběhu věků se postupy zásadním způsobem měnily a spolu s novými přístroji a technologiemi se proměňovaly až do dnešní podoby.

Mnohé mají historické i současné metody společné – klíčová role určení času, využití nebeských těles či významných bodů a odvození polohy použitím geometrických metod. Základní principy navigace mohou dobře posloužit jako aplikační úlohy geometrie na základní či střední škole. Je zábavnější měřit úhly sextantem než úhloměrem, návodnější je využít stejnolehlost při měření objektu Jakobovou holí než jen rýsováním do sešitu. S pochopením principu určení zeměpisných souřadnic objevíme důmyslnost starých navigačních přístrojů a naučíme se pozorněji dívat na oblohu nad námi.

Až do 15 století je pro navigování na moři primární nautické spočtení, navigování podle hvězd jej jen doplňuje. Astronavigaci si vyžádaly až zaoceánské plavby.

2 Astronavigace

Astronavigace se v současné době používá především na moři, ačkoliv v^ohistorii sehrála nemalou roli i při expedicích na neprobádaných kontinentech.

S rozvojem satelitní navigace její význam klesá, z životně důležité dovednosti se stává jen koníčkem pro nadšence, kteří podlehli kouzlu pohledu do sextantu.

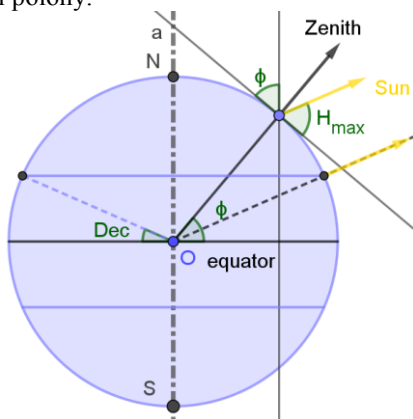
K orientaci podle hvězd se na severní polokouli využívá zejména Polárka, která se nachází v blízkosti světového pólu, v souhvězdí Malého vozu. Pro pozorovatele na Zemi se hvězdy i Slunce otáčejí kolem Polárky proti směru hodinových ručiček. Jižní světový pól se hledá mnohem obtížněji, neboť se v jeho blízkosti nevyskytuje žádná nápadnější hvězda. Jižní pól leží na prodloužení delší osy souhvězdí Jižní kříž směrem k jasné hvězdě Achernar.

Měření zeměpisné šířky ϕ je relativně snadné, proto staří mořeplavci upřednostňovali plavbu podél rovnoběžky. Pro zjištění zeměpisné šířky na severní polokouli stačí změřit úhel, pod kterým vidíme Polárku, viz. obrázek 1. K určení výšky hvězdy nad horizontem se používala řada pomůcek, od těch nejjednodušších (kamal, Jakubova hůl) až po ty přesnější (astrolab, kvadrant, oktant, sextant). Použití otočných zrcadel a barevných filtrů u sextantu, umožnilo pozorování Slunce, a tím zpřesnit navigaci během dne. Ovšem ani v 15. století nebylo měření na lodi nijak spolehlivé. Kryštof Kolumbus v roce 1498 udává, že se výška Polárky měnila z 5° na 15° [4]. Tehdy byla vzdálenost Polárky od pólu $3,5^\circ$, Kolumbus tedy měřil s chybou 180 NM.

S použitím sextantu a námořního almanachu můžeme metodou kulminace Slunce v pravé poledne zjistit zeměpisnou šířku i délku. Z výšky Slunce nad horizontem v pravé poledne H_{max} a znalosti deklinace Dec pro daný den zjistíme zeměpisnou šířku ϕ .

$$\phi = 90^\circ + Dec - H_{max}$$

Pro určení zem. délky je nezbytné znát přesný čas na nultém poledníku, tzv. GHA (Greenwich hour angle). GHA v době kulminace Slunce určuje přímo zeměpisnou délku naší polohy.



Obr. 1: Metoda kulminace Slunce – určení zeměpisné šířky i délky

Pro přesnější měření je třeba provést korekce vyplývající z výšky oka pozorovatele nad hladinou, lomu světla a rozdílu v horizontu pozorovatele a nebeským horizontem v rovníku. Pro podrobnější obeznámení s metodou

doporučují návodnou příručku astronavigace [7]. Metoda kulminace Slunce není zdaleka jedinou, během staletí bylo vyvinuto bezpočet důmyslných přístrojů a metod [7, 8].

Astronavigace a nautické spočtení jsou na otevřeném oceánu hlavní navigační metody až do druhé světové války. Teprve až s objevem radiových vln přišly nové, spolehlivější metody. Během druhé světové války se radar (Radio Detection and Ranging) stal běžnou součástí protivzdušné obrany.

Obecně lze říci, že klasický radar pracuje v polárních souřadnicích, vzdálenost detekovaných objektů je určována pomocí časové korelace vysílaného a přijímaného signálu. My se zaměříme na geometricky zajímavější způsob tzv. hyperbolické navigace, založené na časovém rozdílu příjmu signálů z různých stanic (TDOA – Time Difference of Arrival).

3 Hyperbolická navigace

Hyperbolická navigace byla poprvé použita ve zvukových systémech akustické lokalizace. Geometricky na stejném principu pracovaly i radiové systémy LORAN a GEE, nezávisle vyvíjené v USA a Velké Británii během druhé světové války [1].

Doc. Vlastimil Pech z výzkumného pracoviště Československé lidové armády se hyperbolickým navigačním systémem inspiroval, jen úlohu přijímače a vysílače otočil. V 60. letech vyvinul první pasivní radiolokátor Kopáč, následovaly další modely Ramona a Tamara, až v roce 1995 byl vyvinut první funkční prototyp světoznámého radiolokátoru Věra.

3.1 Věra

Věra patří mezi tzv. pasivní radiolokátory, to znamená, že pouze přijímá elektromagnetickou energii z okolí a sám žádnou nevysílá. Věra se skládá nejméně ze tří časově synchronizovaných přijímacích stanic, které zároveň zjišťují polohu letounu.

Vzdálenost cíle od přijímací stanice jsou přímo úměrné době, po jakou signál putoval. Pokud by dvě stanice přijaly signál ve stejný okamžik, pak leží sledovaný cíl na ose spojnic těchto stanic. Pokud je mezi příjmem signálů časový posun, je geometrickým místem bodů hyperbola. Na základě rozdílu v příjmu signálů z letadla na dvě stanice určíme hyperbolu, jejíž ohniska jsou dána polohou stanic. Další dvojice určí stejným způsobem druhou hyperbolu a poloha sledovaného cíle je v průsečíku hyperbol.

Jelikož Věra neurčuje vzdálenost cíle na základě odrazu signálu, je úspěšnější i při odhalování tzv. neviditelných letadel. Pokud ale letadlo vypne svůj letový radar, je pro Věru také neviditelné.

Mocnějším nástupcem Věry může být systém „Silent Guard“ vyvinutý v roce 2013. Jeho technologie PCL (Passive Coherent Location) nespoleská na radiový signál vysílaný cílem, ale pouze parazituje na stávajícím televizním a radiovém vysílání [5, 11].

Na principu zjištění rozdílu času přijetí signálu mezi jednotlivými stanicemi (TDOA – Time Difference Of Arrival) pracuje i nově zaváděná technologie k detekci polohy letadel používaná pro řízení provozu na letišti pod zkratkou MLAT.

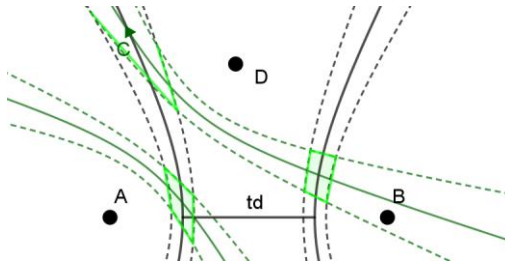
3.2 Multilaterace (MLAT)

V terénu jsou rozmístěny časově synchronizované přijímače signálů z palubních odpovídačů. V určitém okamžiku vyše sledovaný cíl impulsní signál, jenž se rychlostí světla šíří směrem k přijímacím stanicím. Časovému rozdílu v příjmu signálů odpovídá v rovině hyperbola s ohnisky v poloze přijímacích stanic, jejichž časový posun je vyhodnocován. Při 2D navigaci stačí vyhodnotit příjem na tři stanice. Analogicky pro prostorovou navigaci uvažujeme množinu poloh na rotačním dvoudílném hyperboloidu a pro určení polohy vyhodnocuje příjem minimálně čtyř stanic. Nejednoznačnost polohy řeší použitý software, například pro danou dvojici přijímačů neuvažujeme obě části hyperboloidu, protože víme, ke které stanici dorazil signál dříve.

MLAT systémy dávají možnost zvýšení kapacity a propustnosti vzdušného prostoru a zároveň poskytují větší přesnost, než jaké možné dosáhnout s jinými současně využívanými zařízeními pro sledování nebo navigaci. ČR je v oblasti multilaterace na světové špičce vývoje, podnik Řízení letového provozu patří mezi průkopníky MLAT [12]. Systém byl spuštěn v roce 1999 a od roku 2002 je schopný plně nahradit tradiční sekundární radary.

Největší slabinou systému je nedodržení časové synchronizace, protože chyba času $1\mu\text{s}$ vyvolá chybu v řádech metrů. Aby bylo možné využít MLAT pro prostorovou navigaci, je potřeba vyhodnotit odchylku v závislosti na konstelaci stanic vůči sledovanému cíli. Přesnost multilaterace je určována, podobně jako GPS, pomocí koeficientu PDOP (Position Dilution of Precision), jehož hodnoty jsou dány výlučně geometrickým rozmístěním stanic vůči cíli. Koeficient PDOP je definován jako poměr standardních odchylek výsledné vzdálenosti a°naměřeného času.

Pokud se hyperboly protínají kolmo, je při stejné odchylce naměřeného času oblast nepřesnosti menší, než při průniku pod ostrým úhlem (obrázek 2).



Obr. 2: Vliv chyby měření času na výslednou lokalizaci – PDOP

Explicitní odvození vztahu pro PDOP geometrickou cestou je ale komplikované. Například na letišti Václava Havla je v současnosti 15 stanic, je třeba započítat rušivé odrazy a stínění budov.

4 Satelitní navigace

Ačkoliv by se na první pohled mohlo zdát, že hyperbolická navigace je geometricky zcela odlišná od lokalizace polohy pomocí GPS, není tomu tak. Již Isaac Newton ukázal, že Apolloniův problém nalézt kružnici, jež se dotýká tří daných kružnic je ekvivalentní nalezení rozdílu vzdáleností od tří daných bodů. K řešení problému použil metody ne nepodobné současně používaným algoritmům [2].

V současnosti je na světě více než 500 miliónů přijímačů, většina z nich se nachází v mobilních telefonech. Přesnější přístroje využívající dvou přijímačů pracují s přesností 1 cm, levné přístroje v mobilních telefonech pracují se střední odchylkou okolo 15 m pouze vyhodnocením tzv. pseudovzdáleností [9]. Pseudovzdálenost je hodnota, která v sobě představuje skutečnou vzdálenost k satelitu, ale také různé odchylky.

Základní princip satelitní navigace spočívá v trilateraci, tedy nalezení místa ze tří vzdáleností. Praktické určení polohy je ale zkomplikováno různým časem vysílače a přijímače, chybami způsobenými průchodem atmosférou, či špatným aktuálním rozmístěním satelitů.

Klíčovou roli pro lokalizaci hraje přesné určení času, proto je každá satelitní stanice vybavena atomárními hodinami. Čas přijímače synchronizován není, časovou odchylku na hodinách přijímače je třeba spočítat. K tomu je zapotřebí sledovat alespoň čtyři satelity.

Geometricky je problém možno formulovat jako Apolloniovu úlohu v^oprostoru. Hledáme kulovou plochu, která se dotýká čtyř daných kulových ploch. Polohy satelitů představují středy kulových ploch, pseudovzdálenosti určují jejich poloměry. Neznámá časová odchylka přijímače vůči všem satelitům je stejná a určuje poloměr hledané kulové plochy.

Algoritmy aplikované v GPS pro vyhodnocení polohy z jednoho přijímače jsou numerické. Prvním krokem je určení pozorovacích rovnic vyjádřením pseudovzdáleností z viditelných satelitů. Pokud známe údaje ze čtyř satelitů neležících v jedné rovině, dává soustava jediné řešení. Dráhy satelitů jsou ale nastaveny tak, že z každého necloněného bodu na Zemi vidíme minimálně 6 satelitů. V takovém případě použijeme metodu vážených nejmenších čtverců. Váhu jednotlivým měřením přiřazujeme podle aktuální geometrické konstelace (větší váhu mají ty satelity, které vidíme pod větším úhlem) nebo Gaussovou metodou (Kalmanův filtr). Podrobný popis metod používaných v satelitní navigaci je v [3, 9,10].

5 Závěr

Během posledních dvaceti let se díky satelitním technologiím podstatným způsobem změnil náš přístup k řešení navigačních problémů. Přesné přístroje jsou cenově dostupné pro každého, jsou montovány do aut, lodí, letadel i dětských kočárků. Zdálo by se, že již není třeba umět číst mapy, že jsou zbytečné informační tabule a ukazatele na cestách. Není tomu tak. Astronavigace je stále přednášena na vojenských akademiích, letadla jsou nadále zaměřována radarovými systémy. Satelitní navigace stávající lokalizační metody využívá, doplňuje a zpřesňuje.

S novými technologiemi navigace přicházejí nové možnosti pro vzájemné využívání stávajících i nových systémů, řeší se kombinace satelitní a pozemní navigace spolu s optimalizačními problémy, jež je potřeba řešit pro velké objemy dat v reálném čase.

Literatura

- [1] W. T. Dickinson: *The LORAN-C System Of Navigation*, Washington, Dc: Jansky & Bailey, 1962
- [2] J. Hoshen: „The GPS equations and the Problem of Apollonius” in *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 32, no. 3, pp. 1116-1124, 1996
- [3] E. D. Kaplan, Ch. J. Hegarty: *Understanding GPS: Principles and Applications*, Arctech House, 2006
- [4] D. Sadler: „Astronavigation Through the Ages - A History of Nautical Astronomy“, in *Journal of Navigation*, 21(3), 370-371. 1968
- [5] Z. Seiner : „Po Tamaře a Věře sestrojili Češi další unikátní radar”, *Právo*, přístupné [online](#), září 2012
- [6] N. Sirola: *A Method for GPS Positioning Without Current Navigation Data*, Diplomová práce, Tampere University of Technology, 2001
- [7] P. Scheirich: *Základy astronavigace pro začátečníky*, [online](#) 2018
- [8] P. Scheirich: „Jak se neztratit na moři, námořní navigace ve stáletích před GPS“, in *Vesmír* 97/570, 2018
- [9] D. Štumpf: *Jak funguje GPS*, bakalářská práce MFF UK, 2017
- [10] G. Taylor, G. Blewitt: *Intelligent Positioning: GIS-GPS Unification*, John Wiley & Sons, Ltd, 2006
- [11] Tisková zpráva: „Český Tichý strážce vidí i neviditelná letadla“, *Armádní noviny*, přístupné [online](#) 15. 5. 2013
- [12] M. Ujcová: *Model multilateračního systému pro řízení letového provozu v ČR*, Disertační práce VŠB – TUO, Ostrava, 2014