České vysoké učení technické v Praze

Fakulta elektrotechnická
Katedra kybernetiky
Multi-robotické Systémy

Plánování trajektorií minimalizující energii při agilním letu bezpilotního vzdušného prostředku

Bakalářská práce

Josef Král

Praha, srpen 2025

Studijní program: Kybernetika a robotika
Vedoucí: Ing. Robert Pěnička, Ph.D.

ZADĆNĉ BAKALĆŘSK£ PRĆCE

I. OSOBNĉ A STUDIJNĉ ĐDAJE

Pś²jmen²: **Kr§l** Jm®no: **Josef** Osobn² ¦²slo: **491973**

Fakulta/¼stav: **Fakulta elektrotechnick§**

Zad§vaj²c² katedra/¼stav: **Katedra kybernetiky**

Studijn² program: **Kybernetika a robotika**

II. ĐDAJE K BAKALĆŘSK£ PRĆCI

N§zev bakal§śsk® pr§ce:

Pl§nov§n² trajektori² minimalizuj²c² energii pśi agiln²m letu bezpilotn²ho vzduġn®ho prostśedku

N§zev bakal§śsk® pr§ce anglicky:

Planning Minimum-energy Trajectories in Agile Flight of Unmanned Aerial Vehicle

Pokyny pro vypracov§n²:

1. Seznamte se s existuj²c²mi pś²stupy pl§nov§n² trajektori² pro bezpilotn² vzduġnĨ prostśedek minimalizuj²c² energii potśebnou pro let mezi zadanĨmi body [1]. Seznamte se s algoritmy pl§nov§n² trajektori² minimalizuj²c² dobu letu pro agiln² let bezpilotn²ho vzduġn®ho prostśedeku, jako napś²klad [2].
2. Navrhnďte a implementujte algoritmus pl§nov§n² trajektori² kterĨ minimalizuje energii letu bezpilotn²ho vzduġn®ho prostśedku mezi dvďma a v²ce body rozġ²śen²m/upraven²m metody [2].
3. Ovďśte funk¦nost navrġen® metody a porovnejte spotśebu energie trajektori² oproti trajektori²m minimalizuj²c²m ¦as [2] a tak® trajektori²m kter® vyuġ²vaj² polynomi§ln² reprezentaci [4].
4. Ovďśte navrġen® pl§novac² metody v simulaci.

Seznam doporu¦en® literatury:

[1]. F. Morbidi, R. Cano and D. Lara, "Minimum-energy path generation for a quadrotor UAV," 2016 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), Stockholm, Sweden, 2016, pp. 1492-1498, doi: 10.1109/ICRA.2016.7487285.
[2]. Krystof Teissing, Matej Novosad, Robert Penicka and Martin Saska. Real-time Planning of Minimum-time Trajectories for Agile UAV Flight. IEEE Robotics and Automation Letters ():1-8, 2024.
[3]. Romero, Angel, Robert Penicka, and Davide Scaramuzza. 2022. ñTime-Optimal Online Replanning for Agile Quadrotor Flightò. IEEE Robotics and Automation Letters 7 (3): 7730-7737.
[4]. Wang, Zhepei, Hongkai Ye, Chao Xu, and Fei Gao. "Generating large-scale trajectories efficiently using double descriptions of polynomials." In ICRA, pp. 7436-7442, 2021.
[5]. L. Bauersfeld, D. Scaramuzza, (2022). Range, endurance, and optimal speed estimates for multicopters. IEEE Robotics and Automation Letters, 7(2), 2953-2960.

Jm®no a pracoviġtďď vedouc²(ho) bakal§śsk® pr§ce:

Ing. Robert Pďni¦ka, Ph.D. Multirobotick® syst®my FEL

Jm®no a pracoviġtďď druh®(ho) vedouc²(ho) nebo konzultanta(ky) bakal§śsk® pr§ce:

Datum zad§n² bakal§śsk® pr§ce: **03.02.2025** Term²n odevzd§n² bakal§śsk® pr§ce: 15.08.2025____

Platnost zad§n² bakal§śsk® pr§ce: **20.09.2026**

_____
prof. Dr. Ing. Jan Kybic
podpis vedouc²(ho) ¼stavu/katedry

_____
prof. Mgr. Petr P§ta, Ph.D.
podpis prodďkana(ky) z povďśen² dďkana(ky)

© ČVUT v Praze, Design: ČVUT v Praze, VIC

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědom², že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí² pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací².
Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

Datum převzetí zadání

Podpis studenta

© ČVUT v Praze, Design: ČVUT v Praze, VIC

Abstract

Minimizing trajectory energy is essential to extend the ight time and e ciency of autonomous (UAVs) due to the limited battery capacity. This work deals with trajectory replanning that uses a simpli ed point-mass model to minimize the energy consumption of a multirotor UAV. A method for calculating trajectory energy based on the UAV thrust acceleration is proposed. Furthermore, we present an algorithm based on the gradient method to minimize trajectory energy consumption by optimizing thrust acceleration and velocity. Finally, we compare the energy consumption of trajectories with time-minimizing trajectories and also with those using polynomial representation.

Keywords Unmanned Aerial Vehicles, Energy

Abstrakt

Minimalizovan energie trajektorie je kvli omezenosti kapacity baterie nezbytne pro prodlouzen doby letu a efektivity autonomnch bezpilotnch prostredku (UAVs). Tato prace se zabyva prepanovanm trajektorie, ktera vyuzva zjednodusereho modelu hmotneho bodu, s clem minimalizovat spotrebu energie multirotoroveho UAV. Je zde navrzen postup vypoctu energie trajektorie na zaklade tahoveho zrychlen UAV. Dale predstavujeme algoritmus zalozeny na gradientn metode pro minimalizaci spotreby energie trajektorie pomoc optimalizace tahoveho zrychlen a rychlosti. Nakonec porovnavame spotrebu energie trajektori s trajektoriemi minimalizujcmi cas a take s temi, ktere vyuzvaj polynomialn reprezentaci.

Klcova slova Bezpilotn prostredky, energie

Obsah

1 Uvod 1

2 Souvisejc práce 3

3 Metodologie 5
3.1 Point mass model trajektorie 5
3.2 Osová synchronizace 5
3.3 Limited Thrust Decomposition 6
3.4 Energie letu 7
3.5 Optimalizace zrychlení 8
3.6 Optimalizace rychlosti 9

4 Výsledky 10
4.1 Charakteristika motoru 10
4.2 Optimalizace zrychlení 11
4.3 Optimalizace rychlosti 14
4.4 Porovnání metod 16
4.4.1 dráha P_1 18
4.4.2 dráha P_2 23
4.4.3 dráha P_3 28
4.4.4 dráha P_4 33

5 Závěr 39

6 Literatura 40

A Dodatek 42

1 Uvod

Bezpilotní letající prostředky (UAV) se stávají pro jejich široké využití velmi populárními v různých odvětvích. Díky své flexibilitě, manévrovatelnosti, možnosti nasazení v těžko přístupných oblastech a v dnešní době i s velkou schopností autonomie nacházejí různá uplatnění, jako je např. monitorování [12]. Omezená kapacita baterie představuje jeden z hlavních technických limitů návrhu a provozu UAV. Minimalizace spotřeby energie se prodlužuje doba letu, a zároveň délka letu, čímž se zvyšuje jeho efektivita. Proto se minimalizace spotřeby stává důležitým faktorem v plánování trajektorie UAV. Při nasazení UAV v kritických situacích, jako je pátrání a záchrana, kde je potřeba generování trajektorie v reálném čase, je důležité zohlednit spotřebu energie, neboť jej efektivní využití ovlivňuje operační schopnosti UAV.

Tato práce se zabývá přeplánováním trajektorií s minimální spotřebou energie pro agilní multirotorové UAV. Pro trajektorie s více průletovými body jsou předem určeny stavy počátečního a koncového bodu, konkrétně jejich poloha a rychlost. Ostatní body jsou určeny pouze svou polohou, nikoliv rychlostí, která je však potřebná pro výpočet trajektorie. Úlohou plánování trajektorie minimalizující energii je nalezení optimálních rychlostí v průletových bodech a také nalezení optimálních tahových zrychlení v jednotlivých segmentech mezi průletovými body.

Většina prací na generování trajektorie v reálném čase [3], [7] se zabývala minimalizováním času, nikoliv minimalizováním energie, ať už se jedná o různé modely reprezentace trajektorie, jako je polynomiální nebo Point-Mass model (PMM). Nejnovějším přístupem modelu PMM pro minimalizaci času je metoda Limited thrust decomposition (LTD) [3] a [5], která rozkládá maximální požadované tahové zrychlení do jednotlivých os, aby minimalizovala čas segmentu a také optimalizuje rychlosti v průletových bodech. Tato metoda je rovněž využitelná pro minimalizaci spotřeby energie, neboť rozlož maximální tahové zrychlení do jednotlivých os v jednotlivých segmentech.

Výsledky studie [6] ukazují, že pro různé rychlosti letu UAV jsou různé délky a doby letu, tedy že existuje optimální rychlost pro maximální dolet. V navázanosti na tuto práci jsme udělali reálný experiment na ověření existence minima energie vzhledem k použitý tahového zrychlení. Naměřené hodnoty času při různých tahových zrychleních a z nich vypočtené hodnoty energie jsou uvedeny v Tabulce A.1, přičemž závislost energie na tahovém zrychlení je znázorněna na Obrázku 1.1. Tato zjištění ukazují, že minimalizace doby letu nevede k minimalizaci spotřeby energie, a že má smysl se cíleně zabývat minimalizací spotřeby energie multirotorů UAV.

V této práci se k reprezentaci trajektorie používá metoda PMM [3], která zjednodušuje model UAV tím, že uvažuje jen translační pohyb. Pro rozklad tahového zrychlení do jednotlivých os je využita metoda LTD. Pro stanovení spotřeby energie odvozujeme vztah pro výpočet energie trajektorie z tahového zrychlení UAV. Poté optimalizujeme tahové zrychlení jednoho segmentu trajektorie pomocí gradientní metody [22]. Následně pro celou trajektorii nalezneme minimální energii optimalizováním vektoru rychlostí v průletových bodech a to rovněž pomocí metody gradientního sestupu [22]. Nakonec experimentálně porovnáme spotřebu energie trajektorie této metody minimalizace energie s metodou minimalizující čas [3] a také s trajektorií, která využívá polynomiální reprezentaci k optimalizaci ryvu, čtvrté derivace polohy [10].

Obrazek 1.1: Experimentalne overena zavislost mezi energi E a velikost tahoveho zrychlen a^T

Z experimentu vyplyva, ze spotreba energie trajektorie s optimalizovanymi tahovymi zrychlenmi se snzila priblizne o 20 %, a v prpade minimalizace energie zahrnujc optimalizovan rychlost se spotreba snzila priblizne o 30 % v porovnan s trajektori minimalizujc cas [3]. Nicmene nejnizs spotrebu energie mela trajektorie s polynomialn reprezentac [10], spotreba energie byla vci metode minimalizujc cas o alespon 40 % nizs.

2 Souvisejc prace

V oblasti planovan trajektori agilnho UAV existuje mnoho prstupu, ktere mozeme rozdelit na polynomialn reprezentaci, optimalizacn metody nebo metody zalozene na vzorkovan. Pro nasucel preplanovan trajektorie s minimaln energi jsou dulezite metody, ktere pracuj v realnem case.

Metoda hmotneho bodu [9] je aproximacn metoda, ktera uvazuje pouze translacn pohyb UAV a rotacn dynamiku multirotoru zanedbava. Tato aproximace zjednodusuje model UAV, a tm padem i vypocetn dobu, a proto je vhodna pro planovan trajektorie v realnem case. Pro ulohu minimalizovan casu trajektorie, ktera vygeneruje PMM trajektorii, je pouzit Pontryaginuv minimaln princip [24], jehoz vysledkem je bang-bang policy [1] v prpade trajektori s omezenym zrychlenm a bang-singular-bang policy [19] pro omezen zrychlen a rychlosti.

V praci [1] byla pouzita omezen na akceleraci, ale nebyla zde vyresena synchronizace os trajektorie v multidimenzionalnm prostoru. Tuto problematiku res v praci [5], kde navc predstavuj novy prstup, ktery neomezuje zrychlen v kazde ose, ale omezuje celkove tahove zrychlen UAV. Toto celkove tahove zrychlen je pomoc algoritmu Limited Thrust Decomposition rozlozeno do jednotlivych os, aby se minimalizoval cas trajektorie.

Pro zpresnen modelu je v praci [3] krome gravitacn akcelerace pouzita i odporova akcelerace [13] multirotoru, ktera linearne zavis na rychlosti letu UAV. V praci [16] predstavuj dynamicky model multirotoru s odporovou akcelerac rotoru, ktery vsak nezohlednuje odpor vetru, ani tuhost vrtul. Model take neuvazuje zavislost mezi odporovou akcelerac motoru a tahovou akcelerac. Vylepseny model tahove sly ardcho schematu v praci [18] zohlednuje odpor motoru pri vypoctu tahu a orientace multirotoru. V praci [14] model sice bere v uvahu odpor rotoru pro vypocet rychlosti a uhlove akcelerace multirotoru, ale k tomu potrebuje odhady zrychlen a ryvu UAV, ktere vetsinou nejsou zname.

Pro generovan trajektorie v realnem case je casto pouzvana polynomialn metoda pro jej nzkou vypocetn narocnost. Odstranenm derivacnch omezen [23] dynamiky modelu jsou trajektorie reprezentovane polynomy diferencialne ploche. Vsechny stavy trajektorie lze popsat pomoc polohy a natocen multirotoru a jejich vyssch derivac. Vyhodou polynomialn reprezentace je snadne zskan vsech derivac.

V praci [21] byla tato metoda vyuzita k vypoctu trajektorie s minimalnm trhnutm, ctvrtou derivac polohy, v realnem case resenm kvadratickeho programu v algebraickem tvaru. V praci [10] pouzili polynomialn reprezentaci trajektorie k minimalizaci ryvu a trhnut trajektorie; v dsledku toho docha k optimalizaci energie trajektorie.

Pro ulohu minimalizace casu trajektorie metoda PMM vychazela ze zjednodusovan dynamiky UAV a polynomialn metoda nevyuzvala plny potencial motoru dky plochosti trajektorie. Naproti tomu metoda vyuzvajc hierarchicky prstup [7] zalozeny na vzorkovan a postupnem zvysovan slozitosti modelu UAV efektivne minimalizuje cas trajektorie.

Metody planovan a rzen multirotorovych UAV v prostred s prekazkami pro minimalizaci letu byly prekonany metodami rzen pomoc neuronove site [15]. Nevyhodou ale bylo spatne vnman okol kvli omezenemu zornemu poli kamery a podaktuovanosti multirotoru. Prstup [4] zalozeny na strojovem ucen kombinuje imitacn ucen se zpetnovazebnm ucenm (RL). Nejdrve se pomoc RL trenuje okoln vnman s prstupem ke vsem stavum casove mi-

nimaln trajektorie, pote s vyuzitm imitacnho ucen se prenesou vsechny znalosti na "zaka", ktery vnma okol pouze skrze kameru.

V praci [8] je problem minimalizace doby letu v prostred s prekazkami resen pomoc hlubokeho strojoveho ucen a klasickeho topologickeho planovan cest k natrenovan robustnch rdicch neuronovych st pro minimaln cas letu. Prstup vyuzva generovan topologicke vedouc cesty pomoc pravdepodobnostn mapy, novou formulaci ukolu, ktera kombinuje maximalizaci postupu podel vedouc cesty s vyhybanm se prekazkam, a treninkovou strategii postupreho ucen pro natrenovan neuronoveste.

V praci [17] se zabyvaj efektivitou multirotoru UAV, aby zvysili jeho ucinnost. Jednou z moznost z pohledu hardwaru je snzen hmotnosti UAV. Pro zvysen efektivity se uvazuje modelovan aerodynamiky, kde se bere vuvahu vliv uznych druhu odporu, ci zvysen vztlaku UAV vlivem male vysky nad terenem. Prace [6] pro vypocet dosahu, vydrze a optimaln rychlosti UAV vyuzva vlastn model baterie, model elektromotoru a simulator aerodynamiky multirotoru. Obe prace [17] a [6] experimentalne potvrdily, ze existuje optimaln rychlost letu pro maximaln dolet. Prace [20] pro urcen trajektorie s minimaln energi vyuzva model bezkartacoveho DC motoru a dynamicky model kvadrotoru. Spotreba energie je spocitana z uhlovych akcelerac motoru. Krome minimalizace energie prace [20] res minimalizaci casu trajektorie pro zadanou celkovou spotrebu UAV.

3 Metodologie

V teto kapitole popseme metody potrebne pro minimalizaci energie trajektorie. V Sekci 3.1 je popsan Point mass model trajektorie pro jednu osu [3], [5]. Pro vytvoren trajektorie ve vcedimenzionalnm prostoru je potreba osova synchronizace [3], [5], ktera je uvedena v Sekci 3.2. V Sekci 3.3 je uvedena metoda Limited trust decomposition [3], ktera neuvazuje osove omezen akcelerace, ale celkovou velikost tahove akcelerace UAV. V Sekci 3.4 je uveden vypocet energie segmentu. V Sekcch 3.5 a 3.6 jsou popsany algoritmy pro optimalizaci tahoveho zrychlen a optimalizaci rychlosti s clem minimalizovat energii trajektorie. De nice PMM trajektorie vycha z prac [3] a [5].

3.1 Point mass model trajektorie

Trajektorie letu UAV se obecne nacha v n-dimenzionalnm prostoru a je de novana polohou $p \in R^n$ a rychlost $v \in R^n$ pocatecnho a koncoveho bodu a polohou trat'ovych bodu, ktere trajektorii dale rozdeluj na segmenty. Uvazujeme pouze segmenty, jejichz pocatecn a koncove body nejsou soumstne. Na uvod predpokladejme, ze jsou zname i rychlosti v techto bodech.

Pro zjednodusen si popseme trajektorii jednoho segmentu v jednorozmernem prostoru pomoc modelu hmotneho bodu [5]. Segment je urcen pocatecnm a koncovym stavem, tj. polohami p_0, $p_2 \in R$ a rychlostmi v_0, $v_2 \in R$. Pro zrychlen predpokladame omezen dane tzv. bang-bang policy, cmz existuje bod $p_1 \in R$, ve kterem docha ke zmene zrychlen. Matematicky popis segmentu je podle [5]

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0 + v_0 t_1 + \frac{1}{2} a_1 t_1^2; \\ p_2 &= p_1 + v_1 t_2 + \frac{1}{2} a_2 t_2^2; \\ v_1 &= v_0 + a_1 t_1; \\ v_2 &= v_1 + a_2 t_2; \end{aligned} \tag{3.1}$$

kde t_1 a $t_2 \in R$ predstavuj casy a jejich soucet T_{tr} udava celkovy cas trajektorie segmentu, jak je de novano v [5].

$$T_{tr} = t_1 + t_2 \tag{3.2}$$

Pricemz omezen zrychlen dane tzv. bang-bang policy nabyva podle [3] nasledujcch hodnot:

$$a_i \in \{ a_{min} ; a_{max} \}; \; i = 1; 2; \; a_i \in R: \tag{3.3}$$

Jak uvad [3, p. 3]: "Nepredpokladame prpad, kdy $a_1 = a_2$, protoze to odpovda $t_1 = 0$, nebo $t_2 = 0$, coz nam ponechava dve kombinace moznych hodnot zrychlen a_1 a a_2."

3.2 Osova synchronizace

Pro vce-dimenzionaln prostor spocteme trajektorii segmentu pro kazdou osu zvlast', kdy omezen celkoveho zrychlen UAV je rovnomerne rozdeleno do vsech os. Nicmene pri prechodu z jedno-dimenzionalnho prostoru do vce-dimenzionalnho nastava problem se synchronizac os [5]. Protoze chceme minimalizovat cas, vezmeme si za referencn celkovy cas

T_{sync} nejvetsi cas ze vsech os. Pro ostatni osy vypocteme trajektorie znovu s preskalovanim zrychlen koeficientem tak, aby cas segmentu v dane ose byl roven referencnimu casu. Popis trajektorie pro kazdou osu je nasledne podle [5]

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0 + v_0 t_1 + \frac{1}{2} a_1 t_1^2; \\ p_2 &= p_1 + v_1 t_2 + \frac{1}{2} a_2 t_2^2; \\ v_1 &= v_0 + a_1 t_1; \\ v_2 &= v_1 + a_2 t_2; \\ T_{sync} &= t_1 + t_2; \end{aligned} \tag{3.4}$$

Jak se uvad v [5], takove resen vsak nemusi vzdy existovat. V takovem prpade se zrychlen pro osu zamen podle pravidla:

$$a_{1_{new}} = a_{2_{old}} \tag{3.5}$$

$$a_{2_{new}} = a_{1_{old}} \tag{3.6}$$

a cely vypocet se opakuje.

3.3 Limited Thrust Decomposition

Protoze je pri osove synchronizaci na zacatku celkove zrychlen rozdeleno mezi jednotlive osy rovnomerne, je vysledne tahove zrychlen menis nez maximalne povolene. Z toho duvodu byl v praci [3] navrzen algoritmus, ktery rozloz celkove tahove zrychlen tak, aby alespon v jednom bode segmentu dosahlo sve maximaln povolene hodnoty. Zaroven tato metoda minimalizuje cas trvan segmentu. V [3] je zavedeno omezen na velikost maximaln tahove sly f_{max} dky provazanosti troseho zrychlen s vektorem tahoveho zrychlen. Prepocet omezen maximaln tahove sly na maximum tahoveho zrychlen a^T_{max} je podle [3]

$$a^T_{max} = \frac{f_{max}}{m}; \tag{3.7}$$

kde m je hmotnost multirotoru.

V PMM modelu [3] je pro zpresnen modelu take zohledneno gravitacn zrychlen $g = \begin{bmatrix} 0; 0; g \end{bmatrix}^T$ a odporove zrychlen $d = \begin{bmatrix} d_x; d_y; d_z \end{bmatrix}$, kterie je zavisle na rychlosti letu. "Zrychlen multirotoru a^B trajektorie mus po celou dobu $t \in [0; T_{tr}]$ sphovat podmnku (3.8)."[3, p. 3]

$$\| a^T(t) \| = \| a^B(t) - d(t) - g \| \leq a^T_{max}. \tag{3.8}$$

Kvuli teto nelinearn podmnce a bang-bang policy zrychlen je uloha v [3] de novana jako

$$\begin{aligned} \{a^B_1; a^B_2\} &= \arg \min_{a^B_1; a^B_2} T_{tr}(a^B_1; a^B_2) \\ \text{s.t.:} \quad \| a^B(t) - d(t) - g \| &= \| a^T \| \leq a^T_{max}; \quad t \in [0; T_{tr}]; \\ a^B_1 &= [a^B_{1_x}; a^B_{1_y}; a^B_{1_z}]^T; \\ a^B_2 &= [a^B_{2_x}; a^B_{2_y}; a^B_{2_z}]^T; \\ a^B_i(t) &= a^B_{1_i}; \quad \text{pro } t \in [0; t_{1_i}]; \quad \text{pro } i \in \{x; y; z\} \\ a^B_i(t) &= a^B_{2_i}; \quad \text{pro } t \in [t_{1_i}; T_{tr}]; \quad \text{pro } i \in \{x; y; z\} \end{aligned} \tag{3.9}$$

kde $a^B_{1_i}$ je zrychlen multirotoru v i-te ose v prvnm podsegmentu trajektorie a $a^B_{2_i}$ je zrychlen multirotoru v i-te ose ve druhem podsegmentu trajektorie, cas t_{1_i} je cas zmeny zrychlen pro i-tou osu a T_{tr} je celkovy cas segmentu. Pro trajektorii v n rozmernem prostoru dostaneme n cas, kdy dochaz ke zmene zrychlen, tedy n + 1 tahovych zrychlen a^T pro jeden segment. "Vektor odporoveho zrychlen d je aproximovan pomoc linearnho modelu odporu (...) pro kazde tahove zrychlen a^T_l (...)

$$d_l = R(t_l)DR^T(t_l) \quad v(t_l); \tag{3.10}$$

kde rotacn matici $R(t_l)$ lze zskat z aktualnho zrychlen, $D = \mathrm{diag}(\ _x;\ _y;\ _z)$ je diagonaln matice obsahujc odporove koe cienty pro kazdou osu a t_l 2 f $t_{1_x}; t_{1_y}; t_{1_z}; T_{tr}$ g."[3, p. 4]

Vzhledem k zavislosti odporoveho zrychlen na rychlosti letu jsou zrychlen a_{min} a a_{max} pro kazdou osu poctana iterativne. V kazdem podsegmentu se zrychlen multirotoru a^B prepocitava pomoc koe cientu tak, aby se velikost tahoveho zrychlen a^T rovnala maximalnmu tahovemu zrychlen a^T_{max}. Ze vsech moznost se pro kazdou osu vybra pro maximaln zrychlen nejmens preskalovane zrychlen multirotoru a pro minimaln zrychlen maximaln preskalovane zrychlen multirotoru. [3]

3.4 Energie letu

Tato sekce se zabyva vypoctem energie v ramci jednoho segmentu trajektorie. Celkova energie trajektorie je soucet energi pres vsechny segmenty. Spotreba energie zavis na tahove akceleraci behem letu UAV a tm take neprmo zavis na rychlosti v de novanych stavech. Ve vypoctu energie predpokladame, ze tahova sla je v kazdem casovem okamziku rovnomerne rozlozena mezi vsechny motory, protoze zname jen celkovou tahovou slu multirotoru.

Nejprve se z velikosti celkove tahove akcelerace multirotoru a^T o hmotnosti multirotoru m vypocta tahova sla f vztazena na jeden motor podle 2. Newtonova zakona

$$f = \frac{1}{k} m a^T; \tag{3.11}$$

kde k je pocet motoru UAV.

K vypoctu vykonu jednoho motoru jsme pouzili prevodovou charakteristiku mezi tahovou silou a vykonem motoru, ktera je uvedena v datasheetu konkretnho motoru. Abychom urcili spojitou zavislost mezi vykonem i-teho motoru P_i a tahovou silou f, aproximovali jsme prevodovou charakteristiku polynomem 3. radu [25]:

$$P_i = c_3 f^3 + c_2 f^2 + c_1 f + c_0; \tag{3.12}$$

kde c_i 2 R jsou koe cienty polynomu, pricemz predpokladame, ze c_3 je nenulove. Celkovy vykon UAV P je pote roven souctu vykonu jednotlivych motoru a vykonu UAV v klidovem stavu P_0

$$P = \sum_{i=1}^{k} P_i + P_0 = k \quad P_i + P_0: \tag{3.13}$$

Energie UAV E_l spotrebovana v jednom segmentu l behem doby letu t 2 $[0; T_{tr;l}]$ se spocta jako integral celkoveho vykonu P(t) v case:

$$E_l = \int_0^{T_{tr;l}} P(t)dt: \tag{3.14}$$

Protože výkon UAV závisí na velikosti tahového zrychlení, které není v rámci jednoho segmentu konstantní, závisí také výkon UAV na čase. Přičemž v našem případě, kdy předpokládáme bang-bang policy pro zrychlení, můžeme výpočet energie (3.14) pomocí integrálu zjednodušit na součet

$$E_l = \sum_{j=1}^{n+1} P_j t_j ; \tag{3.15}$$

kde n je dimenze prostoru trajektorie, v našem případě $n = 3$, a t_j jsou doby trvání podsegmentů. Celková energie E spotřebovaná multirotorem během celé trajektorie, kterou jsme rozdělili na několik samostatných segmentů, se vypočítá jako součet energií spotřebovaných v jednotlivých segmentech E_l

$$E = \sum_{l=1}^{S} E_l ; \tag{3.16}$$

kde S je počet segmentů trajektorie.

3.5 Optimalizace zrychlení

V této sekci upravíme metodu Limited thrust decomposition [3], aby minimalizovala energii optimalizováním tahového zrychlení multirotoru v rámci jednoho segmentu. Energie segmentu závisí na tahové síle, resp. tahovém zrychlení multirotoru a na čase segmentu. Proto využijeme metodu Limited thrust decomposition, popsanou v Sekci 3.3, jejíž vstupní veličinou je maximální tahové zrychlení dosažené v segmentu, a která rozloží celkové tahové zrychlení do jednotlivých os, aby minimalizovala čas segmentu. Protože nechceme minimalizovat čas segmentu, ale spotřebu energie, nalezneme optimální hodnotu maximálního tahového zrychlení, při kterém nabývá spotřeba energie segmentu minimální hodnotu.

Optimalizační úlohu definujeme jako

$$\begin{aligned}
a^T_{max} &= \arg\min_{a^T_{max}} E(a^T_{max}) \\
\text{s.t.:} \quad \| a^B(t) - d(t) - g \| &= \| a^T \| \quad a^T_{max} ; \; t \in [0; T_{tr}]; \\
a^B_1 &= [a^B_{1_x}; a^B_{1_y}; a^B_{1_z}]^T ; \\
a^B_2 &= [a^B_{2_x}; a^B_{2_y}; a^B_{2_z}]^T ; \\
a^B_i(t) &= a^B_{1_i}; \; \text{pro } t \in [0; t_{1_i}]; \; \text{pro } i \in \{x; y; z\} \\
a^B_i(t) &= a^B_{2_i}; \; \text{pro } t \in [t_{1_i}; T_{tr}]; \; \text{pro } i \in \{x; y; z\}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

kde $g = [0; 0; -g]^T$ je vektor gravitačního zrychlení, $d = [-d_x; -d_y; -d_z]^T$ je vektor odporového zrychlení, $a_{B_{1_i}}$ je zrychlení multirotoru v i-té ose v prvním podsegmentu trajektorie a $a_{B_{2_i}}$ je zrychlení multirotoru v i-té ose ve druhém podsegmentu trajektorie, čas t_{1_i} je čas přepnutí zrychlení pro i-tou osu a T_{tr} je celkový čas segmentu.

K nalezení minimální spotřeby energie jsme použili numerickou metodu gradientního sestupu [22]. Derivace energie $\frac{dE}{da^T}$ vůči tahové akceleraci je počítána numericky, protože algebraické řešení se nepodařilo nalézt. Numerický výpočet energie je

$$\frac{dE}{da^T} = \frac{E(a^T_{max\,2}) - E(a^T_{max\,1})}{a^T_{max\,2} - a^T_{max\,1}} ; \tag{3.18}$$

kde $a^T_{max\,1}$ a $a^T_{max\,2}$ 2 R jsou maximaln tahova zrychlen a E($a^T_{max\,1}$) a E($a^T_{max\,1}$) jsou energie segmentu pro dane maximaln tahove zrychlen. Iteracn krok metody s krokem optimalizace 2 R^+ mozeme napsat jako

$$a^T_{max\,k+1} = a^T_{max\,k} \quad \frac{dE}{da^T}: \tag{3.19}$$

3.6 Optimalizace rychlosti

V predchoz casti jsme predpokladali, ze zname pocatecn a koncove stavy segmentu, jako je pozice a rychlost. Obecne ale zname jen pocatecn a koncovy stav cele trajektorie a pozice jednotlivych trat'ovych bodu. V teto sekci upravme metodu minimalizace casu [3] pro nalezen optimalnch rychlost v ostatnch stavech trajektorie pro minimalizaci celkove energie trajektorie. Nalezen optimalnch rychlost je dosazeno iterativn metodou gradientnho sestupu [22].

Ulohu pro nalezen minima energie mozeme de novat jako

$$\{v_1; :::v_m\} = \arg \min_{v_1;:::;v_m \,2\, R^n} E(v_1; :::; v_m); \tag{3.20}$$

kde m = S 1 je pocet trat'ovych bodu trajektorie, v_i je vektor rychlosti v i-tem trat 'ovem bode.

Stejne jako v prpade optimalizace tahoveho zrychlen v Sekci 3.5, vyuzvame prores en tetoulohy numerickou iterativn metodu gradientnho sestupu [22]. Gradient energie podle jednotlivych slozek rychlosti se aproximuje numericky pomoc konecnych diferenc. Pro vypocet rychlosti v i-tem trat 'ovem bode se uvazuj jen sousedn segmenty, tj. segment, kde tratovy bod je koncovym stavem segmentu, a kde je pocatecnm stavem segmentu. Zaroven plat, ze rychlost v i-tem trat 'ovem bode ovlivnuje pouze vypocet energie v techto sousednch segmentech. Proto pri vypoctu gradientu je prepoctavana jen trajektorie v sousedcch segmentech, nikoliv cela trajektorie. V dsledku toho je vzdy poctana energie jen jako soucet energie techto dvou segmentu:

$$E = E_1 + E_2; \tag{3.21}$$

kde E_1 a E_2 jsou energie dvou segmentu, mezi nimiz se nachaz i-ty trat 'ovy bod. Z tohoto dvodu prochazme postupne, stejne jako v praci [3], pres vsechny pulletove body po i proti smeru trajektorie a optimalizujeme jejich rychlosti.

Gradient energie r E je roven

$$r\ E(v) = \begin{bmatrix} \frac{E(v_x + h; v_y; v_z) \quad E(v_x; v_y; v_z)}{h} \\ \frac{E(v_x; v_y + h; v_z) \quad E(v_x; v_y; v_z)}{h} \\ \frac{E(v_x; v_y; v_z + h) \quad E(v_x; v_y; v_z)}{h} \end{bmatrix}; \tag{3.22}$$

kde h 2 R je krok diference a v_x, v_y, v_z 2 R jsou slozky vektoru rychlosti $v = [v_x; v_y; v_z]^T$. Iteracn krok gradientn metody ma nasledujc tvar

$$v_{k+1} = v_k \quad r\ E(v_k); \tag{3.23}$$

kde v_i je vektor rychlosti v k-te iteraci, r E(v_k) je gradient funkce energie vzhledem k rychlostem a 2 R^+ je optimalizacn krok.

4 Výsledky

Pro testování byla použita helikoptéra o hmotnosti $m = 1.2$ kg se čtyřmi motory typu ECOII-2807-1700KV a třílistými vrtulemi Gemfan7040. Vybrané parametry helikoptéry UAV, které jsou použity ve všech testech, jsou uvedeny v Tabulce 4.1, kdem je hmotnost helikoptéry a f_{max} je maximální tahová síla.

Tabulka 4.1: Hodnoty helikoptéry UAV použité v experimentech

parametr	Typ / Hodnota
motor	ECOII-2807-1700KV
vrtule	třílistá Gemfan7040
počet motorů	4
m [kg]	1.2
f_{max} [N]	40

Uvedené optimalizační metody, implementované v jazyce C++, upravují a rozšiřují existující metodu plánování minimalizující dobu letu [3]. Implementace polynomiální metody byla převzata z [10] a následně rozšířena o výpočet energie trajektorie. Veškeré experimenty probíhaly pouze v rámci simulace, a to na zařízení s procesorem AMD Ryzen 7 5800H.

4.1 Charakteristika motoru

Abychom mohli spočítat energii letu, musíme určit přepočet mezi tahovou silou motoru a jeho výkonem. Pro námi použitý motor ECOII-2807-1700KV s třílistou vrtulí známe tento přepočet jen v několika bodech [2], jenž jsou uvedeny v Tabulce 4.2, kde síla F se vypočítá ze zákona síly jako

$$F = mg; \tag{4.1}$$

kde m je hmotnost a $g = 9.81\ m\ s^{-2}$ je gravitační zrychlení. Proto musíme tuto charakteristiku aproximovat polynomem 3. řádu [25], abychom dostali spojitou závislost. Na Obrázku 4.1 je zobrazena charakteristika vyjadřující závislost výkonu P na tahové síle motoru F pomocí červených bodů a její interpolace polynomem.

Tabulka 4.2: Převodová charakteristika motoru

m [kg]	F [N]	P [W]
0.3	2.943	52.12
0.5	4.905	105.8
0.7	6.867	166.3
0.9	8.829	235.2
1.1	10.791	300.7
1.99	19.5219	734.1

Obrazek 4.1: Charakteristika motoru vyjadrujc zavislost tahove sly F na vykonu P, interpolovana polynomem 3. radu.

Vykon motoru v zavislosti na tahove sle F je

$$P = 0:0187\ F^3 + 0:455\ F^2 + 22:3\ F \quad 14:1: \tag{4.2}$$

4.2 Optimalizace zrychlen

Nejprve optimalizujeme akceleraci v jednom segmentu. Na Obrazku 4.2 jsou zobrazeny hodnoty energie v zavislosti na maximaln dosazene hodnote tahove rychlosti a^T_{max}. Nespojitosti v grafech na Obrazku 4.2 nastavaj v bodech, kde se pro jakoukoliv osu zamen a_1 za a_2, tedy jestli bude prvne multirotor zrychlovat a nasledne zpomalovat, ci naopak. V jednom z techto bodu nespojitosti dosahuje energie sveho minima, jak je zrejme z Obrazku 4.2. Na grafu 4.2a je vyrez hodnot tahoveho zrychlen z grafu 4.2b, pro nez je hodnota energie minimaln.

Pro male hodnoty tahoveho zrychlen, mens nez minimum energie, je energie segmentu neprmo umerna zrychlen. Dominantn slozkou vypoctu energie je cas, kterv je neprmo umerny zrychlen. V prpadech, kdy vektory rychlost v pocatecnm a koncovem bode jsou podobne, se tento clen neprojev, jako na grafu 4.2c. Naopak pro velke hodnoty tahoveho zrychlen je prevladajc clen vykon, tedy energie je prmo umerna tret mocnine tahoveho zrychlen. Pro hodnoty tahoveho zrychlen vets nez minimum energie je mozne funkci aproximovat prmkou.

Optimalizace zrychlen se provad numerickou gradientn metodou [22], pro nz je potreba nastavit nekolik parametru, jako jsou krok diference h, maximaln pocet iterac N, prahova hodnota (threshold) a krok optimalizace .

Pro snzen vypocetnho casu by bylo vyhodnejs pouzt algebraicke resen derivace energie, ale pro slozitou zavislost mezi velikost tahoveho zrychlen a^T a energi E a iteracnm

(a) Závislost energie na $a_{T_{max}}$

(b) Přiblížení minima funkce z obr. (a)

(c) Závislost energie na $a_{T_{max}}$

Obrázek 4.2: 2 typy závislosti spotřeby energie segmentu pro různá maximální tahová zrychlení. Obrázek (b) přibližuje okolí minima energie z obrázku (a).

algoritmem LTD nebylo totořešení nalezeno. Alternativním přístupem by mohlo být nalezení bodů nespojitosti, které jsou zobrazeny v grafu na Obrázku 4.2, neboť v jednom z těchto bodů nastává minimum energie. Ani tyto body se však nepodařilo z iterativního algoritmu LTD nalézt. Pro nenalezení algebraického řešení derivace energie je derivace aproximována pomocí dopředné diference s krokem

$$h = 0:2: \tag{4.3}$$

Je použita dopředná diference, protože pokud existuje řešení pro dané tahové zrychlení, tak existuje i pro vyšší hodnoty. Naopak pro nižší hodnoty tahového zrychlení, blížící se hodnotě gravitačního zrychlení g, trajektorie nemusí existovat. Navíc je derivace pro hodnoty větší než optimální tahové zrychlení menší. Použití přesnější metody numerické diference není potřeba pro nespojitost energie v okolí jejího minima a nekonvergenci derivace k nule.

Parametry maximaln pocet iterac N a prahova hodnota ovlivnuj casovou narocnost a presnost optimalizace, proto je jejich hodnota volena jako kompromis. V nasem prpade jsou hodnoty obou parametru konstantn po celou dobu optimalizace. Protoze kolem bodu minima energie nen funkce spojita, ani konvexn, tm padem je tezke urcit i derivaci, jsou hodnoty techto parametru vets nez byva obvykle. Maximaln pocet iterac

$$N = 50 \tag{4.4}$$

umoznuje v rekterych prpadech i vcenasobne opakovan gradientn metody pro specicnost funkce. Prahova hodnota

$$= 1 \tag{4.5}$$

je zvolena pro nejednoznacne urcen minima energie. Krok optimalizace je jiny pro kladnou a zapornou derivaci, neboť hodnoty derivace jsou pro specicnost funkce rozdlne napravo a nalevo od hledanho minima energie. Hodnoty nejsou celou dobu konstantn, na zacatku algoritmu je krok optimalizace pro kladnou derivaci:

$$_{+} = 0:05 \tag{4.6}$$

a pro zapornou derivaci

$$= 0:005: \tag{4.7}$$

Derivace velmi pomalu konverguje k nule, respektive nedosahuje hodnot blzkych nule. Zaroven lze z Obrazku 4.2 pozorovat, ze napravo od minima je temer konstantn v jakemkoliv bode. Z tohoto duvodu je krok optimalizace v kazde iteraci zmensovan. Konkretne je vypocterna hodnota derivace v kazde iteraci nasobena aktualizacnm faktorem , jehoz hodnota linearne klesa:

$$= 1 \quad 0:01 \quad i; \tag{4.8}$$

kde $i \quad 2 \quad h0; N)$. Tento postup omezuje velikost aktualizacnch kroku ve vyssch iteracch a prispva ke stabilnejs konvergenci.

Pri kazde iteraci mus aktualizovana hodnota tahoveho zrychlen lezet v pozadovanem intervalu $ha_{min} ; a_{max} i$, kde

$$a_{min} = 13 \text{ m} \quad \text{s}^{1} \tag{4.9}$$

$$a_{max} = 3:4 \quad \text{g m} \quad \text{s}^{1}; \tag{4.10}$$

cemuz odpovda povolena maximaln tahova sla 40 N.

Obrazek 4.3: Zmena tahoveho zrychlen a^T_{max} pri kazde iteraci nez bylo nalezeno optimum.

Na obrazku 4.3 je znazornen puubeh zmeny maximaln hodnoty tahoveho zrychlen a^T_{max} v jednotlivych iteracch behem gradientnho sestupu. K nalezen optima bylo ve vetsine prpadu zapotreb priblizne 10 az 20 iterac.

4.3 Optimalizace rychlosti

Optimalizace vektoru rychlosti se provad iterativne v kazdem trat 'ovem bode, postupne ve smeru od pocatecnho ke koncovemu bodu a zpet. Tento proces se opakuje nekolikrat, dokud nen dosazeno konvergence nebo zvolenho poctu iterac $N_{traj} = 30$.

Pro optimalizaci rychlosti v jednotlivych bodech trajektorie je, stejne jako pri optimalizaci zrychlen, pouzita metoda gradientnho sestupu [22]. V kazde iteraci je metoda pouzita k optimalizaci jednotlivych slozek vektoru rychlosti ve vsech osach. Soucet energi dvou segmentu, mezi nimiz optimalizujeme hodnoty vektoru rychlosti, nen spojitou funkc, jak lze videt na Obrazku 4.4, kde je znazornena zavislost celkove energie na zmene pouze jedne slozky vektoru rychlosti. V obou prpadech 4.4a a 4.4b byla menena pouze y-ova slozka rychlosti. Zavislost z Obrazku 4.4a pochaz z drahy P_1 a zavislost z Obrazku 4.4b pochaz z drahy P_2.

(a) Závislost energie na rychlosti ve směru osy y

(b) Závislost energie na rychlosti ve směru osy y

Obrázek 4.4: Součty energie dvou segmentů v závislosti na jedné složce rychlosti v v bodě mezi těmito segmenty.

Pro správné fungování metody je nutné zvolit její parametry, které jsou obdobné jako v předchozím případě. Stejně je i zde gradient pro každou osu vypočítán pomocí dopředné

diference. Ackoliv by z hlediska snížení výpočetní náročnosti bylo výhodné použít algebraický výraz pro gradient, takový výraz se ale nepodařilo odvodit. Kvůli aproximaci závislosti tahového zrychlení a tahové síly polynomem 3. řádu, se navíc celková energie segmentu nerovná součtu energií jednotlivých os, což neumožňuje použít dříve odvozených gradientů pro minimalizaci času, které jsou uvedeny v pracích [3], [5]. Z důvodu nespojitosti energie nebyla použita lepší aproximace. Krok dopředné diference je ve všech osách nastaven stejně:

$$h = 0:01: \tag{4.11}$$

Kvůli nespojitosti energie je maximální počet iterací

$$N = 20 \tag{4.12}$$

a prahová hodnota

$$= 1: \tag{4.13}$$

Krok optimalizace

$$= 10^{\ 5} \tag{4.14}$$

je stejný pro optimalizaci ve všech osách a její hodnota je ve všech iteracích nemenná.

K nalezení optima rychlosti ve všech osách proběhne průměrně 10 iterací algoritmu.

4.4 Porovnání metod

Námi upravené algoritmy pro minimalizování energie trajektorie budeme porovnávat s trajektorií s minimálním časem [3] a s polynomiální trajektorií s minimálním rývem [10].

Výstupem polynomiální metody [10] jsou navzorkované hodnoty polohy, rychlosti a zrychlení a^B v čase $t \ 2 \ h0; T_{tr} \ i$ se vzorkovacím krokem $t = 10^{\ 3}$ s. Nejprve je zrychlení a^B převedeno na velikost tahového zrychlení a^T odečtením odporového zrychlení a gravitačního zrychlení podle vztahu (3.8). Následně je z tahového zrychlení a^T vypočten výkon, jak je popsáno v Sekci 3.4. Poté se spočítá spotřeba energie podél trajektorie s využitím vzorce (3.14) numerickou integrací pomocí lichoběžníkové metody [11].

Porovnávání metod bylo prováděno na 4 různých testovacích drahách. Vizualizace jednotlivých drah je zobrazena na Obrázku 4.5. Všechny průletové body jednotlivých drah se nacházejí ve třídimenzionálním prostoru, kromě průletových bodů dráhy P_2, které leží v rovině. V Tabulce 4.3 jsou uvedeny počty průletových bodů, včetně počátečního a koncového bodu, pro jednotlivé dráhy a dále nejkratší délky trajektorií, které jsou zobrazeny modrou křivkou na Obrázku 4.5.

V Tabulce 4.4 jsou uvedeny spotřeby energie pro jednotlivé testované dráhy P_1, P_2, P_3 a P_4 při použití různých metod. Největší spotřebu energie měla pro každou dráhu metoda minimalizující čas [3]. Nejmenší spotřebu energie neměla metoda minimalizující energii, ale polynomiální metoda minimalizující rýv [23]. Dráha s nejmenší spotřebou energie na jednotku délky je dráha P_2, která se sestává z dlouhých rovinek a ostrých zatáček. Naopak nejvyšší spotřebu energie na jednotku délky má dráha P_4, která je hodně technicky náročná.