

I. IDENTIFIKAČNÍ ÚDAJE

Název práce:	Operátor dvouvrstvého grafenu s delta-interakcí podél přímky
Jméno autora:	Ivan Janáček
Typ práce:	bakalářská práce
Fakulta:	Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská (FJFI)
Katedra:	Katedra matematiky
Oponent práce:	Vladimir Lotoreichik, Ph.D., DSc.
Pracoviště opONENTA práce:	Ústav jaderné fyziky AV ČR

II. HODNOCENÍ JEDNOTLIVÝCH KRITÉRIÍ

Zadání	náročnější
<p>Spektrální analýza Hamiltoniánu dvouvrstvého grafenu je tématem, které začalo přitahovat pozornost matematiků a matematických fyziků teprve v poslední době, především díky tomu, že se jen nedávno podařilo vyrábět umělé materiály, které jsou popsány tímto Hamiltoniánem. Zadání hodnotím jako náročnější, protože bylo nutné používat několik značně netriviálních metod z operátorové teorie pro analýzu těchto operátorů. Cílem práce bylo zavést singulární interakce pro tento druh operátorů, což dosud v literatuře provedeno nebylo, a tím pádem byl úkol pana Janáčka složitější.</p>	
Splnění zadání	splněno
<p>Všechny body zadání byly splněny.</p>	
Zvolený postup řešení	vhodný
<p>Zvolený postup řešení, založený na použití direktních integrálů, je vhodný a v tomto kontextu standardní. Nicméně k jednomu z hlavních výsledků práce mám několik otázek, které budou uvedeny na konci posudku.</p>	
Odborná úroveň	výborná
<p>Bakalářská práce je poměrně rozsáhlá a působí pozitivním dojmem. Kromě dvou kapitol s vlastními výsledky obsahuje v první kapitole detailní přehled použitých standardních metod funkcionální analýzy. Z mého pohledu jsou výsledky práce zajímavé a netriviální. Je zřejmé, že jejich získání vyžadovalo tvrdou práci a hluboké znalosti ve funkcionální analýze a diferenciálních rovnicích</p>	
Formální a jazyková úroveň	výborná
<p>Důkazy jsou rigorózní a rozepsané do detailu. Použitá matematická terminologie je v oboru bakalářské práce standardní. Jako nerodilý mluvčí nebudu hodnotit jazykovou úroveň; zmíním pouze, že jsem neměl problém s porozuměním formulacím.</p>	
Výběr zdrojů, korektnost citací	výborné

Počet článků o Hamiltoniánech dvouvrstvého grafenu není příliš velký a všechny relevantní zdroje pan Janáček citoval. K porušení citační etiky nedošlo.

Další komentáře a hodnocení

Bakalářská práce pana Janáčka obsahuje tři kapitoly. První kapitola je věnována standardním definicím a tvrzením z funkcionální analýzy, které jsou použity v bakalářské práci. Ve druhé kapitole je zkoumán volný Hamiltonián dvouvrstvého grafenu bez interakce: uvádí se důkaz jeho samosdruženosti a určuje se jeho spektrum. Třetí kapitola je věnována Hamiltoniánu dvouvrstvého grafenu s delta-interakcí podél přímky. Pro tuto třídu operátorů dosud v literatuře nebyla zavedena okrajová podmínka odpovídající delta-interakci. V práci je tato okrajová podmínka zavedena heuristicky jako hraniční podmínka, pro kterou je vláknový operátor dvouvrstvého Hamiltoniánu s přiřazeným bodovým delta-potenciálem dobře definován jako operátor v L^2 . Jako další krok je v práci určeno spektrum vláknových operátorů a za pomoci metody direktních integrálů se ukazuje samosdruženost a určuje se spektrum celého Hamiltoniánu grafenu s delta-interakcí podél přímky. Metoda analýzy je inspirována článkem J. Behrndt, M. Holzmann, M. Tušek: J. Phys. A: Math. Theor., 2023. Kromě metody direktních integrálů byla použita také teorie samosdružených rozšíření symetrických operátorů pro důkaz samosdruženosti vláknových operátorů.

III. CELKOVÉ HODNOCENÍ, OTÁZKY K OBHAJOBĚ, NÁVRH KLASIFIKACE

Moje rozhodnutí nejvíce ovlivnily rozsah provedené práce a složitost úkolů, které pan Janáček řešil. Závěrem konstatuji, že diplomová práce je pečlivě napsaná, počet překlepů je přiměřený rozsahu prací, hlavní výsledky jsou netriviální a počet matematických nesrovnalostí je malý. Předloženou závěrečnou práci hodnotím klasifikačním stupněm **B - velmi dobře**.

Otázky a komentáře

- 1) V bodě 1, Tvrzení 11 je uvedeno, že za podmínky $\alpha \neq 0$ je bodové spektrum operátoru D_α prázdné, což mi nepřijde v souladu s tím, že ve Tvrzení 10 je uvedeno, že $\pm m$ jsou v bodových spektrech vláknových operátorů pro všechna $\xi \neq 0$. Není zde nějaký překlep, nebo nechybí nějaká podmínka?
- 2) V bodě 2, Tvrzení 11, je uvedeno, že $\pm m$ jsou vlastní hodnoty nekonečné násobnosti pro $\alpha = 0$. Tento případ by měl fakticky odpovídat absenci delta-interakce na přímce, tedy volnému Hamiltoniánu dvouvrstvého grafenu. Lze z toho tvrzení rozumět, že tento volný Hamiltonián má vlastní hodnoty nekonečné násobnosti? Obvykle je spektrum volného Hamiltoniánu čistě absolutně spojitě.
- 3) V bodě 3, Tvrzení 11, se popisuje spektrum D_α , když α jde do nekonečna. Musíme tomuto tvrzení rozumět tak, že se jedná o spektrum limitního operátoru, ke kterému D_α konverguje v nějakém smyslu, nebo jako množinu, ke které spektrum D_α konverguje? Pokud tím rozumíme limitní množinu, není k tomu nutné zároveň zjistit, že funkce $z_1(\xi)$ konverguje k m uniformně vůči ξ když α jde do

nekonečna, abychom věděli, že spektrální mezera v limitě se skutečně otevírá? Podle toho, jaký výraz má tato funkce v práci, není jasně, že uniformní konvergence platí. Kromě toho, z toho výrazu, který má vlastní hodnota $z_1(\xi)$ vláknového operátoru v rovnici (3.22) není zcela jasně, že se jedná o reálné číslo pro všechna ξ . Je-li tomu tak, jaké to má vysvětlení nebo interpretaci?

Datum: 19.8.2025

Podpis:

