



**ČESKÉ
VYSOKÉ
UČENÍ
TECHNICKÉ
V PRAZE**

Fakulta strojní

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Určení konstitutivního modelu viskoelastické
trubice

Matyáš Budinka

Vedoucí práce: doc. Ing. Lukáš Horný, Ph.D

Praha 2021

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení:	Budinka	Jméno: Matyáš	Osobní číslo: 467300
Fakulta/ústav:	Fakulta strojní		
Zadávací katedra/ústav:	Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky		
Studijní program:	Aplikované vědy ve strojním inženýrství		
Specializace:	Biomechanika		

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

Určení konstitutivního modelu viskoelastické trubice

Název diplomové práce anglicky:

Viscoelastic tube constitutive model determination

Pokyny pro vypracování:

Vyložte základy popisu nelineárně elastického chování materiálů
Vyložte princip kvazilineární viskoelasticity
Aplikujte nelineárně elastický model materiálu na výsledky měření odezvy 3D tištěných trubic a určete parametry konstitutivního modelu
Odhadněte parametry viskoelastického modelu pro zadanou odezvu nafukované trubice

Seznam doporučené literatury:

Holzappel, G. A. (2000) Nonlinear Solid Mechanics - A Continuum Approach for Engineering. John Wiley and Sons, Chichester.
de Pascalis, R., Abrahams, D. I., Parnell, J. W. (2014) On nonlinear viscoelastic deformations: a reappraisal of Fung's quasi-linear viscoelastic model. Proc. R. Soc. A 470: 20140058.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

doc. Ing. Lukáš Horný, Ph.D., odbor biomechaniky FS

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

Ing. Hynek Chlup, Ph.D., odbor biomechaniky FS

Datum zadání diplomové práce: **31.03.2021** Termín odevzdání diplomové práce: **13.08.2021**

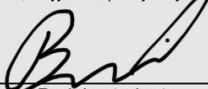
Platnost zadání diplomové práce: _____

doc. Ing. Lukáš Horný, Ph.D. podpis vedoucí(ho) práce	doc. Ing. Miroslav Španiel, CSc. podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry	prof. Ing. Michael Valášek, DrSc. podpis děkana(ky)
--	---	--

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

12.5.2021
Datum převzetí zadání


Podpis studenta

ANOTAČNÍ LIST

Jméno autora:	Matyáš Budinka
Název DP:	Určení konstitutivního modelu viskoelastické trubice
Anglický název:	Viscoelastic tube constitutive model determination
Rok:	2021
Studijní program:	Aplikované vědy ve strojním inženýrství
Obor studia:	Biomechanika
Ústav:	Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky
Vedoucí BP:	doc. Ing. Lukáš Horný, Ph.D.
Bibliografické údaje:	Počet stran 52
	Počet obrázků 39
	Počet tabulek 4
	Počet příloh 0
Klíčová slova:	Viskoelastická, polymerní trubice, inflačně - extenzní test, obvodová deformace, axiální deformace, regresní analýza
Keywords:	Viscoelasticity, polymer tube, inflation – extension test, circumferential deformation, axial deformation, regression analysis
Anotace:	Tato diplomová práce se zabývá sestavením viskoelastického konstitutivního modelu pro nafukování předepjaté tenkostěnné polymerní trubice. Pozornost byla soustředěna na nalezení optimálních materiálových parametrů pro popis experimentální mechanické odezvy. V závěru jsou diskutovány výsledky.
Annotation:	This thesis deals with the construction of a viscoelastic constitutive model for inflated and extended thin-walled polymer tube. Attention was focused on finding the optimal material parameters. At the end the results are discussed.

PODĚKOVÁNÍ

Děkuji vedoucímu své diplomové práce doc. Ing. Lukáši Hornému, Ph.D za odborné konzultace, trpělivost a především za čas, který mi věnoval.

Obsah

1 Úvod	10
1.1 Předmluva	10
1.2 Příčiny existence axiálního předpětí v cévách.....	11
1.3 Fyziologické benefity axiálního předpětí.....	12
1.4 Materiál.....	13
1.5 Stavba cévní stěny.....	13
1.5.1 Tunica intima.....	13
1.5.2 Tunica media	13
1.5.3 Tunica externa.....	13
2 Cíl práce.....	14
3 Popis inflačně-extenzního experimentu	15
3.1 Inflačně – extenzní experiment.....	15
3.1.1 Průběh experimentu	15
3.1.2 Formát poskytnutých dat	17
4 Úvod do nelineární elasticity.....	18
4.1 Deformace.....	18
4.1.1 Deformační gradient	19
4.1.2 Pravý Cauchy-Greenův tenzor deformace	19
4.1.3 Green-Lagrangeův tenzor deformace	19
4.1.4 Inženýrský tenzor deformace.....	19
4.2 Napjatost.....	20
4.2.1 Cauchyho tenzor skutečného napětí	20
4.2.2 Druhý Piola-Kirchhoffův tenzor napětí	20
4.3 Hyperelasticita - Greenův přístup	21
4.3.1 Příklady modelů hustoty deformační energie.....	21
4.4 Formulace úlohy pro tenkostěnnou trubici / elasticita	23
4.4.1 Radiální rovnováha.....	25
4.4.2 Axiální rovnováha.....	27
5 Úvod do kvazilineární viskoelasticity	29
5.1 Spojitost s lineární pružností.....	29
5.2 Využití v nelineárním přístupu	30
5.3 Formulace úlohy pro tenkostěnnou trubici / viskoelasticita	31
6 Výsledky inflačně-extenzního experimentu.....	32
6.1 První a čtvrté cykly	32

6.2 Páté cykly-relaxace napětí	33
7 Proložení dat modelem	35
7.1 Optimalizační úloha.....	35
7.1.2 Váhové koeficienty.....	35
7.1.3 Koeficient determinace	35
7.2 Proložená data elastické odezvy	36
7.2.1 Optimální materiálové parametry – elastického modelu	37
7.3 Proložená data viskoelastické odezvy	44
7.3.1 Optimální materiálové parametry – viskoelastického modelu	45
8 Diskuze	49
8.1 Diskuze experimentálních dat.....	49
8.2 Diskuze regresní analýzy	49
9 Závěr.....	50
Seznam použité literatury	51

Seznam tabulek

Tabulka 1: Koeficienty determinace / Elasticita.....	36
Tabulka 2: Materiálové parametry Ogdenova modelu pro jednotlivá axiální závaží / elastická odezva	37
Tabulka 3: Koeficienty determinace / Viskoelasticita	44
Tabulka 4: Materiálové parametry Ogdenova modelu a relaxační funkce pro jednotlivá axiální závaží / Viskoelastická odezva.....	45

Značka	Název
$\lambda_{\theta\theta}$	Obvodový streč
λ_{rR}	Radiální streč
λ_{zZ}	Axiální streč
r	Zdeformovaný poloměr
R	Referenční poloměr
h	Zdeformovaná tloušťka stěny trubice
H	Referenční tloušťka stěny trubice
z	Zdeformovaná délka trubice
Z	Referenční délka trubice
P	Tlak uvnitř trubice
θ	Úhel zkrutu ve zdeformované konfiguraci
Θ	Úhel zkrutu v referenční konfiguraci
\mathbf{F}	Deformační gradient
W	Hustota deformační energie
ϵ	Deformace
F_{red}	Redukovaná síla v ose trubice
\mathbf{S}	2.Piola-Kirchhoffův tenzor napětí
$\boldsymbol{\sigma}$	Cauchyho tenzor skutečného napětí
$\boldsymbol{\epsilon}$	Inženýrský tenzor deformace
\mathbf{C}	Pravý Cauchy-Greenův tenzor deformace
\mathbf{S}^e	2.Piola-Kirch. elastický tenzor napětí
\mathbf{S}_D^e	Deviátor 2.P-K. el. tenzoru napětí
\mathbf{S}_H^e	Kulová část 2.P-K. el. tenzoru napětí
$\boldsymbol{\sigma}^e$	Cauchyho napětí počítané elasticky
$\boldsymbol{\sigma}_D^e$	Deviátor el. Cauchyho napětí
$\boldsymbol{\sigma}_H^e$	Kulová složka el. Cauchyho napětí
\mathcal{D}	Redukovaná relaxační funkce
$\sigma_{\theta\theta}$	Obvodová složka Cauchyho napětí
σ_{rr}	Radiální složka Cauchyho napětí
σ_{zz}	Axiální složka Cauchyho napětí
t	Aktuální čas
τ	Časová integrační proměnná vyjadřující historii

Q	Účelová funkce
w_P	Váhový koeficient pro tlaky
w_F	Váhový koeficient pro síly
P_i^{exp}	I-tá hodnota experimentálního tlaku
P_i^{pred}	I-tá hodnota modelového tlaku
F_i^{exp}	I-tá hodnota experimentální síly
F_i^{pred}	I-tá hodnota modelové síly
S_R	Residuální součet čtverců
S_T	Celkový součet čtverců
K_D	Koeficient determinace
μ	Materiálový parametr (smykový modul)

1 Úvod

1.1 Předmluva

Oblast poznání viskoelastického chování polymerních trubic, které mohou sloužit jako cévní náhrady není zcela zmapována, proto se ve své práci pokusím poznání rozšířit.

V lidském těle pozorujeme nelineární trubice např. tepny, které jsou axiálně i obvodově předepjaty. Podélné předpětí má v tepnách lidského těla důležité fyziologické benefity na stav deformování cév během srdečního cyklu. Jelikož tepny přenáší tlakové pulzy, vyvolané vypuzením krve z levé srdeční komory a současně jsou i podélně předepjaté, tak simulace jejich zatížení během srdečního cyklu může být uskutečněna inflačně – extenzním experimentem, kdy je trubice nafukována vnitřním tlakem vtačované vody a axiální předpětí je simulováno zavěšením závaží o určité hmotnosti v ose trubice.

Reálné vzorky tepen jsou k dispozici velmi omezeně, proto je zapotřebí mít fantomy na kterých se experimenty a jejich vyhodnocení nejprve naučíme. V této práci se zabývám 3D tištěnou, polymerní trubicí z Rapid Prototyping. Rapid Prototyping je metoda 3D tisku, která se dnes běžně využívá k vytváření modelových objektů v laboratořích. Jako materiál pro tisk trubice byla použita předpřipravená směs tango plus a vero (FLX9940).

Experimentální měření každého vzorku zvláště je v praxi nákladné a časově náročné. Proto je výhodné predikovat chování daného vzorku pomocí obecného materiálového a konstitutivního modelu a tím výsledky experimentů zobecnit.

Hlavním přínosem této práce bude odvození konstitutivního modelu (elastického, viskoelastického) pro nafukování tenkostěnné, axiálně předepjaté trubice a následné nalezení optimálních materiálových parametrů, takových, aby shoda modelu s experimentálně naměřenými daty byla co možná největší.

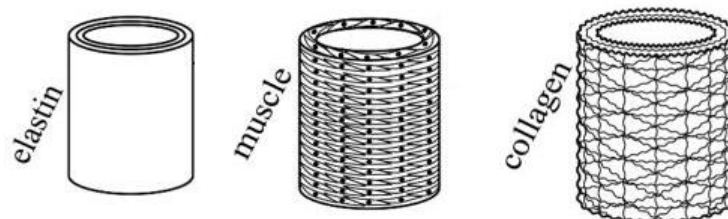
1.2 Příčiny existence axiálního předpětí v cévách

Jelikož optimální axiální předpětí v tepnách vede k značným fyziologickým benefitům, je zapotřebí si uvědomit jak a kde vzniká.

Při pitvách bylo zjištěno [1], že u cév dojde po vyjmutí z těla k jejich axiálnímu zkrácení. Z toho plyne, že v těle musí být cévy axiálně předepnuty. Toto předpětí je způsobeno nerovnoměrným růstem jednotlivých složek tkáně tak, aby byla zajištěna kompatibilita deformací výsledné směsi složené z různých složek o různých mechanických vlastnostech.

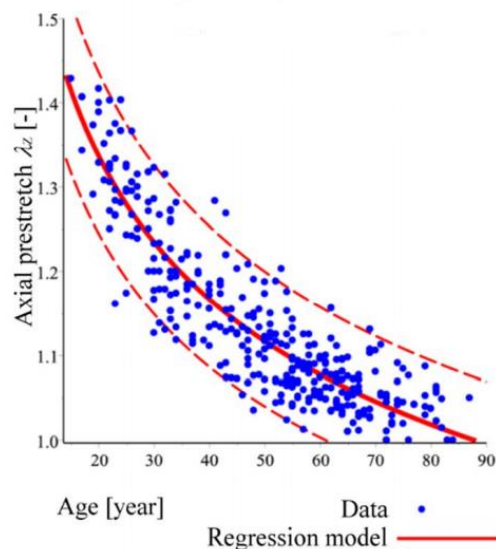
Pokusy Greenwalda a kol. (1997) prokázali [4], že tato axiální předpětí závisí primárně na elastinu nikoliv na kolagenu nebo hladkém svalstvu. Elastin se ukládá a zesítovává během vývoje plodu těsně před porodem a jeho poločas rozpadu je obvykle v řádu délky života organismu. To znamená, že elastin během normálního biologického růstu podstoupí značné elastické deformace, které chápeme jako axiální předpětí.

Elastin je tvořen sítí nepravidelně uspořádaných vláken a je pružný a poddajný. Naopak kolagen je pravidelně uspořádán a jeví se jako velmi tuhý.



Obrázek 1: Struktura a uspořádání jednotlivých složek cév [5]

Pokles axiálního předpětí s rostoucím věkem je podmíněn degradací elastinu, který postupně ztrácí schopnost přenášet mechanické zatížení viz obr.2, kde vlevo na vertikální ose vidíme hodnotu počátečního axiálního předpětí (1.43). Hodnota nám říká o kolik procent je céva protažena oproti klidovému stavu. Axiální předpětí je definováno jako podíl zdeformované a referenční délky zkoumané cévy.

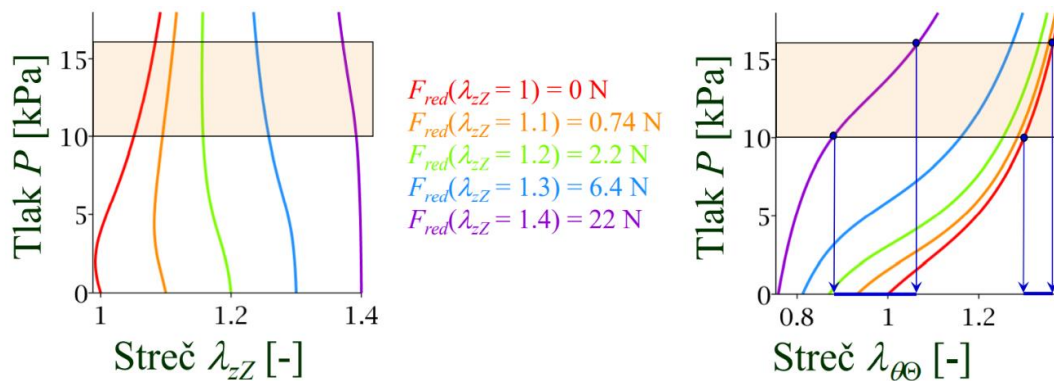


Obrázek 2: Závislost počátečního axiálního předpětí na věku [6]

1.3 Fyziologické benefity axiálního předpětí

Je známo [7], že při určitém axiálním předpětí v elastických cévách nedochází při fyziologickém zatěžování ke změně jejich délek. Na obr.3 je vymezen pracovní prostor 10 – 15kPa, ve kterém je vidět, že pro konkrétní axiální předpětí osovou silou 2.2 N se céva nezkracuje ani neprodlužuje. Ze závislosti $P - \lambda_{\theta\theta}$ je evidentní, že v důsledku axiálního předpětí dochází k poklesu tuhosti v obvodovém směru, která se projeví snížením směrnice tečny k dané křivce. Obvodový streč je definován jako podíl zdeformovaného poloměru cévy vůči referenčnímu.

Důsledkem optimálního axiálního předpětí je, že je spotřebováno minimum mechanické práce na prodlužování a zkracování. Dochází tedy téměř k optimálnímu nafukování trubice. Bod, kdy se céva působením vnitřního tlaku zkracuje a prodlužuje jen minimálně se nazývá inverzním bodem. Pokud je axiální předpětí menší než inverzní tak má céva tendenci se od určité hodnoty dosaženého vnitřního tlaku prodlužovat. Je-li větší než inverzní dochází k opačnému efektu (zkrácení cévy) ovšem pouze tehdy, když je v cévě dosaženo určitého natlakování. Nalezení inverzního bodu taktéž popisuje stav, kdy bude objem akumulovaný v jednom pulzu vždy maximální.[7]



Obrázek 3: Závislost tlaku na axiálním streči vlevo a tlaku na obvodovém streči vpravo [6]

1.4 Materiál

Z hlediska mechanického chování lze cévní stěna popsat jako nelineární, anizotropní a viskoelastická. Na základě experimentů (1-osá tahová zkouška, inflačně extenzní test) můžeme pozorovat, že dochází k nevratným mechanickým dějům (tečení materiálu a relaxaci napětí). [12]

1.5 Stavba cévní stěny

Cévní stěna je složena ze tří vrstev s různými mechanickými vlastnostmi.

1.5.1 Tunica intima

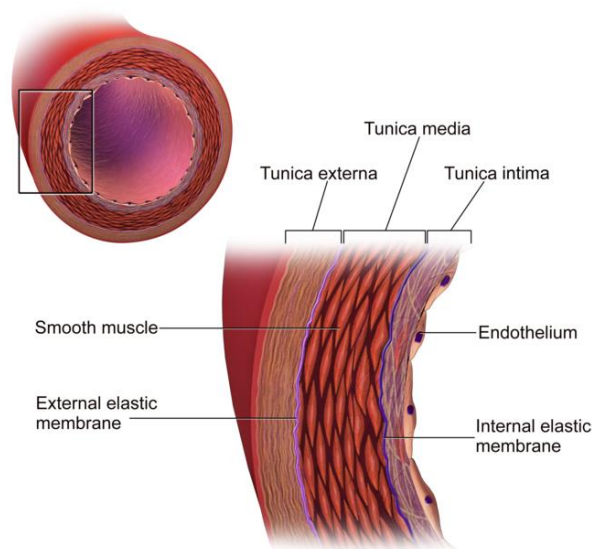
Je výstelka složená z plochých endotelových buněk umístěných na tenké bazální membráně, která svou stavbou zajišťuje hladký a nesmáčivý vnitřní povrch. U zdravého jedince přispívá z hlediska mechanických vlastností oproti dvěma dalším vrstvám zanedbatelně. [2]

1.5.2 Tunica media

Je vrstva hladkých svalových buněk, elastických vláken a kolagenních fibril, které jsou uspořádány do složité 3D sítě. Uspořádána do šroubovice s malou roztečí proto je orientace fibril téměř po obvodu. Z hlediska mechanických vlastností nejvýznamnější vrstva. Schopnost odolat zatížení v obvodovém i axiálním směru. [2]

1.5.3 Tunica externa

Je vnější vazivová vrstva s výskytem elastických vláken, která vyztužuje stěny cév. Silné svazky kolagenních vláken významně přispívají ke stabilitě a síle stěny. Tato vrstva je v konfiguraci bez zatížení při nízkém tlaku méně tuhá než mediální vrstva avšak při vyšším tlaku dojde k narovnání kolagenních vláken, která začnou přenášet zatížení a tuhost výrazně narůstá. [2]



Obrázek 4: Stavba cévní stěny [2]

2 Cíl práce

- Prostudovat příčiny vzniku a benefity axiálního předpětí v cévách
- Zpracovat naměřená data z inflačně - extenzního experimentu pro vybranou trubici s různými hodnotami axiálního předpětí
- Vyložit základy nelineární elasticity a princip kvazilineární viskoelasticity
- Odvodit matematický model popisující mechanickou odezvu polymerních trubic během inflačně – extenzního experimentu
 - I. Elasticky
 - II. Viskoelasticky
- Proložit experimentální data odvozeným modelem a najít optimální parametry modelu tak, aby se modelová křivka co nejvíce podobala reálné odezvě
 - i. Elasticky
 - ii. Viskoelasticky

3 Popis inflačně-extenzního experimentu

3.1 Inflačně – extenzní experiment

Experimentálně naměřená data, která mi byla poskytnuta byla naměřena pomocí inflačně-extenzního experimentu. Upozorňuji, že experiment jsem neprováděl, pouze vyhodnocoval. Tímto děkuju doktorovi Hynkovi Chlupovi za poskytnutí naměřených dat.

Z názvu experimentu je zřejmé, že testovaný vzorek tubulárního tvaru je natahován a zároveň nafukován. Extenze se uskutečňuje pomocí axiálního závaží, které je zavěšeno na spodním trnu v ose trubice. Nafukování je zajištěno přívodem kapaliny do vnitřní dutiny trubice. Kapalina je do trubice vtlačována pomocí pístu poháněného lineárním motorem s konstantním zdvihem pístu. Obvodové a axiální deformace vzorku jsou určeny na základě videozáznamu ze dvou kamer uspořádaných pod určitých úhlem. Experiment se používá k simulaci namáhání stěny aorty během srdečního cyklu.

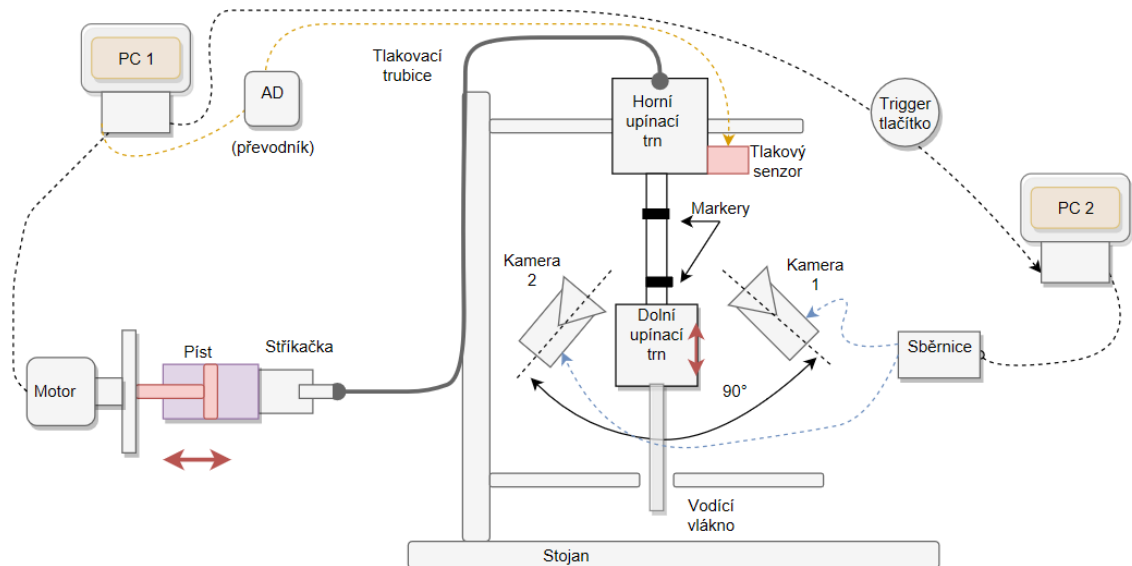
3.1.1 Průběh experimentu

Vzorek se upne mezi dva upínací trny. Statický, horní upínací trn je opatřený tlakovým senzorem a přívodem kapaliny ze stříkačky. Kapalina (voda) je do trubice vtlačována pístem lineárního motoru s konstantním zdvihem (horní a dolní úvrať lineárního motoru přesně definována). Lineární motor je řízen počítačem¹. Před samotným plněním trubice je důležité, aby se v trubici nevyskytoval žádný vzduch, protože by znehodnotil výsledky experimentu. Spodní upínací trn je axiálně volný s možností rotace kolem axiální osy. Bílé provázky uvázané na spodní upínací trn jsou zde k upevnění axiálního závaží (viz obr.5). V obr.5 vpravo jsou bez závaží, proto visí nedopnuté. Žlutá trubička vycházející z dolního upínacího trnu je vodící vlákno, které stabilizuje svislou polohu testovaného vzorku. Na tubulárních vzorcích jsou vyznačeny dva černé pruhy (markery), které slouží k vyhodnocení axiální deformace.



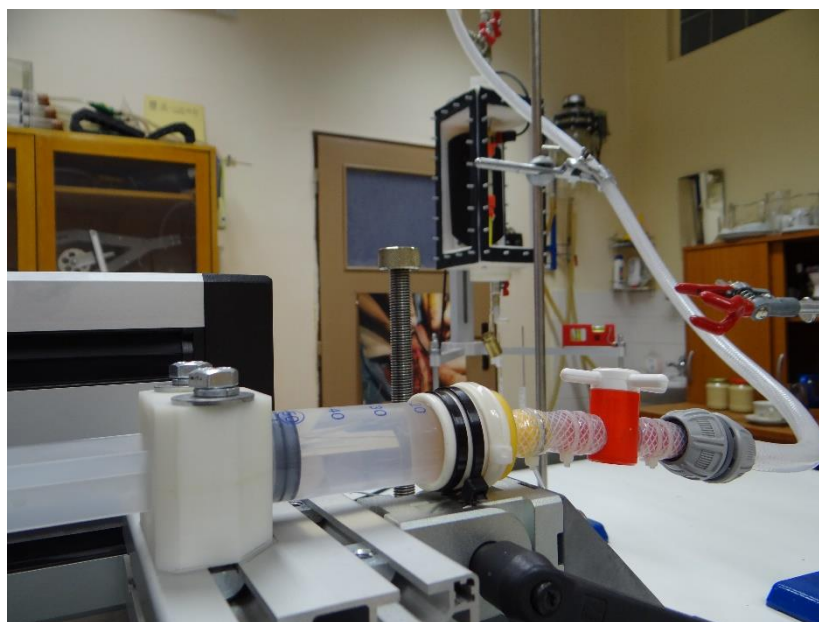
Obrázek 5: Princip zavěšení axiálního závaží vlevo, Tubulární vzorek upnutý mezi upínací trny vpravo

Deformace trubice v obvodovém i v axiálním směru jsou vyhodnocovány dvěma vysokofrekvenčními kamerami (videoextenzometry), které jsou vůči sobě umístěny pod úhlem 90°. Toto rozmístění je z důvodu objektivnějšího vyhodnocení obvodové deformace, jelikož se vzorek z počátku nemusí deformovat jako ideální válec. Každá kamera snímá obvodovou deformaci zvlášť. Výsledná hodnota obvodové deformace se vyhodnotí jako průměr z dvou naměřených. Kamery jsou připojeny přes sběrnici k počítači viz obr.6.



Obrázek 6: Schéma uspořádání experimentu

Mezi počítači je umístěno trigger tlačítko. Po zmáčknutí se spustí měření tlaku na počítači 1 a současně měření obrazu na počítači 2. Pro měření obrazu resp. deformací je zapotřebí jednobarevné pozadí na snímcích z kamer. Kamery jsou synchronizovány se snímačem tlaku, tak aby v jeden čas byly získány výstupy z obou kamer najednou.



Obrázek 7: Stříkačka s pístem a hadicí vedoucí do horního upínacího trnu

3.1.2 Formát poskytnutých dat

Byla mi poskytnuta data z inflačně-extenzního experimentu ve formátu excelovských tabulek, kde byl každý ze tří excelovský souborů pro určitý cyklus tlakování (1.cyklus, 4.cyklus, 5.cyklus/relaxace). V jednotlivých excelovských souborech je 34 listů pro 10 testovaných trubic různých materiálů. Například pro desátou trubici, které se v práci věnuju jsou 4 listy, kde první list je pro axiální předpětí 0g, druhý pro předpětí 130g, třetí pro 260g a čtvrtý pro 390g. Jednotlivé listy jsou pojmenovány číslem označujícím použitý typ materiálu v 3D tisku (FLX9940), poté písmenem označujícím v jakém směru byly tisknuty (např. Z značí podélnou osu trubice). Následuje očíslování trubice a hodnota axiálního přívazku viz obr.8.

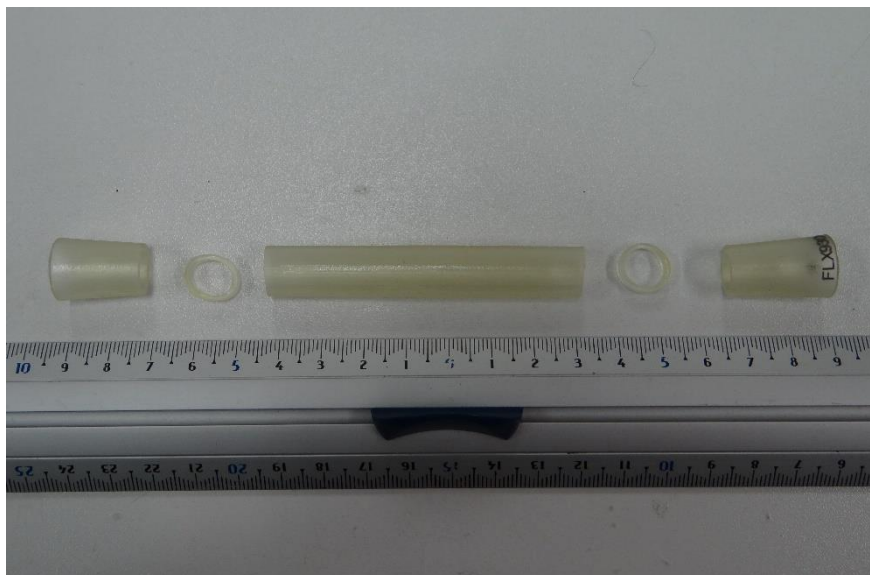


Obrázek 8: Listy excelovského souboru

Samostatné listy obsahují 4 sloupce. V prvním sloupci je vždy čas, ve druhém dosažený tlak v určitém čase. Třetí a čtvrtý sloupec obsahuje axiální a obvodovou deformaci trubice (viz obr.9). Časy jsou v sekundách a tlaky v kilopascalch.

	1	2	3	4
1	Cas	Tlak	Axialny	Obvodovy
2	0	0.276708	0.998783	1.008427
3	0.2	1.467678	0.999492	1.012055
4	0.4	2.744864	1.000057	1.015685
5	0.6	3.759395	1.000694	1.019255
6	0.8	4.799991	1.001402	1.023025
7	1	5.912767	1.001915	1.026716
8	1.2	6.905242	1.002672	1.030139
9	1.4	7.875663	1.003326	1.034157
10	1.6	8.683679	1.004131	1.037587

Obrázek 9: Jednotlivé sloupce excelovských souborů



Obrázek 10: Testovaný tubulární vzorek o vnitřním poloměru $R_i = 5\text{mm}$ a tloušťce stěny $H = 1.4\text{mm}$

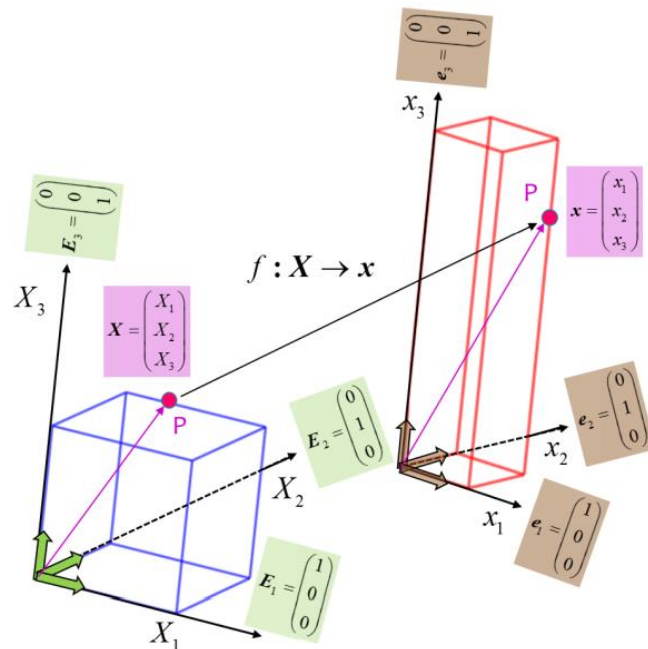
Trubice byla vyrobena technologií Polyjet na tiskárně Stratasys J750 ze směsi materiálu Tango plus a Vero (výrobní název - FLX9940). Tango plus je elastomer na bázi gumy a Vero je tuhý fotopolymer.

4 Úvod do nelineární elasticity

4.1 Deformace

Pro popis velkých deformací a stavů těles, kdy není přímá úměra mezi stavem deformace a napjatosti se používá nelineární přístup.

Mějme trojrozměrný geometrický prostor obsahující vektorovou bázi popsanou vektory $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$, v němž se nachází těleso v referenční konfiguraci. Dá se učit souřadnice libovolného bodu využitím polohových vektorů \mathbf{X} . Silovým působením na těleso dochází k deformaci tělesa resp. přechodu tělesa do zdeformované konfigurace, která má svůj geometrický prostor obsahující bázi, která je popsána vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Souřadnice libovolného určíme zaměřením polohových vektorů \mathbf{x} .



Obrázek11: Referenční konfigurace (vlevo) a zdeformovaná konfigurace (vpravo) s bázovými vektory [14]

4.1.1 Deformační gradient

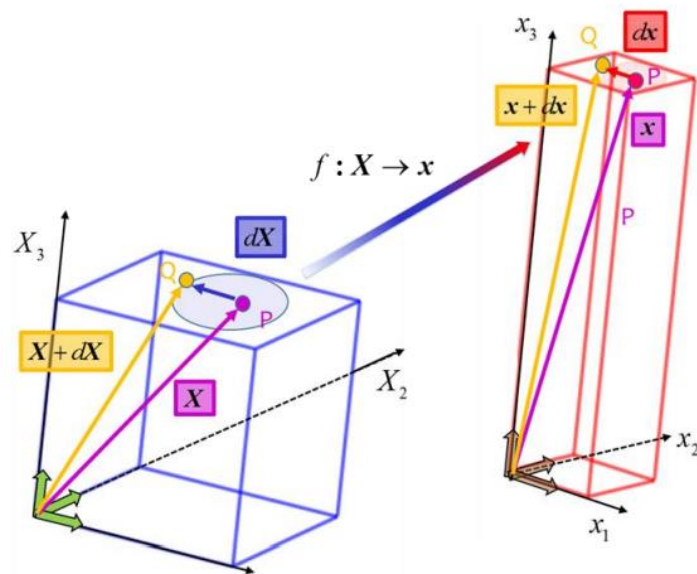
Deformační gradient \mathbf{F} je tenzorem druhého řádu představující lineární transformaci mezi dvěma vektorovými prostory resp. diferenciály polohových vektorů (referenční a zdeformované konfigurace). Je dán vztahem

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}}, \quad (4.1)$$

který lze psát ve formě

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X}, \quad (4.2)$$

kde $d\mathbf{X}$ je diferenciální element referenční a $d\mathbf{x}$ zdeformované konfigurace vymezení elementární okolí bodu P zaměřeného polohovými vektory.



Obrázek 12: Referenční konfigurace (vlevo) a zdeformovaná konfigurace (vpravo) s bázovými vektory [14]

4.1.2 Pravý Cauchy-Greenův tenzor deformace

Definujeme vztahem

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}. \quad (4.3)$$

4.1.3 Green-Lagrangeův tenzor deformace

Definujeme vztahem

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}), \quad (4.4)$$

kde \mathbf{I} je jednotkový tenzor.

4.1.4 Inženýrský tenzor deformace

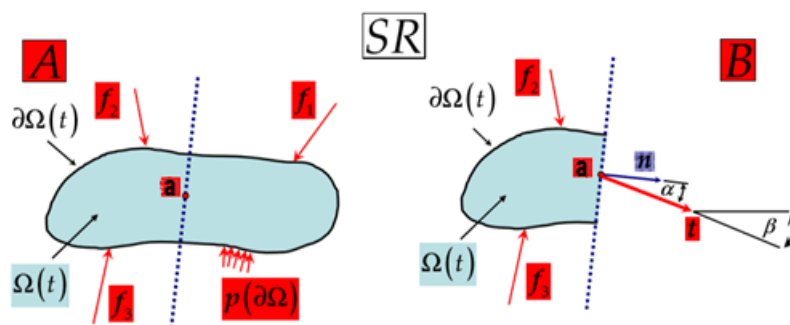
Tenzor ϵ definujeme jako linearizaci G.-L. tenzoru deformace \mathbf{E} .

4.2 Napjatost

Nechť existuje těleso A, které se v čase t nachází v konfiguraci $\Omega(t)$. Vystavíme těleso vnějšímu silovému působení za předpokladu splnění podmínek statické rovnováhy. V libovolném místě rozdělíme těleso fiktivním řezem na dvě části a tím dojde ke ztrátě části silového působení. Proto je nutné v místě řezu „a“ nahradit odříznutou část výsledným silovým účinkem $d\mathbf{f}$, který ji uvede zpět do statické rovnováhy

$$d\mathbf{f} = \mathbf{t}ds, \quad (4.5)$$

kde \mathbf{t} je Cauchyův vektor intenzity vnitřních sil takový, aby v elementárním plošném okolí ds bodu „a“ fiktivního řezu vytvořil staticky ekvivalentní silové působení.



Obrázek 13: Vnější silové účinky působící vnější silové účinky na těleso A (vlevo), rozříznuté těleso fiktivním řezem a nahrazení silového působení odříznuté části [14]

4.2.1 Cauchyho tenzor skutečného napětí

„Nechť vektor intenzity vnitřních sil \mathbf{t} získáme lineární transformací $\boldsymbol{\sigma}$ normálového vektoru \mathbf{n} . V takovém případě nazýváme lineární transformaci $\boldsymbol{\sigma}$ tenzorem Cauchyova (skutečného) napětí.“ [13]

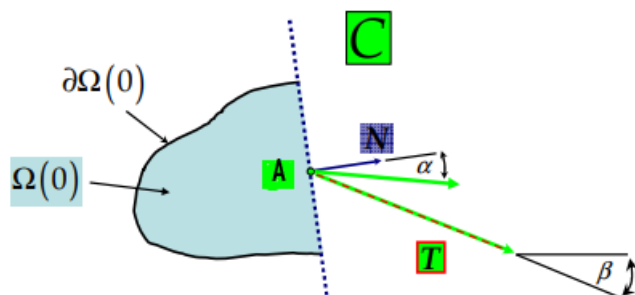
$$\mathbf{t} = (\mathbf{a}, \mathbf{t}, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{a}, \mathbf{t})\mathbf{n} \quad (4.6)$$

Vektor intenzity vnitřních sil závisí pouze na poloze, čase a úhlu pod jakým těleso rozřízneme.

4.2.2 Druhý Piola-Kirchhoffův tenzor napětí

Přenesením výslednice $d\mathbf{f}$ do referenční konfigurace získáme vztah

$$d\mathbf{f} = \mathbf{t}ds = \mathbf{T}dS \quad (4.7)$$



Obrázek 14: Silová výslednice přenesená do referenční konfigurace [14]

Aplikujeme-li na silovou výslednici $d\mathbf{f}$ inverzní transformaci \mathbf{F}^{-1} k deformaci \mathbf{F} vedoucí do průběžné konfigurace, dostáváme

$$d\mathbf{f} = \mathbf{F}\mathbf{T}_s dS = \mathbf{T}dS = \mathbf{t}ds \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{T}_s = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{T}, \quad (4.8)$$

kde \mathbf{T}_s je 2.Piola-Kirchhoffův vektor intenzity vnitřních sil.

Platí vztah

$$\mathbf{T}_s = \mathbf{S}\mathbf{N}, \quad (4.9)$$

kde \mathbf{S} je 2.Piola-Kirchhoffův tenzor napětí.

4.3 Hyperelasticita - Greenův přístup

Hyperelasticita se týká konstitutivní odezvy, kterou lze odvodit z elastického potenciálu. Využívá se zejména u materiálů, které jsou charakteristické velkou elastickou deformací. Jedná se o přírůstek hustoty vnitřní energie způsobený deformací materiálu. Mezi materiály těchto vlastností se řadí řada elastomerů, syntetických polymerů a některé biologické tkáně.

Materiál označujeme za hyperelastický pokud existuje hustota deformační energie W , která po derivování podle tenzoru deformace přejde v napěťový tenzor. [14, 16]

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} \quad (4.10)$$

4.3.1 Příklady modelů hustoty deformační energie

4.3.1.1 Neo-Hookeovský model

Jednoduchý model ze 40.let využívající prvního invariantu tenzoru \mathbf{C} , používaný pro nestlačitelné materiály dán vztahem [17]

$$W = C_1(I_1 - 3), \quad (4.11)$$

kde C_1 je materiálová konstanta určovaná vztahem

$$C_1 = \frac{\xi}{2}. \quad (4.12)$$

Počáteční smykový modul pružnosti ξ je definován vztahem

$$\xi = \frac{NkT}{V} = \frac{\rho RT}{M}, \quad (4.13)$$

kde N je počet řetězců v daném objemu V , T je termodynamická teplota, ρ je hustota hmotnosti, R je univerzální plynová konstanta, veličina M je průměrná molární hmotnost řetězce a k je Boltzmanova konstanta.

4.3.1.2 Mooneyův-Rivlinův model

Jedná se o model využívající první a druhý invariant tenzoru \mathbf{C} , v praxi používán zejména v MKP softwarech. [14]

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_2 - 3), \quad (4.14)$$

kde C_{10} a C_{20} jsou materiálové konstanty.

4.3.1.3 Ogdenův model

V práci jsem se rozhodl použít právě tento model, protože je velmi spolehlivý v predikci chování pryžových materiálů.

Pro hustotu deformační energie použijeme Ogdenův model. Je to model z roku 1972 formulovaný Raymondem Williamem Ogdenem. [9]

$$W = \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k}{\alpha_k} (\lambda_1^{\alpha_k} + \lambda_2^{\alpha_k} + \lambda_3^{\alpha_k} - 3), \quad (4.15)$$

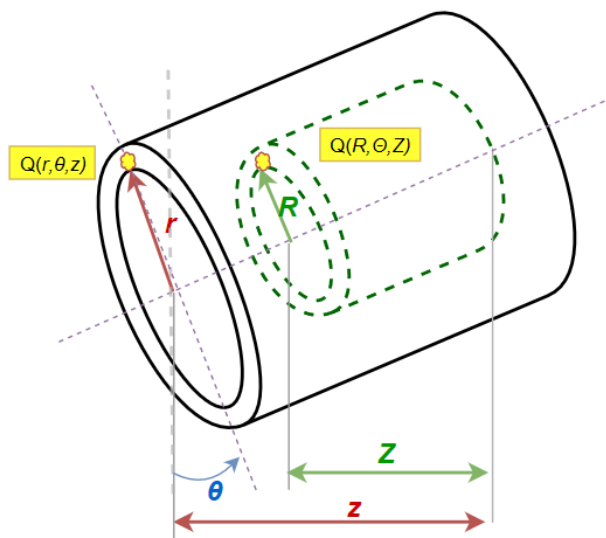
kde λ_i jsou hlavní streže a μ_k, α_k jsou materiálové parametry. n je počet členů funkce W .

4.4 Formulace úlohy pro tenkostěnnou trubici / elasticita

Definujme deformační gradient ve válcových souřadnicích

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial R} & \frac{1}{R} \frac{\partial r}{\partial \theta} & \frac{\partial r}{\partial Z} \\ r \frac{\partial \theta}{\partial R} & \frac{r}{R} \frac{\partial \theta}{\partial \theta} & r \frac{\partial \theta}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial R} & \frac{1}{R} \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

K popisu mnou řešeného případu není potřeba všech devíti složek, protože bylo uvažováno pouze nafukování trubice $R \rightarrow r$ a axiální prodloužení $Z \rightarrow z$.



Obrázek 15: Referenční a zdeformovaná konfigurace

Během nafukování trubice nedochází k žádnému zkřutu a proto lze psát $\theta = \Theta$. Poté platí $\frac{\partial \theta}{\partial \theta} = 1$ a proto lze psát $\lambda_{\theta\theta} = \frac{r}{R} \frac{\partial \theta}{\partial \theta} = \frac{r}{R}$. Předpoklad tenkostěnnosti nádoby vede k zjednodušení složky $\frac{\partial r}{\partial R} = \frac{h}{H}$. Poté zanedbáme přítomnost zkosů a zjednodušením dostáváme

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda_{rR} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{zZ} \end{pmatrix}, \quad (4.17)$$

kde

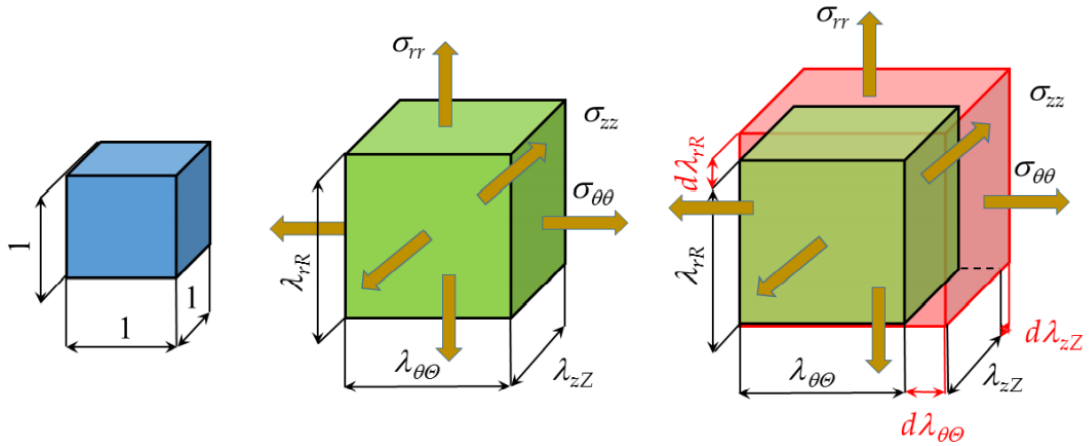
$$h = \lambda_{rR} \cdot H \quad (4.18)$$

$$r = \lambda_{\theta\theta} \cdot R \quad (4.19)$$

$$z = \lambda_{zZ} \cdot Z. \quad (4.20)$$

Předpoklad nestlačitelnosti materiálu $\lambda_{\theta\theta} \lambda_{zZ} \lambda_{rR} = 1$ se v kinematice nafukování projeví tak, že nafukování trubice bude záviset pouze na obvodovém a axiálním streči.

Přírůstek hustoty deformační energie dW lze znázornit pomocí obr.16, kde jednotkovou krychli zatížíme 3-osou napjatostí. Tato úvaha je platná i pro tlustostěnnou trubici.



Obrázek 16: Jednotková krychle v tříosé napjatosti se znázorněním strečů v jednotlivých směrech zatížení [8]

$$dW = \lambda_{\theta\theta} \lambda_{zz} \sigma_{rr} d\lambda_{rR} + \lambda_{rR} \lambda_{zz} \sigma_{\theta\theta} d\lambda_{\theta\theta} + \lambda_{rR} \lambda_{\theta\theta} \sigma_z d\lambda_{zz} \quad (4.21)$$

Zderivováním předpokladu o nestlačitelnosti, získáme tvar

$$\lambda_{\theta\theta} \lambda_{zz} d\lambda_{rR} + d\lambda_{\theta\theta} \lambda_{zz} \lambda_{rR} + \lambda_{\theta\theta} d\lambda_{zz} \lambda_{rR} = 0. \quad (4.22)$$

Nyní ze vztahu (4.15) s využitím nestlačitelnosti dostáváme nový vztah pro hustotu deformační energie závislý pouze na dvou proměnných (axiální a obvodové hlavní deformace).

$$\hat{W} = \frac{\mu}{\alpha} \left(\frac{1}{\lambda_{\theta\theta}^\alpha \lambda_{zz}^\alpha} + \lambda_{\theta\theta}^\alpha + \lambda_{zz}^\alpha - 3 \right) \quad (4.23)$$

Dosazením (4.22) do (4.21) získáváme tvar

$$dW = \lambda_{rR} \lambda_{zz} (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}) d\lambda_{\theta\theta} + \lambda_{rR} \lambda_{\theta\theta} (\sigma_{zz} - \sigma_{rr}) d\lambda_{zz}, \quad (4.24)$$

který využitím nestlačitelnosti přejde v

$$d\hat{W} = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{\theta\theta}} d\lambda_{\theta\theta} + \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{zz}} d\lambda_{zz}. \quad (4.25)$$

Jelikož \hat{W} a W vyjadřují totožnou energii, platí (4.26, 4.27).

$$\lambda_{rR} \lambda_{zz} (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}) d\lambda_{\theta\theta} = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{\theta\theta}} d\lambda_{\theta\theta} \quad (4.26)$$

$$\lambda_{rR} \lambda_{\theta\theta} (\sigma_{zz} - \sigma_{rr}) d\lambda_{zz} = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{zz}} d\lambda_{zz} \quad (4.27)$$

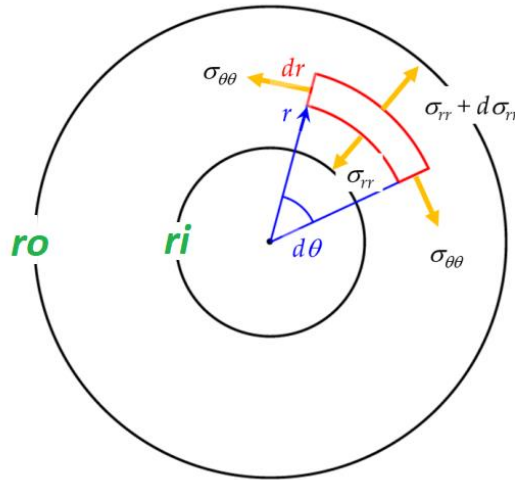
Dále lze (4.26, 4.27) upravit do výsledných tvarů (4.28, 4.29).

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{\theta\theta}} \lambda_{\theta\theta} \quad (4.28)$$

$$\sigma_{zz} - \sigma_{rr} = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{zz}} \lambda_{zz} \quad (4.29)$$

4.4.1 Radiální rovnováha

Postup odvození radiální rovnováhy platný i pro silnostěnnou trubici je znám z kurzu Pružnost a pevnost 2. Z obr.17 odvodíme rovnici rovnováhy (4.30).



Obrázek 17: Vnitřní element ze zdeformované kruhové trubice s vnitřními silovými účinky [8]

$$(\sigma_{rr} - d\sigma_{rr})(r + dr)d\theta dz - \sigma_{rr}rd\theta dz - 2\sigma_{\theta\theta}\sin\left(\frac{d\theta}{2}\right)drdz = 0 \quad (4.30)$$

Je známo, že $\sin(dx) \approx dx$, kde dx je infinitesimálně malý úhel .

Díky tomuto předpokladu můžeme z rovnice vykrátit diferenciály $d\theta dz$, následně zanedbáme člen $d\sigma_{rr}dr \approx 0$ a dostáváme rovnici ve tvaru (4.31), kterou upravíme do tvaru (4.32).

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \quad (4.31)$$

$$d\sigma_{rr} = \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}}{r} dr \quad (4.32)$$

Integrací (4.32) od r_i do r_o s okrajovými podmínkami $\sigma_{rr}(r_i) = -P$ a $\sigma_{rr}(r_o) = 0$ získáme.

$$\int_{\sigma_{rr}(r_i)}^{\sigma_{rr}(r_o)} d\sigma_{rr} = \sigma_{rr}(r_o) - \sigma_{rr}(r_i) = 0 + P = P \quad (4.33)$$

$$\int_{\sigma_{rr}(r_i)}^{\sigma_{rr}(r_o)} d\sigma_{rr} = \int_{r_i}^{r_o} \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}}{r} dr \quad (4.34)$$

Po dosazení rovnice (4.28) do (4.34) získáme tvar.

$$P = \int_{r_i}^{r_o} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{\theta\theta}} \lambda_{\theta\theta} \frac{dr}{r} \quad (4.35)$$

Nyní je potřeba v integrálu (4.35) provést substituci proměnné r za $\lambda_{\theta\theta}$ a najít vztah mezi dr a $d\lambda_{\theta\theta}$.

Z podmínky zachování objemu deformujícího se dutého válce

$$v = V \Leftrightarrow \pi z(r^2 - r_i^2) = \pi Z(R^2 - R_i^2) \Leftrightarrow R = \sqrt{R_i^2 + \lambda_{zz}(r^2 - r_i^2)}, \quad (4.36)$$

získáme vztah

$$\lambda_{\theta\theta} = \frac{r}{\sqrt{(R_i^2 + \lambda_{zz}(r^2 - r_i^2))}} \quad (4.37)$$

Zderivováním (4.37) podle dr dostaneme vztah (4.38) resp. (4.39).

$$\frac{d\lambda_{\theta\theta}}{dr} = \frac{1}{\sqrt{(R_i^2 + \lambda_{zz}(r^2 - r_i^2))}} - \frac{\lambda_{zz}r^2}{\sqrt[3]{(R_i^2 + \lambda_{zz}(r^2 - r_i^2))}} = \frac{1 - \lambda_{\theta\theta}^2 \lambda_{zz}}{R} \quad (4.38)$$

$$dr = \frac{R}{(1 - \lambda_{\theta\theta}^2 \lambda_{zz})} d\lambda_{\theta\theta} \quad (4.39)$$

Pomocí substituce převedeme integrál na tvar.

$$P = \int_{\lambda_{\theta\theta o}}^{\lambda_{\theta\theta i}} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{\theta\theta}} \frac{1}{\lambda_{\theta\theta}^2 \lambda_{zz}^{-1}} d\lambda_{\theta\theta} \quad (4.40)$$

Použitím věty o střední hodnotě lze integrál (4.40) přepsat následujícím způsobem na tvar (4.41). Zde přecházíme od formulace silnostěnné trubice k trubici tenkostěnné, jelikož funkční průběh napětí po tloušťce stěny nahrazujeme jednou střední hodnotou.

$$P = (\lambda_{\theta\theta i} - \lambda_{\theta\theta o}) \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{\theta\theta}} \frac{1}{\lambda_{\theta\theta}^2 \lambda_{zz}^{-1}} \quad (4.41)$$

Rozdíl obvodových deformací lze vyjádřit ve tvaru.

$$\lambda_{\theta\theta i} - \lambda_{\theta\theta o} = \frac{R_o - R_i}{R_i} \frac{(\lambda_{\theta\theta}^2 \lambda_{zz} - 1)}{\lambda_{\theta\theta} \lambda_{zz}} = \frac{\epsilon}{\lambda_{\theta\theta} \lambda_{zz}} (\lambda_{\theta\theta}^2 \lambda_{zz} - 1) \quad (4.42)$$

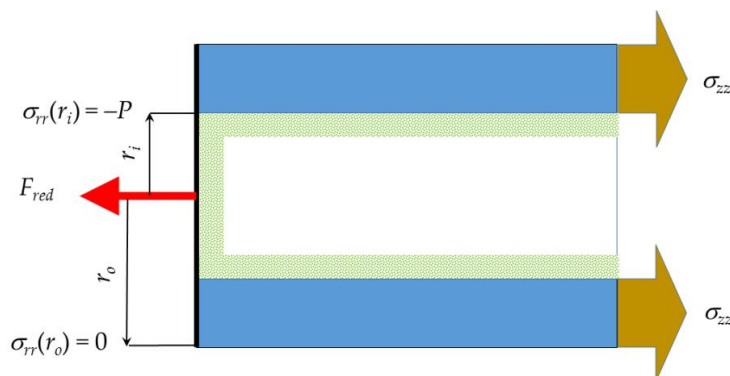
Výsledný vztah (4.44) pro výpočet modelového tlaku tenkostěnné trubice je dán dosazením vztahu (4.42) do (4.41).

$$\epsilon = \frac{H}{R_i} = \frac{R_o - R_i}{R_i} \quad (4.43)$$

$$P = \frac{\epsilon}{\lambda_{\theta\theta} \lambda_{zz}} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{\theta\theta}} \quad (4.44)$$

4.4.2 Axiální rovnováha

Axiální síla od přívazku, která je během tlakování konstantní se silou působící na vzdálený konec trubice generovanou tlakem P , musí být v rovnováze s výsledným silovým účinkem σ_{zz} .



Obrázek 18: Axiální rovnováha [8]

Z obr.18 je evidentní, že platí následující rovnice

$$F_{red} + \pi r_i^2 P = 2\pi \int_{r_i}^{r_o} \sigma_{zz} r dr. \quad (4.45)$$

Vyjáďříme σ_{zz} z rovnice (4.29) a dosadíme do (4.45). Dále víme, že tlak P lze rozepsat do tvaru (4.44). Rovnici (4.45) dostáváme v novém tvaru (4.48).

$$\pi r_i^2 P = \pi r_i^2 \sigma_{rr}(r_i) + \pi r_o^2 \sigma_{rr}(r_o) = \pi [r^2 \sigma_{rr}(r)]_{r_i}^{r_o} \quad (4.46)$$

$$F_{red} + \pi r_i^2 P = 2\pi \int_{r_i}^{r_o} r \left(\sigma_{rr} + \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{zz}} \lambda_{zz} \right) dr \quad (4.47)$$

$$F_{red} + \pi r_i^2 P = \pi \int_{r_i}^{r_o} 2r \sigma_{rr} dr + 2\pi \int_{r_i}^{r_o} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{zz}} \lambda_{zz} r dr \quad (4.48)$$

Provedeme umělou úpravu $2r = \frac{dr^2}{dr}$ a dosadíme vztah (4.44) do rovnice (4.48). Poté vyjáďříme F_{red} .

$$F_{red} = -\pi [r^2 \sigma_{rr}(r)]_{r_i}^{r_o} + \pi \int_{r_i}^{r_o} \frac{dr^2}{dr} \sigma_{rr} dr + 2\pi \int_{r_i}^{r_o} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{zz}} \lambda_{zz} r dr \quad (4.49)$$

Dále uvažme, že

$$-\pi \int_{r_i}^{r_o} \frac{d\sigma_{rr}}{dr} r^2 dr = -\pi [r^2 \sigma_{rr}(r)]_{r_i}^{r_o} + \pi \int_{r_i}^{r_o} \frac{dr^2}{dr} \sigma_{rr} dr \quad (4.50)$$

potom

$$F_{red} = -\pi \int_{r_i}^{r_o} \frac{d\sigma_{rr}}{dr} r^2 dr + 2\pi \int_{r_i}^{r_o} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{zz}} \lambda_{zz} r dr. \quad (4.51)$$

Dosadíme rovnici (4.31) do (4.51) a dostaneme

$$F_{red} = -\pi \int_{r_i}^{r_o} \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}}{r} r^2 dr + 2\pi \int_{r_i}^{r_o} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{zz}} \lambda_{zz} r dr. \quad (4.52)$$

Po vykrácení a následném dosazení vztahu (4.28) získáváme tvar.

$$F_{red} = -\pi \int_{r_i}^{r_o} r \left(\frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{\theta\theta}} \lambda_{\theta\theta} \right) dr + 2\pi \int_{r_i}^{r_o} r \left(\frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{zz}} \lambda_{zz} \right) dr \quad (4.53)$$

Upravíme na tvar

$$F_{red} = \pi \int_{r_i}^{r_o} r \left(2 \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{zz}} \lambda_{zz} - \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{\theta\theta}} \lambda_{\theta\theta} \right) dr. \quad (4.54)$$

Provedeme substituci proměnné r za $\lambda_{\theta\theta}$ využitím vztahů (4.19), (4.39) dostáváme

$$F_{red} = \pi \int_{\lambda_{\theta\theta o}}^{\lambda_{\theta\theta i}} \lambda_{\theta\theta} R \left(2 \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{zz}} \lambda_{zz} - \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{\theta\theta}} \lambda_{\theta\theta} \right) \frac{R}{(1 - \lambda_{\theta\theta}^2 \lambda_{zz})} d\lambda_{\theta\theta}. \quad (4.55)$$

Ze zachování objemu platí

$$\begin{aligned} \pi l (r^2 - r_i^2) &= \pi L (R^2 - R_i^2) \Leftrightarrow \lambda_{zz} (r^2 - r_i^2) = R^2 - R_i^2 \Leftrightarrow \lambda_{zz} r^2 - R^2 = \lambda_{zz} r_i^2 - R_i^2 \\ &\Leftrightarrow R^2 (\lambda_{zz} \lambda_{\theta\theta}^2 - 1) = \lambda_{zz} r_i^2 - R_i^2. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Dosazením (4.56) do (4.55) získáme

$$F_{red} = \pi \int_{\lambda_{\theta\theta o}}^{\lambda_{\theta\theta i}} \left(2 \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{zz}} \lambda_{zz} - \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{\theta\theta}} \lambda_{\theta\theta} \right) \frac{\lambda_{\theta\theta}}{(1 - \lambda_{\theta\theta}^2 \lambda_{zz})} \frac{\lambda_{zz} r_i^2 - R_i^2}{(\lambda_{zz} \lambda_{\theta\theta}^2 - 1)} d\lambda_{\theta\theta}. \quad (4.57)$$

Upravíme na tvar

$$F_{red} = \pi (\lambda_{zz} r_i^2 - R_i^2) \int_{\lambda_{\theta\theta o}}^{\lambda_{\theta\theta i}} \left(2 \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{zz}} \lambda_{zz} - \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{\theta\theta}} \lambda_{\theta\theta} \right) \frac{\lambda_{\theta\theta}}{(1 - \lambda_{\theta\theta}^2 \lambda_{zz})^2} d\lambda_{\theta\theta}. \quad (4.58)$$

Použitím vztahu (4.19) dostáváme

$$F_{red} = \pi R_i^2 (\lambda_{zz} \lambda_{\theta\theta}^2 - 1) \int_{\lambda_{\theta\theta o}}^{\lambda_{\theta\theta i}} \left(2 \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{zz}} \lambda_{zz} - \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{\theta\theta}} \lambda_{\theta\theta} \right) \frac{\lambda_{\theta\theta}}{(1 - \lambda_{\theta\theta}^2 \lambda_{zz})^2} d\lambda_{\theta\theta}. \quad (4.59)$$

Vztah (4.60) pro modelovou predikci síly od axiálního přivažku získáme použitím věty o střední hodnotě, resp. přechodem od silnostěnné trubice k tenkostěnné obdobně jako u radiální rovnováhy pro modelový tlak.

$$F_{red} = \pi R_i^2 (\lambda_{zz} \lambda_{\theta\theta}^2 - 1) (\lambda_{\theta\theta i} - \lambda_{\theta\theta o}) \left(2 \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{zz}} \lambda_{zz} - \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{\theta\theta}} \lambda_{\theta\theta} \right) \frac{\lambda_{\theta\theta}}{(1 - \lambda_{\theta\theta}^2 \lambda_{zz})^2} \quad (4.60)$$

Dosazením (4.42) do (4.60) a vykrácením dostáváme výsledný model redukované síly. [8]

$$F_{red} = \pi R_i^2 \epsilon \left(2 \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{zz}} - \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{\theta\theta}} \frac{\lambda_{\theta\theta}}{\lambda_{zz}} \right). \quad (4.61)$$

5 Úvod do kvazilineární viskoelastivity

Zvolil jsem postup, který uvádí De Pascalis [11].

Základní idea pro výpočet kvazilineárního viskoelastického napětí je

$$\mathbf{S}(\mathbf{X}, t) = \int_{-\infty}^t G(t - \tau) \frac{\partial \mathbf{S}^e(\mathbf{X}, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (5.1)$$

kde \mathbf{S} je 2. Piola-Kirchhoffovo napětí, G je relaxační funkce, \mathbf{S}^e je elastické 2. Piola-Kirchhoffovo napětí, t je aktuální čas, ve kterém se ptám na hodnotu napětí a τ je časová integrační proměnná, která slouží k vyjádření historie .

5.1 Spojitost s lineární pružností

V lineární pružnosti lze psát

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = 2\mu \left(\boldsymbol{\epsilon}(t) - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}(t)) \mathbf{I} \right) + \kappa \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}(t)) \mathbf{I}, \quad (5.2)$$

kde $\boldsymbol{\sigma}$ je tenzor Cauchyho napětí, $\boldsymbol{\epsilon}$ tenzor deformace, μ je smykový modul a κ je objemový modul. Protože v lineární pružnosti jsou posuvy a deformace malé, je rozdíl mezi Cauchyho napětím a 2. Piola-Kirchhoffovým napětím zanedbatelný. První člen rovnice je deviatorická část napětí, zodpovědná za změnu tvaru a druhý člen je volumetrická část, zodpovědná za změnu objemu.

Přejdeme-li k viskoelasticitě, můžeme G rozdělit na deviatorickou μ a volumetrickou κ relaxační funkci. Spojením (5.1) a (5.2) můžeme psát.

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = 2 \int_{-\infty}^t \mu(t - \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\boldsymbol{\epsilon}(\tau) - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}(\tau)) \mathbf{I} \right) d\tau + \int_{-\infty}^t \kappa(t - \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}(\tau)) \right) \mathbf{I} d\tau, \quad (5.3)$$

Integrací (5.3) metodou per partes, za předpokladu spojitosti deformační a napěťová historie a faktu, že deformace začíná v čase $t = 0$ získáme tvar. Operaci čárkování chápeme jako časovou derivaci.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(t) = & 2\mu(0) \left(\boldsymbol{\epsilon}(t) - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}(t)) \mathbf{I} \right) + 2 \int_0^t \mu'(t - \tau) \left(\boldsymbol{\epsilon}(\tau) - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}(\tau)) \mathbf{I} \right) + \\ & \kappa(0) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}(t)) \right) \mathbf{I} + \int_0^t \kappa'(t - \tau) \left(\text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}(\tau)) \right) \mathbf{I} d\tau \end{aligned} \quad (5.4)$$

Zavedeme-li předpoklad nestlačitelnosti $\frac{\mu}{\kappa} \rightarrow 0$ a $\text{tr} \boldsymbol{\epsilon} \rightarrow 0$ v elasticitě , vztah (5.2) se zjednoduší na

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = 2\mu\boldsymbol{\epsilon}(t) - p(t)\mathbf{I}, \quad (5.5)$$

kde $p(t)$ je neurčitý multiplikátor, který se určí z okrajové podmínky.

Využitím nestlačitelnosti ve viskoelasticitě popsané rovnicí (5.4) můžeme psát

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = 2\mu(0)(\boldsymbol{\epsilon}(t)) + 2 \int_0^t \mu'(t - \tau)\boldsymbol{\epsilon}(\tau)d\tau - p(t)\mathbf{I} \quad (5.6)$$

5.2 Využití v nelineárním přístupu

Pokud jsou deformace nelineární, musíme místo tenzoru ϵ použít například pravý Cauchy-Greenův tenzor $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$, kde \mathbf{F} je deformační gradient.

$$\mathbf{F}(\tau) = \begin{cases} \mathbf{I}, & \tau \in (-\infty, 0) \\ \frac{\partial \mathbf{x}(\tau)}{\partial \mathbf{x}}, & \tau \in [0, t] \end{cases} \quad (5.7)$$

Cauchyho napětí při velkých deformacích budeme označovat $\boldsymbol{\sigma}$. Máme-li elastickou úlohu potom, lze $\boldsymbol{\sigma}^e$ rozložit na deviator a hydrostatický tenzor viz (5.8).

$$\boldsymbol{\sigma}^e = \boldsymbol{\sigma}_D^e + \boldsymbol{\sigma}_H^e \quad (5.8)$$

Deviatorická a hydrostatická složka, lze zapsat

$$\boldsymbol{\sigma}_D^e = \boldsymbol{\sigma}^e - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^e) \mathbf{I}, \quad \boldsymbol{\sigma}_H^e = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^e) \mathbf{I}. \quad (5.9)$$

Chceme-li zachovat objektivitu, musíme dále pracovat s 2. Piola-Kirchhoffovým tenzorem napětí \mathbf{S} , který je vztažený k referenční konfiguraci. Z $\boldsymbol{\sigma}^e$ získáme \mathbf{S}^e transformací (5.10).

$$\mathbf{S}^e = J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma}^e \mathbf{F}^{-T} \quad (5.10)$$

Použijeme stejný rozklad jako v (5.8) a můžeme psát

$$\mathbf{S}^e = \mathbf{S}_D^e + \mathbf{S}_H^e, \quad (5.11)$$

kde

$$\mathbf{S}_D^e = J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_D^e \mathbf{F}^{-T}, \quad \mathbf{S}_H^e = J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_H^e \mathbf{F}^{-T}. \quad (5.12)$$

Uplatníme-li na (5.11) integrální zápis viskoelasticity (5.1) získáme

$$\mathbf{S}(t) = \int_{-\infty}^t \mathcal{D}(t - \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{S}_D^e(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^t \mathcal{H}(t - \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{S}_H^e(\tau) d\tau, \quad (5.13)$$

kde \mathcal{D} a \mathcal{H} jsou redukované relaxační, skalární funkce splňující podmínku $\mathcal{D}(0) = \mathcal{H}(0) = 1$.

Nyní s využitím transformace (5.12) můžeme zapsat Cauchyho skutečné viskoelastické napětí ve tvaru (5.14).

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(t) = & J^{-1} \mathbf{F}(t) \left(\int_{-\infty}^t \mathcal{D}(t - \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{S}_D^e(\tau) d\tau \right) \mathbf{F}^T(t) + \\ & J^{-1} \mathbf{F}(t) \left(\int_{-\infty}^t \mathcal{H}(t - \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{S}_H^e(\tau) d\tau \right) \mathbf{F}^T(t) \end{aligned} \quad (5.14)$$

Integrujeme-li metodou per partes, dostáváme

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(t) = & J^{-1} \mathbf{F}(t) \left(\mathbf{S}_D^e(t) + \int_0^t \mathcal{D}'(t - \tau) \mathbf{S}_D^e(\tau) d\tau \right) \mathbf{F}^T(t) + \\ & J^{-1} \mathbf{F}(t) \left(\mathbf{S}_H^e(t) + \int_0^t \mathcal{H}'(t - \tau) \mathbf{S}_H^e(\tau) d\tau \right) \mathbf{F}^T(t). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Využitím nestlačitelnosti se redukuje volumetrický člen na Lagrangeův multiplikátor

$$J^{-1} \mathbf{F}(t) \left(\mathbf{S}_H^e(t) + \int_0^t \mathcal{H}'(t - \tau) \mathbf{S}_H^e(\tau) d\tau \right) \mathbf{F}^T(t) \rightarrow -p(t) \mathbf{I}, \quad (5.16)$$

který vypočítáme z předpokladu tenkostěnnosti trubice $T_{rR} = 0$ pro radiální napětí.

a vztah (5.15) zjednoduší na výsledný tvar Cauchyho viskoelastického napětí

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = J^{-1} \mathbf{F}(t) \left(\mathbf{S}_D^e(t) + \int_0^t \mathcal{D}'(t-\tau) \mathbf{S}_D^e(\tau) d\tau \right) \mathbf{F}^T(t) - p \mathbf{I}, \quad (5.17)$$

kde \mathbf{S}_D^e z (5.17) lze vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{S}_D^e(t) = \mathbf{F}^{-1} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \mathbf{F}} \quad (5.18)$$

a redukovanou relaxační funkci ve tvaru

$$\mathcal{D}(t-\tau) = \frac{\mu_\infty}{\mu} + \left(1 - \frac{\mu_\infty}{\mu}\right) e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (5.19)$$

kde vystupují další hledané materiálové parametry μ_∞ a τ , které budeme hledat optimální pro minimum účelové funkce Q .

5.3 Formulace úlohy pro tenkostěnnou trubici / viskoelastická

Cauchyho viskoelastické napětí v maticovém zápisu

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \quad (5.20)$$

Pro viskoelastickou trubici využijí Laplaceovy rovnice rovnováhy, kde vzápětí dosadím složky viskoelastického napětí ve tvaru (5.17).

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{rP}{h} \quad (5.21)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{F_{red}}{2\pi r h} + \frac{rP}{2h}. \quad (5.22)$$

Dosazením vztahů (4.18, 4.19, 4.22) do (5.21, 5.22) a použitím rozepsaných Cauchyho viskoelastických napětí $\sigma_{\theta\theta}$ a σ_{zz} dvě rovnice s kterých vyjádříme neznámé P a F_{red}

$$P = \frac{H \sigma_{\theta\theta}}{\lambda_{\theta\theta}^2(t) R \lambda_{zz}(t)} \quad (5.23)$$

$$F_{red} = \frac{2 \left(\sigma_{zz} - \frac{(\lambda_{\theta\theta}^2(t) R \lambda_{zz}(z) P)}{2H} \right) \pi R H}{\lambda_{zz}(t)}. \quad (5.24)$$

Vztah (5.23) dosadíme do (5.24) a získáme výslednou modelovou predikci pro F_{red} . [11]

$$F_{red} = \frac{2 \left(\sigma_{zz} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{2} \right) \pi R H}{\lambda_{zz}(t)} \quad (5.25)$$

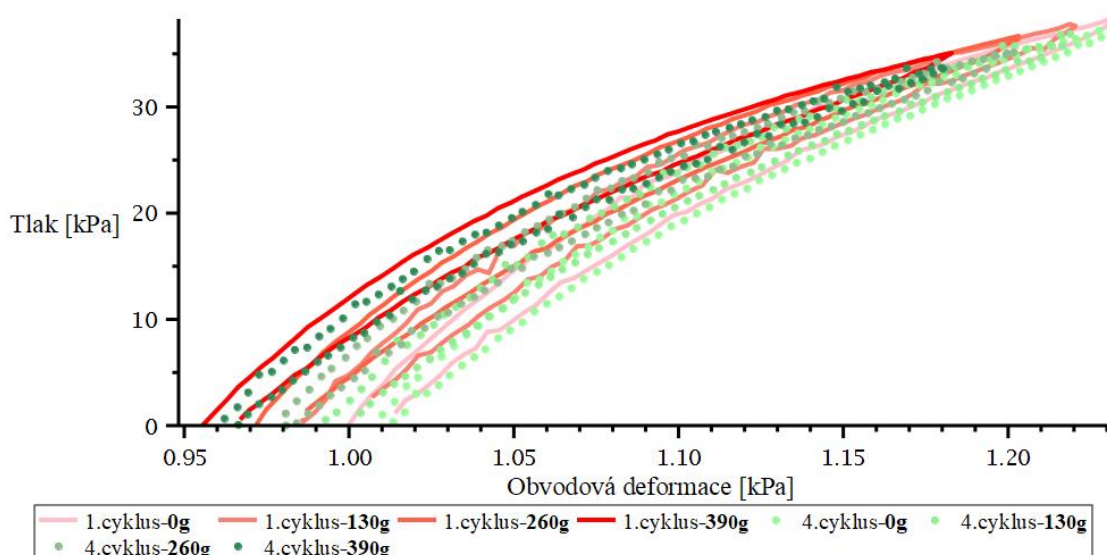
6 Výsledky inflačně-extenzního experimentu

S vedoucím práce jsme se shodli, že bude interpretována trubice 10, jelikož pro tuto trubici byla naměřená data pro všechny axiální přivažky (0g, 130g, 260g, 390g). Nebyly zde očividné žádné experimentální artefakty, které by neodpovídaly běžné mechanické odezvě nafukované viskoelastické trubice.

6.1 První a čtvrté cykly

V cyklech dochází k nafukování trubice a po dosažení maximálního tlaku k jejímu vyfouknutí až na nulovou hodnotu tlaku. Nejprve porovnáme mechanickou odezvu 1. a 4. cyklů viz obr.19-20. Mechanickou odezvou mám na mysli závislost $\lambda_{\theta\theta}$, λ_{zz} (obvodové a axiální deformace) na tlaku P .

V obr.15 je pod jedním barevným odstínem křivka zatížení a následného odlehčení. Pro odlišení prvních a čtvrtých cyklů jsem první cykly znázornil plnou čarou a čtvrté tečkami. Při porovnání jednoho cyklu pro dané axiální předpětí je evidentní, že zatěžovací a odlehčovací křivky nesplývají. Dochází tedy k disipaci vložené mechanické energie v teplo, což je pro viskoelastické materiály charakteristické.

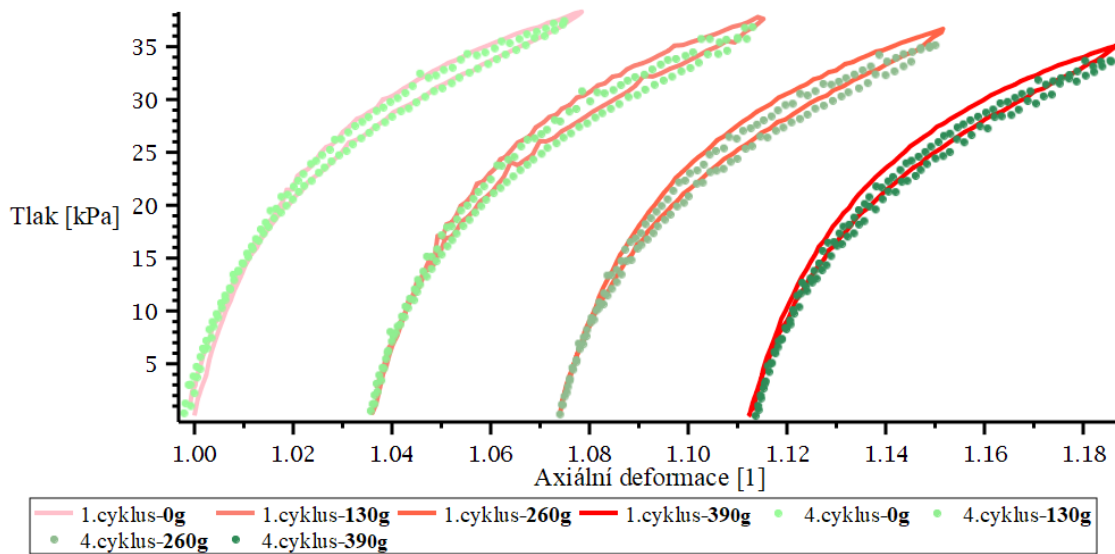


Obrázek 19: Závislost obvodové deformace na tlaku pro 1. (červené) a 4. (zelené) cykly

Červené body charakterizují 1.cykus, čím tmavší odstín dané barvy tím vyšší hodnota axiálního přivažku. Trubice se zprvu tlakuje bez axiálního přivažku. Této situaci odpovídá růžová barva vycházející z $\lambda_{\theta\theta} = 1$. Sytě červená barva (plná čára) charakterizující křivku naměřenou pro největší axiální přivažek 390g, vychází z $\lambda_{\theta\theta} = 0.956$ (vlevo). Jelikož je materiál z části elastický, dojde natažením trubice ke zmenšení jejího průřezu resp. poloměru. Pro zelenou barvu platí obdobná logika, akorát popisuje čtvrtý cyklus namísto prvního.

Z obr.19 je zřetelné, že se zelené křivky čtvrtých cyklů posunuly oproti červeným směrem doprava a také dosahují nižší hodnoty natlakování. Tento jev může být důsledkem zbytkových deformací. Zbytkové deformace se projeví jako trvalé zvětšení průměru testované trubice (tečení materiálu). Trvalým zvětšením průměru trubice by docházelo k nárůstu jejího objemu a jelikož je tlakování trubice uskutečněno pístem s konstantním posuvem (konstantní objem vtlačované vody) znamenalo by to, že ve zdeformované trubici bude dosaženo nižšího tlaku.

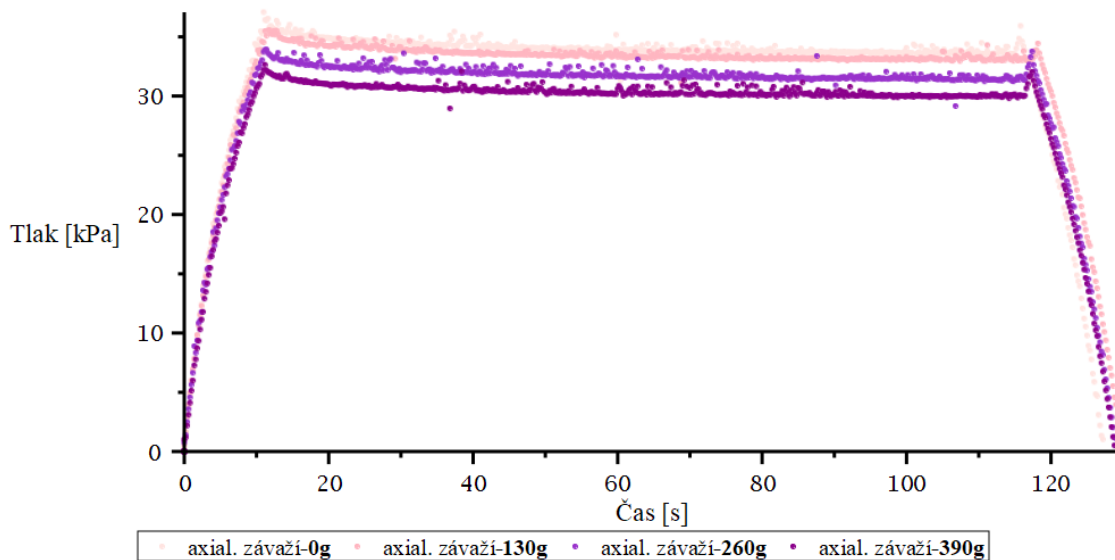
Na obr.20, kde vidíme závislost axiální deformace na tlaku je zřejmé, že se trubice přidáním axiálního přivažku znatelně protahuje. Dále je zde lépe vidět pokles maximálních dosažených tlaků pro 4.cykly zmiňovaný výše.



Obrázek20: Závislost axiální deformace na tlaku pro 1. (červeně) a 4. (zeleně) cykly

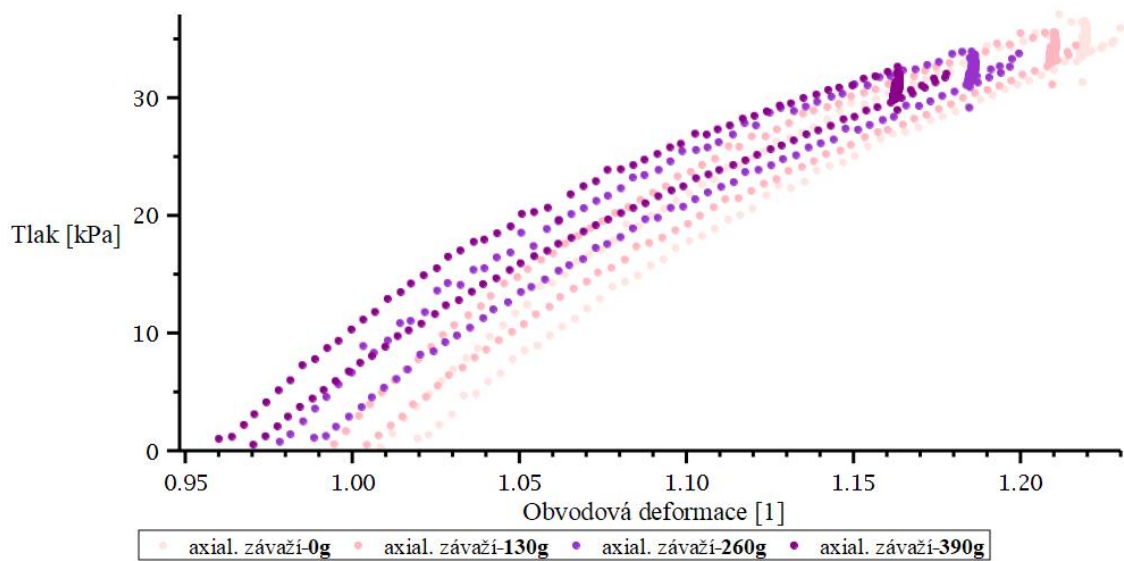
6.2 Páté cykly-relaxace napětí

Trubice je nejprve nafukována na určitou hodnotu tlaku s následnou 100g výdrží na dané hodnotě tlaku viz obr.21 (závislost čas-tlak). Od světlého odstínu 0g k tmavšímu 390g jsou značeny jednotlivé axiální přivažky.

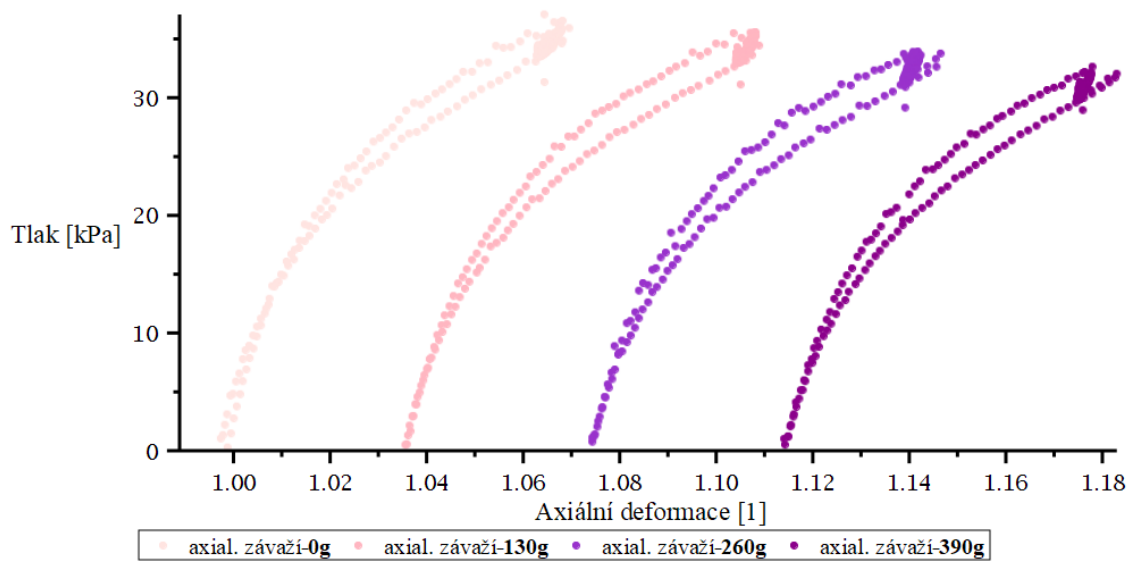


Obrázek 21: Závislost čas-tlak pro 5.cykly po jednotlivých axiálních přivažcích

V obr.22-23, závislosti obvodové a axiální deformace na tlaku je 100s výdrž na maximálním tlaku zřetelná jako shluk bodů v okolí tlakového maxima. Po 100s výdrži na dané hodnotě tlaku dochází k postupnému poklesu tlaku na 0kpa. V grafech lze pozorovat stejné fenomény, které jsou diskutovány výše u 1. a 4. cyklů.



Obrázek 22: Závislost obvodové deformace-tlak pro 5.cykly , nafouknutí, 100s výdrž na max. tlaku a poté vyfouknutí



Obrázek 23: Závislost axiální deformace-tlak pro 5.cykly , nafouknutí, 100s výdrž na max. tlaku a poté vyfouknutí

7 Proložení dat modelem

Nejprve bude proložena pouze elastická mechanická odezva a poté viskoelastická odezva, kde je zjevný jev relaxování napětí. Prokládat budeme experimentální data pro páte cykly.

7.1 Optimalizační úloha

Nejprve je zapotřebí sestavit účelovou funkci Q .

$$Q = w_P \sum_{i=1}^n (P_i^{exp} - P_i^{pred})^2 + w_F \sum_{i=1}^n (F_i^{exp} - F_i^{pred})^2, \quad (7.1)$$

kde P^{exp} je naměřený tlak, P^{pred} je tlak predikovaný modelem a w_P je váhový koeficient pro tlaky. Stejná logika značení platí i pro sílu předpětí F^{exp} a F^{pred} a w_F . Poté pomocí příkazu NLPsolve v programu Maple 2020 najdu takové materiálové parametry μ a α , které odpovídají minimu účelové funkce. Nalezením optimálních parametrů pro minimum Q a zpětným dosazením do vztahů (4.28), (4.42) získáme modelovou predikci experimentálně naměřených dat.

7.1.2 Váhové koeficienty

Jelikož do účelové funkce přispívá tlak a síla od přívazku jinou měrou, je zapotřebí zkonstruovat váhové koeficienty. Ty se typicky konstruují tak, aby člen, před který je v účelové funkci umístíme znormalizovaly resp. Vezmeme-li v potaz první člen funkce Q je evidentní, že jeho rozměr bude kPa^2 . Znормalizováním mám namysli, vynásobit člen převrácenou veličinou s rozměrem $1/\text{kPa}^2$. Váhové koeficienty tedy zkonstruujeme ve tvaru

$$w_P = \frac{1}{(\bar{P})^2}, \quad (7.2)$$

kde \bar{P} je průměrná hodnota tlaku a

$$w_F = \frac{1}{(\bar{F})^2}, \quad (7.3)$$

\bar{F} průměrná hodnota axiální síly, která během nafukování zůstává konstantní.

7.1.3 Koeficient determinace

V neposlední řadě je nutné zavést míru pomoci, které bude možné kvantifikovat s jakou odchylkou jsme experimentální data proložili. Pro definování koeficientu determinace nejprve zavedu potřebné pojmy: residuální součet čtverců S_R a celkový součet čtverců S_T .

$$S_R = \sum_{i=1}^n (X_i^{exp} - X_i^{pred})^2, \quad (7.4)$$

$$S_T = \sum_{i=1}^n (X_i^{exp} - \bar{X}^{exp})^2, \quad (7.5)$$

kde n je počet zaznamenaných dat a X_i je obecné značení veličiny do, které v našem případě dosadíme buďto tlak P nebo axiální sílu od přívazku F_{red} .

Koeficient determinace vypočítáme následovně

$$K_D = 1 - \frac{S_R}{S_T}. \quad (7.6)$$

Za úspěšnou regresní analýzu budeme považovat, když hodnoty budou $K_D > 0.9$. [10]

7.2 Proložená data elastické odezvy

Data pro elastickou odezvu jsem použil z pátého cyklu, kde jsem ořízнул pouze fázi nafukování (z nulového až na maximální dosažený tlak uvnitř trubice).

Nejprve jsem optimalizační proceduru zformuloval tak, že jsem hledal optimální materiálové parametry Ogdenova modelu μ a α pro každé axiální zatížení zvlášť viz obr.24-31.

V tabulce 1 vidíme, že shoda modelu (regresní analýzy) a experimentálně naměřených dat je pro tlaky vždy větší než 98 %. Pro modelovou predikci síly je shoda s experimentálními hodnotami pořád velmi slušná, téměř 94%.

U obr.26-31 je zřejmá odchylka modelu od experimentálně naměřených dat v počáteční a koncové fázi tlakování. Hodnota koeficientu determinace i přes to vychází stále velmi slušná.

Tabulka 1: Koeficienty determinace / Elasticita

Hodnoty axiálního přívážku	Hodnoty koeficientu determinace
0g	$K_{Dp.0g} = 0.996$
130g	$K_{Dp.130g} = 0.994$
260g	$K_{Dp.260g} = 0.989$
390g	$K_{Dp.390g} = 0.992$
Pro všechna najednou / tlaky	$K_{Dp.all1} = 0.986$
Pro všechna najednou / síly	$K_{Df.all2} = 0.939$

Z výsledků je zřejmé, že Ogdenův materiálový model byl pro popis elastické fáze mechanické odezvy dostačující.

Protože regresní analýza pro jednotlivé axiální přívážky byla provedena úspěšně, zajímalo nás, jakou měrou by se výsledky lišily pokud bychom hledali optimální parametry Ogdenova modelu pro všechna axiální závaží najednou (viz obr.32-33).

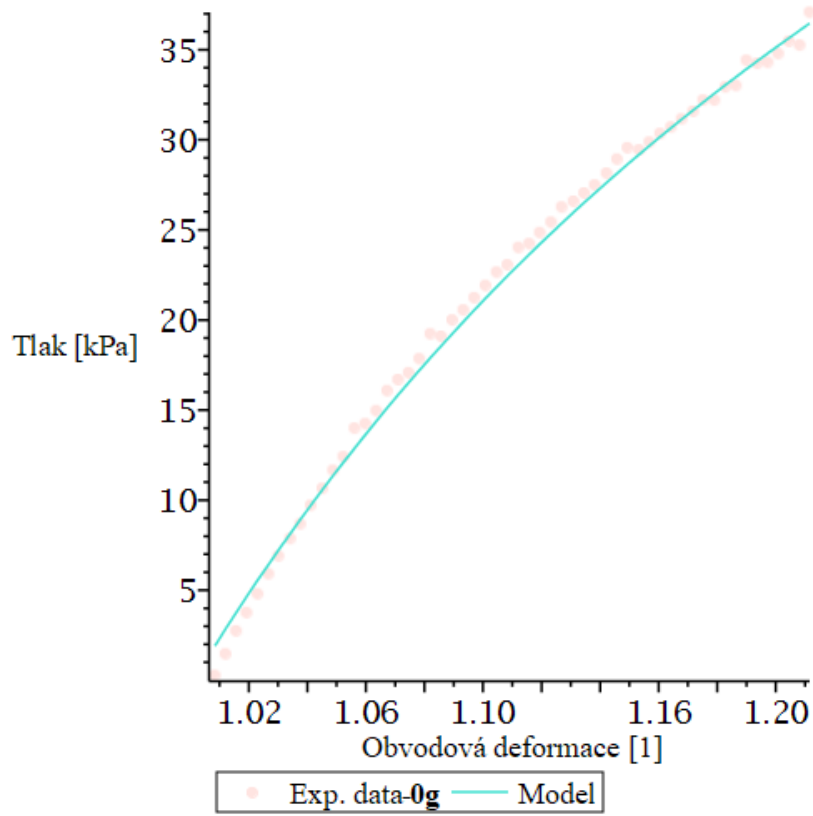
Ukázalo se, že regresní analýza pro všechny axiální přívážky najednou dosahuje stejně dobrých výsledků jako když ji děláme pro každé axiální závaží zvlášť.

7.2.1 Optimální materiálové parametry – elastického modelu

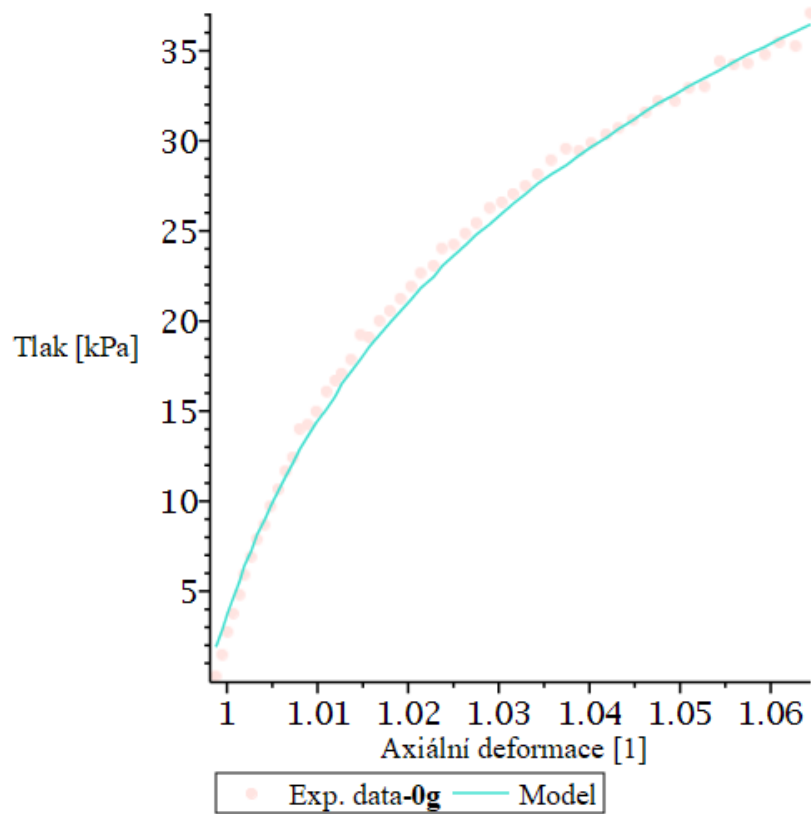
Tabulka 2: Materiálové parametry Ogdenova modelu pro jednotlivá axiální závaží / elastická odezva

Materiálové parametry Ogdenova modelu \hat{W}	
Axiální závaží - 0g	
$\mu_1 = 96.440$	$\alpha_1 = 4.605$
Axiální závaží - 130g	
$\mu_2 = 113.482$	$\alpha_2 = 4.118$
Axiální závaží - 260g	
$\mu_3 = 101.726$	$\alpha_3 = 4.776$
Axiální závaží - 390g	
$\mu_4 = 103.111$	$\alpha_4 = 4.761$
Pro všechna axiální závaží najednou	
$\mu_5 = 154.423$	$\alpha_5 = 2.983$

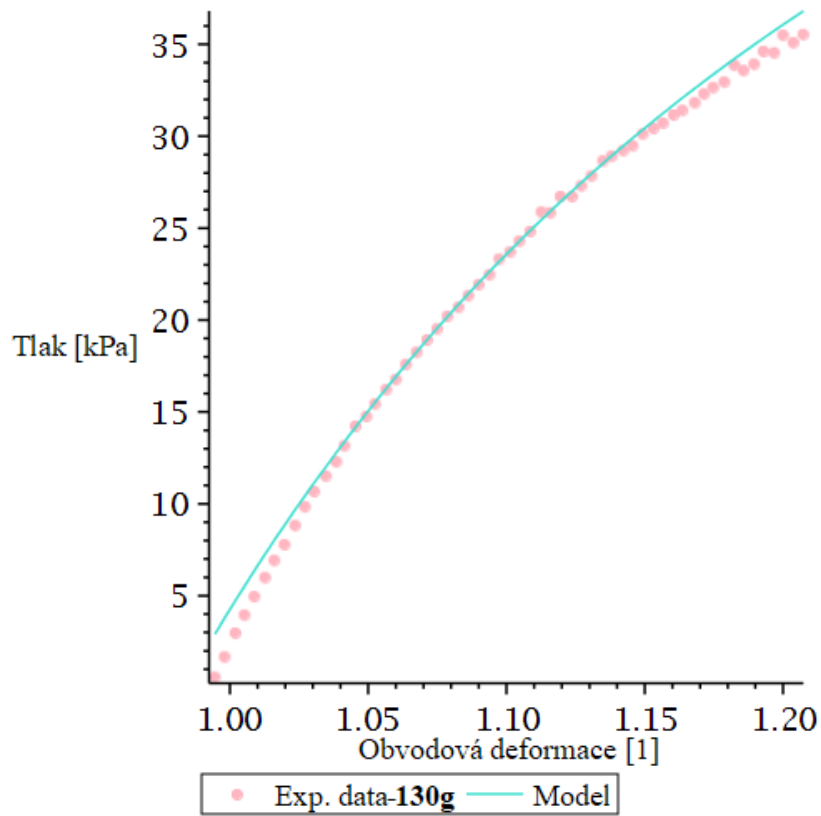
Smykový modul μ je uveden v kPa.



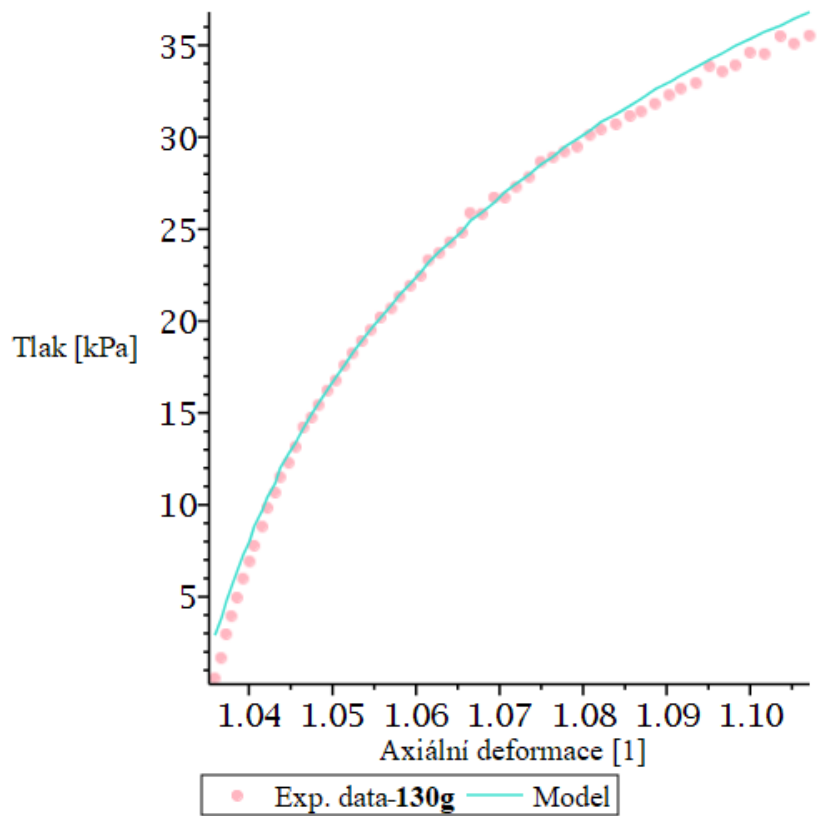
Obrázek 24: Obvodová deformace v závislosti na tlaku / Axiální závaží 0g



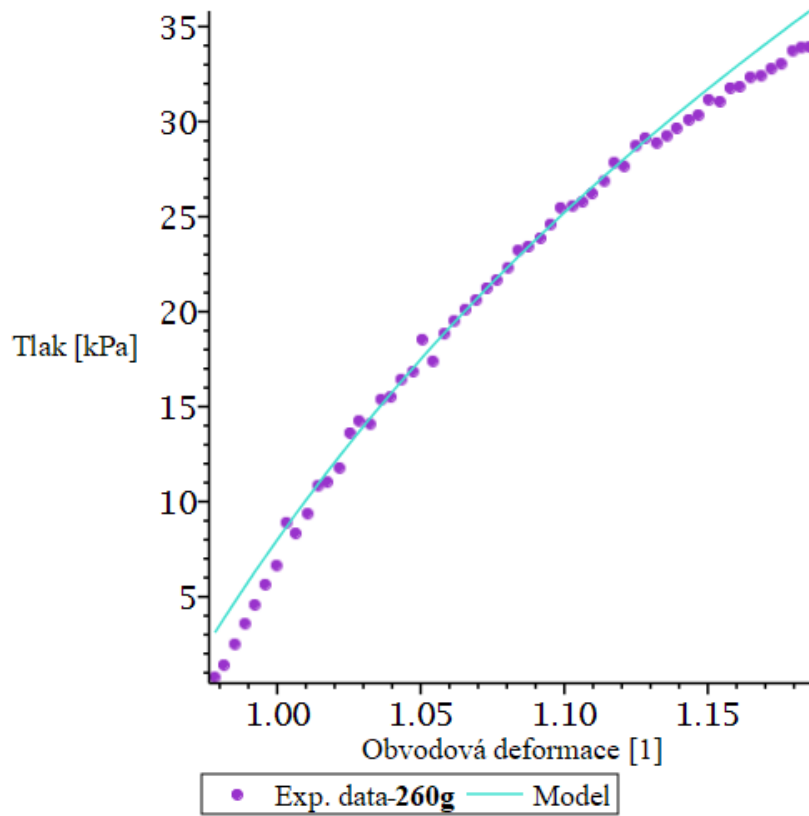
Obrázek 25: Axiální deformace v závislosti na tlaku / Axiální závaží 0g



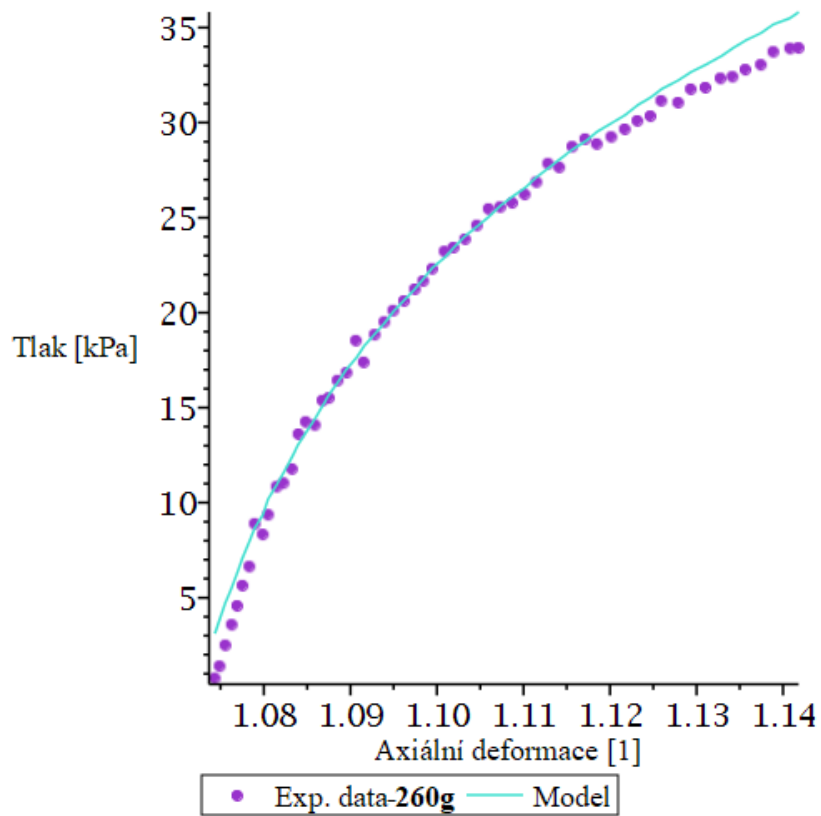
Obrázek 26: Obvodová deformace v závislosti na tlaku / Axiální závaží 130g



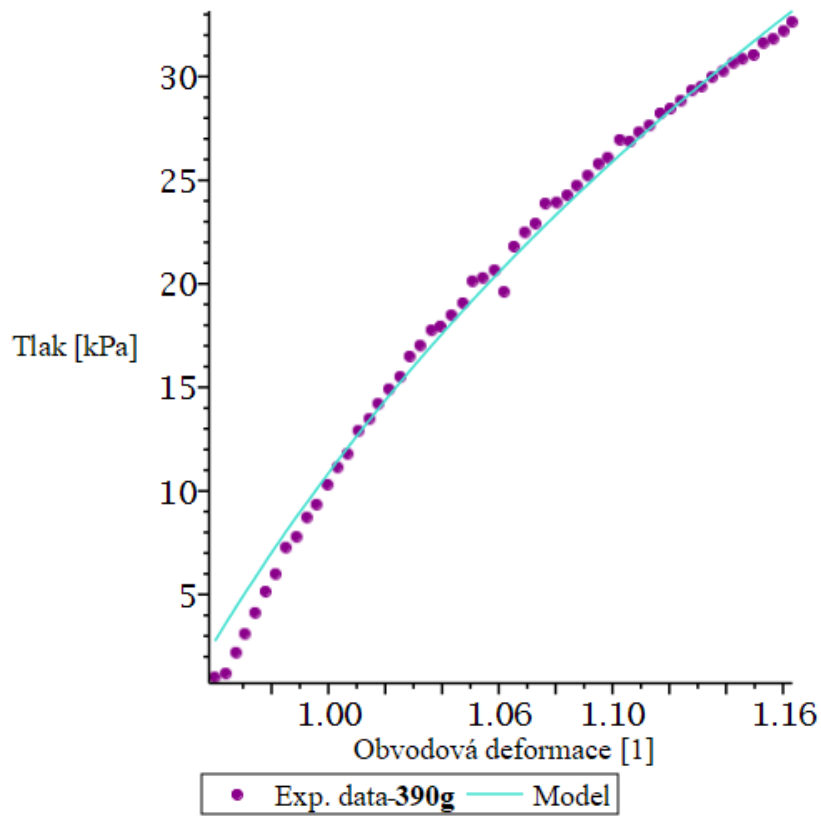
Obrázek 27: Axiální deformace v závislosti na tlaku / Axiální závaží 130g



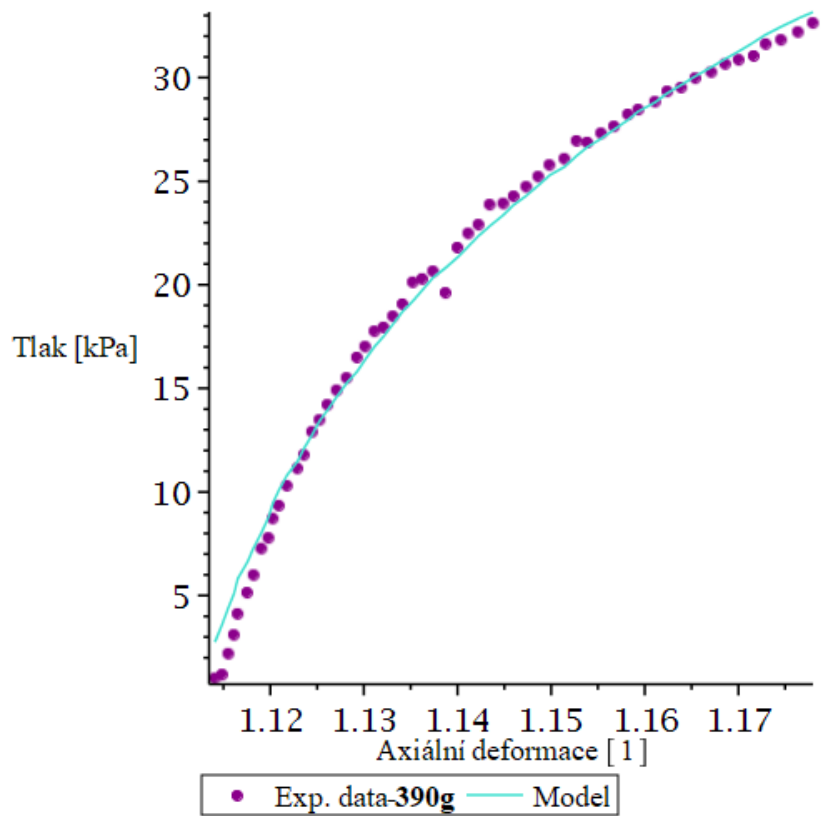
Obrázek 28: Obvodová deformace v závislosti na tlaku / Axiální závaží 260g



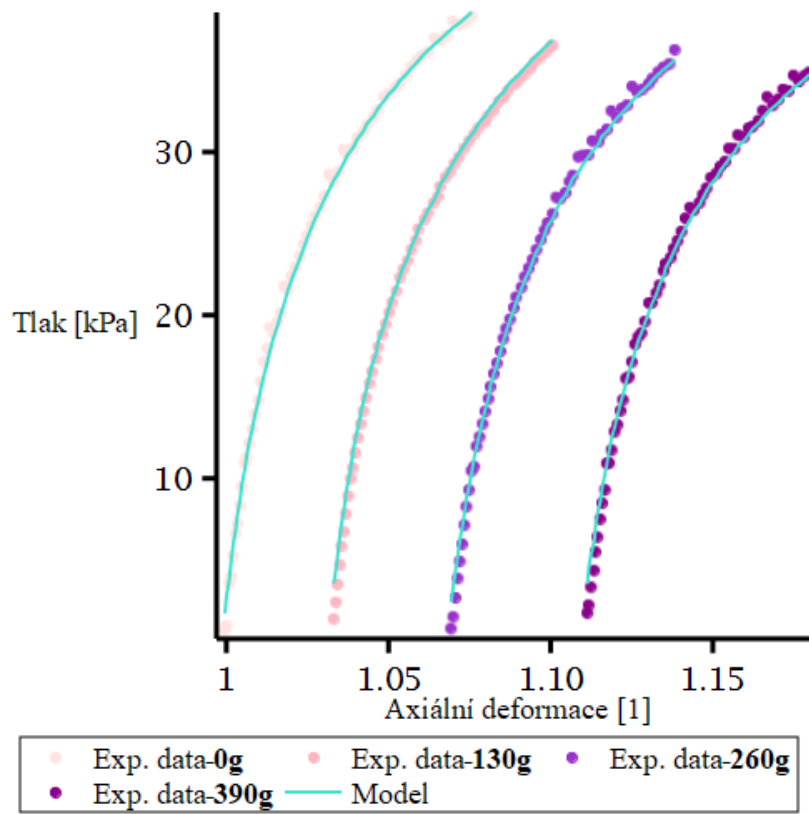
Obrázek 29: Axiální deformace v závislosti na tlaku / Axiální závaží 260g



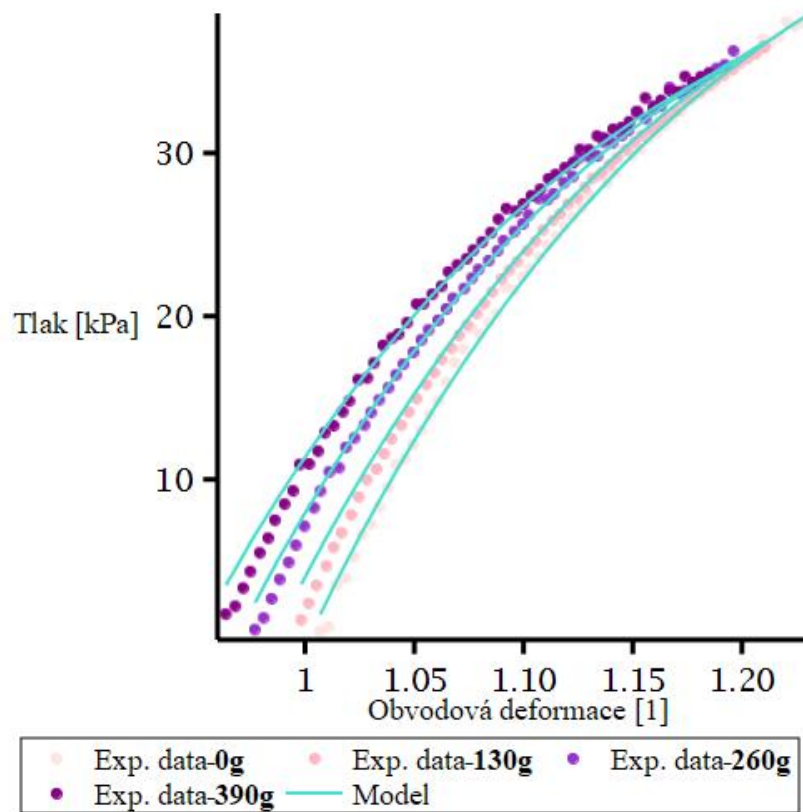
Obrázek 30: Obvodová deformace v závislosti na tlaku / Axiální závaží 390g



Obrázek 31: Axiální deformace v závislosti na tlaku / Axiální závaží 390g

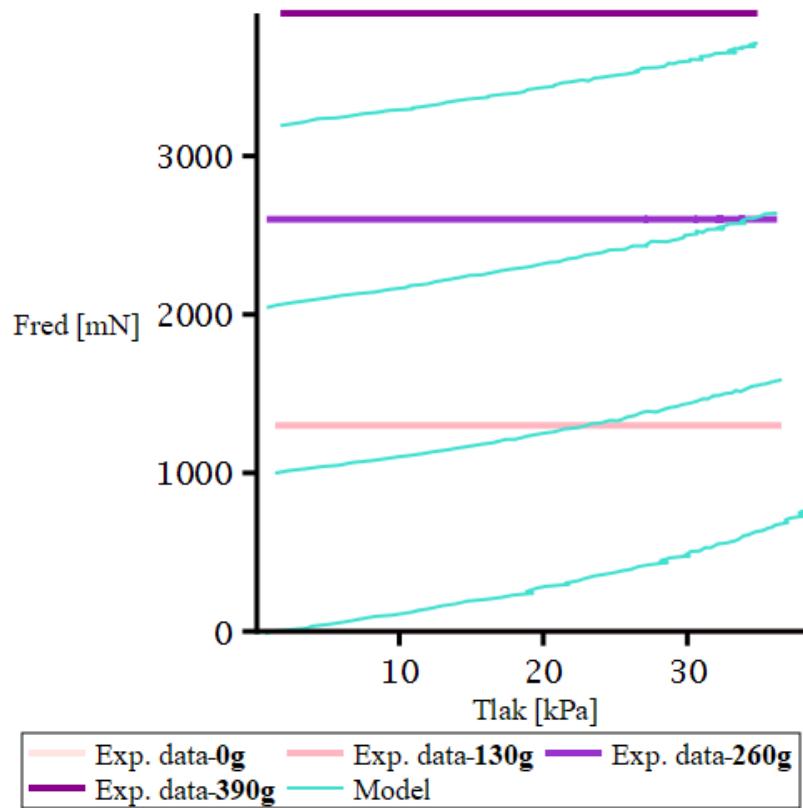


Obrázek 32: Axiální deformace v závislosti na tlaku / Všechna axiální závaží



Obrázek 33: Obvodová deformace v závislosti na tlaku / Všechna axiální závaží

Modelová predikce redukované síly F_{red} od axiálního přivažku (0g, 130g, 260g, 390g) je znázorněna na obr.34. Je zřetelné, že model nepopisuje realitu úplně ideálně.



Obrázek 34: Redukovaná síla od axiálního přivažku v závislosti na tlaku / Všechna axiální závaží

7.3 Proložená data viskoelastické odezvy

Viskoelastickou odezvou se rozumí kompletní 5. cyklus relaxace s náběhem na maximální tlak a poté 100s výdrž na maximálním dosaženém tlaku, kde je zřetelná relaxace napětí projevující se poklesem tlaku uvnitř trubice.

Do trubice je natlačen objem vody nutný k dosažení určitého (maximálního) tlaku uvnitř trubice. Následně je aretován píst vtlačující kapalinu a stěna trubice je napjatá v důsledku natlakované kapaliny. Protože je trubice vyrobena z viskoelastického materiálu, tak v její stěně důsledkem natlakování běží relaxační procesy přeuspořádávání makromolekul a natáčení řetězců ve snaze najít výhodnější konfiguraci s minimální vnitřní energií. Tím samozřejmě dochází ke ztrátě vnitřní energie resp. ochabování stěny trubice. Jelikož je stěna trubice v interakci s kapalinou, je potom kapalina obepínána menší silou. Tento jev lze na experimentálních datech pozorovat jako postupný pokles tlaku, který se snažím popsat konstitutivním modelem.

Na obr.35-38 je znázorněno proložení dat reálné odezvy (pro všechna axiální závaží / růžová až fialová) odvozeným konstitutivním modelem (azurová). Tlakové fluktuační v experimentálních datech nesouvisí s odezvou materiálu. Jsou to chyby způsobené rušením signálu tlakového měřidla. V čase 120s je zřejmý nárůst tlaku, který opět nikterak nesouvisí s mechanickou odezvou materiálu. Je způsoben nedokonalostí ovládacího programu pístu, který před začátkem odlehčením musí ještě trochu dojet. Pro tyto závislosti byla sestavena účelová funkce následujícím způsobem

$$Q = w_P \sum_{i=1}^n (P_i^{exp} - P_i^{pred})^2, \quad (7.7)$$

Jelikož při uvažování redukované síly v účelové funkci bylo dosaženo mnohem horšího proložení i po snaze vyvážení vlivů obou veličin.

Zde jsou hodnoty koeficientů determinace pro jednotlivá axiální závaží obr.35-38, kde poslední je pro parametry zjištěné pro všechna axiální závaží najednou obr.39. Opět je zřetelné, že nalezením čtveřice parametrů, která je hledaná pro všechna axiální závaží zároveň nedochází k znatelnému zhoršení regrese, stejně jako u elastické odezvy v kapitole 7.2 (elastická odezva).

Tabulka 3: Koeficienty determinace / Viskoelastická

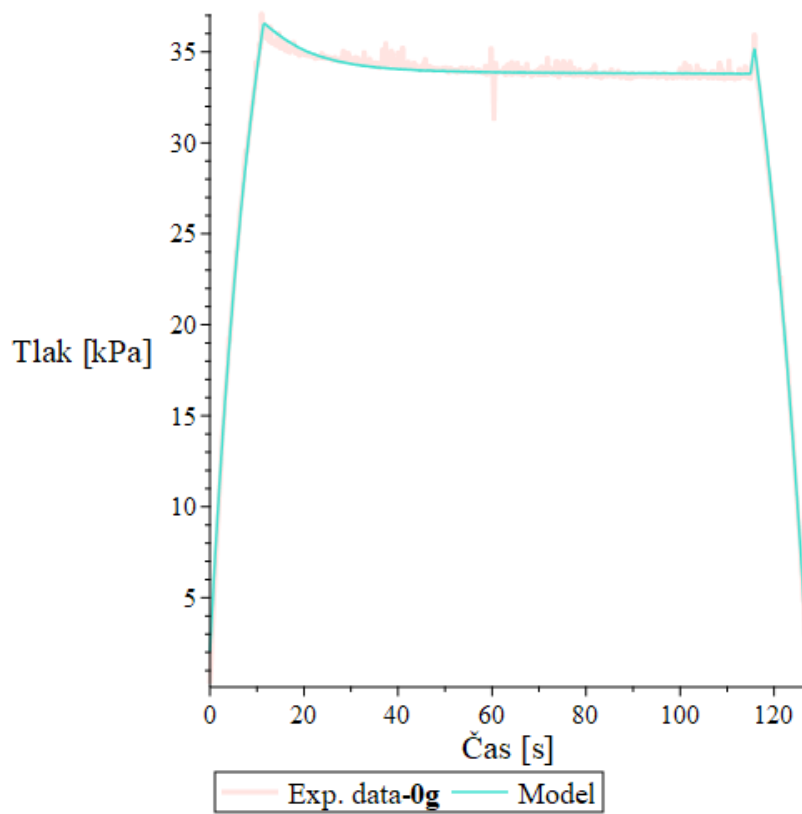
Hodnoty axiálního přivažku	Hodnoty koeficientu determinace
0g	$K_{Dp.0g} = 0.998$
130g	$K_{Dp.130g} = 0.997$
260g	$K_{Dp.260g} = 0.995$
390g	$K_{Dp.390g} = 0.995$
Pro všechna najednou	$K_{Dp.all} = 0.989$

7.3.1 Optimální materiálové parametry – viskoelastického modelu

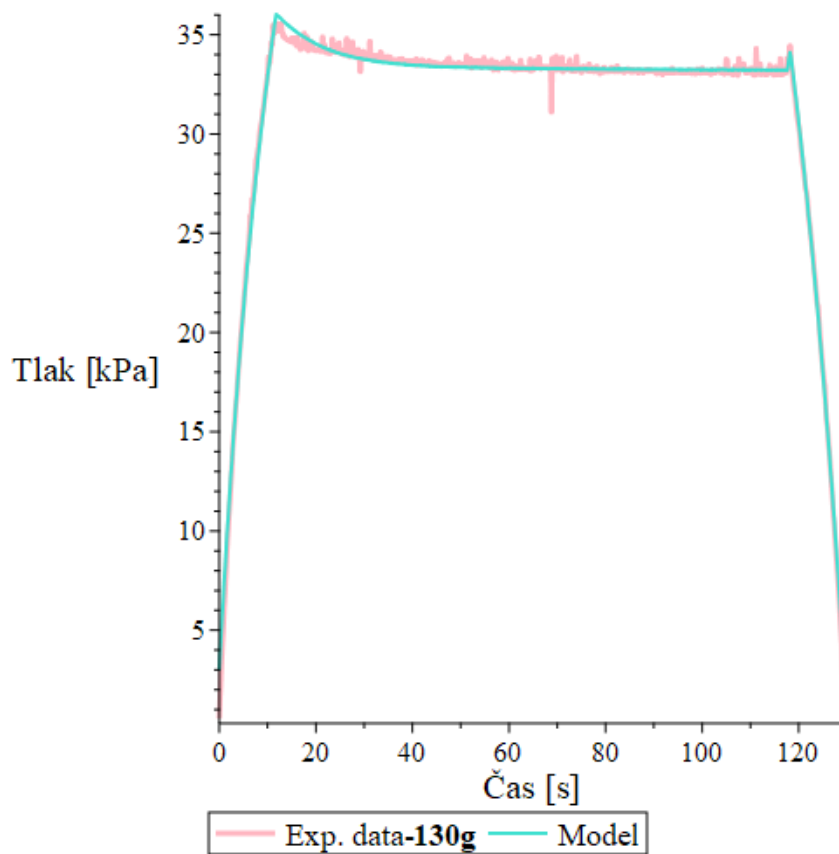
Tabulka 4: Materiálové parametry Ogdenova modelu a relaxační funkce pro jednotlivá axiální závaží / Viskoelastická odezva

Materiálové parametry Ogdenova modelu \hat{W}	
Axiální závaží - 0g	
$\mu_1 = 109.671$	$\alpha_1 = 4.344$
Axiální závaží - 130g	
$\mu_2 = 103.353$	$\alpha_2 = 4.696$
Axiální závaží - 260g	
$\mu_3 = 102.469$	$\alpha_3 = 4.949$
Axiální závaží - 390g	
$\mu_4 = 103.650$	$\alpha_4 = 5.098$
Pro všechna axiální závaží najednou	
$\mu_5 = 168.123$	$\alpha_5 = 2.857$
Materiálové parametry redukované relaxační funkce \mathcal{D}	
Axiální závaží - 0g	
$\mu_{\infty 1} = 93.804$	$\tau_1 = 10.044$
Axiální závaží - 130g	
$\mu_{\infty 2} = 87.870$	$\tau_2 = 9.828$
Axiální závaží - 260g	
$\mu_{\infty 3} = 86.552$	$\tau_3 = 8.912$
Axiální závaží - 390g	
$\mu_{\infty 4} = 87.895$	$\tau_4 = 8.253$
Pro všechna axiální závaží najednou	
$\mu_{\infty 5} = 148.875$	$\tau_5 = 18.236$

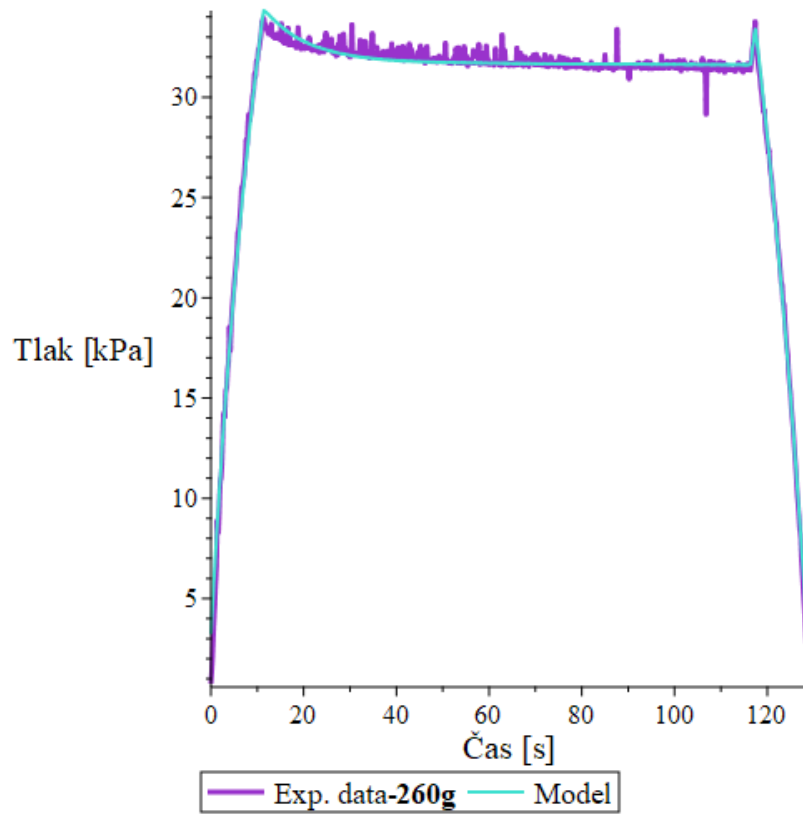
Parametr μ_{∞} je uveden opět v kPa.



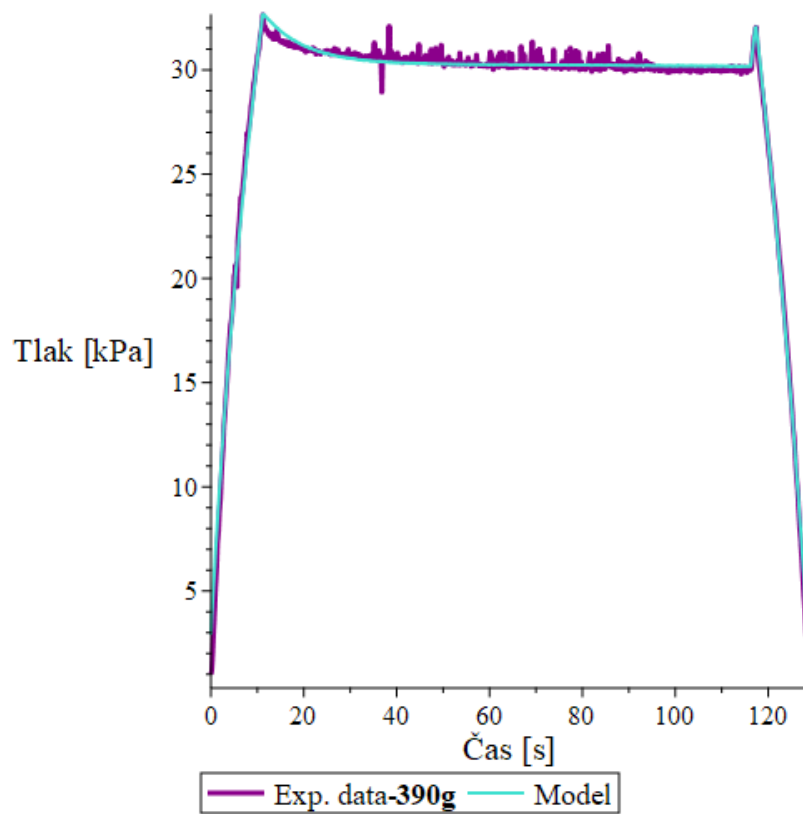
Obrázek 35: Cyklus relaxace, závislost čas-tlak / Axiální závaží 0g



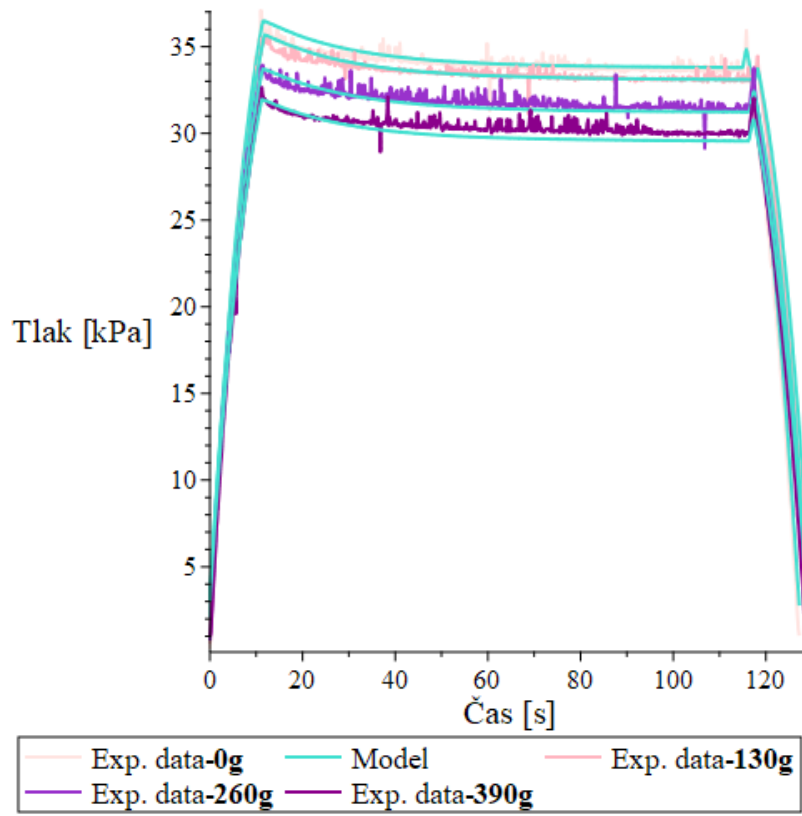
Obrázek 36: Cyklus relaxace, závislost čas-tlak / Axiální závaží 130g



Obrázek 37: Cyklus relaxace, závislost čas-tlak / Axiální závaží 260g



Obrázek 38: Cyklus relaxace, závislost čas-tlak / Axiální závaží 390g



Obrázek 39: Cyklus relaxace, závislost čas-tlak / Všechna axiální závaží najednou

8 Diskuze

8.1 Diskuze experimentálních dat

Porovnáním 1. a 4. cyklů v kapitole 6.1 je zřejmé, že se mechanická odezva pro jednotlivé cykly liší. V závislosti obvodové deformace na tlaku jsou čtvrté cykly posunuty směrem doprava z důvodu zbytkových deformací. Vlivem opakovaného nafukování dochází k ochabování stěny trubice, která se projeví zvětšením průměru resp. vnitřního objemu. Jelikož je trubice nafukována vtlačováním vody pístem s konstantním zdvihem resp. konstantním objemem vody, je poté u čtvrtých cyklů dosaženo nižšího maximálního tlaku než u prvních. Dalším mechanismem přispívajícím ke snižování tlakových maxim je cyklické napěťové měkčení (Mullinsův efekt), který je pro viskoelastické polymery charakteristický.

Dále jsou ze závislostí v kapitole 6.1 zřejmé očekávané jevy při nafukování viskoelastické trubice. S rostoucím tlakem se zvětšuje obvod trubice a přidáním axiálního závaží dochází k jejímu prodloužení. Zatěžovací křivky jsou různé od křivek odlehčovacích, je tedy zřejmé, že dochází k disipaci mechanické energie.

U pátých cyklů je trubice tlakována na maximální vnitřní tlak a následně aretována. Vlivem viskoelastických procesů ve stěně trubice dochází postupnému poklesu tlaku, jelikož stěna trubice ochabuje. Po 100 s výdrži přichází odlehčení až na nulový tlak.

8.2 Diskuze regresní analýzy

Minimum účelové funkce Q bylo nalezeno pomocí funkce `NLPSolve`, která využívá mnohé z metod pro nelineární úlohy. Na mou úlohu byla použita metoda sekvenčního kvadratického programování. Funkce `NLPSolve` hledá pouze lokální minimum a proto jsou nalezené parametry závislé na tom jak dobrý je počáteční odhad. Je tedy možné, že existuje lepší řešení než to mé. Dále je nalezení minima ovlivněno volbou váhových koeficientů w_P a w_F , které jsem volil tak, aby byla účelová funkce normalizována.

Pro elastickou odezvu byla použita účelová funkce s tlakem i redukovanou silou a bylo dosaženo výsledků, kdy koeficient determinace pro jednotlivé axiální přívažky i pro všechny zároveň dosáhl vždy hodnoty nad 0.98. To znamená, že reálná odezva byla z 98% popsána modelem.

Redukovaná síla byla do modelu zakomponována kvůli zpřesnění nafukovací odezvy, která je prioritou. Ve viskoelasticitě jejím přidáním do účelové funkce došlo ke znatelnému zhoršení regrese. Předpokládám, že je to způsobené složitostí vztahu pro modelovou predikci redukované síly, čímž se komplikuje nalezení minima účelové funkce, které by odpovídalo optimu. Ani lazením váhových koeficientů (normalizováním účelové funkce) nedošlo k znatelnému zlepšení a proto jsem účelovou funkci nakonec volil pouze z tlaků.

V databázích jsem nenašel žádnou publikaci, která by řešila obdobnou úlohu nalezení materiálových parametrů 3d tištěné trubice ze směsi tango plus a vero.

9 Závěr

Nejprve jsem vizualizoval experimentální data, která byla naměřena pro nafukovanou a zároveň předepjatou viskoelastickou trubici vyrobenou 3D tiskem pomocí metody Rapid Prototyping ze směsi materiálů tango plus a vero.

V práci se zabývám odvozením konstitutivního modelu popisujícího nafukování tenkostěnné trubice pro elastickou a viskoelastickou odezvu a dále určením jeho materiálových parametrů tak, aby proložení experimentálních dat modelem bylo optimální. Bylo tedy zapotřebí sestavit účelovou funkci a najít parametry takové, aby danou funkci minimalizovaly.

Pro elastickou i viskoelastickou odezvu byly nalezeny materiálové parametry nejdříve pro všechna axiální závaží zvlášť a poté pro všechna axiální závaží najednou. Překvapením pro mě bylo, že se výsledky pro všechny závaží najednou téměř nelišily od výsledků, které jsem dosáhl zvlášť pro každé axiální závaží.

V práci jsem předvedl schopnost regresní analýzy predikovat mechanickou odezvu nafukované a zároveň předepjaté viskoelastické polymerní trubice, která by mohla sloužit jako cévní náhrada.

Seznam použité literatury

- [1] D. Ambrosi, G.A. Ateshian, E.M. Arruda, et al. Perspectives on biological growth and remodeling. 2011, 863-883.
- [2] <https://courses.lumenlearning.com/boundless-ap/chapter/blood-vessel-structure-and-function/> [online]. [cit. 2021-01-26].
- [3] HOLZAPFEL, Gerhard, Thomas Christian GASSER a RAY William OGDEN. *A New Constitutive Framework for Arterial Wall Mechanics and a Comparative Study of Material Models* [online]. April 2012 [cit. 2021-01-26]. Dostupné z: doi:10.1023/A:1010835316564
- [4] Greenwald SE, Moore JE, Rachev A, Kane TPC, Meister J-J. Experimental investigation of the distribution of residual strains in the artery wall. *J Biomech Engr.* 1997;119:438–444.
- [5] ATESHIAN, Gerard A., Kevin D. Costa COSTA, Evren U. Azeloglu AZELOGLU, Barclay MORRISON a Clark T. HUNG. *Origin of Axial Prestretch and Residual Stress in Arteries* *Material Models* [online]. December 2009 [cit. 2021-01-26]. Dostupné z: doi:10.1007/s10237-008-0146-x
- [6] Biomechanika II. Lukáš Horný. [Online] 08 2016. [cit. 2020-01-26] http://users.fs.cvut.cz/~hornyluk/files/Biomechanika_II_2016.pdf.
- [7] HORNÝ, Lukáš, Zdeněk PETŘIVÝ a Clark T. HUNG. *Inversion point and internal volume of pressurized nonlinearly elastic tube* [online]. Elsevier, October 2020 [cit. 2021-01-26].
- [8] HORNÝ, Lukáš. *Axial Prestretch and Biomechanics of Abdominal Aorta* [online]. Prague, 2015 [cit. 2021-02-18]. Dostupné z: <http://users.fs.cvut.cz/~hornyluk/home>. Habilitation thesis. CTU.
- [9] RACKL, Michael. *Curve Fitting for Ogden, Yeoh and Polynomial Models* [online]. Paris, France: Elsevier, 2015, 2018 [cit. 2021-03-12]. Dostupné z: https://www.researchgate.net/publication/301200150_Curve_Fitting_for_Ogden_Yeoh_and_Polynomial_Models
- [10] MOOI, Erik a Marko Sarstedt SARSTEDT. *Regression Analysis* [online]. 2014 [cit. 2021-03-13]. Dostupné z: doi:DOI: 10.1007/978-3-642-53965-7_7
- [11] Riccardo De Pascalis, I. David Abrahams a William J. Parnell. *On nonlinear viscoelastic deformations - a reappraisal of Fung's quasilinear viscoelastic model: Manchester Institute for Mathematical Sciences School of Mathematics* [online]. 2014 [cit. 2021-04-02].
- [12] ČAPEK, Lukáš, Petr HÁJEK a Petr HENYŠ A KOLEKTIV. *Biomechanika člověka*. Praha: Grada, 2018. ISBN 978-80-271-0367-6.

- [13] HORNÝ, Lukáš. *PATOBIOLOGIE SRDEČNĚCÉVNÍHO SYSTÉMU I. DÍL* [online]. České vysoké učení technické v Praze. Praha, 2014 [cit. 2021-07-8]. Dostupné z: <http://users.fs.cvut.cz/~hornyluk/files/Patobiomechanika-srdecnecevnihho-systemu-1.pdf>
- [14] HORNÝ, Lukáš. *Úvod do nelineární pružnosti* [online]. Praha: ČVUT v Praze, 2016 [cit. 2021-07-8]. Dostupné z: <http://users.fs.cvut.cz/~hornyluk/files/Nelinearnipruznost-projekt-1.pdf>
- [15] NĚMEC, CSC., doc. Ing. Ivan. *NELINEÁRNÍ MECHANIKA: ZÁKLADY NELINEÁRNÍ MECHANIKY* [online]. Brno, 2006 [cit. 2021-7-8].
- [16] Hyperelasticity. https://www.mm.bme.hu/~gyebro/files/ans_help_v182/ans_thry/thy_mat5.html [online]. [cit. 2021-7-9].
- [17] Neo-Hookean solid. https://en.wikipedia.org/wiki/Neo-Hookean_solid [online]. last edited on 12 April 2021 [cit. 2021-7-9].