

Ing. František Štampach, Ph.D.
Katedra matematiky FJFI ČVUT v Praze:

Posudek oponenta bakalářské práce
Alexandry Ridzikové

Imaginární magnetické pole v relativistické kvantové mechanice

Bakalářská práce Alexandry Ridzikové je zaměřena na studium spektrálních vlastností kvantově-mechanického operátoru pro hybnost s komplexním magnetickým potenciálem a z něj odvozeného Schrödingerova a Diracova operátoru. Práce je členěna do čtyř kapitol. Rešeršní část pokrývají kapitoly 1, 2 a 3, vlastní práce autorky je obsažena v kapitole 4.

Kapitola 1 shrnuje fyzikální popis magnetického pole v klasické fyzice (Maxwellovy rovnice), kvantové mechanice (Pauliho rovnice) a relativistické kvantové mechanice (Kleinova–Gordonova a Diracova rovnice). Kapitola 2 poukazuje na velmi zajímavou korespondenci mezi Schrödingerými operátory s komplexním magnetickým potenciálem a problémem stability rotujících černých děr z teorie relativity.

Kapitola 3 obsahuje vybrané pojmy a věty ze spektrální teorie a zejména má čtenáře seznámit s různými druhy bází zaváděných v separabilních Hilbertových prostorech nekonečné dimenze.

Poslední kapitola 4 je věnována spektrální analýze diferenciálního operátoru prvního řádu P_a s komplexním členem a na úsečce s periodickou okrajovou podmínkou, odpovídajícího Schrödingerova operátoru P_a^2 a nakonec také odvozeného Diracova operátoru D_a . Zvláštní důraz je kladen na analýzu bazických vlastností vlastních funkcí studovaných operátorů.

BP je logicky členěna, cíle i použité postupy jsou z textu většinou dobře pochopitelné. Práce obsahuje překlepy a drobné chyby, ale jejich výskyt nepřesahuje běžně tolerovanou mez. Text na dvou místech přetéká okraj.

Několik výhrad mám ke kapitolám 3 a 4. V logice výkladu sekce 3.1. bych čekal připomenutí definice sdruženého operátoru. Koeficienty a_n z rovnice (3.5) nejsou funkcionály, ale komplexní čísla. Část 3.2 by bylo vhodné na několika místech doplnit, aby i pro nezkušeného čtenáře tvořila ucelený výklad. Např. v části o ortogonálních bázích by bylo dobré ukázat, že každá ortogonální báze je také báze podle definice ze strany 32. V části o Riezových bázích chybí předpoklad, že omezený operátor A musí mít také omezenou inverzi. Věta 3.2.2 je formulována jako definice. Ekvivalenci mezi (3.13) a předchozí definicí Riezovy báze by bylo vhodné doplnit alespoň krátkým důkazem. Na str. 35 rovnost $(P^{-1})^* = (P^*)^{-1}$ platí na celém \mathcal{H} , proto je matoucí říkat, že rovnost platí „všade, kde to má zmysel“. Část o Bariho bázích připomíná Větu 3.2.4, která se v práci nepoužije. Naopak argument,

který říká, že pro biortogonální systém $\{\psi_n\}, \{\chi_n\}$, platí implikace

$$\sum_n \|\psi_n - \chi_n\|^2 = \infty \quad \Rightarrow \quad \{\psi_n\} \text{ není Bariho báze,} \quad (*)$$

chybí, ačkoliv je aplikován na dvou místech kapitoly 4 (na str. 41 a 49).

V rovnici (4.41) napravo chybí člen $+m^2$ krát identický operátor (zúžený na příslušný def. obor operátoru vlevo). Rovnice na vlastní čísla s tímto operátorem pak ihned vede na (4.46) a předchozí odvození lze vynechat. Logika spektrální analýzy z části 4.2.1 má drobné nedostatky. Co je spektrum D_a uvádí autorka už v rovnici (4.48), ale speciální případ $\lambda = -m$ je diskutován až potom. Na konci chybí uvést, co nám analýza speciálního případu $\lambda = -m$ říká o spektru D_a . Také v případě $\lambda = m$ se charakter řešení diferenciální rovnice (4.46) změní, a tudíž by se měl vyšetřit zvlášť podobně jako případ $\lambda = -m$. Navíc tímto způsobem se vyšetří pouze bodové spektrum operátoru D_a . Argument diskrétnosti spektra nelze zcela vynechat (podobně jako v předchozích případech).

Na konci části 4.2.2 dojde studentka k zajímavému pozorování, že vlastní funkce operátoru D_a jsou ortogonální, pokud $\Im\langle a \rangle \in \mathbb{Z}$, ale trochu nepochopitelně uzavře část Větou 4.2.2, která říká, že vlastní vektory D_a jsou kolmé v případě, kdy je D_a samosdružený, tj. $\Im a = 0$, což je nezajímavé, neboť to platí pro každý samosdružený operátor.

Otázky k obhajobě:

1. Můžete vyjasnit argument/větu, kterou používáte v implikaci (*)?
2. V závěru píšete: „Máme triedu operátorov, ktorých vlastné vektory odpovedajúce príslušným vlastným hodnotám netvorí žiadnu z báz Hilbertovho priestoru, ktoré sme si definovali.“ Kterou třídu zde máte na mysli?

Přes uvedené výtky považuji práci za zdařilou. Rád bych vyzdvihnul, že si studentka pro svou BP vybrala poměrně obtížné téma kombinující fyziku s rigorózní matematickou analýzou. Proto *bakalářskou práci Alexandry Rídzikové doporučuji k obhajobě a navrhuji hodnotit známkou C (dobře).*