České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra fyziky
Obor: Matematická fyzika

Imaginární magnetické pole v relativistické kvantové mechanice

Imaginary magnetic field in relativistic quantum mechanics

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vypracoval: Alexandra Ridziková
Vedoucí práce: doc. Mgr. David Krejčiřík, Ph.D. DSc.
Rok: 2022

- Zadání práce -

- Zadání práce (zadní strana) -

Prehlásenie

Týmto prehlasujem, že som svoju bakalársku prácu vypracovala samostatne a použila som len literatúru uvedenú v priloženom zozname.

Nemám závažný dôvod nesúhlasiť s použitím tejto školskej práce v zmysle §60 Zákona č. 121/2000 Sb., o práve autorskom, o právach súvisiacich s právom autorským a o zmene niektorých zákonov (autorský zákon).

V Prahe, 2022

....

Alexandra Ridziková

Poďakovanie

Ďakujem doc. Mgr. Davidovi Krejčiříkovi, Ph.D. DSc., vedúcemu tejto bakalárskej práce za starosť, ochotu, ústretový prístup a taktiež za všetky podnety, pripomienky, rady a odbornú pomoc pri jej vypracovaní.

Alexandra Ridziková

Název práce:
Imaginární magnetické pole v relativistické kvantové mechanice

Autor: Alexandra Ridziková

Studijní program: Aplikace přírodních věd
Obor: Matematická fyzika
Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: doc. Mgr. David Krejčiřík, Ph.D. DSc.
Katedra matematiky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze

Abstrakt: Významnou rovnicou relativistickej kvantovej mechaniky je Diracova rovnica, ktorá nahrádza Lorentzovsky neinvariantnú Schrödingerovu rovnicu. Skúmame nesamozdružený Diracov operátor D_a s komplexným magnetickým poľom na kružnici. Zistíme za akých podmienok bude tento operátor normálny a za akých kvázi samozdružený. Nájdeme jeho spektrum a vlastné vektory. Dokážeme, že vlastné vektory kvázi samozdruženého Diracovho operátoru D_a tvoria Rieszovu bázu, ale netvoria Barinu bázu.

Klíčová slova: relativistická kvantová mechanika, komplexné magnetické pole, Diracov operátor, kvázi hermitovský operátor

Title:
Imaginary magnetic field in relativistic quantum mechanics

Author: Alexandra Ridziková

Abstract: An important equation in relativistic quantum mechanics is Dirac's equation, which replaces the Schrödinger equation which is not Lorentz invariant. In this work the non-selfadjoint Dirac operator D_a on circle with a complex magnetic field will be investigated. We will find out under which conditions this operator will be normal and under which conditions it will be quasi-self-adjoint. Its spectrum and eigenvectors will be found. We will prove that the eigenvectors of the quasi-self-adjoint Dirac operator D_a form a Riesz basis, but do not form a Bari basis.

Key words: relativistic quantum mechanics, complex magnetic field, Dirac operator, quasi-Hermitian operator

Obsah

Úvod

Táto bakalárska práca spája dve odvetvia, o ktoré bol prejavený v posledných rokoch veľký záujem. Zaoberá sa skúmaním vlastností kvázi hermitovských operátorov s imaginárnym magnetickým poľom.

Už v roku 1961 [20] J. Dieudonné predstavil koncept kvázi samozdružených operátorov spĺňajúcich podmienku kvázi hermitovskosti:

$$\Theta H = H^* \Theta, \tag{1}$$

kde H je obecne nesamozdružený operátor a Θ kladný operátor nazývaný metrika. Predstavíme si kvantovú mechaniku, kde sú pozorovateľné reprezentované kvázi samozdruženými operátormi, ktorá bola prvýkrát formulovaná F. G. Scholtzom, H.B. Geyerom a F. J. W. Hahnom pre potreby jadrovej fyziky v roku 1992 [19].

V kvantovej mechanike nevystupujú priamo fyzikálne veličiny ako magnetická indukcia a elektrické pole, ale potenciály, ktoré sú pre kvantovo mechanický popis nevyhnutné (Aharonov-Bohmov jav). Vieme, že kvantová mechanika dobre funguje, avšak dobre funguje i teória relativity. Problémom je, že kvantová mechanika nie je Lorentzovsky invariantná, je nerelativistická. V článku [14] doc. D. Krejčiříka bol predstavený kvázi samozdružený operátor hybnosti $P_a := -i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - a(x)$ s komplexným magnetickým potenciálom a na kružnici. Našim cieľom bude rozšíriť poznatky z [14] o relativistický prípad pomocou Diracovho operátoru

$$D_a := \begin{pmatrix} m & -i\partial_x - a \\ -i\partial_x - a & -m \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Jednou z dôležitých motivácií pre túto prácu je nedávne experimentálne pozorovanie imaginárneho magnetického poľa. Komplexné magnetické polia sú zásadné v štatistickej fyzike. Body v komplexnej rovine magnetického poľa, kde partičná suma systému je nulová sa nazývajú Lee-Yang zeros ([16], [17]) a sú dôležité pre štúdium termodynamiky mnohočasticových systémov. Dlho boli považované za nefyzikálne, bez prejavu vo fyzickom svete. Článok [18] zaznamenáva prvé experimentálne pozorovanie Lee-Yang zeros meraním kvantovej koherencie v spinovom modele Isingovho typu.

Ďalšou motiváciou je analógia dvoch fyzikálnych systémov. Predstavíme analógiu medzi gravitačným problémom a problémom kvantovej nabitej častice [5]. Uvidíme, že stabilitu čiernej diery ovplyvňuje hamiltonián s imaginárnym vektorovým potenciálom.

V prvej kapitole si predstavíme popis magnetického poľa v rôznych oblastiach fyziky. Pozrieme sa na časticu v homogénnom magnetickom poli, Aharonov-Bohmov jav a základné rovnice v relativistickej kvantovej mechanike. V druhej kapitole sa pozrieme na motivácie skúmania imaginárneho magnetického poľa. V kapitole tri si zadefinujeme základné pojmy spektrálnej teórie a pozrieme sa na bázy Hilbertovho priestoru. V poslednej kapitole budeme zisťovať vlastnosti operátorov P_a v prípade nerelativistickej častice na kružnici a D_a v prípade relativistickej častice na kružnici.

Kapitola 1

Magnetické pole vo fyzike

V tejto kapitole sa budeme venovať popisu magnetického poľa v rôzych oblastiach fyziky. Pre jej spísanie sme čerpali predovšetkým z [1], [2], [3], [7], [8] a [10].

1.1 Klasická elektrodynamika

1.1.1 Maxwellove rovnice

Vlastnosti elektromagnetického poľa na mikroskopickej úrovni je možné popísať Maxwell-Lorentzovými rovnicami:

I. séria

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{1.1}$$

$$\operatorname{rot}\vec{B} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mu_0\vec{j}, \tag{1.2}$$

II. séria

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0, \tag{1.3}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}. \tag{1.4}$$

Elektromagnetické pole je určené *intenzitou elektrického poľa* $\vec{E}(\vec{r},t)$ a *magnetickou indukciou* $\vec{B}(\vec{r},t)$. I. séria udáva vzťah medzi vektormi elektromagnetického poľa, hustotou elektrického náboja $\rho(\vec{r},t)$ a prúdovou hustotou $\vec{j}(\vec{r},t)$. Konštanty relatívnej *permitivity* ε_0 a *permeability* μ_0 vákua popisujú elektrické a magnetické vlastnosti prostredia, platí pre nich Weberov vzťah

$$\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}, \tag{1.5}$$

kde c je rýchlosť svetla vo vákuu.

Zároveň elektromagnetické pole pôsobí na časticu s nábojom q, pohybujúcu sa s rýchlosťou $\vec{v}$ Lorentzovou silou

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \tag{1.6}$$

Relativistická rovnica pre pohyb nabitých častíc s pokojovou hmotnosťou m_0 v elektromagnetickom poli je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \tag{1.7}$$

Pre objasnenie fyzikálneho významu jednotlivých Maxwellových rovníc ich prevedieme do integrálneho tvaru.

Gaussov zákon

Zintegrovaním $\vec{E}$ z rovnice (1.1) cez plochu a použitím Gaussovej vety známej z matematickej analýzy dostávame

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}\ \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \operatorname{div}\vec{E}\ \mathrm{d}V = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\ \mathrm{d}V = \frac{Q}{\varepsilon_0}. \tag{1.8}$$

Tok elektrickej intenzity Φ_E ľubovoľnou uzatvorenou plochou S je priamo úmerný celkovému náboju Q obklopeného touto plochou, kde $\int_V \rho\ \mathrm{d}V = Q$.

Ampérov zákon doplnený o Maxwellov posuvný prúd

Zintegrovaním $\operatorname{rot}\vec{B}$ z rovnice (1.2) cez plochu a použitím Stokesovej vety dostávame

$$\oint_l \vec{B}\ \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \operatorname{rot}\vec{B}\ \mathrm{d}\vec{S} = \int_S \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\ \mathrm{d}\vec{S} + \int_S \mu_0\vec{j}\ \mathrm{d}\vec{S} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\mathrm{d}\Phi_E}{\mathrm{d}t} + \mu_0 I. \tag{1.9}$$

Cirkulácia magnetického poľa okolo uzatvorenej krivky l obklopujúcu plochu S je priamo úmerná prúdu $I = \int_S \vec{j}\ \mathrm{d}\vec{S}$, ktorý touto plochou prechádza.

Faradayov zákon

Podobným spôsobom upravíme (1.4)

$$\oint_l \vec{E}\ \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \operatorname{rot}\vec{E}\ \mathrm{d}\vec{S} = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\ \mathrm{d}\vec{S} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{B}\ \mathrm{d}\vec{S}. \tag{1.10}$$

Elektrické pole je budené časovo premenným magnetickým poľom.

Neexistencia magnetického monopólu

Vychádzame z rovnice (1.3),

$$\oint_S \vec{B}\ \mathrm{d}\vec{S} = 0. \tag{1.11}$$

Poukazuje na neexistenciu magnetických nábojov. Magnetické pole je solenoidálne. Siločiary sú uzatvorenými krivkami, alebo začínajú a končia v nekonečne.

1.1.2 Elektromagnetické potenciály

Riešenie II. série Maxwellových rovníc pomocou potenciálov

Využijeme skutočnosť, že II. séria Maxwellových rovníc závisí iba na $\vec{E}$ a $\vec{B}$.
Z vektorového počtu plynú identity $\operatorname{div}\operatorname{rot} \equiv 0$ a $\operatorname{rot}\operatorname{grad} \equiv 0$. Preto je možné rovnicu (1.3) splniť voľbou

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}, \tag{1.12}$$

kde $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$ je *vektorový potenciál.* Dosadením za $\vec{B}$ do (1.4) dostávame rovnicu

$$\operatorname{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0, \tag{1.13}$$

ktorú je možné splniť pomocou *skalárneho potenciálu* $\varphi = \varphi(\vec{r}, t)$, potom

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \tag{1.14}$$

Kalibračné podmienky

Potenciály $\vec{A}$ a φ nie sú pre dané polia $\vec{E}$ a $\vec{B}$ určené jednoznačne. Výber konkrétnej dvojice $(\vec{A}, \varphi)$ popisujúcej elektromagnetické pole sa nazýva *kalibráciou.* Pri prechode medzi rôznymi kalibráciami hovoríme o *kalibračnej transformácii.*

Platí

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{rot} \tilde{\vec{A}}, \tag{1.15}$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad}\tilde{\varphi} - \frac{\partial \tilde{\vec{A}}}{\partial t}. \tag{1.16}$$

Pokiaľ zmením vektorový potenciál $\vec{A}$ o $\operatorname{grad}\Lambda$,

$$\tilde{\vec{A}} = \vec{A} + \operatorname{grad}\Lambda, \tag{1.17}$$

magnetické pole $\vec{B}$ sa nezmení. Aby bola splnená aj podmienka (1.16), musí platiť

$$\operatorname{grad}(\tilde{\varphi} - \varphi) + \frac{\partial(\tilde{\vec{A}} - \vec{A})}{\partial t} = \operatorname{grad}(\tilde{\varphi} - \varphi + \frac{\partial \Lambda}{\partial t}) = 0, \tag{1.18}$$

z čoho plynie vzťah pre $\tilde{\varphi}$:

$$\tilde{\varphi} = \varphi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}. \tag{1.19}$$

Veličiny $\vec{E}$ a $\vec{B}$ sú *kalibračne invariantné.*

Riešenie I. série Maxwellových rovníc pomocou potenciálov

Upravíme rovnicu (1.1) pomocou získaných vzťahov,

$$\frac{\rho}{\epsilon} = \operatorname{div}\left(-\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right). \tag{1.20}$$

Využijeme identity $\operatorname{div}\operatorname{grad} = \Delta$ a umelo pridáme člen $\epsilon\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$,

$$\frac{\rho}{\epsilon} = -\Delta\varphi - \operatorname{div}\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) + \epsilon\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \epsilon\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2},$$

$$\Delta\varphi - \epsilon\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} - \operatorname{div}\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) - \epsilon\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}.$$

Dostávame rovnicu v tvare

$$\Delta\varphi - \epsilon\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{div}\vec{A} - \epsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right). \tag{1.21}$$

Podobným spôsobom upravíme rovnicu (1.2)

$$\mu\vec{j} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} + \epsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{grad}\varphi + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right). \tag{1.22}$$

Tentokrát využijeme identitu $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} - \Delta\vec{A}$,

$$\mu\vec{j} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} - \Delta\vec{A} + \epsilon\mu\operatorname{grad}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \epsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}$$

a dostávame rovnicu

$$\Delta\vec{A} - \epsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{j} + \operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\vec{A} - \epsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right). \tag{1.23}$$

Rovnice (1.21), (1.23) je možné zjednodušiť výberom vhodnej kalibrácie. Požijeme Lorentzovu kalibračnú podmienku:

$$\operatorname{div}\vec{A} - \epsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0. \tag{1.24}$$

Takýmto spôsobom dostávame d'Alembertove rovnice:

$$\Delta\varphi - \epsilon\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}, \tag{1.25}$$

$$\Delta\vec{A} - \epsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{j}. \tag{1.26}$$

Previedli sme tak riešenie Maxwellových rovnic na riešenie nehomogenných vlnových rovníc.

1.1.3 Pohyb nabitej častice v homogennom magnetickom poli

Uvažujme homegénne konštantné magnetické pole B. Pre začiatok budeme uvažovať časticu s rýchlosťou $\vec{v}$, ktorá je podstatne menšia ako rýchlosť svetla. Jej pohybová rovnica je v tvare

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = q(\vec{v} \times \vec{B}). \tag{1.27}$$

Pokiaľ uvažujeme rýchlosť kolmú na smer magnetického poľa B, potom rovnica (1.27) prejde do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = qvB, \tag{1.28}$$

kde m je hmotnosť častice.

Pre veľkosť zrýchlenia a platia vzťahy:

$$a = \frac{qv}{m}B, \tag{1.29}$$

$$a = \frac{v^2}{r} = \omega_c^2 r, \tag{1.30}$$

kde r je *cyklotronový polomer*. Z týchto vzťahov zistíme *cyklotronovú frekvenciu* ω_c častice konajúcej rovnomerný kruhový pohyb v rovine kolmej na smer magnetického poľa B,

$$\omega_c = \frac{q}{m}B. \tag{1.31}$$

Pri relativistických rýchlostiach je tento charakter pohybu zachovaný. Relativistická rovnica pre pohyb nabitej častice s hmotnosťou m v magnetickom poli je

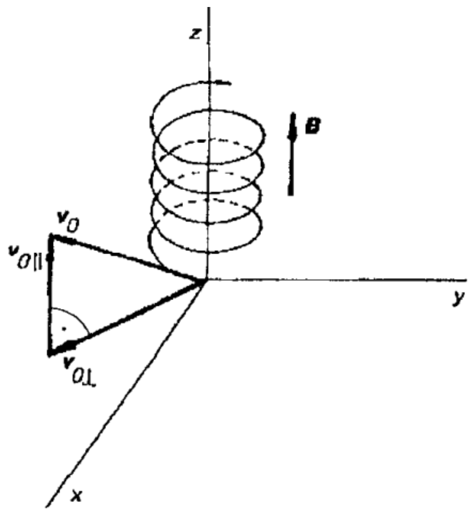
$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = q(\vec{v} \times \vec{B}). \tag{1.32}$$

Magnetické pole nemení veľkosť rýchlosti iba jej smer, kvadrát rýchlosti sa nemení s časom, preto je možné faktor $\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ vytknúť. Analogicky dostávame cyklotrónovú frekvenciu ω_c,

$$\omega_c = \frac{q}{m}B\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, \tag{1.33}$$

ktorá sa od nerelativistickej líši iba faktorom $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$.

Pokiaľ častica vletí do magnetického poľa pod nejakým uhlom, k Lorentzovej sile prispieva iba kolmá zložka jej rýchlosti. Zložka rovnobežná udáva pohyb v smere rovnobežného s magnetickým poľom, tým pádom vzniká pohyb po špirále.



Obr. 1.1: Pohyb nabitej častice v magnetickom poli. Obrázok prevzatý z [2].

1.2 Kvantová mechanika

V klasickej mechanike je stav systému určený bodom fázového priestoru. Fázový priestor vo fyzike je priestorom zobecnených súradníc a zobecnených hybností. Pozorovateľné sú definované reálnymi funkciami a hodnotu veličiny pre systém v určitom stave získame pomocou funkcie v odpovedajúcom bode fázového priestoru.

V kvantovej teórii priradzujeme pozorovateľným samozdružené operátory z Hilbertovho priestoru. Operátory odpovedajúce fyzikálnym veličinám, ktoré majú analógiu v klasickej mechanike sú konštruované pomocou *princípu korešpondencie.*

Hamiltonián kvantovej častice s hmotnosťou M v elektromagnetickom poli má tvar:

$$H = \frac{1}{2M}(\vec{P} - q\vec{A})^2 + q\varphi. \tag{1.34}$$

Ako už bolo spomenuté, elektromagnetické potenciály nie sú určené jednoznačne. Ekvivalencia popisu kalibračne invariantných veličín prestáva v kvantovej mechanike, ktorá oproti klasickej mechanike predstavuje obecnejšiu teóriu, platiť.

Hamiltonián nie je určený jednoznačne pretože operátory P a A obecne nekomutujú,

$$[\vec{P}, \vec{A}] = -i\hbar\vec{\nabla} \cdot \vec{A}.$$

Pri kalibrácii $\vec{\nabla}.\vec{A} = 0$ (Coulombova kalibrácia), môžme hamiltonián upraviť ako

$$H = \frac{P^2}{2M} - \frac{q}{M}\vec{A}.\vec{P} + \frac{q^2}{2M}A^2 + q\varphi. \tag{1.35}$$

Pre časticu v homogénnom magnetickom poli $\vec{B}$ môžeme zvoliť potenciál $\vec{A}$ ako $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{x}$. Potom hamiltonián zapíšeme

$$H = \frac{P^2}{2M} + q\varphi - \frac{q}{2M}\vec{B}.\vec{L} + \frac{q^2}{8M}(\vec{B} \times \vec{x})^2, \tag{1.36}$$

kde $\vec{L}$ je operátor momentu hybnosti častice. Príspevok posledného členu je pre slabé magnetické pole a vzdialenosti charakteristické pre atómy zanedbateľný. Označíme si *operátor magnetického momentu častice*, ktorý súvisí s jej orbitálnym pohybom

$$\vec{\mu}_{orb} = \frac{q}{2M}\vec{L}. \tag{1.37}$$

Hamiltonián preto môžeme vyjadriť ako

$$H = H_0 - \vec{\mu}_{orb}.\vec{B}. \tag{1.38}$$

H_0 je hamiltoniánom častice v poli konzervatívnych síl bez vplyvu magnetického poľa. V prípade, že potenciál $V = q\varphi$ vystupujúci v H_0 je väzniacím potenciálom, t.j. $V(x) \to \infty$, keď $|x| \to \infty$, potom je spektrum H_0 čisto diskrétne ([27] Theorem XIII.67, [28] Proposition 2.6). Pokiaľ je navyše sféricky symetrický, vieme nájsť vlastné funkcie hamiltoniánu H_0, ktoré sú súčasne vlastnými funkciami momentu hybnosti. V takom prípade môžme zvoliť osu z v smere magnetického poľa a môžeme určiť vlastné energie aj vlastné funkcie častice v magnetickom poli [3].

Keď platí

$$\begin{aligned} H_0\psi_{E,l,m} &= E\psi_{E,l,m}, \\ L_z\psi_{E,l,m} &= m\hbar\psi_{E,l,m}, \end{aligned} \tag{1.39}$$

kde m je magnetické kvantové číslo a l orbitálne kvantové číslo (pre dané l má kvantové číslo m hodnoty $m = -l, ..., 0, ..., l$) potom platí

$$H\psi_{E,l,m} = (E \mp \mu_0 mB)\psi_{E,l,m}, \tag{1.40}$$

kde $\mu_0 = \frac{|q|\hbar}{2M}$ je *magneton* častice. Znamienko mínus odpovedá kladne nabitej častici a znamienko plus záporne nabitej častici.

Magnetické pole odoberie degeneráciu energie častice. Hladiny energie sa vplyvom magnetického poľa rozštiepia na $2l+1$ hladín vo vzdialenosti $\mu_0 B$. Experimentálnym pozorovaním (Zeemanov jav) bolo zistené, že počet hladín neodpovedá predpokladaným $2l+1$ hladinám. Predpokladali sme, že základný stav je nedegenerovaný, keďže v tomto stave je $l = 0$. Avšak hladina energie základného stavu sa taktiež rozštiepi.

Elektrón má okrem magnetického momentu, ktorý súvisí s orbitálnym pohybom, *vlastný magnetický moment*, ktorý označíme $\vec{\mu}$. Jeho projekcie nadobúdajú hodnôt $\pm|\mu|$.

Popis základného stavu vlnovou funkciou $\psi_{E,0,0}$ nie je úplný. Využijeme vlnové funkcie, ktoré majú dve zložky:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \tag{1.41}$$

$$\psi(+) \equiv \psi_1, \qquad \psi(-) \equiv \psi_2. \tag{1.42}$$

Vlastný magnetický moment elektrónu $\vec{\mu}$ je dôsledkom spinu $\vec{S}$ (vlastného momentu hybnosti). Platí medzi nimi vzťah

$$\vec{\mu} = \frac{2\mu_0}{\hbar}\vec{S}. \tag{1.43}$$

Operátory projekcie spinu sú reprezentované za pomoci Puliho matíc σ_i,

$$S_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i, \tag{1.44}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.45}$$

Spektrum operátorov S_i je tvorené vlastnými hodnotami $\pm\frac{\hbar}{2}$.

1.2.1 Pauliho rovnica

Sily pôsobiace na elektrón v magnetickom poli sú závislé na spine, musia byť teda zahrnuté v hamiltoniáne,

$$H = \frac{1}{2M}(\vec{P} + e\vec{A})^2 - e\varphi + \frac{2\mu_0}{\hbar}\vec{B}.\vec{S}, \tag{1.46}$$

kde posledný člen popisuje interakciu vonkajšieho magnetického poľa s vonkajším magnetickým momentom. Potom rovnicu

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H\Psi \tag{1.47}$$

nazývame Pauliho rovnicou, kde $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$.

V prípade homogénneho, časovo nezávislého magnetického poľa $\vec{B}$ môžeme riešenie Pauliho rovnice previesť na riešenie Schrödingerovej rovnice.

Riešenie Pauliho rovnice môžeme zapísať ako

$$\Psi(\vec{x}, t) = \begin{pmatrix} \psi_1(\vec{x}, t) \\ \psi_2(\vec{x}, t) \end{pmatrix} = e^{-\frac{i}{\hbar}\mu_0\vec{B}.\vec{\sigma}t} \begin{pmatrix} \chi_1(\vec{x}, t) \\ \chi_2(\vec{x}, t) \end{pmatrix}, \tag{1.48}$$

kde χ_i sú riešeniami Schrödingerovej rovnice pre spinovo nezávislú časť hamiltoniánu (1.46).

1.2.2 Aharonovov–Bohmov jav

Z rovnice (1.6) by sme predpokladali, že vplyv elektromagnetického poľa nebude prítomný v oblastiach kde $\vec{E}$ a $\vec{B}$ sú nulové.

V roku 1959 Aharon a Bohm v [11] ukázali, že vektorový potenciál môže ovplyvniť kvantové chovanie nabitej častice, ktorá sa nikdy nestretne s elektromagnetickým poľom. Ide o pôsobenie magnetického vektorového potenciálu $\vec{A}$ alebo skalárneho elektrického potenciálu φ na fázu vlnovej funkcie častice. Predpokladajme časticu letiacu oblasťou, kde $\vec{B}$ je nulové. V takom prípade rot $\vec{A} = 0$, ale samotné $\vec{A}$ nulové nie je.

Časovú Schrödingerovu rovnicu

$$\left[\frac{1}{2M}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - q\vec{A}\right)^2 + V\right]\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{1.49}$$

s potenciálnou energiou V (môže obsahovať člen $q\varphi$), môžeme zjednodušiť voľbou

$$\psi = e^{if}\psi', \tag{1.50}$$

kde

$$f(\vec{r}) \equiv \frac{q}{\hbar}\int_{trajektoria} \vec{A}(\vec{r'}).\mathrm{d}\vec{r'}. \tag{1.51}$$

S touto substitúciou má gradient ψ tvar:

$$\nabla\psi = (i\nabla f)e^{if}\psi' + e^{if}(\nabla\psi'), \tag{1.52}$$

kde

$$\nabla f = \frac{q}{\hbar}\vec{A}. \tag{1.53}$$

Potom

$$\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - q\vec{A}\right)\psi = q\vec{A}e^{if}\psi' + \frac{h}{i}e^{if}\nabla\psi' - q\vec{A}e^{if}\psi', \tag{1.54}$$

môžeme vidieť, že sa prvý a posledný člen odčítajú, preto,

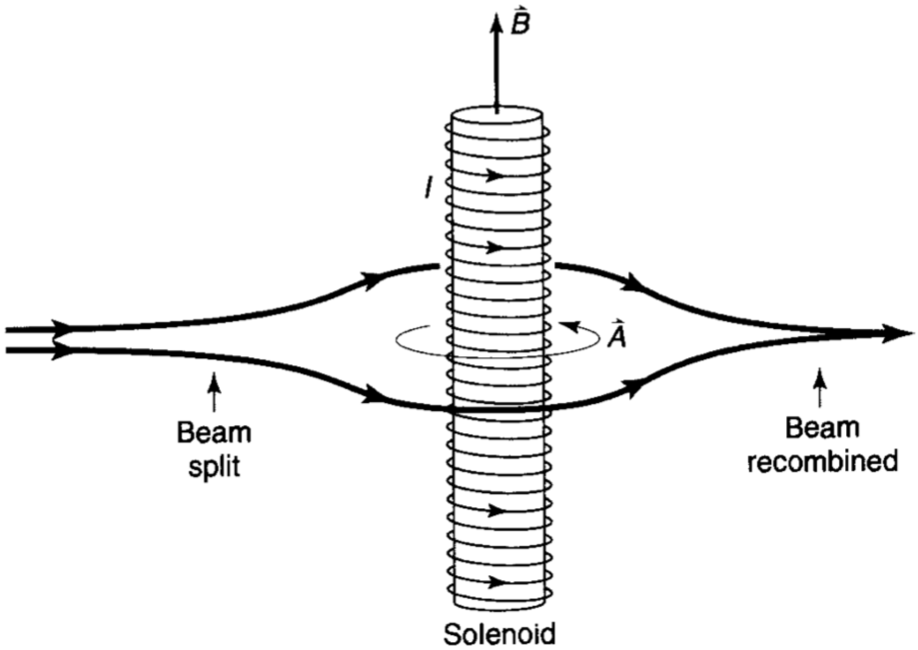
$$\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - q\vec{A}\right)^2\psi = \left(\frac{\hbar}{i}\nabla - q\vec{A}\right)\left(\frac{h}{i}e^{if}\nabla\psi'\right) \tag{1.55}$$

$$= -\hbar^2 e^{if}\nabla^2\psi'. \tag{1.56}$$

Dosadením do (1.49) dostávame:

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2\psi' + V\psi' = i\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t}. \tag{1.57}$$

Vidíme, že ψ' rieši Schrödingerovu rovnicu, bez potenciálu $\vec{A}$. Klasickým príkladom je fázový posun vlnovej funkcie nabitej častice prechádzajúcej okolo nekonečne dlhého solenoidu vplyvom uzatvoreného magnetického poľa. Lúč elektrónov mieriaci smerom k solenoidu sa rozdelí na dva, keďže sú od samotného solenoidu odpudzované. Prechádzajú oblasťou, kde $\vec{B} = 0$ zatiaľ čo potenciál $\vec{A}$ nulový nie je. Lúče sa znovu spoja s fázovým posunom práve dôsledkom nenulového potenciálu $\vec{A}$.



Obr. 1.2: Elektrónový zväzok sa rozdelí a každá polovica zväzku prechádza inou stranou solenoidu. Obrázok prevzatý z [10].

1.3 Relativistická kvantová mechanika

V teórii relativity sú čas a priestor považované za rovnocenné veličiny, čo v kvantovej mechanike neplatí. Dobrým príkladom je Schrödingerova rovnica, kde sa čas vyskytuje v prvej derivácii, zatiaľ čo priestorová súradnica v druhej derivácii. Klasická kvantová mechanika nie je invariantná voči Lorentzovským transformáciám. Preto je snahou nájsť pohybovú rovnicu takú, ktorá bude Lorentzovsky invariantná a nahradí tak nerelativistickú Schrödingerovu rovnicu.

1.3.1 Klein-Gordnova rovnica

Prvým pokusom o relativistickú kvantovú pohybovú rovnicu bola v roku 1926 Klein-Gordonova rovnica, pomenovaná po jej objaviteľoch Oskarovi Kleinovi a Walterovi

Gordonovi, v rovnakom čase ju odvodil aj Vladimir Alexandrovič Fok, preto je niekedy nazývaná aj „Klein–Fock–Gordon equation“. Klein-Gordonova rovnica popisuje častice so spinom 0.

Pre voľnú bezspinovú časticu je Schrödingerova rovnica v tvare:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}. \tag{1.58}$$

Pokiaľ zameníme Hamiltonovu funkciu príslušnným relativistickým vzťahom

$$E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}, \tag{1.59}$$

dostávame

$$c\sqrt{-\hbar^2\Delta + m^2c^2}\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}. \tag{1.60}$$

Z konvenčných dôvodov uvažujeme Minkowského metriku (+ - - -), potom je d'Alembertov operátor v tvare:

$$\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta. \tag{1.61}$$

Pre jednoduchosť zavedieme prirodzené jednotky $\hbar = c = 1$ Potom akékovek riešenie (1.60) vyhovuje *Klein-Gordonovej rovnici*

$$(\Box + m^2)\psi = 0. \tag{1.62}$$

Klein-Gordonova rovnica obsahuje rovnice prvého i druhého rádu, to znamená, že k riešeniu potrebujeme vedieť ako ψ tak $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ v $t = t_0$. Môžeme vidieť, že pre $m = 0$ (neutrína) dostávame homogénnu vlnovú rovnicu.

1.3.2 Diracova rovnica

V roku 1928 Dirac [9] navrhol ďalšiu relativistickú rovnicu, ktorá popisuje relativistický pohyb častice so spinom $\frac{1}{2}$ a lepšie zahŕňa elektromagnetické poruchy.

Pre energiu E a hybnosť $\vec{p}$ v nerelativistickej kvantovej mechanike obecne platí substitúcia

$$E \longrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \vec{p} \longrightarrow -i\hbar\vec{\nabla}. \tag{1.63}$$

Linearizovaním vzťahu (1.59) dostávame

$$E = c\sum_{i=1}^{3}\alpha_i P_i + \beta mc^2 \equiv c\vec{\alpha}.\vec{p} + \beta mc^2, \tag{1.64}$$

kde $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ a β spĺňajú antikomutačné relácie a sú vyjadrené maticovo s dimenziou $n \times n$. Porovnaním kvadrátov (1.59) (1.63) zisťujeme, že musia platiť nasledujúce vzťahy

$$\begin{aligned} \alpha_i\alpha_k + \alpha_k\alpha_i &= 2\delta_{ik}\mathbb{I}, \\ \alpha_i\beta + \beta\alpha_i &= \mathbb{O}, \\ \beta^2 &= \mathbb{I}, \end{aligned} \tag{1.65}$$

kde $i, k = 1, 2, 3$. α a β sú $n \times n$ rozmerné matice, ktoré musia byť hermitovské, aby vzťah (1.64) mohol byť samozdružený (čo je nutnosťou pre kvantovú mechaniku, ktorou sme sa zaoberali doteraz). Môžeme vidieť, že platí

$$\mathrm{tr}\ \alpha_i = \mathrm{tr}\ \beta^2\alpha_i = \mathrm{tr}\ \beta\alpha_i\beta = \mathrm{tr}\ \alpha_i\beta^2 = -\mathrm{tr}\ \alpha_i = 0 \tag{1.66}$$

a zároveň $\alpha_i^2 = 1$, preto vlastné čísla α_i sú 1 alebo -1 a dimenzia n týchto matíc musí byť párne číslo.

Prevedením rovnice (1.64) do kvantovej mechaniky dostávame *Diracovu rovnicu*

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = D_0\psi, \tag{1.67}$$

kde D_0 je *Diracovým operátorom*

$$D_0 = -i\hbar c\, \vec{\alpha}.\vec{\nabla} + \beta mc^2. \tag{1.68}$$

Pre $n = 2$ existujú iba tri lineárne nezávislé matice, spĺňajúce antikomutačné relácie, napríklad Pauliho matice

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.69}$$

Diracov operátor pre priestorovú dimenziu $d = 1$ môže vyzerať ako

$$D_0 = \begin{pmatrix} mc^2 & -i\hbar c\, \partial_x \\ -i\hbar c\, \partial_x & -mc^2 \end{pmatrix}. \tag{1.70}$$

V $d = 2$ môže mať napríklad tvar:

$$D_0 = -i\hbar c\sigma_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - i\hbar c\sigma_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} + \sigma_3 mc^2. \tag{1.71}$$

Pre priestorovú domenziu $d = 3$ už Pauliho matice nestačia, potrebujeme matice vyššieho rádu.

Pre matice rádu $n = 4$ môžme použiť

$$\beta = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & -\mathbb{I} \end{pmatrix}, \qquad \alpha_i = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \sigma_i \\ \sigma_i & \mathbb{O} \end{pmatrix} \tag{1.72}$$

kde $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. D_0 pôsobí na vlnovú funkciu

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4.$$

V prípade neutrín, ktoré majú $m = 0$ v (1.68) vypadne člen s hmotou, preto nám v tomto prípade stačí poznať matice α_i.

Kapitola 2

Motivácia pre komplexné magnetické pole

2.1 Nehermitovská kvantová mechanika

Pozorovateľným veličinám v kvantovej mechanike priraďujeme lineárne samozdružené operátory na $\mathcal{H}$, stavy sú popísané nenulovými vektormi $\psi \in \mathcal{H}$ a riešenie Schrödingerovej rovnice

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi, \tag{2.1}$$

nám udáva časový vývoj, kde H predstavuje hamiltonián - lineárny samozdružený operátor odpovedajúci celkovej energii sústavy.

V posledných rokoch sa fyzici snažili kvantovú mechaniku rozšíriť o pozorovateľné reprezentované nesamozdruženými operátormi, ktorých spektrum je reálne dôsledkom symetrií. Veľkej pozornosti sa dostalo *$\mathcal{PT}$-symetrickej kvantovej mechanike* spájanej s prácou Carla Bendera a Stefana Boettchera z roku 1998 [12].

Povieme, že hamiltonián H je $\mathcal{PT}$-symetrický, pokiaľ platí vzťah:

$$[H, \mathcal{PT}] = 0, \tag{2.2}$$

kde $(\mathcal{P}\psi)(x) := \psi(-x)$ je lineárny operátor priestorovej inverzie a $(\mathcal{T}\psi)(x) := \overline{\psi(x)}$ je antilineárny operátor časovej inverzie.

Táto neštandardná reprezentácia pozorovateľných spĺňa pravidlá kvantovej mechaniky iba v prípade, že je operátor H kvázi samozdružený ([22], [23], [24]).

Majme nesamozdružený operátor H spĺňajúci

$$H^* = \Theta H \Theta^{-1}, \tag{2.3}$$

kde Θ reprezentuje kladný, obmedzený a obmedzene invertibilný operátor nazývaný *metrika* s modifikovaným skalárnym súčinom:

$$\langle\cdot|\cdot\rangle_\Theta := \langle\cdot|\Theta\,\cdot\rangle,$$

$$\langle\phi|H\psi\rangle_\Theta = \langle\phi|\Theta\,\Theta^{-1}H^*\Theta\,\psi\rangle = \langle H\phi|\Theta\,\psi\rangle = \langle H\phi|\psi\rangle_\Theta.$$

Môžeme si všimnúť, že ak zvolíme $\Theta = I$, potom $H = H^*$ bude odpovedať samozdruženému operátoru.

Operátor H je *kvázi samozdružený* práve vtedy, keď je podobný samozdruženému, to znamená, že existuje samozdružený operátor h a obmedzený operátor Ω s obmedzenou inverziou, ktoré spĺňajú vzťah

$$h = \Omega H \Omega^{-1}. \tag{2.4}$$

Operátor H, ktorý spĺňa (2.4) je kvázi samozdružený s voľbou $\Theta := \Omega^*\Omega$. Nehermitovskej kvantovej mechanike sa detailne venuje [21].

2.2 Stabilita rotujúcich čiernych dier

Tematika rozoberaná v tejto podkapitole pojednáva nad rámec tejto bakalárskej práce a jej podrobnejší popis je možné nájsť v [4], [5], [6]. Budeme používať štandardný formalizmus teórie relativity. Pripomenieme si Einsteinove sumačné pravidlo. Keď sa vo výraze vyskytnú rovnaké indexy, sčítame cez nich:

$$l_a l_a = \sum_{a=1}^{n} l_a l_a = l_1 l_1 + l_2 l_2 + ... + l_n l_n. \tag{2.5}$$

Budeme predpokladať indexy s hodnotami od 0 do 3.

Jednou z motivácií pre štúdium imaginárneho magnetického poľa je analógia zdanlivého horizontu čiernej diery a kvantovej nabitej častice. Zdanlivý horizont je hranicou medzi svetlom, ktoré je uväznené vo vnútri čiernej diery a svetlom, ktoré je v danom čase schopné uniknúť gravitačnému pôsobeniu. Budeme sa zameriavať na marginálne zachytené plochy (angl. *marginally outer trapped surfaces*-MOTS) [4], u ktorých hrá dôležitú úlohu stabilita.

Uvažujme priestoročas (M, g_{ab}) dimenzie n a priestorupodobný, uzatvorený, orientovateľný povrch $\mathcal{S}$ kodimenzie 2 vložený do (M, g_{ab}). Časupriestorová Levi-Civitova konexia je daná ∇_a s Einsteinovým tenzorom G_{ab}. Indukovanú metriku na $\mathcal{S}$ označíme q_{ab} s Levi-Civitovou konexiou D_a a Ricciho skalárom $R_{\mathcal{S}}$. Budeme uvažovať do budúcnosti orientované svetelné vektory l_a (vonkajší) a k_a (vnútorný) na $T^{\perp}\mathcal{S}$, pre ktoré platí $l_a l^a = 0,\ k_a k^a = 0$ a sú normalizované $l^a k_a = -1$ [5] .

Definujeme expanziu

$$\theta^{(l)} = q^{ab}\nabla_a l^a \tag{2.6}$$

a torziu

$$\Omega_a = -k^c q^d_{\ a} \nabla_d l_c. \tag{2.7}$$

Plocha $\mathcal{S}$ je MOTS pokiaľ spĺňa, že vonkajšia expanzia $\theta^{(l)} = 0$. MOTS je stabilný ak existuje kladná funkcia ψ na $\mathcal{S}$ taká, že platí $\delta_{\psi(-k)}\theta^{(l)} > 0$, kde δ predstavuje operátor deformácie na $\mathcal{S}$. Pojem stability pripúšťa spektrálnu charakterizáciu prostredníctvom operátoru stability $L_{\mathcal{S}}$ definovaného na ploche $\mathcal{S}$, odvodený v [6]

$$
\begin{aligned}
L_{\mathcal{S}}\psi &= \delta_{\psi(-k)}\theta^{(l)} \\
&= \Big[-\Delta + 2\Omega^a D_a - (|\Omega|^2 - D_a\Omega^a - \frac{1}{2}R_{\mathcal{S}} + G_{ab}k^a l^b)\Big]\psi.
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

Prvá rovnica definuje akciu operátoru $L_{\mathcal{S}}$, zatiaľ čo druhá rovnosť je rutinným odvodením za použitia lokálnych súradníc.

Vlastné čísla operátoru $L_{\mathcal{S}}$ sú obecne komplexné, keďže operátor je nesamozdružený. Nesamozdruženosť spôsobuje člen $2\Omega_a D_a$.

Stabilita MOTS je charakterizovaná nezápornosťou *hlavnej vlastnej hodnoty* λ_0, čo predstavuje vlastnú hodnotu s najmenšou reálnou časťou.

Prevedením substitúcie:

$$
\Omega_a = \frac{ie}{\hbar c}A_a, \tag{2.9}
$$

$$
R_{\mathcal{S}} = \frac{4me}{\hbar^2}\phi, \tag{2.10}
$$

$$
G_{ab}k^a l^b = -\frac{2m}{\hbar^2}V, \tag{2.11}
$$

prechádza operátor stability $L_{\mathcal{S}}$ na hamiltonián nerelativistickej častice s nábojom e a hmotnosťou m v magnetickom a elektrickom poli, ktoré sú dané vektorovým potenciálom A_a a skalárnym potenciálom ϕ. Platí $\frac{\hbar^2}{2m}L_{\mathcal{S}} = H$, kde

$$
\begin{aligned}
H &= -\frac{\hbar}{2m}\Delta + \frac{i\hbar}{mc}A^a D_a + \frac{i\hbar e}{2mc}D_a A^a + \frac{e^2}{2mc^2}A_a A^a + e\phi + V \\
&= \frac{1}{2m}\Big(-i\hbar D - \frac{e}{c}A\Big)^2 + e\phi + V.
\end{aligned} \tag{2.12}
$$

Týmto spôsobom dostávame analógiu medzi geometrickým operátorom z obecnej teórie relativity a kvantovo-mechanickým operátorom. Je však dôležité si uvedomiť, že pretože torzia Ω_a je reálna, magnetický potenciál A_a je čisto imaginárny. Špeciálne to teda znamená, že operátor H je opäť nesamozdružený.

Táto analógia má potenciál prepojiť dobre prebádaný problém kvantových častíc s bohatou, avšak do značnej miery nezmapovanou tématikou MOTS.

Kapitola 3

Spektrálna teória

V prvej časti kapitoly si predstavíme základné pojmy funkcionálnej analýzy, ktoré budeme následne využívať. Čerpáme predovšetkým z [25] a [26]. Obsah druhej časti kapitoly, čerpaný z [13], [29] sa zameriava na bázy Hilbertovho priestoru.

3.1 Základné pojmy

Definícia 3.1.1. *Nech χ je Banachov priestor nad $\mathbb{C}$ a A je uzatvorený* ($\operatorname{dom} A \in \chi$) *a husto definovaný* ($\overline{\operatorname{dom} A} = \chi$) *operátor na χ. Ďalej nech $\lambda \in \mathbb{C}$. Potom platí*

$$\lambda \in \rho(A) \iff \ker(A - \lambda I) = \{0\} \text{ a } \operatorname{Ran}(A - \lambda I) = \chi.$$

$\rho(A)$ nazývame resolventnou množinou operátoru A a $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ je spektrum operátoru A. $R_\lambda := (A - \lambda I)^{-1}$ pre $\lambda \in \rho(A)$ je resolventou operátoru A.

Definícia 3.1.2 (Klasifikácia spektra)**.**
Nech χ je Banachov priestor nad $\mathbb{C}$ a A je uzatvorený a husto definovaný operátor na χ, $\lambda \in \mathbb{C}$, ďalej platí,

$$\lambda \in \sigma(A) \iff \ker(A - \lambda I) \neq \{0\} \textit{ alebo } \operatorname{Ran}(A - \lambda I) \neq \chi,$$

potom rozlišujeme spektrum:

(1) $\ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$, *potom $\lambda \in \sigma_p(A)$ patrí do bodového spektra, λ je vlastnou hodnotou operátoru A;*

(2) $\ker(A - \lambda I) = \{0\}$, $\operatorname{Ran}(A - \lambda I) \neq \chi$, $\overline{\operatorname{Ran}(A - \lambda I)} = \chi$, *potom $\lambda \in \sigma_c(A)$ patrí do spojitého spektra, λ nie je vlastnou hodnotou operátoru A;*

(3) $\ker(A - \lambda I) = \{0\}$, $\overline{\operatorname{Ran}(A - \lambda I)} \neq \chi$, *potom $\lambda \in \sigma_r(A)$ patrí do reziduálneho spektra (zvyškové spektrum).*

Definícia 3.1.3. *Nech X a X_1 sú normované vektorové priestory. Operátor B zobrazujúci z $X \to X_1$ nazveme obmedzeným pokiaľ existuje $c > 0$ také, že pre všetky $x \in X$ platí,*

$$\|Bx\|_1 \leq c\|x\|.$$

Definícia 3.1.4. *Úplný lineárny priestor so skalárnym súčinom nazývame Hilbertovým priestorom $\mathcal{H}$.*

Definícia 3.1.5. *Nech A je uzatvorený a husto definovný operotor na $\mathcal{H}$. Povieme, že operátor A je symetrický, keď platí*

$$\langle y|Ax\rangle = \langle Ay|x\rangle, \quad \forall x, y \in \operatorname{dom} A. \tag{3.1}$$

Pokiaľ navyše operátor A spĺňa

$$A = A^*, \tag{3.2}$$

potom nazveme operátor A samozdruženým.

Poznámka. Každý samozdružený operátor je symetrický, naopak to ale neplatí. Pre obmedzené operátory definovené na celom priestore sú pojmy symetrický, samozdružený a hermitovský ekvivalentné.

Definícia 3.1.6. *Husto definovaný uzatvorený operátor A na Hilbertovom priestore nazveme normálny pokiaľ,*

$$A^*A = AA^*. \tag{3.3}$$

3.2 Bázy na Hilbertovom priestore

Povieme, že systém $\{\psi_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathcal{H}$, kde $\dim \mathcal{H} = +\infty$ je *úplný* pokiaľ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \phi \in \mathcal{H}, \langle \phi|\psi_n\rangle = 0 \implies \phi = 0. \tag{3.4}$$

Bázou na Hilbertovom priestore $\mathcal{H}$ nazývame systém vektorov $\{\psi_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathcal{H}$, kde $\dim \mathcal{H} = +\infty$, ak pre každý vektor $\phi \in \mathcal{H}$ existuje jednoznačný rozvoj do rady

$$\phi = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \psi_n. \tag{3.5}$$

Koeficienty a_n v tomto rozvoji sú spojitými lineárnymi funkcionálmi:

$$a_n = \phi_n(\phi) = \langle \phi_n|\phi\rangle. \tag{3.6}$$

Každá báza Hilbertovho priestoru je úplná. Systémy $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú považované za biortogonálne, pokiaľ platí $\langle \psi_m|\phi_n\rangle = \delta_{mn}$. Uvažujme *minimálny* systém $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$, to znamená, že žiadny z prvkov nemôže byť vyjadrený pomocou lineárnej kombinácie ostatných. Pre každú bázu $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ je biortogonálny systém $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ daný jednoznačne. Z rovníc (3.5) a (3.6) môžeme vidieť, že akýkoľvek vektor ortogonálny k ϕ_n je rovný nule. Z toho plynie, že systém biortonormálny k báze $\mathcal{H}$ je vždy úplný.

Veta 3.2.1 (S. Banach [13] kapitola VI.,Teorém 1.1)**.**
Keď je systém $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ bázou Hilbertovho priestoru, potom systém k nemu biortorgonálny $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ je tiež bázou $\mathcal{H}$.

V prípade, že v (3.6) je $\phi = \psi_m$, dostávame

$$\langle \psi_m | \phi_n \rangle = \delta_{mn}. \tag{3.7}$$

Ortonormálna báza

Povieme, že systém $\{\psi_n\}_{n=1}^{+\infty} \in \mathcal{H}$ je ortonormálny, keď spĺňa

$$\langle \psi_n | \psi_m \rangle = \delta_{mn}. \tag{3.8}$$

Ortonormálnou bázou nazveme úplný ortonormálny systém. Pre ortonormálu bázu platí Parsevalova rovnosť

$$\forall \phi \in \mathcal{H}, \quad \|\phi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \psi_n | \phi \rangle|^2. \tag{3.9}$$

Rieszova báza

Každý obmedzený invertibilný operátor transformuje ortogonálnu bázu na inú bázu Hilbertovho priestoru.

Nech $\{\psi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je ortonormálna báza Hilbertovho priestoru $\mathcal{H}$ a A je obmedzený invertibilný operátor. Potom pre akýkoľvek vektor $\omega \in \mathcal{H}$ platí [13]

$$A^{-1}\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \psi_n | A^{-1}\omega \rangle \psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle (A^{-1})^* \psi_n | \omega \rangle \psi_n. \tag{3.10}$$

Substitúciou

$$A\psi_n = \phi_n, \;\; (A^{-1})^* \psi_n = \chi_n, \tag{3.11}$$

dostávame rozvoj

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \chi_n | \omega \rangle \phi_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n, \tag{3.12}$$

ktorý je daný jednoznačne. Vidíme, že operátor A transformoval ortonormálnu bázu $\{\psi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ na $\{\phi_n\}_{n=1}^{+\infty}$. Báza vzniknutá takouto transformáciou je *ekvivalentná k ortonormálnej báze* tiež nazývaná *Rieszova báza.*

Veta 3.2.2. *Povieme, že báza $\{\phi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je rieszovskou bázou, práve keď platí*

$$(\exists C > 0)(\forall \phi \in \mathcal{H})(C^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \phi_n | \phi \rangle|^2 \leq \|\phi\|^2 \leq C \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \phi_n | \phi \rangle|^2). \tag{3.13}$$

Rieszovská báza je zobecnením ortonormálnej báze (neplatí ortogonalita). Prakticky to znamená, že vektory majú medzi sebou nejaký uhol na ktorý máme určitý uniformný odhad. Nerovnosť hovorí, že vektory nemôžu ísť k sebe.

Vlastné vektory samozdruženého operátoru s čisto diskrétnym spektrom tvoria ortonormálnu bázu. Vlastné vektory nesamozdružených vektorov obecne nemusia tvoriť bázu, avšak pokiaľ máme operátor podobný samozdruženému, to znamená, že $b = PBP^{-1}$, kde B je samozdružený, jeho vlastne vektory vždy tvoria rieszovskú bázu.

Veta 3.2.3. *Nech B je samozdružený operátor s kompaktnou resolventou, operátory P a P^{-1} sú obmedzené. Ak $b = PBP^{-1}$, potom vlastné funkcie operátoru b tvoria rieszovskú bázu.*

Dôkaz. Vlastné vektory samozdruženého operátoru tvoria úplnú ortonormálnu bázu $\{\psi_n\}_{n=1}^{+\infty}$, spĺňajú Parsevalovu rovnosť. Pre operátor B teda platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle\psi_n|\phi\rangle|^2 = \|\phi\|^2, \tag{3.14}$$

kde $\phi \in \mathcal{H}$.

Pozrieme sa na vzt'ah medzi vlastnými vektormi ψ samozdruženého operátoru B a vlastnými vektormi χ podobného operátoru b s príslušnými vlastnými hodnotami λ.

Máme rovnicu, pomocou ktorej hľadáme vlastné hodnoty operátoru b

$$b\chi = \lambda\chi, \tag{3.15}$$

vzhľadom na to, že $b = PBP^{-1}$, rovnicu môžeme prepísať

$$PBP^{-1}\chi = \lambda\chi, \tag{3.16}$$

ktorú upravíme,

$$B(P^{-1}\chi) = \lambda P^{-1}\chi. \tag{3.17}$$

$P^{-1}\chi$ si označíme ako ψ a vidíme, že rovnica prechádza na charakteristickú rovnicu pre samozdružený operátor B

$$B\psi = \lambda\psi. \tag{3.18}$$

Medzi vlastnými vektormi platí vzťah

$$\chi = P\psi. \tag{3.19}$$

Prepíšeme Parsevalovu rovnost' pomocou vlastných vektorov operátoru b,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle\chi_n|\phi\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle P\psi_n|\phi\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle\psi_n|P^*\phi\rangle|^2 = \|P^*\phi\|^2. \tag{3.20}$$

$\|P^*\phi\|^2$ chceme obmedziť konštantami zhora a zdola.

Vieme, že $\|P^*\| = \|P\| =: C_1 < \infty$, preto $\|P^*\phi\|^2$ môžeme zhora odhadnúť

$$\|P^*\phi\|^2 \leq \|P^*\|^2\|\phi\|^2 = \|P\|^2\|\phi\|^2 = C_1^2\|\phi\|^2 < +\infty, \tag{3.21}$$

Tým sme dostali odhad zhora.

Z predpokladu obmedzenosti P a P^{-1} vieme, že $0 \notin \sigma(P)$. Zároveň P^{-1^*} sa rovná $P^{*^{-1}}$ všade, kde to má zmysel, preto

$$\|P^{-1^*}\| = \sup_{\nu \in \mathcal{H}} \frac{\|P^{*^{-1}}\nu\|}{\|\nu\|} =: C_2 < \infty. \tag{3.22}$$

Pretože 0 nie je v spektre, P^{-1} je bijekcia. Použijeme substitúciu $P^{*^{-1}}\nu = \phi$,

$$C_2 = \|P^{-1^*}\| = \sup_{\phi \in \mathcal{H}} \frac{\|\phi\|}{\|P^*\phi\|} \geq \frac{\|\phi\|}{\|P^*\phi\|}, \qquad \forall \phi \in \mathcal{H}. \tag{3.23}$$

Pre konštantu C_2 teda platí

$$C_2 \geq \frac{\|\phi\|}{\|P^*\phi\|}, \tag{3.24}$$

z toho plynie vzťah

$$\|P^*\phi\|^2 \geq \frac{1}{C_2^2}\|\phi\|^2 \tag{3.25}$$

obmedzujúci $\|P^*\phi\|^2$ zdola.

Dostali sme vzťahy, ktoré nám obmedzujú (3.20) zhora i zdola. Platí

$$\frac{1}{C_2^2}\|\phi\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \chi_n|\phi\rangle|^2 \leq C_1^2\|\phi\|^2. \tag{3.26}$$

Aby bola splnená podmienka (3.13) zvolíme $C = \max(C_1^2, C_2^2)$.

□

Barina báza

Definícia 3.2.1. *Dva systémy $\{\nu_n\}_{n=1}^{+\infty}$ a $\{\mu_n\}_{n=1}^{+\infty}$ sú kvadraticky blízke, keď*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\nu_n - \mu_m\|^2 < \infty. \tag{3.27}$$

Definícia 3.2.2. *Systém $\{\nu_n\}_{n=1}^{+\infty}$ nazveme ω-lineárne nezávyslým, keď rovnica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \nu_n = 0 \tag{3.28}$$

platí iba, keď koeficienty a_n sú nulové.

Veta 3.2.4 (N.K.Bari [13], kapitola VI., Teorém 2.3).
Akýkoľvek ω-lineárne nezávislý systém $\{\nu_n\}_{n=1}^{+\infty}$, kvadraticky blízky báze $\{\psi_n\}_{n=1}^{+\infty}$, ktorá je ekvivalentná ortonormálnej, je sama bázou ekvivalentnou k ortonormálnej báze.

Definícia 3.2.3. *Každý ω-lineárne nezávislý systém $\{\nu_n\}_{n=1}^{+\infty}$, ktorý je kvadraticky blízko ortonormálnej báze je Barinou bázou.*

Kapitola 4

Kvantová častica na kružnici

V tejto kapitole sa budeme venovať nesamozdruženým operátorom z kvantovej mechaniky. V nerelativistickom prípade to bude operátor hybnosti a Schrödingerov operátor, v relativistickom prípade budeme študovať vlastnosti Diracovho operátoru.

4.1 Nerelativistický prístup

Definícia 4.1.1 ([15]). *Nech $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ a $\alpha \in \mathbb{N}^n$ je multiindex. Potom $h \in L^1_{loc}(\Omega)$ je slabou deriváciou f, $D^\alpha f = h$, pokiaľ*

$$\int_\Omega f D^\alpha \phi \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega h\phi \mathrm{d}x,$$

pre každú testovaciu funkciu $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Multiindexom rozumieme usporiadanú n-ticu $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$. Výšku multiindexu označíme $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$.

Definícia 4.1.2. *Nech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otvorená množina, $k \in \mathbb{N}$ a $p \in [1, \infty]$. Priestor $W^{k,p}$ (Sobolevov) definujeme ako*

$$W^{k,p}(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq k\}.$$

Sobolevov priestor $W^{k,p}$ je priestorom funkcií $f \in L^p(\Omega)$ takých, že pre každý multiindex α, s $|\alpha| \leq k$, slabá derivácia D^a existuje a $D^a f \in L^p(\Omega)$.

Pozrieme sa na hybnosť na kružnici s komplexným magnetickým poľom [14]. Majme nesamozdružený operátor hybnosti P_a na $L^2((-\pi, \pi))$ definovaný ako

$$\begin{aligned} (P_a\psi)(x) :=& -i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi(x) - a(x)\psi(x), \\ \operatorname{dom} P_a :=& \{\psi \in W^{1,2}((-\pi, \pi)) : \psi(-\pi) = \psi(\pi)\}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

kde $a : (-\pi, \pi) \to \mathbb{C}$ predstavuje kvadraticky integrabilný, komplexný magnetický potenciál. P_a je dobre definovaný uzatvorený operátor s kompaktnou rezolventou, ktorý je samozdružený práve keď je imaginárna časť a nulová [14].

Veta 4.1.1 ([14])**.** *Operátor P_a spĺňa podobnostnú transformáciu*

$$\tau_a P_a \tau_a^{-1} = P_{\langle a \rangle}, \tag{4.2}$$

kde

$$(\tau_a \psi)(x) := \exp((i\langle a \rangle x - iA(x))\psi(x). \tag{4.3}$$

$A(x)$ a $\langle a \rangle$ sú definované ako

$$A(x) := \int_{-\pi}^{x} a(y)\mathrm{d}y, \qquad \langle a \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} a(x)\mathrm{d}x. \tag{4.4}$$

Dôkaz. Budeme predpokladať τ_a v tvare $e^{f(x)}$. Chceme aby

$$e^{f(x)} P_a e^{-f(x)} = P_{\langle a \rangle}. \tag{4.5}$$

Zapôsobením operátoru P_a na $e^{-f(x)}$ dostávame

$$e^{f(x)}(-ie^{-f(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + if'(x)e^{-f} - a(x)e^{-f(x)}) = -i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \langle a \rangle, \tag{4.6}$$

z čoho získame $f(x)$:

$$f(x) = i\langle a \rangle x - iA(x), \tag{4.7}$$

čo znamená, že $\tau_a = e^f(x)$ je v tvare

$$\tau_a = \exp(i\langle a \rangle x - iA(x)). \tag{4.8}$$

Je potrebné ešte ukázať že τ_a ponecháva definičný obor P_a invariantný. Overíme, že pre $\phi = \tau_a \psi$ platia rovnaké periodické okrajové podmienky ako pre ψ.

$$\phi(\pi) = \exp(i\langle a \rangle \pi - i\int_{-\pi}^{\pi} a(y)\mathrm{d}y)\psi(\pi) = \exp(-i\langle a \rangle \pi)\psi(\pi), \tag{4.9}$$

$$\phi(-\pi) = \exp(-i\langle a \rangle \pi - i\int_{-\pi}^{-\pi} a(y)\mathrm{d}y)\psi(-\pi) = \exp(-i\langle a \rangle \pi)\psi(-\pi). \tag{4.10}$$

Vidíme, že keď $\psi(-\pi) = \psi(\pi)$ potom, $\phi(-\pi) = \phi(\pi)$.

□

Veta 4.1.2 ([14])**.** *Operátor P_a je kvázi samozdružený vtedy a len vtedy, keď*

$$\mathrm{Im}\langle a \rangle = 0. \tag{4.11}$$

To znamená, že

$$P_a^* = \Theta P_a \Theta^{-1}, \tag{4.12}$$

s metrikou

$$(\Theta\psi)(x) := \exp(2\mathrm{Im}A(x))\psi(x). \tag{4.13}$$

Poznámka. Fyzikálne zaujímavejšie je uvažovať P_a^2, čo je magnetický Schrödingerov operátor popisujúci elektrón na kružnici s magnetickým poľom (solenoid).
V samozdruženom prípade by platilo $H_a := P_a^2 = P_a P_a$.

V prípade, že je operátor P_a nesamozdružený, môžeme uvažovať aj operátor $\tilde{H}_a := P_a^* P_a$, ktorý už samozdružený je,

$$\tilde{H}_a^{\;*} := (P_a^* P_a)^* = P_a^* P_a^{**} = P_a^* P_a = \tilde{H}_a.$$

Zaujímavé je uvažovať operátor $H_a = P_a P_a$, ktorý nebude samozdružený pokiaľ $a(x) \notin \mathbb{R}$, ale s tou istou trasformáciou bude podobný samozdruženému, za podmienky (4.11),

$$\tau_a H \tau_a^{-1} = \tau_a P_a P_a \tau_a^{-1} = \tau_a P_a \tau_a^{-1} \tau_a P_a \tau_a^{-1} = P_{\langle a \rangle} P_{\langle a \rangle} = H_{\langle a \rangle}. \tag{4.14}$$

4.1.1 Spektrum

Vzhľadom na to, že operátor P_a má kompaktnú rezolventu, jeho spektrum je diskrétne. Ukážeme si, že pre spektrum operátoru P_a platí vzťah:

$$\sigma(P_a)^2 = \sigma(P_a^2), \tag{4.15}$$

ktorý použijeme neskôr v tejto kapitole.

Máme charakteristickú rovnicu $P_a \psi = \mu \psi$, na ktorú zapôsobíme operátorom P_a zľava,

$$P_a^2 \psi = P_a(\mu \psi) = \mu(P_a \psi) = \mu^2 \psi. \tag{4.16}$$

To znamená, že keď $\mu \in \sigma(P_a) \implies \mu^2 \in \sigma(P_a^2)$, z čoho vyplýva

$$\sigma(P_a)^2 \subset \sigma(P_a^2). \tag{4.17}$$

Naopak, nech

$$P_a^2 \phi = \mu^2 \phi, \tag{4.18}$$

potom

$$P_a^2 \phi - \mu^2 \phi = (P_a - \mu)(P_a + \mu)\phi = 0. \tag{4.19}$$

To znamená, že vektor

$$\psi := (P_a + \mu)\phi \tag{4.20}$$

je buď nenulovým vektorom, potom

$$P_a \psi = \mu \psi, \tag{4.21}$$

alebo je nulovým vektorom a potom

$$P_a \phi = -\mu \phi. \tag{4.22}$$

Môžme teda vidieť, že keď $\mu^2 \in \sigma(P_a^2)$, potom $\mu \in \sigma(P_a) \vee -\mu \in \sigma(P_a)$, to znamená, že $\sigma(P_a^2) \subset \sigma(P_a)^2$. Z čoho už následne vyplýva rovnosť $\sigma(P_a^2) = \sigma(P_a)^2$.

Vlastné vektory ψ a vlastné čísla μ operátoru P_a nájdeme vyriešením charakteristickej rovnice

$$-i\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} - a(x)\psi = \mu\psi, \tag{4.23}$$

ktorú upravíme do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} - (a(x) + \mu)i\psi = 0 \tag{4.24}$$

a dostávame lineárnu diferenciálnu rovnicu 1. rádu s nulovou pravou stranou, ktorej riešením je

$$\psi = e^{i\mu x}e^{iA(x)}D, \tag{4.25}$$

kde ψ je vlastným vektorom operátoru P_a a D integračná konštanta.

Použijeme podmienku $\psi(\pi) = \psi(-\pi)$,

$$e^{iA(-\pi)}e^{-i\mu\pi}D = e^{iA(\pi)}e^{i\mu\pi}D, \tag{4.26}$$

pokrátením konštanty D a následným zlogaritmovaním dostávame rovnicu,

$$A(-\pi) - A(\pi) = 2(\mu - n)\pi, \tag{4.27}$$

z ktorej vyjadríme μ

$$\mu = n - \frac{A(\pi) - A(-\pi)}{2\pi} = n - \langle a \rangle \qquad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{4.28}$$

Spektrum operátoru P_a je

$$\sigma(P_a) = \{n - \langle a \rangle\}_{n\in\mathbb{Z}}. \tag{4.29}$$

Rovnakým spôsobom nájdeme spektrum operátoru P_a^*

$$\sigma(P_a^*) = \{n - \langle \overline{a} \rangle\}_{n\in\mathbb{Z}}. \tag{4.30}$$

Pomocou podmienky biortogonality,

$$\langle \psi_n, |\chi_m \rangle = \delta_{nm}, \tag{4.31}$$

získame normalizačnú konštantu. Vlastné vektory ψ_n operátoru P_a sú

$$\psi_n(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(i(n - \langle a \rangle)x + iA(x)\right) \tag{4.32}$$

a vlastné vektory χ_n operátoru P_a^* sú

$$\chi_n(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(i(n - \langle \overline{a} \rangle)x + i\overline{A(x)}\right). \tag{4.33}$$

4.1.2 Bázické vlastnosti

Môžeme vidieť, že pre každé $n \in \mathbb{Z}$ môžeme vlastné vektory zapísať ako

$$\begin{aligned} \psi_n(x) &:= \xi(x)\, e_n(x), \\ \chi_n(x) &:= \xi^{-1}(x)\, e_n(x), \end{aligned} \tag{4.34}$$

kde $\xi(x)$ je obmedzenou a kladnou funkciou na $[-\pi, \pi]$,

$$\xi(x) := \exp(\operatorname{Im}\langle a\rangle x - \operatorname{Im} A(x)) \tag{4.35}$$

a $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, je ortonormálou bázou na priestore $L^2((-\pi, \pi))$,

$$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(i(n - \operatorname{Re}\langle a\rangle)x + i \operatorname{Re} A(x)). \tag{4.36}$$

Vzhľadom na to, že systém $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, je úplný, postupnosť $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ je tiež úplným systémom na $L^2((-\pi, \pi))$ a zároveň z podmienky (4.31) vieme, že je najmenším úplným systémom, to znamená, že odobratím jediného členu sa stáva systém neúplným.

Pre akúkoľvek funkciu $\psi \in L^2((-\pi, \pi))$ existuje jednoznačný rozklad

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n|\psi\rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \xi^{-1} e_n|\psi\rangle\, \xi e_n. \tag{4.37}$$

Z úplnosti $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ a (4.34) vieme, že $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ je Rieszova báza. Vďaka podmienke biortogonality vieme, že $\{\chi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ je tiež Rieszovou bázou na $L^2((-\pi, \pi))$. Vzhľadom na to, že veľkosť komplexnej exponenciály je rovná jednej, $|e_n| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ pre všetky $n \in \mathbb{Z}$. To znamená, že

$$|\psi_n - \chi_n| = \frac{|\xi - \xi^{-1}|}{\sqrt{2\pi}}. \tag{4.38}$$

Preto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\psi_n - \chi_n\|^2 = \infty \tag{4.39}$$

okrem situácie, kedy $\xi = \xi^{-1}$, ktorá by nastala iba ak $\operatorname{Im} a = 0$, z čoho vyplýva, že $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ je Barinou bázou iba vtedy, keď $\operatorname{Im} a = 0$.

4.2 Relativistický prístup

V prípade relativistického elektrónu už Schrödingerov operátor použiť nemôžme, musíme použiť Diracov operátor.

Zadefinujeme Diracov operátor D_a s kvadraticky integrabilným magnetickým poľom $a \in L^2(\mathbb{S}, \mathbb{C})$, kde $\mathbb{S} \cong (-\pi, \pi)$ a hmotnosťou m.

$$\begin{aligned} (D_a\psi)(x) :=& \begin{pmatrix} m & -i\partial_x - a \\ -i\partial_x - a & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \\ \operatorname{dom} D_a :=& \{\psi \in W^{1,2}((-\pi,\pi)) : \psi(-\pi) = \psi(\pi)\}, \\ \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} =& \ \psi \in L^2((-\pi,\pi), \mathbb{C}^2). \end{aligned} \tag{4.40}$$

Môžme vidieť, že

$$D_a^2 = H_a \mathbb{I}. \tag{4.41}$$

4.2.1 Spektrum

Riešime charakteristickú rovnicu $D_a\psi = \lambda\psi$,

$$\begin{pmatrix} m & -i\partial_x - a \\ -i\partial_x - a & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \tag{4.42}$$

ktorá je ekvivalentná sústave rovníc:

$$m\psi_1 + (-i\partial_x - a)\psi_2 = \lambda\psi_1, \tag{4.43}$$

$$-m\psi_2 + (-i\partial_x - a)\psi_1 = \lambda\psi_2. \tag{4.44}$$

Z (4.44) si vyjadríme ψ_2, ktoré následne dosadíme do (4.43),

$$m\psi_1 + \frac{1}{\lambda + m}(-i\partial_x - a)^2\psi_1 = \lambda\psi_1, \tag{4.45}$$

$$(-i\partial_x - a)^2\psi_1 = (\lambda^2 - m^2)\psi_1. \tag{4.46}$$

Na prípad, kedy $\lambda = -m$ sa pozrieme neskôr. Môžeme si všimnúť, že na ľavej strane (4.46) máme operátor P_a^2. Preto pre nájdenie vlastných vektorov a vlastných čísel operátoru D_a využijeme znalosť vlastných vektorov a vlastných čísel operátoru P_a. Z (4.15) vieme, že platí

$$\sigma((-i\partial_x - a)^2) = \sigma(P_a^2) = \sigma(P_a)^2 = \{(n - \langle a\rangle)^2\}_{n\in\mathbb{Z}}. \tag{4.47}$$

Spektrum operátoru D_a je potom

$$\sigma(D_a) = \{\pm\sqrt{m^2 + (n - \langle a\rangle)^2}\}_{n\in\mathbb{Z}}. \tag{4.48}$$

Z rovníc (4.25) a (4.46) je

$$\psi_1(x) = \exp\left(i(\sqrt{\lambda^2 - m^2}x + A(x))\right), \tag{4.49}$$

kde

$$A(x)=\int_{-\pi}^{x}a(y)\mathrm{d}y, \tag{4.50}$$

dosadením do (4.44) získavame

$$\psi_2(x)=\sqrt{\frac{\lambda-m}{\lambda+m}}\exp\bigl(i(\sqrt{\lambda^2-m^2}x+A(x))\bigr). \tag{4.51}$$

Spektrum združeného operátoru D_a^* nájdeme analogicky,

$$\sigma(D_a^*)=\{\pm\sqrt{m^2+(n-\langle\overline{a}\rangle)}\}_{n\in\mathbb{Z}}. \tag{4.52}$$

Pomocou relácie biortonormality zistíme normalizačnú konštantu, vlastné vektory ψ_n operátoru D_a a vlastné vektory ϕ_n operátoru D_a^* sú v tvare

$$\psi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{4\pi\lambda_n}}\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_n+m}\\ \sqrt{\lambda_n-m}\end{pmatrix}\exp\bigl(i(\sqrt{\lambda_n^2-m^2}x+A(x))\bigr), \tag{4.53}$$

$$\phi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{4\pi\lambda_n}}\begin{pmatrix}\sqrt{\overline{\lambda_n}+m}\\ \sqrt{\overline{\lambda_n}-m}\end{pmatrix}\exp\bigl(i(\sqrt{\overline{\lambda_n^2}-m^2}x+\overline{A(x)})\bigr). \tag{4.54}$$

Rozoberieme si situáciu, kedy $\lambda=-m$. Uvažujeme dve možnosti, buď $a(x)=0$ alebo $a(x)\neq 0$. Dosadením $\lambda=-m$ do (4.44) získavame rovnicu

$$(-i\partial_x-a)^2\psi_1=0. \tag{4.55}$$

Ako prvé uvažujeme $a(x)=0$. To znamená, že máme rovnicu

$$-\psi_1''(x)=0, \tag{4.56}$$

ktorej obecné riešenie je

$$\psi_1(x)=Dx+B. \tag{4.57}$$

Konštanty D a B získame pomocou periodickej okrajovej podmienky,

$$D\pi+B=-D\pi+B, \tag{4.58}$$

z toho plynie, že konštanta $D=0$ a

$$\psi_1(x)=B, \tag{4.59}$$

dosadením do (4.43) získavame ψ_2,

$$-i\psi_2'(x)=-2mB, \tag{4.60}$$

$$\psi_2(x)=-2imBx+C. \tag{4.61}$$

Znovu použijeme periodickú okrajovú podmienku,

$$-2imB\pi + C = 2imB\pi + C, \tag{4.62}$$

$m \neq 0$, preto $B = 0$. Potom

$$\psi_2(x) = C. \tag{4.63}$$

Vlastný vektor je dobre definovaný až na konštantu,

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4.64}$$

V prípade $a \neq 0$ riešime rovnicu

$$(-i\partial_x - a)(-i\partial_x - a)\psi_1(x) = 0, \tag{4.65}$$

$$-\psi_1''(x) + 2ia\psi_1'(x) + ia'\psi_1(x) + a^2\psi_1(x) = 0, \tag{4.66}$$

ide o lineárnu diferenciálnu rovnicu 2. rádu. Použijeme substitúciu $\psi(x) = e^{\kappa x}$,

$$-\kappa^2 + 2ai\kappa + ia' + a^2 = 0, \tag{4.67}$$

ktorej riešeniami sú

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= ai - \sqrt{ia'}, \\ \kappa_2 &= ai + \sqrt{ia'}. \end{aligned} \tag{4.68}$$

ψ_1 je v tvare

$$\psi_1(x) = De^{aix - \sqrt{ia'}x} + Be^{aix + \sqrt{ia'}x}. \tag{4.69}$$

Zistíme konštantu D pomocou periodickej okrajovej podmienky,

$$D = \frac{B(1 - e^{2ai\pi + 2\sqrt{ia'}\pi})}{e^{2ai\pi} - e^{\sqrt{ia'}\pi}}. \tag{4.70}$$

Za pomoci ψ_1 zistíme ψ_2 dosadením do (4.43),

$$(-i\partial_x - a)\psi_2(x) = -2m\psi_1, \tag{4.71}$$

$$\psi_2'(x) - ia\psi_2(x) = -2im(De^{aix - \sqrt{ia'}x} + Be^{aix + \sqrt{ia'}x}). \tag{4.72}$$

Použijeme metódu variácie konštánt. Riešením rovnice (4.72) bez pravej strany je

$$\psi_2(x) = Ce^{iax}, \tag{4.73}$$

ktoré následne dosadíme späť do (4.72),

$$C'e^{aix} + iaCe^{aix} - iaCe^{aix} = -2im(De^{aix - \sqrt{ia'}x} + Be^{aix + \sqrt{ia'}x}). \tag{4.74}$$

Konštanta C je potom

$$C = -2im(D\frac{e^{-\sqrt{ia'}x}}{-\sqrt{ia'}} + B\frac{e^{\sqrt{ia'}x}}{\sqrt{ia'}}) + K \tag{4.75}$$

a

$$\psi_2(x) = -2im(D\frac{e^{iax-\sqrt{ia'}x}}{-\sqrt{ia'}} + B\frac{e^{iax+\sqrt{ia'}x}}{\sqrt{ia'}}) + K. \tag{4.76}$$

Znovu využijeme periodickú okrajovú podmienku,

$$D(e^{-ia\pi+\sqrt{ia'}\pi} - e^{ia\pi-\sqrt{ia'}\pi}) + B(e^{ia\pi+\sqrt{ia'}\pi} - e^{-ia\pi-\sqrt{ia'}\pi}) = 0, \tag{4.77}$$

kde D poznáme z (4.70), potom

$$B\left[\frac{(1-e^{2ai\pi+2\sqrt{ia'}\pi})}{e^{2ai\pi}-e^{\sqrt{ia'}\pi}}(e^{-ia\pi+\sqrt{ia'}\pi} - e^{ia\pi-\sqrt{ia'}\pi}) + (e^{ia\pi+\sqrt{ia'}\pi} - e^{-ia\pi-\sqrt{ia'}\pi})\right] = 0, \tag{4.78}$$

z čoho plynie, že B musí byť rovné 0, to znamená, že D je taktiež nula. Potom $\psi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, čo je fyzikálne nezaujímavý prípad.

4.2.2 Ortogonalita vlastných vektorov

Preskúmame pár vlastností operátoru D_a. Chceli by sme sa dozvedieť, kedy budú vlastné funkcie operátoru D_a odpovedajúce rôznym vlastným hodnotám ortogonálne. Operátor D_a je samozdružený, práve keď $\operatorname{Im} a = 0$. Aby boli vlastné vektory ψ_n ortogonálne, stačí aby bol operátor D_a normálny. Pre častice s kladnou hmotnosťou m bude operátor D_a normálny, práve keď spĺňa

$$[D_a|D_a^*] = D_a D_a^* - D_a^* D_a = 0. \tag{4.79}$$

Dosadením za operátory D_a a D_a^* dostaneme vzťah

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix} m & -i\partial_x - a \\ -i\partial_x - a & -m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & -i\partial_x - \overline{a} \\ -i\partial_x - \overline{a} & -m \end{pmatrix} \\ -\begin{pmatrix} m & -i\partial_x - \overline{a} \\ -i\partial_x - \overline{a} & -m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & -i\partial_x - a \\ -i\partial_x - a & -m \end{pmatrix} = 0,\end{gathered} \tag{4.80}$$

ktorý je po maticovom roznásobení ekvivalentný

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix} m^2 + (-i\partial_x - a)(-i\partial_x - \overline{a}) & (-i\partial_x - \overline{a})m - (-i\partial_x - a)m \\ (-i\partial_x - a)m - (-i\partial_x - \overline{a})m & m^2 + (-i\partial_x - a)(-i\partial_x - \overline{a}) \end{pmatrix} \\ -\begin{pmatrix} m^2 + (-i\partial_x - \overline{a})(-i\partial_x - a) & (-i\partial_x - a)m - (-i\partial_x - \overline{a})m \\ (-i\partial_x - \overline{a})m - (-i\partial_x - a)m & m^2 + (-i\partial_x - \overline{a})(-i\partial_x - a) \end{pmatrix} = 0.\end{gathered} \tag{4.81}$$

Úpravou maticových členov získavame

$$\begin{pmatrix} ia' - i\overline{a}' & 2m(a-\overline{a}) \\ 2m(\overline{a}-a) & i\overline{a}' - ia' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\operatorname{Im} a' & 4im \operatorname{Im} a \\ -4im \operatorname{Im} a & -2\operatorname{Im} a' \end{pmatrix} = 0. \tag{4.82}$$

Z toho vyplýva, že Diracov operátor D_a so striktne kladnou hmotou je normálny vtedy a len vtedy, pokiaľ $\operatorname{Im} a = 0$. Pre neutrína ($m = 0$) je postačujúcou a nutnou podmienkou $\operatorname{Im} a = konst$. Z tohto zistenia vyplýva nasledujúca veta.

Veta 4.2.1. *Pre striktne kladné hodnoty m je operátor D_a normálny práve vtedy, keď je samozdružený.*

Obecne (neuvažujúc neutríno) by sme predpokladali, že vlastné vektory operátoru D_a odpovedajúce rôznym vlastným hodnotám budú ortogonálne vtedy a len vtedy, keď $\operatorname{Im} a = 0$. Pozrime sa však na ich skalárny súčin

$$\langle \psi_k | \psi_l \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\psi_k} \psi_l \mathrm{d}x. \tag{4.83}$$

Počítame integrál

$$\int_{-\pi}^{\pi} \begin{pmatrix} \sqrt{\overline{\lambda_k} + m} & \sqrt{\overline{\lambda_k} - m} \end{pmatrix} e^{-i(x\sqrt{\overline{\lambda_k}^2 - m^2} + \overline{A(x)})} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_l + m} \\ \sqrt{\lambda_l - m} \end{pmatrix} e^{i(x\sqrt{\lambda_l^2 - m^2} + A(x))}$$

$$= (\sqrt{\overline{\lambda_k} + m}\sqrt{\lambda_l + m} + \sqrt{\overline{\lambda_k} - m}\sqrt{\lambda_l - m}) \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix(\sqrt{\lambda_l^2 - m^2} - \sqrt{\overline{\lambda_k}^2 - m^2})} e^{i(A(x) - \overline{A(x)})},$$

pokiaľ $\operatorname{Im} a(x) = konst$, potom člen $e^{i(A(x) - \overline{A(x)})} = konst$ a môžme ho vytknúť pred integrál, ktorý už následne vieme spočítať,

$$= (\sqrt{\overline{\lambda_k} + m}\sqrt{\lambda_l + m} + \sqrt{\overline{\lambda_k} - m}\sqrt{\lambda_l - m})\, e^{i(A - \overline{A})} \left[\frac{e^{ix(\sqrt{\lambda_l^2 - m^2} - \sqrt{\overline{\lambda_k}^2 - m^2})}}{(\sqrt{\lambda_l^2 - m^2} - \sqrt{\overline{\lambda_k}^2 - m^2})} \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= (\sqrt{\overline{\lambda_k} + m}\sqrt{\lambda_l + m} + \sqrt{\overline{\lambda_k} - m}\sqrt{\lambda_l - m})\, e^{i(A - \overline{A})} \frac{2\sin(\pi(\sqrt{\lambda_l^2 - m^2} - \sqrt{\overline{\lambda_k}^2 - m^2}))}{\sqrt{\lambda_l^2 - m^2} - \sqrt{\overline{\lambda_k}^2 - m^2}}.$$

Dosadením za vlastné hodnoty dostávame výraz

$$(\sqrt{\overline{\lambda_k} + m}\sqrt{\lambda_l + m} + \sqrt{\overline{\lambda_k} - m}\sqrt{\lambda_l - m})\, e^{i(A - \overline{A})} \frac{2\sin(\pi(l - \langle a \rangle - (k - \overline{\langle a \rangle})))}{l - \langle a \rangle - (k - \overline{\langle a \rangle})}.$$

Vidíme, že keď $\mathrm{Im}\langle a\rangle \in \mathbb{Z}$ potom bude skalárny súčin $\langle\psi_k|\psi_l\rangle = 0$.

To znamená, že nebude platiť ekvivalencia, $\mathrm{Im}\, a = 0 \iff$ vlastné vektory ψ_n sú ortogonálne. Dostali sme prípad, kedy stačí aby bola $\mathrm{Im}\, a$ konštantná (pokojne nenulová). Vlastné vektory ψ_n nie sú obecne ortogonálne avšak $\mathrm{Im}\, a = 0$ nie je nevyhnutnou podmienkou ortogonality. Platí teda nasledujúca veta.

Veta 4.2.2. *Nech ψ_n sú vlastné vektory operátoru D_a. Keď $\mathrm{Im}\, a = 0$ potom sú ψ_n ortogonálne.*

4.2.3 Kvázi samozdruženosť a bazické vlastnosti

Veta 4.2.3. *Operátor D_a má nasledujúce vlastnosti:*

(1) Pre operátor D_a platí podobnostná transformácia

$$\Omega_a D_a \Omega_a^{-1} = D_{\langle a\rangle}, \tag{4.84}$$

kde

$$(\Omega_a\psi)(x) := \begin{pmatrix} \exp(i\langle a\rangle x - iA(x)) & 0 \\ 0 & \exp(i\langle a\rangle x - iA(x)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \tag{4.85}$$

s

$$A(x) = \int_{-\pi}^{x} a(y)\mathrm{d}y \quad a \quad \langle a\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} a(x)\mathrm{d}x. \tag{4.86}$$

(2) Operátor D_a je kvázi samozdružený vtedy a len vtedy, keď

$$\mathrm{Im}\langle a\rangle = 0 \tag{4.87}$$

s metrickým operátorom

$$(\Theta\psi)(x) := \begin{pmatrix} \exp\left(2\,\mathrm{Im}\, A(x)\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(2\,\mathrm{Im}\, A(x)\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}. \tag{4.88}$$

(3) Vlastné vektory kvázi samozdruženého operátoru D_a tvoria Rieszovu bázu, ale netvoria Barinu bázu pokiaľ neplatí $\mathrm{Im}\, a = 0$.

Poznámka. Môžeme si všimnúť, že operátor D_a je vždy podobný normálnemu operátoru $D_{\langle a\rangle}$, bezohľadu na to či je $\mathrm{Im}\langle a\rangle = 0$.

Bod číslo *(1)* overíme analogickým spôsobom ako v predošlej podkapitole. Ω_a predpokladáme v tvare $e^f\mathbb{I}$. Riešime rovnicu

$$\begin{pmatrix} e^f & 0 \\ 0 & e^f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & -i\partial_x - a \\ -i\partial_x - a & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-f} & 0 \\ 0 & e^{-f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & -i\partial_x - \langle a\rangle \\ -i\partial_x - \langle a\rangle & -m \end{pmatrix}, \tag{4.89}$$

ktorá je po maticovom roznásobení ekvivalentná rovici

$$\begin{pmatrix} m & -i\partial_x + if' - a \\ -i\partial_x + if' - a & -m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & -i\partial_x - \langle a\rangle \\ -i\partial_x - \langle a\rangle & -m \end{pmatrix}. \tag{4.90}$$

Potom

$$f(x) = i\langle a\rangle x - iA(x) \tag{4.91}$$

a

$$\Omega_a = \begin{pmatrix} \exp(i\langle a\rangle x - iA(x)) & 0 \\ 0 & \exp(i\langle a\rangle x - iA(x)) \end{pmatrix}. \tag{4.92}$$

Zostáva nám ukázať, že pre $\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$, kde $\phi = \Omega_a \psi$ sa nemenia periodické okrajové podmienky.

$$\phi(\pi) = \begin{pmatrix} \exp(i\pi\langle a\rangle - i\int_{-\pi}^{\pi} a(y)\mathrm{d}y)\psi_1(\pi) \\ \exp(i\pi\langle a\rangle - i\int_{-\pi}^{\pi} a(y)\mathrm{d}y)\psi_2(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(i\pi\langle a\rangle - i2\pi\langle a\rangle)\psi_1(\pi) \\ \exp(i\pi\langle a\rangle - i2\pi\langle a\rangle)\psi_2(\pi) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \exp(-i\pi\langle a\rangle)\psi_1(\pi) \\ \exp(-i\pi\langle a\rangle)\psi_2(\pi) \end{pmatrix}, \tag{4.93}$$

$$\phi(-\pi) = \begin{pmatrix} \exp(-i\pi\langle a\rangle)\psi_1(-\pi) \\ \exp(-i\pi\langle a\rangle)\psi_2(-\pi) \end{pmatrix}. \tag{4.94}$$

To znamená, že keď $\psi(\pi) = \psi(-\pi)$ potom i $\phi(\pi) = \phi(-\pi)$.

Pokiaľ $\operatorname{Im} a = 0$, potom je operátor Ω_a unitárny. Operátor D_a je závislý na magnetickom poli, reprezentovaným funkciou, tento operátor je ale unitárne ekvivalentný operátoru s konštantným magnetickým poľom. Teda v prípade, že $\operatorname{Im} a = 0$ nám stačí uvažovať konštantné magnetické pole. Pokiaľ $\operatorname{Im} a \neq 0$, operátor už nebude unitárne ekvivalentný, ale ide o invertibilnú transformáciu, bude podobný operátoru s konštantným magnetickým poľom, preto aj v tomto prípade stačí uvažovať konštantné magnetické pole.

Pozrieme sa na bod číslo *(2)* Vety 4.2.1. Predpokladajme, že operátor D_a je kvázi samozdružený, to znamená, že platí $D_a^* = \Theta D_a \Theta^{-1}$, (kde Θ je kladný, obmedzený a obmedzene invertibilný metrický operátor), potom je podobný samozdruženému operátoru $\Theta^{\frac{1}{2}} D_a \Theta^{-\frac{1}{2}}$. Z toho plynie, že spektrum D_a musí byť reálne. Ako môžme vidieť spektrum operátoru D_a je reálne, práve keď $\operatorname{Im}\langle a\rangle = 0$. Naopak keď budeme predpokladať $\operatorname{Im}\langle a\rangle = 0$, potom je operátor D_a podobný samozdruženému operátoru $D_{\langle a\rangle}$ a platí vzťah $D_a^* = \Theta D_a \Theta$, kde $\Theta = \Omega^*\Omega$, ktorý sa zhoduje s (4.88).

Pre overenie bodu (*3*) budeme predpokladať $\operatorname{Im}\langle a\rangle = 0$, potom $\lambda_n = \overline{\lambda_n}$. Vlastné vektory $\psi_n(x)$ operátoru D_a a vlastné vektory ϕ_n operátoru D_a^* budú v tvare:

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\lambda_n}} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_n + m} \\ \sqrt{\lambda_n - m} \end{pmatrix} \exp\bigl(i\sqrt{\lambda_n^2 - m^2}x + iA(x)\bigr), \tag{4.95}$$

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\lambda_n}} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_n + m} \\ \sqrt{\lambda_n - m} \end{pmatrix} \exp\bigl(i\sqrt{\lambda_n^2 - m^2}x + i\overline{A(x)}\bigr). \tag{4.96}$$

Preto, (4.95) a (4.96) môžeme zapísať pomocou ortonormálnej báze $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ na $L^2((-\pi,\pi))$ a pomocou kladnej a obmedzenej funkcie $\xi(x)$ na $[-\pi,\pi]$,

$$\begin{aligned} \psi_n &= \xi(x)e_n(x), \\ \phi_n &= \xi^{-1}(x)e_n(x), \end{aligned} \tag{4.97}$$

kde

$$\xi(x) := \exp(-\operatorname{Im} A(x)) \tag{4.98}$$

a

$$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\lambda_n}} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_n + m} \\ \sqrt{\lambda_n - m} \end{pmatrix} \exp\bigl(i\sqrt{\lambda_n^2 - m^2}x + i \operatorname{Re} A(x)\bigr). \tag{4.99}$$

Systém $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ je úplný, preto je úplný i $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ na $L^2((-\pi,\pi))$ a z relácie biortonormality vieme, že je i najmenším úplným systémom.
Vďaka úplnosti a tomu, že $\psi_n = \xi(x)e_n(x)$ vieme, že vlastné vektory operátoru D_a s podmienkou $\operatorname{Im}\langle a\rangle = 0$, tvoria Rieszovu bázu na $L^2((-\pi,\pi))$. Netvoria však Barinu bázu pokiaľ $\operatorname{Im} a \neq 0$. Ukážeme, že biortonormálne bázy $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ a $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ si nie sú kvadraticky blízke. Zistíme normu $\|\psi_n - \phi_n\|$,

$$\begin{aligned} \|\psi_n - \phi_n\| = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4\pi\lambda_n} \left(\sqrt{\lambda_n + m}\sqrt{\lambda_n - m}\right) \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_n + m} \\ \sqrt{\lambda_n - m} \end{pmatrix} \\ \cdot \left[e^{-i\sqrt{\lambda_n^2 - m^2}x - i\overline{A(x)}} - e^{-i\sqrt{\lambda_n^2 - m^2}x - iA(x)}\right] \left[e^{i\sqrt{\lambda_n^2 - m^2}x + iA(x)} - e^{i\sqrt{\lambda_n^2 - m^2}x + i\overline{A(x)}}\right] \end{aligned}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \left[e^{-2\operatorname{Im} A(x)} + e^{2\operatorname{Im} A(x)} - 2\right]. \tag{4.100}$$

Potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\psi_n - \phi_n\|^2 = \infty, \tag{4.101}$$

okrem situácie, kedy $\operatorname{Im} a = 0$.

Záver

V tejto práci sme sa zaujímali o nesamozdružené operátory známe z kvantovej mechaniky. V nerelativistickom prípade sme si predstavili operátor hybnosti P_a a Schrödingerov operátor H_a s komplexným magnetickým poľom a. Pre prípad relativistickej častice sme sa pozreli na Diracov operátor D_a s komplexným magnetickým poľom a.

Máme triedu operátorov, ktorých vlastné vektory odpovedajúce príslušným vlastným hodnotám netvoria žiadnu z báz Hilbertovho priestoru, ktoré sme si definovali. Za určitých podmienok sú však tieto operátory kvázi samozdružené. V tretej kapitole sme dokázali, že vlastné funkcie operátoru podobného samozdruženému tvoria Rieszovu bázu, a keďže Rieszova báza je báza ekvivalentná k ortogonálnej báze, tak operátory podobné samozdruženým operátorom majú tiež dobrú fyzikálnu interpretáciu.

Pripomenuli sme si vlastnosti nerelativistického operátoru hybnosti P_a z [14] a bližšie sme skúmali vlastnoti relativistického Diracovho operátoru D_a. Ukázali sme si ako vyzerájú ich vlastné čísla a vlastné vektory. To, že je operátor kvázi samozdružený obecne nie je jednoduché ukázať, v tomto zmysle môžeme Diracov operátor spolu s operátorom hybnosti považovať za najjednoduchšie netriviálne príklady kvázi samozdružených operátorov. Zistili sme, že D_a je kvázi samozdružený práve keď $\mathrm{Im}\langle a \rangle = 0$. Ukázali sme si, že s touto podmienkou tvoria vlastné funkcie D_a Rieszovu bázu, ale už netvoria Barinu bázu.

Ďalej sme študovali ortogonalitu vlastných vektorov operátoru D_a. Zistili sme, že operátor D_a s kladnou hmotou m bude normálny vtedy a len vtedy, keď je samozdružený, to znamená, keď $\mathrm{Im}\, a = 0$, pre neutríno stačí aby $\mathrm{Im}\, a = konst$. Ďalej sme zistili, že $\mathrm{Im}\, a = 0$ nie je nutnou podmienkou otrogonality vlastných vektorov odpovedajúcich rôznym vlastným číslam operátoru D_a, to znamená, že operátor D_a môže byť nesamozdružený a nenormálny, ale pokiaľ bude mať imaginárne pole určitú hodnotu, sú jeho vlastné vektory ortogonálne.

V tejto práci sme Diracov operátor interpretovali na kružnici, používali sme periodické hraničné podmienky, pre ďaľšie skúmanie je možné uvažovať neperiodické hraničné podmienky. Ďalšou možnonsťou je uvažovať miesto intervalu $(-\pi, \pi)$ celú reálnu osu. V takom prípade sa operátor, ktorý hral rolu metriky stane neobmedzeným operátorom.

Literatúra

[1] I. Jex, I. Štoll, J. Tolar, *Klasická teoretická fyzika*, Praha, Karolinum (2017) ISBN: 978-80-246-3545-3.

[2] B. Sedlák, I. Štoll, *Elektřina a magnetismus*, Praha, Academia (2002) ISBN: 80-200-1004-1.

[3] L. Hlavatý, M. Štefaňák, *Slabikář kvantové mechaniky*, Študijný text k predmetu Kvantová mechanika, CTU FNSPE (2018), dostupné na: https://physics.fjfi.cvut.cz/files/predmety/02KVAN/02KVAN.

[4] J. L. Jaramillo, *An Introduction to Local Black Hole Horizons in the 3+1 Approach to General Relativity.* International Journal of Modern Physics D, Vol. 20, No. 11 (2011).

[5] J. L. Jaramillo, *Black Hole Horizons and Quantum Charged Particles.* Classical and Quantum Gravity, Vol. 32, No. 13 (2015).

[6] L. Andersson, M. Mars, W.Simon, *Local existence of dynamical and trapping horizons*, Phys. Rev. Lett. 95 (2005).

[7] J. Formánek, *Úvod do relativistické kvantové mechaniky a kvantové teorie pole*, Karolinum (2000) ISBN: 80-246-0062-5.

[8] B. Thaller, *The Dirac Equation*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1992).

[9] P. Dirac, *The quantum theory of the electron*, In Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, volume 117, pages 610–624. The Royal Society, (1928).

[10] D. J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*, Pearson Education, Cambridge University Press, New Jersey (1995) ISBN: 978-1-107-17986-8.

[11] Y. Aharonov, D. Bohm, *Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory*, Phys. Rev. 115, 485, Bristol (1959).

[12] C. M. Bender, S. Boettcher, *Real Spectra in Non-Hermitian Hamiltonians Having $\mathcal{PT}$ Symmetry*, Phys. Rev. Lett. 80, 5243 (1998).

[13] I. C. Gohberg, M. G. Kreĭn, A. Feinstein, *Introduction to the theory of nonselfadjoint operators in Hilbert space*, American mathematical Society,Providence, (1969) ISBN: 978-0-8218-1568-7.

[14] D. Krejčiřík, *Complex magnetic fields: An improved Hardy-Laptev-Weidl inequality and quasi-self-adjointness*, SIAM J. Math. Anal. 51, 790-807 (2019).

[15] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, New York ,Academic Press (1975).

[16] C. N. Yang, T. D. Lee, *Statistical theory of equations of state and phase transitions. l. theory of condensation*, Phys. Rev., vol. 87, pp. 410–419 (1952).

[17] T. D. Lee, C. N. Yang, *Statistical theory of equations of state and phase transitions. ll. lattice gas and ising model*, Phys. Rev., vol. 87, pp. 410–419 (1952).

[18] Xinhua Peng, Hui Zhou, Bo-Bo Wei, Jiangyu Cui, Jiangfeng Du, and Ren-Bao Liu, *Experimental Observation of Lee-Yang Zeros*, Phys. Rev. Lett. 114, 010601 (2015).

[19] F. Scholtz, H. Geyer, F. Hahne, *Quasi-hermitian operators in quantum mechanics and the variational principle,* Annals of Physics, Volume 213, Issue 1, p. 74-101 (1992).

[20] J. Dieudonné, *Quasi-Hermitian operators*, Proc. Internat. Sympos. Linear Spaces (Jerusalem, 1960), Pergamon, Oxford, 115122 (1961).

[21] D. Krejčiřík, P. Siegl, M. Tater, J. Viola, *Pseudospectra in non-Hermitian quantum mechanics*, Journal of Mathematical Physics 56, 103513 (2015).

[22] A. Mostafazadeh, *Pseudo-Hermiticity versus PT Symmetry: The necessary condition for the reality of the spectrum of a non-Hermitian Hamiltonian*,Journal of Mathematical Physics 43, 205-214 (2002).

[23] A. Mostafazadeh, *Pseudo-Hermiticity versus PT-Symmetry II: A complete characterizatio n of non-Hermitian Hamiltonians with a real spectrum*,Journal of Mathematical Physics 43,2814-2816 (2002).

[24] A. Mostafazadeh, *Pseudo-Hermiticity versus PT-Symmetry III: Equivalence of pseudo-Her miticity and the presence of antilinear symmetries*,Journal of Mathematical Physics 43, 3944-3951 (2002).

[25] M. Havlíček, P. Exner, J. Blank, *Lineární operátory v kvantové fyzice*, Praha, Karolinum (1993).

[26] P. Šťovíček, *Prednášky z predmetu Funkcionální analýza 2 v akademickom roku 2020/2021*, Praha, CTU FNSPE.

[27] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics Vol.4*,New York, Academic Press (1978) ISBN: 978-0125850049.

[28] D. Krejcirik, N. Raymond, J. Royer, P. Siegl, *Non-accretive Schrödinger operators and exponential decay of their eigenfunctions*,Israel J. Math. 221 (2017).

[29] E. B. Davies, *Linear Operators and their Spectra*,Cambridge University Press (2010) ISBN: 9780511618864.