

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra fyziky

Obor: Experimentální jaderná a částicová fyzika



Vývoj hybnostních anizotropií ve srážkách těžkých iontů

The evolution of momentum anisotropies in heavy-ion collisions

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Vypracoval: Bc. Tomáš Novák
Vedoucí práce: prof. Dr. Boris Tomášik
Rok: 2021



Katedra: fyziky

Akademický rok: 2020/2021

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Student: Bc. Tomáš Novák

Studijní program: Aplikace přírodních věd

Obor: Jaderná a částicová fyzika

Název práce: Vývoj hybnostních anizotropií ve srážkách těžkých iontů
(česky)

Název práce: The evolution of momentum anisotropies in heavy-ion collisions
(anglicky)

Pokyny pro vypracování:

1. Nastudujte fenomenologii anizotropií rozdělení hadronů a jejich souvislost s anizotropiemi v expanzi horké hmoty
2. Seznamte se s ovládním hydrodynamických simulací v modelu vHLE
3. Upravte model vHLE tak, aby během simulace počítal a vypisoval prostorové a hybnostní anizotropie horké hmoty
4. Na sadě simulací studujte vývoj hybnostních anizotropií různých řádů a identifikujte jejich vztah k anizotropiím rozdělení hmoty v počátečních podmínkách. Pokuste se ve vývoji identifikovat případné atraktory.

Doporučená literatura:

1. S. Floerchinger, U.A. Wiedemann: Kinetic freeze-out, particle spectra, and harmonic flow coefficients in mode by mode hydrodynamics, Phys. Rev. C 89 (2014) 034914
2. H. Song, U. Heinz: Multiplicity scaling in ideal and viscous hydrodynamics, Phys. Rev. C 78 (2008) 024902
3. H. Niemi, et al.: Event-by-event distributions of azimuthal asymmetries in ultrarelativistic heavy-ion collisions, Phys. Rev. C 87 (2013) 054901
4. Iu. Karpenko, P. Huovinen, M. Bleicher: A 3+1 dimensional viscous hydrodynamic code for relativistic heavy ion collisions, Comput. Phys. Commun 185 (2014) 3016-3027
5. Iu. Karpenko, P. Huovinen, H. Petersen, M. Bleicher: Estimation of the shear viscosity at finite net-baryon density from A+A collision data at $\sqrt{s_{NN}} = 7.7 - 200$ GeV, Physical Review 91 (2015) 064901

Jméno a pracoviště vedoucího diplomové práce: prof. Dr. Boris Tomášik

školitel specialista: prof. Dr. Ing. Michal Beneš, Dr. Iurii Karpenko

Datum zadání diplomové práce: 23.10.2020

Termín odevzdání diplomové práce: 03.05.2021

Doba platnosti zadání je dva roky od data zadání.

.....
garant oboru

.....
vedoucí katedry

.....
děkan

V Praze dne 23.10.2020

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji diplomovou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v příloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti použití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne

.....

Bc. Tomáš Novák

Poděkování

Chci poděkovat panu prof. Dr. Borisovi Tomášikovi za nasměrování, vedení a konzultování této práce. Stejný vděk patří i Dr. Iurii Karpenkovi za jeho konzultace kódu i teorie.

Bc. Tomáš Novák

Název práce:

Vývoj hybnostních anizotropií ve srážkách těžkých iontů

Autor: Bc. Tomáš Novák

Studijní program: Aplikace přírodních věd

Obor: Experimentální jaderná a částicová fyzika

Druh práce: Diplomová práce

Vedoucí práce: prof. Dr. Boris Tomášik

Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze

Konzultant: Dr. Iurii Karpenko, prof. Dr. Ing Michal Beneš

Abstrakt: Uvedeme čtenáře do kontextu studia kvark-gluonového plazmatu spolu se základy relativistické hydrodynamiky. Ukážeme již známé prostorové a hybnostní anizotropie expanze kvark-gluonového plazmatu a zadefinujeme nové hybnostní anizotropie v řádech m a n spolu s anizotropiemi potenciálu. Tyto veličiny jsou implementovány do hydrodynamického kódu `vHLLÉ` a jsou sledovány v *event-by-event* simulacích pro nastavení odpovídající srážkám Au + Au na urychlovači RHIC při energii $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV. Ke generování počátečních podmínek využijeme volně dostupný kód `GLISSANDO 2`. Vyřkneme domněnku o vztahu anizotropií a fázových proměnných hydrodynamického systému, kdy na sadě korelací budeme naši domněnku ověřovat.

Klíčová slova: kvark-gluonové plazma, hybnostní anizotropie, prostorová anizotropie, hydrodynamické simulace *event-by-event*, `vHLLÉ`

Title:

The evolution of momentum anisotropies in heavy-ion collisions

Author: Bc. Tomáš Novák

Abstract: We will introduce the reader to the context of the quark-gluon plasma and its relativistic hydrodynamics. We will show existing spatial and momentum anisotropies of an expansion of the quark-gluon plasma and a new definition of the momentum anisotropy in orders m and n including anisotropies of potential. Variables are implemented into hydrodynamical code `vHLLÉ` and are observed event-by-event in setup of $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV Au + Au collisions at RHIC. To generate initial conditions we have used the free available code `GLISSANDO 2`. We have made a conjecture about a relation of the anisotropies and the phase variables of a hydrodynamical system, the conjecture will be tested on a set of correlations.

Key words: quark-gluon plasma, momentum anisotropy, spatial anisotropy, hydrodynamical simulations *event-by-event*, `vHLLÉ`

Obsah

Úvod	11
1 Kvar-k-gluonové plazma ve srážkách těžkých iontů	13
1.1 Nové skupenství hmoty	13
1.1.1 Fázový diagram	15
1.2 Průběh experimentů ultra-relativistických jádro-jaderných srážek	18
1.2.1 Charakterizace kolektivního toku	20
1.2.2 Produkce částic z termální rovnováhy	23
2 Hydrodynamika kvar-k-gluonového plazmatu	27
2.1 Klasická hydrodynamika	27
2.1.1 Hydrostatika	27
2.1.2 Pohybové rovnice	28
2.1.3 Tenzor napětí	29
2.1.4 Eulerovy rovnice	29
2.1.5 Navierovy-Stokesovy rovnice	30
2.2 Relativistická hydrodynamika	30
2.2.1 Tenzor energie a hybnosti	30
2.2.2 Relativistické Eulerovy rovnice	33
2.2.3 Relativistická Navierova-Stokesova rovnice	37
2.2.4 Smykové a objemové napětí, efektivní tlak	38
3 Fenomenologie anizotropií hydrodynamické fáze	41
3.1 Prostorové anizotropie	41
3.1.1 Škálování eliptického toku s excentricitou	42
3.1.2 Korelace prostorových anizotropií ϵ_n^x s v_n	44
3.2 Hybnostní anizotropie	44
3.2.1 Prvky tenzoru energie a hybnosti	44
3.2.2 Hybnostní anizotropie s harmonickými vahami	49
3.3 Anizotropie potenciálu	50
3.4 Vztah anizotropií a fázových proměnných dynamického systému	51
4 Numerická implementace	55
4.1 Generování počátečních podmínek pomocí GLISSANDO 2	55
4.1.1 Generování pozic nukleonů v jádře	56
4.1.2 Srážky a deponace energie	56

4.2	Numerické simulace hydrodynamické fáze ve vHLLÉ	57
5	Analýza výsledků	61
5.1	Porovnání nastavení hydrodynamiky parametrem η/s	62
5.2	Analýza více událostí v nastavení $\eta/s = 0,08$	66
	Závěr	78
	Literatura	79

Úvod

V této práci se soustředíme na *kvark-gluonové plazma*, které je někdy nazývané také novým skupenstvím hmoty. Oproti iontovému plazmatu – čtvrtému skupenství hmoty, se odlišuje zcela zásadně. Namísto směsi kladných iontů a elektronů interagujících elektromagneticky uvažujeme směs kvarků a gluonů interagujících dle pravidel *kvantové chromodynamiky*. Z teoretických předpovědí a numerických simulací bylo již dříve odhadováno, že při vysokých energiích a hustotách by mohlo vzniknout slabě vázané médium. Toto tvrzení se zejména opírá o *asymptotickou volnost* kvantové chromodynamiky. Experimenty se ukázalo, že namísto modelu slabě interagujícího Fermiho plynu je kvark-gluonové plazma silněji vázané médium – kapalina, navíc s extrémně nízkými viskozitami.

Známky formace kvark-gluonového plazmatu byly poprvé pozorovány ve srážkách těžkých iontů na SPS (*Super Proton Synchrotron*) v CERN. Dostatečné důkazy přinesl RHIC (*Relativistic Heavy Ion Collider*) v BNL, právě zde prezentované výsledky simulací budou odpovídat experimentům na RHIC při $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV. Zploštělá jádra se v experimentech sráží necentrálně, čímž vytvářejí eliptický profil deponované energie a počáteční kvark-gluonové hmoty. Následná kolektivní expanze hmoty v příčné rovině lze vysvětlit hydrodynamickým modelem. Pouze tehdy se azimutální rozdělení hadronů ze simulací shodují s pozorováními.

Studium kvark-gluonového plazmatu je rozsáhlé. V této práci se soustředíme na hydrodynamickou expanzi necentrálních srážek a její charakterizaci pomocí tzv. *veličin anizotropie*. Tyto veličiny postihují rozdíl dané expanze od izotropní expanze z centrálních srážek. Existuje jejich fenomenologie, kdy nejvíce používané jsou *prostorové anizotropie* definované ve více řádech v m, n a různé *hybnostní anizotropie* postrádající koherentní definici. Proto budeme hybnostní anizotropie a *anizotropie potenciálu* nově definovat analogicky jako u prostorových anizotropií v řádech m, n . Činíme tak pro možnost sledování jejich vzájemných korelací během hydrodynamického vývoje. Kvůli studiu dynamiky nebudeme výsledky simulací středovat přes události, ale analyzujeme výsledky tzv. *event-by-event*, tedy každou událost jednotlivě.

V první kapitole prezentujeme základní poznatky o kvark-gluonovém plazmatu – odhad vázanosti média, vlastnosti z pozorovatelných veličin a průběh typické relativistické srážky těžkých iontů. Uvidíme také sestavený fázový diagram plazmatu.

Ve druhé kapitole stručně konstruujeme klasickou hydrodynamiku, abychom viděli analogie při odvozování pohybových rovnic relativistické hydrodynamiky do prvního řádu. Zaměříme se i na *Bjorkenův model* a ukážeme schéma pro vyšší řády tenzoru energie a hybnosti. Poté bude možné formulovat *Israelovi-Stewartovi rovnice*, jak je

implementováno v námi použitým numerickém hydrodynamickém řešiči vHLLC.

Ve třetí kapitole náhlédáme do zavedených definic prostorových a hybnostních anizotropií. Představíme obecnější definici hybnostní anizotropie v řádech m, n spolu s *anizotropií potenciálu*. Navíc vyřkneme domněnku o vztahu anizotropií a fázových proměnných hydrodynamického systému.

Ve čtvrté kapitole popíšeme použitý hydrodynamický kód vHLLC a generátor počátečních podmínek GLISSANDO 2. Do hydrodynamického kódu vHLLC implementujeme monitorování hybnostních a prostorových anizotropií. Výstupem programu jsou i vybraná dvoudimenzionální hydrodynamická pole.

V poslední kapitole analyzujeme výsledky hydrodynamických simulací 200 eventů s různými fluktuujícími počátečními podmínkami, nastavení odpovídá srážkám Au + Au při $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV a 30-40 % centralitě na urychlovači RHIC.

Kapitola 1

Kvark-gluonové plazma ve srážkách těžkých iontů

V centru našeho zájmu se nachází médium existující v extrémních teplotách a hustotách – kvark-gluonové plazma, použijeme označení QGP – *quark-gluon plasma*. Dle názvu se jedná o směs silně interagujících kvarků a gluonů, které díky své vysoké kinetické energii již nejsou vázány v hadronech. Určité analogie lze pozorovat i s „klasickým“ iontovým plazmatem.

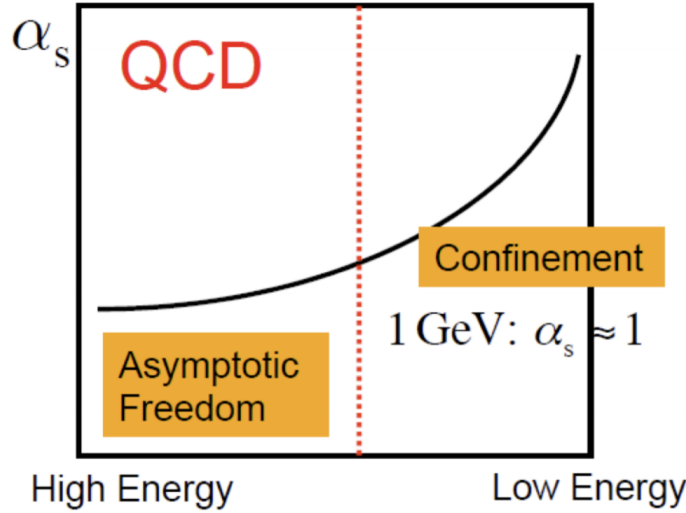
V této kapitole nastíníme teoretické předpovědi existence QGP a jeho prvotně odhadovaných vlastností. Protože QGP je statisticky popsatelný systém, tak nahlédneme na jeho fázový diagram. Dále na experimentální realizace QGP v ultrarelativistických jádro-jaderných srážkách na urychlovači RHIC a na závěry analýzy z pozorovatelných veličin.

1.1 Nové skupenství hmoty

Dle kosmologických pozorování a výsledků standardního modelu částicové fyziky se předpokládá, že na počátku náš vesmír expandoval ze singularity spojené s extrémními hustotami a teplotami. QGP (spolu s leptony) tvořící obsah tohoto raného vesmíru chladlo s postupnou *Hubbleovskou expanzí* až po tzv. *kritickou teplotu* T_c . Poté kvarky a gluony rekombinovaly do již běžně pozorované hadronové hmoty [1].

Kritická teplota $T_c \sim 150$ MeV byla určena v Hagedornových pracích zabývajících se hadronovým plynem. Není náhodou, že je tato kritická teplota blízko hmotností nejlehčích mezonů – π^0, π^\pm s hmotou okolo 134 MeV a 139 MeV. Hagedornova teplota byla interpretovaná jako limitní teplota hmoty, kdy zvyšování teploty by vedlo pouze na produkci nových, těžších částic.

V rámci interakcí v médiu uvažujeme pouze silnou sílu mezi kvarky (u, d, s, ...) a gluony řídicí se *kvantovou chromodynamikou* (QCD). Brzy po objevu *asymptotické volnosti* QCD bylo zřejmé, že při dostatečných teplotách by mohla kvark-gluonová směs tvořit *slabě vázaný systém* podobný *Fermiho plynu* [7]. Asymptotická volnost QCD odpovídá efektu zeslabování vazebné konstanty α_s (relativní síla interakce) na



Obrázek 1.1: Křivka závislosti (1.1). Nenechme se zmást uspořádáním energie na horizontální ose. Je tak učiněno kvůli nepřímé úměře energie participantů a interakční vzdálenosti d , kdy interakční vzdálenost roste nyní přirozeně zleva doprava. [8]

malých vzdálenostech. Malé vzdálenosti interakce se dosahuje vysokou energií (viz. Obr. 1.1), což pro statistický systém odpovídá vysokým teplotám. Závislost vazebné konstanty na energii je

$$\alpha_s \propto \ln^{-1} \left(\frac{E^2}{\Lambda^2} \right), \quad (1.1)$$

kde Λ je experimentálně odvozený parametr a stejně jako konstanta úměry v (1.1) je závislá na počtu energeticky dostupných vnitřních kvarků. Přihlédneme-li navíc k charakteru nasycení silných sil, tak se lze domnívat, že nad $T > T_c$ se kvarky začnou chovat jako „volní“ konstituenti média.

Například dle práce [9] lze teoreticky odhadnout míru vázanosti QGP, tj. zdali se jedná o *slabě* či *silně vázané* médium. Pro iontové plazma definujeme *Coulombův parametr vázanosti*:

$$\Gamma = \frac{\langle E_{pot} \rangle}{\langle E_{kin} \rangle}, \quad (1.2)$$

kde s Coloumbovskou interakcí elektrických nábojů Q v typických vzdálenostech d máme v přirozených jednotkách $\Gamma = Q^2/Td$. Jelikož lze odhadnout vzdálenost $d \simeq (n_k)^{-1/3}$ z hustoty interagujících konstituentů n_k , poté je Coloumbův parametr vázanosti $\Gamma = \Gamma(T, n_k)$, tj. funkcí teploty a hustoty konstituentů. Parametr Γ má jednoduchou interpretaci [9]:

- $\Gamma \ll 1$ je plazma téměř neinteragující systém,
- $\Gamma > 1$ je plazma silně vázané,
- $\Gamma \in \langle 10, 32 \rangle$ říkáme, že plazma je v *kapalné fázi*,
- $\Gamma > 172$ lze očekávat fázový přechod do pevného skupenství.

Realizujeme předešlou analogii míry vázanosti pro QGP. Namísto elektrických nábojů konstituentů uvažujeme součin *Casimirova invariantu silné interakce* C a vazebné konstanty α_s [9]. Vztah (1.2) lze pro QGP zapsat jako:

$$\Gamma_s = \frac{C\alpha_s}{Td}, \quad (1.3)$$

kde Casimirův invariant nabývá pro kvarky hodnoty $C_q = 4/3$ a pro gluony $C_g = 3$.

Ze známého vztahu pro poloměr jádra $r = r_0 A^{1/3}$ v závislosti na počtu nukleonů A ($r_0 = 1.25$ fm) lze snadno odhadnout průměrnou vzdálenost nukleonů ve velkých jádrech. Pro zlato s $A = 197$ máme

$$d_n = n_n^{-1/3} = \left(\frac{4/3 \pi r^3}{A} \right)^{1/3} \simeq 2 \text{ fm},$$

kde n_n je hustota nukleonů v jádře zlata, dovolíme-li si odhadnout hustotu kvarků n_q jako $n_q \simeq 3n_n$, které nesou veškerou hmotu nukleonu, pak typická vzdálenost kvarků činí $d_q \simeq 1,4$ fm. Využijme d_q spolu s $C = (C_q + C_g)/2$ a rozsahem $\alpha_s \in \langle 0, 2; 0, 5 \rangle$ ve vztahu (1.3), poté je hodnota Coulombova parametru vázanosti QGP:

$$\Gamma_s \in \langle 3, 5; 10, 7 \rangle.$$

Srovnáme-li tento výsledek s hodnotami Γ pro iontové plazma, tak QGP odpovídá silně vázanému systému na hraně kapalně fáze.

Tyto odhady jsou však naivní, jelikož neuvažují nezanedbatelnou část hmoty QGP – *mořské kvarky*.

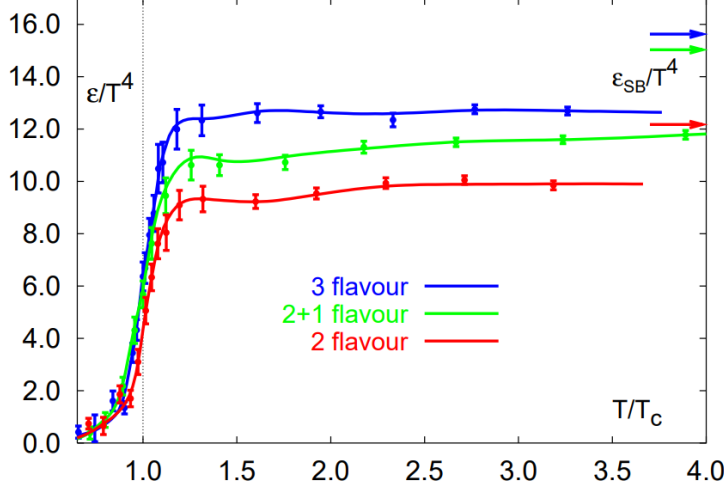
Prozradíme zde, že z pozorování experimentů na urychlovači RHIC (*Relativistic Heavy Ion Collider*) v BNL (*Brookhaven National Laboratory*), USA byla ze spekter hadronů určena hustota energie v QGP $\epsilon \simeq 5$ GeV/fm³ (v jádře $\simeq 0,16$ GeV/fm³) [11]. Z této hustoty energie lze odhadnout vzdálenost konstituentů $d \simeq 0,5$ fm. Míra vázanosti QGP je poté $\Gamma_s \in \langle 10, 30 \rangle$, což již zcela odpovídá kapalně fázi plazmatu.

1.1.1 Fázový diagram

V rámci statistických simulací *kvantového systému na mříži*¹ bylo možné získat několik základních charakteristik QGP. V popisu využíváme termodynamické makroskopické veličiny, jako jsou hustota energie ϵ , tlak p , *chemický potenciál* μ_B , či entropie s , které přes mikrostavy středují dané QCD interakce. Změna charakteru interakcí v závislosti na energii participantů dle (1.1) může vést na fázové přechody makroskopického popisu.

Nahlédněme, že Hagedornova teplota $T_c \simeq 150$ MeV odpovídá dle $\epsilon \sim (7 \pm 1)T^4$ [12] hustotě energie $\epsilon_c \simeq 1$ GeV/fm³. Vzhledem k odhadovaným vzdálenostem konstituentů na počátku formace QGP ~ 1 fm to koresponduje i s hraniční energií $E \sim 1$ GeV při $\alpha_s \simeq 1$ (viz. Obr. 1.1).

¹Kvantové výpočty na mříži – numerická realizace statistického popisu kvantového systému. Závěry simulací jsou extrapolované výsledky z dostupných rozlišených mřížek.



Obrázek 1.2: Závislost poměru ϵ/T^4 na relativní teplotě T/T_c . Barevné šipky v pravém horním rohu značí příslušné limity (1.4). [13]

Při vysokých teplotách předpokládáme, že se škálovaná hustota energie ϵ/T^4 a tlak p/T^4 budou asymptoticky blížit limitě odpovídající relativistickému plynu [15]:

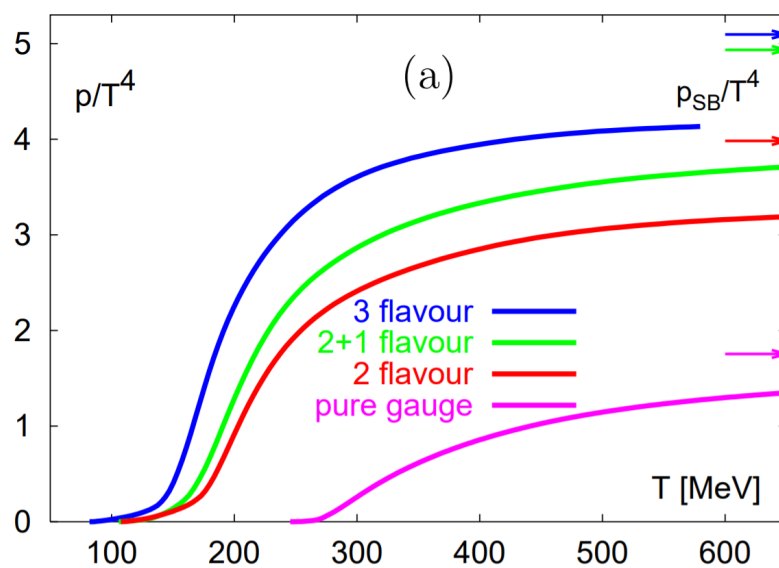
$$\frac{\epsilon}{T^4} = \frac{3p}{T^4} = \left(16 + \frac{21}{2}n_f\right)\frac{\pi^2}{30}, \quad (1.4)$$

kde n_f je počet uvažovaných vůní v modelu. Zřejmě zde využíváme stavové rovnice relativistického plynu $\epsilon = 3p$. Na Obr. 1.2 vidíme průběh poměru ϵ/T^4 v závislosti na relativní teplotě T/T_c . Je patrný prudký růst v okolí $T = T_c$, který odkazuje na možný *spojitý fázový přechod* média, poté se již poměr ϵ/T^4 pomalu přibližuje k limitě (1.4). Poměr p/T^4 v závislosti na teplotě lze vidět na Obr. 1.3. Termodynamické veličiny se na škále $T \simeq (2 - 4)T_c$ liší od těch pro relativistický neinteragující plyn o zhruba 15 % [13], což je ve shodě s představou o přetrvávajících interakcích kvarků.

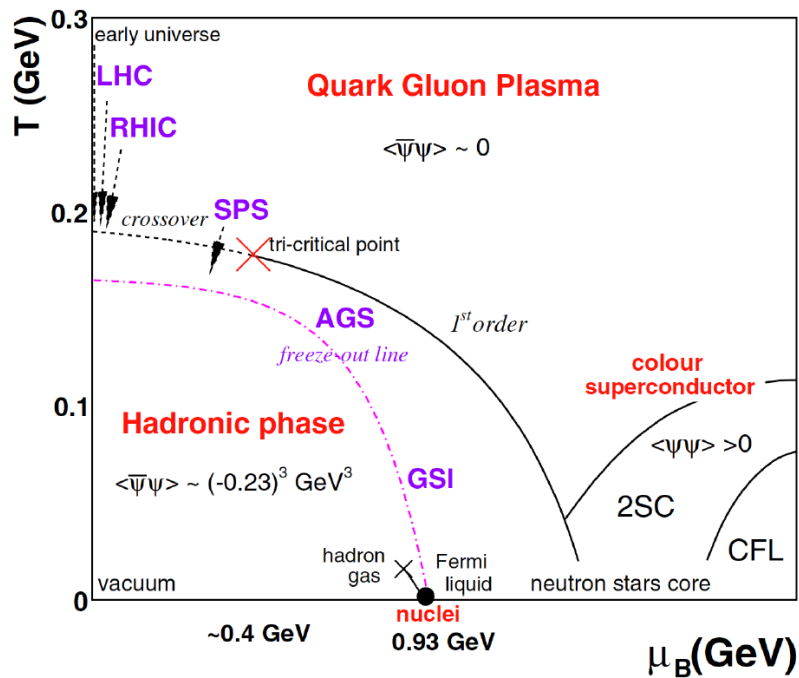
Po teoretických i experimentálních studiích různých fází QGP v závislosti na teplotě a chemickém potenciálu μ_B bylo možné sestavit fázový diagram QGP na Obr. 1.4. Chemický potenciál postihuje rovnováhu hmoty a antihmoty v médiu. Stav $\mu_B \sim 0$ odpovídá ekvivalentnímu zastoupení hmoty a antihmoty. $\mu_B > 0$ signalizuje převahu hmoty. Předpokládáme symetričnost fázového diagramu, proto neuvažujeme část pro $\mu_B < 0$, odpovídající většímu zastoupení antihmoty.

Na Obr. 1.4 můžeme pro nízké teploty a vysoké hustoty hmoty $\mu_B \sim 1$ GeV pozorovat odhadované fáze vázaného obsahu jádra neutronových hvězd, či *barevného supravodiče* [16]. Ve stavu $T \sim 0$ GeV a $\mu_B \sim 0,93$ GeV se nachází běžná hmota. Stav vakua odpovídá $T \sim 0$ GeV a $\mu_B = 0$ GeV. Z libovolné hodnoty μ_B lze zvyšováním teploty dosáhnout ze dříve hadronového obsahu fáze QGP.

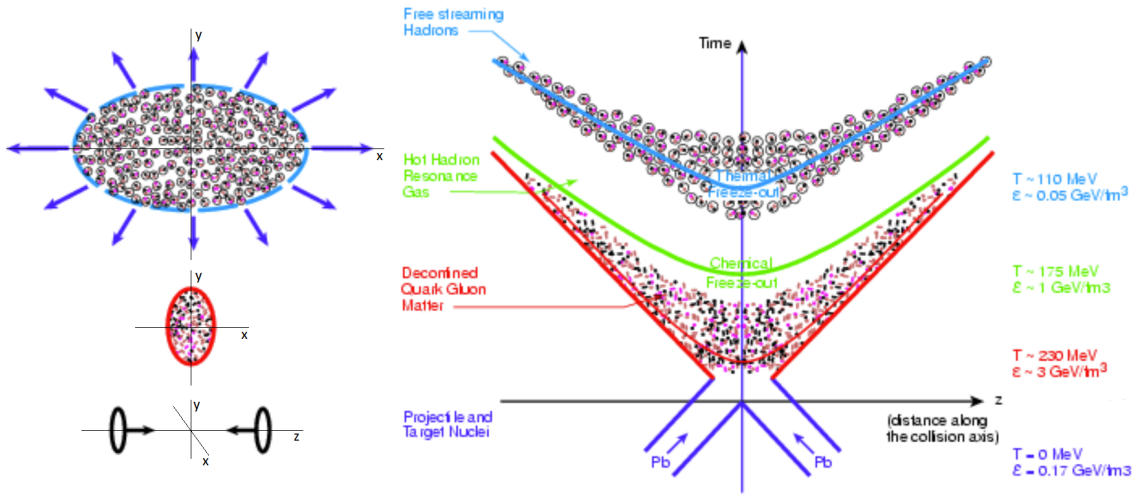
Způsob přechodu do kvark-gluonové fáze není unifikovaný. Plná čára na Obr. 1.4 u hadronové fáze představuje fázový přechod prvního druhu. Přerušovaná čára od kritického bodu značí *spojitý fázový přechod* korespondující s chováním hustoty energie z Obr. 1.2.



Obrázek 1.3: Závislost poměru p/T^4 na teplotě T . Barevné šipky v pravém horním rohu značí příslušné limity (1.4). [13]



Obrázek 1.4: Fázový daigram hadronové hmoty. [13]



Obrázek 1.5: Schématický relativistický vývoj a různé fáze QGP při jádro-jaderných srážkách. Upraveno a převzato z [16].

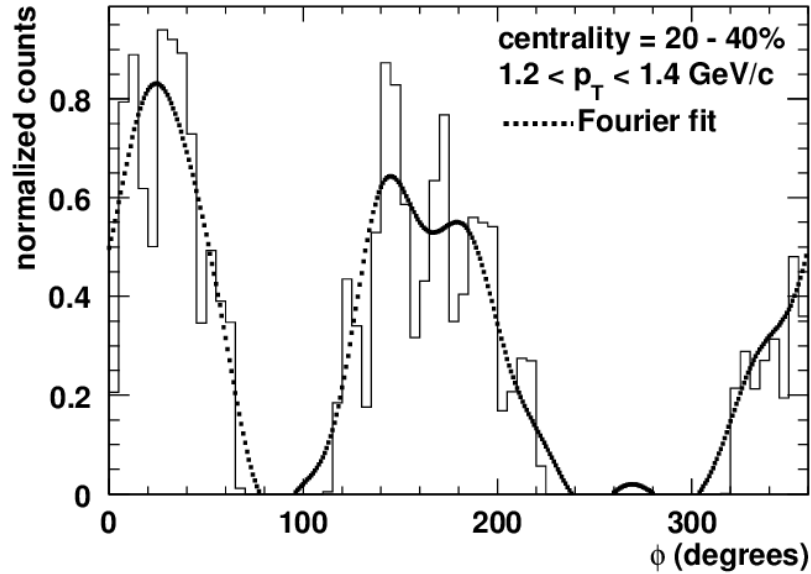
Nápisy „LHC“ a „RHIC“ na spojitém fázovém přechodu (na Obr. 1.4) značí místa přechodu z fáze QGP do fáze hadronového plynu na uvažovaných urychlovačích. Vidíme, že se zvyšující se energií srážky se μ_B blíží k nule. Je to dáno produkcí hmoty a antihmoty z deponované energie ve srážce $\propto \sqrt{s_{NN}}$, která je mnohem větší než klidová energie baryonové hmoty nalétávajících jader

1.2 Průběh experimentů ultra-relativistických jádro-jaderných srážek

V jádro-jaderných srážkách na RHIC ($\sqrt{s_{NN}} \leq 0,2$ TeV), či LHC ($\sqrt{s_{NN}} \leq 5,52$ TeV) již bylo možné zřetelněji pozorovat známky formace QGP [23]. Soustředíme se zejména na část QGP ve *střední rapiditě* ($|\eta| < 0,1$) – část QGP v blízkosti $z \sim 0$ (viz Obr. 1.5). Předpokládejme střední *centralitu*² srážky $\sim 50\%$. Shrňme si zde průběh takového experimentu i s pomocí Obr. 1.5 (využijme vlastního času QGP $\tau = \sqrt{t^2 - z^2}$).

- Pro $\tau < 0$ ve spodní, fialové části grafu pozorujeme nalétávající jádra olova, která jsou Lorentzovsky kontrahovaná do téměř plochých disků. Tento jev navíc s dilatací času lze popsat modelem *Color Glass Condensate* (CGC) – husté stěně barevného náboje se specifickými vlastnostmi kondenzátů [3].
- V místě $z = 0$ a čase $\tau = 0 \equiv \tau_0$ se sráží plochá jádra, kdy v překryvu dochází k pružným i nepružným srážkám jejich nukleonů (produkce vysokoenergetických sond). Při oddalování jader se *barevně excituje vakuum* a z energie zpomalování jader vznikají kvarky, antikvarky a glouony – QGP.

²Centralita udává míru překryvu diskových jader před srážkou a je v blízkém vztahu ke srážkovému parametru b . 0% centralita paradoxně udává maximální překryv jader, při 100% centralitě se jádra míjí.

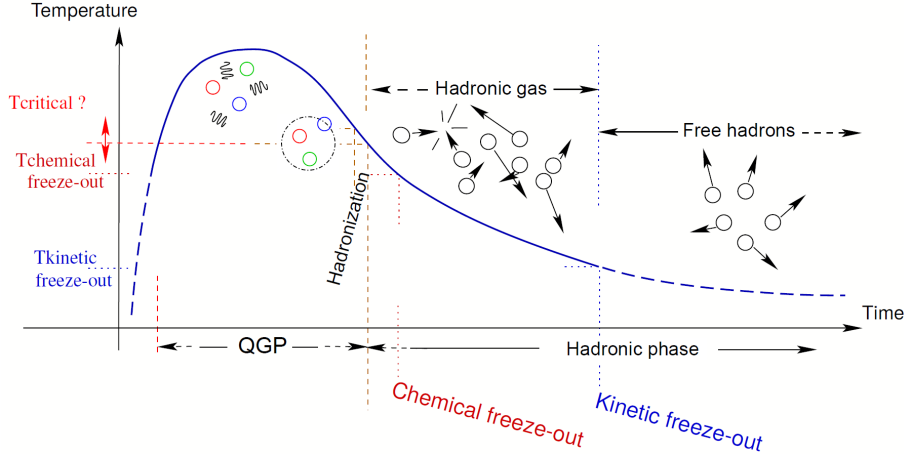


Obrázek 1.6: Typické úhlové rozdělení hadronů pro hybnostní interval $1,2 < p_T < 1,4$ GeV/c. Srážky Au+Au $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV, RHIC experiment PHENIX. [21]

- Do času okolo $\tau = 1$ fm/c se médium vytváří a *termalizuje* – vyrovnávání termodynamické teploty v celém objemu.
- Mezi červenou a zelenou fází probíhá hydrodynamická expanze, která *eliptickou prostorovou anizotropií* ε_2^x deponované energie E transformuje do *eliptické hybnostní anizotropie* QGP ε_2^p (řádné definice v Kap. 3). Což odpovídá skutečnosti, že tok hmoty je převážně ve směru největšího gradientu tlaku (v okolí je vakuum), tj. ve směru kratší poloosy červené elipsy.
- V zelené části grafu probíhá již zmiňovaná rekombinace kvarků v hadrony při kritické teplotě, tzv. *chemické vymrznutí*. Jev rekombinace v hadrony probíhá postupně již během expanze na vnějším povrchu QGP, nyní však vymrzne již celý objem ($\tau \sim 7$ fm/c).
- Mezi zelenou a modrou fází spolu vzniklé hadrony a jejich rezonance interagují a tvoří slabě vázaný hadronový plyn. S postupnou expanzí však interakce slábnou, až v modré fázi neinteragující hadrony volně opouštějí oblast srážky – *kinetické vymrznutí* a dále putují do detektorů experimentu.

Jak vidíme, předešlá hydrodynamicky se budující *eliptická hybnostní anizotropie* vede po chemickém vymrznutí na eliptickou asymetrii v toku hadronů (modré šipky na Obr. 1.5). Tento asymetrický tok dokážeme detektory pozorovat (viz Obr. 1.6) a lze popsat sadou *Fourierových koeficientů úhlového rozdělení hadronů* v_n v rovině $x \times y$ při $z \sim 0$.

Nahledněme ještě na Obr. 1.7, kde v čase nejdříve vidíme rychlou termalizaci média spojenou s rozrušováním vazeb v nukleonech (strmá přerušovaná čára). Následná



Obrázek 1.7: Časový vývoj průměrné teploty v QGP. Přerušované čáry značí hranice použitelnosti a relevance termodynamické teploty. [13]

fáze QGP, poté hadronizace spojená s chemickým vymrznutím a nakonec kinetické vymrznutí.

Nyní se zaměříme na důležité pozorování z měřitelných veličin na urychlovači RHIC, které vedly k uznání objevu QGP v roce 2005.

1.2.1 Charakterizace kolektivního toku

Zde studujeme úhlové rozdělení detekovaných hadronů. Kolektivním tokem je myšlen jev, kdy je pozorovaná nadměra produkce částic v konkrétním směru. Tato anizotropie podporuje teorii o hydrodynamickém vývoji QGP z eliptického profilu hustoty energie.

Pokud by však podle prvotních předpokladů bylo QGP slabě interagující plyn, pozorovali bychom izotropní produkci hadronů ($v_n = 0$) i přes počáteční eliptický profil hustoty energie.

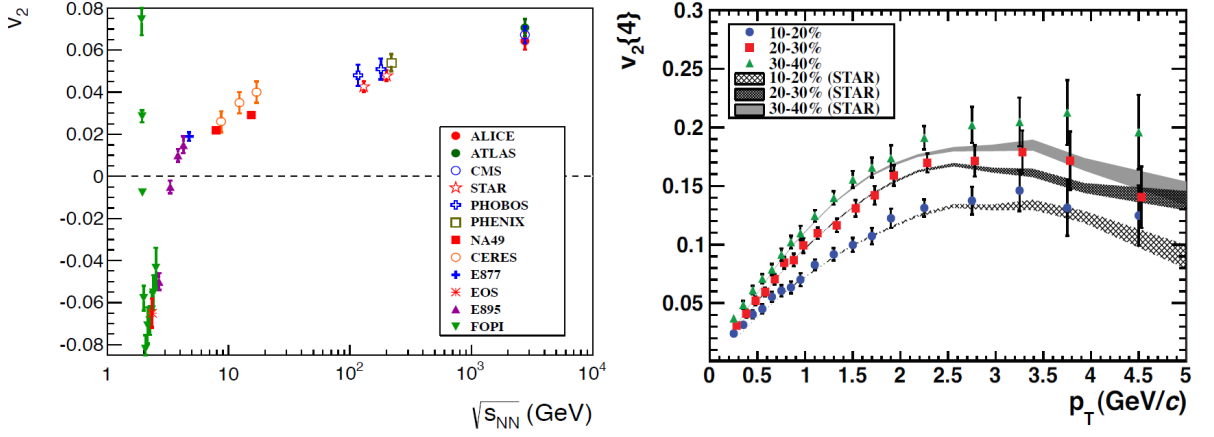
Pro kvantifikaci tohoto kolektivního chování v rovině $x \times y$ využijme Fourierových koeficientů v_n z rozvoje úhlové části rozdělení produkovaných hadronů $dN/dy d\phi dp_T$, tedy:

$$\frac{dN}{dy d\phi dp_T} = \frac{dN}{dy dp_T} \left(1 + 2v_1(p_T) \cos[\phi - \Psi_1] + 2v_2(p_T) \cos[2(\phi - \Psi_2)] + \dots \right), \quad (1.5)$$

$$\text{kde } v_n = \frac{\int d\phi \cos[n(\phi - \Psi_n)] \frac{dN}{dy d\phi dp_T}}{\int d\phi \frac{dN}{dy d\phi dp_T}} = \langle \cos[n(\phi - \Psi_n)] \rangle \quad (1.6)$$

$$\text{a } \Psi_n = \frac{1}{n} \arctan \frac{\langle p_T \sin n\phi \rangle}{\langle p_T \cos n\phi \rangle}, \quad p_T = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}. \quad (1.7)$$

Koeficient v_1 nyní měří *směřovaný tok* – vyšší produkce v jednom směru. v_2 se nazývá *eliptický tok* – vyšší produkce ve dvou protilehlých směrech. Vyšší řády v_n jsou zřejmě interpretovatelné. Na levém grafu Obr. 1.8 můžeme vidět měřené koeficienty v_2 pro různé energie srážek Au + Au, či Pb + Pb, při fixní centralitě 20-30%.



Obrázek 1.8: **Vlevo:** Závislost eliptického toku v_2 na energii srážky $\sqrt{s_{NN}}$ z několika experimentů. Data jsou pro $\sim 20 - 30\%$ centralitu a Au + Au, či Pb + Pb. **Vpravo:** Diferenciální eliptický tok v_2 v závislosti na příčné hybnosti p_T . V porovnání srážky Pb + Pb při $\sqrt{s_{NN}} = 2,76$ TeV (barevné symboly) a Au + Au při $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV (šedivé línie). [1]

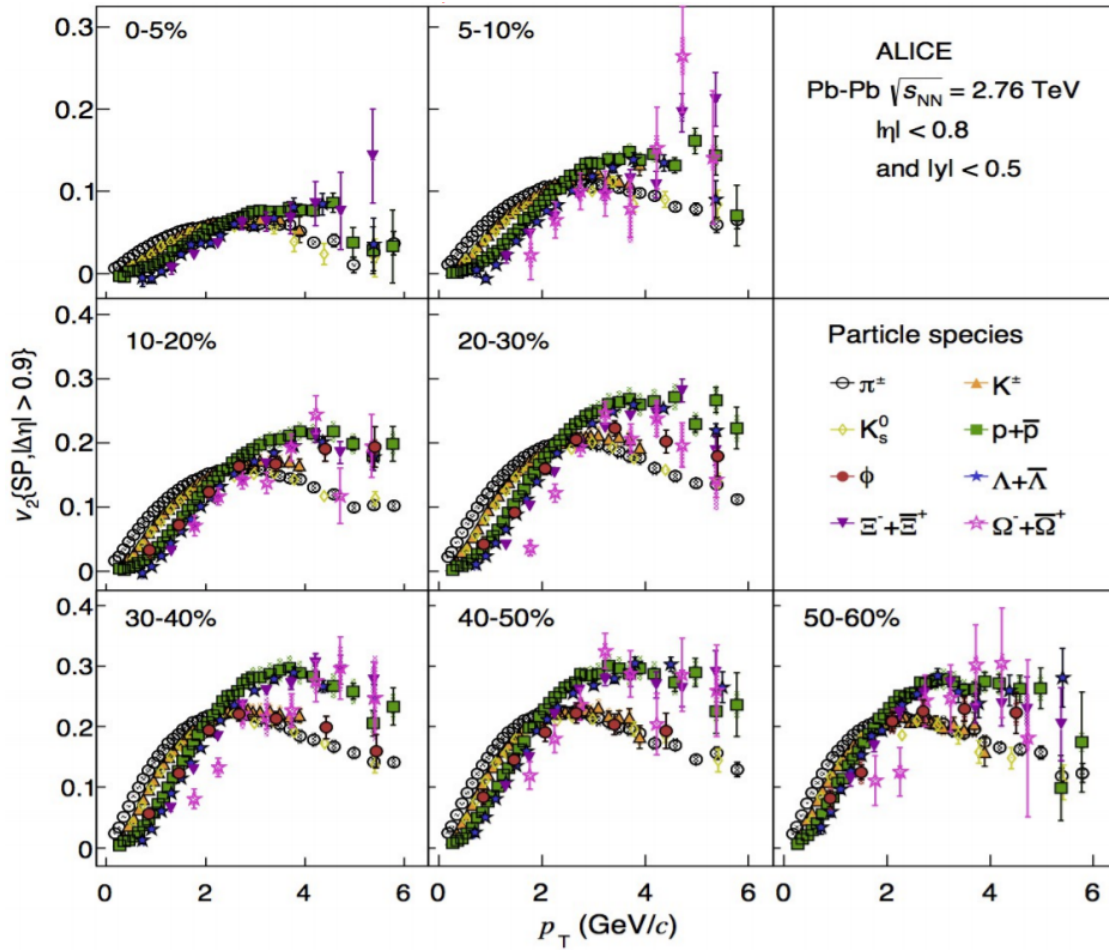
Pro nízké energie ($\sqrt{s_{NN}} < 3$ GeV) je průběh v_2 zejména ovlivněn pohybující se přebytkem hmotou neinteragujících nukleonů, tzv. *spektátorů*. Dále již eliptický tok roste logaritmičticky s energií srážky $\sqrt{s_{NN}}$.

Na pravém grafu Obr. 1.8 vidíme *diferenciální eliptický tok* nabitých částic v porovnání dvou srážek: Pb + Pb při $\sqrt{s_{NN}} = 2,76$ TeV a Au + Au při $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV. Toto diferencování rozdělí eliptický tok na příspěvky od částic s blízkými příčnými hybnostmi. Ze závislosti v_2 na centralitě a energii srážky $\sqrt{s_{NN}}$ lze konstatovat konzistentní výsledky s předpokladem o syntetizaci většího objemu QGP.

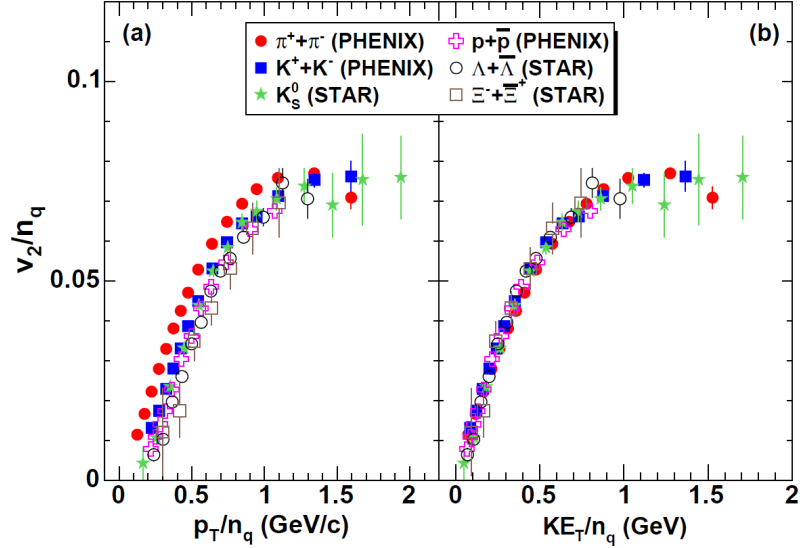
Zásadním poznatkem studia charakteristik úhlového rozdělení v_n byla jejich škálovatelnost dle kvarkového obsahu. Na Obr. 1.9 vidíme eliptický tok různých hadronů – π^\pm , $p+\bar{p}$, $\Lambda+\bar{\Lambda}$, \dots , s podmínkou $|\Delta y| < 0,9$ na započtení do statistiky. Nejzajímavější jev je zřejmé dělení mezonových a baryonových hladin. Pokud zkusíme škálovat příslušné eliptické toky v_2 a příčnou hybnost p_T dle kvarkového obsahu n_q jako v_2/n_q a p_T/n_q , tak získáme univerzální křivku pro všechny hadrony (viz Obr. 1.10). Alternativně využíváme příčnou kinetickou energii $KE_T = \sqrt{m^2 + p_T^2} - m$, která potírá váhové rozdíly hadronů, díky tomu jsou křivky v_2/n_q v závislosti na KE_T bližší.

Vlastnosti v_2/n_q a KE_T/n_q jsou interpretovány jako důsledek kolektivní propagace hybnostních anizotropií v QGP, ta je poté úměrně svému kvarkovému obsahu (kvark-gluonovému obsahu) transformována do hybnostních anizotropií hadronů.

Simulace reprodukuje data měřených v_n pouze za předpokladu, že je QGP rychle termalizované médium s nízkou viskozitou.



Obrázek 1.9: Eliptický tok v_2 pro různé hadrony ve vybraných centralitách z experimentu ALICE na LHC. Srážky Pb + Pb v centrální rapiditě ($|y| < 0,5$) při energii $\sqrt{s_{NN}} = 2,76$ TeV. [18]



Obrázek 1.10: Škálovaný eliptický tok v_2/n_q vůči p_T/n_q , resp. KE_T/n_q . Srážky Au + Au při $\sqrt{s_{NN}}$ z experimentu STAR na urychlovači RHIC [19]

1.2.2 Produkce částic z termální rovnováhy

Po termalizaci kvark-gluonového obsahu lze zavést kromě teploty $T = T(\mathbf{x})$, chemického potenciálu $\mu_i = \mu_i(\mathbf{x})$ pro každého i -tého konstituenta také čtyřvektor rychlosti $u^\mu = u^\mu(\mathbf{x})$ v bodě časoprostoru \mathbf{x} [22]. Uvažme, že v termalizovaném QGP jsou částice i -té komponenty rozděleny dle termálního rozdělení

$$f_i(p_\nu u^\nu, T, \mu_i) = \frac{1}{e^{\frac{p_\nu u^\nu - \mu_i}{T}} \pm 1} \quad (1.8)$$

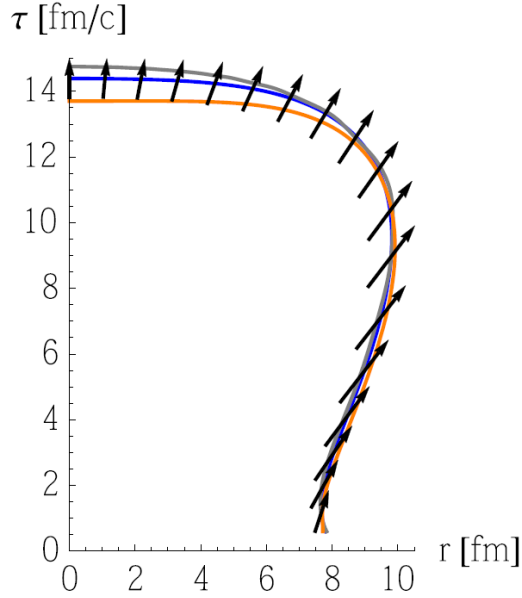
pro fermiony, resp. bosony. (1.8) řídí počet i -tých konstituentů v dané energii $p_\nu u^\nu_{LKS} = p_0 u^0 = E$. Směr kolektivního toku u^μ je určen dle hydrodynamického vývoje (viz Kap. 2).

Soustavné vymrzání fireballu na svém vnějším povrchu, resp. absolutní vymrznutí objemu, vyžaduje transformaci termálního rozdělení (1.8) s hydrodynamickým tokem u^μ do hybnostních spekter pozorovaných částic. Pro tyto potřeby využijme *Cooperovy-Fryeovy metody*, kdy rozdělení hybnosti i -tých částic získáme dle předpisu

$$E \frac{dN_i}{d^3p} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\Sigma_f} d\Sigma_f^\mu p_\mu f_i(p_\nu u^\nu, T_{kin}, \mu_i), \quad (1.9)$$

kde vidíme zřejmou prostorovou integraci rozdělovací funkce (1.8). Uvažujeme třídimenzionální nadplochu Σ_f na hranici relevantnosti hydrodynamického popisu. Je definována jako plocha konstantní teploty kinetického vymrznutí $T_{kin} \sim 120$ MeV (lze zavést definici i skrze hustotu energie). V centrálních srážkách lze díky symetriím redukovat časoprostorovou závislost nadplochy Σ_f na vlastní čas τ a příčnou vzdálenost $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ [2]. Tyto zbylé proměnné jsou na sobě závislé a jejich vztah parametrizujeme křivkou vymrznutí

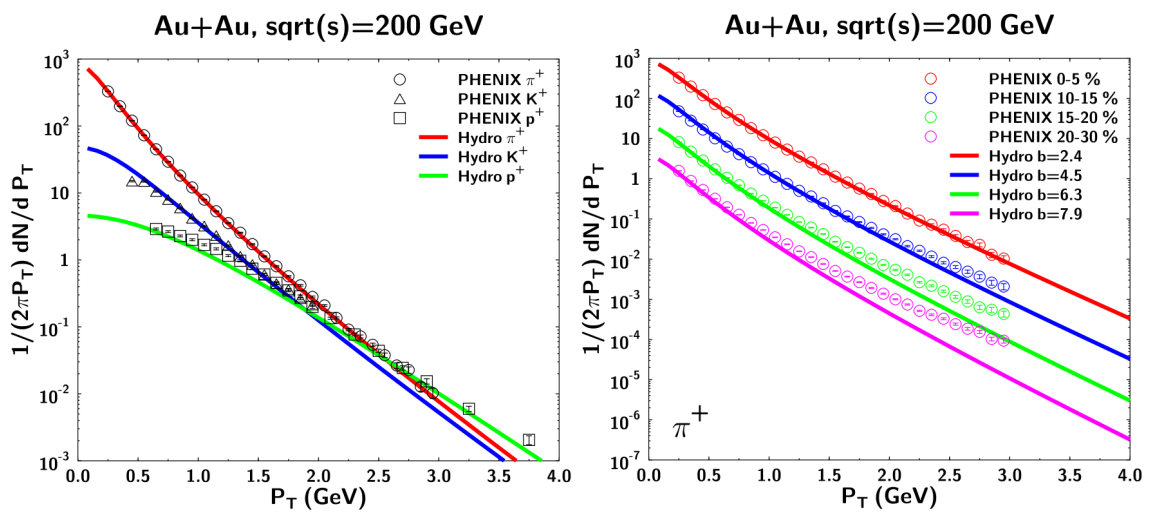
$$\tau = \tau(\alpha), \quad r = r(\alpha) \quad (1.10)$$



Obrázek 1.11: Křivka vymrznutí při konstantní teplotě $T_{kin} = 120$ MeV pro centrální Pb+Pb srážky v energiích LHC, tj. $\sqrt{s_{NN}} \sim 7$ TeV. Jsou porovnány tři křivky odpovídající různému poměru viskozity ku entropii η/s . Šedá křivka odpovídá $\eta/s = 0$, modrá křivka $\eta/s = 0,08$ a oranžová $\eta/s = 0,3$. Šipky znázorňují radiální rychlost na křivce vymrznutí při $\eta/s = 0,08$. [2]

v rovině $\tau \times r$ s parametrem $\alpha \in (0, 1)$. Křivka představuje časovou závislost vzdálenosti $r = r(\tau)$ plochy konstantní teploty Σ_f a středu fireballu. Příklad této křivky lze vidět na Obr. 1.11.

Žádaná hybnostní spektra S_0 lze získat vyintegrováním vztahu (1.9) přes azimutální úhel φ (v rovině $x \times y$) a *prostorovou rapiditu* (viz Kap. 2). Porovnání získaných spekter s experimentem lze vidět na Obr. 1.12. Blízká shoda poukazuje na produkci částic z termální rovnováhy dle výše naznačeného postupu.



Obrázek 1.12: Porovnání spekter hydrodynamického modelu s termálním rozdělením a dat z experimentu PHENIX, RHIC Au+Au. **Vlevo:** Hybnostní spektra pionů, kaonů a protonů v 5-10% centralitě. **Vpravo:** Hybnostní spektra pionů pro různé centrality. [1]

Kapitola 2

Hydrodynamika kvark-gluonového plazmatu

Nyní budeme formulovat relativistickou hydrodynamiku ve čtyřdimenzionálním časoprostoru tak, aby v nerelativistické limitě korespondovala s klasickým hydrodynamickým popisem. Pro lepší analogie proto nejdříve stručně nahlédneme na klasický hydrodynamický popis kapaliny. Velká část této kapitoly je s modifikacemi citována z předešlé práce [33] zkoumající *metody nelineární dynamiky pro ultrarelativistické jaderné srážky*.

2.1 Klasická hydrodynamika

Pro klasickou hydrodynamiku využíváme *Eulerovy metody* popisu. Tedy uvažujeme pole rychlostí $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, které interpretujeme jako rychlost konstituenta nacházející se v čase t v bodě $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Polohu konkrétního konstituenta nemá smysl uvažovat, pouze objem, který kontinuum zaujímá a sadu relevantních polí. Stav systému je určen rychlostím polem $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, a skalárními poli tlaku $p = p(\mathbf{x})$, či hustoty $\rho = \rho(\mathbf{x})$, kde $\mathbf{x} \in V$. Jedná se o spojitý nekonečně dimenzonální dynamický systém.

2.1.1 Hydrostatika

Uvažujme objem kontinua V ohraničeného uzavřenou plochou f . V hydrostatické rovnováze požadujeme, aby výslednice vnějších sil \mathbf{F} a výsledný moment sil \mathbf{M} působících na objem V byly nulové, tj. ve složkách

$$F_i = \int_V \mathcal{F}_i dV + \oint_f \mathcal{T}_i df = 0, \quad (2.1)$$

$$M_i = \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \mathcal{F}_k dV + \oint_f \varepsilon_{ijk} x_j \mathcal{T}_k df = 0, \quad (2.2)$$

kde \mathcal{F}_i jsme označili i -tou složku objemových sil a \mathcal{T}_i plošných sil. Tyto dvě složky jsou na sobě nezávislé.

Objemové síly \mathcal{F}_i působí přímo na uvažovaný objem $dV \subset V$ a nezávisí na silovém působení v okolí dV . Tyto síly jsou zpřůmředkovány silovými poli prostupujícími kontinuum (např. elektromagnetické, gravitační ...). Plošné síly \mathcal{T}_i jsou vztaženy pouze k silovému působení na hranici objemu f , a to zejména *kontaktním způsobem*. Mají však vliv i uvnitř kontinua, jelikož uvažují vazby mezi sousedními elementy objemu. Tento fakt bude zřejmější po zavedení *tenzoru napětí*.

Definice: Tenzor napětí σ definujeme vztahem

$$\mathcal{T} = \sigma \cdot \mathbf{n}, \text{ resp. ve složkách } \mathcal{T}_i = \sigma_{ik}n_k, \quad (2.3)$$

kde \mathbf{n} je normálový vektor k dané plošce.

Kromě povrchových sil je však tenzor napětí definován i uvnitř objemu, čímž odráží vnitřní projevy vnějších sil a charakterizuje přenos impulzu v médiu. Jsme schopni pro libovolnou plošku v objemu V s normálou \mathbf{n} explicitně vypočítat důsledek působení plošných sil jako $\sigma \cdot \mathbf{n}$.

Z (2.1),(2.2) lze využitím definice tenzoru napětí (2.3) získat základní rovnice hydrostatiky

$$\mathcal{F}_i + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0, \quad (2.4)$$

$$\varepsilon_{ijk}\sigma_{kj} = 0. \quad (2.5)$$

Druhá z rovnic, tj. (2.5), je pouze podmínkou na symetričnost tenzoru napětí σ . První rovnici přepíšme do vektorového tvaru:

$$\mathcal{F} + \nabla \cdot \sigma = 0. \quad (2.6)$$

2.1.2 Pohybové rovnice

Z hydrostatické rovnice (2.6) získáme hydrodynamické pohybové rovnice využitím d'Alembertova principu. Definujeme setrvačnou sílu

$$\mathcal{F}^{in} = -\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

působící na konstituenty kapaliny vztažené k hustotě ρ (zachovávající se veličina). Proti setrvačné síle působí rovnovážné síly o stejné velikosti, tj.

$$-\mathcal{F}^{in} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathcal{F} + \nabla \cdot \sigma, \quad (2.7)$$

$$\text{resp. ve složkách } -\mathcal{F}_i^{in} = \rho \frac{dv_i}{dt} = \mathcal{F}_i + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \quad (2.8)$$

Neuvažujeme-li objemové síly \mathcal{F} , tak lze pohybové rovnice ve vektorovém tvaru přepsat:

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \sigma. \quad (2.9)$$

Explicitní podoba pohybových rovnic (2.9) závisí na použitém tvaru tenzoru napětí σ .

2.1.3 Tenzor napětí

Víme, že tenzor napětí $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ musí být symetrický a definován uvnitř i na povrchu objemu kapaliny V .

Jelikož popisujeme fyzikální deterministický dynamický systém, tak musí být tenzor napětí závislý pouze na fázových proměnných v daném čase t . Fázové proměnné jsou rychlost $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, zachovávající se veličiny – zde hustota $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ a popřípadě další termodynamické veličiny $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t)$. Tenzor napětí je tedy implicitně závislý na prostoru a čase jako $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}, \rho, \boldsymbol{\varphi})$.

Zaměřme se na to, jak lze zkonstruovat tenzor energie a hybnosti. V rámci klasické hydrodynamiky nemůže platit $\boldsymbol{\sigma} \sim \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$, nebo $\boldsymbol{\sigma} \sim |\mathbf{v}|\mathbf{I}$, protože síly by mohly být různé pro dvě inerciální vztažné soustavy. Tedy by nebyla splněna invariantnost dynamiky, resp. sil vůči pozorovateli. Z této podmínky využíváme zejména gradient rychlosti $\nabla\mathbf{v}$, který je vůči různým inerciálním soustavám invariantní, jelikož uvažuje pouze prostorové rozdíly v rozložení rychlosti, avšak ne absolutní hodnoty rychlosti.

Gradient rychlosti lze rozdělit na symetrickou a antisymetrickou část \mathbf{S} a \mathbf{A} jako

$$\nabla\mathbf{v} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T) + \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} - (\nabla\mathbf{v})^T) = \mathbf{S} + \mathbf{A}.$$

Protože samotný tenzor napětí je symetrický tenzor druhého řádu, předpokládáme pouze symetrickou část gradientu rychlosti \mathbf{S} .

Vytvořme rozvoj tenzoru napětí jako

$$\boldsymbol{\sigma} \simeq \kappa_0\mathbf{I} + \kappa_1\mathbf{S} + \kappa_2\mathbf{S}^2 + \cdots + \kappa_l\mathbf{S}^l = \sum_{i=0}^l \kappa_i\mathbf{S}^i, \quad (2.10)$$

kde $\kappa_i = \kappa_i(\mathbf{S})$. Tento rozvoj v gradientech aproximuje tenzor napětí, avšak pouze v blízkosti hydrostatické rovnováhy. Lze využít i jiných rozvoju v (2.10), námi použitý v mocninách symetrické části gradientu rychlosti je jeden z jednodušších.

Pohybové rovnice získáváme z předpisu (2.9) a jsou přímo závislé na tvaru tenzoru napětí. Vyšší řády pohybových rovnic, které postihují složitější dynamiku, získáme uvážením více členů z rozvoje (2.10).

2.1.4 Eulerovy rovnice

V nejnižší aproximaci volíme tvar tenzoru napětí jako

$$\boldsymbol{\sigma} = \kappa_0\mathbf{I} = (\alpha + \lambda\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{I},$$

kde $\alpha = \alpha(\mathbf{x})$ a $\lambda = konst.$ Lze ukázat, že $p(\mathbf{x}) = -\alpha(\mathbf{x})$. Ekvivalence obou veličin je splněna pouze pro velké objemy a v blízkosti hydrostatické rovnováhy. Při dynamických jevech je potřebné zavést tzv. *efektivní tlak* p_{ef} , který odpovídá měřitelnému tlaku.

Pohybové rovnice bez objemových sil jsou dle (2.9):

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{1}{\rho}(\nabla p + \lambda\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})) \quad (2.11)$$

pro vazkou kapalinu. Pro nevazkou ideální kapalinu $\lambda = 0$, či nestlačitelnou kapalinu $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ Eulerovy pohybové rovnice splývají v

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{1}{\varrho} \nabla p. \quad (2.12)$$

Vybranou pohybovou rovnicí je třeba ještě doplnit o rovnici kontinuity

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.13)$$

a stavovou rovnicí $p = p(\varrho)$ svazující tlak a hustotu. Odtud máme tři pohybové rovnice pro složky rychlosti, rovnici kontinuity (2.13) a stavovou rovnici pro pět neznámých \mathbf{v}, p, ϱ , což dohromady tvoří nekonečně dimenzionální dynamický systém v proměnné $\mathbf{x} \in V$. Pro konzervativní systémy můžeme navíc uvažovat i zákon zachování energie.

2.1.5 Navierovy-Stokesovy rovnice

Dalším zobecněním v rámci rozvoje (2.10) je tenzor napětí ve tvaru

$$\boldsymbol{\sigma} = \kappa_0 \mathbf{I} + \kappa_1 \mathbf{S} = (-p + \lambda \nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{S} = (-p + \lambda \nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{I} + \mu (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T), \quad (2.14)$$

kde $\mu = \textit{konst.}$ Zde tedy značíme $p = -\alpha$.

Využitím tenzoru napětí (2.14) v (2.9) získáme Navierovy-Stokesovy rovnice bez objemových sil:

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{1}{\varrho} \left(-\nabla p + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu \Delta \mathbf{v} \right), \quad (2.15)$$

$$\text{resp. ve složkách } \dot{v}_i = \frac{1}{\varrho} \left(-\frac{\partial p}{\partial x_i} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_k} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} \right). \quad (2.16)$$

2.2 Relativistická hydrodynamika

Relativistickou hydrodynamiku budujeme pro popis vysokoenergetických systémů jako je např. QGP v jádro-jaderných srážkách.

Dále v textu použijeme přirozené jednotky, kdy $h = c = k_B = 1$ a metrický tenzor tvaru $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Neuvažujme tepelné ani kvantové fluktuace ve smyslu *flukтуаčně disipačního teorému*.

2.2.1 Tenzor energie a hybnosti

Jelikož v časoprostoru jsou obecně svázány proměnné energie a hybnosti jako např. u čtyřvektoru rychlosti u^μ . Lze očekávat, že zobecnění tenzoru napětí σ_{ik} bude

tenzor rozměru 4×4 a kromě prostorové části σ_{ik} implikující změny hybnosti, bude obsahovat i členy vázající změny hustoty energie a hybnosti.

Jak víme [20], tak pro systém popsán Lagrangeovou hustotou \mathcal{L} jsou Lagrangeovy pohybové rovnice tvaru

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\mu}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} = 0, \quad (2.17)$$

kde index $a \in \hat{n}$ značí danou obecnou souřadnici q_a a $q_{a,\mu} \equiv \frac{\partial q_a}{\partial x^\mu}$. Vynásobením n rovnic (2.17) proměnnou $q_{a,\nu}$ a jejich sečtením získáme

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} q_{a,\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\mu}} \right) q_{a,\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\mu}} q_{a,\nu} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\mu}} \frac{\partial q_{a,\nu}}{\partial x^\mu},$$

což lze přepsat

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} \frac{\partial q_a}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\mu}} \frac{\partial q_{a,\nu}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\mu}} q_{a,\nu} \right). \quad (2.18)$$

Protože zřejmě $\frac{\partial q_{a,\nu}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial q_{a,\mu}}{\partial x^\nu}$, lze levou stranu (2.18) chápat jako $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\nu}$ a tedy

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\mu}} q_{a,\nu} - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right) = 0. \quad (2.19)$$

Jak vidíme v (2.19), tak levá strana připomíná definici hustoty energie kontinua. Zjistíme, že vztahy (2.19) pro $\nu = 0, 1, 2, 3$ odpovídají zákonům zachování energie ($\nu = 0$) a hybnosti ($\nu = 1, 2, 3$).

Definujme nyní symetrický tenzor energie a hybnosti

$$T_\nu^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\mu}} q_{a,\nu} - \delta_\nu^\mu \mathcal{L},$$

kde tedy požadujeme jeho zachování dle vztahu (2.19)

$$\partial_\mu T_\nu^\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} T_\nu^\mu = 0, \text{ resp. } \partial_\mu T^{\nu\mu} = \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (2.20)$$

a značíme $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$. Zobecněním tenzoru napětí σ_{ik} pro relativistický rámec přecházíme k tenzoru energie a hybnosti $T^{\mu\nu}$. V [20] lze vidět, že prostorová část tenzoru energie a hybnosti je klasický tenzor napětí, tj. $T_{ik} = \sigma_{ik}$, kde $i, k = 1, 2, 3$.

Pohybové rovnice (2.20) jsou však odvozeny pouze pro přímočaré Minkowského souřadnice, ale nezahrnují případ obecných křivočarých souřadnic, proto je nutné zavést *kovariantní derivaci*.

Kovariantní derivace

Mějme obecné křivočaré souřadnice \mathbf{x} s bazickými vektory $\mathbf{e}_\mu = \mathbf{e}_\mu(\mathbf{x})$, které jsou tedy na prostoročase závislé. Konkrétní souřadnici x_μ odpovídá daný bazický vektor \mathbf{e}_μ , proto kovariantní derivací $\nabla_\mu \equiv \nabla_{\mathbf{e}_\mu}$ vektoru $\mathbf{v} = v^\nu \mathbf{e}_\nu$ ve směru \mathbf{e}_μ rozumíme

$$\nabla_\mu \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} (v^\nu \mathbf{e}_\nu) = \frac{\partial v^\nu}{\partial x^\mu} \mathbf{e}_\nu + v^\nu \frac{\partial \mathbf{e}_\nu}{\partial x^\mu}. \quad (2.21)$$

Pro přímočaré souřadnice je $\frac{\partial \mathbf{e}_\nu}{\partial x^\mu} = 0$. Avšak pro křivočaré souřadnice je $\frac{\partial \mathbf{e}_\nu}{\partial x^\mu}$ opět vektor, který je roven lineární kombinaci bazických vektorů, zde využijeme tzv. *Christoffelových symbolů* $\Gamma_{\nu\mu}^\sigma$ jako

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\nu}{\partial x^\mu} = \Gamma_{\nu\mu}^\sigma \mathbf{e}_\sigma. \quad (2.22)$$

Nyní lze v (2.21) s přeznačením indexů $\nu \leftrightarrow \sigma$ psát

$$\nabla_\mu \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v^\nu}{\partial x^\mu} + v^\sigma \Gamma_{\sigma\mu}^\nu \right) \mathbf{e}_\nu. \quad (2.23)$$

Christoffelovy symboly $\Gamma_{\sigma\mu}^\nu$ jsou explicitně závislé na volbě obecných souřadnic \mathbf{x} , kdy druhý člen v (2.23) kompenzuje zakřivení souřadnic. Z (2.23) vidíme, že kovariantní derivace působí na vektor po složkách, čehož využijeme při působení na tenzor obecného řádu.

Uvědomme si z (2.23), jak působí kovariantní derivace na složky vektoru

$$\nabla_\mu v^\nu = \frac{\partial v^\nu}{\partial x^\mu} + v^\sigma \Gamma_{\sigma\mu}^\nu,$$

proto analogicky je kovariantní derivace složky $T^{\mu_1\mu_2\dots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_l}$ obecného tenzoru \mathbf{T} rovna

$$\begin{aligned} \nabla_\sigma T^{\mu_1\mu_2\dots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_l} = & \partial_\sigma T^{\mu_1\mu_2\dots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_l} + \\ & + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_1} T^{\lambda\mu_2\dots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_l} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_2} T^{\mu_1\lambda\dots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_l} + \dots \\ & - \Gamma_{\sigma\nu_1}^\lambda T^{\mu_1\mu_2\dots\mu_k}_{\lambda\nu_2\dots\nu_l} - \Gamma_{\sigma\nu_2}^\lambda T^{\mu_1\mu_2\dots\mu_k}_{\nu_1\lambda\dots\nu_l} - \dots \end{aligned}$$

Přepíšme pohybové rovnice (2.20) do kovariantního tvaru

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (2.24)$$

kde $\nabla_\mu = \nabla_{\mathbf{e}_\mu}$ a \mathbf{e}_μ je bazický vektor obecných souřadnic. Pohybová rovnice (2.24) postihuje případ kapaliny izolované od vnějších sil. Pokud bychom uvažovali vnější objemové síly ξ^ν , tak je nutné tyto síly přidat na pravou stranu rovnice (2.24), tj.

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \xi^\nu.$$

Rozvoj tenzoru energie a hybnosti

V klasické hydrodynamice jsme pro tenzor napětí sestavili rozvoj a konkrétně mocinný v gradientu rychlosti. Pro relativistický případ vytvoříme efektivní rozvoj tenzoru energie a hybnosti

$$T^{\mu\nu} = T_{(0)}^{\mu\nu} + T_{(1)}^{\mu\nu} + \dots, \quad (2.25)$$

kde stavebními bloky bude rychlost u_μ , hustota energie ϵ a metrický tenzor $g_{\mu\nu}$, navíc v kombinaci s *prostoropodobnou částí kovariantní derivace* (koresponduje s klasickým gradientem). V rozvoji nemusíme uvažovat gradienty tlaku, kvůli stavové rovnici $p = p(\epsilon)$.

Relativistickou rychlost u_μ nyní můžeme využít přímo při konstrukci tenzoru energie a hybnosti, tj. $T^{\mu\nu} \sim u^\mu u^\nu$, oproti klasické hydrodynamice s tenzorem napětí a rychlostí, kdy nemohlo platit $\sigma_{ik} \sim v_i v_k$, či $\sigma_{ik} \sim |\mathbf{v}| \delta_{ik}$. Část tenzoru energie a hybnosti úměrná $u^\mu u^\nu$ je lorentzovsky invariantní a její stopa se zachovává, protože $\text{Tr}(u^\mu u^\nu) = u^\mu u_\mu = -1$.

Pro izolovanou ideální kapalinu (bez viskozity) vede již nultý řád tenzoru energie a hybnosti na příslušné pohybové rovnice $\nabla_\mu T_{(0)}^{\mu\nu} = 0$. Pro neideální kapalinu platí, že čím více členů z rozvoje (2.25) zahrneme do pohybových rovnic (2.24), tím přesněji postihneme dynamiku, avšak stále musíme být blízko hydrostatické rovnováhy. Dále od hydrostatické rovnováhy, kdy jsou gradienty větší, nemusí být rozvoj (2.25) konvergentní.

2.2.2 Relativistické Eulerovy rovnice

Odvoďme explicitní tvar nultého řádu tenzoru energie a hybnosti $T_{(0)}^{\mu\nu}$. V nejnižším řádu uvažujme pouze skalární funkce $a = a(x_\mu)$ a $b = b(x_\mu)$, rychlost $u^\mu = u^\mu(x_\mu)$ a metrický tenzor $g^{\mu\nu}$. Nejjednodušší tvar tenzoru energie a hybnosti v nultém řádu je poté

$$T_{(0)}^{\mu\nu} = a(c_1 u^\mu u^\nu + c_2 g^{\mu\nu}) + b(c_3 u^\mu u^\nu + c_4 g^{\mu\nu}), \quad (2.26)$$

kde tedy c_1, c_2, c_3, c_4 jsou konstanty. Lze ověřit, že u_μ je vlastní vektor (2.26).

V lokálně klidové soustavě (LKS) blízko hydrostatické rovnováhy, předpokládáme efektivní tvar tenzoru energie a hybnosti

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle_{LKS} = \text{diag}(\epsilon, p, p, p), \quad (2.27)$$

který je odvozen z mikroskopické teorie – relativistické kinetické teorie, kdy p rozumíme tlakem.

V lokálně klidové soustavě má vektor rychlosti tvar $u_{LKS}^\mu = (1, \mathbf{0})$. Proto tenzor energie a hybnosti (2.26) je

$$T_{(0)LKS}^{\mu\nu} = \text{diag}(a(c_1 - c_2) + b(c_3 - c_4), ac_2 + bc_4, ac_2 + bc_4, ac_2 + bc_4). \quad (2.28)$$

Porovnáním obou výrazů (2.27) a (2.28) zjistíme, že $\epsilon + p = ac_1 + bc_3$, $p = ac_2 + bc_4$, a proto explicitní tvar tenzoru energie a hybnosti v nultém řádu je

$$T_{(0)}^{\mu\nu} = (\epsilon + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}. \quad (2.29)$$

Před výpočtem pohybových rovnic dle zachování tenzoru energie a hybnosti (2.24) zaveďme *prostorupodobné* a *časupodobné projektoy*.

Projektoy: Definujme prostorupodobný projektor

$$\Delta^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu \quad (2.30)$$

a časupodobný projektor

$$u^\mu. \quad (2.31)$$

Naší motivací je, že v lokálně klidové soustavě je prostorobodobný projektor $\Delta_{LKS}^{\mu\nu} = \text{diag}(0, 1, 1, 1)$, protože $g_{LKS}^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ a $u_{LKS}^\mu u_{LKS}^\nu = \text{diag}(1, 0, 0, 0)$. Časupodobný projektor by mohl být definován jako $u^\mu u^\nu$, je však výhodnější uvažovat pouze u^ν . Uvědomme si, že v lokálně klidové soustavě s Minkowského souřadnicemi získáme při kontrakci u_{LKS}^ν s vektorem časupodobný skalár tentýž, který je jedinou nenulovou složkou po aplikaci $u_{LKS}^\mu u_{LKS}^\nu$. Projektory jsou na sebe kolmé $\Delta_\mu^\nu u_\nu = 0$ a je splněna relace $\Delta_\mu^\nu \Delta_{\nu\rho} = \Delta_{\mu\rho}$.

Projektory využijme k přepsání nultého řádu rozvoje tenzoru energie a hybnosti (2.29) jako

$$T_{(0)}^{\mu\nu} = \epsilon u^\mu u^\nu + p \Delta^{\mu\nu} \quad (2.32)$$

a k rozložení pohybových rovnic na časupodobnou a prostorupodobnou část

$$u_\nu \nabla_\mu T_{(0)}^{\mu\nu} = 0, \quad (2.33)$$

$$\Delta_\nu^\rho \nabla_\mu T_{(0)}^{\mu\nu} = 0. \quad (2.34)$$

Zjistíme, že pro (2.33) máme

$$\begin{aligned} u_\nu \nabla_\mu T_{(0)}^{\mu\nu} &= -u^\mu \nabla_\mu \epsilon - \epsilon \nabla_\mu u^\mu + \epsilon u^\mu u_\nu \nabla_\mu u^\nu + p u_\nu \nabla_\mu \Delta^{\mu\nu} = \\ &= -(\epsilon + p) \nabla_\mu u^\mu - u^\mu \nabla_\mu \epsilon = 0, \end{aligned} \quad (2.35)$$

kde jsme použili identitu $u_\nu \nabla_\mu u^\nu = \frac{1}{2} \nabla_\mu u_\nu u^\nu = -\frac{1}{2} \nabla_\mu 1 = 0$. Pro prostorupodobnou projekci pohybových rovnic (2.34) získáme

$$\begin{aligned} \Delta_\nu^\rho \nabla_\mu T_{(0)}^{\mu\nu} &= \epsilon \Delta_\nu^\rho u^\mu \nabla_\mu u^\nu + \Delta^{\mu\rho} \nabla_\mu p + p \Delta_\nu^\rho u^\mu \nabla_\mu u^\nu = \\ &= (\epsilon + p) u^\mu \nabla_\mu u^\rho + \Delta^{\mu\rho} \nabla_\mu p = 0, \end{aligned} \quad (2.36)$$

kde platí $\Delta_\nu^\rho u^\mu \nabla_\mu u^\nu = g_\nu^\rho u^\mu \nabla_\mu u^\nu = u^\mu \nabla_\mu g_\nu^\rho u^\nu = u^\mu \nabla_\mu u^\rho$.

Projekce derivace: Zavedme výhodný zápis tzv. časupodobné a prostorupodobné derivace

$$D \equiv u^\mu \nabla_\mu, \quad \nabla_\perp^\rho \equiv \Delta^{\rho\mu} \nabla_\mu, \quad (2.37)$$

kdy $\nabla_\mu = u_\mu D + \nabla_\mu^\perp$ a platí $\nabla_\mu u^\mu = (u_\mu D + \nabla_\mu^\perp) u^\mu = (u_\mu u^\nu \nabla_\nu + \nabla_\mu^\perp) u^\mu = \nabla_\mu^\perp u^\mu$, protože $u^\nu u_\mu \nabla_\nu u^\mu = 0$.

S použitím (2.37) přepíšme Eulerovy relativistické rovnice (2.35) a (2.36) do finálního tvaru

$$D\epsilon + (\epsilon + p) \nabla_\mu^\perp u^\mu = 0, \quad (\epsilon + p) D u^\rho + \nabla_\perp^\rho p = 0 \quad (2.38)$$

Rovnice (2.38) jsou čtyři vztahy pro pět neznámých ϵ, p, u^μ , kdy u^μ představuje pouze tři nezávislé proměnné, kvůli $u^\mu u_\mu = -1$. Pro úplnost uvažujme stavovou rovnici $p = p(\epsilon)$, která je odvozena z mikroskopické teorie. Dle aplikace bychom mohli uvažovat např. i baryonové číslo spolu s jeho zákonem zachování.

Limitní přechod ke klasickým Eulerovým rovnicím

Víme, že pro čtyřrychlost u^μ a klasickou rychlost \mathbf{v} platí

$$u^\mu = \gamma(\mathbf{v}) \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \xrightarrow{|\mathbf{v}| \rightarrow 0} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} + \mathcal{O}(|\mathbf{v}|^2) \quad (2.39)$$

V nerelativistické limitě $|\mathbf{v}| \rightarrow 0$ přejdou operátory projekce derivace na tvar

$$D = u^\mu \nabla_\mu = u^0 \partial_0 + u^i \partial_i \xrightarrow{|\mathbf{v}| \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla + \mathcal{O}(|\mathbf{v}|^2), \quad (2.40)$$

$$\nabla_\perp^i = \Delta^{i\mu} \nabla_\mu \xrightarrow{|\mathbf{v}| \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x_i} + \mathcal{O}(|\mathbf{v}|^2), \quad (2.41)$$

$$\nabla_\perp^0 = \Delta^{0\mu} \nabla_\mu \xrightarrow{|\mathbf{v}| \rightarrow 0} 0 + \mathcal{O}(|\mathbf{v}|^2). \quad (2.42)$$

Pro platnost (2.41) a (2.42) si uvědomme, že při $|\mathbf{v}| \rightarrow 0$ jsou nerelativistické souřadné soustavy blízké lokálně klidové soustavě, kde již známe explicitní tvar projektorů. Hustota energie ϵ při $|\mathbf{v}| \rightarrow 0$ odpovídá hustotě klidové hmoty $\epsilon \sim \rho c^2$ (resp. hustotě, $c = 1$) a předpokládáme, že je mnohem větší než tlak v kapalině, tj. $\epsilon \gg p$.

S využitím vztahů (2.39)-(2.42) přepišme Eulerovy relativistické rovnice (2.38) v nerelativistické limitě jako

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \epsilon + \epsilon \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \nabla(\epsilon \mathbf{v}) = 0, \quad (2.43)$$

$$\epsilon \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = \epsilon \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p. \quad (2.44)$$

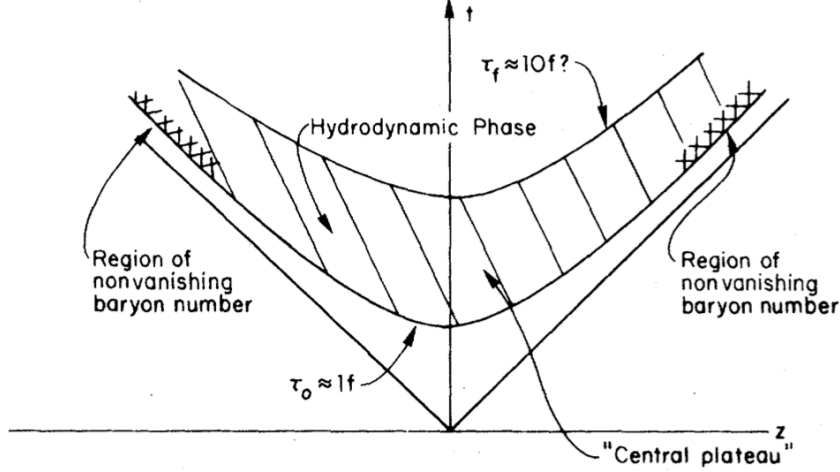
kdy (2.43) odpovídá rovnici kontinuity (2.13) a (2.44) klasickým Eulerovým rovnicím pro nevazkou kapalinu (2.12).

Bjorkenův model

Nyní se zabývejme nejjednodušším modelem pro popis hydrodynamické fáze QGP v regionu centrální rapidity vzniklého v ultrarelativistických jaderných srážkách na RHIC či LHC. QGP nacházející se v meziprostoru po srážce se vzdalujících jader je v tzv. hydrodynamické fázi až po čas několika fm. Ke konci života QGP nastává hadronizace – fázový přechod, kdy lze stále využít hydrodynamického popisu s příslušnou novou stavovou rovnicí. V $\tau \simeq 10$ fm i hadronový plyn *vymrzne*.

V rámci Bjorkenova scénáře je vývoj modelován jako jednodimenzionální expanze ve výhodných Milneho souřadnicích. Bude využito Eulerových relativistických pohybových rovnic (2.38) se zjednodušujícími předpoklady:

- Pohyb jader je podél osy z , jádra jsou homogenní a nekonečně rozlehlá ve směrech os x a y , čímž zanedbáváme závislost stavových proměnných na x, y .
- Bjorkenův tok – jednodimenzionální expanze ve směru osy z , kdy pro konkrétní část kontinua je kolektivní rychlost konstantní a rovna počáteční rychlosti $v_0^z \sim z/t$.



Obrázek 2.1: Vývoj QGP v centrální rapiditě s naznačenou hydrodynamickou fází. [27]

- Zaveďme Milneho souřadnice s vlastním časem $\tau = \sqrt{t^2 - z^2}$ a prostoro-časovou rapiditou $\eta = \text{arctanh}(\frac{z}{t})$. Fázové proměnné ϵ, p jsou funkcemi pouze vlastního času τ , protože konkrétní část kontinua má konstantní rychlost $v^z = v_0^z$, odkud i prostorupodobnou rapiditou $\eta = \text{arctanh}(\frac{v^z t}{t}) = \text{arctanh}(v^z)$, tj. fázové proměnné nezávisí od η . Čtyřrychlost má tvar

$$u^\mu = (u^\tau, u^x, u^y, u^\eta) = \left(\frac{d\tau}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{d\eta}{d\tau} \right) = (1, 0, 0, 0).$$

Pro Milneho souřadnice mějme metrický tenzor tvaru $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, \tau^2)$ a jediné nenulové Christoffelovy symboly

$$\Gamma_{\eta\tau}^\eta = \Gamma_{\tau\eta}^\eta = \frac{1}{\tau}, \quad \Gamma_{\eta\eta}^\tau = \tau,$$

jak lze nahlédnout v [26].

Zapišme Eulerovy relativistické rovnice (2.38) v Milneho souřadnicích a s předešlými předpoklady, tím získáme

$$\begin{aligned} D\epsilon + (\epsilon + p)\nabla_\mu^\perp u^\mu &= \nabla_\tau \epsilon + (\epsilon + p)\nabla_\eta u^\eta = \nabla_\tau \epsilon + (\epsilon + p)\Gamma_{\tau\eta}^\eta = \\ &= \frac{d\epsilon}{d\tau} + \frac{\epsilon + p}{\tau} = 0, \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$(\epsilon + p)Du^\rho + \nabla_1^\rho p = (\epsilon + p)\nabla_\tau u^\rho + \nabla_1^\rho p = \nabla_1^\rho p = 0, \quad (2.46)$$

kde se přes indexy τ, η nesčítá. Jelikož $p = p(\tau)$, tak je rovnice (2.46) identicky splněna, tj. s využitím zavedených symetrií, kdy ∇_1^ρ skutečně derivuje pouze přes prostorupodobné proměnné η, x, y .

Z (2.45) máme tedy rovnici

$$\frac{d\epsilon}{d\tau} = -\frac{\epsilon + p}{\tau}. \quad (2.47)$$

Uvažujeme-li i stavovou rovnici $p = p(\epsilon)$, tak lze převést (2.47) v jediný evoluční zákon pro energii ϵ .

2.2.3 Relativistická Navierova-Stokesova rovnice

Vytvořme další člen efektivního rozvoje (2.25), a to prvního řádu $T_{(1)}^{\mu\nu}$, který přináší již do systému disipaci. K jeho konstrukci můžeme uvažovat gradienty ∇_{μ}^{\perp} stavových proměnných ϵ, u^{μ} v přípustných tvarech

$$\nabla_{\mu}^{\perp} u^{\mu}, \quad \nabla_{\mu}^{\perp} \epsilon, \quad \nabla_{\mu}^{\perp} u_{\nu}, \quad (2.48)$$

tyto stavební bloky (2.48) kombinujme se členy z nultého řádu ϵ, u^{μ} a $g^{\mu\nu}$, resp. $\Delta^{\mu\nu}$. Nemůžeme uvažovat všechny kombinace, jelikož očekávaná hodnota tenzoru energie a hybnosti splňuje *Landauovu definici rychlosti* [29]

$$u_{\mu} \langle T^{\mu\nu} \rangle = -\epsilon u^{\nu}.$$

Jak lze vidět v (2.32), tak $u_{\mu} T_{(0)}^{\mu\nu} = -\epsilon u^{\nu}$, proto nutně musí $u_{\mu} T_{(1)}^{\mu\nu} = 0$. Této podmínce vyhovují členy $\Delta_{\mu\nu} \nabla_{\lambda}^{\perp} u^{\lambda}$, $\nabla_{\mu}^{\perp} u_{\nu}$ a $\nabla_{\nu}^{\perp} u_{\mu}$. Jelikož je tenzor energie a hybnosti symetrický, zavedmě symetrickou kombinaci předcházejících dvou bloků $\nabla_{\perp}^{(\mu} u^{\nu)} = \frac{1}{2}(\nabla_{\perp}^{\mu} u^{\nu} + \nabla_{\perp}^{\nu} u^{\mu})$. Ukazuje se být výhodné využívat dvě lineární kombinace z $\nabla_{\perp}^{(\mu} u^{\nu)}$, $\Delta_{\mu\nu} \nabla_{\lambda}^{\perp} u^{\lambda}$, a to

$$\Delta^{\mu\nu} \nabla_{\lambda}^{\perp} u^{\lambda}, \quad \sigma^{\mu\nu} = 2\nabla_{\perp}^{(\mu} u^{\nu)} - \frac{2}{3} \Delta^{\mu\nu} \nabla_{\lambda}^{\perp} u^{\lambda},$$

kdy má $\sigma^{\mu\nu}$ nulovou stopu, tj. $g_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} = 0$. Nyní lze zapsat příspěvek prvního řádu rozvoje tenzor energie a hybnosti (2.25) jako

$$T_{(1)}^{\mu\nu} = -\eta \sigma^{\mu\nu} - \zeta \Delta_{\mu\nu} \nabla_{\lambda}^{\perp} u^{\lambda}, \quad (2.49)$$

kde $\eta(\epsilon), \zeta(\epsilon)$ jsou hydrodynamické koeficienty *prvního řádu* závislé na hustotě energie ϵ , nazývají se smyková a objemová viskozita.

Pohybové rovnice získáme jako

$$\nabla_{\mu} (T_{(0)}^{\mu\nu} + T_{(1)}^{\mu\nu}) = 0,$$

což ekvivalentně $\nabla_{\mu} T_{(0)}^{\mu\nu} = -\nabla_{\mu} T_{(1)}^{\mu\nu}$. Odkud v časupodobné a prostorupodobné projekci

$$D\epsilon + (\epsilon + p) \nabla_{\lambda}^{\perp} u^{\lambda} = \frac{\eta}{2} \sigma^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} + \zeta (\nabla_{\lambda}^{\perp} u^{\lambda})^2 \quad (2.50)$$

$$(\epsilon + p) D u^{\alpha} + \nabla_{\perp}^{\alpha} p = \nabla_{\nu}^{\alpha} \nabla_{\mu} (\eta \sigma^{\mu\nu} + \zeta \nabla_{\lambda}^{\perp} u^{\lambda}). \quad (2.51)$$

V odvození sme využili identity $u_{\mu} \nabla_{\nu} \sigma^{\mu\nu} = \nabla_{\nu} (0) - \sigma^{\mu\nu} \nabla_{\nu} u_{\mu} = -\frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}$, protože $u_{\mu} \sigma^{\mu\nu} = 0$. Navíc zřejmě $\Delta^{\mu\nu} \nabla_{\nu}^{\perp} u_{\mu} = \nabla_{\perp}^{\mu} u_{\mu}$.

Rovnice (2.50), (2.51) nazýváme relativistickými Navierovými-Stokesovými rovnicemi. Nejsou však tak využívané oproti jejich nerelativistickým protějškům, protože nejsou kauzální – dovolují šíření *kolektivních módů* rychleji, než je rychlost světla ve vakuu.

Limitní přechod ke klasické Navierovi-Stokesovi rovnici

V rámci limitního přechodu k nerelativistickým rovnicím využijeme stejných argumentů a vztahů (2.39)-(2.42) jako pro Eulerovy rovnice. Po menších úpravách lze poté zapsat relativistické Navierovy-Stokesovy rovnice (2.50), (2.51) v nerelativistické limitě

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \epsilon + \epsilon \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \nabla(\epsilon \mathbf{v}) = 0, \quad (2.52)$$

$$\epsilon \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \epsilon(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \epsilon \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{1}{3}\eta\right) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}). \quad (2.53)$$

První rovnice (2.52) má nulovou pravou stranu, protože dané členy v (2.50) jsou kvadratické v rychlostech, a tím zanedbatelné. Vidíme, že (2.52) odpovídá rovnici kontinuity (2.13) a rovnice (2.53) koresponduje s klasickou Navierovou-Stokesovou rovnicí (2.15).

2.2.4 Smykové a objemové napětí, efektivní tlak

Je zřejmé, že nyní jsme schopni systematicky přidávat členy vyšších řádu do rozvoje (2.25) a získávat příslušné pohybové rovnice popisující hydrodynamiku přesněji v blízkosti hydrostatické rovnováhy. Obecně se proto zavádí zápis, kdy jsme rozdělili korekce k nultému řádu tenzoru energie a hybnosti $T_{(0)}^{\mu\nu}$ na část s nulovou stopou $\pi^{\mu\nu}$ a nenulovou stopou $\Delta^{\mu\nu}\Pi$. Střední hodnota tenzoru energie a hybnosti v libovolném řádu je

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle = T_{(0)}^{\mu\nu} + \pi^{\mu\nu} + \Delta^{\mu\nu}\Pi, \quad \text{kde} \quad (2.54)$$

$$\pi^{\mu\nu} = T_{(1)}^{<\mu\nu>} + T_{(2)}^{<\mu\nu>} + \dots, \quad 3\Pi = T_{(1)\mu}^{\mu} + T_{(2)\mu}^{\mu} + \dots \quad (2.55)$$

Označením indexů $A^{<\mu\nu>}$ rozumíme

$$A^{<\mu\nu>} \equiv \left(\frac{1}{2} \Delta_{\lambda}^{\mu} \Delta_{\rho}^{\nu} + \frac{1}{2} \Delta_{\lambda}^{\nu} \Delta_{\rho}^{\mu} - \frac{1}{3} \Delta^{\mu\nu} \Delta_{\lambda\rho} \right) A^{\lambda\rho}.$$

Lze se přesvědčit, že např. $\sigma^{\mu\nu} = 2\nabla^{<\mu} u^{\nu>}$ s využitím vztahu $\Delta^{\mu\lambda} \Delta^{\nu\rho} \nabla_{\lambda}^{\perp} u_{\rho} = \nabla_{\perp}^{\mu} u^{\nu}$.

Nově definované členy $\pi^{\mu\nu}, \Pi$ nazýváme smykovým, resp. objemovým napětím a skrze vztahy (2.55) jsou svázány s tenzorem energie a hybnosti. V praxi lze $\pi^{\mu\nu}, \Pi$ chápat jako nové dynamické proměnné hydrodynamického systému, a proto je nutné přidat jejich pohybové rovnice. Tyto rovnice obasahují časové derivace $D = u^{\mu} \nabla_{\mu}$ v konstrukcích typu

$$\tau_{\pi} D \pi^{\mu\nu} = -\pi^{\mu\nu} + \dots, \quad \tau_{\Pi} D \Pi = -\Pi + \dots, \quad (2.56)$$

kde ... reprezentuje explicitní definice smykového, resp. objemového napětí a τ_{π}, τ_{Π} jsou *relaxační časy* na jejichž škálách jsou $\pi^{\mu\nu}$ a Π tlumeny. Doplnkové pohybové rovnice (2.56) zajišťují kauzalitu – nedovolují šíření *kolektivních módů* rychleji, než je rychlost světla ve vakuu [28].

Z (2.54) vidíme, že prostorupodobné diagonální prvky tenzoru energie a hybnosti v n -tém řádu $T_{(0)}^{ii}$ (přes i nebudeme sčítat) získávají korekce

$$\langle T^{ii} \rangle = T_{(0)}^{ii} + \pi^{ii} + \Delta^{ii} \Pi,$$

kdy $T_{(0)}^{ii}$ představuje tlak v hydrostatické rovnováze $p(\epsilon)$. V lokálně klidové soustavě zadefinujeme efektivní fenomenologický tlak $p_{eff}^{(i)}$ v i -tém směru jako

$$p_{eff}^{(i)} \equiv p + \pi_{LKS}^{ii} + \Pi. \quad (2.57)$$

Tento efektivní tlak $p_{eff}^{(i)}$ odpovídá pozorovatelnému tlaku v tekutině a obecně již není izotropní. Otázkou je, zdali se mohou členy π_{LKS}^{ii} a Π považovat za pouhé korekce, protože dále od hydrostatické rovnováhy jsou srovnatelné s tlakem p .

Kapitola 3

Fenomenologie anizotropií hydrodynamické fáze

Zajímejme se pouze o příčnou expanzi QGP ve střední rapiditě ($|\eta| < 0, 1$).

V rámci hydrodynamiky získáváme popis vývoje fázových proměnných $u^\mu, \varepsilon, p, \dots$ z daných počátečních podmínek (rozložení hustoty energie $\varepsilon(x, y, \tau_0)$). Vývoj tohoto nekonečně dimenzionálního dynamického systému je složité charakterizovat, kvůli jeho velkému počtu stupňů volnosti. Abychom mohli snáze kvantifikovat kolektivní chování média, tak byly zavedeny integrální skalární veličiny – *prostorové a hybnostní anizotropie*, kterými charakterizujeme rozmístění a tok kvark-gluonové hmoty. Vývoj těchto veličin sledujeme v reálném čase v hydrodynamických simulacích.

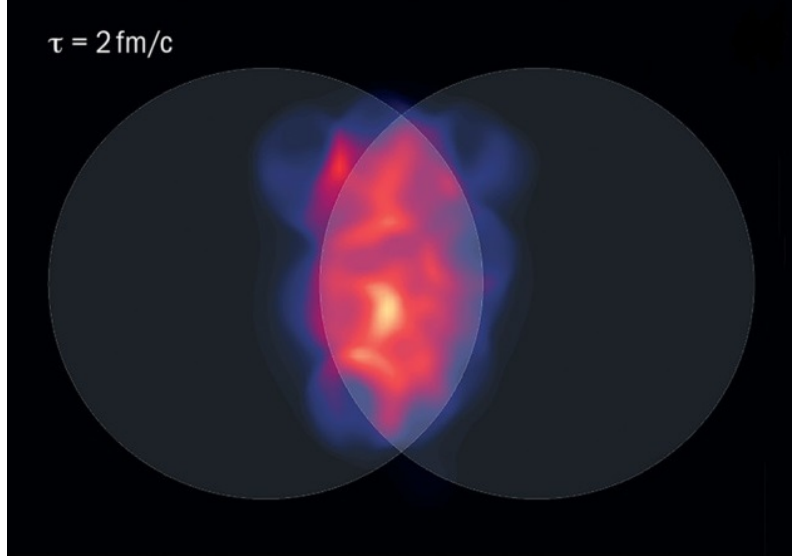
Mluvíme o anizotropiích, kterými měříme odchylky vývoje QGP od idealizovaného průběhu z přímých srážek (v 0% centralitě) s azimutálně symetrickým počátečním profilem hustoty energie. Dle pohybových rovnic by poté následoval izotropní radiální tok hmoty ze středu fireballu. V tomto případě by námi definované veličiny anizotropie měli být z konstrukce rovny nule.

3.1 Prostorové anizotropie

Definice prostorové anizotropie jsou zejména podobné tvaru Fourierových koeficientů v_n charakterizující rozdělení hadronů. Je to proto, aby byla posílena jejich vzájemná korelace. Definujme nyní dle [3] prostorovou anizotropii

$$\epsilon_x(\tau) = \frac{\langle x^2 - y^2 \rangle_\varepsilon}{\langle x^2 + y^2 \rangle_\varepsilon} \equiv \frac{\int dx dy \varepsilon(x, y, \tau) (x^2 - y^2)}{\int dx dy \varepsilon(x, y, \tau) (x^2 + y^2)} = \frac{\int r dr d\phi \varepsilon(r, \phi, \tau) r^2 \cos 2\phi}{\int r dr d\phi \varepsilon(r, \phi, \tau) r^2}, \quad (3.1)$$

kde zřejmě $\langle \dots \rangle_\varepsilon$ značí středování přes rovinu $x \times y$ s hustotou energie ε jako vahou a (r, ϕ) jsou polární souřadnice. Vidíme korespondenci s koeficientem v_2 (viz (1.6)), kdy váha odpovídající rozložení hadronů $\frac{dN}{dy d\phi dp_T}$ je nyní nahrazena hustotou energie ε a integrujeme podél jiné integrační proměnné. Navíc nyní v integrálu vystupuje příčná vzdálenost $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ pocházející z rozdílu $x^2 - y^2$, která zveličuje příspěvky dále od středu fireballu. Váha v příčné vzdálenosti r^m je často využívána při



Obrázek 3.1: Typický eliptický profil počáteční hustoty energie. [24]

konstrukci prostorových, či hybnostních anizotropií, kdy předpokládáme, že vnější vrstvy fireballu přispívají významněji do anizotropií výsledných hadronů v_n . Čímž posilujeme jejich korelace.

Rozšířenější definici prostorové anizotropie nabízí např. [4], kde definujeme i vyšší řády v n analogicky jako pro koeficienty v_n . Navíc dovolme flexibilní exponent m příčné vzdálenosti jako r^m . Tedy

$$\epsilon_{m,n}^x(\tau) = -\frac{\int r dr d\phi \varepsilon(r, \phi, \tau) r^m \cos[n(\phi - \Psi_{m,n})]}{\int r dr d\phi \varepsilon(r, \phi, \tau) r^m}, \quad (3.2)$$

kde získáme fázi $\Psi_{m,n}$ z počátečního rozdělení hustoty energie $\varepsilon(r, \phi, \tau_h) = \varepsilon(x, y, \tau_h)$ jako

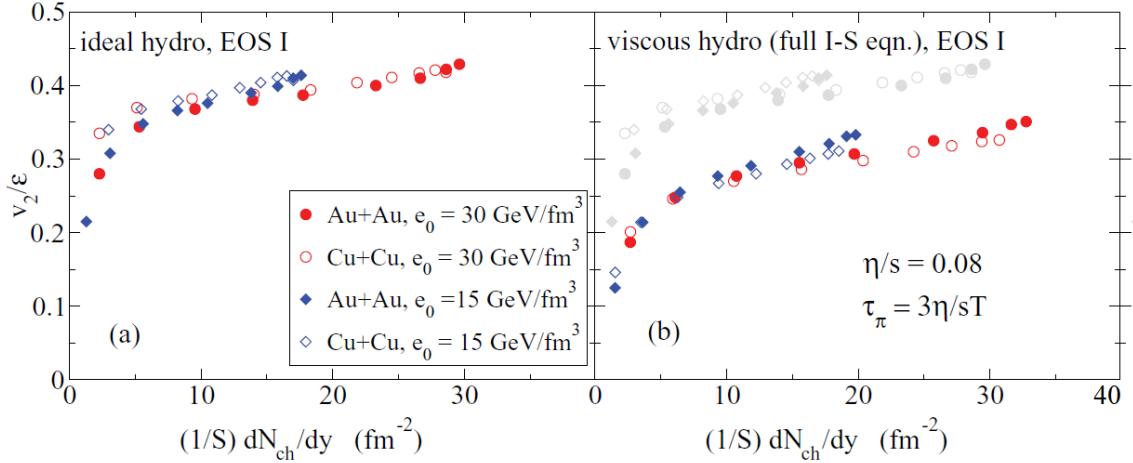
$$\Psi_{m,n} = \frac{1}{n} \arctan \frac{\int r dr d\phi \varepsilon(r, \phi, \tau_0) r^m \sin[n\phi]}{\int r dr d\phi \varepsilon(r, \phi, \tau_0) r^m \cos[n\phi]} + \frac{\pi}{n}. \quad (3.3)$$

V předešlých definicích se zejména volí $m = 2$ a značí $\epsilon_n^x \equiv \epsilon_{2,n}^x$. Intenzivně jsou studovány korelace $\epsilon_n^x(\tau_h)$ s v_n pro vzájemně různá n . V čase $\tau_h > 0$ spouštíme hydrodynamickou simulaci.

Konstrukce (3.3) pro každý řád n efektivně natáčí souřadný systém osou y ve směru převládající hustoty energie ε vzhledem k harmonické váze $\cos[n(\phi - \Psi_{m,n})]$, a tím maximalizuje počáteční prostorovou anizotropii daného řádu $\epsilon_{m,n}^x$. Proto získáváme jednoznačnou hodnotu prostorové anizotropie $\epsilon_{m,n}^x$ nezávisle na původním natočení systému v rovině $x \times y$.

3.1.1 Škálování eliptického toku s excentricitou

Kvůli prvním pozorováním silného eliptického toku v_2 byla v hydrodynamických simulacích studována jeho závislost na počátečním eliptickém uspořádání hmoty



Obrázek 3.2: Excentricitou škálovaný eliptický tok v_2/ϵ_2^x v závislosti na výsledných multiplicitách nabitých částic $(1/S)dN_{ch}/dy$ pro *konformní kapalinu* [26] se stavovou rovnicí $\epsilon = 3p$. Porovnání srážek Au+Au a Pb+Pb. **Vlevo:** Hodnoty pro ideální kapalinu. **Vpravo:** Výsledky pro viskózní kapalinu [3] s *Israelovými-Stewartovými rovnicemi* v porovnání s ideální kapalinou (šedivými body).

$\epsilon_2^x(\tau_h)$, v literatuře značeno pouze ϵ_2^x (pozor na záměnu s dynamickou proměnnou $\epsilon_2^x(\tau)$). Pouze v této a následující podkapitole využijme statického značení $\epsilon_2^x \equiv \epsilon_2^x(\tau_h)$. Prostorovou anizotropii ϵ_2^x nazýváme také *excentricitou*. Eliptický profil počáteční hustoty energie, který je excentricitou kvantifikován, lze vidět na Obr. 3.1.

Studujme korelace závislosti poměru eliptického toku a excentricity v_2/ϵ_2^x na výsledných multiplicitách nabitých částic $(1/S)dN_{ch}/dy$. Nahlédněme na Obr. 3.2, kde je vystředovaná korelace daných veličin přes mnoho eventů. Normalizace multiplicit $1/S$ kompenzuje různorodost v rozlehlosti systému mezi Au+Au a Pb+Pb srážkami a mezi různými počátečními hustotami energie značené e_0 (pro způsob deponace viz [3]). Je definována jako $S = \pi\sqrt{\langle x^2 \rangle \langle y^2 \rangle}$, kde se váhuje přes hustotu energie. Na Obr. 3.2 vidíme výsledky pro ideální a viskózní hydrodynamiku s $\eta/s = 0,08$. Na obou grafech pozorujeme pro nízké hodnoty multiplicit i nízké hodnoty poměru v_2/ϵ_2^x , je to zapříčiněno nemožností rozvinout plně hydrodynamickou expanzi v krátko žijících systémech. Ve vyšších hodnotách multiplicit proběhne již plně hydrodynamický vývoj a lze pozorovat saturaci poměru v_2/ϵ_2^x . Rozdíl v hodnotách mezi ideálním a viskózním případem na Obr. 3.2 je zapříčiněn smykovým napětím, které zeslabuje anizotropní tok řídicí se gradientem tlaku. V porovnání Obr. 3.2(a) a 3.2(b) si můžeme všimnout posunu hodnot ve směru osy multiplicit dvou analogických nastavení, tj. pro stejný typ srážky a stejnou hustotu energie e_0 . Je to způsobeno produkcí entropie ve viskózním případě, což zvyšuje multiplicity daného nastavení.

Saturace škálování eliptického toku excentricitou poukazuje na zřejmý závěr: Pro dostatečně velké systémy pozorujeme úměrnou propagaci počáteční prostorové anizotropie ϵ_2^x do eliptického toku nabitých hadronů v_2 .

3.1.2 Korelace prostorových anizotropií ϵ_n^x s v_n

V [4] byl studován koeficient lineární korelace veličin prostorové anizotropie ϵ_n^x a Fourierových koeficientů rozdělení hadronů v_n pro shodné řády n . Lineárním koeficientem míníme konstantu C_n takovou, že $v_n \sim C_n \epsilon_n^x$, tj. $C_n = \langle v_n \rangle_{ev} / \langle \epsilon_n^x \rangle_{ev}$, kde $\langle \dots \rangle_{ev}$ značí středování přes více událostí.

Výsledek takové analýzy pro Au+Au kolize při $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV s $\eta/s = 0$, či $\eta/s = 0,16$ lze vidět na Obr. 3.3. Na Obr. 3.3(a) vidíme téměř lineární korelaci mezi počáteční prostorovou anizotropií a výsledným eliptickým tokem s koeficientem $C_2 = 0,207$. Rozptýl hodnot v_n v závislosti na ϵ_n^x roste s řádem n a zřejmě se porušuje lineárnost korelace. Byly pozorovány větší korelace mezi $(\epsilon_2^x)^2$ a v_4 než mezi ϵ_4^x a v_4 , konkrétně $c(\epsilon_4^x, v_4) = 40\% c((\epsilon_2^x)^2, v_4)$ s využitím definice korelace náhodných veličin a a b :

$$c(a, b) = \left\langle \frac{(a - \langle a \rangle_{ev})(b - \langle b \rangle_{ev})}{\sigma_a \sigma_b} \right\rangle, \quad (3.4)$$

σ_a, σ_b jsou příslušné směrodatné odchylky.

3.2 Hybnostní anizotropie

Hybnostní anizotropie zatím postrádají koherentní definice, které by zajišťovali možné zobecnění v řádech n , či m , jako u prostorových anizotropií (3.2). O takové definice se pokusíme i s konstrukcí *anizotropie potenciálu*. Nejdříve však ukážeme používané hybnostní anizotropie využívající prvků tenzoru energie a hybnosti $T^{\mu\nu}$, či kombinace polí příčné rychlosti $v_T = (v_x, v_y)^T$ a hustoty energie ε .

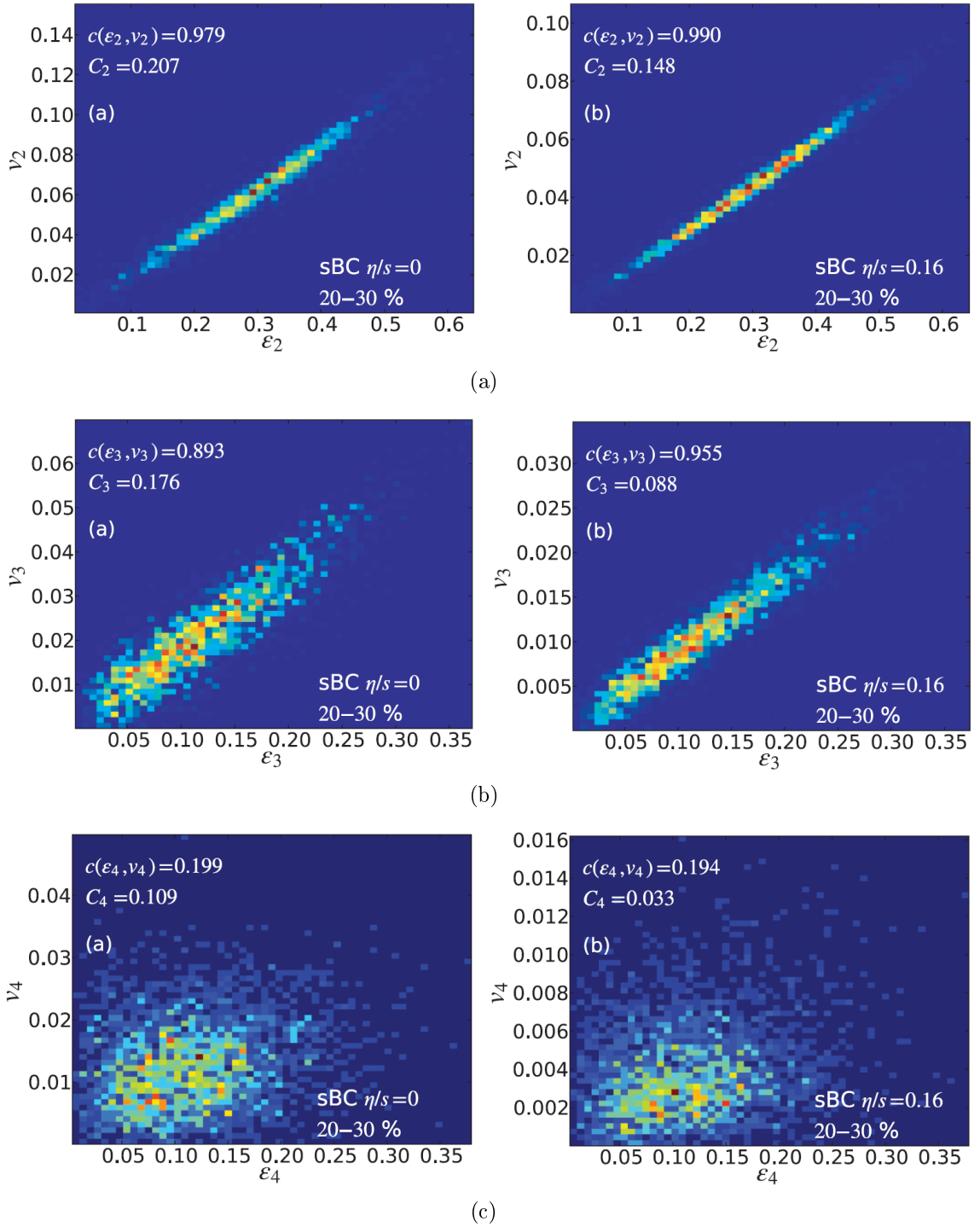
3.2.1 Prvky tenzoru energie a hybnosti

Jak lze vidět například v [20], tak obecně prvky tenzoru energie a hybnosti $T^{\mu\nu}$ odpovídají *tokům energie a hybnosti*. Tyto prvky jsou svázány skrze pohybové rovnice $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Dle definice platí

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \varepsilon & S_x/c & S_y/c & S_z/c \\ S_x/c & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ S_y/c & \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ S_z/c & \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix},$$

kde $T^{01} = S_x/c$, $T^{02} = S_y/c$, $T^{03} = S_z/c$ jsou složky vektoru *hustoty toku energie* \mathbf{S} . Prvky σ_{ij} nazýváme *hustotami toku hybnosti*. V Minkovského souřadnicích například ukažme důsledek pohybových rovnic v prvním sloupci, pro $\nu = 0$ získáme

$$\nabla_\mu T^{\mu 0} = \partial_t \varepsilon + \frac{1}{c} (\partial_x S_x + \partial_y S_y + \partial_z S_z) = 0 \iff \frac{d\varepsilon}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{S}.$$



Obrázek 3.3: Korelace 2000 eventů Au+Au srážek při $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV v 20-30% centralitě. Pro viskozity s $\eta/s = 0$ vlevo a $\eta/s = 0,16$ vpravo. sBC odpovídá způsobu inicializace hydrodynamické fáze z počátečního rozložení energie [4]. **(a)**: Korelace v_2 a ϵ_2^x . **(b)**: Korelace v_3 a ϵ_3^x . **(c)**: Korelace v_4 a ϵ_4^x .

S využitím $\partial_t = \frac{d}{dx^0} = \frac{d}{cdt}$ vidíme rovnici kontinuity pro hustotu energie. Volbou $\nu = 1$ získáme zákony vývoje pro složky hustoty toku energie \mathbf{S} :

$$\begin{aligned}\nabla_\mu T^{\mu 1} &= \partial_t \frac{S_x}{c} + \partial_x \sigma_{xx} + \partial_y \sigma_{yx} + \partial_z \sigma_{zx} = 0 \\ \iff \frac{1}{c^2} \frac{dS_x}{dt} &= -\frac{d\sigma_{xx}}{dx} - \frac{d\sigma_{yx}}{dy} - \frac{d\sigma_{zx}}{dz}.\end{aligned}$$

V definicích hybnostních anizotropií budeme využívat relevantních rozdílů prvků tenzoru energie a hybnosti $T^{\mu\nu}$, čímž můžeme poměřovat toky energie, či hybnosti v různých směrech.

Ukažme si používané tvary hybnostních anizotropií, kam spadají i *anizotropie toku*, či *toku energie*. Definujme dle [3] anizotropii toku

$$\langle |v_x| - |v_y| \rangle \equiv \frac{\langle |v_x| - |v_y| \rangle_\varepsilon}{\langle |v_x| + |v_y| \rangle_\varepsilon} \quad (3.5)$$

a anizotropii toku energie

$$\langle |S^{\tau x}| - |S^{\tau y}| \rangle \equiv \frac{\langle |S_x| - |S_y| \rangle_{plane}}{\langle |S_x| + |S_y| \rangle_{plane}} = \frac{\langle |T^{01}| - |T^{02}| \rangle_{plane}}{\langle |T^{01}| + |T^{02}| \rangle_{plane}}. \quad (3.6)$$

Značením $\langle \dots \rangle_{plane}$ rozumíme, že neváhujeme přes příčnou rovinu s hustotou energie ε , protože je již obsažena v prvcích tenzoru $T^{\mu\nu}$. Definice jsou závislé na použitém tvaru tenzoru energie a hybnosti, máme následující možnosti: ideální hydrodynamiku s $T^{\mu\nu} = T_{(0)}^{\mu\nu}$ a viskózní hydrodynamiku $T^{\mu\nu} = T_{(0)}^{\mu\nu} + \pi^{\mu\nu} + \Delta^{\mu\nu}\Pi$, kde navíc volíme tvary smykového a objemového napětí $\pi^{\mu\nu}$, resp. Π , implicitně i pomocí dynamické viskozity η a objemové viskozity ζ .

Obě nově definované anizotropie můžeme vidět na Obr. 3.4, kde pozorujeme snižování počátečního toku energie $\langle |S^{\tau x}| - |S^{\tau y}| \rangle$, současné budování anizotropie toku $\langle |v_x| - |v_y| \rangle$ a následnou saturaci (zejména se stavovou rovnicí SM-EOS Q). Je využito ideální i viskózní hydrodynamiky s $T^{\mu\nu} = T_0^{\mu\nu} + \pi^{\mu\nu}$, $\eta/s = 0,08$ a se dvěma typy stavové rovnice: EOS I odpovídající stavové rovnici ideálního plynu ($\varepsilon = 3p$) a vyhlazenou verzi SM-EOS Q, viz [3].

Další již zavedenou anizotropií je rozdíl diagonálních prostorupodobných prvků tenzoru energie a hybnosti $T^{11} - T^{22}$ integrované přes rovinu $x \times y$ a s příslušnou normalizací. V literatuře nazývaná jednoduše *hybnostní anizotropií*

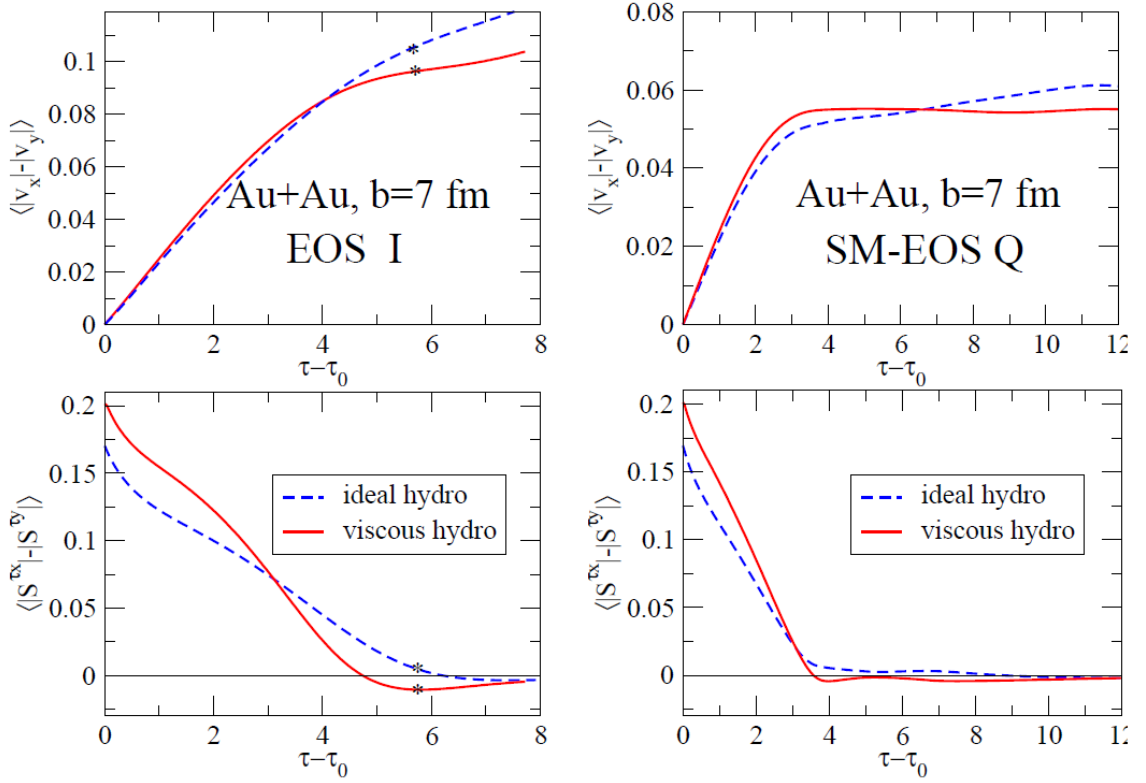
$$\epsilon_p(\tau) = \frac{\langle T^{11} - T^{22} \rangle_{plane}}{\langle T^{11} + T^{22} \rangle_{plane}}. \quad (3.7)$$

Ukažme pro ilustraci rozdíl diagonálních prvků v případě ideální hydrodynamiky

$$\begin{aligned}T_{(0)}^{11} - T_{(0)}^{22} &= (\varepsilon + p)u^x u^x + p - (\varepsilon + p)u^y u^y - p = \\ &= (\varepsilon + p)(u^x u^x - u^y u^y) = (\varepsilon + p)\gamma^2(v_x^2 - v_y^2)\end{aligned}$$

a jejich viskózních korekcí s využitím $\Delta^{ii} = (1 + u^i u^i)$:

$$\begin{aligned}\pi^{11} + \Delta^{11}\Pi - \pi^{22} - \Delta^{22}\Pi &= \pi^{11} - \pi^{22} + \Pi(u^x u^x - u^y u^y) = \\ &= \pi^{11} - \pi^{22} + \Pi\gamma^2(v_x^2 - v_y^2)\end{aligned}$$



Obrázek 3.4: Časový vývoj anizotropie toku $\langle |v_x| - |v_y| \rangle$ a anizotropie toku energie $\langle |S^{\tau x}| - |S^{\tau y}| \rangle$ v ideálním a viskózním případě pro jeden event. **Vlevo:** Využitá relativistická stavová rovnice EOS I. **Vpravo:** Využitá modifikovaná relativistická stavová rovnice SM-EOS Q. [3]

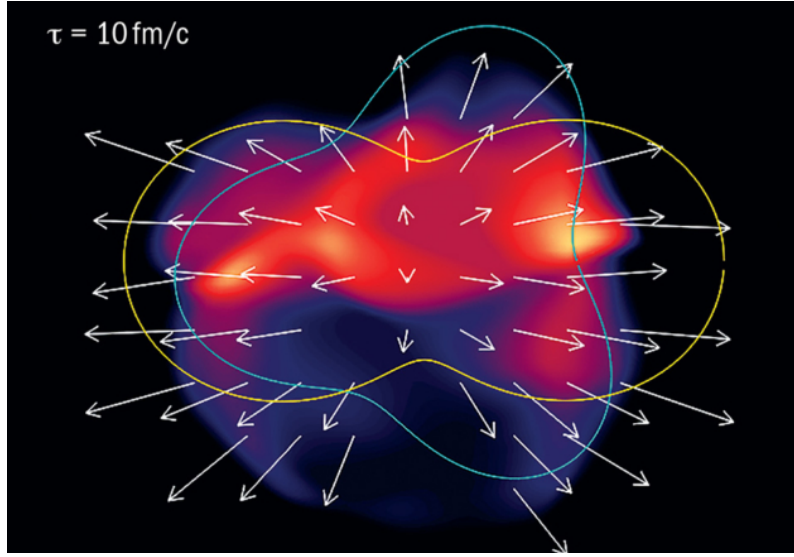
poté již hybnostní anizotropie ve viskózní hydrodynamice bez explicitních tvarů smykového a objemového napětí $\pi^{\mu\nu}$, Π :

$$\begin{aligned}
 \epsilon_p(\tau) &= \frac{\langle (T_{(0)}^{11} + \pi^{11} + \Delta^{11}\Pi) - (T_{(0)}^{22} + \pi^{22} + \Delta^{22}\Pi) \rangle_{plane}}{\langle (T_{(0)}^{11} + \pi^{11} + \Delta^{11}\Pi) + (T_{(0)}^{22} + \pi^{22} + \Delta^{22}\Pi) \rangle_{plane}} = \\
 &= \frac{\int dx dy (\varepsilon + p + \Pi) \gamma^2 (v_x^2 - v_y^2) + \pi^{11} - \pi^{22}}{\int dx dy (\varepsilon + p + \Pi) \gamma^2 (v_x^2 + v_y^2) + \pi^{11} + \pi^{22} + 2(p + \Pi)}. \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

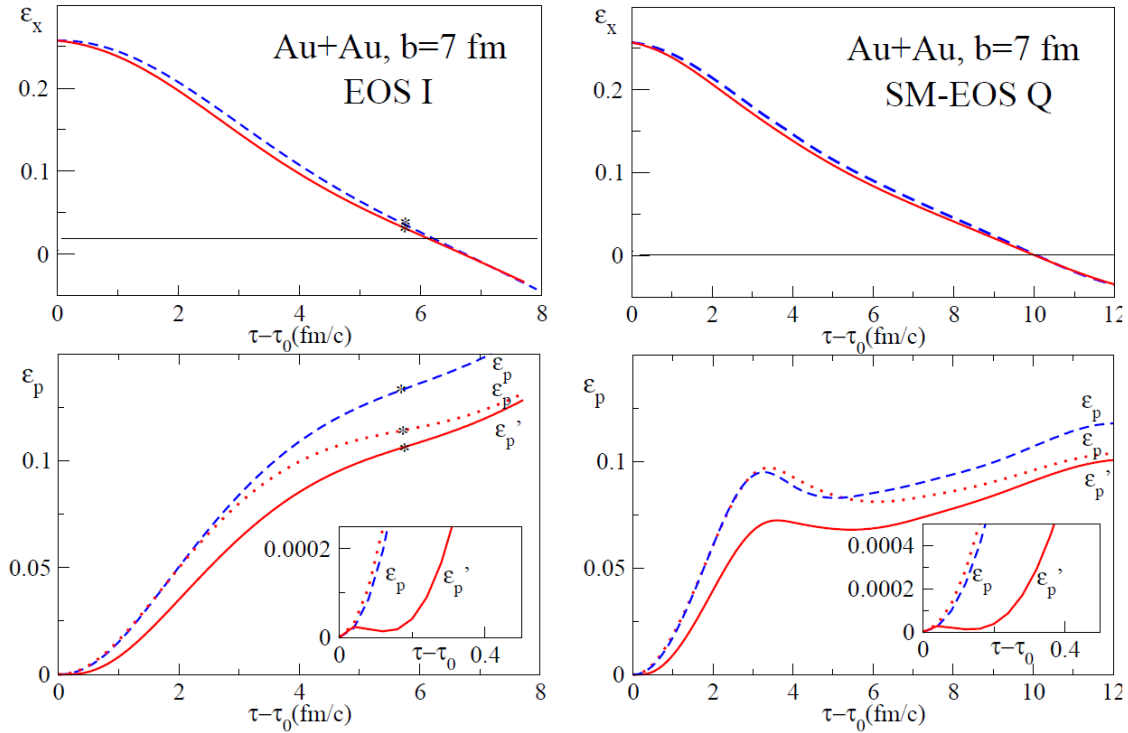
Na Obr. 3.6 můžeme vidět časový průběh excentricity ϵ_x ze vztahu (3.1) a hybnostní anizotropie ϵ_p z (3.7). V porovnání ideální a viskózní hydrodynamiky vidíme očekávané chování, a sice mírné ponížení hybnostní anizotropie viskózní expanze. Průběhy křivek odpovídají postupné transformaci prostorové anizotropie do hybnostní anizotropie, tedy hydrodynamickému vývoji, který nastává mezi Obr. 3.1 a 3.5.

V definici (3.7), resp. (3.8) implicitně uvažujeme i váhy s harmonickou funkcí, ne však v polárním úhlu $\phi = \arctan(y/x)$ jako u prostorové anizotropie (3.2). Pokud bychom využili substituci $v_x = v_T \cos(\phi_v)$ (ekvivalentně $u^x = u^T \cos(\phi_v)$) a $v_y = v_T \sin(\phi_v)$, tak přejde rozdíl a součet kvadrátů složek příčné rychlosti na tvary

$$v_x^2 - v_y^2 = v_T^2 \cos(2\phi_v), \quad \text{resp.} \quad v_x^2 + v_y^2 = v_T^2,$$



Obrázek 3.5: Typický vývoj eliptického profilu z Obr. 3.1 s graficky znázorněnými harmonickými vahami ($n = 1, 2$) a šipkami pro ilustraci toku hmoty. [24]



Obrázek 3.6: Průběhy excentricity (3.1) a hybnostní anizotropie (3.7) v ideálním případě znázorněné modrou křivkou. Červené křivky značí dva typy viskózní hydrodynamiky, viz [14], registrujme zejména tu nepřerušovanou. **Vlevo:** Při využití relativistické stavové rovnice EOS I. **Vpravo:** Využitá modifikovaná relativistická stavová rovnice SM-EOS Q.

navíc pomocí identity $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$. Člen $\cos(2\phi_v)$ s fází $\phi_v = \arctan(v_y/v_x)$ poměřuje rychlosti ve směrech x a y . Pro rychlost pouze ve směru osy x získáme váhu $\cos 0 = 1$, naopak ve směru osy y máme $\cos(\pm\pi) = -1$ a pokud $v_x = v_y$ pak $\cos(\pi/2) = 0$. Ze symetrie lze zřejmě nahlédnout, že hybnostní anizotropie bude při izotropním poli rychlosti $\mathbf{v} = (v_x, v_y)^T$ zajisté nulová. Interpretace fáze ϕ_v je ovšem přinejmenším neintuitivní, a tím i samotné harmonické váhy. Pokud se vrátíme k prostorové anizotropii (3.1) přinášející rozdíl kartézských proměnných

$$x^2 - y^2 = r^2 \cos(2\phi),$$

poté $\phi = \arctan(y/x)$ nepostrádá interpretaci, jelikož váhuje rozmístění hmoty v polárním úhlu.

3.2.2 Hybnostní anizotropie s harmonickými vahami

Zadefinujme nové hybnostní anizotropie ve tvaru analogickém prostorovým anizotropiím (3.2), kdy požadujeme zobecnění v řádech n :

$$\epsilon_{m,n}^p(\tau) = - \frac{\int r dr d\phi \sqrt{(T^{01})^2 + (T^{02})^2} r^m \cos[n(\phi - \Psi_{m,n})]}{\int r dr d\phi T^{00} r^m}. \quad (3.9)$$

Jmenovatel se liší od jmenovatele prostorové anizotropie pouze nahrazením $\varepsilon \rightarrow \sqrt{(T^{01})^2 + (T^{02})^2}$, kdy nový člen odpovídá velikosti *hustoty příčného toku energie* $\mathbf{S}_T = (S_x, S_y)^T = c(T^{01}, T^{02})^T$ v daném bodě. Využíváme prvků T^{01} , T^{02} oproti diagonálním T^{11} , T^{22} , či T^{11} , T^{12} , jelikož pozdější dvojice nemají zřejmou interpretaci, narozdíl od vektorového pole hustoty příčného toku \mathbf{S}_T .

Fázový posun $\Psi_{m,n}$ je určen vztahem (3.3), tedy počátečním rozložením hustoty energie, jelikož se domníváme, že pokud bychom spočetli pro hybnostní anizotropii unikátní fázový posun $\xi_{m,n}$, pak by byl s $\Psi_{m,n}$ silně korelován.

Normalizaci (3.9) volíme s prvkem T^{00} , který je pro nízké rychlosti $v \sim 0$ (v počátku formace QGP $\tau \sim 0$ fm) úměrný nenulové hustotě energie $T^{00} \sim \varepsilon$, jak lze vidět ze vztahu (3.10). Ve jmenovateli (3.9) nemůžeme využít výrazu $\sqrt{(T^{01})^2 + (T^{02})^2}$, který je v raných časech nulový, protože nedochází k toku energie v příčné rovině.

Nahlédněme na explicitní tvary využitých prvků tenzoru energie a hybnosti v obecném případě s $T^{\mu\nu} = T_{(0)}^{\mu\nu} + \pi^{\mu\nu} + \Delta^{\mu\nu}\Pi$:

$$\begin{aligned} T^{00} &= (\varepsilon + p + \Pi)\gamma^2 - (p + \Pi) + \pi^{00} = \varepsilon\gamma^2 + v^2\gamma^2(p + \Pi) + \pi^{00}, \\ T^{01} &= (\varepsilon + p + \Pi)v_x\gamma^2 + \pi^{01}, \\ T^{02} &= (\varepsilon + p + \Pi)v_y\gamma^2 + \pi^{02}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

kde jsme v (3.10) použili vztah $\gamma^2 - 1 = v^2\gamma^2$.

Na Obr. 3.5 vidíme graficky znázorněné harmonické váhy pro řády $n = 2, 3$ orientované dle počátečního rozložení hustoty energie a šipky představující anizotropní tok hmoty.

3.3 Anizotropie potenciálu

Od hybnostních anizotropií očekáváme zachycení nesymetričnosti dvoudimenzionálních vektorových polí v polárním úhlu. Vybereme vektorová pole, které asociujeme s *tokem hybnosti*, pro takovou fyzikální interpretaci se jeví vhodné *vážené rychlostní pole*, samotné rychlostní pole

$$\mathbf{v}_\varepsilon = \varepsilon(v_x, v_y)^T, \quad \mathbf{v} = (v_x, v_y)^T \quad (3.11)$$

a zejména hustota příčného toku energie

$$\mathbf{S}_T = (S_x, S_y)^T = c(T^{01}, T^{02})^T. \quad (3.12)$$

Prostorupodobné prvky tenzoru energie a hybnosti $T^{ij} = \sigma_{ij}$ představují také fyzikální toky, avšak nelze je již ztotožnit s vektorovým polem. Pokud bychom např. volili prvky T^{11}, T^{12}, T^{13} , které představují postupně toky hybnosti do směru x ze směrů x, y a z , pak vektorová pole $(T^{11}, T^{12}, T^{13})^T$, resp. $(T^{11}, T^{12})^T$ jsou fyzikálně neinterpretovatelná. Navíc by jistě nesplnili následující podmínku.

Předpokládejme silnou podmínku na uvažovaná vektorová pole (3.11), (3.12), a sice jejich konzervativnost, kterou lze zadefinovat například následujícími ekvivalentními způsoby pro obecné spojitě dvoudimenzionální vektorové pole \mathbf{F} :

- Nezávislostí na dráze integrace polem, tedy pro libovolnou křivku C spojující dané dva body prostoru \mathbf{A} a \mathbf{B} existuje funkce φ splňující

$$-\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \varphi(\mathbf{B}) - \varphi(\mathbf{A}), \quad (3.13)$$

pro uzavřenou křivku je nutně dráhový integrál výše nulový.

- Rotace daného pole je nulová, tedy

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0. \quad (3.14)$$

- Vektorové pole \mathbf{F} je až na znaménko gradientem skalárního pole φ z (3.13), tj.

$$\mathbf{F} = -\nabla\varphi. \quad (3.15)$$

Potenciál φ odráží prostorové uspořádání daného vektorového pole. Jelikož je skalární funkcí, zaveďme její anizotropie podobně jako pro hustotu energie ε v prostorové anizotropii (3.2):

$$\rho_{m,n}(\tau) = -\frac{\int r dr d\phi \varphi(r, \phi, \tau) r^m \cos[n(\phi - \Psi_{m,n})]}{\int r dr d\phi |\varphi(r, \phi, \tau)| r^m}, \quad (3.16)$$

protože budujeme hybnostní anizotropie, tak volíme natočení souřadného systému fázovým posunem $\Psi_{m,n}$ ze vztahu (3.3) z počátečního rozložení hustoty energie. Pro dosažení korektní normalizace využíváme ve jmenovateli absolutní hodnoty, jelikož potenciál φ může nabývat i záporných hodnot.

Zavedme potenciály polí (3.11), (3.12) v bodě roviny \mathbf{A} :

$$\varphi^{v_\varepsilon}(\mathbf{A}) = \int_C \mathbf{v}_\varepsilon \cdot d\mathbf{l}, \quad (3.17)$$

$$\varphi^v(\mathbf{A}) = \int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}, \quad (3.18)$$

$$\varphi^S(\mathbf{A}) = \int_C \mathbf{S} \cdot d\mathbf{l}. \quad (3.19)$$

Vektorová pole jsou nulová za hranicí fireballu a jejich potenciály zde nabývají konstantních hodnot, které volme rovny nule. V bodě \mathbf{B} za hranicí fireballu poté platí $\varphi(\mathbf{B}) = 0$. Křivka C použitá v integrálech výše končí právě v takovém bodě \mathbf{B} .

Vztahem (3.16) definujme popořadě *anizotropie potenciálu vážené rychlosti*, *anizotropie potenciálu rychlosti* a *anizotropie potenciálu toku energie* značené:

$$\rho_{m,n}^{v_\varepsilon}, \quad \rho_{m,n}^v, \quad \rho_{m,n}^S. \quad (3.20)$$

Tyto dynamické proměnné lze využívat ekvivalentně jako hybnostní anizotropie (3.9), zejména jedná-li se o korelace k prostorovým anizotropiím. V jiném znění byly již anizotropie potenciálu definovány v referenci [32].

Podotkněme, že se analyzují rotace uvažovaných vektorových polí, viz [17], čímž by nebyla splněna definice (3.15) o jejich konzervativnosti. Předpokládá se však, že cirkulační jevy jsou zanedbatelné, či malé a pro náš numerický výpočet potenciálu se zatím nejevily jako překážka.

3.4 Vztah anizotropií a fázových proměnných dynamického systému

Zajímáme se o dynamiku ve střední rapiditě v rovině $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ a $\tau \in \mathbb{R}$, kde prostorové (3.2) a hybnostní anizotropie (3.9) zřejmě kvantifikují prostorové a hybnostní rozdíly vývoje fireballu od izotropní expanze. Nabízí se otázka, jaké je spojení fázových proměnných $u^\mu(\mathbf{x}, \tau), \varepsilon(\mathbf{x}, \tau), \dots$, s těmito novými veličinami? Vyřkneme domněnku o jejich vztahu:

Zanedbáme-li podélnou expanzi, tak fázové proměnné $u^\mu(\mathbf{x}, \tau), \varepsilon(\mathbf{x}, \tau), \dots$ spolu s evolučními zákony $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ tvoří nekonečně dimenzionální dynamický systém v proměnné $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Pokud uvážíme všechny řády v m a n prostorových a hybnostních anizotropií, tj. $\epsilon_{m,n}^x(\tau)$ a $\epsilon_{m,n}^p(\tau)$ pro $\forall m, n$, tak jsme z jejich znalosti schopni zrekonstruovat vývoj fázových proměnných. Předpokládáme existenci funkcí $f^\mu = f^\mu(\epsilon_{m,n}^x, \epsilon_{m,n}^p, \tau)$, $g = g(\epsilon_{m,n}^x, \epsilon_{m,n}^p, \tau)$, \dots , splňující:

$$\begin{aligned} u^\mu(\mathbf{x}, \tau) &= f^\mu(\mathbf{x}, \epsilon_{m,n}^x, \epsilon_{m,n}^p), \\ \varepsilon(\mathbf{x}, \tau) &= g(\mathbf{x}, \epsilon_{m,n}^x, \epsilon_{m,n}^p), \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.21)$$

Kdy navíc předpokládáme, že pro danou přesnost $\delta > 0$, lze najít indexy $m_0, n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že náš odhad fázových proměnných $u^\mu, \varepsilon, \dots$ funkcemi f^μ, g, \dots bude od skutečného průběhu vzdálen o maximálně δ , tj. bude platit:

$$\begin{aligned} |u^\mu(\mathbf{x}, \tau) - f^\mu(\mathbf{x}, \epsilon_{1,1}^x, \epsilon_{1,2}^x, \epsilon_{2,2}^x, \dots, \epsilon_{m_0, n_0}^x, \epsilon_{1,1}^p, \dots, \epsilon_{m_0, n_0}^p)| &< \delta, \\ |\varepsilon(\mathbf{x}, \tau) - g(\mathbf{x}, \epsilon_{1,1}^x, \epsilon_{1,2}^x, \epsilon_{2,2}^x, \dots, \epsilon_{m_0, n_0}^x, \epsilon_{1,1}^p, \dots, \epsilon_{m_0, n_0}^p)| &< \delta, \end{aligned} \quad (3.22)$$

⋮

pro $\forall \tau > 0$.

Jelikož v hydrodynamických simulacích diskretizujeme dynamický systém na disjunktní buňky $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^2$ (jejich počet je $l \in \mathbb{N}$) v nichž počítáme fázové proměnné, tak je možné sestavit *stavový vektor* tohoto k -dimenzionálního dynamického systému v diskrétních časech τ_j . Dimenze k bude rovna $k = 2l + l + \dots$, kde $2l$ je za dvě proměnné rychlosti u^x, u^y v l buňkách, l je příspěvek z hustoty energie, a znak \dots jsou příspěvky dalších fázových proměnných. k -dimenzionální stavový vektor $\boldsymbol{\xi}(\tau_j)$ je v bijekci se stavem hydrodynamických simulací $u^\mu(\mathbf{x}_i, \tau_j), \varepsilon(\mathbf{x}_i, \tau_j), \dots$, který aproximuje stav polí $u^\mu(\mathbf{x}, \tau), \varepsilon(\mathbf{x}, \tau), \dots$ fyzikálního systému. Stavový vektor může být tvaru

$$\boldsymbol{\xi}(\tau_j) = (u^x(\mathbf{x}_1, \tau_j), u^x(\mathbf{x}_2, \tau_j), \dots, u^y(\mathbf{x}_1, \tau_j), \dots, \varepsilon(\mathbf{x}_1, \tau_j), \dots)^\top \quad (3.23)$$

v časovém kroku τ_j . Fázový portrét¹ systému bude v závislosti na explicitním tvaru (3.23), tj. volbě rozdílných *souřadnic*, opisovat různé struktury, které budou však mezi sebou *topologicky ekvivalentní*. Může se jednat i o tzv. *atraktory*². Vykreslování vektoru $\boldsymbol{\xi}(\tau_j)$ představuje grafickou korelaci jeho prvků v k -dimenzionálním prostoru.

Dimenze dynamického systému k je však samozřejmě velmi vysoká, a proto ji zkusme redukovat. Pokud prostorové a hybnostní anizotropie relevantně postihují dynamiku původního systému dle (3.21), tak jejich hodnoty definují stavový vektor. Navíc dle (3.22) pro danou přesnost δ stačí uvažovat anizotropie do řádu n_0 a m_0 . Proto vytvoříme stavový vektor dimenze $2m_0n_0$ jako

$$\boldsymbol{\xi}(\tau_j) = (\epsilon_{1,1}^x, \epsilon_{1,1}^p, \epsilon_{1,2}^x, \epsilon_{1,2}^p, \dots, \epsilon_{m_0, n_0}^x, \epsilon_{m_0, n_0}^p)^\top. \quad (3.24)$$

Dimenzi dále redukuje projekcí stavového vektoru (3.24) do prostoru dimenze $h \leq 2m_0n_0$ funkcemi $\eta_i = \eta_i(\epsilon_{m,n}^x, \epsilon_{m,n}^p)$, kde $i \in \hat{h}$ a $m \in \hat{m}_0, n \in \hat{n}_0$. Tedy máme nový h -dimenzionální vektor $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$:

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}}(\tau_j) = (\eta_1(\epsilon_{m,n}^x, \epsilon_{m,n}^p), \eta_2(\epsilon_{m,n}^x, \epsilon_{m,n}^p), \dots, \eta_h(\epsilon_{m,n}^x, \epsilon_{m,n}^p))^\top, \quad (3.25)$$

představující průmět stavového vektoru. Z jeho vývoje je stále možné usoudit relevantní informace o dynamice fyzikálního systému.

¹Sjednocení stavů $\boldsymbol{\xi}$ z křivek dané stavovým vektorem $\boldsymbol{\xi}(\tau)$ pro všechny počáteční podmínky.

²Geometrické struktury ve fázovém prostoru, které přitahují a uvěznňují fázové křivky. Blíže informace lze nalézt v referenci [33].

Hypotéza výše prakticky říká, že uvážením nekonečného počtu prostorových a hybnostních anizotropií $\epsilon_{m,n}^x$ a $\epsilon_{m,n}^p$ můžeme popisovat hydrodynamickou expanzi fireballu jako by se jednalo o jiné *fázové proměnné*. Navíc využitím průmětu hlavních anizotropií ($\epsilon_{m,n}^x$ a $\epsilon_{m,n}^p$ pro nízké m, n) do menšího podprostoru věříme v zachycení nejdůležitějších *dynamických momentů* anizotropní expanze. Zmíněné atraktory jsou množinami ve fázovém prostoru v případě viskózní dynamiky, které uvězní a přitahují trajektorie dynamického systému. Upínání trajektorií k atraktoru bychom mohli očekávat od vektorů (3.24), resp. (3.25).

Domněnku výše lze vyslovit analogicky pro vztah vybrané anizotropie potenciálu z (3.20) a prostorové anizotropie $\epsilon_{m,n}^x$.

Kapitola 4

Numerická implementace

V této kapitole se seznámíme s použitým softwarem pro simulace počátečních podmínek a vývoje hydrodynamické fáze QGP vzniklého v jádro-jaderných srážkách. Využíváme tzv. hybridní model, tedy řetězení programů GLISSANDO 2 a vHLLC.

4.1 Generování počátečních podmínek pomocí GLISSANDO 2

Pro potřeby simulace hydrodynamické expanze v programu vHLLC je nutné uvažovat relevantní počáteční podmínky – hustotu energie $\varepsilon(x, y, \tau_0)$. Proto využijme Monte-Carlo generátoru GLISSANDO 2 – GLauber Initial-State Simulation AND mOre implementující *Glauberův model kolize jader* [36,37]. Program je napsán v jazyce C++ s ROOT knihovnami. Pravděpodobnostní modely, které program v různých fázích využívá, mohou obsahovat restriktce nastavitelné vnějšími vstupními parametry. Fáze simulace srážky jsou následující:

- Generování pozic nukleonů v nalétávajících jádrech.
- Vyhodnocení srážek nukleonů a deponace energie v hustotu energie $\varepsilon(x, y, \tau_0)$.

Předešlé body lze realizovat různými již v programu implementovanými modely. Nami použité budou prezentovány spolu s jejich hlavními rysy.

Dodejme, že tento program je vhodný pro tzv. *event-by-event* simulace, kdy uvažujeme jednotlivé srážky – události. Výstupem programu je poté konkrétní profil hustoty energie. Často se totiž využívá i vystředovaného profilu hustoty energie přes mnoho událostí.

4.1.1 Generování pozic nukleonů v jádře

Z rozptylu elektronů na jádře bylo zjištěno rozložení nabitě hmoty v jádře ve formě modifikovaného Woods-Saxonova rozdělení:

$$n_e(r) = c \frac{4\pi r^2 \left(1 + W_e \frac{r^2}{R_e^2}\right)}{1 + \exp\left(\frac{r-R_e}{a_e}\right)}, \quad (4.1)$$

kde c je normalizační konstanta zvolená tak, aby platilo $\int dr n_e(r) = A$, navíc pro dostatečně těžká jádra jsou parametry $W_e = 0$, $a_e = 0,54$ fm a $R_e = (1,12A^{1/3} - 0,86A^{-1/3})$ fm.

Protože nukleony nejsou bodové částice, je nutné uvažovat jejich nabitý profil Gaussovským rozdělením:

$$n_N(r) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right),$$

kde $\sigma = 0,79/\sqrt{3}$ fm odpovídá efektivnímu poloměru 0,79 fm. Hledejme rozdělení těžišť nukleonů $n(r)$ z podmínky

$$n_e(r) = 2\pi \int d^3r' \int d^3r'' n(\vec{r}') n_N(\vec{r}'') \delta^3(\vec{r} - \vec{r}' - \vec{r}''). \quad (4.2)$$

Konvolucí (4.2) jsme svázali rozdělení pozic nukleonů $n(r)$ s profilem nukleonu $n_N(r)$ tak, aby produkovali tížený nabitý profil jádra (4.1). Z (4.2) bylo zjištěno rozdělení pozic nukleonů v jádře jako modifikované Woods-Saxonovo rozdělení s parametry $a = 0,455$ fm, $R = (1,103A^{1/3} - 0,550A^{-1/3})$ fm.

Nyní již můžeme v rámci rozdělení těžišť nukleonů $n(r)$ náhodně umisťovat jednotlivá těžiště nukleonů až na restrikcí odpovídající odpuzování nukleonů. Pokud bude nové těžiště vybráno ve vzdálenosti menší než $d = 0,4$ fm od již stávajících, tak se uskuteční nový výběr. Tato restrikce stále dovoluje překryv nukleonových profilů v jádře a zvětšuje průřez jader pouze o $\sim 1\%$.

4.1.2 Srážky a deponace energie

Přejdeme ke kolizi nagenovaných jader s odlišným geometrickým uspořádáním, avšak stejným počtem nukleonů A a $B = A$. Těžiště jader posuneme v příčném směru o hodnotu srážkového parametru b , který koresponduje s centralitou srážky. Posuňme těžiště prvního jádra na pozici $(b/2, 0)$ a druhé jádro na pozici $(-b/2, 0)$. Bod $(0, 0)$ je zřejmě těžištěm obou jader, resp. nalétávající jaderné hmoty.

Model srážek nukleonů, který nejúspěšněji dopomáhal rekonstruovat multiplicitu jako funkce centrality na urychlovači RHIC, se nazývá *smíšený model*. Je spojení *modelu s binárními srážkami* a s *modelem s poškozenými nukleony* (*wounded nucleons – WN*). Tyto dva modely se liší v geometrickém uspořádání deponace energie v transversální rovině z jedné srážky nukleonů.

Jádra v této chvíli představují pozice těžišť svých nukleonů. Překrytím jader dokážeme definovat jednotlivé vzdálenosti mezi těžišti. Poté srážka dvou nukleonů ve vzdálenosti r nastane s pravděpodobností

$$p(r) = G \exp\left(-\frac{Gr^2}{r_0^2}\right), \quad (4.3)$$

kde konstanta G je nastavená pro shodu s proton-protonovým rozptylem. Poloměr r_0 odpovídá

$$r_0 = \sqrt{\sigma/\pi},$$

kde σ je účinný průřez nepružných rozptylů dvou nukleonů roven $\sigma = 42$ mb pro $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV na RHIC. Nyní pokud se dle pravděpodobnosti (4.3) nukleony srazí, tak dojde k *binární srážce* spolu s *poškozením nukleonů*.

Množství deponované energie se měří pomocí *relativní deponované síly* – RDS, která pro jednu srážku nukleonů odpovídá 1. V rámci smíšeného modelu binární srážka deponuje energii uprostřed spojnic těžišť nukleonů s RDS rovné α . Mechanismus poškození nukleonů deponuje energii v těžištích nukleonů s hodnotami $(1-\alpha)/2$ pro RDS. Z jedné srážky nukleonů tedy opravdu získáme RDS rovné $1 = \alpha + 2(1-\alpha)/2$ a průměrné celkové RDS ze srážky jader je $(1-\alpha)N_W/2 + \alpha N_{bin}$, kde N_{bin} a N_W jsou počty binárních srážek, resp. počet poškozených nukleonů.

Parametrem α ovlivňujeme rozložení RDS mezi binární srážky, či poškozené nukleony. Fit na multiplicitu jako funkci centrality [37] dává pro smíšený model hodnotu parametru $\alpha = 0,145$ při $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV na RHIC.

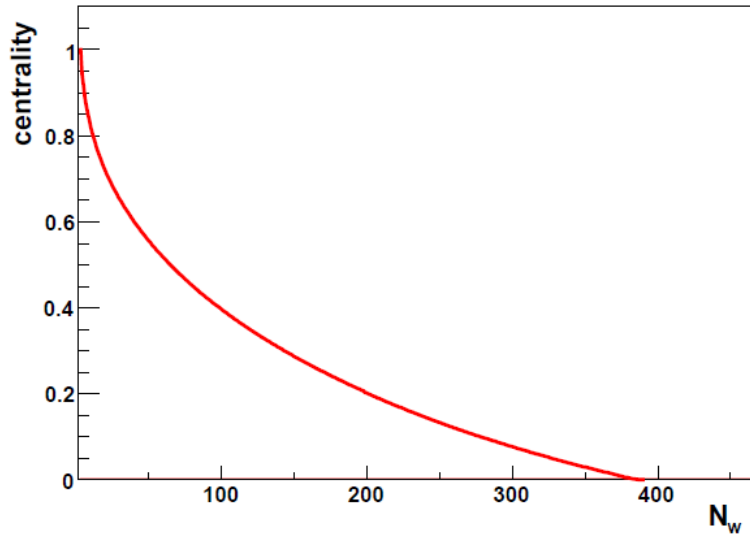
Nakonec udělejme konvoluci prostorového rozdělení RDS s Gaussovským rozdělením pro simulování disperze zdrojů v důsledku prvotní produkce částic. Získaná distribuce již představuje počáteční hustotu energie hydrodynamické fáze $\varepsilon(x, y, \tau_0)$.

Z analýzy výstupů programu GLISSANDO 2 je možné zobrazit závislosti centrality na RDS a počtu poškozených nukleonů N_W na Obr. 4.1.

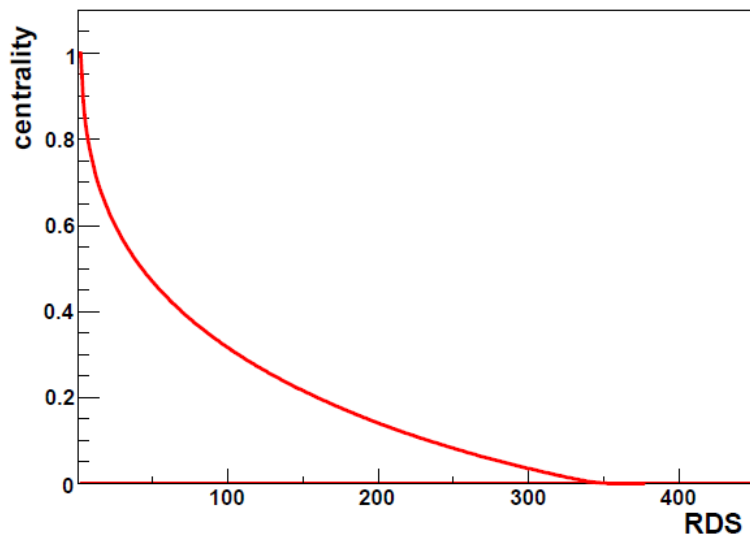
4.2 Numerické simulace hydrodynamické fáze ve **vHLL**

Pro simulaci hydrodynamické fáze jsme využili relativistického hydrodynamického kódu **vHLL** ve 3+1 dimenzích. V kódu se využívá *Israelových-Stewartových rovnic* viskózní hydrodynamiky, které při limitě nulových viskozit přechází v pohybové rovnice ideální kapaliny.

Kód vychází z aproximativního Riemannovského řešiče *Harten Lex van Leer Einfeldt (HLL)* *Godunovského typu* [5]. Je vhodným řešičem pro relativistickou hydrodynamiku s velmi nehomogenním počátečním profilem hustoty energie. Metoda využívá pokročilých schémat pro minimalizaci numerických chyb. Jedná se o konzervativní algoritmus, kdy jsou vyhodnocovány toky zachovávajících se veličin na hranicích sousedních buněk. To zajišťuje, že celková energie a celková hybnost se v systému zachovává během celého vývoje.



GLISSANDO ver. 1.5
 197+197, 500000 events
 $b=0.0 - 22.0$ fm
 displacement par.: $DW=0.7$ fm, $DBIN=0.7$ fm
 mixed model: $\sigma_w=42.0$ mb, $\sigma_{bin}=42.0$ mb, $\alpha=0.145$



Obrázek 4.1: Závěry analýzy výstupů GLISSANDO 2 pro 500000 událostí v Au+Au srážkách při $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV *smíšeného modelu*. **Nahoře:** Závislost centrality na počtu participantů N_W ve WN srážkách. **Dole:** Závislost centrality na relativní deponované síle – RDS. [36]

Pohybové rovnice jsou z kovariantního zachování tenzoru energie a hybnosti spolu se zachováním náboje n_c se svým tokem N_c^μ :

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (4.4)$$

$$\nabla_\mu N_c^\mu = 0, \quad (4.5)$$

Pro toky zachovávající veličiny platí

$$N_c^\mu = n_c u^\mu.$$

Tenzor energie a hybnosti je v obecném tvaru (2.54), tj.

$$T^{\mu\nu} = T_{(0)}^{\mu\nu} + \pi^{\mu\nu} + \Delta^{\mu\nu}\Pi. \quad (4.6)$$

Navíc je nutné doplnit pohybové rovnice o stavovou rovnici $p = p(\varepsilon, n_c)$. V Israelově-Stewartově formalismu máme pro smykové a objemové napětí dodatečné rovnice:

$$D\pi^{(\mu\nu)} = -\frac{\pi^{\mu\nu} - \pi_{NS}^{\mu\nu}}{\tau_\pi} - \frac{4}{3}\pi^{\mu\nu}\nabla_\lambda u^\lambda, \quad (4.7)$$

$$D\Pi = -\frac{\Pi - \Pi_{NS}}{\tau_\Pi} - \frac{4}{3}\Pi\nabla_\lambda u^\lambda, \quad (4.8)$$

kteří zajišťují kauzalitu (omezují rychlost kolektivních módů) a τ_π , τ_Π jsou relaxační časy. Členy

$$\pi_{NS}^{\mu\nu} = \eta(\nabla_\perp^\mu u^\nu + \nabla_\perp^\nu u^\mu) - \frac{2}{3}\eta\Delta^{\mu\nu}\nabla_\lambda u^\lambda = \eta\sigma^{\mu\nu}, \quad (4.9)$$

$$\Pi_{NS} = -\zeta\nabla_\lambda u^\lambda, \quad (4.10)$$

kteří odpovídají hodnotám z Navierova-Stokesova případu, viz korekce prvního řádu (2.49).

Jak bylo řečeno, v rámci numerického řešení dovoluje Godunovova metoda i díky malým viskozitám, rozdělit výsledek simulací na řešení ideální části pohybových rovnic a jejich viskózních korekcí. Doporučujeme čtenáři publikace [5,6] pro bližší informace o numerických řešících úlohy.

Pro simulace jsme využili stavové rovnice známé jako *Chiral Model EOS*, kde bližší informace lze nalézt v referenci [34].

Kapitola 5

Analýza výsledků

Simulujeme jádro-jaderné srážky Au+Au v intervalu centrality 30-40 % na urychlovači RHIC při energii $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV, kdy se zajímáme o příčnou hydrodynamickou expanzi ve střední rapiditě ($|\eta| < 0,1$). Program GLISSANDO 2 nageneroval počáteční pole hustoty energie $\varepsilon(\tau_0)$, tyto počáteční podmínky byly použity pro program vHLLLE, který simuluje hydrodynamickou fázi QGP s nastavitelnými parametry smykové a objemové viskozity η , ζ . Podotkneme, že začátek hydrodynamické fáze je v čase $\tau_h = 0,6$ fm, kdy v čase $\tau_0 = 0$ fm došlo k deponaci energie ze srážky.

Jednotlivé události budeme v hydrodynamické fázi monitorovat pomocí zdefinovaných prostorových a hybnostních anizotropií z Kap. 3, jejichž výpočty (kromě anizotropie potenciálu) byly implementovány do programu vHLLLE spolu se zápisem do textového dokumentu (každých $\Delta\tau = 0,05$ fm). Výstupem programu je navíc i rychlostní pole \mathbf{v} , hustota příčného toku energie \mathbf{S}_T a pole hustoty energie ε v časech simulace $\tau = 0,6; 0,7$ a $0,8$ fm, poté již po krocích $\Delta\tau = 0,5$ fm do konce simulace $\tau \sim 7$ fm. Výstupní pole jsou dvoudimenzionální, kdy jsme průměrovali přes rapiditu $|\eta| < 0,1$ do roviny $x \times y$. Z polí na výstupu je dále v programu Matlab spočteno váhované rychlostní pole \mathbf{v}_ε a anizotropie potenciálu (3.20). Anizotropie potenciálu má nutně horší časové rozlišení ($\sim 0,5$ fm), než prostorové a hybnostní anizotropie spočtené přímo v programu vHLLLE ($\sim 0,05$ fm). Anizotropie potenciálu jsou proto v Matlabu vyhlazeny funkcí `spline()`.

V prostorových anizotropiích $\epsilon_{m,n}^x$, hybnostních anizotropiích $\epsilon_{m,n}^p$ a anizotropiích potenciálu $\rho_{m,n}$ definovaných vztahy (3.2), (3.9), (3.16) uvažujme jedinou hodnotu řádu radiální váhy m , a to $m = 2$. Proto značme zmíněné anizotropie bez explicitní hodnoty řádu m , jako $\epsilon_n^x \equiv \epsilon_{2,n}^x$, $\epsilon_n^p \equiv \epsilon_{2,n}^p$ a $\rho_n \equiv \rho_{2,n}$, stejně tak i příslušné fázové posunutí $\Psi_n \equiv \Psi_{2,n}$.

Na dalších pracech jsme ponechali analýzu s nenulovým parametrem ζ/s řídící sílu objemového napětí Π v (4.6), kdy zde uvažujeme pouze $\zeta/s = 0$. Poměr smykové a objemové viskozity η , ζ s entropií s jsou vhodné bezrozměrné parametry, i protože η , ζ jsou zhruba úměrné entropii.

5.1 Porovnání nastavení hydrodynamiky parametrem η/s

Zvolili jsme tři různá nastavení podílu η/s , který kontroluje sílu viskózního členu $\pi^{\mu\nu}$ v (4.6). Použitá nastavení jsou následující:

I Ideální hydrodynamika s $\eta/s = 0$.

V Viskózní hydrodynamika s $\eta/s = 0,08$.

SV Silně viskózní hydrodynamika s $\eta/s = 0,20$.

Dle počáteční excentricity $\epsilon_x(\tau_h)$, resp. $\epsilon_2^x(\tau_h)$, která je průměrně rovna 0,34 (přes 200 eventů), jsme vybrali pro srovnání dvě události s excentricitami 0,65 a 0,24.

Pro více excentrickou událost vidíme na Obr. 5.1 sekvenci vývoje pole hustoty energie ε společně s vektorovým polem hustoty příčného toku energie \mathbf{S} v rovině $x \times y$ v nastavení *V*.

Prostorové anizotropie

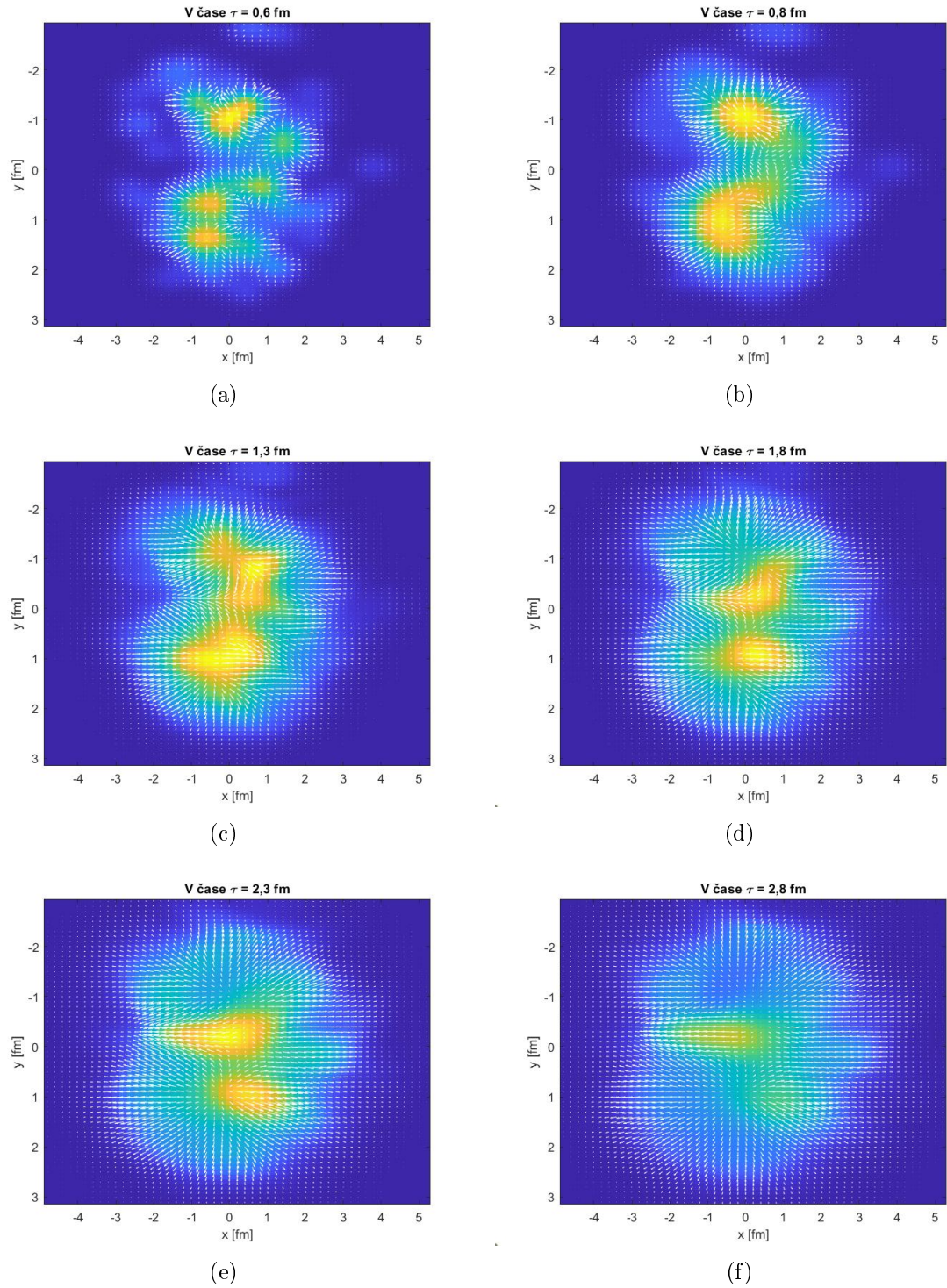
Prostorové anizotropie ϵ_x a ϵ_n^x pro $n = 1, 2, 3, 4, 5$ definované vztahy (3.1), (3.2) lze vidět na Obr. (5.2) pro všechna nastavení hydrodynamiky a dvě zmíněné události. Veličiny ϵ_x a ϵ_2^x jsou ve svých definicích stejné až na natočení souřadného systému fází $\Psi_{m,n}$. V jejich porovnání ze simulace na Obr. 5.2(a) a Obr. 5.2(c) se jeví shodné s chybou 10^{-3} . Počáteční podmínky z GLISSANDO 2 jsou již dle excentricity natočeny, jinak by v obecném případě shodnost neplatila. První událost má větší anizotropie ve všech řádech kromě $n = 3$. Také je zajímavé chování pro $n = 5$, kdy pozorujeme podobnou dynamiku pro obě události.

Hybnostní anizotropie

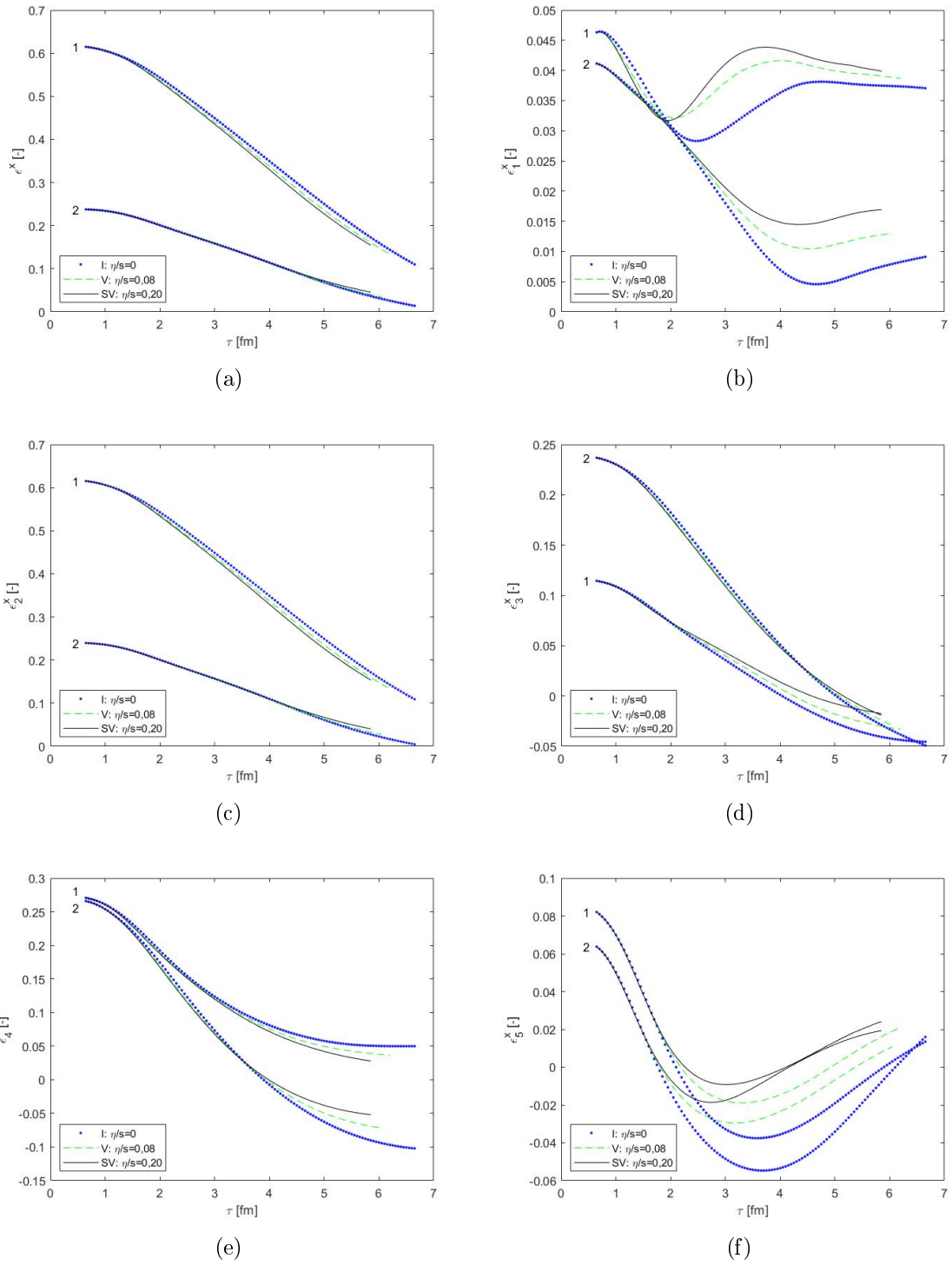
Hybnostní anizotropie lze vidět na Obr. 5.3, a to konkrétně anizotropii toku $\langle |v_x| - |v_y| \rangle$, anizotropii toku energie $\langle |S^{\tau x}| - |S^{\tau y}| \rangle$, hybnostní anizotropii ϵ_p a obecnější hybnostní anizotropii ϵ_n^p pro řády $n = 2, 3, 4$. První tři anizotropie jsou kladné, jelikož GLISSANDO 2 natáčí počáteční podmínky dle excentricity. Vidíme, že anizotropie ϵ_n^p jdou do záporných hodnot, protože jejich harmonické váhy jsou shodně orientované jako u prostorové anizotropie ϵ_n^x , což poukazuje na tok energie ve směru menšího zastoupení energie v polárním úhlu. Vidíme, že průběhy pro $\langle |v_x| - |v_y| \rangle$ a $\langle |S^{\tau x}| - |S^{\tau y}| \rangle$ jsou podobné stejně jako jejich fyzikální význam.

Anizotropie potenciálu

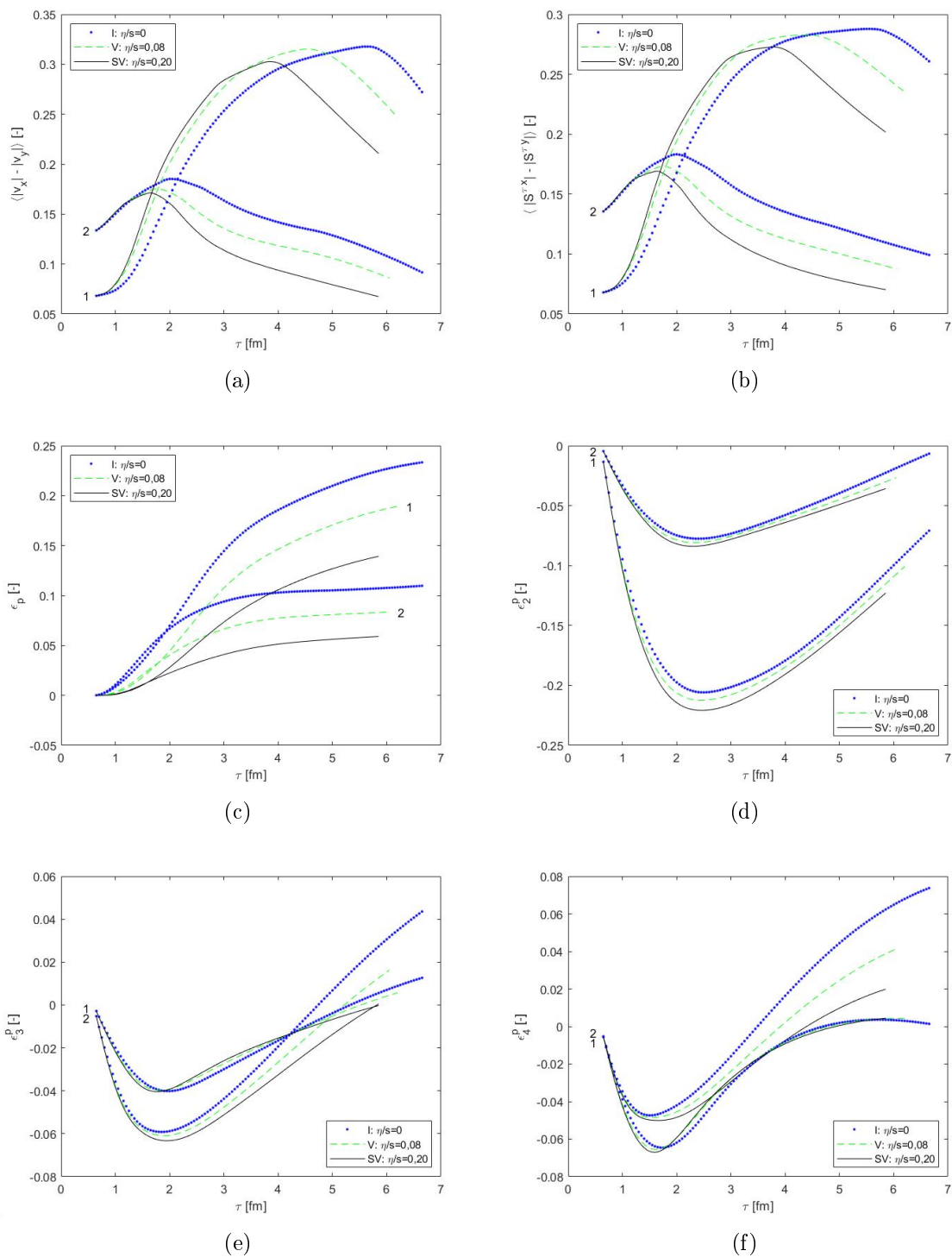
Tvar potenciálu $\varphi^{\mathbf{S}}$ vektorového pole \mathbf{S} můžeme vidět na Obr. 5.4 ve čtyřech čase pro první událost. Z anizotropií potenciálu využijeme pouze anizotropie potenciálu toku



Obrázek 5.1: Časový vývoj pole hustoty energie $\varepsilon(x, y)$ spolu s vektorovým polem hustoty příčnému toku energie $\mathbf{S}(x, y)$ v nastavení V pro první událost. Časový rozdíl mezi snímky není ze začátku konstantní.

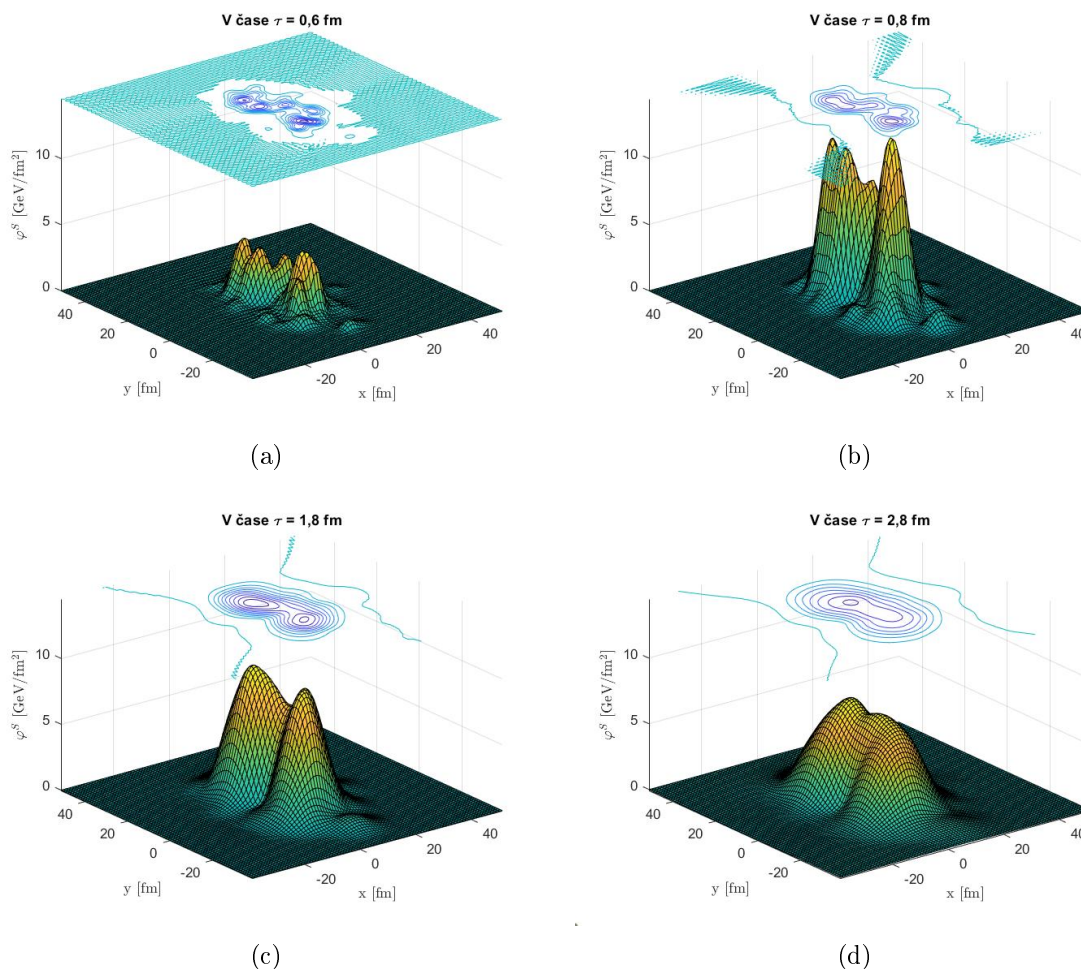


Obrázek 5.2: Prostorové anizotropie pro dvě události značené 1 a 2. Na Obr. (a) vidíme excentricitu ϵ_x , poté již na Obr. (b), (c), (d), (e), (f) postupně řády $n = 1, 2, 3, 4, 5$ anizotropie ϵ_n^x .



Obrázek 5.3: Hybnostní anizotropie pro dvě události 1 a 2. Anizotropie toku $\langle |v_x| - |v_y| \rangle$ na Obr. (a), anizotropii toku energie $\langle |S^{\tau x}| - |S^{\tau y}| \rangle$ na Obr. (b), hybnostní anizotropii ϵ_p na Obr. (c) a obecnější hybnostní anizotropii ϵ_n^p pro řády $n = 2, 3, 4$ na Obr. (d), (e), (f).

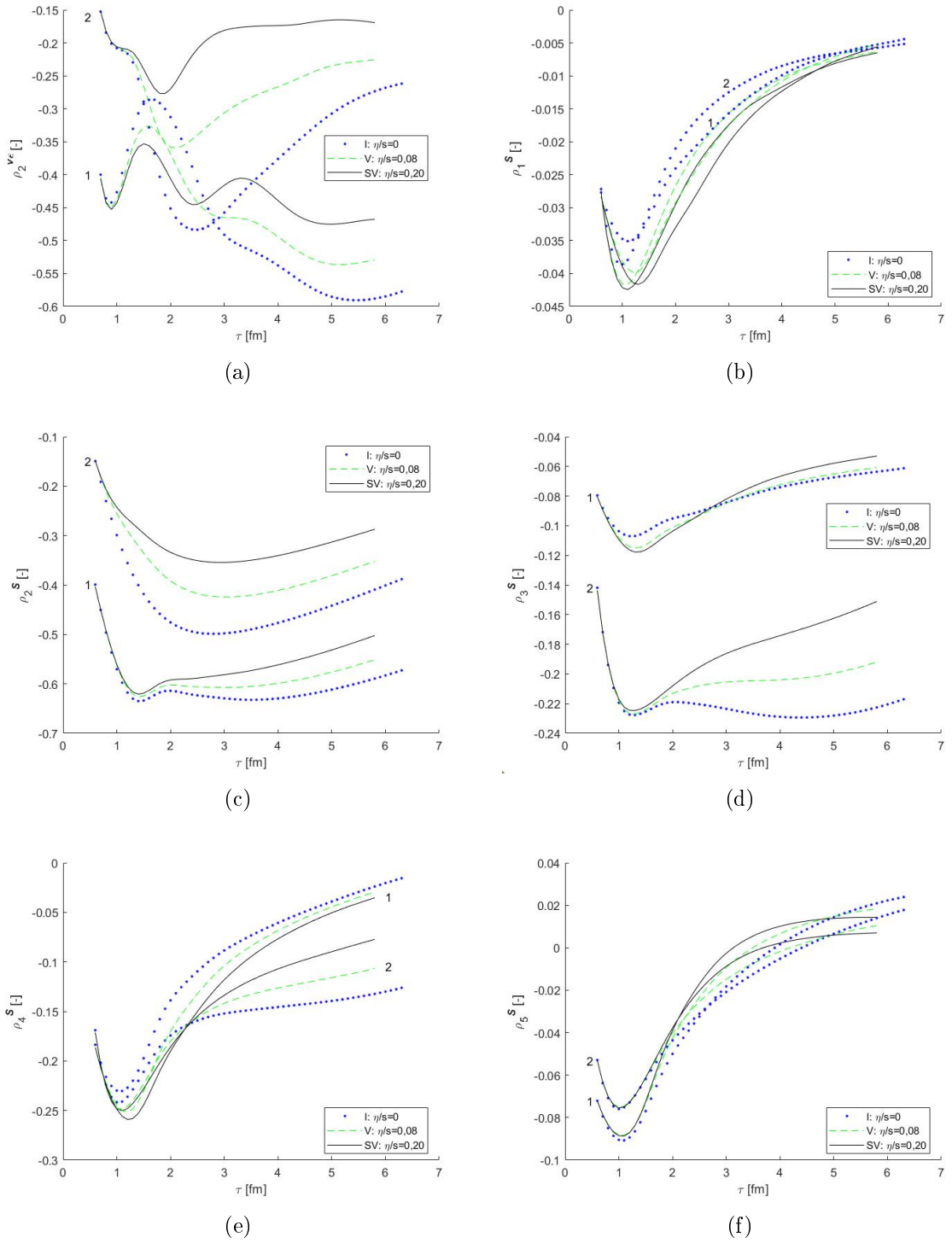
energie ρ_n^S , jelikož anizotropie potenciálu rychlosti a váženého pole rychlosti ρ_n^v , $\rho_n^{v\epsilon}$ se ukázali být nevhodné. Zejména ρ_n^v jako *numericky nestabilní* ve smyslu nespojitostí mezi kroky simulace a oscilujícími průběhy. Toto chování se dalo předpovídat, kvůli chybějícímu váhování hustotou energie ϵ . Při přidání váhy v případě $\rho_n^{v\epsilon}$ lze však pozorovat stále přecitlivělé chování veličin, jako pro řád $n = 2$ na Obr. 5.5(a). Na Obr. 5.5(b)–5.5(f) vidíme ρ_n^S pro řády $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Počáteční hodnoty anizotropií $\rho_2^{v\epsilon}$ a ρ_2^S jsou téměř shodné, koncové hodnoty jsou již v menší korespondenci.



Obrázek 5.4: Časový vývoj potenciálu φ^S v nastavení V pro první událost.

5.2 Analýza více událostí v nastavení $\eta/s = 0,08$

Vzhledem k doměnce v Podkap. 3.4 hledáme struktury v korelacích anizotropií dle (3.24), resp. (3.25). Takové struktury bychom mohli zpozorovat pouze studiem mnoha událostí *event-by-event* a v systému s disipací, tedy ve viskózním případě. Vybrali jsme případ hydrodynamiky s $\eta/s = 0,08$ a budeme analyzovat tři typy křivek:



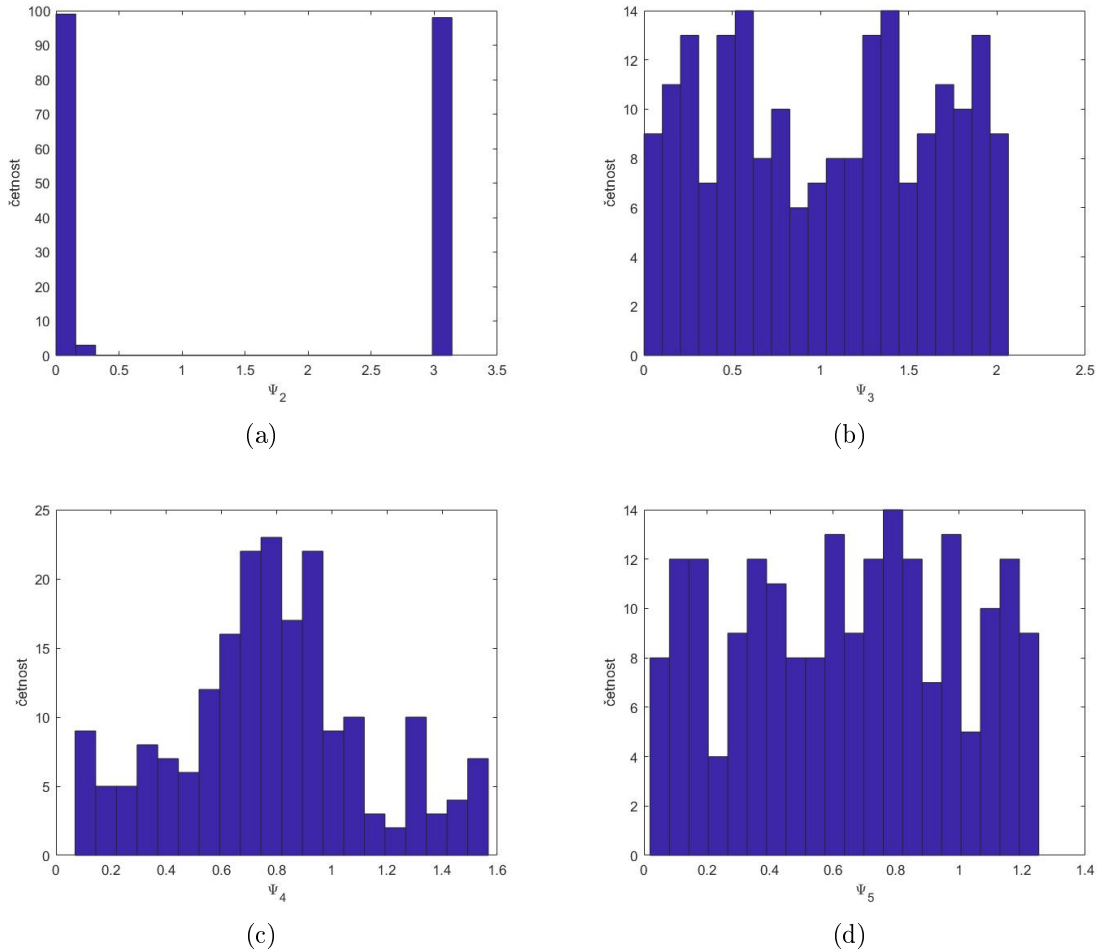
Obrázek 5.5: Anizotropie potenciálu pro dvě události 1 a 2. Anizotropie potenciálu vážené rychlosti druhého řádu $\rho_2^{v\epsilon}$ na Obr. (a). Anizotropie potenciálu toku energie ρ_n^S pro řády $n = 1, 2, 3, 4, 5$ jsou na Obr. (b), (c), (d), (e), (f).

Křivky z 90 událostí, které jsou barevně odlišeny dle své počáteční excentricity ϵ_2^x . Světle zelená barva odpovídá křivkám událostí s nízkou excentricitou a přechází ve hnědou barvu křivek událostí s vysokou excentricitou.

SU Průběh značený *SU* (středování událostí) bude odpovídat vždy průměru daných křivek z událostí výše. Pro průměrování jsme využili navíc 110 událostí.

SPP Vývoj ze středovaných počátečních podmínek. Počáteční hustota energie $\varepsilon(\tau_0)$ této události byla středována přes 1000 polí v *GLISSANDO 2*.

Sestavil jsme histogramy fázových posunů Ψ_n pro $n = 2, 3, 4, 5$ z 200 událostí na Obr. 5.6. Protože je profil počáteční hustoty energie $\varepsilon(\tau_0)$ již natočený dle své excentricity ϵ_2^x , tak pozorujeme na Obr. 5.6(a) pouze lehké odchylky od $\Psi_2 = 0$, resp. $\Psi_2 = 2\pi$. Liché řády fázových posunů Ψ_3 a Ψ_5 se jeví jako uniformě rozdělené. Naopak u čtvrtého řádu, tj. pro Ψ_4 pozorujeme pík okolo hodnoty $\pi/4$ plynoucí z korelace k Ψ_2 . Z konstrukce definic fázových posunů (3.3) tím vyplývá, že profil harmonické váhy druhého řádu je pootočen právě o $\pi/4$ oproti profilu harmonické váhy čtvrtého řádu.



Obrázek 5.6: Histogramy fázových posunů Ψ_n pro řády $n = 2, 3, 4, 5$ z 200 událostí.

Prostorové a hybnostní anizotropie

Barevné odlišení nám pomáhá ke sledování trendů vývoje křivek vzhledem k počáteční excentricitě. Navíc v porovnání s průměrem těchto křivek SU a průběhem ze středovaných počátečních podmínek SPP .

Na Obr. 5.7 můžeme vidět prostorové a hybnostní anizotropie $\epsilon_n^x, \epsilon_n^p$ řádů $n = 2, 3, 4$. V porovnání 90 událostí barevným rozlišením pozorujeme úměrnou transformaci excentricity ϵ_2^x do hybnostní anizotropie druhého řádu ϵ_2^p . V případě třetího a čtvrtého řádu již nevyužijeme barevného kódování k rozlišení úměrnosti propagací. Ze středovaných průběhů SU na Obr. 5.7(a)-5.7(f) i později z korelací bude však propagace prostorových anizotropií do hybnostních anizotropií stejného řádu zřejmá. Což odpovídá hydrodynamické expanzi dle gradientu tlaku.

U lichých řádů $\epsilon_n^x, \epsilon_n^p$ obecně pozorujeme potlačení průběhu SPP , protože jsou počáteční podmínky nejdříve orientovány dle excentricity a až poté středovány. Liché fázové posuny Ψ_n na Obr. 5.6 jsou uniformně rozděleny, a proto nemůžeme očekávat jiný, než eliptický profil hustoty energie $\varepsilon(\tau_0)$, který můžeme vidět na Obr. 5.8 v čase začátku hydrodynamické simulace $\tau_h = 0,6$ fm.

Korelace prostorových a hybnostních anizotropií stejného řádu

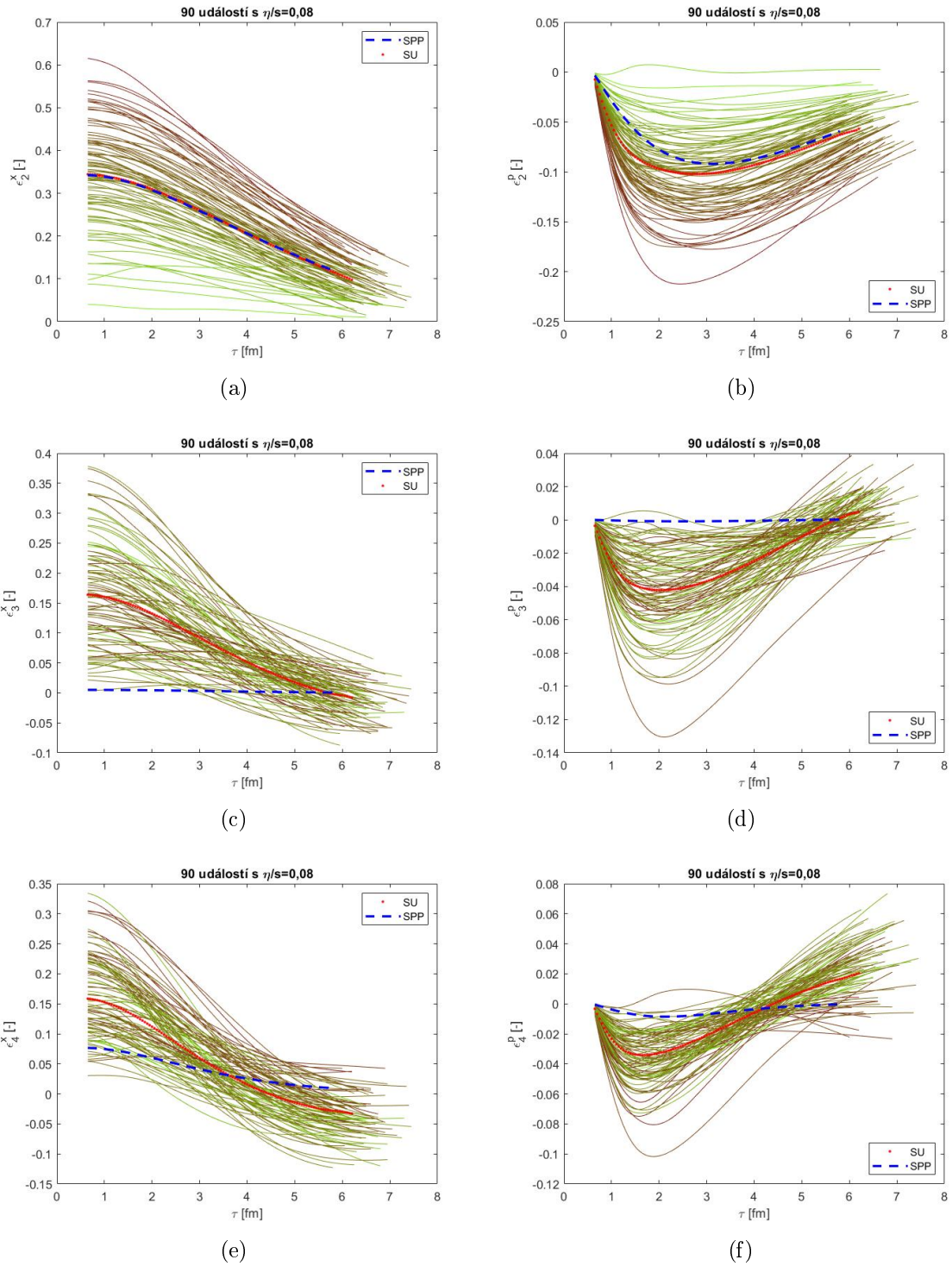
Vytvořili jsme dvoudimenzionální korelace prostorových a hybnostních anizotropií $\epsilon_n^x, \epsilon_n^p$ řádů $n = 2, 3, 4$ na Obr. 5.9 spolu s korelací součtu prostorových anizotropií $\epsilon_2^x + \epsilon_3^x + \epsilon_4^x$ a součtu hybnostních anizotropií $\epsilon_2^p + \epsilon_3^p + \epsilon_4^p$. Na všech korelacích vidíme podobnou dynamiku transformace prostorových anizotropií do hybnostních. V rámci korelace součtů na Obr. 5.9(d) pozorujeme hladší průběhy spolu s uniformním chováním křivek v koncových časech (oblast počátku) i upínání průběhu SPP k SU .

Třídimenzionální korelace anizotropií

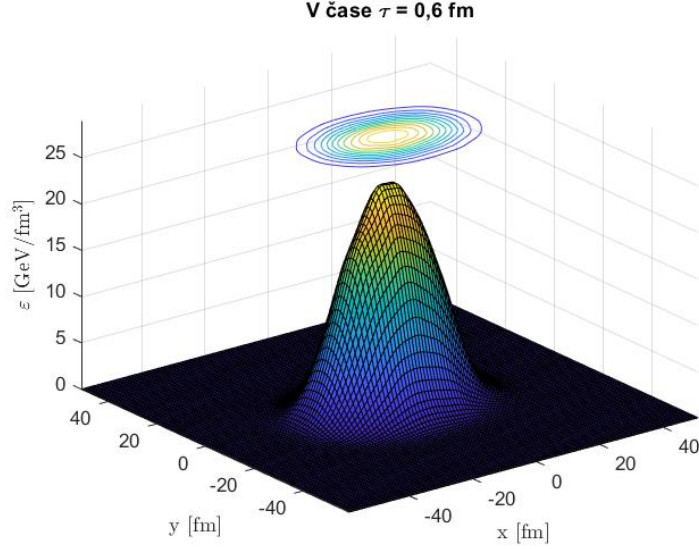
Naším ústředním zájmem je pátrat po atraktorech v anizotropiích hydrodynamické expanze. Jelikož dle vyřčené doměnky v Podkap. 3.4 lze anizotropie jednoznačně zrcadlit s fázovými poli hydrodynamického systému, tak vytvářejme vektory (3.24), resp. (3.25), které lze mimo jiné chápat jako vysokodimenzionální korelace anizotropií, resp. korelace funkcí z anizotropií. Pokud nekonečně dimenzionální hydrodynamický systém obsahuje ve svém fázovém prostoru atraktory, tak bychom očekávali struktury na něj odkazující i v nízkodimenzionálních korelacích, tj. ve vykreslování vektorů (3.24), resp. (3.25). Vybrali jsme třídimenzionální korelace, jelikož korelace vyšších dimenzí již nelze smysluplně zobrazit.

Na obrázcích třídimenzionálních korelací očekávejme v levém sloupci tři pohledy na strukturu svrchu a v pravém sloupci pohledy na roviny $x \times y, x \times z$ a $y \times z$.

Nejdříve nahlédněme na Obr. 5.10, kde jsou korelace prostorových anizotropií ϵ_n^x pro $n = 2, 3, 4$. Pozorujeme snižování prostorových anizotropií a převážně trend přibližování trajektorií k vystředovanému průběhu SU . Je zajímavé, že průběh SPP



Obrázek 5.7: Prostorové a hybnostní anizotropie ϵ_n^x , ϵ_n^p pro 90 událostí spolu s jejich středovaným průběhem SU a průběhem ze středovaných počátečních podmínek SPP . V levém sloupci prostorové anizotropie, tj. na Obr. (a), (c), (e). Hybnostní anizotropie v pravém sloupci na Obr. (b), (d), (f).



Obrázek 5.8: Středovaný počáteční profil hustoty energie pro *SPP* v čase $\tau_h = 0,6$ fm.

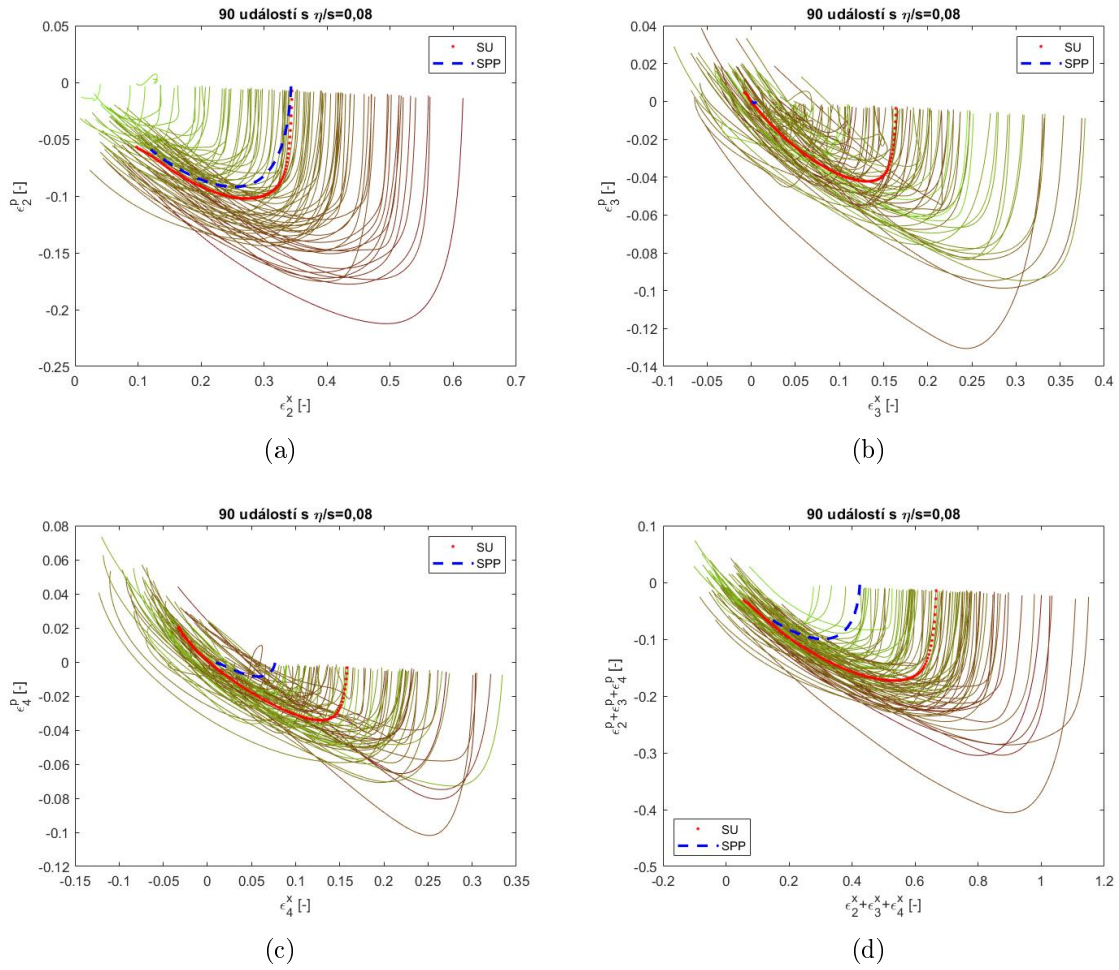
postrádá liché anizotropie a nachází se v okolí hnědých křivek, tj. událostí s vysokou počáteční excentricitou. Na Obr. 5.10(d) vidíme, že křivky začínající v okolí průběhu *SPP* tvoří útvary podobné žebrování, kdy se odchyľují od *SPP* a mírně navrací. Jedná se o události s nízkým ϵ_4^x .

Třidimenzionální korelaci anizotropií hybnosti ϵ_n^p pro $n = 2, 3, 4$ lze vidět na Obr. 5.11. Pozorujeme dynamiku zvyšování a následné snižování hybnostních anizotropií. Zajímavé je, že korelace ϵ_2^p s ϵ_3^p a ϵ_2^p s ϵ_4^p jsou si blízké (porovnání Obr. 5.11(b) a 5.11(d)), což vede na kompaktnější tvar korelace ϵ_3^p s ϵ_4^p podél diagonály grafu na Obr. 5.11(f). Druhý řád je zřejmě nejdůležitějším momentem expanze.

Jako poslední třidimenzionální korelaci jsme zvolili případ s využitím funkcí anizotropií $\eta_i(\epsilon_n^x, \epsilon_n^p)$ pro $i = 1, 2, 3$, viz (3.25). Definujeme je jednoduše jako rozdíl prostorových a hybnostních anizotropií stejného řádu, tedy

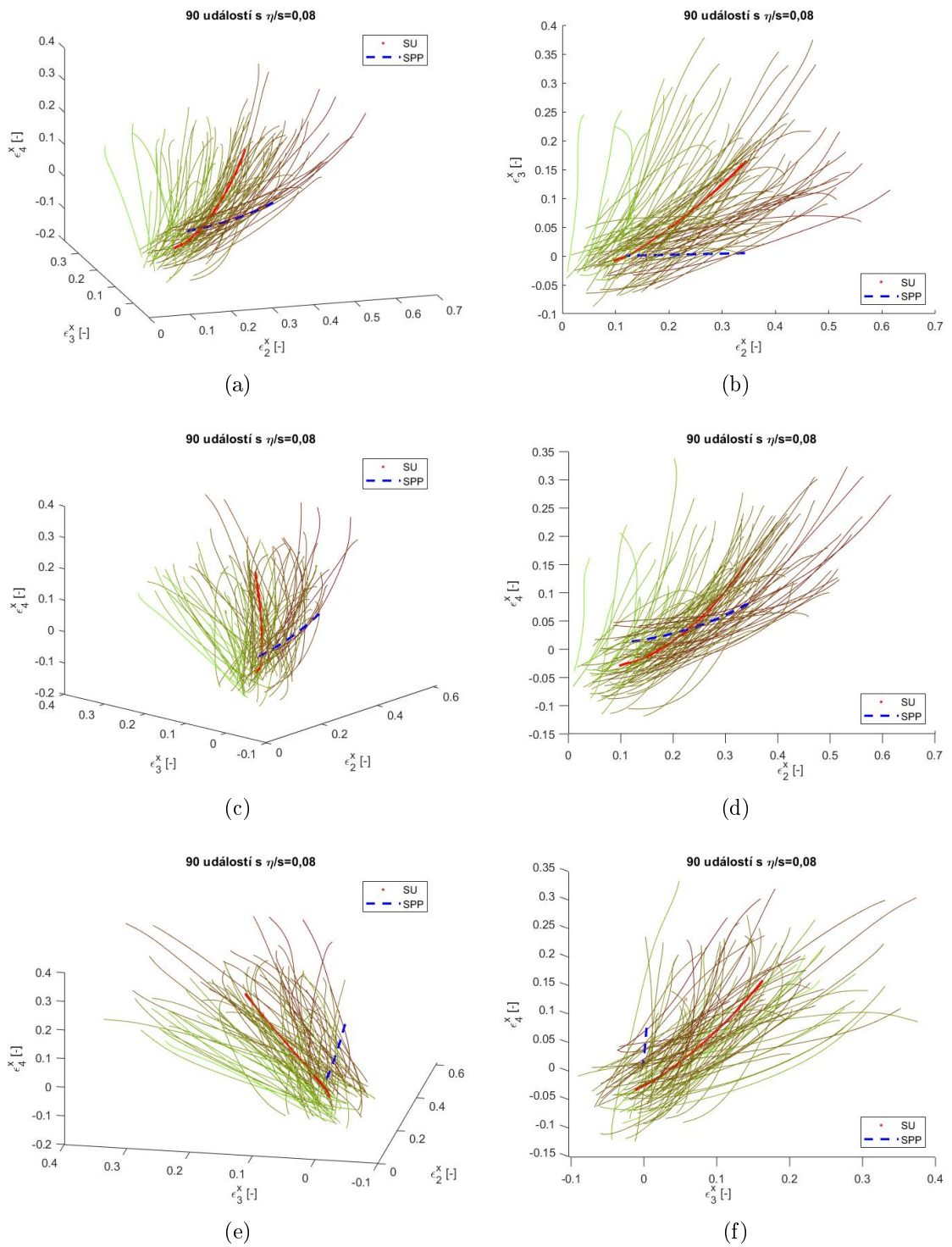
$$\begin{aligned}\eta_1 &= \epsilon_2^x - \epsilon_2^p, \\ \eta_2 &= \epsilon_3^x - \epsilon_3^p, \\ \eta_3 &= \epsilon_4^x - \epsilon_4^p.\end{aligned}\tag{5.1}$$

Z konstrukce (3.9) jsou námi definované hybnostní anizotropie ϵ_n^p opačného znaménka než prostorové anizotropie ϵ_n^x definované vztahem (3.2). Rozdílem $\epsilon_n^x - \epsilon_n^p$ tedy sčítáme kladné hodnoty. Od $-\epsilon_n^p$ očekáváme kompenzaci snižování ϵ_n^x , kvůli již zmiňované propagaci prostorových anizotropií do hybnostních. Na Obr. 5.12 vidíme korelaci členů (5.1), která je podobná korelaci z Obr. 5.10. To je způsobeno téměř řádovým rozdílem mezi prostorovými a hybnostními anizotropiemi. Pozorujeme vyhlazení křivek a jejich menší překryv, což je správný signál, protože od trajektorií opisovaných stavovými vektory bychom neočekávali křížení. Zpětná dynamika (vlnky) v počátcích křivek naznačuje, že je nárůst hybnostní anizotropie velice rychlý. O tom se můžeme přesvědčit na Obr. 5.9, kde jsou křivky ze začátku

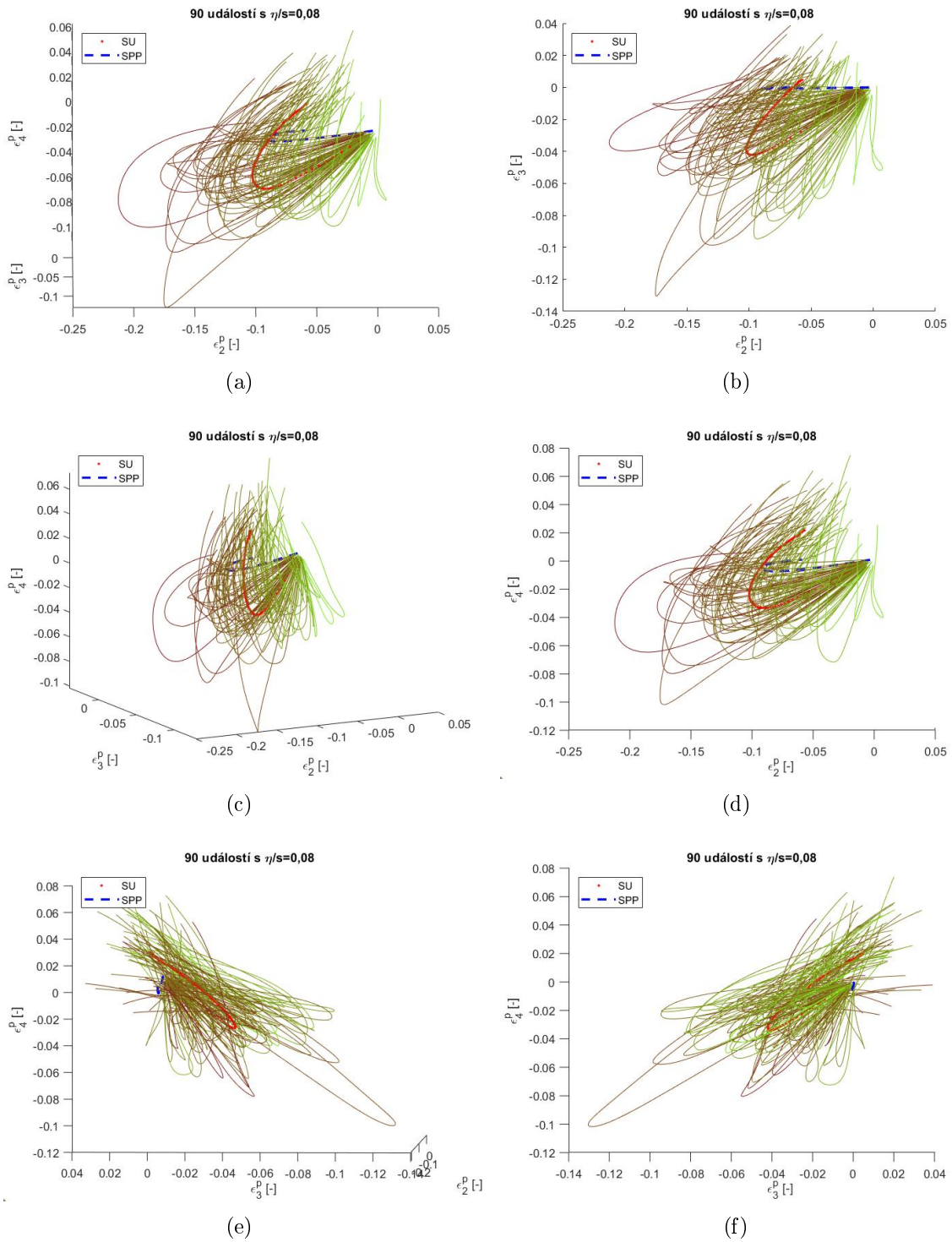


Obrázek 5.9: Korelace prostorových a hybnostních anizotropií stejného řádu na Obr. (a), (b), (c) pro řády $n = 2, 3, 4$ a korelace součtů anizotropií na Obr. (d).

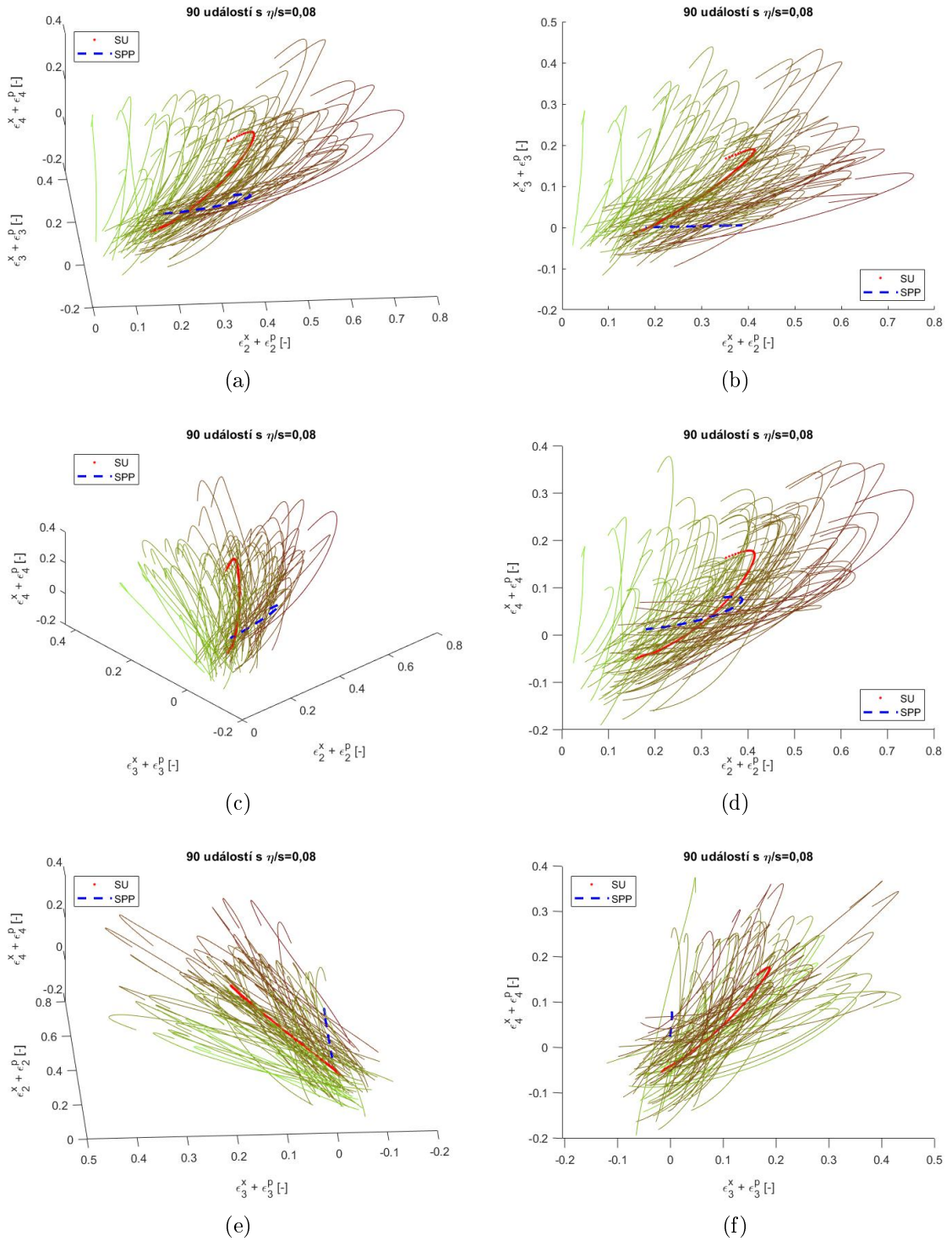
expanze téměř svislé, tedy neměnné v prostorové anizotropii a pozorujeme prudký nárůst hybnostní anizotropie.



Obrázek 5.10: Třídímní korelace prostorových anisotropií ϵ_2^x , ϵ_3^x , ϵ_4^x postupně na osách x, y, z . V levém sloupci pohledy shora, tj. na Obr. (a), (c), (e). Pohled na roviny $x \times y$, $x \times z$, $y \times z$ v pravém sloupci na Obr. (b), (d), (f).



Obrázek 5.11: Třidimenzionální korelace hybnostních anizotropií ϵ_2^p , ϵ_3^p , ϵ_4^p postupně na osách x, y, z . V levém sloupci pohledy shora, tj. na Obr. (a), (c), (e). Pohled na roviny $x \times y$, $x \times z$, $y \times z$ v pravém sloupci na Obr. (b), (d), (f).



Obrázek 5.12: Třídímní korelace rozdílů anizotropií $\epsilon_2^x - \epsilon_2^p$, $\epsilon_3^x - \epsilon_3^p$, $\epsilon_4^x - \epsilon_4^p$ postupně na osách x, y, z . V levém sloupci pohledy shora, tj. na Obr. (a), (c), (e). Pohled na roviny $x \times y$, $x \times z$, $y \times z$ v pravém sloupci na Obr. (b), (d), (f).

Závěr

V první části práce jsme představili kontext studia kvark-gluonového plazmatu – teoretické předpovědi, první pozorování a průběh experimentů. Poukázali jsme na kolektivní chování tohoto média při své expanzi, což odkazuje na nutnost hydrodynamického popisu.

V druhé kapitole jsme se zabývali samotnou relativistickou hydrodynamikou s nahlédnutím k její nerelativistické analogii – klasické hydrodynamice. Byly odvozeny pohybové rovnice do prvního řádu a ukázáno schéma pro pohybové rovnice z vyšších řádů tenzoru energie a hybnosti tak, abychom porozuměli definicím prostorových i hybnostních anizotropií a rovnicím hydrodynamického řešiče vHLLC. vHLLC jsme jako numerický aparát prezentovali spolu s generátorem počátečních podmínek GLISSANDO 2.

Více způsoby jsme definovali jak prostorové, tak i hybnostní anizotropie, kdy zobecnění hybnostní anizotropie do řádů m a n je inovací do dané problematiky spolu s definicí anizotropií potenciálu. Vyřkli jsme domněnku o vztahu prostorových a hybnostních anizotropií k fázovým proměnným systému – polím $u^\mu(\mathbf{x}, \tau), \varepsilon(\mathbf{x}, \tau), \dots$. Domněnku jsme ověřovali na sadě korelací.

Výstupem této práce jsou implementované prostorové i hybnostní anizotropie v kódu vHLLC a skripty v programu Matlab pro spočtení anizotropií potenciálu a vizualizaci hydrodynamických polí z výstupu vHLLC.

V Podkap. 5.1 jsme porovnávali různá nastavení hydrodynamiky vůči smykové viskozitě pro ideální případ $\eta/s = 0$ a dva viskózní případy s $\eta/s = 0,08$ a $\eta/s = 0,20$. Nepozorovali jsme ponížení anizotropií vzhledem k případu s vyšší viskozitou, pouze tendenci anizotropií nevzdalovat se od okolí dosažené nuly. Ukázali jsme i nově definované anizotropie potenciálu, jejichž detailní studium ponecháváme dalším pracem.

V Podkap. 5.2 jsme poměřovali anizotropie 90 událostí s jejich vystředováním a s průběhem ze středovaných počátečních podmínek. Odsud je závěrem i konstatování dynamiky transformace prostorových anizotropií do hybnostních, kdy pozorujeme rychlý nástup hybnostních anizotropií pohánějící následné ponížení prostorových anizotropií. Sledovali jsme i silné korelace shodných řádů n pro ϵ_n^x a ϵ_n^p . Zejména se potvrdila role druhého řádu jako hlavního momentu dynamiky.

V rámci hledání atraktorů jsme vytvářeli třídímní korelace anizotropií prostorových $\epsilon_2^x, \epsilon_3^x, \epsilon_4^x$, hybnostních $\epsilon_2^p, \epsilon_3^p, \epsilon_4^p$ i pomocí funkce anizotropií def. $\eta_i = \epsilon_{i+1}^x - \epsilon_{i+1}^p$ pro $i = 1, 2, 3$ a ve vytvořených strukturách jsme hledali přilínání trajektorií k určité množině, či křivce. Takové chování lze vidět u křivek s vyššími hodnotami

anizotropií na Obr. 5.10, či 5.12, není však univerzální. Na Obr. 5.12 vidíme menší překrývání křivek a jejich jemné vyhlazení oproti Obr. 5.10. To může naznačovat dobrý směr ve výběru funkcí $\eta_i(\epsilon_n^x, \epsilon_n^p)$, kdy se nabízí uvažovat složitější funkční závislosti spolu se zakomponováním více řádů anizotropií. Domněnka o vztahu anizotropií a hydrodynamických proměnných systému se tedy jeví jako reálná.

V budoucnu se zaměříme i na případ s nenulovou objemovou viskozitou, tj. v nastavení s $\zeta/s \neq 0$, jelikož disipace obecně dopomáhá k upínání křivek na atraktor. Dále se nabízí třídění událostí dle blízkých počátečních hodnot prostorových anizotropií a sledování dynamiky na těchto třídách. Jistý prostor je stále v důkladné analýze korelací fázových posunů Ψ_n .

Literatura

- [1] PASENCHNIK, R., M. ŠUMBERA *Phenomenological Review on Quark-Gluon Plasma: Concepts vs. Observation*. 2017. arXiv:1611.01533v3
- [2] FLOECHINGER, S., U. A. WIEDEMANN *Kinetic freeze-out, particle spectra, and harmonic flow coefficients in mode by mode hydrodynamics*. 2014. Phys. Rev. C 89 (2014) 034914
- [3] SONG, H., U. HEINZ *Multiplicity scaling in ideal and viscous hydrodynamics*. 2008. Phys. Rev. C 78 024902
- [4] NEIMI, H. *Event-by-event distributions of azimuthal asymmetries in ultrarelativistic heavy-ion collisions*. 2013. Phys. Rev. C 87 054901
- [5] KARPENKO, Iu., P. HUOVINEN, H. PETERSEN *A 3+1 dimensional viscous hydrodynamic code for relativistic heavy ion collisions*. 2014. Comput. Phys. Commun 185 3016-3027
- [6] KARPENKO, Iu., P. HUOVINEN, H. PETERSEN, M. BLEICHER *Estimation of the shear viscosity at finite net-baryon density from A+A collision data at $\sqrt{s_{NN}} = 7.7 - 200$ GeV*. 2015. Review 91 064901
- [7] RAFELSKI, J. *Connecting QGP-Heavy Ion Physics to the Early Universe*. 2013. arXiv:1306.2471v1
- [8] PHYSICS 290E SEMINAR *Discovery of the Gluon*. arXiv:1306.2471v1. Berkeley University of California. 2020. https://indico.physics.lbl.gov/event/1123/contributions/4825/attachments/2261/2924/Physics_290E_Discovery_of_Gluon.pdf
- [9] FILINOV, V. S., Yu. B. IVANOV, M. BONITZ, P. R. LEVASHOV, V. E. FORTOV *Quantum simulations of strongly coupled quark-gluon plasma*. Kurchatov Institute, Moscow.
- [10] CARCÍA, G. M. *Advances in Quark Gluon Plasma*. Université de Nantes. 2013. arXiv:1304.1452v1
- [11] GYULASSY M. *The QGP Discovery*. Physics Department, Columbia University. New York. USA arXiv:nucl-th/0403032v1

- [12] CSANÁD, M., T. CSÖRGO, Z. F. JIANG, C. B. YANG *Initial Energy Density of $\sqrt{s} = 7$ and 8 TeV p - p Collisions at LHC*. Department of Atomic Physics, Eötvös Loránd University. Budapest. 2017. PACS: 25.75.-q; 25.75.Nq; 13.85.-t
- [13] KARSCH, F. *Lattice Results on QCD Thermodynamics*. Fakultät für Physik, Universität Bielefeld. 2001. arxiv:103314v1
- [14] SONG, H. *Causal Viscous Hydrodynamics for Relativistic Heavy Ion Collisions*. Dissertation. The Ohio State University. 2018.
- [15] DALARSSON, N., M. DALARSSON, L. GOLUBOVIĆ, *Ideal and Nonideal Gases*. <https://www.sciencedirect.com/book/9780123849564/introductory-statistical-thermodynamics>
- [16] Our Current Understanding on the Evolution of Heavy Ion Collisions *Space time diagram for the time evolution of the colliding system*. <https://na49info.web.cern.ch/Public/Press/findings.html>.
- [17] BECATTINI, F., M. BUZZEGOLI, A. PALERMO, G. INGHIRAMI, I. KARPENKO *Local polarization and isothermal local equilibrium in relativistic heavy ion collisions*. 2021. arXiv:2103.14621v2
- [18] DOBRIN, A. *Elliptic flow of identified particles in Pb-Pb collisions at the LHC*. Utrecht University
- [19] PHENIX Collaboration *Scaling properties of azimuthal anisotropy in Au+Au and Cu+Cu collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV*. 2006. arxiv:0608033v1
- [20] ŠTOLL I., J. TOLAR *Teoretická fyzika* Skripta. Vydavatelství ČVUT. 1982.
- [21] PHENIX Collaboration *Systematic Studies of Elliptic Flow Measurements in Au+Au Collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV*. 2009. arxiv:0905.1070v1
- [22] DASGUPTA, P., R. CHATTERJEE, S. K. SINGH, J. ALAM *Effects of initial state nucleon shadowing on the elliptic flow of thermal photons*. 2018. arxiv:1704.05715v2
- [23] MAIRE, A. *Introduction to Quark-Gluon Plasma session*. 2015. arxiv:1506.03683v1
- [24] *Going with the flow*. Anisotropic expansion. <https://laptrinhx.com/news/going-with-the-flow-kZ1DaDG/>
- [25] MAS, A. F. *Hydrodynamics*. University of Vigo. International Max Planck Research School. 2008.
- [26] ROMATSCHKE, P., U. ROMATSCHKE *Relativistic Fluid Dynamics In and Out of Equilibrium*. arXiv:1712.05815v3
- [27] BJORKEN, J. D. *Highly relativistic nucleus-nucleus collisions: The central rapidity region*. Physical Review C. 10.1103/PhysRevD.27.140

- [28] HELLER, P. M., SPALIŃSKI, M. *Hydrodynamics beyond the Gradient Expansion: Resurgence and Resummation*. arXiv:1503.07514v2
- [29] LANDAU, L. D., E. M. LIFSHITZ *Fluid Mechanics, Second Edition: Volume 6*. Course of Theoretical Physics. 1987
- [30] SUNIL, J., C. CHANDRODOY, J. AMARESH, P. SUBRATA, H. ULRICH *Exact solutions and attractors of higher-order viscous fluid dynamics for Bjorken flow*. Physical Review C. 100. 10.1103/PhysRevC.100.034901.
- [31] BAIER, R., P. ROMATSCHKE, D. T. SON, A. O. STARINETS, M. A. STEPHANOV *Relativistic viscous hydrodynamics, conformal invariance, and holography*. BI-TP 2007/29
- [32] QIN, G. Y., H. PETERSEN, S. A. BASS, B. MÜLLER *Translation of collision geometry fluctuations into momentum anisotropies in relativistic heavy-ion collisions*. 2010. arxiv:1009.1847v2
- [33] NOVÁK, T. *Metody nelineární dynamiky pro ultrarelativistické jaderné srážky*. FJFI, ČVUT v Praze. 2020. [online] http://physics.fjfi.cvut.cz/publications/ejcf/VU_Tomas_Novak.pdf
- [34] RAU, P., J. STEINHEIMER, S. SCHRAMM, H. STÖCKER *QCD Equation of State From a Chiral Hadronic Model Including Quark Degrees of Freedom*. 2013. arXiv:1306.3352v1
- [35] BHATTACHARYYA, S., V. E. HUBENY, S. MINWALLA, M. RANGAMANI *Nonlinear Fluid Dynamics from Gravity*. TIFR/TH/07-44. 2008.
- [36] BRONIOWSKI, W., M. RYBCZYŃSKI, P. BOŽEK *GLISSANDO: GLauber Initial-State Simulation AND mOre....* 2008. arXiv:0710.05731v3
- [37] BRONIOWSKI, W., G. STEFANEK, M. RYBCZYŃSKI, P. BOŽEK *GLISSANDO: GLauber Initial-State Simulation AND mOre..., ver. 2*. 2013. arXiv:1310.5475v1
- [38] RYBCZYŃSKI, M., W. FLORKOWSKI *Locally anisotropic momentum distributions of hadrons at freeze-out in relativistic heavy-ion collisions*. 2012. arxiv:1206.6587v1