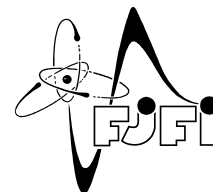


ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská



Odhadování stupně důvěry v prediktor užívaný v odhadování parametrů

Estimation of a Trust Weight of the Predictor Serving to Parameter Estimation

Bakalářská práce

Autor: **Daniel Karlík**
Vedoucí práce: **Ing. Miroslav Kárný, DrSc.**
Konzultant: **Ing. František Hůla**
Akademický rok: 2021/2022

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student:	Daniel Karlík
Studijní program:	Aplikace přírodních věd
Studijní obor:	Matematické inženýrství
Studijní zaměření:	Aplikované matematicko-stochastické metody
Název práce (česky):	Odhadování stupně důvěry v prediktor užívaný v odhadování parametrů
Název práce (anglicky):	Estimation of a Trust Weight of the Predictor Serving to Parameter Estimation

Pokyny pro vypracování:

- 1) Seznamte se s bayesovským odhadováním parametrů.
- 2) Seznamte se se zobecněním bayesovského odhadování parametrů využívajícím prediktor dat místo dat.
- 3) Navrhněte odhad parametru určujícího důvěru v prediktor užitý v předešlém bodě.
- 4) Specializujte obecné řešení z bodu 3. pro případ jednoduchého parametrického modelu.
- 5) Implementujte získané algoritmy v systému MATLAB nebo Python a vyhodnoťte přínos Vašeho odhadování.

Doporučená literatura:

- 1) V. Peterka, Bayesian System Identification. In 'P. Eykhoff - Trends and Progress in System Identification', Pergamon Press, Oxford, 1981, 239-304.
- 2) J. Kracík, M. Kárný, Merging of data knowledge in Bayesian estimation. In 'Proceedings of the Second International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics', Eds: Filipe J., Cetto J. A., Ferrier J. L., INSTICC, Barcelona 2005, 229-232.
- 3) A. Quinn, M. Kárný, T.V. Guy, Optimal design of priors constrained by external predictors. International Journal of Approximate Reasoning 84, 2017, 150-158.

Jméno a pracoviště vedoucího bakalářské práce:

Ing. Miroslav Kárný, DrSc.

ÚTIA AVČR, v.v.i., POB 18, Pod Vodárenskou věží 4, 18208 Praha 8

Jméno a pracoviště konzultanta:

Ing. František Hůla

ÚTIA AVČR, v.v.i., POB 18, Pod Vodárenskou věží 4, 18208 Praha 8

Datum zadání bakalářské práce: 31.10.2021

Datum odevzdání bakalářské práce: 7.7.2022

Doba platnosti zadání je dva roky od data zadání.

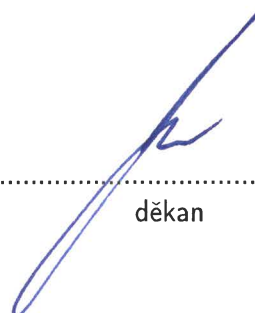
V Praze dne 12. října 2021



garant oboru



vedoucí katedry



děkan

Poděkování:

Chtěl bych zde poděkovat především svému školiteli Ing. Miroslavu Kárnému, DrSc. za odborné vedení, trpělivost a ochotu, kterou mi v průběhu zpracování bakalářské práce věnoval. Dále bych chtěl poděkovat Karolíně Staré za pomoc s vytvořením obrázků v teoretické části. Tato práce byla podpořena grantem MŠMT LTC18075 a EU-COST Action CA16228.

Daniel Karlík

Čestné prohlášení:

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně a uvedl jsem všechnu použitou literaturu.

V Praze dne 30. prosince 2021

Daniel Karlík

Název práce:

Odhadování stupně důvěry v prediktor užívaný v odhadování parametrů

Autor: Daniel Karlík

Obor: Matematické inženýrství

Zaměření: Aplikované matematicko-stochastické metody

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: Ing. Miroslav Kárný DrSc., ÚTIA AVČR

Konzultant: Ing. František Hůla, ÚTIA AVČR

Abstrakt: Tato bakalářská práce se zabývá řešením problému efektivního využití externí informace ve formě externího prediktoru k vylepšení konstruovaných modelů. Zpracovávané informace slouží k predikování a vychází z formalizmu diskretních markovských procesů. Predikce získáváme odhadováním parametrů modelu pomocí bayesovské statistiky. V současné praxi je, při užívání externího prediktoru k vylepšení odhadování parametrů modelu, potřebná pevná volba důvěry v užitečnost externího prediktoru. V této práci je popsána metoda na hledání optimální volby důvěry v užitečnost externího prediktoru a metoda na navrhování optimálních predikcí. Princip těchto metod spočívá v kombinaci modelů, užívajících různé pevné volby důvěry v užitečnost externího prediktoru, na základě úspěšnosti jimi navrhovaných predikcí a naší apriorní informace o užívaném externím prediktoru. Vlastnosti navržených metod jsou ilustrovány pomocí simulačních experimentů.

Klíčová slova: Apriorní informace, bayesovské odhadování parametrů, důvěryhodnostní parametr, externí informace, externí prediktor, markovské procesy, predikce

Title:

Estimation of a Trust Weight of the Predictor Serving to Parameter Estimation

Author: Daniel Karlík

Abstract: This bachelor's degree project studies the problem of effective use of external information in the form of an external predictor to improve designed models. The processed information serves to predict and is based on the formalism of discrete Markov processes. The predictions exploit estimation of model parameters by Bayesian statistics. Currently, when an external predictor is used for the improvement of the estimation of model parameters, it is necessary to choose a value of trust given to that external predictor. This work describes a method for finding the optimal choice of trust in the usefulness of the external predictor and a method for designing optimal predictions. These methods are based on the combination of models, using different trust in the usefulness of the external predictor, according to the success of their proposed predictions and our prior information about the external predictor used. The properties of the proposed method are illustrated by simulation experiments.

Key words: Bayesian estimation, external information, external predictor, Markov processes, prior information, prediction, trust parameter

Obsah

1	Úvod	8
2	Matematické základy	10
2.1	Bayesova formule a řetězové pravidlo	11
2.2	Bayesovské odhadování parametrů	11
3	Popis a řešení problému	13
3.1	Formulace problému	13
3.2	Řešení	18
3.3	Algoritmizace	21
4	Simulační testování	26
4.1	Vstupní parametry simulace	26
4.2	Fungování programu a popis funkcí	27
4.3	Výsledky	30
4.4	Diskuze výsledků	56
	Závěr	57

Kapitola 1

Úvod

Rozhodování je jednou ze základních úloh, se kterou se lze setkat takřka napříč všemi obory lidské činnosti, jako jsou marketing, medicína nebo průmysl. Má tedy smysl tuto problematiku studovat a snažit se dospět k rozhodnutím, která maximalizují námi sledovaný užitek. V této práci se budeme zabývat částí oblastí rozhodování a to konkrétně předpovídáním.

Máme-li nějakou reálnou situaci nebo proces, který chceme predikovat, pak musíme provést převedení daného problému na matematický model. Abychom skutečně prováděli nejlepší možné predikce za pomoci námi určeného modelu, musíme co nejefektivněji využít všechny dostupné informace. Pojmeme *systém* rozumějme studovanou (explicitně) neznámou situaci nebo proces. Tyto informace mohou být ve formě námi provedených měření na námi modelovaném *systému*, měření provedených na *systému* podobného charakteru nebo měření o jejichž původu máme omezené znalosti. Důležité je si uvědomit, že za zcela důvěryhodnou informaci nelze považovat ani námi naměřená data, i když těm většinou důvěřujeme více než jiným zdrojům informací. Ostatní typ informací, které souhrnně nazveme *externí informace*, může být pro náš model platný pouze částečně, neboť měření zdánlivě podobného *systému* můžou být zcela odlišná od těch týkajících se našeho *systému*. Otázkou tedy je jakým způsobem kvantifikovat míru platnosti *externí informace* pro náš model, tato hodnota bude reprezentována tzv. *důvěryhodnostním parametrem*. Druhou související otázkou je jak spojit informace námi provedených měření s *externími informacemi*. Druhá otázka již byla zodpovězena v [5] a tato práce její výsledky užívá. Abychom byli konkrétnější v této práci budeme využívat koncept pevně voleného *důvěryhodnostního parametru*, který představuje váhu se kterou budeme *externí informace* do našeho modelu vnášet.

Tématem této práce je nalezení postupu, který by co nejefektivněji využil dostupných informací k vytvoření modelu, jež by reflektoval co nejlépe skutečný neznámý *systém*. Jednodušeji řečeno, budeme hledat výhodnější způsob spojení naměřených dat s *externími informacemi*. Dosud byl *důvěryhodnostní parametr* v literatuře volen jako pevná konstanta, která byla volena na základě znalosti experta o dané problematice. Problém pak mohl nastávat v případě, že žádná taková znalost experta není dostupná, např. se jedná o nový problém, nemluvě o tom že lidský faktor též nemusí být bezchybný. Pevná volba *důvěryhodnostního parametru* navíc představuje problém ve smyslu, že pokud by došlo ke změně nebo vývoji zdroje *externích informací*, pak by mělo opět dojít k nové volbě hodnoty parametru.

Tento problém se pokusíme vyřešit tak, že budeme pracovat s různými pevnými hodnotami *důvěryhodnostního parametru* a budeme jednotlivým hodnotám přiřazovat jejich pravděpodobnost, reprezentující naši důvěru v danou hodnotu vloženou. Na základě tohoto přístupu zkonstruujeme automatizovanou metodu, která v reálném čase vyhodnocuje užitečnost přijímaných *externích informací* a užije je k vylepšení odhadu parametrů našeho *modelu systému*.

Pro ilustraci uved' me příklad na kterém přiblížíme využitelnost naší práce. Mějme přístup ke dvěma různým e-shopům, které buď vlastníme nebo máme jejich fungování na starost. Chceme, aby náš e-shop

měl co nejvyšší zisk a tak bychom chtěli zákazníkům, kteří navštíví náš e-shop, nabízet takové zboží, které by si u nás zakoupili. Rozumějme tedy problém obsluhy zákazníka procházejícího e-shop, jako náš neznámý systém.

Na základě profilu zákazníka určeného věkem, zájmy, přibližným bydlištěm atp. a jeho minulými aktivitami, které učinil, např. vložil zboží do košíku nebo si ho jen prohlížel, vyhodnotíme, co mu nabídnout. Všechny okolnosti ohledně typu zákazníka nebo jeho aktivit ovlivníme pouze nepřímo, jedná se tedy o tzv. výstupy *systému*. Tyto výstupy však mohou být ovlivněny vstupy, které zákazníkovi poskytneme, jako jsou např. zboží které mu zobrazíme nebo doporučíme. Na základě těchto postupů sbíráme data o tom, jak kvalitně se nám daří zboží nabízet a úspěšně nebo neúspěšně prodávat.

Problém tohoto postupu však je v tom, že se zlepšuje pouze sbíráním napozorovaných dat a pokud spouštíme nový e-shop, může trvat určitou dobu než bude poskytovat dostatečně kvalitní doporučení. Což nejspíše povede zpočátku k nižším prodejům. Máme-li tedy druhý e-shop, který už je nějaký čas v provozu, bylo by jistě výhodné využít jeho nabytých znalostí ke zrychlení celkového učení nového e-shopu a zkvalitnění jeho predikcí, jak bude zákazník reagovat na naše nabídky a ceny.

V dnešní praxi bychom těmto *externím informacím*, neboli informacím explicitně nepocházejícím z našeho *systému*, přidělili jednu pevnou hodnotu *důvěryhodnostního parametru*, podle které bychom vnášeli tuto *externí informaci* do našeho modelu e-shopu. Cílem této práce je zkonstruovat takový algoritmus, který za cenu vyšší, ale únosné početní náročnosti lépe využije dostupné *externí informace*.

Obsah této práce jsme se rozhodli rozdělit do úvodu, 3 kapitol, závěru a přílohy. Nejprve v kapitole 2 uvedeme matematické vztahy a definice potřebné pro naše účely, jako jsou *Bayesův vzorec* tvořící jádro *bayesovského odhadování parametrů*. Bude se jednat pouze o bezprostředně užité tematické úseky. Zájemci o hlubší porozumění teorie pravděpodobnosti jsou odkázáni na [1], zájemci o komplexnější inženýrský přístup na [2] a zájemci o hlubší statistický náhled na [3].

Navazující kapitola 3 se již zcela věnuje zkoumanému problému. Nejdříve popíšeme práci s parametrickým modelem, následně pak představíme podobu *externí informace*, se kterou se bude dále pracovat, poté zavedeme klíčový pojem *důvěryhodnostní parametr*. Následně uvedeme algoritmus z [5], ze kterého při řešení našeho problému vycházíme. Poté řešení našeho problému důkladně popíšeme a následně ho i formálně vyřešíme. Na základech formálního řešení zkonstruujeme algoritmus, který nám umožní využít námi navržené řešení v praxi.

Kapitola 4 se nejdříve zabývá popisem námi vytvořeného programu sloužícího k otestování námi navrženého řešení v simulaci *systému* a *externího prediktoru*. Následně pak provádíme 8 různých experimentů, jejichž nastavení a průběh diskutujeme. V každém experimentu zvláště ověřujeme přínos námi navrženého řešení, porovnáním počtu chybných predikcí *výstupů* za celý experiment. Výsledky jako celek nakonec shrneme v sekci 4.4.

V závěru shrneme co bylo v této práci provedeno, jaký přínos naše práce má a nakonec popíšeme možné budoucí směry výzkumu navazující na tuto práci.

Kapitola 2

Matematické základy

V této kapitole uvedeme základní definice a vztahy, jež budou potřebné pro další odvozování a přímé užití v této práci. Pro potřeby této práce jsme se rozhodli uvést více inženýrský pohled na danou tematiku vycházející z [2]. Matematicky přesný popis pravděpodobnosti a náhodné veličiny lze nalézt v [1].

Nejdříve představíme základní značení.

pojem	značení
přirozená čísla	\mathbb{N}
komplexní čísla	\mathbb{C}
množina prvků x	\mathbf{x}
počet prvků množiny \mathbf{x}	$ \mathbf{x} $
hustota pravděpodobnosti y	$p(y)$
reálnou část čísla x	$Re\ x$
x je úměrné y	$x \propto y$
\mathbf{x} je ekvivalentní \mathbf{y}	$\mathbf{x} \equiv \mathbf{y}$

Definice 2.1. *Marginální hustotu pravděpodobnosti definujeme pomocí sdružené hustoty pravděpodobnosti $p(a, b)$ následujícím předpisem*

$$p(b) = \int_{\mathbf{a}} p(a, b) da. \quad (2.1)$$

Definice 2.2. *Podmíněná hustota pravděpodobnosti veličiny a za podmínky, že nastalo b , je definována následovně*

$$p(a|b) = \frac{p(a, b)}{p(b)}, \quad p(b) > 0. \quad (2.2)$$

Nezávislost veličiny a na veličině b definujeme vztahem

$$p(a, b) = p(a)p(b) \quad (2.3)$$

nebo ekvivalentně pomocí podmíněné pravděpodobnosti

$$p(a|b) = p(a). \quad (2.4)$$

2.1 Bayesova formule a řetězové pravidlo

Nyní již můžeme na základě dříve uvedených vztahů a několika jednoduchých úprav získat známou *Bayesovu formuli*

$$p(a|b, c) = \frac{p(b|a, c)p(a|c)}{\int_{\mathbf{a}} p(b|a, c)p(a|c)da} \quad (2.5)$$

Dalším užitečným vzorcem je tzv. *řetězové pravidlo*, které lze získat pomocí opakovaného užití vztahu (2.2) přeepsané do součinu. Sdruženou pravděpodobnost n náhodných veličin x_1, x_2, \dots, x_n můžeme aplikací řetězového pravidla získat ve tvaru

$$p(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1) = \prod_{k=2}^n p(x_k|x_{k-1}, \dots, x_1) \times p(x_1) \quad (2.6)$$

2.2 Bayesovské odhadování parametrů

Z oblasti statistiky budeme potřebovat metodu, pomocí které bychom mohli odhadnout parametry námi studovaného modelu. Jedním z možných přístupů k této problematice, jež budeme užívat v této práci, je bayesovské odhadování parametrů.

Nejdříve zevrubně popíšeme co budeme chápat pod pojmem *model systému* a proč je výhodné odhadovat jeho parametry.

Mějme nějakou část světa, kterou budeme chtít blíže popsat nebo studovat. Ve velké části případů si tuto část světa pomyslně oddělíme od zbytku světa a budeme ji studovat nezávisle na okolí námi zvolené části. Tuto pomyslně separovanou část světa budeme dále nazývat *systém*. Takto můžeme oddělit *systém* od zbytku světa, pakliže zanedbání vlivu okolí nebude mít příliš velký vliv na fungování našeho *systému*. Máme-li *systém*, který toto splňuje, pak studování určité zákonitosti bude zajisté výrazně jednodušší, než pokud bychom brali v úvahu veškeré okolní vlivy. Takto vymezený *systém* stále představuje nějakou část skutečného světa, pro naše potřeby ji však potřebujeme převést na matematický popis, který by reflektoval zákonitosti a vzájemné vztahy, jež nás zajímají. Takovýto matematický popis *systému* budeme označovat pojmem *model systému*.

Nyní když jsme zavedli, co představuje pojem *model systému*, můžeme blíže nahlédnout na proměnné, jež v něm figurují. Proměnnými rozumějme data vyskytující se v našem *modelu systému*, jako vstupy a výstupy. Tyto proměnné mohou být buď deterministické nebo stochastické. Jelikož v této práci budeme pracovat s náhodnými proměnnými, nebudeme se deterministickými modely dále zabývat. Náhodné proměnné jsou ve statistice chápány ve smyslu *náhodných veličin*. Zájemci o teorii týkající se *náhodných veličin*, necht' jsou odkázáni na [1].

Realizace náhodných veličin v *modelu systému* představují hlavní nosič informace, který můžeme pozorovat a s jehož pomocí můžeme studovat celkové fungování modelu. Realizace jsou generovány na základě pravděpodobností a vnitřních vztahů. To, že realizace *náhodné veličiny* X je generována podle hustoty pravděpodobnosti $p_X(x)$, budeme značit $X \sim p_X(x)$, kde $p_X(x)$ může být ekvivalentně nahrazeno $F_X(x)$, značícím distribuční funkcí.

Poznámka 2.1. *Užíváme následující zjednodušení značení*

$$p_X(x) = p(x).$$

Kvůli čitelnosti nebudeme užívat dolní index pro odlišení hustot pravděpodobnosti, neboť náhodná veličina v argumentu tuto informaci sama reprezentuje.

Pro nadcházející účely budeme předpokládat, že $p(x) \in \mathcal{F}$, kde $\mathcal{F} = \{p(x|\Theta), \Theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k, k \in \mathbb{N}\}$. Θ se nazývá parametr a označuje jistou vlastnost rozdělení, např. $E[X|\Theta] = \Theta$, tedy střední hodnotu X . Takovéto parametry budeme chtít odhadovat.

Jako tomu obvykle bývá, existuje několik různých způsobů přístupu k odhadování parametrů. Pro naše účely bude výhodné užívat *bayesovské odhadování parametrů*, proto tuto metodu popíšeme blíže. Metoda je pojmenována po Thomasi Bayesovi, který ji publikoval v druhé polovině osmnáctého století. Tato metoda pracuje s předpokladem, že nahlížíme na parametr modelu Θ jako na náhodně rozdělenou veličinu. Tento přístup je výhodný, neboť umožňuje užití apriorní informace o modelu či samotném parametru.

Budeme tedy brát parametr Θ ve smyslu $\Theta \sim p(\Theta)$, kde $p(\Theta)$ je hustota pravděpodobnosti. Odhad bude prováděn tak, že budeme chtít využít informace poskytnuté pozorovanými daty, tzn. budeme podmíněnou hustotu pravděpodobnosti tvaru $p(\Theta|x)$, kde x je pozorovaná realizace X . K výpočtu můžeme použít Bayesův vzorec (2.5), pro přehlednost ho zapíšeme při značení této sekce.

$$p(\Theta|x) = \frac{p(x|\Theta) p(\Theta)}{\int_{\Theta} p(x|\Theta) p(\Theta) d\Theta} \quad (2.7)$$

Člen $p(\Theta|x)$ se nazývá *aposteriorní hustota* a člen $p(\Theta)$ *apriorní hustota*. Apriorní hustota představuje informaci kterou máme o parametru Θ předtím, než jsme na základě pozorování $X \sim p(x|\Theta)$ započali odhadovat parametr Θ .

Apriorní informace může představovat nějakou objektivní informaci, tedy znalost o parametru Θ z minulosti. Může také představovat jistou znalost experta o daném *modelu systému*, tedy svým způsobem subjektivní informaci. Zajisté může též obsahovat libovolnou kombinaci obou již zmíněných miněných druhů informací. Pakliže nemáme žádnou apriorní informaci, budeme brát $p(\Theta)$ jako rovnoměrně rozdělené, symbolicky zapsáno $\Theta \sim U(\Theta)$. Volbu apriorní informace musíme činit obezřetně, neboť by mohlo dojít k tomu, že by vztah (2.7) nemusel být definovaný nebo by vypočtený člen $p(\Theta|x)$ nemusel být hustotou pravděpodobnosti.

Pro odhadování parametrů pomocí bayesovské statistiky jsou užívány následující funkce.

Definice 2.3. Kroneckerovu δ -funkci definujeme následujícím způsobem

$$\delta(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } a = b, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \quad (2.8)$$

Zájemci o podrobnější informace týkající se následujících funkcí, necht' nahlédnou do [4].

Definice 2.4. Beta funkci definujeme pro všechna $x, y \in \mathbb{C}$ taková, že $\text{Re } x > 0, \text{Re } y > 0$ následovně

$$B(x, y) = \int_0^1 z^{x-1} (1-z)^{y-1} dz. \quad (2.9)$$

Definice 2.5. Gamma funkci definujeme pro všechny $x \in \mathbb{C}$, kromě 0 a celých záporných čísel následujícím předpisem

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} z^{x-1} e^{-z} dz, \text{Re } x > 0. \quad (2.10)$$

Lemma 2.1. Mezi Beta funkcí a Gamma funkcí platí následující vztah.

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (2.11)$$

Lemma 2.2. Pro Gamma funkci platí následující vlastnost.

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \quad (2.12)$$

Kapitola 3

Popis a řešení problému

V této kapitole se dostaneme k jádru celé práce. Specifikujeme si studovanou problematiku, nejdříve motivačně, následně i formálně.

Motivační část bude obsahovat obecný popis problému *rozhodování*, v něm vyskytující se *model* a popis situace, za níž tento *model* tvoříme. Prohloubíme tím popis již dříve nastíněných pojmů.

Po motivační části bude již následovat formálnější část, ve které si přesně specifikujeme veškeré podmínky, které budeme na studovaný *model* klást. Po tomto zavedení podmínek již budeme moci přistoupit k samotnému formálnímu řešení našeho problému.

Po formálním řešení problému bude následovat sestrojení algoritmu, jež nám umožní používat navržené řešení v praxi.

3.1 Formulace problému

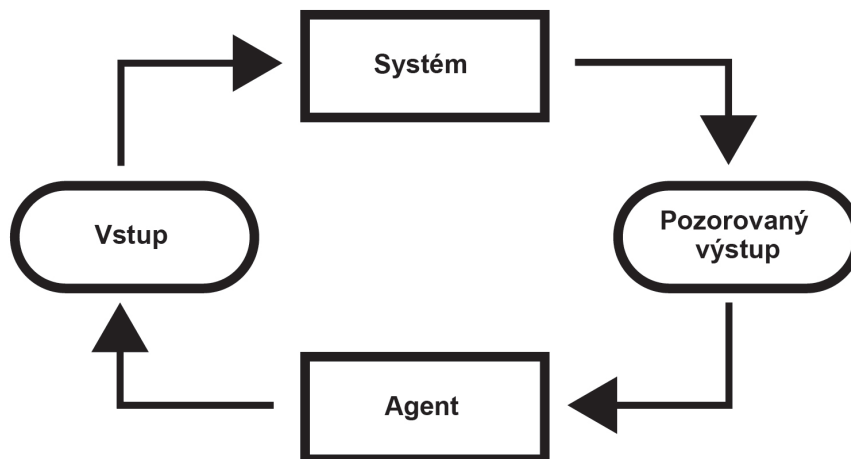
Nejdříve si zopakujeme terminologii ze sekce 2.2, kterou budeme užívat jak v této, tak i následujících kapitolách. Pokud budeme mít nějakou reálnou situaci nebo část světa, budeme ji označovat jako *systém*. Tuto situaci či část světa budeme chtít matematicky popsat a dále ji studovat za nějakým účelem. Matematický popis tohoto studovaného *systému* budeme nazývat *model systému*. K vytvoření tohoto matematického popisu je možno využít veličiny získané pozorováním *systému*.

Pro ilustraci a k lepšímu pochopení formulace studovaného problému uvedeme na obrázku 3.1 zjednodušené schéma cyklu reprezentující námi studovaný problém. Blokem s označením „agent“ rozumíme část, ve které dochází jak ke generování *vstupů*, tak k učení *modelu systému* užívaného k navrhování *predikcí výstupů systému*.

Obecně budeme pracovat s dvěma typy veličin, které je možno pozorovat. První typ jsou tzv. *vstupy*, ty představují veličiny dodávané do *systému*, můžeme je tedy volit. Druhým typem jsou tzv. *výstupy*, tyto veličiny je možné získat pouze pasivně, a to pozorováním *systému*.

V našem případě budeme vytvářet *model systému* s cílem předpovídat nadcházející *výstupy*, na základě dosud shromážděných informací a zvolených *vstupů*. V oblastech, kde je požadováno provádět předpovědi chování *systému*, je důležité co nejpodrobněji porozumět *systému* a jeho vnitřní zákonitostem. Toto porozumění nám následně umožní činit lepší rozhodnutí vztahená k neznámému *systému*.

Navážeme na příklad popisovaný v kapitole 1, kde jsme jako *systém* označili proces obsluhy zákazníka e-shopu. Naším *modelem systému* bychom rádi předpovídali, jaké produkty danému zákazníkovi zobrazit, abychom zvýšili pravděpodobnost, že si je koupí. S tím však úzce souvisí odhad pravděpodobnosti, že si zákazník nějaké zboží zakoupí, když mu ho ukážeme. Při znalosti těchto pravděpodobností můžeme navrhnout ukázání konkrétního zboží, tak abychom zvýšili šanci, že si zákazník dané zboží koupí. Hodnoty těchto pravděpodobností jsou ale neznámé, jak obchodníkovi, tak mnohdy i samotnému



Obrázek 3.1: Studovaný problém má podobu jednoduchého cyklu, sestávajícího se z neznámého systému, který generuje pozorovaný výstup a agenta generujícího vstup.

zákazníkovi a tak nemá obchodník jinou možnost, než je odhadnout na základě pozorování, tedy sbíráním a zpracováním dat.

Uvažované systémy v této práci budou časově neměnné, nebo-li nebude docházet k jejich vývoji v čase. Další předpoklad, který budeme na problém klást, je konečnost množin všech přípustných vstupů $a \in \mathbf{a}$ resp. výstupů $s \in \mathbf{s}$. Výstup bude reprezentovat nějakou pozorovatelnou veličinu, kterou systém generuje náhodně podle svých vnitřních zákonitostí. Vstup můžeme chápat jako veličinu vkládanou do systému agentem, která ovlivní následující generovaný výstup.

Takto popsaný systém, funguje v cyklech, kdy přijme vstup a s jistou pravděpodobností vygeneruje jistý výstup. Tyto cykly budeme označovat časovým indexem t . Například ve třetím cyklu vkládáme do systému vstup a_3 a ten vygeneruje výstup s_3 . Všechny realizované vstupy a výstupy ukládáme jako data a budeme je značit $d(t) = (s_t, a_t, d(t-1))$, kde bude $d(0)$ značit naši apriorní znalost o systému, nejméně bude obsahovat s_0 . Kvůli přehlednosti budeme od této části již naměřená data, neboli realizace náhodných veličin, zvýrazňovat podtržením $\underline{d}(t)$, aby byly rozpoznatelné od ještě neurčených proměnných. Jelikož chceme zjistit, jak funguje námi studovaný systém, přesněji podle jaké závislosti jsou generovány výstupy. Matematicky zapsáno pomocí podmíněné hustoty pravděpodobnosti, budeme hledat cílový prediktor

$$p(s_{t+1} | \underline{a}_{t+1}, \underline{d}(t)). \quad (3.1)$$

Pro hledání této hustoty pravděpodobnosti budeme chtít využít veškeré informace, které o systému máme. V případě, kdy základní informace, jež o systému máme, jsou právě námi naměřená data $\underline{d}(t)$, je výhodné konstruovat model systému způsobem nastíněným v sekci 2.2, čili pomocí bayesovského učení.

Přistupme tedy k řešení jak hledat hustotu pravděpodobnosti typu (3.1). Zvolíme takový postup, že předpokládáme, že máme k dispozici parametrický model systému $p(s_{t+1} | \underline{a}_{t+1}, \underline{d}(t), \Theta)$ obsahující neznámý parametr Θ , pak užitím kombinace definice 2.1 a řetězového vztahu (2.6) získáme předpis

$$p(s_{t+1}|\underline{a}_{t+1}, \underline{d}(t)) = \int_{\Theta} p(s_{t+1}|\underline{a}_{t+1}, \underline{d}(t), \Theta) p(\Theta|\underline{a}_{t+1}, \underline{d}(t)) d\Theta. \quad (3.2)$$

Vztah (3.2) nám, byť by to nemuselo být na první pohled patrné, usnadní práci. Nyní si zavedeme předpoklad, na který se budeme v dalších částech odkazovat.

Předpoklad 3.1. *Nechť výstupy, vstupy a časový index splňují následující:*

$s_t \in \mathbf{s} \equiv \{s^1, \dots, s^{|\mathbf{s}|}\}$, $a_t \in \mathbf{a} \equiv \{a^1, \dots, a^{|\mathbf{a}|}\}$, kde $|\mathbf{s}|, |\mathbf{a}| \in \mathbb{N} \wedge |\mathbf{s}|, |\mathbf{a}| < \infty$; $t \in \mathbf{t} \equiv \{1, \dots, |\mathbf{t}|\} \subset \mathbb{N}$, kde $|\mathbf{t}| < \infty$.

Definice 3.1. *Předpokládáme, že s_{t+1} je pozorovaný výstup, že při daném Θ lze celou historii nahradit předcházejícím výstupem a vstupem, za platnosti předpokladu 3.1, tedy uvažujeme tzv. **markovský model**. První uvažovaný činitel v integrandu (3.2) je **parametrický model**. Je parametrizován hodnotami přechodových pravděpodobností a tudíž platí*

$$p(s_{t+1}|\underline{a}_{t+1}, \underline{d}(t), \Theta) = m(s_{t+1}|\underline{a}_{t+1}, \underline{s}_t, \Theta) \equiv \Theta_{s_{t+1}|\underline{a}_{t+1}, \underline{s}_t} \text{ kde } s_{t+1}, \underline{s}_t \in \mathbf{s}, \underline{a}_{t+1} \in \mathbf{a} \quad (3.3)$$

$$\Theta \in \Theta \equiv \left\{ \Theta_{s|\underline{a}, \underline{s}} \geq 0, \sum_{s \in \mathbf{s}} \Theta_{s|\underline{a}, \underline{s}} = 1, \forall \underline{a} \in \mathbf{a}, \forall \underline{s} \in \mathbf{s} \right\}. \quad (3.4)$$

Poznámka 3.1. *Kvůli snazší zapamatovatelnosti označujeme parametrický model mnemotechnicky $m(\cdot|\cdot)$.*

Popišme si, co nám vlastně zavádí definice 3.1. Pro uvažované diskrétní vstupy a diskrétní výstupy parametrizujeme model systému neznámými hodnotami příslušných přechodových pravděpodobností, kde Θ je pole podmíněných pravděpodobností se složkami označenými $\Theta_{s|\underline{a}, \underline{s}}$, kde $\underline{s} = s_t$ představuje předešlý pozorovaný výstup a $\underline{a} = a_{t+1}$ aktuální pozorovaný vstup, které předcházely výstupu $s_{t+1} = s \in \mathbf{s}$.

Předpoklad 3.2. *Nechť máme parametrický model z definice 3.1. Jelikož je parametr neznámý pro rozhodovací pravidlo generující vstupy a, pak je nutno předpokládat, že platí rovnost*

$$p(a_{t+1}|\underline{d}(t), \Theta) = p(a_{t+1}|\underline{d}(t)). \quad (3.5)$$

Lemma 3.1. *Nechť máme parametrický model z definice 3.1. Pak z předpokladu 3.2 plyne následující vztah.*

$$p(\Theta|\underline{a}_{t+1}, \underline{d}(t)) = p(\Theta|\underline{d}(t)). \quad (3.6)$$

Důkaz. Zájemci necht' nahlédnou do [2]. □

Poznámka 3.2. *Předpoklad 3.2, či jeho ekvivalentu v lemmatu 3.1 bývá v literatuře označována jako tzv. **přirozené podmínky řízení**.*

Užitím definice 3.1 a přirozených podmínek řízení získáme postup, jak hledat predikce ve tvaru (3.1). Tento poznatek shrneme v následujícím důsledku.

Důsledek 3.1. *Pro markovský model, parametrizovaný podle definice 3.1, plyne z lemmatu 3.1, že můžeme hledat predikce následujícím způsobem.*

$$p(s_{t+1}|\underline{a}_{t+1}, \underline{d}(t)) = \int_{\Theta} m(s_{t+1}|\underline{a}_{t+1}, \underline{s}_t, \Theta) p(\Theta|\underline{d}(t)) d\Theta = \quad (3.7)$$

$$= \int_{\Theta} m(s_{t+1}|\underline{a}_{t+1}, \underline{s}_t, \Theta) \frac{p(\underline{d}(t)|\Theta)p(\Theta)}{\int_{\Theta} p(\underline{d}(t)|\Theta)p(\Theta)d\Theta} d\Theta. \quad (3.8)$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} p(s_{t+1}|\underline{a}_{t+1}, \underline{d}(t)) &= \int_{\Theta} m(s_{t+1}|\underline{a}_{t+1}, \underline{s}_t, \Theta) p(\Theta|\underline{a}_{t+1}, \underline{d}(t)) d\Theta \stackrel{(3.6)}{=} \int_{\Theta} m(s_{t+1}|\underline{a}_{t+1}, \underline{s}_t, \Theta) p(\Theta|\underline{d}(t)) d\Theta = \\ &\stackrel{(2.5)}{=} \int_{\Theta} m(s_{t+1}|\underline{a}_{t+1}, \underline{s}_t, \Theta) \frac{p(\underline{d}(t)|\Theta)p(\Theta)}{\int_{\Theta} p(\underline{d}(t)|\Theta)p(\Theta)d\Theta} d\Theta \end{aligned}$$

□

Cílem této práce je však užití *externích informací*, které nelze získat pouhým pozorováním *systemu*, pro urychlení učení a zpřesnění našeho *modelu systému*. Konstruovaný *model systému* upravujeme a vylepšujeme s cílem dosáhnout co nejkvalitnějších predikcí *výstupů* z námi studovaného *systemu*. Kvalitu predikcí *modelu systému* je možné ověřovat porovnáváním *výstupů*, predikovaných na základě našich *modelů*, s *výstupy* skutečně napozorovanými. Naše *modely systému* budeme aktualizovat o napozorované *vstupy* a *výstupy*, pomocí jejich akumulace ke zlepšení popisu parametru Θ .

Námi navíc užívané *externí informace* budou v podobě *externích prediktorů* našich *výstupů*. Takto využívané *externí prediktory* budou konstruované, buď jinými způsoby než naše predikce nebo budou vycházet z jiných realizací, než které užíváme pro naše predikce. V následující poznámce zavedeme jejich značení a blíže si popíšeme jejich podobu.

Poznámka 3.3. *Kvůli přehlednosti jsme poznámku rozdělili do následujících několika bodů.*

- *Externí prediktor budeme užívat postupně a budeme předpokládat, že v jednom časovém cyklu, můžeme užít pouze jeden externí prediktor.*
- *V našem případě budeme uvažovat, že pracujeme pouze s jedním externím prediktorem, který se může vyvíjet v čase. Tento externí prediktor budeme značit \mathbf{A} .*
- *Pod pojmem regresní vektor budeme rozumět historii, na níž je závislý daný externí prediktor. Regresní vektor budeme značit \underline{r}_t a jeho podoba závisí pouze na formě, jakým způsobem je konstruovaný externí prediktor. Může být ve tvaru $\underline{r}_t = (\underline{a}_{t+1}, \underline{s}_t)$, $\underline{r}_t = (\underline{s}_t, \underline{a}_t, \underline{s}_{t-1})$ nebo v jakémkoliv obdobném tvaru, klidně i prázdný.*
- *Vzhledem k nepravidelné aktualizaci tvaru externího prediktoru odlišíme jednotlivé konkrétní tvary následujícím značením \mathbf{A}_τ . V souladu se zavedeným značením dat budeme posloupnost externích prediktorů obdržných do času t značit $\mathbf{A}(t)$, kdy se $\mathbf{A}(t)$ sestává z posloupnosti zpracovaných \mathbf{A}_τ s $\tau \leq t$.*

Definice 3.2. *Necht' máme značení popsané v poznámce 3.3. Pak τ -tý externí prediktor, užitý v čase t , má následující tvar $\mathbf{A}_\tau(s_{t+1}) = p_\tau(s_{t+1}|\underline{r}_t)$, $\forall s_{t+1} \in \mathbf{s}$.*

Způsob efektivního využití *externích prediktorů*, které budeme v následujících částech využívat, je zdůvodněn v [5] a [6].

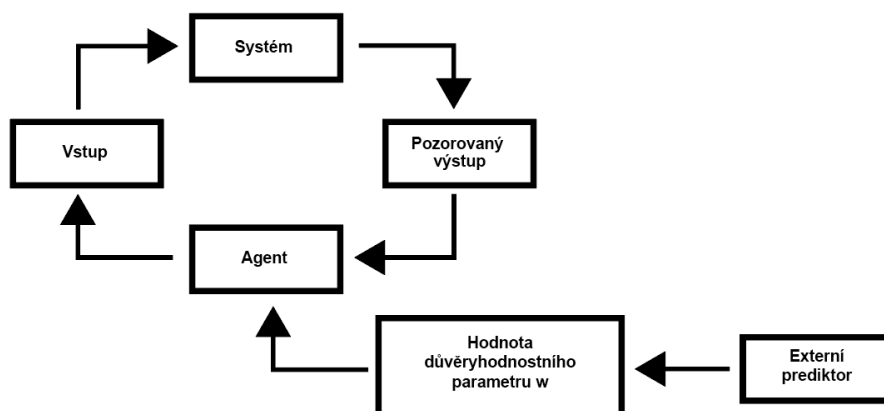
Nyní, když jsme v poznámce 3.3 zavedli značení užívaného *externího prediktoru* a v definici 3.2 popsali jeho tvar, bychom rádi přistoupili k jejich užití. Přímé užití však není tak jednoduché, budeme tedy nejdříve potřebovat definici pojmu, který nám s tím pomůže.

Definice 3.3. *Důvěryhodnostní parametr bude parametr představující váhu přiřazenou k externímu prediktoru \mathbf{A} . Tento parametr budeme značit w .*

Parametr zdefinovaný v definici 3.3 je zcela klíčový pojem pro celý zbytek této práce.

Poznámka 3.4. *Parametr w definice 3.3 je chápán jako pevně zvolené číslo, pro který platí $w \in [0, 1]$, kdy pokládáme $w = 0$ resp. $w = 1$, když externímu prediktoru zcela nedůvěřujeme resp. zcela důvěřujeme.*

Zavedením *důvěryhodnostního parametru* a podoby užívaného *externího prediktoru* se námi studovaný problém naznačený obrázkem 3.1 rozšířili a problém popsany obrázkem 3.2.



Obrázek 3.2: Studovaný problém je v podobě cyklu, sestávajícího se z neznámého *systemu*, který generuje *pozorovaný výstup* a *agenta* generujícího *vstup* a navrhujícího *predikce* nejen na základě *napozorovaných dat*, ale i *informací od externího prediktoru*, které využívá podle zvolené hodnoty w .

Dále si zavedeme nový předpoklad, rozvíjející definici 3.3, na který se budeme dále odvolávat.

Předpoklad 3.3. *Důvěryhodnostní parametr uvažujeme diskrétní s hodnotami w^j a mající apriorní pravděpodobnost $p(w^j)$ splňující*

$$w \in \mathbf{w} = \{w^1, \dots, w^{|\mathbf{w}|}\}, \text{ kde } |\mathbf{w}| \in \mathbb{N} \wedge |\mathbf{w}| < \infty \wedge w^j \in [0; 1] \wedge \sum_{j=1}^{|\mathbf{w}|} p(w^j) = 1. \quad (3.9)$$

Hodnoty $p(w^j)$ jsou zvoleny dle naší apriorní znalosti o důvěryhodnosti zdroje, nemáme-li žádnou apriorní znalost, pak volíme rovnoměrné rozdělení, tzn. $p(w^j) = \frac{1}{|\mathbf{w}|}$ pro $\forall j \in \{1, \dots, |\mathbf{w}|\}$. Hodnoty $p(w^j)$ vlastně představují naši důvěru vloženou v hodnotu důvěryhodnostního parametru w^j .

Ještě než přistoupíme k popisu způsobu, který nám umožní využít informace z *externího prediktoru*, zavedeme si v následující definici jedno pomocné označení.

Definice 3.4. *Hustotu pravděpodobnosti $p(\Theta|d(t), A(t+1), w)$ budeme nazývat **aposteriorní model znalosti agenta**.*

Postup, pomocí kterého dokážeme užít *externí prediktor* pro vylepšení našeho *modelu systému*, formulujeme ve formě následující věty.

Věta 1. *(Kracík) Předpokládejme, že máme **parametrický model** z definice 3.1. Necht' máme vyhovující **externí informaci**, dodanou jako **externí prediktor** $A(t+1)$ z definice 3.2 a pevně zvolený **důvěryhodnostní parametr** $w \in [0, 1]$. Pak o **aposteriorním modelu znalosti agenta** platí následující tvrzení.*

$$p(\Theta|\underline{d}(t), \mathbf{A}(t+1), w) \propto p(\Theta|\underline{d}(t), \mathbf{A}(t), w) \exp \left[w \int_s \mathbf{A}_{t+1}(s) \ln \left(m(s|\underline{a}_{t+1}, s_t, \Theta) \right) ds \right]. \quad (3.10)$$

Důkaz. Zájemci o důkaz, necht' jsou odkázáni na [5] nebo [6]. \square

Poznámka 3.5. Mohlo by se zdát, že je ve vztahu (3.10) chyba, neboť užitím přirozených podmínek řízení se na levé straně úměrnosti nenachází člen \underline{a}_{t+1} , kdežto na pravé straně ano. To je ale způsobeno tím, že externí prediktor \mathbf{A}_{t+1} musí předpovídat výstup odpovídající realizaci \underline{a}_{t+1} , tímto je informace o \underline{a}_{t+1} do podmínky vnesena.

Tato věta je východiskem celého zkoumaného problému. V současnosti se *důvěryhodnostní parametr* w z věty 1 volí na základě zkušenosti experta jako pevné číslo. Takový přístup sebou ovšem nese velké množství nevýhod, např. pakliže při řešení tohoto problému nemáme nikoho s těmito zkušenostmi. Na základě této skutečnosti je tedy vhodné vytvořit algoritmus, který nalezne odpovídající hodnotu *důvěryhodnostního parametru*, bez nutnosti ho apriori volit.

Věnujme ještě pozornost zdrojům námi užívaných *externích prediktorů*. Užití *externí prediktory* mohou vycházet ze stejných pozorování, které máme k dispozici pro výpočet našich predikcí, avšak pro jejich výpočet byl užít jiný přístup než v našem případě, tedy pochází z nebayesovských odhadů.

Dalším možným zdrojem *externích prediktorů* mohou být prediktory pocházející z pozorování jiných systémů, jejich *důvěryhodnost* čili hodnota *důvěryhodnostního parametru* se pak bude odvíjet od míry podobnosti s námi studovaným systémem.

3.2 Řešení

V této sekci navrhneme postup, jak vypočítávat aktuální důvěry $p(w^j|\underline{d}(t), \mathbf{A}(t+1))$ kladené v hodnoty *důvěryhodnostního parametru* w^j , které následně využijeme ke zkvalitnění námi prováděných predikcí *studovaného systému*. Z takto navrženého postupu vytvoříme jednoduchý odhad střední hodnoty *důvěryhodnostního parametru*, který by měl odpovídat námi aktuálně užívanému *externímu prediktoru*.

Poznámka 3.6. Za účelem vyšší čitelnosti budeme, od této části dále, značit námi vypočtené prediktory výstupů podmíněně informace nezahrnující Θ písmenem f , abychom je více odlišili. Např. tedy platí následující

$$f(s_{t+1}|\underline{a}_{t+1}, \underline{d}(t), \mathbf{A}(t+1), w) = p(s_{t+1}|\underline{a}_{t+1}, \underline{d}(t), \mathbf{A}(t+1), w).$$

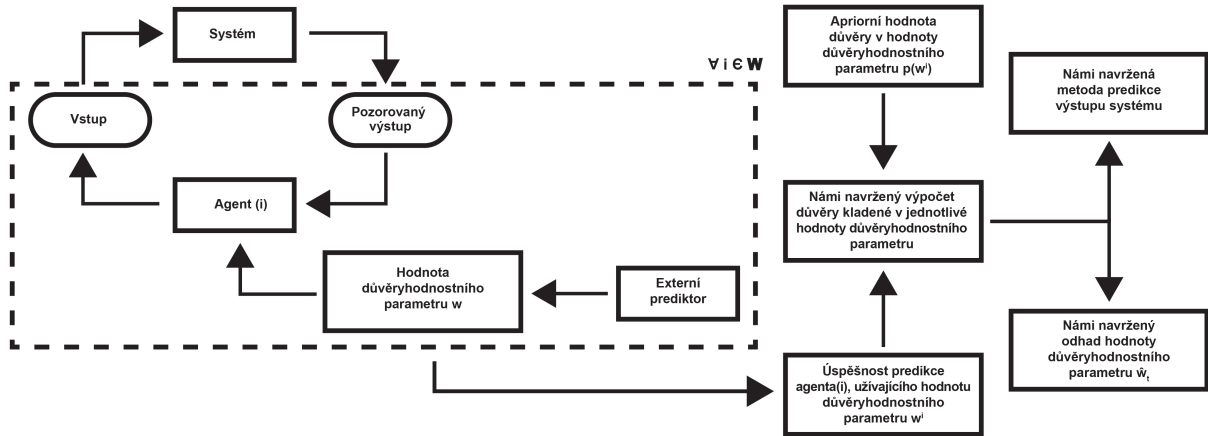
Námi navržený postup bude vycházet z věty 1, která nám poskytla způsob jakým lze za užití pevného *důvěryhodnostního parametru* vypočíst *aposteriorní znalost modelu agenta*. Čili námi konstruované predikce, za platnosti věty 1 a *přirozených podmínek řízení* (3.6), budeme hledat následujícím způsobem

$$f(s_{t+1}|\underline{a}_{t+1}, \underline{d}(t), \mathbf{A}(t+1), w) = \int_{\Theta} m(s_{t+1}|\underline{a}_{t+1}, s_t, \Theta) p(\Theta|\underline{d}(t), \mathbf{A}(t+1), w) d\Theta, \quad (3.11)$$

kteřý je přímou analogií důsledku 3.1.

Jelikož však správnou hodnotu *důvěryhodnostního parametru* w neznáme, nabízí se nám zvolit *bayesovský přístup* pro jeho hledání. Rozhodneme se tedy užít *bayesovské odhadování parametru*, popsané v sekci 2.2, pro náš neznámý *důvěryhodnostní parametr*, pro který nutně také přijímáme *přirozené podmínky řízení*. Hledáme tedy predikce následujícím způsobem

$$f(s_{t+1}|\underline{a}_{t+1}, \underline{d}(t), \mathbf{A}(t+1)) = \int_{\mathbf{w}} f(s_{t+1}|\underline{a}_{t+1}, \underline{d}(t), \mathbf{A}(t+1), w) p(w|\underline{d}(t), \mathbf{A}(t+1)) dw. \quad (3.12)$$



Obrázek 3.3: Studovaný problém je v podobě cyklu, sestávajícího se z neznámého systému, který generuje pozorovaný výstup a $|\mathbf{w}|$ agentů generujících vstupy a navrhujících predikce nejen na základě napozorovaných dat, ale i informací od externího prediktoru, které využívají podle zvolené hodnoty w^j . Z takto navržených predikcí a apriorních důvěr $p(w^j)$ v hodnoty důvěryhodnostního parametru budeme vypočítávat aktuální důvěry $p(w^j|\underline{d}(t), \mathbf{A}(t))$ v jednotlivé hodnoty důvěryhodnostního parametru w , na základě takto získávaných důvěr budeme navrhovat jak naše predikce (3.14), tak odhadovat hodnoty důvěryhodnostního parametru \hat{w}_t (3.20).

Námi navrhovaný přístup je naznačený v následujícím obrázku 3.3.

Nicméně mezi důvěryhodnostním parametrem w a posloupností tvarů externího prediktoru \mathbf{A} platí obdoba přirozených podmínek řízení. Důvodem je, že znalost o parametru w v čase t nemůže být ovlivněna tvarem externího prediktoru \mathbf{A}_{t+1} . Z toho plyne následující důsledek.

Důsledek 3.2. Necht' máme důvěryhodnostní parametr z definice 3.3 a externí prediktor ve formě popsané v definici 3.2. Pak platí následující vztah.

$$p(w|\underline{d}(t), \mathbf{A}(t+1)) = p(w|\underline{d}(t), \mathbf{A}(t)) \quad (3.13)$$

Tím pádem lze užitím důsledku 3.2 zjednodušit vztah (3.12) do následující podoby.

$$f(s_{t+1}|\underline{a}_{t+1}, \underline{d}(t), \mathbf{A}(t+1)) = \int_{\mathbf{w}} f(s_{t+1}|\underline{a}_{t+1}, \underline{d}(t), \mathbf{A}(t), w) p(w|\underline{d}(t), \mathbf{A}(t)) dw \quad (3.14)$$

Pro potřeby bayesovského odhadování parametrů budeme předpokládat splnění předpokladu 3.3, díky kterému budeme pracovat s diskretními hodnotami důvěryhodnostního parametru. Z toho vyplývá, že nebudeme mít ve vztazích (3.12) a (3.14) integrál přes všechny hodnoty \mathbf{w} , ale sumu. Volba počtu uvažovaných hodnot důvěryhodnostního parametru nám ovlivní výpočetní náročnost tohoto postupu.

Ze vztahu (3.14) je tedy zřejmé, že musíme svou pozornost přesunout na člen $p(w|\underline{d}(t), \mathbf{A}(t))$, neboť se jedná o člen nový, dosud nediskutovaný. Výpočet tohoto členu popíšeme v následujícím lemmatu, případné nejasnosti se pokusíme osvětlit v navazující poznámce.

Lemma 3.2. Mějme zvolenou konečnou množinu hodnot důvěryhodnostních parametrů splňující předpoklad 3.3, k tomu mějme externí prediktor \mathbf{A} . Dále necht' jsou splněny přirozené podmínky řízení z předpokladu 3.2 a důsledek 3.2. Pak aktualizaci naší důvěry v danou hodnotu důvěryhodnostního parametru provádíme následovně

$$p(w^j|\underline{d}(t), \mathbf{A}(t)) = \frac{f(\underline{s}_t|\underline{a}_t, \underline{d}(t-1), \mathbf{A}(t), w^j) p(w^j|\underline{d}(t-1), \mathbf{A}(t-1))}{f(\underline{s}_t|\underline{a}_t, \underline{d}(t-1), \mathbf{A}(t))}, \quad \forall j \in \{1, \dots, |\mathbf{w}|\}, \quad (3.15)$$

kde

$$f(\underline{s}_t | \underline{a}_t, \underline{d}(t-1), \mathbf{A}(t)) = \sum_{j=1}^{|\mathbf{w}|} f(\underline{s}_t | \underline{a}_t, \underline{d}(t-1), \mathbf{A}(t), w^j) p(w^j | \underline{d}(t-1), \mathbf{A}(t-1)). \quad (3.16)$$

Důkaz. Lemma je přímým důsledkem užití Bayesova vzorce (2.5), důsledku 3.2, předpokladu 3.3 a vztahu (3.14). \square

Poznámka 3.7. Právě popsané lemma okomentujeme v několika bodech.

- Je možné vyčíst z podoby vztahu (3.15), že se jedná o rekurzivní vztah.
- První aktualizace důvěry v externí prediktor bude užívat apriorní informaci zadanou v předpokladu 3.3 a bude mít následující podobu

$$p(w^j | \mathbf{A}(1), \underline{d}(1)) = \frac{f(\underline{s}_1 | \underline{a}_1, \underline{d}(0), \mathbf{A}(1), w^j) p(w^j | \underline{d}(0))}{f(\underline{s}_1 | \underline{a}_1, \underline{d}(0), \mathbf{A}(1))}, \quad \forall j \in \{1, \dots, |\mathbf{w}|\}, \quad (3.17)$$

kde předpokládáme $p(w^j | \underline{d}(0)) \equiv p(w^j)$, čili hodnoty zvolené v předpokladu 3.3.

- Právě uvedené lemma 3.2, představuje nový teoretický přístup k problému volby optimální hodnoty důvěryhodnostního prediktoru.
- Alternativní přístup k hledání predikcí popsaných jak v lemmatu 3.2, tak ve vztahu (3.14) je následující

$$f(s_{t+1} | \underline{a}_{t+1}, \underline{d}(t), \mathbf{A}(t+1)) = \int_{\Theta} m(s_{t+1} | \underline{a}_{t+1}, \underline{s}_t, \Theta) p(\Theta | \underline{d}(t), \mathbf{A}(t+1)) d\Theta, \quad (3.18)$$

kdy pro člen $p(\Theta | \underline{d}(t), \mathbf{A}(t+1))$ při platnosti předpokladu 3.3 platí následující

$$p(\Theta | \underline{d}(t), \mathbf{A}(t+1)) = \sum_{j=1}^{|\mathbf{w}|} p(\Theta | \underline{d}(t), \mathbf{A}(t+1), w^j) p(w^j | \underline{d}(t), \mathbf{A}(t)). \quad (3.19)$$

- Postup popsaný v předchozím bodě představuje nový popis parametrů, vzniklý váženou kombinací sbíraných popisů parametrů pro jednotlivé w^j . Tímto postupem jsme se dále nezabývali z jednoduchého důvodu, neboť navrhuje stejné predikce, jako jsou predikce získané ze vztahu (3.16). Tudiž budeme-li studovat vlastnosti predikcí ze vztahu (3.16), bude to stejné jako bychom pracovali s modelem z předchozího bodu.

V následujícím lemmatu si představíme možný bodový odhad optimální hodnoty důvěryhodnostního parametru.

Definice 3.5. Za platnosti totožných předpokladů jako v lemmatu 3.2 je možné zkonstruovat následující bodový odhad důvěryhodnostního parametru jsoucí jeho podmíněnou očekávanou hodnotou.

$$\hat{w}_t = \sum_{j=1}^{|\mathbf{w}|} p(w^j | \underline{d}(t), \mathbf{A}(t)) w^j. \quad (3.20)$$

Možné potenciálně problémy námi konstruovaných predikcí se pokusíme shrnout v následující poznámce.

Poznámka 3.8. *Pro přehlednost jsme rozdělili poznámku do několika bodů.*

- *Je zřejmé, že volba oboru možných hodnot w provedená v předpokladu 3.3 musí být prováděna obezřetně, neboť s každou další hodnotou důvěryhodnostního parametru budeme muset konstruovat o jeden model (3.11) navíc, čímž se zvyšuje výpočetní náročnost celého algoritmu.*
- *Jelikož v lemmatu 3.2 provádíme bayesovské odhadování parametrů a k výpočtu nové aposteriorní hustoty pravděpodobnosti užíváme jako apriorní informaci, poslední vypočtenou aposteriorní hustotu pravděpodobnosti, může se nám reálně stát že vypočtené hodnoty zkonvergují k hodnotě 0. To může být problematické, neboť se v tomto případě jedná o situaci, ze které se tento námi navrhovaný postup nemusí posunout nebo jen velmi pomalu.*

Problematické, tedy mohou být dynamické změny v chování jak našeho systému, tak externího prediktoru.

- *Tuto problematika by bylo možné řešit např. pomocí zapomínání, jak bylo popsáno v [2]. Dále by bylo možné přiřazovat nižší váhu informacím obdržným ve vzdálené minulosti oproti informacím z minulosti bližší. Tento přístup by např. mohl být podobný diskontnímu faktoru z teorie dynamického programování. Řešení této problematiky by mohlo být cílem budoucího studia.*

Tím jsme dokončili teorii potřebnou pro vyřešení námi studovaného problému, jímž je hledání optimálního způsobu užití informace poskytované *externím prediktorem*, za účelem zkvalitnění predikcí navrhovaných naším *modelem*. Sestavení algoritmu užívajícím tuto teorii se věnujeme v nadcházející sekci.

3.3 Algoritmizace

Veškerou potřebnou teorii jsme již popsali v předcházejících částech textu. V této části tedy přejdeme k přímé aplikaci metod na hledání predikcí *výstupů* neznámého *systému*. Zdůrazněme, že tak budeme činit za platnosti předpokladu 3.1, který nám mimo jiného zajišťuje konečnost množiny *výstupů* a *vstupů*.

Naším hlavním cílem je sestavit algoritmus, který na základě pozorování *systému* a *externího prediktoru* bude generovat co nejkvalitnější predikce. Tudíž budeme chtít nalézt hodnoty $p(s_{t+1}|\underline{a}_{t+1}, \underline{d}(t), \mathbf{A}(t))$. Nejprve stejně jako v minulých částech představíme postup užívaný při absenci *externího prediktoru*.

V takovém případě pak užíváme vztah (3.8), kde člen $m(s_{t+1}|\underline{a}_{t+1}, \underline{s}_t, \Theta)$ představuje *parametrický model* z definice 3.1. Zaměříme pozornost na druhý člen $p(\Theta|\underline{d}(t))$, který do námi vytvořeného pomocného parametru Θ akumuluje napozorovanou informaci.

Užitím nejprve *Bayesovy formule* (2.5) a následně *řetězového pravidla* (2.6) upravíme složku $p(\Theta|\underline{d}(t))$ následovně

$$p(\Theta|\underline{d}(t)) \propto p(\underline{d}(t)|\Theta)p(\Theta) = \prod_{\tau=1}^t p(\underline{d}_\tau|\underline{d}(\tau-1), \Theta)p(\Theta), \quad (3.21)$$

kde $p(\Theta) = p(\Theta|\underline{d}(0))$ představuje *apriorní informaci* obsaženou v parametru Θ .

K bližšímu popisu tvaru a užití *apriorní informace* o *systému*, potažmo parametru Θ , se vrátíme později.

Poznámka 3.9. Tvar $p(\underline{d}_\tau | \underline{d}(\tau - 1), \Theta)$ figurující ve vztahu (3.21) lze za splnění předpokladu 3.1 a předpokladu, že pracujeme s modelem z definice 3.1, upravit následovně, užitím (2.2),

$$p(\underline{d}_\tau | \underline{d}(\tau - 1), \Theta) = p(\underline{s}_\tau | \underline{a}_\tau, \underline{s}_{\tau-1}, \Theta) p(\underline{a}_\tau | \underline{d}(\tau - 1), \Theta). \quad (3.22)$$

Následně z platnosti přirozených podmínek řízení, čili lemmatu 3.1 a vztahu (3.6), můžeme upravit druhý člen následovně $p(\underline{a}_\tau | \underline{d}(\tau - 1), \Theta) = p(\underline{a}_\tau | \underline{d}(\tau - 1))$.

Cílem této práce není studium vlivu rozhodovacího pravidla, které by generovalo vstupy na základě naměřených dat, na učení nebo predikování. Jediné podmínky, které však musí rozhodovací pravidlo splňovat jsou přirozené podmínky řízení (3.6). Pak se jeho popis v Bayesově formuli (2.5) zkrátí a tento činitel vymizí užitím úměrnosti.

Připomeňme si parametrizaci z definice 3.1

$$p(s_{t+1} | \underline{a}_{t+1}, \underline{d}(t), \Theta) = m(s_{t+1} | \underline{a}_{t+1}, \underline{s}_t, \Theta) \equiv \Theta_{s_{t+1} | \underline{a}_{t+1}, \underline{s}_t}.$$

Poznámka 3.10. Nyní si vyjasníme užití značení v následující části. Nacházíme-li se v čase $t+1$, pak výstup s_{t+1} bude pocházet z množiny možných výstupů \mathbf{s} , vstup a_{t+1} z množiny možných vstupů \mathbf{a} , nakonec výstup \underline{s}_t z množiny možných výstupů \mathbf{s} .

S ohledem na poznámku 3.10 můžeme parametrizovanou pravděpodobnost přechodu zapsat pomocí Kroneckerových δ -funkcí, které jsme definovali v definici 2.3, následovně

$$p(s_{t+1} | \underline{a}_{t+1}, \underline{s}_t, \Theta) = \prod_{s \in \mathbf{s}} \prod_{a \in \mathbf{a}} \prod_{\underline{s} \in \mathbf{s}} \Theta_{s | a, \underline{s}}^{\delta(s, s_{t+1}) \delta(a, a_{t+1}) \delta(\underline{s}, \underline{s}_t)} = \prod_{\mathbf{s}, \mathbf{a}, \underline{\mathbf{s}}} \Theta_{s | a, \underline{s}}^{\delta(s, s_{t+1}) \delta(a, a_{t+1}) \delta(\underline{s}, \underline{s}_t)}, \quad (3.23)$$

kde druhý výraz zkráceně vyjadřuje první.

Vidíme tedy, že Kroneckerovy δ -funkce nám zajistí správnou volbu složky parametrického pole Θ . Jak je tedy ze vztahu (3.23) vidět, budeme jejich kombinace ukládat do třírozměrného pole tvořícího hodnoty statistiky, které budou sloužit pro odhad hustoty pravděpodobnosti $p(s_{t+1} | \underline{a}_{t+1}, \underline{s}_t)$.

Zaměříme-li pozornost na to, jak bychom právě uvedený zápis, mohli využít ve vztahu (3.21), který nám vlastně akumuluje naši napozorovanou znalost o systému. Došli bychom k následujícímu tvaru.

$$p(\Theta | \underline{d}(t)) \propto \prod_{\tau=1}^t \prod_{\mathbf{s}, \mathbf{a}, \underline{\mathbf{s}}} \Theta_{s | a, \underline{s}}^{\delta(s, s_\tau) \delta(a, a_\tau) \delta(\underline{s}, \underline{s}_{\tau-1})} p(\Theta) = \prod_{\mathbf{s}, \mathbf{a}, \underline{\mathbf{s}}} \Theta_{s | a, \underline{s}}^{\sum_{\tau=1}^t \delta(s, s_\tau) \delta(a, a_\tau) \delta(\underline{s}, \underline{s}_{\tau-1})} p(\Theta). \quad (3.24)$$

Kvůli čitelnosti si zavedeme pomocnou statistiku kterou si nyní definujeme.

Definice 3.6. Pracujeme-li na modelu z definice 3.1. Pak při značení z poznámky 3.10 definujeme pro $t \in \mathbf{t}$ z předpokladu 3.1 následující statistiky

$$V_t(s, a, \underline{s}) = V_{t-1}(s, a, \underline{s}) + \delta(s, s_t) \delta(a, a_t) \delta(\underline{s}, \underline{s}_{t-1}). \quad (3.25)$$

Tyto statistiky shrnují námi napozorovanou znalost o systému do času t . Zároveň apriorní informaci o systému, ve formě $p(\Theta)$, budeme reprezentovat pomocí statistiky $V_0(s, a, \underline{s}) - 1$, $V_0(s, a, \underline{s}) > 0$. Obě tyto znalosti jsou zde uloženy ve formě počtu jednotlivých přechodů $\underline{s} \rightarrow a \rightarrow s$.

Dosazením statistik definovaných v definici 3.6 do (3.24) dostaneme

$$p(\Theta|\underline{d}(t)) \propto \prod_{\mathbf{s}, \mathbf{a}, \underline{s}} \Theta_{s|\underline{a}, \underline{s}}^{V_t(s, \mathbf{a}, \underline{s})} \Theta_{s|\underline{a}, \underline{s}}^{V_0(s, \mathbf{a}, \underline{s})-1} = \prod_{\mathbf{s}, \mathbf{a}, \underline{s}} \Theta_{s|\underline{a}, \underline{s}}^{V_t(s, \mathbf{a}, \underline{s})+V_0(s, \mathbf{a}, \underline{s})-1}. \quad (3.26)$$

Přepíšeme-li úměrnost (3.26) do rovnosti dostaneme

$$p(\Theta|\underline{d}(t)) = \frac{\prod_{\mathbf{s}, \mathbf{a}, \underline{s}} \Theta_{s|\underline{a}, \underline{s}}^{V_t(s, \mathbf{a}, \underline{s})+V_0(s, \mathbf{a}, \underline{s})-1}}{\int_{\Theta} \prod_{\mathbf{s}, \mathbf{a}, \underline{s}} \Theta_{s|\underline{a}, \underline{s}}^{V_t(s, \mathbf{a}, \underline{s})+V_0(s, \mathbf{a}, \underline{s})-1} d\Theta}. \quad (3.27)$$

Způsob výpočtu predikcí popíšeme v následujícím lemmatu.

Lemma 3.3. *Je-li splněn předpoklad 3.1 a pracujeme-li na modelu z definice 3.1. Pak hledáme predikce následujícím způsobem*

$$p(s_{t+1}|\underline{a}_{t+1}, \underline{d}(t)) = \int_{\Theta} m(s_{t+1}|\underline{a}_{t+1}, \underline{s}_t, \Theta) p(\Theta|\underline{d}(t)) d\Theta \propto \quad (3.28)$$

$$\propto \int_{\Theta} \prod_{\mathbf{s}, \mathbf{a}, \underline{s}} \Theta_{s|\underline{a}, \underline{s}}^{\delta(s, s_{t+1})\delta(a, \underline{a}_{t+1})\delta(\underline{s}, \underline{s}_t)+V_t(s, \mathbf{a}, \underline{s})+V_0(s, \mathbf{a}, \underline{s})-1} d\Theta. \quad (3.29)$$

Přepsáním ve tvaru Beta funkce z definice 2.4 a užitím vlastností Beta a Gamma funkcí popsaných v lemmatech 2.1 a 2.2 získáme predikce $p(s_{t+1}|\underline{a}_{t+1}, \underline{d}(t))$, v následujícím tvaru

$$p(s_{t+1}|\underline{a}_{t+1}, \underline{d}(t)) = \frac{V_t(s_{t+1}, \underline{a}_{t+1}, \underline{s}_t) + V_0(s_{t+1}, \underline{a}_{t+1}, \underline{s}_t)}{\sum_{s \in \mathcal{S}} [V_t(s, \underline{a}_{t+1}, \underline{s}_t) + V_0(s, \underline{a}_{t+1}, \underline{s}_t)]}. \quad (3.30)$$

Obohacení, které přinesla věta 1, je v takové formě, že ho bude možné převést na tvar představený v lemmatu 3.3. Kvůli přehlednosti však budeme muset upravit statistiku z definice 3.6 tak, aby zachycovala informaci s jakou posloupností *externího prediktoru* a jakou hodnotou *důvěryhodnostního parametru* daná statistika užívá.

Definice 3.7. *Máme-li splněny stejné předpoklady jako v definici 3.6 a máme-li externí prediktor $\mathbf{A}(t+1)$ a důvěryhodnostní parametr w^j pro $\forall j \in \{1, \dots, |\mathbf{w}|\}$, pak informace o systému ukládáme do statistiky následovně*

$$V_{t, \mathbf{A}(t+1)}^j(s, a, \underline{s}) = \sum_{s \in \mathcal{S}} [V_{t, \mathbf{A}(t)}^j(s, a, \underline{s}) + w^j \mathbf{A}_{t+1}(s)] = \quad (3.31)$$

$$= \sum_{s \in \mathcal{S}} [V_{t-1, \mathbf{A}(t)}^j(s, a, \underline{s}) + \delta(s, \underline{s}_t)\delta(a, \underline{a}_t)\delta(\underline{s}, \underline{s}_{t-1}) + w^j \mathbf{A}_{t+1}(s)]. \quad (3.32)$$

V následujícím lemmatu provedeme převedení poznatků z věty 1 na statistiku z definice 3.7.

Lemma 3.4. *Je-li splněn předpoklad 3.1, máme model z definice 3.1, externí prediktor z definice 3.2. Pak užitím věty 1 a statistiky z definice 3.7 dostaneme následující*

$$p(\Theta|\underline{a}_{t+1}, \underline{d}(t), \mathbf{A}(t+1), w^j) \propto \prod_{\mathbf{s}, \mathbf{a}, \underline{s}} \Theta_{s|\underline{a}, \underline{s}}^{V_{t, \mathbf{A}(t)}^j(s, \mathbf{a}, \underline{s})+V_0(s, \mathbf{a}, \underline{s})-1} \exp \left[w^j \sum_{s^i \in \mathcal{S}} \mathbf{A}_{t+1}(s^i) \ln \left(\Theta_{s|\underline{a}_{t+1}, \underline{s}_t}^{\delta(s, s^i)} \right) \right] = \quad (3.33)$$

$$= \prod_{\mathbf{s}, \mathbf{a}, \underline{s}} \Theta_{s|\underline{a}, \underline{s}}^{V_{t, \mathbf{A}(t)}^j(s, \mathbf{a}, \underline{s})+\delta(a, \underline{a}_{t+1})\delta(\underline{s}, \underline{s}_t)w^j \mathbf{A}_{t+1}(s)+V_0(s, \mathbf{a}, \underline{s})-1}, \quad (3.34)$$

kde jednotlivé složky z věty 1 splňují následující sérii vztahů

$$p(\Theta|\underline{d}(t), \mathbf{A}(t), w^j) \propto \prod_{\mathbf{s}, \mathbf{a}, \mathbf{s}} \Theta_{s|\underline{a}, \underline{s}}^{V_{t, \mathbf{A}(t)}^j(s, \underline{a}, \underline{s}) + V_0(s, \underline{a}, \underline{s}) - 1}, \quad (3.35)$$

$$\exp \left[w^j \sum_{s^i \in \mathbf{s}} A_{t+1}(s^i) \ln \left(m(s^i | \underline{a}_{t+1}, \underline{s}_t, \Theta) \right) \right] \propto \prod_{s^i \in \mathbf{s}} \prod_{\mathbf{a}, \mathbf{s}} \Theta_{s|\underline{a}, \underline{s}}^{\delta(a, \underline{a}_{t+1}) \delta(\underline{s}, \underline{s}_t) w^j A_{t+1}(s^i)}. \quad (3.36)$$

Důkaz. Vztah (3.33) lze obdržet užitím věty 1, rozepsáním členu $p(\Theta|\underline{d}(t), \mathbf{A}(t), w^j)$ pomocí statistiky z definice 3.7 a užitím základních algebraických úprav. \square

Naše predikce při pevné volbě hodnoty *důvěryhodnostního parametru*, pak bude na základě lemmatu 3.3, definice 3.7 a lemmatu 3.4 vypadat následovně

$$f(s_{t+1} | \underline{a}_{t+1}, \underline{d}(t), \mathbf{A}(t+1), w^j) = \frac{V_{t, \mathbf{A}(t+1)}^j(s_{t+1}, \underline{a}_{t+1}, \underline{s}_t) + V_0(s_{t+1}, \underline{a}_{t+1}, \underline{s}_t)}{\sum_{\mathbf{s}} V_{t, \mathbf{A}(t+1)}^j(s, \underline{a}_{t+1}, \underline{s}_t) + V_0(s, \underline{a}_{t+1}, \underline{s}_t)}. \quad (3.37)$$

Tato akumulace znalosti skrze napozorování hodnot nebo užití *externího prediktoru* již funguje rekurzivně. Tak jak jsme popsali v lemmatu 3.4. Dostáváme tak různé predikce v závislosti právě na volbě hodnoty *důvěryhodnostního parametru* w^j .

Tudíž námi navrhované predikce ze vztahu (3.12) za užití poznatků z lemmatu 3.4 a statistiky z definice 3.7, lze převést do formy popsané v nadcházejícím lemmatu.

Lemma 3.5. *Jsou-li splněny předpoklady z lemmatu 3.2 a 3.4, pak platí následující vztah*

$$f(s_{t+1} | \underline{a}_{t+1}, \underline{d}(t), \mathbf{A}(t+1)) = \sum_{j=1}^{|\mathbf{w}|} \left[\frac{V_{t, \mathbf{A}(t+1)}^j(s_{t+1}, \underline{a}_{t+1}, \underline{s}_t) + V_0(s_{t+1}, \underline{a}_{t+1}, \underline{s}_t)}{\sum_{\mathbf{s} \in \mathbf{s}} [V_{t, \mathbf{A}(t+1)}^j(s, \underline{a}_{t+1}, \underline{s}_t) + V_0(s, \underline{a}_{t+1}, \underline{s}_t)]} p(w^j | \underline{d}(t), \mathbf{A}(t)) \right]. \quad (3.38)$$

Člen $p(w^j | \underline{d}(t), \mathbf{A}(t))$ ve vztahu (3.38), jehož výpočet byl představen v lemmatu 3.2, konkrétně vztahem (3.15), budeme při užití vztahu (3.37) počítat následovně.

$$p(w^j | \underline{d}(t), \mathbf{A}(t)) = \frac{V_{t-1, \mathbf{A}(t)}^j(\underline{s}_t, \underline{a}_t, \underline{s}_{t-1}) + V_0(\underline{s}_t, \underline{a}_t, \underline{s}_{t-1})}{\sum_{\mathbf{s} \in \mathbf{s}} [V_{t-1, \mathbf{A}(t)}^j(s, \underline{a}_t, \underline{s}_{t-1}) + V_0(s, \underline{a}_t, \underline{s}_{t-1})]} \frac{f(\underline{s}_t | \underline{a}_t, \underline{d}(t-1), \mathbf{A}(t))}{f(\underline{s}_t | \underline{a}_t, \underline{d}(t-1), \mathbf{A}(t))} p(w^j | \underline{d}(t-1), \mathbf{A}(t-1)) \quad \forall j \in \{1, \dots, |\mathbf{w}|\}. \quad (3.39)$$

Důkaz. Lemma 3.5 je získáno pouhým dosazením vztahu (3.37) do lemmatu 3.2. \square

Poznámka 3.11. *Pro lemma 3.5 budeme předpokládat $p(w^j | \underline{d}(0)) = p(w^j)$, čili hodnoty zvolené v předpokladu 3.3.*

Tím jsme si představili způsob, jak pozorováním a užíváním informace poskytované *externím prediktorem* získávat naše predikce, jež budou užívat kombinovanou znalost důvěr v jednotlivé hodnoty *důvěryhodnostního parametru*.

Nyní můžeme vyslovit následující důsledek.

Důsledek 3.3. *Dosažením vztahu (3.39) z lemmatu 3.5, do vztahu (3.20) z definice 3.5 dostaneme následující*

$$\hat{w}_t = \sum_{j=1}^{|\mathcal{W}|} \frac{\sum_{s \in \mathcal{S}} \frac{V_{t-1, \mathbf{A}(t)}^j(\underline{s}_t, \underline{a}_t, \underline{s}_{t-1}) + V_0(\underline{s}_t, \underline{a}_t, \underline{s}_{t-1})}{f(\underline{s}_t | \underline{a}_t, \underline{d}(t-1), \mathbf{A}(t))} p(w^j | \underline{d}(t-1), \mathbf{A}(t-1))}{\sum_{s \in \mathcal{S}} \left[V_{t-1, \mathbf{A}(t)}^j(s, \underline{a}_t, \underline{s}_{t-1}) + V_0(s, \underline{a}_t, \underline{s}_{t-1}) \right]} w^j. \quad (3.40)$$

Kapitola 4

Simulační testování

V této kapitole budeme studovat využití teorie, popsané v kapitole 3, a její implementaci skrze simulaci. Blíže si popíšeme *vstupní parametry* ovlivňující celkové nastavení prováděných simulací. Následně si rozebereme program provádějící simulace a v něm obsažené funkce. Dále pak budeme provádět různé experimenty, lišící se ve volbách *vstupních parametrů*. Výsledky experimentů následně vizualizujeme a okomentujeme. Nakonec provedeme diskuzi obdržných výsledků.

Implementaci a tedy i celkovou simulaci jsme prováděli v prostředí Matlab a níže často užíváme jeho notaci.

Poznámka 4.1. *Proměnné a funkce figurující v našem programu budeme v této kapitole zapisovat pomocí bezserifového písma.*

4.1 Vstupní parametry simulace

Naše simulace se budou lišit právě ve volbě *vstupních parametrů*, věnujeme tedy jejich popisu tuto sekci. Pro přehlednost popíšeme vstupní parametry v bodech.

- **Délka simulace** je parametr představující kolik cyklů (aktualizace→predikce→aktualizace) naše simulace provede, než ji zastavíme, neboli se jedná o hodnotu $|t|$ z předpokladu 3.1.
- **Počet hodnot důvěryhodnostního parametru** je parametr reprezentující hodnotu $|w|$ z předpokladu 3.3. Na základě volby *Počtu hodnot důvěryhodnostního parametru* vygenerujeme užívané hodnoty *důvěryhodnostního parametru* rovnoměrně rozdělené. Hodnoty *důvěryhodnostního parametru* budou uloženy v poli w a bude podmínkou, aby vždy obsahovalo jak hodnotu 0, tak hodnotu 1. Pole w bude tedy vytvořeno následujícím způsobem $[0 : |w| - 1]/(|w| - 1)$.
- **Typ prediktoru** je parametr, který reprezentuje vývoj, jež budou tvary *externího prediktoru* v průběhu simulace bude vykazovat. V naší simulace je na výběr 5 typů prediktoru: ideální, kde označením „ideální“ rozumíme prediktor dodávající přesné informace o *systému*; směs půl na půl ideálního s náhodným; náhodný, který se zlepšuje směrem k ideálnímu; zpočátku ideální, který se postupem času zhoršuje; zcela náhodný. Všechny tyto tvary prediktorů byly zatíženy mírným šumem, aby blíže reprezentovaly realitu.
- **Počet tvarů prediktoru** je parametr reprezentující počet tvarů *externího prediktoru*, jež v průběhu simulace uijeme.

- **Typ navrhované predikce** je parametr rozhodující o způsobu navrhování bodových predikcí výstupů. Při volbě = 0 resp. $\neq 0$ volíme predikci náhodně podle vypočteného pravděpodobnostního rozdělení resp. volíme predikci s nejvyšší vypočtenou pravděpodobností.
- **Počet hodnot výstupů** představuje hodnotu $|s|$ z předpokladu 3.1.
- **Počet hodnot vstupů** představuje hodnotu $|a|$ z předpokladu 3.1.
- **Počet Monte Carlo cyklů** je parametr, který ovlivňuje kolikrát provedeme celou naši simulaci se zadanými vstupními parametry. Lišit se budou jednotlivé simulace v tom, jaké *vstupy* a *výstupy* bude studovaný systém generovat díky odlišným realizacím náhodných veličin.
- **Seed** je poslední parametr, který do programu zadáváme. Tento parametr ovlivňuje pravděpodobnostní rozdělení neznámého studovaného *systému*.

V následující tabulce provedeme přiřazení výše uvedených *vstupních parametrů* k názvu jejich protějšků užitých v programu.

Název parametru	program
Délka simulace	dur_sim
Počet hodnot důvěryhodnostního parametru	l_w
Typ prediktoru	chosen_type
Počet tvarů prediktoru	num_adviser
Typ navrhované predikce	pred_type
Počet hodnot výstupů	num_states
Počet hodnot vstupů	num_actions
Počet Monte Carlo cyklů	num_mc
Seed	seed

Tabulka 4.1: Přiřazení *vstupních parametrů* proměnným užitým v programu

4.2 Fungování programu a popis funkcí

Přiložený program využívá metody Monte Carlo, čili provede zavedený **počet Monte Carlo cyklů** přes danou volbu zadaných *vstupních parametrů*. Tím získáme `num_mc` výsledků simulací pocházejících ze stejné počáteční pozice, avšak na sobě nezávislých. Toho je dosaženo užitím funkce `rng_shuffle` po inicializaci, která nám zajistí, že další průběh po inicializaci simulace již byl náhodný.

Pro načtení *vstupních parametrů* užíváme funkci `dialog_input_parameters`, která v závislosti na volbě proměnné `dia` buď umožní zadání vlastních *vstupních parametrů* nebo zadá předvolené *vstupní parametry*.

Následně funkce `init_of_error_confidence_var` vytváří následující proměnné pro ukládání výsledků jednotlivých simulací `conf_w_mc`, `median_conf_w`, `er_model_mc`, `er_model_median`, `all_conf_w`, `all_er_type` a `est_w`.

Jednotlivá simulace

V této části popíšeme fungování jedné simulace probíhající v rámci `num_mc` opakování.

- Nejdříve proběhne funkce initialization, která provede inicializaci systému, v našem programu proměnnou s označení system, a následujících struktur agent, adviser a data.
 - Proměnná system bude představovat náš neznámý systém, který při učení neznáme a který chceme pomocí nám dodávaných informací odhadnout. Jedná se tedy o přechodovou pravděpodobnost, podle které se generuje nový výstupy na základě minulého výstupu a aktuálního vstupu. Užitá proměnná system bude mít v našem programu rozměr $\text{num_state} \times \text{num_action} \times \text{num_state}$.
 - Struktury s názvem agent inicializuje funkce init_agent, která vytváří l_w krát strukturu obsahující 6 proměnných. Popíšeme si zde ty proměnné se kterými budeme pracovat. Proměnné num_state resp. num_action jsou stejné s těmi jež jsem zvolili při zadávání vstupních parametrů. Dalšími proměnnými které jsou v j-té struktuře agent, odpovídající užití parametru důvěry w^j , jsou 3 pole o rozměrech $\text{num_state} \times \text{num_action} \times \text{num_state}$. Jedním je V_0 a druhým V_t, kdy V_0 představuje pole obsahující apriorní informaci, kterou má daný agent o systému a jedná se tak o statistiku $V_0(s, a, s)$ z definice 3.6. Oproti tomu pole V_t představuje pole, kam daný agent ukládá obdržené informace o modelu. Jedná se tak o proměnnou obsahující hodnoty statistiky $V_{t,A(t+1)}^j(s, a, s)$ z definice 3.7. Poslední pole, které tato struktura obsahuje je model, do kterého bude agent ukládat svůj odhad proměnné system, viz (3.37) na základě svých informací z polí V_0 a V_t.
 - Další struktury které inicializujeme jsou struktury s názvem adviser a jejich počet je num_adviser. Tyto struktury budou obsahovat jedno pole s názvem model o rozměrech $\text{num_state} \times \text{num_action} \times \text{num_state}$, které představuje tvar užitého externího prediktoru. Dále budou tyto struktury obsahovat proměnné num_action, num_state a t_use. Proměnná t_use představuje čas obdržení příslušného externího prediktoru.
 - Poslední strukturou se kterou budeme v simulaci pracovat je struktura data, do které se ukládají napozorované vstupy, výstupy simulace a zároveň čas ve které se simulace právě nachází. Tato struktura tedy obsahuje pole state resp. action do kterých jsou ukládány proběhnuvší výstupy resp. vstupy. Dále struktura obsahuje i proměnnou t, která reprezentuje čas ve kterém se simulace právě nachází.

Všechny inicializované proměnné a struktury jsou na počátku všech Monte Carlo cyklů, tvořících jednu simulaci, ve stejném tvaru,. To je zajištěno právě tím, že jsou náhodně generované složky generovány podle volby hodnoty vstupního parametru seed.

Následně je provedena dříve zmíněná procedura rng_shuffle, která zajistí, že další průběh simulace bude nezávislý na ostatních simulacích.

- Dále následuje funkce init_storing_arrays, která pouze inicializuje později užití proměnné a různě rozměrná pole.
- Věnujme pozornost funkci gen_clever_advisers, jež generuje námi užívané externí prediktory. Jelikož provádíme simulace a tedy nemáme k dispozici skutečné externí prediktory, předem si je podle funkce gen_clever_advisers vygenerujeme na základě vstupních parametrů dur_sim, num_adviser, chosen_type a proměnné system. Funkce gen_clever_advisers funguje následovně. Užitím hodnot num_adviser a dur_sim vytvoří náhodně seřazenou permutaci num_adviser výběrů bez opakování z num_sim hodnot. Tento výběr mírně posuneme, aby nedošlo k prvnímu výběru před započítím simulace. Následně podle volby parametru chosen_type proběhne vygenerování jednotlivých prediktorů na základě jednoho z předpřipravených trendů. Jednotlivé užívané

prediktory byly mírným způsobem zašuměny, pojmem prediktor rozumějme pole model ve struktuře adviser.

Při volbě `chosen_type = 1` mají prediktory přechodovou pravděpodobnost odpovídající přechodové pravděpodobnosti proměnné `system` po přidání mírného bílého šumu, jednotlivé prediktory se pak liší právě v přidaném šumu. Za volby `chosen_type = 2` promícháváme užitím náhodné permutace všech prvků `floor(num_adviser/2)` prediktorů odpovídajících mírně zašuměné přechodové pravděpodobnosti `system` s `num_adviser - floor(num_adviser/2)` náhodně vygenerovaných prediktorů stejných rozměrů. Dále při volbě `chosen_type = 3` začneme s přechodovými pravděpodobnostmi prediktorů blízkými přechodovým pravděpodobnostem `system`, který se ale lineárně blíží nějaké náhodné přechodové pravděpodobnosti stejných rozměrů čili i -tý prediktor bude mít tvar vzniklý následujícím způsobem

$$((\text{num_adviser} - i) \times \text{gen_model1} + i \times \text{gen_model2}) / \text{num_adviser},$$

kde `gen_model1` představuje prediktor blízký přechodové pravděpodobnosti `system` a `gen_model2` představuje náhodně vygenerovaný prediktor stejných rozměrů. Opačný trend simuluje volba `chosen_type = 4`, která začíná náhodně vygenerovanou přechodovou pravděpodobností, avšak postupně dochází k lineárnímu přibližování prediktoru k přechodové pravděpodobnosti blízké `system`. Veškeré ostatní volby, neboli `chosen_type ≠ 1, 2, 3, 4`, vedou na užití náhodně vygenerované přechodové pravděpodobnosti vyhovujících rozměrů, která se v průběhu simulace dále příliš nemění.

- Samotná simulace *systemu*, sestávající se z generování *výstupů* a *vstupů*, z učení jednotlivých struktur *agent*, z výpočtu váh kladených v jednotlivé hodnoty *důvěryhodnostních parametrů* a z navrhování predikcí, probíhá ve funkci `simulation_main_body`. Tato funkce probíhá v cyklech, dokud platí podmínka `data.t ≤ dur_sim`.
 - Nejprve generujeme *vstup* a *výstup* pomocí funkcí `generate_action` a `generate_state`. *Vstupy* jsou v simulaci generovány náhodně a nezávisle podle uniformního rozdělení. *Výstupy* jsou pak generovány podle proměnné `system` na základě minulého *výstupu* a aktuálního *vstupu*.
 - Následně je přes všechny různé hodnoty $w(j)$ užitá funkce `learn_pred`, která pro jednotlivé struktury `agent(j)` provádí učení, pomocí aktualizace `agent(j).V_t`. Tato aktualizace odpovídá definici 3.7 a navazujícímu lemmatu 3.4. Poté na základě informací `agent(j).V_t` a `agent(j).V_0` aktualizuje pole `agent(j).model` sloužící jako odhad pole `system`. Aktualizace pole odpovídá vztahu (3.37).
 - Navazující funkcí je funkce `proposed_prediction`, podle volby *vstupního parametru* `pred_type` a `agent(j).model` ukládá predikce navrhované jednotlivými *agenty*.
 - Další navazující funkcí je funkce s názvem `updating_w`, která provádí výpočet pravděpodobností $p(w^j | d(t), A(t))$ popsány ve vztahu (3.39).
 - V další kombinaci dvou funkcí `clever_prediction2` a `proposed_prediction` nejdříve provedeme odhadnutí pravděpodobností přechodu užitím lemmatu 3.5, přesněji podle vztahu (3.38), a na základě tohoto odhadu navrheme naši predikci.
 - Dále pouze provádíme ukládání důvěr $p(w^j | d(t), A(t))$ v jednotlivé hodnoty *důvěryhodnostního parametru* do pole `save_vaha_w` a nakonec provedeme krok `data.t = data.t + 1` a opakujeme celou tuto sekci, dokud je splněna podmínka `data.t ≤ dur_sim`.
- Po proběhnutí funkce `simulation_main_body` následuje funkce `error_result_handling`, která uloží všechny výsledky, které nám celá jednotlivá simulace poskytne, jako je počet chybných predikcí za simulaci, vývoj důvěr v jednotlivé hodnoty *důvěryhodnostního parametru* a další. Pro uložení využívá pole `all_er_type`, `all_conf_w`, `conf_w_mc`, `er_model_mc` a `est_w`.

Vizualizace výsledků

Pro lepší čitelnost výsledků nakonec vizualizujeme celkové výsledky, které získáme po provedení všech `num_mc` jednotlivých simulací.

- První obrázek ukazuje vývoj mediánů důvěr v jednotlivé hodnoty *důvěryhodnostního parametru* čili vývoj mediánu hodnot, vypočítaných užitím vztahu (3.39). získaných v jednotlivých simulacích.
- Druhý obrázek ukazuje vývoj mediánu odhadu *důvěryhodnostního parametru* z definice 3.5.
- Třetí obrázek ukazuje histogramy počtu predikcí *výstupů*, provedených jednotlivými agenty, lišících se od *výstupů* skutečně realizovaných. Navíc ukazuje i histogram chybných predikcí získaných pomocí našeho algoritmu z lemmatu 3.5.
- Čtvrtý obrázek ukazuje histogramy důvěry kladené v jednotlivé hodnoty *důvěryhodnostních parametrů* na konci jednotlivých simulací vypočtené vztahem (3.39). K těmto histogramům je přidán histogram ilustrující rozdělení odhadu *důvěryhodnostního parametru*, z definice 3.5, po skončení jednotlivých simulací.

Pro lepší porovnatelnost počtu chybných predikcí mezi jednotlivými přístupy na konci simulace zobrazíme tabulku obsahující 3 statistiky, vypočtené ze všech provedených simulací. První statistikou je medián, druhou aritmetický průměr a třetí směrodatná odchylka. Sloupcem „Predikce“ myslíme typ modelu, podle kterého se daná predikce prováděla, tedy např. údaje na řádku „Model j“ reprezentují počet chybných predikcí na konci simulace provedených na základě struktury `agent(j)` užívající *externí prediktor* za použití hodnoty *důvěryhodnostního parametru* w^j .

Poznámka 4.2. Řádek obsahující ve sloupci „Predikce“ prvek „Flexibilní“ obsahuje hodnoty statistik námi navržené predikce vycházející z lemmatu 3.5.

Z uložených dat je následně možné získat další různé statistiky, ty jsme se však nerozhodli vizualizovat, neboť nepřinášely nový pohled na výsledky.

4.3 Výsledky

Vyhodnocování jednotlivých experimentů provedeme v této sekci. Vždy nejdříve v tabulce ukážeme, za jakých zvolených *vstupních parametrů* jsme daný experiment prováděli.

Následně ukážeme obrázky a tabulku obecně popsané v sekci 4.2.

V každém experimentu budeme chtít nastínit očekávaný průběh s ohledem na volbu *vstupních parametrů*, následně okomentujeme jednotlivé výsledky a nakonec provedeme malý komentář celkových výsledků.

Proměnnou system užívanou v jednotlivých experimentech je možné nalézt v Příloze.

Poznámka 4.3. V následující části budeme označením „ideální externí prediktor“ rozumět externí prediktor s pravděpodobnostmi přechodu blízkými systému.

Název parametru	program	hodnota
Délka simulace	dur_sim	25
Počet hodnot důvěryhodnostního parametru	l_w	2
Typ prediktoru	chosen_type	1
Počet tvarů prediktoru	num_adviser	3
Typ navrhované predikce	pred_type	1
Počet hodnot výstupů	num_states	2
Počet hodnot vstupů	num_actions	2
Počet Monte Carlo cyklů	num_mc	5000
Seed	seed	2

Tabulka 4.2: Nastavení vstupních parametrů pro experiment číslo 1

Experiment 1

Nejdříve budeme chtít ověřit, jak užitečný je námi navrhovaný přístup v krátkém horizontu, kdy je učení neznámého *modelu systému* nejdůležitější. Zároveň budeme pracovat s prostory *vstupů* a *výstupů* menších rozměrů, aby byl vliv námi navrhované metody znatelnější. Tvar neznámého *systému* je možné nalézt v tabulce 4.18 v Příloze.

První experiment jsme provedli s nastavením *vstupních parametrů* popsaným v tabulce 4.2, Z nastavení *vstupních parametrů* v tomto experimentu vidíme, že v prvním experimentu je užíváný *externí prediktor* velmi blízký ideálnímu tvaru čili námi hledanému *systému*. Zároveň je hodnota $l_w = 2$, tudíž budeme pracovat s následujícími hodnotami *důvěryhodnostního parametru* $w^1 = 0$ a $w^2 = 1$. S ohledem na tvar užívaného *externího prediktoru* tedy očekáváme, že důvěra v hodnotu w^2 bude postupně růst k 1. Jelikož je však užíváný *externí prediktor* blízký ideálnímu tvaru od počátku simulace do konce, neočekáváme, že by námi navrhované predikce mohli být úspěšnější než predikce agenta operujícího s *důvěryhodnostním parametrem* hodnoty w^2 .

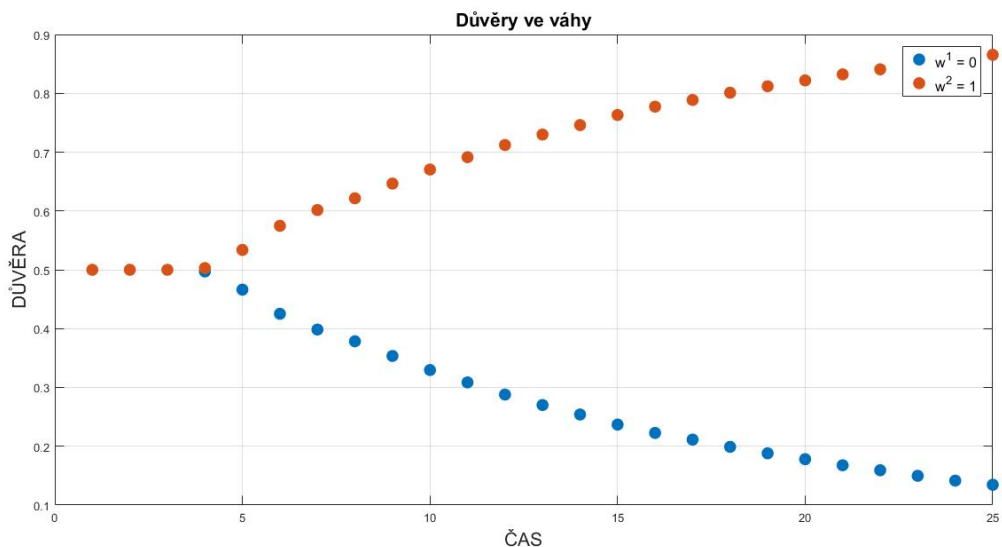
Na obrázku 4.1 vidíme chování mediánu důvěr v jednotlivé hodnoty *důvěryhodnostního parametru*, které jsme očekávali. Od počátku simulace je možné pozorovat zřejmý narůstající trend důvěry kladené v hodnotu $w^2 = 1$, resp. klesající trend důvěry kladené v hodnotu $w^1 = 0$. Z toho již dokážeme odhadnout, že odhad hodnoty *důvěryhodnostního parametru* bude rychle rostoucí.

Z obrázku 4.2 je od počátku simulace patrná stoupající tendence mediánu odhadů *důvěryhodnostního parametru*. Zajímavá je ovšem mírně zpomalující tendence, kterou je možné na obrázku 4.2 pozorovat.

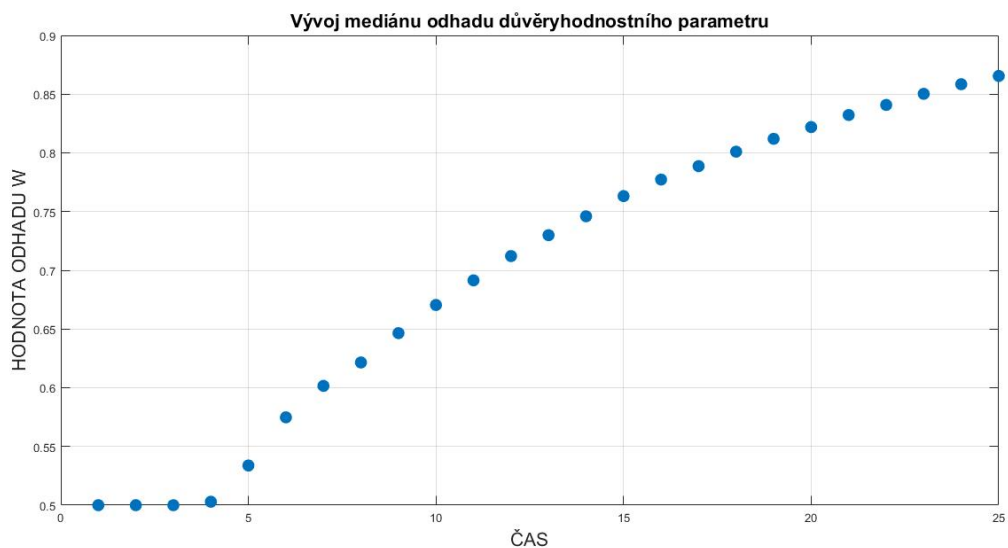
Vývoj chybných predikcí za celou simulaci je významným ukazatelem, který nám pomůže ověřit užitečnost námi navrhovaného přístupu. Očekáváme, že celkově nejhůře dopadnou predikce prováděné modelem číslo 1, který pracuje s hodnotou *důvěryhodnostního parametru* $w^1 = 0$, naopak model 2 pracuje s hodnotou $w^2 = 1$. O modelu 2 předpokládáme, že dopadne nejlépe, tudíž že bude mít celkově nejméně chybných predikcí. Námi navrhované predikce očekáváme celkově mírně horší než u modelu 2, ale výrazně lepší než u modelu 1.

Na obrázku 4.3 vidíme chování, které jsme předpokládali. Nicméně pro lepší přehled o chování celkových chybných predikcí, si vypočítáme jejich základní statistiky jako je medián, průměr a směrodatná odchylka. Medián a průměr nám přiblíží, kde se zhruba nachází střední hodnota rozdělení jednotlivých chybných predikcí. Směrodatná odchylka nám pak poskytne jistou představu o rozptylu jednotlivých rozdělení. Tyto základní statistiky si uvedeme v následující tabulce.

V tabulce 4.3 vidíme, že celkově měl nejvíce chybných predikcí model 1, nevyužívající *externí prediktor*, což jsme předpokládali. Měl nejvyšší vypočtený jak medián, tak průměr. Oproti tomu námi navrhovaný přístup, pomocí Flexibilní predikce, dosáhl blízkých hodnot jako model 2. Hodnota vypočteného

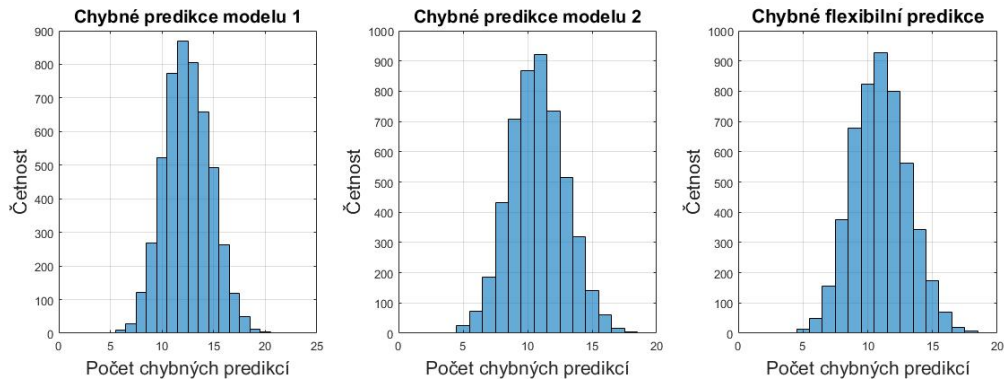


Obrázek 4.1: Vývoj mediánu důvěř $p(w^j|d(t), A(t))$ v hodnoty *důvěryhodnostního parametru* w v simulaci délky $\text{dur_sim} = 25$ cyklů, ze všech $\text{num_mc} = 5000$ Monte Carlo opakování v experimentu s $|a|, |s| = 2$, kde $w^1 = 0$ a $w^2 = 1$ při užití téměř ideálního *externího prediktoru*.



Obrázek 4.2: Vývoj mediánu odhadu *důvěryhodnostního parametru* w v simulaci délky $\text{dur_sim} = 25$ cyklů, ze všech $\text{num_mc} = 5000$ Monte Carlo opakování v experimentu s $|a|, |s| = 2$, kde $w^1 = 0$ a $w^2 = 1$ při užití téměř ideálního *externího prediktoru*.

mediánu byla stejná. Rozdíl ve vypočítaných průměrech byl 0,207 v neprospěch námi navržených predikcí, což představuje zhoršení přibližně o 1,9 % oproti predikcím provedeným modelem 2. Naopak oproti modelu 1 se však jedná o zlepšení v průměru o přibližně 12 %. Užitím naší metody se tak eliminovalo riziko podstatného zhoršení predikcí. Rozdíly v hodnotách směrodatných odchylek jsou relativně malé, nicméně námi navrhované predikce měly tuto hodnotu nejmenší.

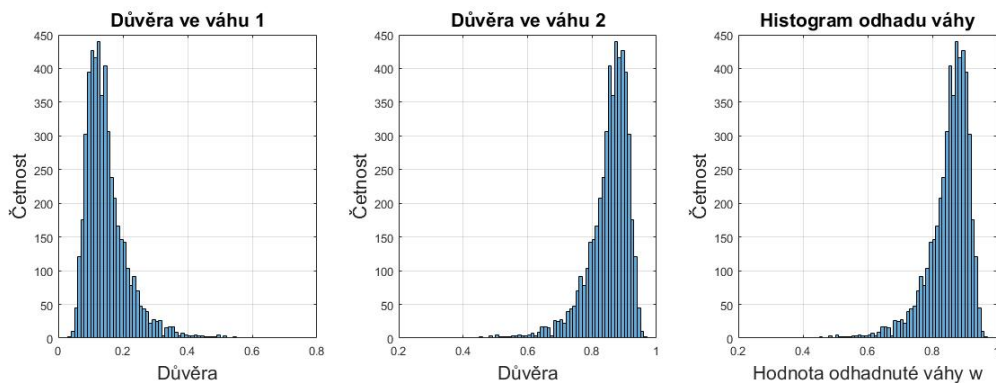


Obrázek 4.3: Histogramy rozložení počtu chybných predikcí na konci simulace délky $\text{dur_sim} = 25$ cyklů, ze všech $\text{num_mc} = 5000$ Monte Carlo opakování v experimentu s $|a|, |s| = 2$, kde pracuje model 1 s $w^1 = 0$, model 2 s $w^2 = 1$ při užití téměř ideálního *externího prediktoru*.

Predikce	Medián	Průměr	Směrodatná odchylka
Model 1	12	12,478	2,238
Model 2	11	10,777	2,158
Flexibilní	11	10,984	2,145

Tabulka 4.3: Hodnoty základních statistik chybných predikcí na konci simulace délky $\text{dur_sim} = 25$ cyklů, ze všech $\text{num_mc} = 5000$ Monte Carlo opakování v experimentu s $|a|, |s| = 2$, kde pracuje model 1 s $w^1 = 0$, model 2 s $w^2 = 1$ při užití téměř ideálního *externího prediktoru*.

V obrázku 4.4 se podíváme na rozložení vypočítaných důvěr v jednotlivé hodnoty *důvěryhodnostních parametrů* a rozložení vypočítaných hodnot odhadu *důvěryhodnostního parametru* \hat{w}_t na konci simulace.



Obrázek 4.4: Histogramy rozložení důvěry $p(w^j|d(t), A(t))$ v jednotlivé hodnoty *důvěryhodnostního parametru* w na konci simulace délky $\text{dur_sim} = 25$ cyklů, ze všech $\text{num_mc} = 5000$ Monte Carlo opakování v experimentu s $|a|, |s| = 2$, kde pracuje model 1 s $w^1 = 0$, model 2 s $w^2 = 1$ při užití téměř ideálního *externího prediktoru*.

Výsledky toho experimentu jsou tedy relativně pozitivní, neboť užitím námi navrhovaných predikcí jsme snížili riziko, že bychom špatnou volbou hodnoty *důvěryhodnostního parametru* zapříčinili neúměrný nárůst provedených chybných predikcí.

Nesmíme však opomenout, že tento příklad byl velice zjednodušený, neboť operoval na malém pro-

storu *vstupů* a *výstupů* ($|\mathbf{a}|, |\mathbf{s}| = 2$) a poskytovaný *externí prediktor* byl téměř totožný s hledaným neznámým systémem.

Experiment 2

V tomto experimentu zůstaneme u kratší délky simulace stejné jako v experimentu 1 a u stejných rozměrů prostoru *vstupů* a *výstupů*. Budeme však užívat odlišný typ *externího prediktoru*. Bude to typ číslo 2, tedy se bude jednat o náhodnou směs téměř ideálního *externího prediktoru* s náhodně vygenerovaným *externím prediktorem*. Z toho důvodu, abychom získali lepší srovnání úspěšnosti námi navrhované flexibilní predikce s predikcemi prováděnými pomocí pevné volby hodnoty *důvěryhodnostního parametru*, budeme pracovat s širším oborem \mathbf{w} než v experimentu 1.

V tomto experimentu očekáváme, že nebudou tak velké rozdíly v chybovosti predikcí, jako v minulém experimentu. Dále očekáváme více proměnlivý vývoj důvěr $p(w^j | \underline{d}(t), \mathbf{A}(t))$ v jednotlivé hodnoty *důvěryhodnostního parametru* w a z nich vyvozeného odhadu.

V tabulce 4.4 máme uvedené *vstupní parametry* pro experiment číslo 2.

Název parametru	program	hodnota
Délka simulace	dur_sim	25
Počet hodnot důvěryhodnostního parametru	l_w	3
Typ prediktoru	chosen_type	2
Počet tvarů prediktoru	num_adviser	6
Typ navrhované predikce	pred_type	1
Počet hodnot výstupů	num_states	2
Počet hodnot vstupů	num_actions	2
Počet Monte Carlo cyklů	num_mc	5000
Seed	seed	2

Tabulka 4.4: Nastavení *vstupních parametrů* pro experiment číslo 2

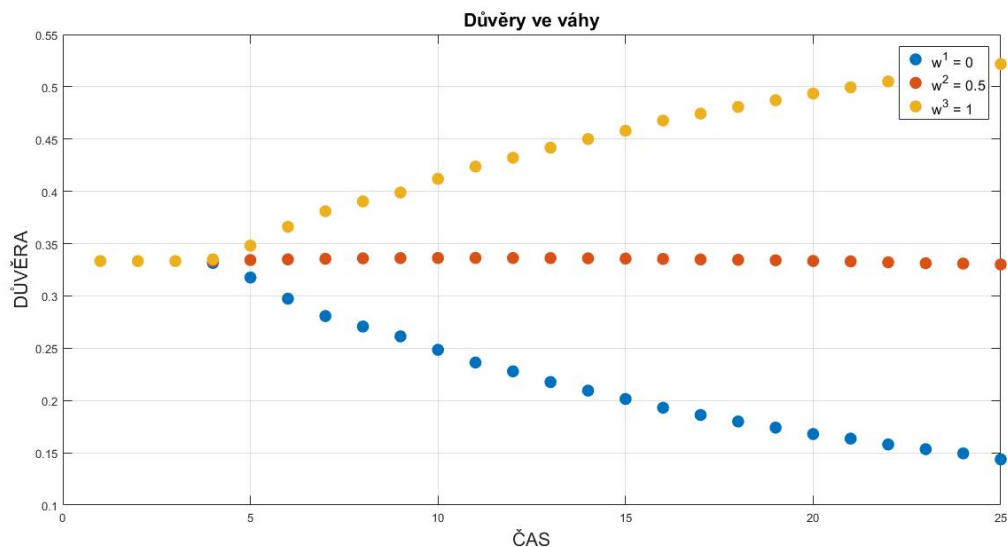
Nejdříve se podíváme na vývoj mediánu důvěr $p(w^j | \underline{d}(t), \mathbf{A}(t))$ v hodnoty *důvěryhodnostního parametru* w .

Na obrázku 4.5 vidíme zajímavý trend, kdy v celém průběhu dochází k relativně pozvolnému nárůstu mediánu důvěry v hodnotu $w^3 = 1$ na úkor důvěry v hodnotu $w^1 = 0$. Zajímavý je též průběh mediánu důvěry v hodnotu $w^2 = 0,5$, který je téměř neměnný a začíná zanedbatelně klesat až ke konci simulace.

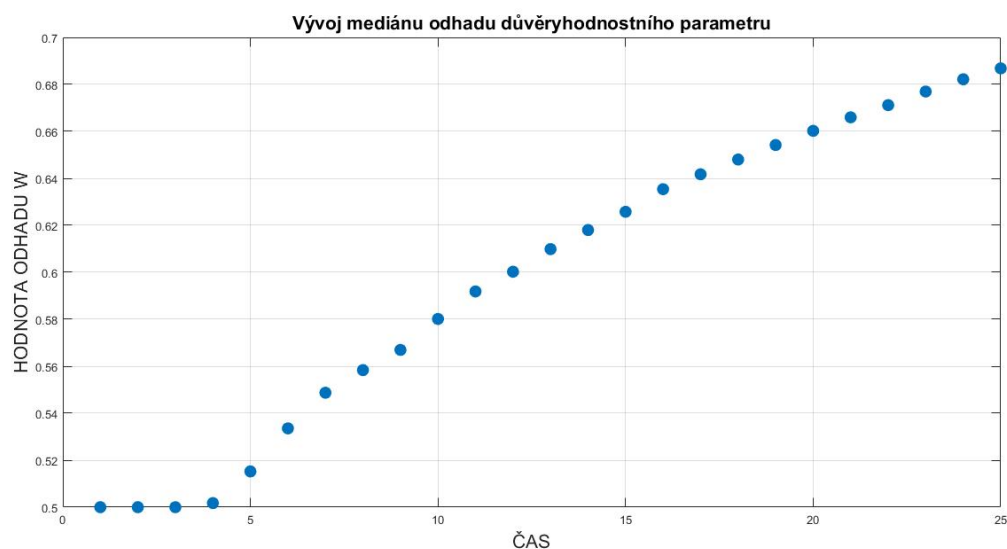
V následujícím obrázku 4.6, který zobrazuje vývoj mediánu odhadu *důvěryhodnostního parametru*, vidíme v celém průběhu rostoucí trend hodnoty. Rostoucí trend je však výrazně pozvolnější, než tomu bylo v experimentu 1. Je možné, že kdyby byla naše simulace delší, začal by medián odhadované hodnoty dokonce klesat. Jelikož však mísimé ideální a náhodný *externí prediktor*, tipujeme že by se měla hodnota *důvěryhodnostního parametru* pohybovat v okolí hodnoty 0,5, možná mírně vyšší kvůli případům, kdy náhodně vygenerovaný *externí prediktor* je blízký ideálnímu.

Více o kvalitě predikcí jednotlivých modelů a naší flexibilní predikce, nám prozradí následující rozdělení chybných predikcí v jednotlivých simulacích za celý průběh experimentu, uvedený na obrázku 4.7 a přiložená tabulka 4.5 obsahující statistiky chybných predikcí jednotlivých přístupů. Z obrázku však mnoho závěrů dělat nemůžeme, neboť nejsou vidět mezi jednotlivými histogramy žádné velké odlišnosti.

Zaměříme tedy svou pozornost na tabulku 4.5. V této tabulce vidíme, že skutečně nejsou žádné příliš velké rozdíly mezi statistikami jednotlivých přístupů. Nicméně jako pozitivní můžeme vnímat vypočtené hodnoty statistiky průměr, kdy námi navrhovaný přístup dopadl jako druhý nejlepší. Oproti modelu 1

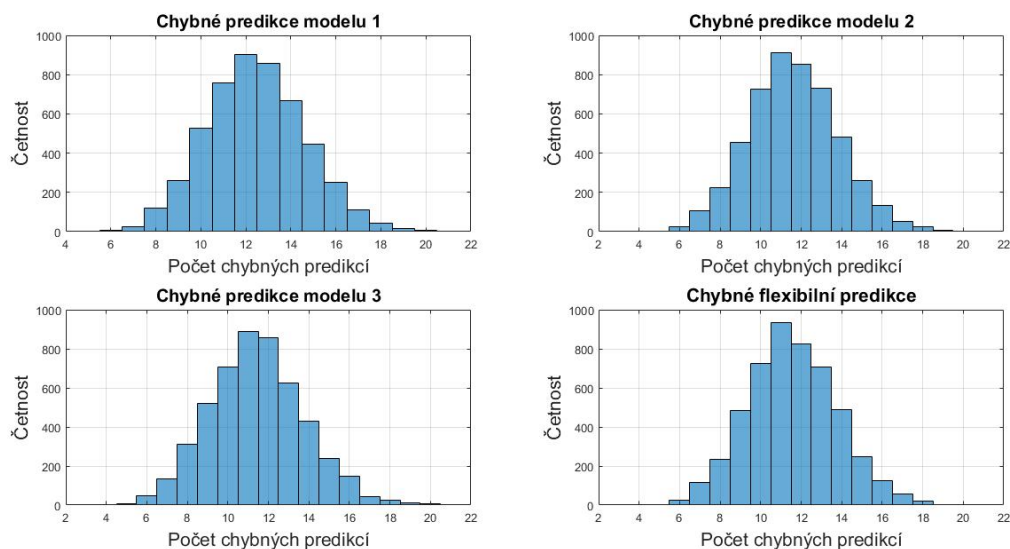


Obrázek 4.5: Vývoj mediánu důvěr $p(w^j|d(t), A(t))$ v hodnoty *důvěryhodnostního parametru* w v simulaci délky $\text{dur_sim} = 25$ cyklů, ze všech $\text{num_mc} = 5000$ Monte Carlo opakování v experimentu s $|a|, |s| = 2$, kde $w^1 = 0$, $w^2 = 0,5$ a $w^3 = 0$ při užití náhodné směsi téměř ideálního *externího prediktoru* s náhodným *externím prediktorem*.



Obrázek 4.6: Vývoj mediánu odhadu *důvěryhodnostního parametru* w v simulaci délky $\text{dur_sim} = 25$ cyklů, ze všech $\text{num_mc} = 5000$ Monte Carlo opakování v experimentu s $|a|, |s| = 2$, kde $w^1 = 0$, $w^2 = 0,5$ a $w^3 = 0$ při náhodné směsi téměř ideálního *externího prediktoru* s náhodným *externím prediktorem*.

se jedná v průměru o zlepšení přibližně o 7 %, vůči modelu 3, který v průměru dopadl nejlépe, se jedná o zhoršení přibližně o 1,3 %. Tudíž užitím našeho přístupu si pravděpodobně příliš nepohoršíme. Vypočtené směrodatné odchylky mají i v tomto experimentu velice blízké hodnoty



Obrázek 4.7: Histogramy rozložení počtu chybných predikcí na konci simulace délky $dur_sim = 25$ cyklů, ze všech $num_mc = 5000$ Monte Carlo opakování v experimentu s $|a|, |s| = 2$, kde pracuje model 1 s $w^1 = 0$, model 2 s $w^2 = 0,5$ a model 3 s $w^3 = 0$ při náhodné směsi téměř ideálního *externího prediktoru* s náhodným *externím prediktorem*.

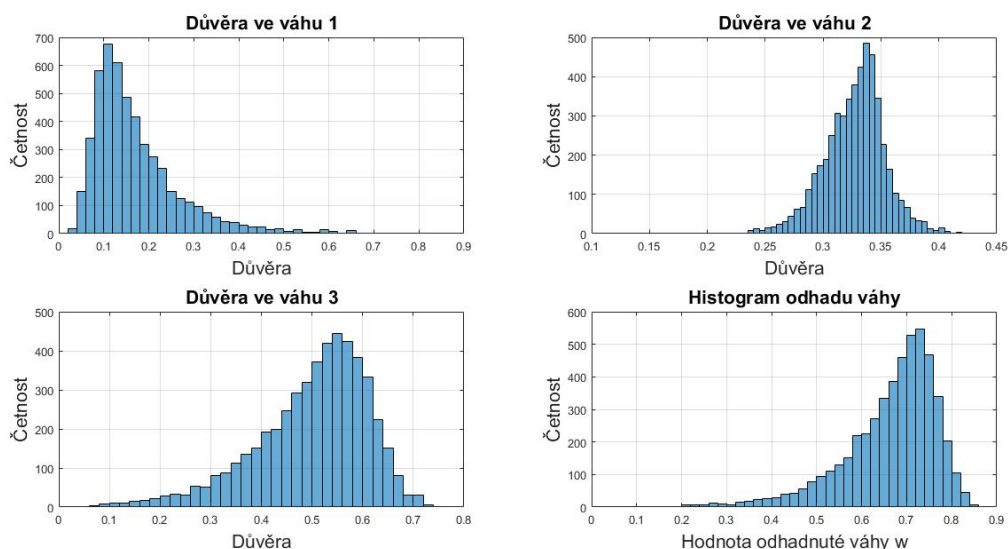
Predikce	Medián	Průměr	Směrodatná odchylka
Model 1	12	12,443	2,199
Model 2	12	11,628	2,211
Model 3	11	11,425	2,321
Flexibilní	12	11,574	2,220

Tabulka 4.5: Hodnoty základních statistik chybných predikcí na konci simulace délky $dur_sim = 25$ cyklů, ze všech $num_mc = 5000$ Monte Carlo opakování v experimentu s $|a|, |s| = 2$, kde pracuje model 1 s $w^1 = 0$, model 2 s $w^2 = 0,5$ a model 3 s $w^3 = 0$ při náhodné směsi téměř ideálního *externího prediktoru* s náhodným *externím prediktorem*.

Pro ilustraci si vizualizujeme histogramy rozložení důvěry v hodnoty *důvěryhodnostní parametr* na konci simulace a z nich vypočtený odhad hodnoty *důvěryhodnostního parametru*.

Na obrázku 4.8 vidíme, že průběhy jednotlivých simulací byly značně odlišné, což není překvapením, neboť to bylo ovlivněno náhodností vygenerovaného *externího prediktoru*.

V tomto experimentu náš přístup nabídl v průměru druhé nejméně chybové predikce. To bylo nejspíš ovlivněno tím, že námi navrhovaný přístup je flexibilnější než pevná volba hodnoty *důvěryhodnostního prediktoru* a dokáže se přizpůsobovat konkrétnímu tvaru *externího prediktoru*.



Obrázek 4.8: Histogram rozložení důvěry $p(w^j|d(t), A(t))$ v hodnoty *důvěryhodnostní parametr* w na konci simulace délky $\text{dur_sim} = 25$ cyklů, ze všech $\text{num_mc} = 5000$ Monte Carlo opakování v experimentu s $|\mathbf{a}|, |\mathbf{s}| = 2$, kde pracuje model 1 s $w^1 = 0$, model 2 s $w^2 = 0,5$ a model 3 s $w^3 = 0$ při náhodné směsi téměř ideálního *externího prediktoru* s náhodným *externím prediktorem*.

Experiment 3

V dalším experimentu bychom chtěli ověřit efektivitu námi navrhovaných predikcí, v případě kdy dochází k vývoji *externího prediktoru*. Kvůli tomu, aby docházelo k pozvolnějším vývoji *externího prediktoru*, bude délka jednotlivé simulace v experiment číslo 3 mít délku 50 cyklů.

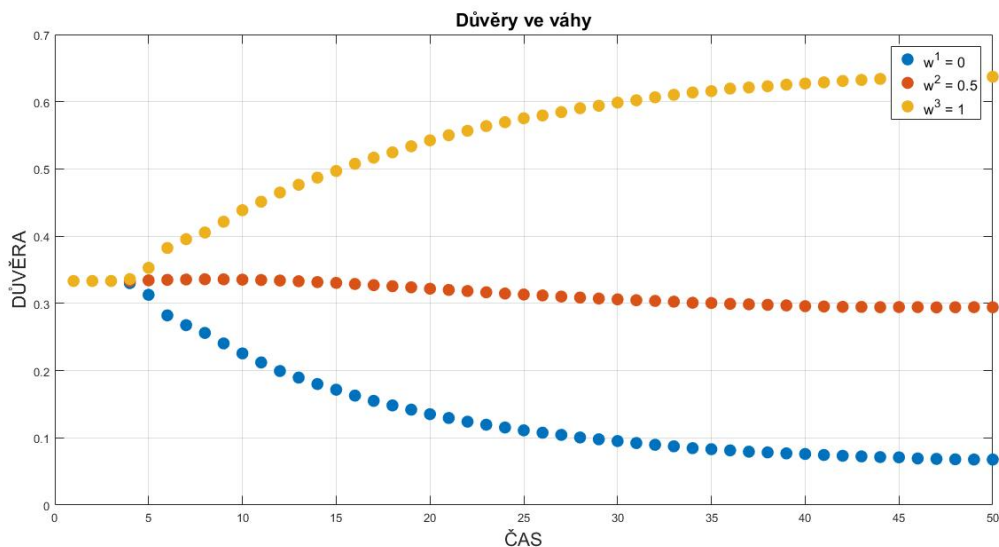
Externí prediktor v tomto experimentu bude typu 3. Připomeňme, že *externí prediktor* typu 3 začíná v téměř ideálním tvaru a postupem simulace se rovnoměrně přibližuje náhodně vygenerovanému prediktorem.

Předpokládáme tedy, že nejdříve bude možné sledovat nárůst důvěry v hodnoty *důvěryhodnostního parametru* blízké 1, nicméně by mělo v průběhu dojít k zastavení tohoto růstu a naopak dojít k poklesu.

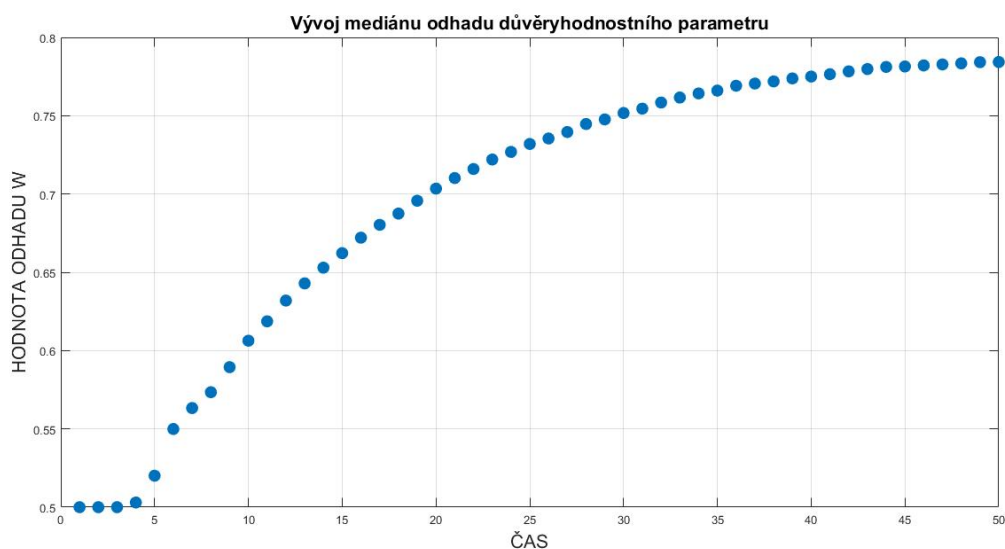
V tabulce 4.6 je možné nalézt hodnoty *vstupních parametrů* pro experiment číslo 3.

Název parametru	program	hodnota
Délka simulace	dur_sim	50
Počet hodnot důvěryhodnostního parametru	l_w	3
Typ prediktoru	chosen_type	3
Počet tvarů prediktoru	num_adviser	10
Typ navrhované predikce	pred_type	1
Počet hodnot výstupů	num_states	2
Počet hodnot vstupů	num_actions	2
Počet Monte Carlo cyklů	num_mc	5000
Seed	seed	2

Tabulka 4.6: Nastavení *vstupních parametrů* pro experiment číslo 3



Obrázek 4.9: Vývoj mediánu důvěry $p(w^j|d(t), A(t))$ v hodnoty *důvěryhodnostního parametru* w v simulaci délky $\text{dur_sim} = 50$ cyklů, ze všech $\text{num_mc} = 2500$ Monte Carlo opakování v experimentu s $|a|, |s| = 2$, při volbě $l_w = 3$, při užití *externího prediktoru* začínajícího v téměř ideálním tvaru jdoucího k náhodně vygenerovanému.

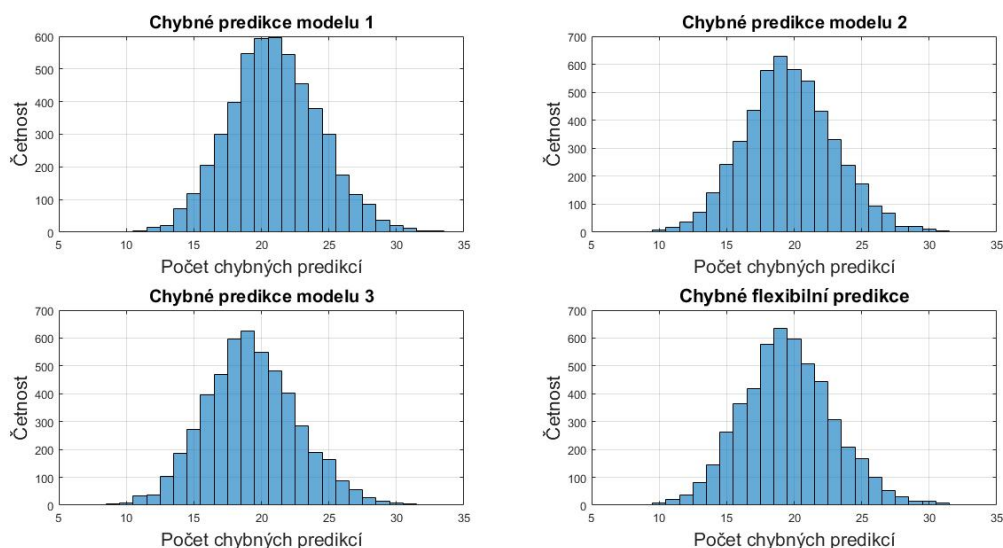


Obrázek 4.10: Vývoj mediánu odhad *důvěryhodnostního parametru* w v simulaci délky $\text{dur_sim} = 50$ cyklů, ze všech $\text{num_mc} = 2500$ Monte Carlo opakování v experimentu s $|a|, |s| = 2$, při volbě $l_w = 3$, při užití *externího prediktoru* začínajícího v téměř ideálním tvaru jdoucího k náhodně vygenerovanému.

Vývoj mediánů na obrázcích 4.9 je pro nás mírným překvapením, neboť v průběhu celé délky simulace docházelo k nárůstu důvěry v hodnotu *důvěryhodnostního parametru* $w^3 = 1$ na úkor důvěr v ostatní uvažované hodnoty *důvěryhodnostního parametru*. Zdá se, že k úplnému zastavení poklesu důvěry ve $w^2 = 0,5$ začalo docházet po čase 40. Toto chování samozřejmě ovlivnilo vývoj mediánu odhadu *důvě-*

rychlostního parametru na obrázku 4.10, jehož hodnota s pomalu klesající rychlostí rostla k hodnotě 0,78 na konci simulace.

Zaměříme nyní svou pozornost na porovnání kvality predikcí mezi jednotlivými modely a námi navrhovanou flexibilní metodou. K tomu využijeme následující vizualizaci rozdělení chybných predikcí v jednotlivých simulacích za celý průběh experimentu na obrázku 4.11 a tabulku 4.7 obsahující statistiky vizualizovaných dat.



Obrázek 4.11: Histogramy rozložení počtu chybných predikcí na konci simulace délky $dur_sim = 50$ cyklů, ze všech $num_mc = 2500$ Monte Carlo opakování v experimentu s $|a|, |s| = 2$, kde $w^1 = 0$, $w^2 = 0,5$ a $w^3 = 0$, při užití *externího prediktoru* začínajícího v téměř ideálním tvaru jdoucího k náhodně vygenerovanému.

Predikce	Medián	Průměr	Směrodatná odchylka
Model 1	21	20,993	3,375
Model 2	20	19,651	3,346
Model 3	19	19,275	3,412
Flexibilní	19	19,547	3,355

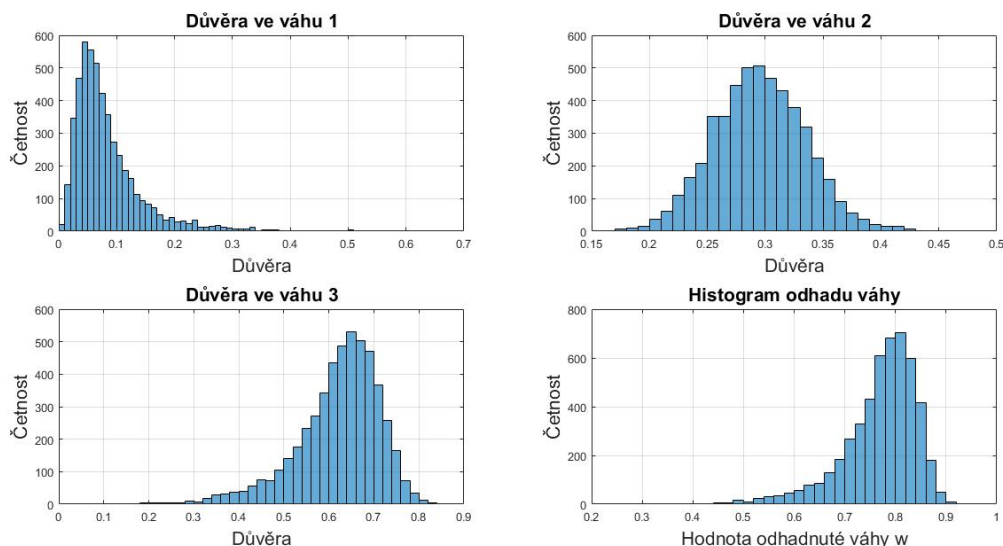
Tabulka 4.7: Hodnoty základních statistik chybných predikcí na konci simulace délky $dur_sim = 50$ cyklů, ze všech $num_mc = 2500$ Monte Carlo opakování v experimentu s $|a|, |s| = 2$, kde pracuje model 1 s $w^1 = 0$, model 2 s $w^2 = 0,5$ a model 3 s $w^3 = 0$, při užití *externího prediktoru* začínajícího v téměř ideálním tvaru jdoucího k náhodně vygenerovanému.

Na obrázku 4.11 není vidět mnoho jiných rozdílů, než že střední hodnota počtu chybných predikcí modelu 1 bude vyšší než u ostatních přístupů.

Podívejme se tedy na tabulku 4.7, která nám umožní lepší srovnání kvality predikcí. Vidíme, že námi navrhované predikce jsou v průměru druhé nejméně chybující, po predikcích prováděných modelem 3. Oproti nejkvalitnější predikci se jedná o zhoršení přibližně o 1,4 %, naopak oproti dalším dvěma přístupům jde o zlepšení přibližně o 0,5 % resp. o 6,9 %.

Rozdíly ve směrodatných odchylkách ani v tomto experimentu nejsou příliš velké, neboť rozdíl mezi jednotlivými hodnotami této statistiky není ani 0,07.

Nakonec si na obrázku 4.12 vizualizujeme rozložení důvěr v hodnoty *důvěryhodnostní parametr* na konci simulace a z nich vypočtené odhady hodnoty *důvěryhodnostního parametru*. Z obrázku však vidíme, že rozdělení jednotlivých důvěr se koncentrují v okolí určitých hodnot a nejsou tedy tolik rozptýlené jako v jiných experimentech.



Obrázek 4.12: Histogram rozložení důvěr $p(w^j|d(t), A(t))$ v hodnoty *důvěryhodnostní parametr* w na konci simulace délky $\text{dur_sim} = 50$ cyklů, ze všech $\text{num_mc} = 2500$ Monte Carlo opakování v experimentu s $|a|, |s| = 2$, kde pracuje model 1 s $w^1 = 0$, model 2 s $w^2 = 0,5$ a model 3 s $w^3 = 0$, při užití *externího prediktoru* začínajícího v téměř ideálním tvaru jdoucího k náhodně vygenerovanému.

Výsledky tohoto experimentu částečně naplnila naše očekávání, avšak k našemu překvapení v průběhu simulace nedošlo k poklesu hodnoty odhadu *důvěryhodnostního parametru*. Námi navrhané predikce představují kompromisní řešení, které je bližší lepším predikcím než predikcím horším.

Experiment 4

V tomto experimentu uijeme téměř stejné nastavení *vstupních parametrů*, jako v minulém experimentu, s jediným rozdílem ve zvolení typu užitého *externího prediktoru*. V tomto experimentu budeme užívat *externí prediktor*, který začne v náhodně vygenerovaném tvaru, ale v průběhu simulace dojde k jeho zlepšení k téměř ideálnímu.

Budeme chtít pozorovat, jaký bude rozdíl mezi tímto experimentem a experimentem číslo 3. Očekáváme, že hodnota odhadu *externího prediktoru* bude nejdříve klesat, ale postupem simulace dojde k obratu a začne stoupat. S ohledem na vývoj tvaru *externího prediktoru* ke kterému dojde, očekáváme, že námi navržené predikce by mohli být přesnější než predikce získané pevnou volbou hodnoty *důvěryhodnostního parametru*.

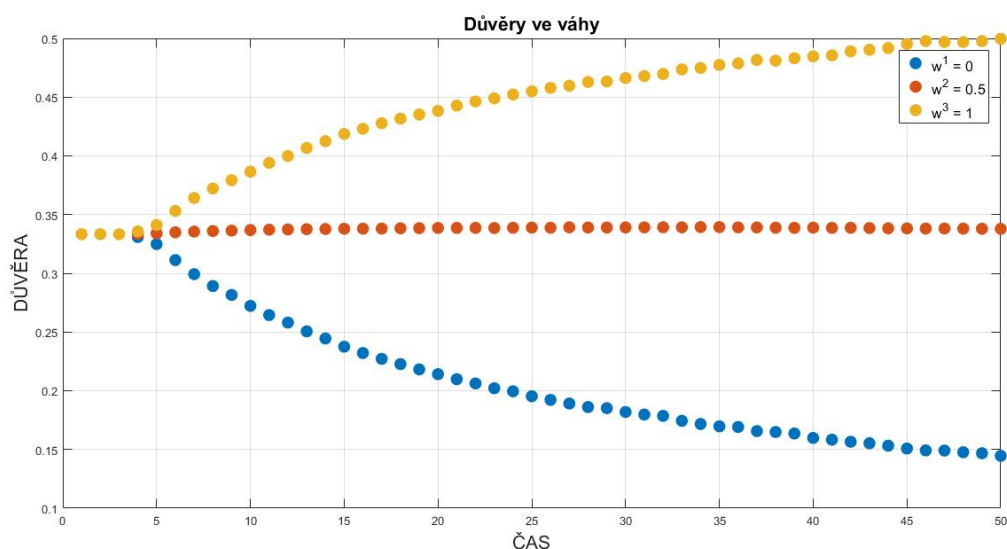
V následující tabulce 4.8 si uvedeme volbu *vstupních parametrů* pro experiment číslo 4.

Nejdříve se podíváme na vývoj mediánů důvěr v hodnoty *důvěryhodnostního parametru*, na obrázku 4.13, a následně na vývoj mediánu odhadu *důvěryhodnostního parametru*, na obrázku 4.14.

Očekávali jsme nejdříve klesající tendenci ve vývoji mediánu odhadu *důvěryhodnostního parametru*, která v druhé části simulace začne růst.

Název parametru	program	hodnota
Délka simulace	dur_sim	50
Počet hodnot důvěryhodnostního parametru	l_w	3
Typ prediktoru	chosen_type	4
Počet tvarů prediktoru	num_adviser	10
Typ navrhované predikce	pred_type	1
Počet hodnot výstupů	num_states	2
Počet hodnot vstupů	num_actions	2
Počet Monte Carlo cyklů	num_mc	5000
Seed	seed	2

Tabulka 4.8: Nastavení vstupních parametrů pro experiment číslo 4



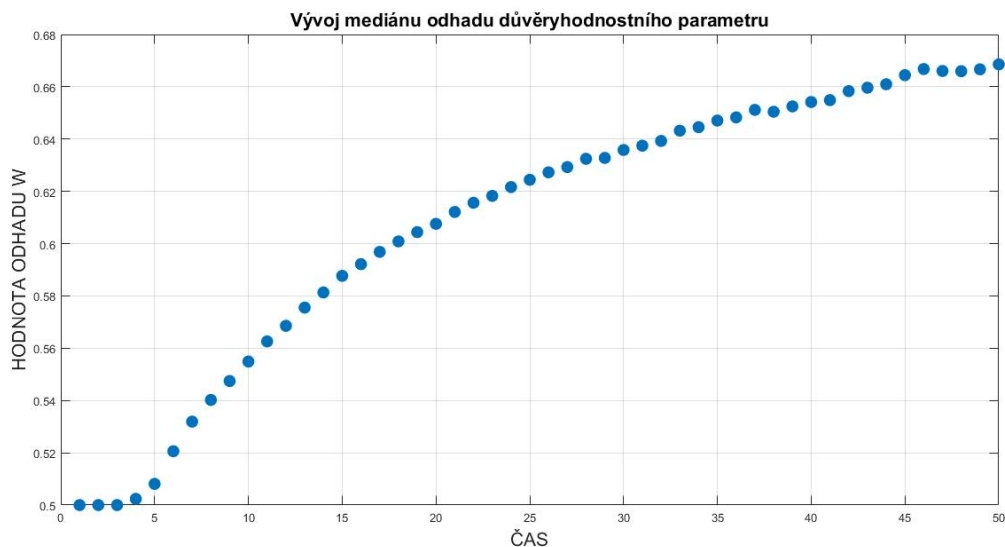
Obrázek 4.13: Vývoj mediánu důvěr $p(w^j | d(t), A(t))$ v hodnoty důvěryhodnostního parametru w v simulaci délky $dur_sim = 50$ cyklů, ze všech $num_mc = 2500$ Monte Carlo opakování v experimentu s $|a|, |s| = 2$, při volbě $l_w = 3$, při užití *externího prediktoru* začínajícího v náhodně vygenerovaném tvaru jdoucího k téměř ideálním tvaru.

Nicméně na obrázcích 4.13 a 4.14 vidíme odlišný trend, než jaký jsme předpokládali. Neboť v tomto případě dochází k pozvolnému nárůstu mediánu odhadu důvěryhodnostního parametru přes celou simulaci.

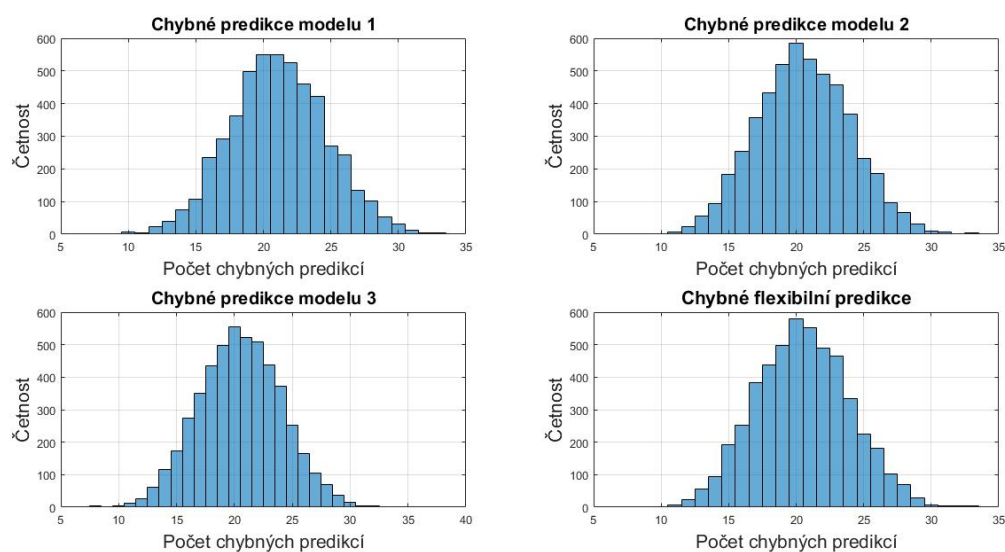
Podívejme se na to jaké budou rozdíly v počtu chybných predikcí mezi jednotlivými přístupy.

Obrázek 4.15 nám k porovnání nebude příliš užitečný. Podívejme se tedy na hodnoty jednotlivých statistik chybných predikcí na konci simulace uvedené v tabulce 4.9. Z této tabulky vidíme, že rozdíly mezi statistikami nejsou úplně největší, nicméně pozitivní je, že námi navrhovaná flexibilní predikce má nejnižší průměr chybných predikcí ze všech uvedených.

Oproti modelu 1 se v průměru jedná o zlepšení zhruba o 3 %, oproti modelu 2 o 0,2 % a oproti modelu 3 o 0,1 %. Nejedná se tak v porovnání s modely 2 a 3 v průměru o velkou úsporu, nicméně se také nejedná o zhoršení. Dále měla námi navrhovaná flexibilní predikce v porovnání s ostatními predikcemi druhou nejmenší vypočtenou směrodatnou odchylku, hned po modelu 2. Oproti modelu 3 byla směro-



Obrázek 4.14: Vývoj mediánu odhadu *důvěryhodnostního parametru* w v simulaci délky $dur_sim = 50$ cyklů, ze všech $num_mc = 2500$ Monte Carlo opakování v experimentu s $|a|, |s| = 2$, při volbě $l_w = 3$, při užití *externího prediktoru* začínajícího v náhodně vygenerovaném tvaru jdoucího k téměř ideálnímu tvaru.



Obrázek 4.15: Histogramy rozložení počtu chybných predikcí na konci simulace délky $dur_sim = 50$ cyklů, ze všech $num_mc = 2500$ Monte Carlo opakování v experimentu s $|a|, |s| = 2$, kde $w^1 = 0$, $w^2 = 0,5$ a $w^3 = 0$, při užití *externího prediktoru* začínajícího v náhodně vygenerovaném tvaru jdoucího k téměř ideálnímu tvaru.

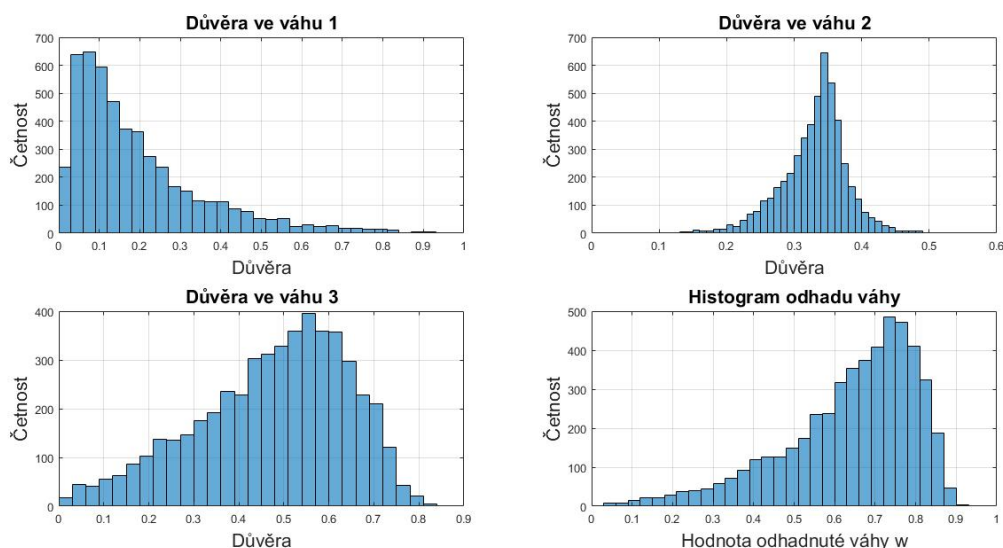
datná odchylka námi navrhované predikce menší přibližně o 2,2 %, chybovost predikce námi navržené predikce tak bude mít pravděpodobně menší rozptyl.

Pro porovnání s předcházejícím příkladem na obrázku 4.12 a pro ilustraci průběhu jednotlivých simu-

Predikce	Medián	Průměr	Směrodatná odchylka
Model 1	21	21,133	3,578
Model 2	20	20,544	3,478
Model 3	20	20,518	3,565
Flexibilní	20	20,496	3,485

Tabulka 4.9: Hodnoty základních statistik chybných predikcí na konci simulace délky $dur_sim = 50$ cyklů, ze všech $num_mc = 2500$ Monte Carlo opakování v experimentu s $|a|, |s| = 2$, kde pracuje model 1 s $w^1 = 0$, model 2 s $w^2 = 0,5$ a model 3 s $w^3 = 0$, při užití *externího prediktoru* začínajícího v náhodně vygenerovaném tvaru jdoucího k téměř ideálnímu tvaru.

Pro lepší představu uvedeme následující vizualizaci, histogramu důvěr v hodnoty *důvěryhodnostního parametru* a odhadu *důvěryhodnostního parametru* na konci simulace, na obrázku 4.16.



Obrázek 4.16: Histogram rozložení důvěr $p(w^j | d(t), A(t))$ v hodnoty *důvěryhodnostního parametru* w na konci simulace délky $dur_sim = 50$ cyklů, ze všech $num_mc = 2500$ Monte Carlo opakování v experimentu s $|a|, |s| = 2$, kde pracuje model 1 s $w^1 = 0$, model 2 s $w^2 = 0,5$ a model 3 s $w^3 = 0$, při užití *externího prediktoru* začínajícího v náhodně vygenerovaném tvaru jdoucího k téměř ideálnímu tvaru.

Výsledky tohoto experimentu byly zajímavé hlavně z důvodu možného porovnání s experimentem číslo 3.

Námi navrhovaná metoda flexibilní predikce se ukázala v průměru jako nejvýhodnější, avšak poskytovaná úspora v porovnání s jinými predikcemi nebyla významného charakteru.

Experiment 5

V tomto experimentu budeme pracovat s větším rozměrem možných *vstupů* a *výstupů*, proto budeme pracovat s časově delší simulací. Zvětšením rozměrů a a s také naroste rozměr neznámého *systemu*, jehož chování chceme predikovat, jeho podobu lze nalézt v tabulce 4.19 v Příloze.

Pro tento experiment budeme pracovat s *externím prediktorem*, který bude pro každou simulaci náhodně vygenerovaný. Proto předpokládáme, že adekvátní váha w takto vzniklého *externího prediktoru* je

blízká 0. Podle toho očekáváme i vývoj jednak důvěr v jednotlivé hodnoty *důvěryhodnostního parametru*, jednak odhad *důvěryhodnostního parametru*.

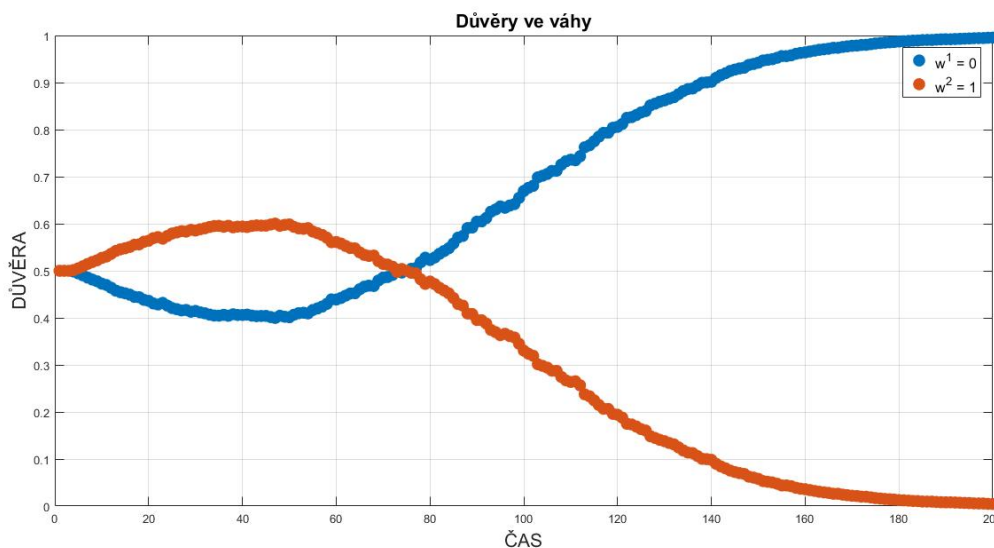
Předpokládáme, že námi navrhovaný typ predikcí by mohl být nejlépe, neboť v případech, kdy je náhodně vygenerovaný tvar *externího prediktoru* nepříliš vzdálený ideálnímu, by mohl tuto skutečnost dobře reflektovat.

V následující tabulce 4.10 zobrazíme zvolené *vstupní parametry* pro tento experiment.

Název parametru	program	hodnota
Délka simulace	dur_sim	200
Počet hodnot důvěryhodnostního parametru	l_w	2
Typ prediktoru	chosen_type	5
Počet tvarů prediktoru	num_adviser	20
Typ navrhované predikce	pred_type	1
Počet hodnot výstupů	num_states	3
Počet hodnot vstupů	num_actions	3
Počet Monte Carlo cyklů	num_mc	2500
Seed	seed	3

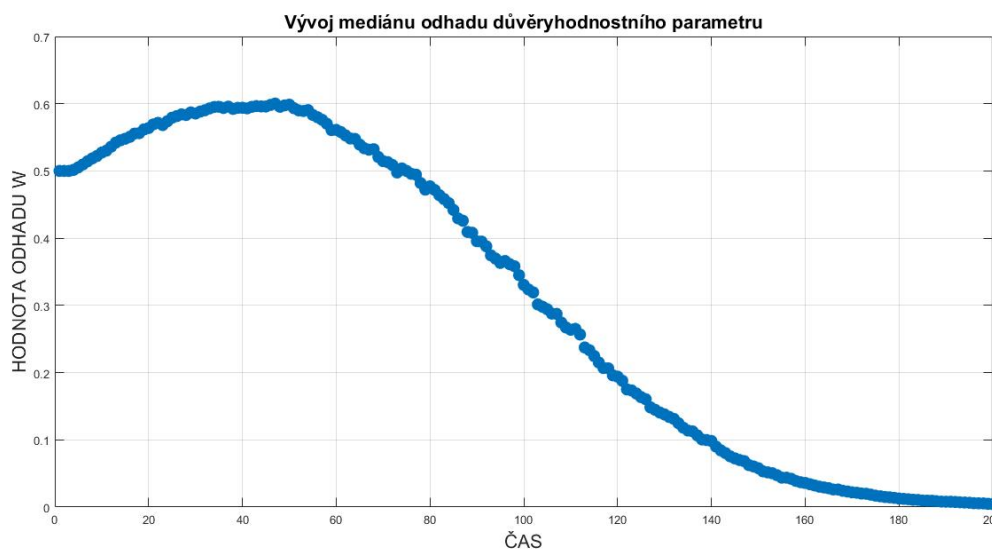
Tabulka 4.10: Nastavení *vstupních parametrů* pro experiment číslo 5

Nejdříve si ukážeme vývoj mediánu důvěr v jednotlivé hodnoty *důvěryhodnostního parametru*, o tomto vývoji předpokládáme, že bude vykazovat klesající tendenci, pro hodnoty *důvěryhodnostního parametru* větší než 0, v průběhu celé simulace.



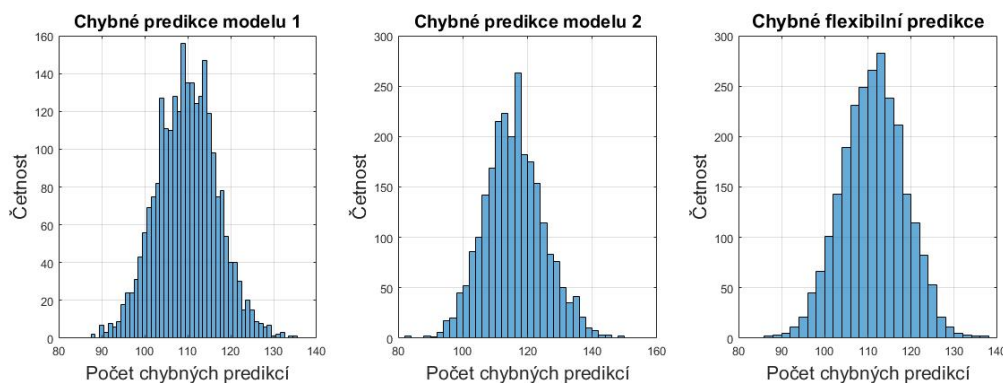
Obrázek 4.17: Vývoj mediánu důvěr $p(w^j|d(t), A(t))$ v hodnoty *důvěryhodnostního parametru* w v simulaci délky $dur_sim = 200$ cyklů, ze všech $num_mc = 2500$ Monte Carlo opakování v experimentu s $|a|, |s| = 3$, při volbě $l_w = 2$, při užití náhodně vygenerovaného *externího prediktoru*.

Z obrázků 4.17 a 4.18, které jsou vzájemně úzce spojené, vidíme že náš předpoklad se částečně naplnil. Neboť medián odhadu *důvěryhodnostního parametru* začal klesat okolo času 50. K vyrovnání důvěr v hodnoty *důvěryhodnostního parametru* došlo okolo času 75.



Obrázek 4.18: Vývoj mediánu odhadu *důvěryhodnostního parametru* w v simulaci délky $dur_sim = 200$ cyklů, ze všech $num_mc = 2500$ Monte Carlo opakování v experimentu s $|a|, |s| = 3$, při volbě $l_w = 2$, při užití náhodně vygenerovaného *externího prediktoru*.

Následující vizualizace počtu chybných predikcí a s ní související tabulka statistik nám poskytnou přehled o úspěšnosti predikcí jednotlivých přístupů.



Obrázek 4.19: Histogramy rozložení počtu chybných predikcí na konci simulace délky $dur_sim = 200$ cyklů, ze všech $num_mc = 2500$ Monte Carlo opakování v experimentu s $|a|, |s| = 3$, kde pracuje model 1 s $w^1 = 0$ a model 2 s $w^2 = 0$, při užití náhodně vygenerovaného *externího prediktoru*.

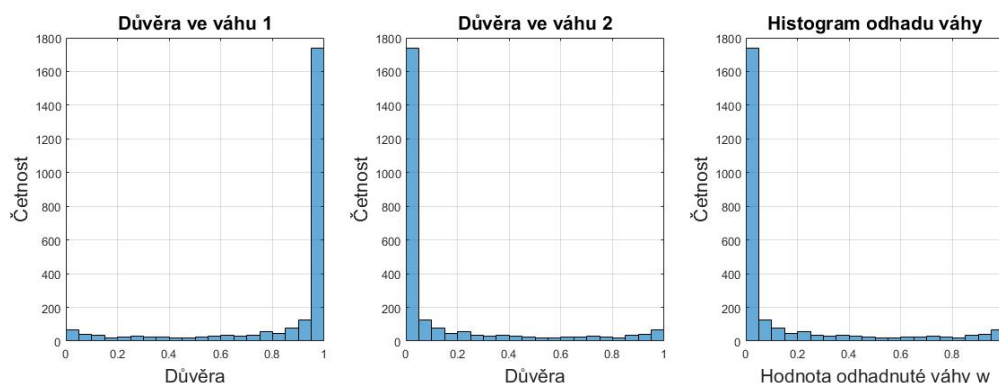
Z obrázku 4.19 vidíme, že střední hodnota počtu chybných predikcí modelu 2 bude mít vyšší hodnotu než zbylé dva přístupy. Pro konkrétní porovnání jednotlivých přístupů nahlédneme do tabulky 4.11. V této tabulce vidíme, že námi navrhovaná flexibilní predikce má vyšší hodnoty statistik než predikce provedené modelem 1. Rozdíl v průměru počtu chybných predikcí je při porovnání naší flexibilní predikce s predikcí provedenou modelem 1 přibližně 0,8 %. Nicméně při porovnání námi navržených predikcí s predikcemi modelu 2 dostaneme v průměru o 4 % méně chybných predikcí. Opět se tedy zdá, že námi navrhovaná metoda predikce nabízí kompromisní, která sníží riziko zbytečně vysoké chybovosti navrhovaných predikcí.

Predikce	Medián	Průměr	Směrodatná odchylka
Model 1	110	109,794	7,057
Model 2	115	115,383	9,146
Flexibilní	111	110,777	7,265

Tabulka 4.11: Hodnoty základních statistik chybných predikcí na konci simulace délky $\text{dur_sim} = 200$ cyklů, ze všech $\text{num_mc} = 2500$ Monte Carlo opakování v experimentu s $|a|, |s| = 3$, kde pracuje model 1 s $w^1 = 0$ a model 2 s $w^2 = 0$, při užití náhodně vygenerovaného *externího prediktoru*.

Směrodatná odchylka modelu 2 byla znatelně největší. To naznačuje, že rozptyl chybovosti takto prováděných predikcí byl největší, což není překvapivé s ohledem na volbu *vstupního parametru* $\text{chosen_type} = 5$.

V obrázku 4.20 vizualizujeme histogramy rozložení důvěr v hodnoty *důvěryhodnostního parametru* a histogram odhadu *důvěryhodnostního parametru* na konci simulace.



Obrázek 4.20: Histogramy rozložení důvěr $p(w^j | \underline{d}(t), \mathbf{A}(t))$ v hodnoty *důvěryhodnostního parametru* w na konci simulace délky $\text{dur_sim} = 200$ cyklů, ze všech $\text{num_mc} = 2500$ Monte Carlo opakování v experimentu s $|a|, |s| = 3$, kde pracuje model 1 s $w^1 = 0$ a model 2 s $w^2 = 0$, při užití náhodně vygenerovaného *externího prediktoru*.

Tento experiment ukázal, že námi navrhovaný přístup se zvládne adaptovat i na náhodně vygenerovaný *externí prediktor*. Zároveň jsme viděli zajímavý úkaz na obrázku 4.17, kdy se zdá, že na počátku simulace je hlad po jakýchkoliv informacích, proto na počátku kterékoliv simulace dochází k nárůstu důvěry v hodnoty *důvěryhodnostního parametru* větší než 0,5. Uvidíme, zda se tato hypotéza potvrdí.

Experiment 6

V následujícím experimentu se podíváme na fungování predikcí v případě užití vyššího počtu hodnot *důvěryhodnostního parametru*. Zda tím dojde ke zlepšení predikce užívající jako *externí prediktor* náhodný mix téměř ideálního *externího prediktoru* s náhodně tvarem vygenerovaného *externího prediktoru*.

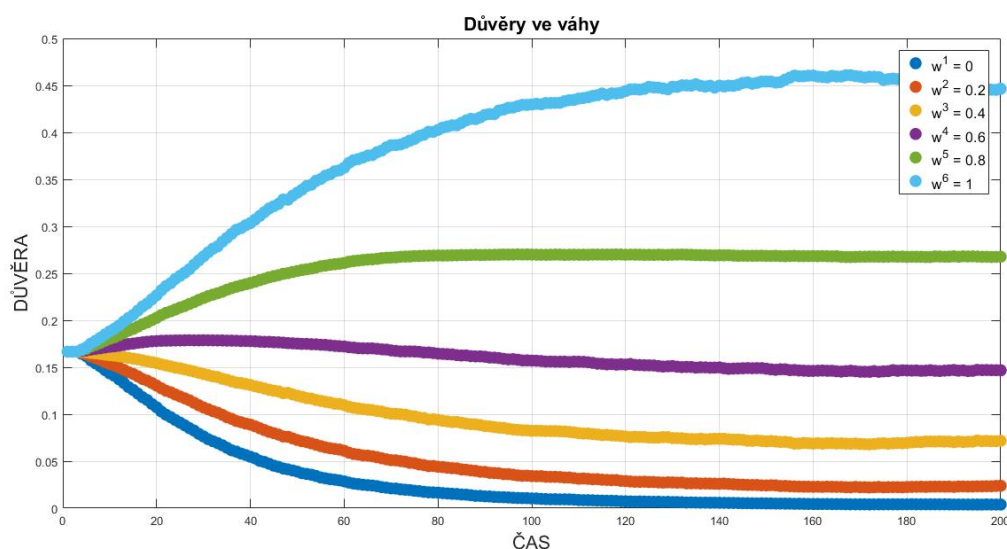
Hodnoty *vstupních parametrů* experimentu číslo 6 jsou uvedeny v následující tabulce 4.12.

V následujících dvou grafech si ukážeme průběh mediánu důvěr v hodnoty *důvěryhodnostního parametru* a průběh mediánu odhadu *důvěryhodnostního parametru*.

Předpokládáme, že v průběhu simulace dojde k postupnému poklesu odhadu hodnoty *důvěryhodnostního parametru* k hladině okolo hodnoty rovné 0,5.

Název parametru	program	hodnota
Délka simulace	dur_sim	200
Počet hodnot důvěryhodnostního parametru	l_w	6
Typ prediktoru	chosen_type	2
Počet tvarů prediktoru	num_adviser	20
Typ navrhované predikce	pred_type	1
Počet hodnot výstupů	num_states	3
Počet hodnot vstupů	num_actions	3
Počet Monte Carlo cyklů	num_mc	2500
Seed	seed	3

Tabulka 4.12: Nastavení vstupních parametrů pro experiment číslo 6



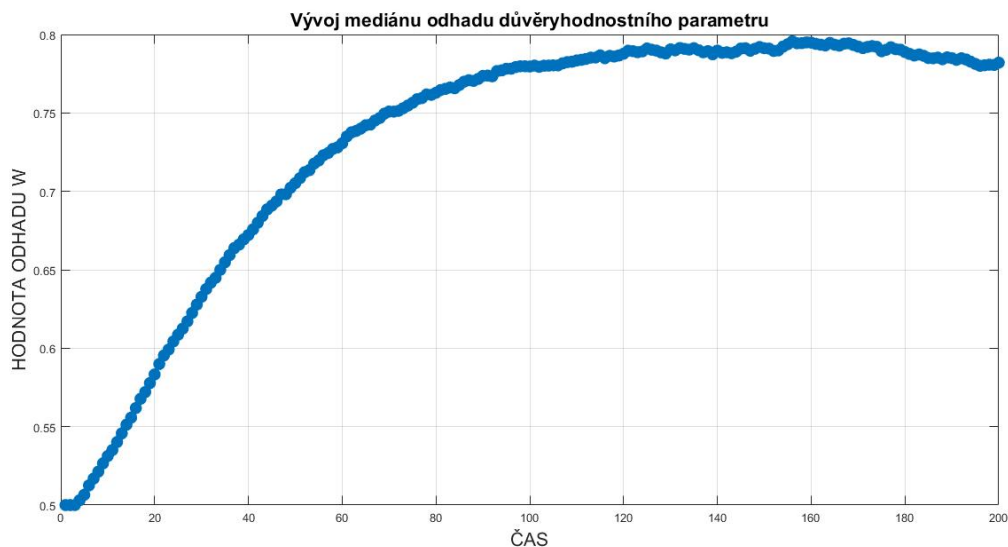
Obrázek 4.21: Vývoj mediánu důvěr $p(w^j|d(t), A(t))$ v hodnoty důvěryhodnostního parametru w v simulaci délky $dur_sim = 200$ cyklů, ze všech $num_mc = 2500$ Monte Carlo opakování v experimentu s $|a|, |s| = 3$, při volbě $l_w = 6$, při užití náhodné směsi téměř ideálního externího prediktoru s náhodným externím prediktorem.

Na obrázku 4.21 vidíme pozvolný vývoj mediánu jednotlivých důvěr do času 100. Po tomto čase došlo k nejvyšším změnám v důvěru hodnoty důvěryhodnostního parametru $w^6 = 1$.

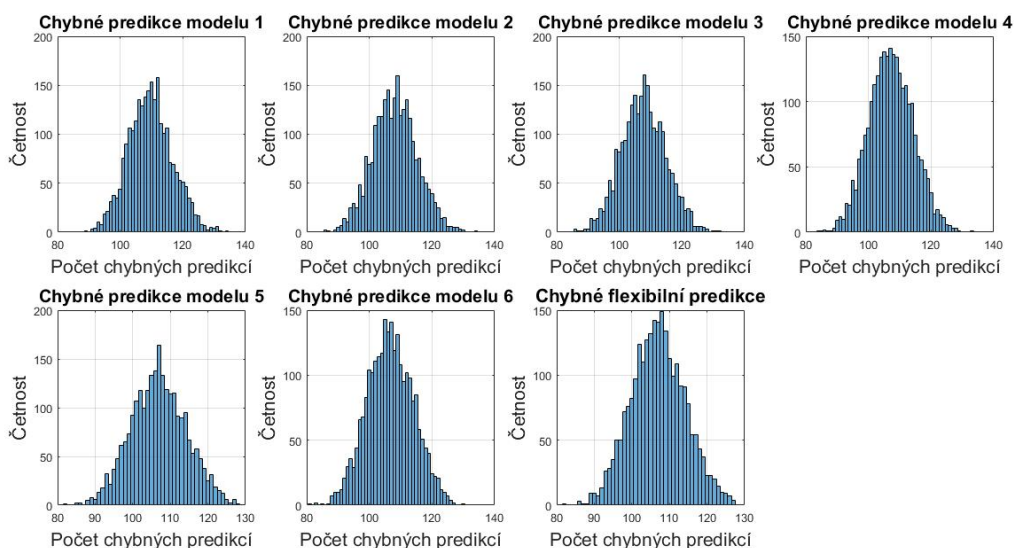
Na obrázku 4.22 je možno vidět z počátku rychlý nárůst mediánu hodnot odhadu důvěryhodnostního parametru, který se postupem simulace zpomaloval, až do okolí času 160, kdy začalo docházet k poklesu.

V následující části si vizualizujeme počty chybných predikcí v podobě histogramů a související tabulku statistik, která nám poskytne přehled o úspěšnosti predikcí jednotlivých přístupů.

Mnoho závěru z obrázku 4.23 nevyvodíme. Zaměřme tedy naši pozornost na tabulku 4.13. V této tabulce vidíme, že námi navrhovaný přístup pomocí flexibilních predikcí měl v průměru až třetí nejmenší počet chybných predikcí. V průměru dopadly lépe jenom model 5 a model 6. Námi navržené flexibilní predikce byly v porovnání s modelem 5 resp. modelem 6 v průměru horší o zhruba 0,08 % resp. o zhruba 0,3 %, což není příliš velký rozdíl. V porovnání s ostatními modely se v průměru jedná o snížení chybovosti o 0,2 % až 2,4 % v závislosti na porovnávaném modelu.



Obrázek 4.22: Vývoj mediánu odhadu *důvěryhodnostního parametru* w v simulaci délky $dur_sim = 200$ cyklů, ze všech $num_mc = 2500$ Monte Carlo opakování v experimentu s $|a|, |s| = 3$, při volbě $l_w = 6$, při užití náhodné směsi téměř ideálního *externího prediktora* s náhodným *externím prediktorem*.



Obrázek 4.23: Histogramy rozložení počtu chybných predikcí na konci simulace délky $dur_sim = 200$ cyklů, ze všech $num_mc = 2500$ Monte Carlo opakování v experimentu s $|a|, |s| = 3$, kde pracuje model 1 s $w^1 = 0$, model 2 s $w^2 = 0, 2, \dots$ a model 6 s $w^6 = 1$, při užití náhodné směsi téměř ideálního *externího prediktora* s náhodným *externím prediktorem*.

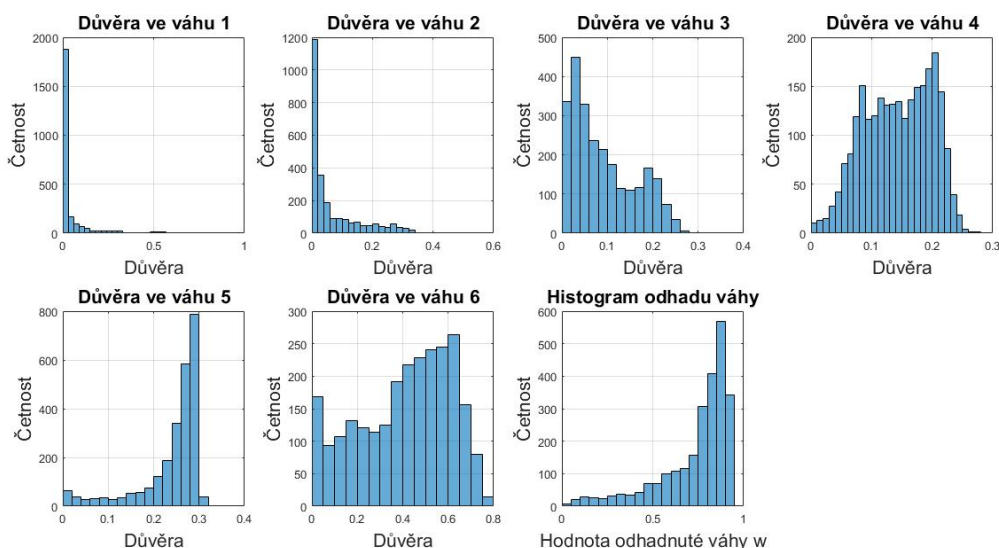
Hodnota směrodatné odchylky chybovosti predikce námi navrhované flexibilní predikce je nejnižší při porovnání s modely 5 a 6. Rozptyl chybovosti tak bude v tomto srovnání pro flexibilní predikci nejnižší.

Pro ilustraci výsledků na konci jednotlivých simulací si zobrazíme následující histogramy rozložení

Predikce	Medián	Průměr	Směrodatná odchylka
Model 1	109,5	109,667	7,021
Model 2	108	108,156	7,100
Model 3	108	107,709	7,079
Model 4	107	107,208	7,086
Model 5	107	106,900	7,331
Model 6	107	106,639	7,388
Flexibilní	107	106,981	7,198

Tabulka 4.13: Hodnoty významných statistik počtů chybných predikcí na konci simulace délky $\text{dur_sim} = 200$ cyklů, ze všech $\text{num_mc} = 2500$ Monte Carlo opakování v experimentu s $|\mathbf{a}|, |\mathbf{s}| = 3$, kde pracuje model 1 s $w^1 = 0$, model 2 s $w^2 = 0,2, \dots$ a model 6 s $w^6 = 1$, při užití náhodné směsi téměř ideálního *externího prediktoru* s náhodným *externím prediktorem*.

důvěr v hodnoty *důvěryhodnostní parametr* a s nimi související histogram odhadu *důvěryhodnostního parametru*.



Obrázek 4.24: Histogramy rozložení důvěr $p(w^j | \underline{d}(t), \mathbf{A}(t))$ v hodnoty *důvěryhodnostní parametr* w na konci simulace délky $\text{dur_sim} = 200$ cyklů, ze všech $\text{num_mc} = 2500$ Monte Carlo opakování v experimentu s $|\mathbf{a}|, |\mathbf{s}| = 3$, kde pracuje model 1 s $w^1 = 0$, model 2 s $w^2 = 0,2, \dots$ a model 6 s $w^6 = 1$, při užití náhodné směsi téměř ideálního *externího prediktoru* s náhodným *externím prediktorem*.

Na obrázku 4.24 vidíme relativně konzistentní chování pro vypočítávané důvěry v hodnoty *důvěryhodnostního parametru* w^1 a w^2 . Důvěry v hodnoty *důvěryhodnostního parametru* w^3, w^4 a w^5 jsou pak různým způsobem rozděleny mezi hodnotou 0 a 0,3. Zajímavě, skoro až náhodně, pak působí rozdělení důvěry v hodnotu *důvěryhodnostního parametru* $w^6 = 1$. Oproti tomu pak histogram odhadu *důvěryhodnostního parametru* působí uspořádaným dojmem.

Z výsledků tohoto experimentu vidíme, že přílišné zvyšování počtu hodnot *důvěryhodnostního parametru* naše predikce nejspíše na úkor výpočetní složitosti nezlepší.

Zároveň vidíme, že námi navrhovaný přístup pomocí flexibilních predikcí, v průměru nepovede k výrazně horším predikcím než pevná volba *důvěryhodnostního parametru*.

Experiment 7

V tomto experimentu ověříme fungování námi navrhovaného přístupu v simulaci větší časové délky, při možnosti vývoje *externího prediktoru*.

Z toho důvodu v tomto experimentu uijeme *externí prediktor* typu 3. S ohledem na typ užívaného *externího prediktoru* očekáváme, že náš odhad *důvěryhodnostního parametru* se bude v druhé polovině simulace blížit aktuální skutečné hodnotě *důvěryhodnostního parametru*.

V následující tabulce 4.14 je možné nalézt zvolené *vstupní parametry* pro experiment číslo 7.

Název parametru	program	hodnota
Délka simulace	dur_sim	200
Počet hodnot důvěryhodnostního parametru	l_w	6
Typ prediktoru	chosen_type	3
Počet tvarů prediktoru	num_adviser	20
Typ navrhované predikce	pred_type	1
Počet hodnot výstupů	num_states	3
Počet hodnot vstupů	num_actions	3
Počet Monte Carlo cyklů	num_mc	2500
Seed	seed	3

Tabulka 4.14: Nastavení *vstupních parametrů* pro experiment číslo 7

S ohledem na typ zvoleného prediktoru, uvedeného v tabulce 4.14, předpokládáme že vývoj mediánu odhadu *důvěryhodnostního parametru* bude mít nejdříve rychlý nárůst své hodnoty, která začne klesat až v druhé polovině simulace.

V následujících dvou obrázcích je možno nalézt vývoje mediánů důvěr v jednotlivé hodnoty *důvěryhodnostních parametrů* a vývoj mediánu odhadu *důvěryhodnostního parametru*.

Na obrázcích 4.25 a 4.26 je vidět, že k poklesu mediánu důvěry v hodnotu $w^6 = 1$ dochází až okolo času 170 a do té doby docházelo pouze k jejímu nárůstu. Z toho vyplývá stejné chování mediánu odhadu *důvěryhodnostního parametru*.

Tato skutečnost nepotvrzuje námi představený předpoklad a vyvolává otázku, zda tento přístup nereaguje na vývoj *externího prediktoru* s příliš velkým zpožděním, případně zda nemá tendenci sklouzávat do stacionárních pozic, ze kterých by se posouval příliš pomalu.

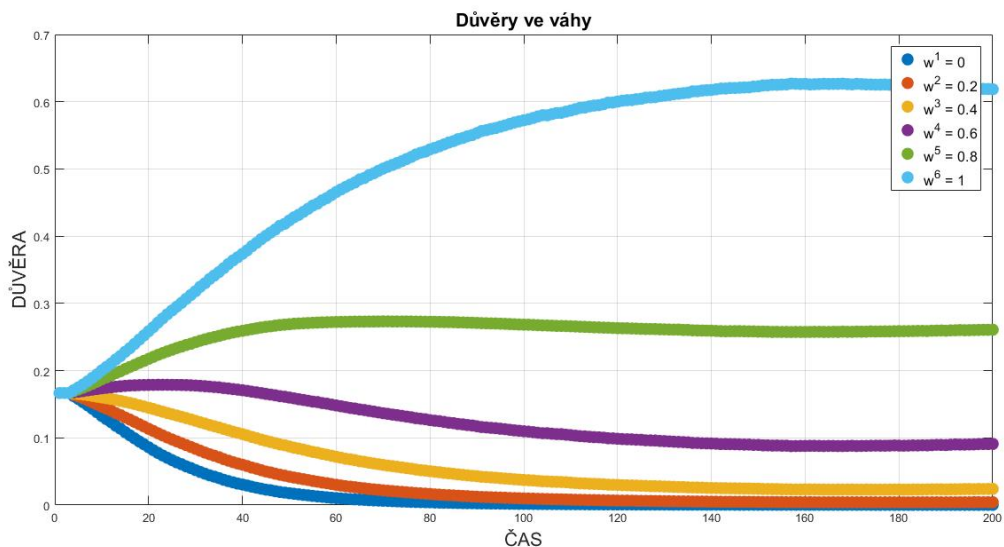
Kvalitu predikcí mezi jednotlivými modely a námi navrhovanou flexibilní metodou porovnáme pomocí následujícího obrázku, zachycujícího histogramy počtu chybných predikcí na konci simulace a tabulky statistik vizualizovaných dat.

Na obrázku 4.27 sice vidíme histogramy počtu chyb jednotlivých predikcí, nicméně na jejich základě nedokážeme provést porovnání. K tomu využijeme následující tabulku statistik počtu chybných predikcí jednotlivých přístupů.

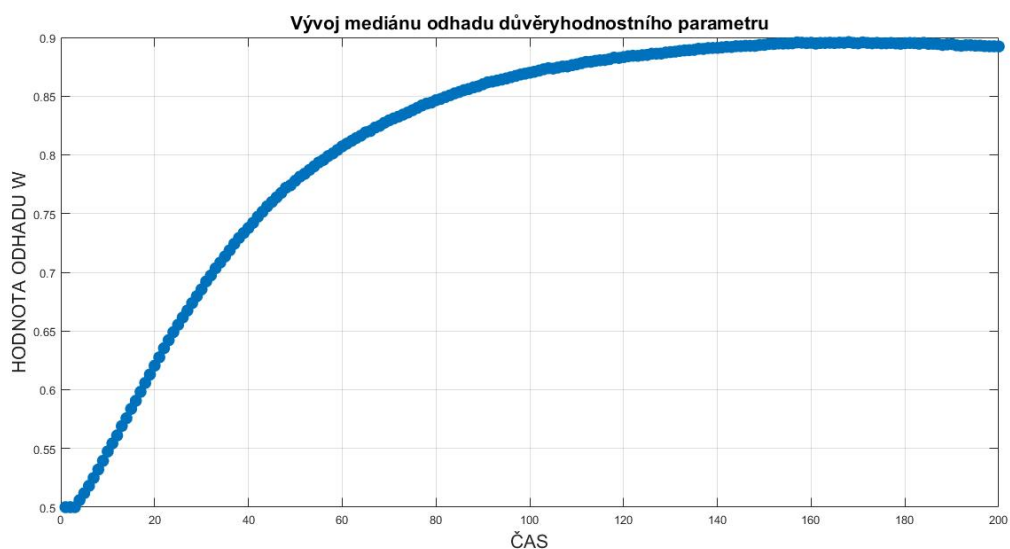
Ze statistik uvedených v tabulce 4.15 vidíme, že námi navrhovaný přístup pomocí flexibilní predikce je podle mediánu počtu chybných predikcí mezi nejlepšími a podle průměru třetí nejlepší. V porovnání s modely 5 a 6, které v průměru dopadly lépe, se jedná o zhoršení o 0,1 % a 0,8 %. Vůči ostatním modelům se jednalo v průměru o zlepšení od 0,5 % do 4,1 %.

Rozdíly mezi směrodatnými odchylkami jednotlivých přístupů byly menší než 1,8 %, proto se jejich dalším porovnáváním nebudeme v tomto experimentu zabývat.

Pro lepší představitelnost průběhu jednotlivých simulací si ukážeme následující obrázek zachycující rozložení důvěry v hodnotu *důvěryhodnostního parametru* na konci jednotlivých simulací.



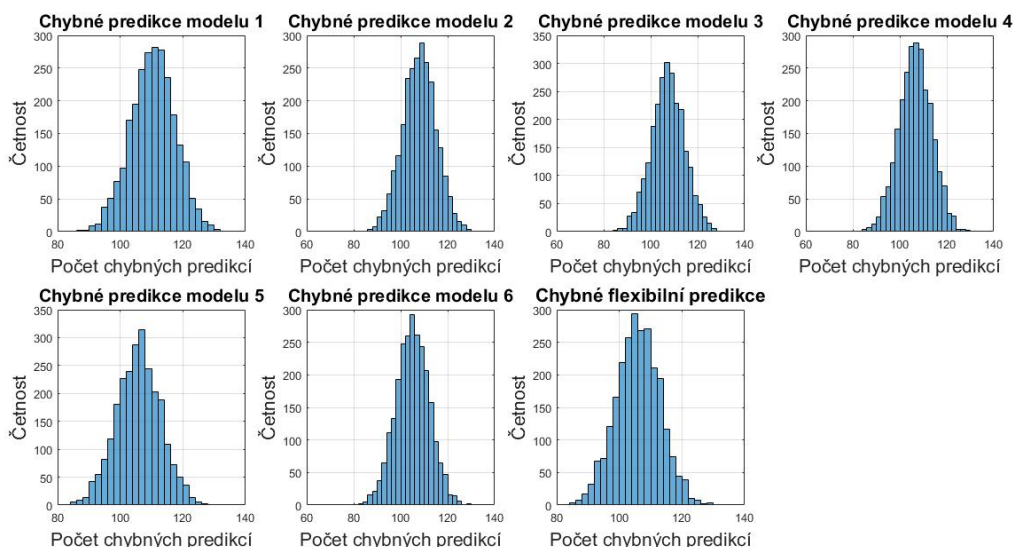
Obrázek 4.25: Vývoj mediánu důvěr $p(w^j|d(t), A(t))$ v hodnoty *důvěryhodnostního parametru* w v simulaci délky $\text{dur_sim} = 200$ cyklů, ze všech $\text{num_mc} = 2500$ Monte Carlo opakování v experimentu s $|a|, |s| = 3$, při volbě $l_w = 6$, při užití *externího prediktoru* začínajícího v téměř ideálním tvaru jdoucího k náhodně vygenerovanému.



Obrázek 4.26: Vývoj mediánu odhadu *důvěryhodnostního parametru* w v simulaci délky $\text{dur_sim} = 200$ cyklů, ze všech $\text{num_mc} = 2500$ Monte Carlo opakování v experimentu s $|a|, |s| = 3$, při volbě $l_w = 6$, při užití *externího prediktoru* začínajícího v téměř ideálním tvaru jdoucího k náhodně vygenerovanému.

Na obrázku 4.28 můžeme vidět, že důvěry v jednotlivé hodnoty *důvěryhodnostního parametru* na konci simulace jsou oproti experimentu číslo 6 více koncentrované kolem konkrétních hodnot.

Tento experiment nám ukázal možné nedostatky, námi navrhovaného přístupu, související s pomalým přizpůsobováním se vývoji *externího prediktoru* v čase. Zároveň nám tento experiment opět potvrdil, že



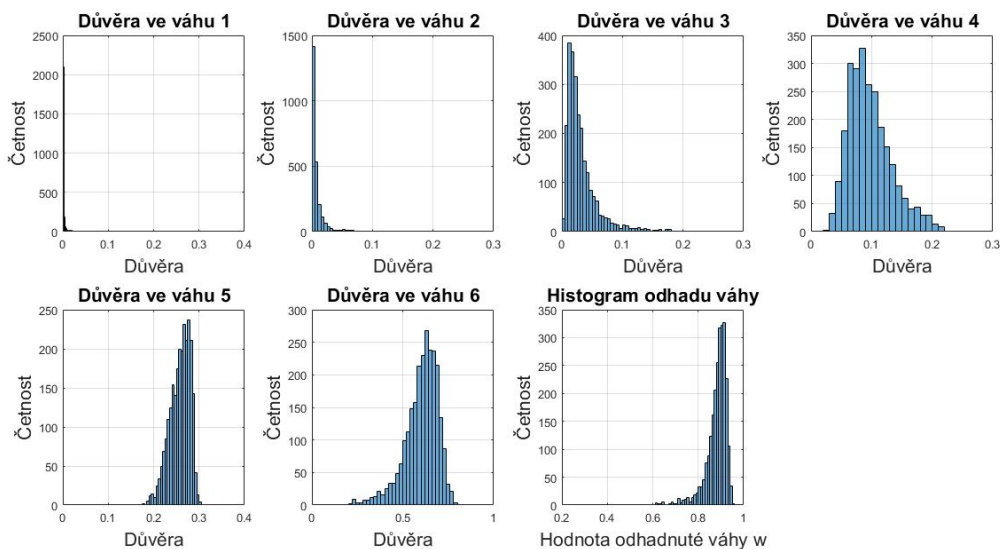
Obrázek 4.27: Histogramy rozložení počtu chybných predikcí na konci simulace délky $dur_sim = 200$ cyklů, ze všech $num_mc = 2500$ Monte Carlo opakování v experimentu s $|a|, |s| = 3$, kde pracuje model 1 s $w^1 = 0$, model 2 s $w^2 = 0, 2, \dots$ a model 6 s $w^6 = 1$, při užití *externího prediktoru* začínajícího v téměř ideálním tvaru jdoucího k náhodně vygenerovanému.

Predikce	Medián	Průměr	Směrodatná odchylka
Model 1	110	109,908	7,037
Model 2	108	107,388	7,139
Model 3	107	106,823	7,027
Model 4	106	106,067	7,014
Model 5	105	105,325	7,037
Model 6	105	104,573	7,089
Flexibilní	105	105,440	7,029

Tabulka 4.15: Hodnoty významných statistik počtů chybných predikcí na konci simulace délky $dur_sim = 200$ cyklů, ze všech $num_mc = 2500$ Monte Carlo opakování v experimentu s $|a|, |s| = 3$, kde pracuje model 1 s $w^1 = 0$, model 2 s $w^2 = 0, 2, \dots$ a model 6 s $w^6 = 1$, při užití *externího prediktoru* začínajícího v téměř ideálním tvaru jdoucího k náhodně vygenerovanému.

užitím našeho přístupu nedojde v průměru ke zbytečně velkému nárůstu chybných predikcí, ke kterému by mohlo dojít při špatně zvolené hodnotě užívaného *důvěryhodnostního parametru*.

Otázkou, kterou tento experiment vyvolal, je, zda navíc užitá výpočetní kapacita nám přinesla dostatečný zlepšení predikcí.



Obrázek 4.28: Histogramy rozložení důvěr $p(w^j|d(t), A(t))$ v hodnoty *důvěryhodnostního parametru* w na konci simulace délky $\text{dur_sim} = 200$ cyklů, ze všech $\text{num_mc} = 2500$ Monte Carlo opakování v experimentu s $|\mathbf{a}|, |\mathbf{s}| = 3$, kde pracuje model 1 s $w^1 = 0$, model 2 s $w^2 = 0, 2, \dots$ a model 6 s $w^6 = 1$, při užití *externího prediktoru* začínajícího v téměř ideálním tvaru jdoucího k náhodně vygenerovanému.

Experiment 8

Posledním prováděným experimentem je experiment pracující s podobným zadání jako měl experiment číslo 7. *Vstupní parametry* se liší pouze v typu užitých prediktorů, neboť v tomto experimentu budeme užívat *externí prediktor* typu 4.

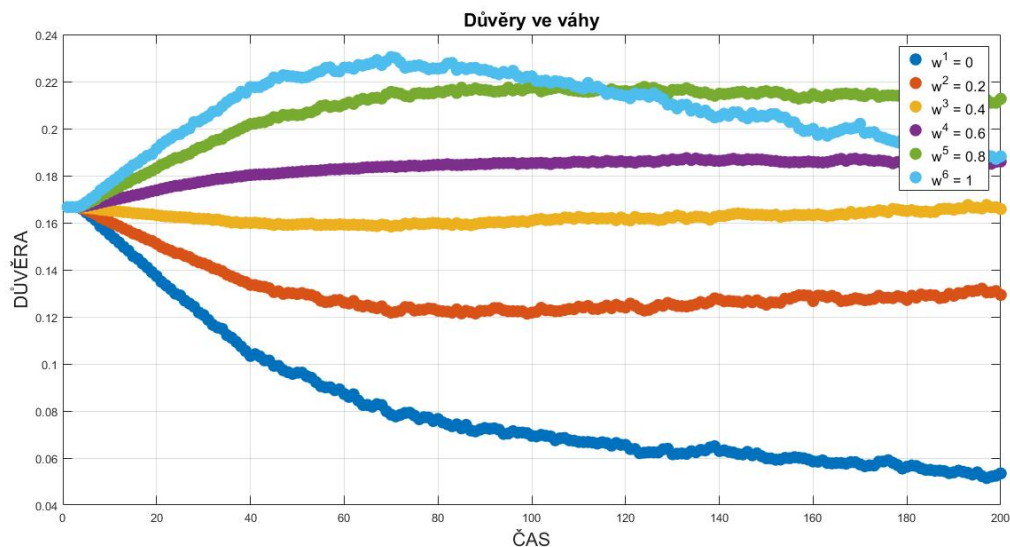
V následující tabulce 4.16 je možné nalézt *vstupní parametry* pro experiment číslo 8.

Název parametru	program	hodnota
Délka simulace	dur_sim	200
Počet hodnot důvěryhodnostního parametru	l_w	6
Typ prediktoru	chosen_type	4
Počet tvarů prediktoru	num_adviser	20
Typ navrhované predikce	pred_type	1
Počet hodnot výstupů	num_states	3
Počet hodnot vstupů	num_actions	3
Počet Monte Carlo cyklů	num_mc	2500
Seed	seed	3

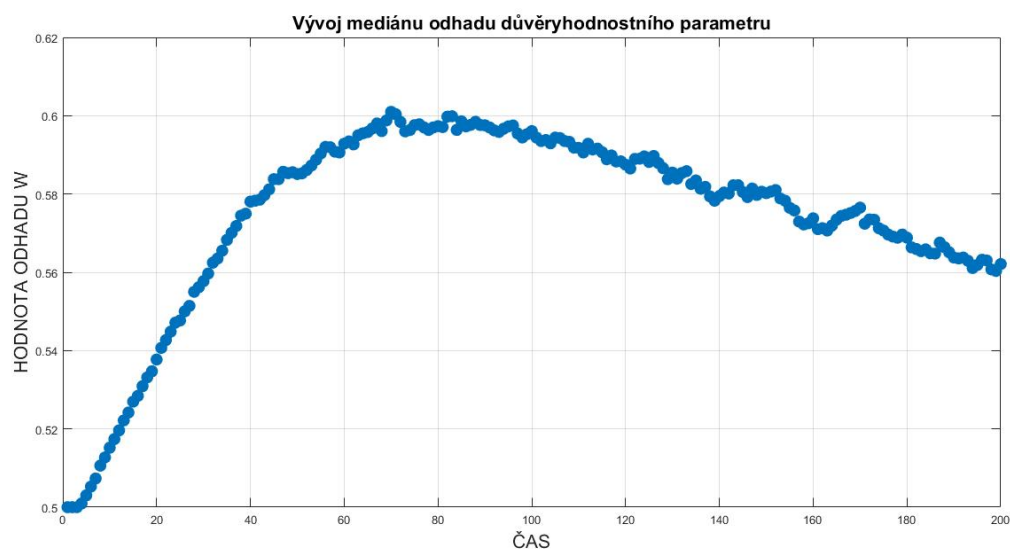
Tabulka 4.16: Nastavení *vstupních parametrů* pro experiment číslo 8

Užívaný typ *externího prediktoru* v tomto experimentu bude začínat v náhodně vygenerovaném tvaru, ale v průběhu simulace dojde k jeho zlepšení k tvaru téměř ideálnímu. Což může reprezentovat například *externí prediktor*, který se v průběhu času učí a tedy zkvalitňuje poskytované predikce.

V následujícím obrázku 4.29 můžeme vidět grafy zobrazující vývoj mediánu důvěr v hodnoty *důvěryhodnostního parametru*. V dalším obrázku 4.30 se nachází vývoj mediánu odhadu *důvěryhodnostního parametru*. Výsledné grafy, které na těchto obrázcích vidíme, jsou svým chováním velice zajímavé,



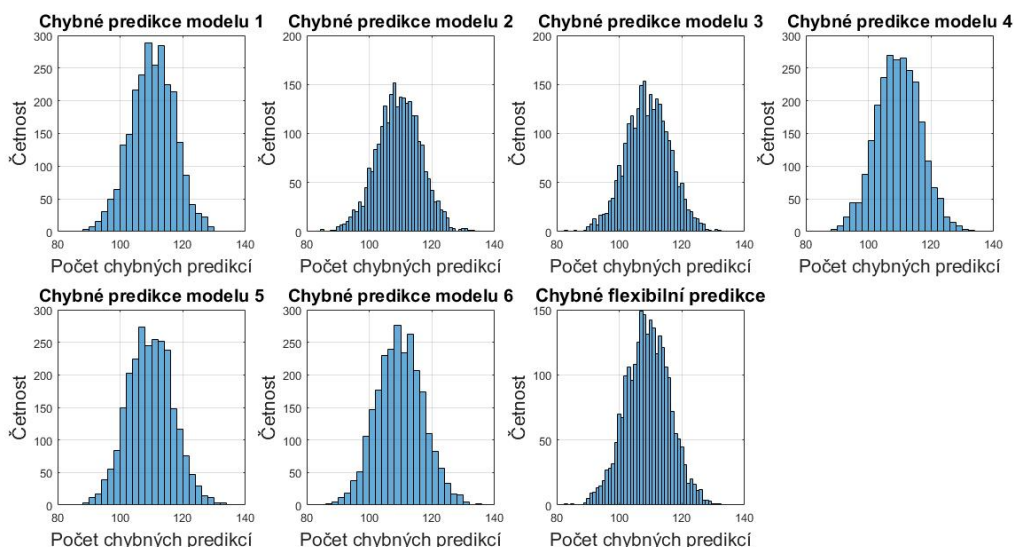
Obrázek 4.29: Vývoj mediánu důvěr $p(w^j|d(t), A(t))$ v hodnoty *důvěryhodnostního parametru* w v simulaci délky $\text{dur_sim} = 200$ cyklů, ze všech $\text{num_mc} = 2500$ Monte Carlo opakování v experimentu s $|a|, |s| = 3$, při volbě $l_w = 6$, při užití *externího prediktoru* začínajícího v náhodně vygenerovaném tvaru jdoucím k téměř ideálním tvaru.



Obrázek 4.30: Vývoj mediánu odhadu *důvěryhodnostního parametru* w v simulaci délky $\text{dur_sim} = 200$ cyklů, ze všech $\text{num_mc} = 2500$ Monte Carlo opakování v experimentu s $|a|, |s| = 3$, při volbě $l_w = 6$, při užití *externího prediktoru* začínajícího v náhodně vygenerovaném tvaru jdoucím k téměř ideálním tvaru.

avšak vůbec nenaplníují předpoklady, které jsme měli. Nejspíš je to zapříčiněno pomalou reakcí na vývoj *externího prediktoru*.

Více o chybovosti predikcí jednotlivých přístupů na konci simulace v čase 200 se dozvíme



Obrázek 4.31: Histogramy rozložení počtu chybných predikcí na konci simulace délky $dur_sim = 200$ cyklů, ze všech $num_mc = 2500$ Monte Carlo opakování v experimentu s $|a|, |s| = 3$, kde pracuje model 1 s $w^1 = 0$, model 2 s $w^2 = 0, 2, \dots$ a model 6 s $w^6 = 1$, při užití *externího prediktoru* začínajícího v náhodně vygenerovaném tvaru jdoucího k téměř ideálnímu tvaru.

Predikce	Medián	Průměr	Směrodatná odchylka
Model 1	110	109,827	6,984
Model 2	109	109,385	6,988
Model 3	109	109,124	6,994
Model 4	109	109,026	7,076
Model 5	109	109,082	7,211
Model 6	109	109,276	7,437
Flexibilní	109	109,036	7,032

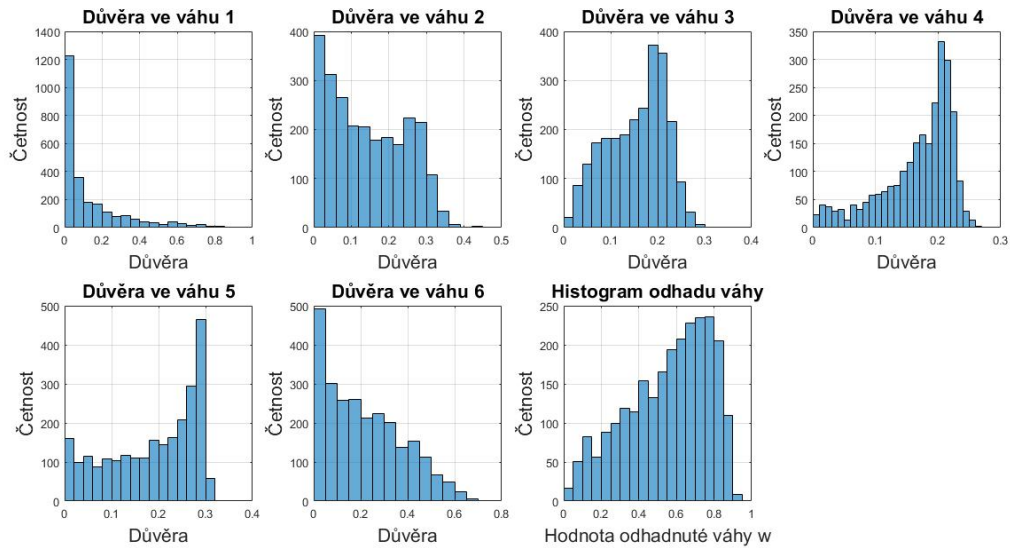
Tabulka 4.17: Hodnoty významných statistik počtů chybných predikcí na konci simulace délky $dur_sim = 200$ cyklů, ze všech $num_mc = 2500$ Monte Carlo opakování v experimentu s $|a|, |s| = 3$, kde pracuje model 1 s $w^1 = 0$, model 2 s $w^2 = 0, 2, \dots$ a model 6 s $w^6 = 1$, při užití *externího prediktoru* začínajícího v náhodně vygenerovaném tvaru jdoucího k téměř ideálnímu tvaru.

z obrázku 4.31 a tabulky 4.17. Na obrázku však není vidět téměř žádný rozdíl v chybovosti mezi jednotlivými predikcemi, musíme se tak spolehnout na výsledky, jež nám nabídnou vypočtené statistiky v tabulce 4.17.

Z těchto statistik vidíme, že nejhorší predikce měl v průměru model 1, nicméně jakákoliv jiná predikce nenabídl v průměru zlepšení o více jak 0,8 %. Porovnávání jednotlivých predikcí tedy v tomto případě nemá velký smysl.

V obrázku 4.32 zobrazíme histogramy rozložení důvěr v hodnoty *důvěryhodnostního parametru* na konci simulace a histogram odhadů *důvěryhodnostního parametru* na konci jednotlivých simulací.

Tento experiment nepřinesl mnoho uspokojivých výsledků. Nicméně nám tento experiment opět potvrdil, že užitím námi navrhované flexibilní predikce nedojde v průměru k velkému zhoršení predikování, což je jistě pozitivní.



Obrázek 4.32: Histogramy rozložení důvěr $p(w^j | \underline{d}(t), \mathbf{A}(t))$ v hodnoty *důvěryhodnostního parametru* w na konci simulace délky $\text{dur_sim} = 200$ cyklů, ze všech $\text{num_mc} = 2500$ Monte Carlo opakování v experimentu s $|\mathbf{a}|, |\mathbf{s}| = 3$, kde pracuje model 1 s $w^1 = 0$, model 2 s $w^2 = 0, 2, \dots$ a model 6 s $w^6 = 1$, při užití *externího prediktoru* začínajícího v náhodně vygenerovaném tvaru jdoucího k téměř ideálnímu tvaru.

4.4 Diskuze výsledků

Výsledky popsané v sekci 4.3 nám poskytly jistou představu o chování námi vypočítávaných důvěr $p(w^j | \underline{d}(t), \mathbf{A}(t))$ v hodnoty *důvěryhodnostního parametru* w v různých případech. Dále jsme získali představu o úrovni zefektivnění úspěšnosti predikcí, které lze užitím námi navrhované flexibilní predikce dosáhnout.

Námi navrhovaná metoda se zdá být neefektivnější v případech, kdy nevíme nic o užitečnosti užívaného *externího prediktoru*. V takovýchto případech většinou dopadla námi navrhovaná flexibilní predikce v průměru jako jedna z nejlepších, a většinou nebyla o mnoho horší než nejlepší navrhovaná predikce. Toto chování bylo zaznamenáno v experimentech číslo 1, 2, 3, 5, 6 a 7. V experimentu číslo 4, dokonce dopadla nejlépe z navrhovaných predikcí.

Zároveň jsme téměř ve všech experimentech viděli, že na počátku mnohdy docházelo k nárůstu mediánu důvěry v hodnoty *důvěryhodnostního parametru* větší než 0,6. Tento trend chápeme jako jakýsi „hlad“ po dalších informacích, který je vyvolán rychlejším učením modelu v počátečních fázích simulace.

Dalším úkazem, který bylo možné napříč experimenty pozorovat, byla pomalá reakce důvěr v hodnoty *důvěryhodnostního parametru* na vývoj *externího parametru*. Toto mohlo být zapříčiněno například malým rozměrem užívaných prostorů \mathbf{a} , \mathbf{s} , ale především předpokladem neproměnnosti w .

Nicméně žádná z námi navrhovaných flexibilních predikcí nedopadla v porovnání s ostatními přístupy vyloženě špatně a pokud sama neměla nejméně chybných predikcí, pak její chybovost byla blízká nejlepšímu přístupu v daném experimentu.

Závěr

V této bakalářské práci jsem studoval teorii týkající se bayesovského odhadování parametrů a jejím užitím v předpovídání. Další studovanou částí v této práci bylo odhadování hustoty pravděpodobnosti přechodu neznámého systému k následujícímu výstupu na základě napozorované historie. K těmto odhadům jsem využil Markovský parametrický model. Následně jsem se zabýval technikou, jež by nám umožnila využít k odhadování hustoty pravděpodobnosti přechodu systému, při užití Markovského parametrického modelu, externí informace ve formě *externího prediktoru*. Z toho důvodu jsem studoval tzv. *důvěryhodnostní parametr* a převzal jsem metodu umožňující využít *externí prediktor* k vylepšení odhadů modelu systému z [5], jako *externí prediktor* je možné brát jakýkoliv odhad modelu našeho systému, získaný jiným způsobem než náš odhad.

Následně jsem se zabýval přístupem, který by umožnil co nejefektivnější využití *externího prediktoru* pro provádění úspěšných predikcí výstupů neznámého systému. Za tímto účelem jsem převedl *důvěryhodnostní parametr* na diskrétní náhodnou veličinu. Pro každou možnou hodnotu *důvěryhodnostního parametru* jsem pak navrhol predikce výstupu neznámého systému. Na základě úspěšnosti predikcí jsem vytvořil metodu vypočítávající váhy kladené v jednotlivé hodnoty *důvěryhodnostního parametru*. Pomocí takto vypočtených vah mohu provést váženou kombinaci všech predikcí výstupu neznámého systému a vytvořit tak novou predikci výstupu neznámého systému.

Po navržení této metody jsem vytvořil její algoritmicke podobu. Následně jsem vytvořil program simulující fungování neznámého systému a *externího prediktoru*, do něhož jsem implementoval navrženou metodu. Program byl vytvořený v programovacím prostředí Matlab, byl vytvořený za účel otestování navržené metody a jejího porovnání vůči již používaným metodám.

Následně jsem provedl několik experimentů lišících se ve velikosti odhadovaného systému, dále ve tvaru a vývoji užívaného *externího prediktoru*, nakonec pak v délce simulace a počtu možných hodnot *důvěryhodnostního parametru*. To v čem se experimenty nelišily byla shodnost rozměrů neznámého odhadovaného systému s užívaným *externím prediktorem*. Hlavním cílem této práce však je navrhnout takovou metodu, která provede nejméně chybných predikcí výstupů neznámého systému, proto jsem při predikci vybíral výstup, který měl nejvyšší šanci na realizaci. Provedl jsem celkově 8 experimentů, abych prověřil úspěšnost mnou navrženou metodu v různých podmínkách.

První 4 experimenty pracovaly s totožným jednoduchým systémem majícím pouze 2 možné vstupy a výstupy. Experiment 1 operoval na nejkratším časovém úseku, pracoval pouze s 2 možnými hodnotami *důvěryhodnostního parametru* a užíval *externí prediktor* ideálního tvaru. Námi navrhované predikce pak dosahovala v průměru mírně horších výsledků než nejlepší přístup, avšak mnohem lepší než nejhorší přístup. Experiment 2 pracoval na stejném časovém úseku jako experiment 1, ale pracoval s 3 možnými hodnotami *důvěryhodnostního parametru* a využíval *externí prediktor* ze směsi ideálního a náhodně vygenerovaného *externího prediktoru*. V tomto experimentu dopadla úspěšnost predikce užitím navrhované metody podobně jako v experimentu 1, nebyla nejúspěšnější, nicméně byla druhá nejlepší těsným výsledkem. Experimenty 3 a 4 operovaly na dvojnásobném časovém úseku než předcházející experimenty a pracovaly se 3 možnými hodnotami *důvěryhodnostního parametru*. Experiment 3 využíval

externí prediktor začínající v ideálním tvaru, nicméně v průběhu experimentu jdoucím k náhodně vygenerovanému tvaru. I v tomto experimentu dopadla navrhovaná metoda predikce v průměru jako druhá nejlepší. Experiment 4 se od předchozího experimentu lišil pouze v tom, že využíval *externí prediktor* začínající v náhodně vygenerovaném tvaru jdoucím v průběhu experimentu k ideálnímu tvaru, jednalo se tak o simulaci učícího se *externího prediktoru*. V tomto experimentu měla navrhovaná metoda predikce v průměru nejnižší chybovost ze všech navrhovaných predikcí.

Experimenty 5 až 8 se významně lišily od předchozích experimentů, neboť operovaly na *systému* majícím 3 možné *vstupy* a *výstupy*, tento *systém* je tedy významným způsobem složitější než *systém* v experimentech 1 až 4. Další parametr, ve kterém se budou tyto experimenty 5 až 8 lišit od prvních 4 experimentů, je délka časového úseku, na kterém experimenty probíhaly. Tato délka bude čtyřnásobná oproti časovému úseku v experimentech 3 a 4. Experiment 5 se od ostatních prováděných experimentů odlišoval tím, že užívaný *externí prediktor* byl náhodně vygenerovaného tvaru, z toho důvodu se v tomto experimentu pracovalo pouze se 2 možnými hodnotami *důvěryhodnostního parametru*. V tomto experimentu dopadla navrhovaná metoda predikce v průměru těsným výsledkem jako druhá nejlepší. Experiment 6, stejně jako následující experimenty, pracoval s 6 možnými hodnotami *důvěryhodnostního parametru*. V tomto experimentu se stejně jako v experimentu 2 užívala *externí prediktor* v podobě směsi ideálního a náhodně vygenerovaného *externího prediktoru*. Výsledná navrhovaná metoda predikce dopadla v tomto experimentu v průměru jako třetí nejlepší ze všech navrhovaných predikcí, nicméně rozdíl oproti první a druhé nejlepší byl zanedbatelný. Experiment 7 užíval *externí prediktor* začínající v ideálním tvaru, který se v průběhu experimentu vyvíjel k náhodně vygenerovanému tvaru. Výsledná navrhovaná predikce byla shodně s experimentem 6, v průměru třetí nejlepší těsným rozdílem. Nakonec experiment 8 využíval *externí prediktor* vycházející v náhodně vygenerovaném tvaru vyvíjející se v průběhu experimentu k ideálnímu tvaru. V tomto experimentu měla navrhovaná metoda predikce v průměru druhou nejnižší výslednou chybovost ze všech navrhovaných predikcí, nicméně v tomto experimentu byly rozdíly mezi predikcemi ve výsledné chybovosti zanedbatelné.

Do budoucna by bylo možné řešit problematiku pomalé reakce důvěř v hodnoty *důvěryhodnostního parametru*, které při dynamičtějším vývoji tvaru *externího prediktoru* neodpovídají hodnotám, které by měl mít. Dalším vylepšením které by bylo možné navrhnout je přidání zapomínání informací obdržných ve vzdálenější minulosti, které by mohlo kompenzovat problémy, které vznikají časovou proměnností neznámého *systému*, který chceme predikovat. Tím by se též mohla zlepšit aplikovatelnost námi navržené metody na reálné problémy, neboť předpoklad časové neměnnosti je v mnoha případech silně limitující. Tímto posledním vylepšením bych se chtěl v budoucnu zabývat, případně prověřit jeho fungování v *systémech* komplexnějšího charakteru nebo v reálné aplikaci.

Přílohy

Tvar neznámého *systemu* se kterým pracujeme v sekci 4.3, přesněji v experimentu 1 až 4 je uveden v následující tabulce.

system(:, :, 1) =		system(:, :, 2) =	
0.5091	0.0728	0.7287	0.4128
0.4909	0.9272	0.2713	0.5872

Tabulka 4.18: Proměnná *system* v experimentech při volbě $\text{num_states} = 2$, $\text{num_actions} = 2$ a $\text{seed} = 2$, *system*(:, :, 1) obsahuje $p(s|a, \underline{s} = 1)$ a podobně *system*(:, :, 2) obsahuje $p(s|a, \underline{s} = 2)$, $\forall s, a \in \{1, 2\}$.

Tvar složitějšího neznámého *systemu* se kterým pracujeme v sekci 4.3, přesněji v experimentech 5 až 8 je uveden v následující tabulce.

system(:, :, 1) =			system(:, :, 2) =			system(:, :, 3) =		
0.4403	0.6141	0.2821	0.2757	0.5540	0.5183	0.0996	0.2049	0.0561
0.3524	0.0259	0.4430	0.3503	0.1728	0.3910	0.4685	0.0237	0.6096
0.2073	0.3600	0.2749	0.3740	0.2733	0.0907	0.4319	0.7714	0.3342

Tabulka 4.19: Proměnná *system* v experimentech při volbě $\text{num_states} = 3$, $\text{num_actions} = 3$ a $\text{seed} = 3$, *system*(:, :, 1) obsahuje $p(s|a, \underline{s} = 1)$, *system*(:, :, 2) obsahuje $p(s|a, \underline{s} = 2)$ a podobně *system*(:, :, 3) obsahuje $p(s|a, \underline{s} = 3)$, $\forall s, a \in \{1, 2, 3\}$.

Literatura

- [1] Rényi A. *Teorie pravděpodobnosti*. Academia, Praha, 1972.
- [2] Peterka V. *Bayesian System Identification*. in P. Eykhoff Trends and Progress in System Identification, Pergamon Press, Oxford, 239-304, 1981.
- [3] Berger J.O. *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*. Springer, N.Y., 1985.
- [4] Andrews G., Askey R., and Roy R. *The Gamma and Beta Functions*. In *Special Functions*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, Cambridge, 1-60, 1999.
- [5] Kracík J. and Kárný M. *Merging of data knowledge in Bayesian estimation*. In J. Filipe, J. A. Cetto and J. L. Ferrier (Eds.), Proceedings of the Second Int. Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics, INSTICC, Barcelona, 229-232, 2005.
- [6] Quinn A., Kárný M., and Guy T. V. *Optimal design of priors constrained by external predictors*. In *J. of Appr. Reason*, 84:150-158, 2017.