

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta strojní

Ústav technické matematiky
Aplikované vědy ve strojním inženýrství



**Numerická řešení modelů šíření
akustického signálu ve frekvenční a
časové oblasti**

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Vypracovala: Bc. Helena Picmausová
Vedoucí práce: doc. RNDr. Petr Sváček, Ph.D.

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Picmausová** Jméno: **Helena** Osobní číslo: **408960**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávající katedra/ústav: **Ústav technické matematiky**
Studijní program: **Aplikované vědy ve strojním inženýrství**
Specializace: **Matematické modelování v technice**

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

Numerická řešení modelů šíření akustického signálu ve frekvenční a časové oblasti

Název diplomové práce anglicky:

Numerical solution of acoustic models in frequency and time domain

Pokyny pro vypracování:

1. Matematické modely proudění stlačitelné tekutiny a matematické modely šíření akustického signálu.
2. Matematické formulace úloh popisující šíření zvukových vln ve frekvenční oblasti. Numerická diskretizace v prostoru pomocí metody konečných prvků. Matematická formulace úlohy vlastních akustických frekvencí.
3. Numerické řešení pomocí aproximace vlastních čísel operátoru nebo pomocí Helmholtzovy rovnice, matematický princip tohoto řešení.
4. Matematické formulace úloh popisující šíření zvukových vln v časové oblasti. Okrajové podmínky.
5. Numerická diskretizace pomocí metody konečných prvků v prostoru, volba časové diskretizace. Analýza časového signálu v bodě, souvislost s akustickými frekvencemi.
6. Realizace numerické metody ve vlastním programu, numerické experimenty.

Seznam doporučené literatury:

Feistauer, M. (1993) *Mathematical Methods in Fluid Dynamics*. Longman Scientific & Technical, New York.
M. Brdička, L. Samek, B. Sopko, *Mechanika kontinua*, Academia, Praha, 2005
P. Sváček, M. Feistauer, *Metoda konečných prvků*, Vydavatelství ČVUT, 2007
M. Kaltenbacher, *Computational Acoustics*, Springer 2018

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

doc. RNDr. Petr Sváček, Ph.D., ústav technické matematiky FS

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

Datum zadání diplomové práce: **21.10.2021**

Termín odevzdání diplomové práce: **16.01.2022**

Platnost zadání diplomové práce: _____

doc. RNDr. Petr Sváček, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce

prof. Ing. Jiří Fůrst, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomantka bere na vědomí, že je povinna vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

Datum převzetí zadání

Podpis studentky

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracovala samostatně a použila jsem pouze podklady (literaturu, projekty atd.) uvedené v příloženém seznamu a v práci uvedený SW. Práce nebyla použita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne

.....
Bc. Helena Picmausová

Poděkování

Děkuji svému vedoucímu, doc. RNDr. Petru Sváčkovi, Ph.D., za konzultace, podnětné připomínky, rady a čas, který mi věnoval v průběhu vzniku této práce. Také bych ráda poděkovala své rodině, přátelům a kolegům za zázemí a podporu během studia.

Bc. Helena Picmausová

Název práce:

Numerická řešení modelů šíření akustického signálu ve frekvenční a časové oblasti

Autor: Bc. Helena Picmausová

Studijní program: Aplikované vědy ve strojním inženýrství

Specializace: Matematické modelování v technice

Druh práce: Diplomová práce

Vedoucí práce: doc. RNDr. Petr Sváček, Ph.D.

Ústav technické matematiky, Fakulta strojní, České vysoké učení technické v Praze

Konzultant: –

Klíčová slova: MKP, akustika, vlnová rovnice, numerické řešení

Title:

Numerical solution of acoustic models in frequency and time domain

Author: Bc. Helena Picmausová

Key words: FEM, acoustics, wave equation, numerical solution

Anotace: Práce se zabývá způsoby použití numerických metod pro řešení rovnic popisujících šíření akustického signálu v prostoru a čase. Je popsána a následně realizována MKP diskretizace Helmholtzovy a vlnové rovnice ve frekvenční, resp. časové doméně a je formulována úloha vlastních akustických frekvencí. Je popsána numerická diskretizace úloh a je zkoumán vliv okrajových podmínek na řešení. Výsledky jsou srovnány se známými analytickými hodnotami, jsou diskutovány výhody různých numerických schémat a je provedena analýza a diskuze výsledků.

Abstract: This thesis presents the use of numerical methods in solving equations describing the propagation of an acoustic signal in space and time. FEM discretization of the Helmholtz and wave equations in frequency and time domain is presented and the problem of natural acoustic frequencies is formulated. Numerical discretization of problems is described and the influence of boundary conditions on the solution is investigated. The results are compared with known analytical values, the advantages of different numerical schemes are discussed and the results are analyzed and discussed.

Obsah

1	Úvod	10
2	Matematický popis akustických problémů	11
2.1	Rovnice popisující proudění stlačitelné tekutiny	11
2.2	Akustické jevy popsané vlnovou rovnicí	12
2.3	Helmholtzova rovnice a popis jevů ve frekvenční oblasti	14
2.4	Okrajové podmínky	15
3	Numerická aproximace Poissonovy rovnice pomocí MKP	17
3.1	Slabá formulace	17
3.2	Předpoklady použití MKP	20
3.3	Volba prostoru konečných prvků a volba báze	20
3.4	Sestavení matice tuhosti a vektoru pravé strany	21
3.5	Vybrané části praktické realizace metody	23
3.5.1	Referenční zobrazení	23
3.5.2	Triangulace oblasti	24
3.6	Numerické výsledky	24
4	Numerická aproximace akustických problémů ve frekvenční oblasti	26
4.1	MKP diskretizace Helmholtzovy rovnice	26
4.1.1	Slabá formulace	26
4.1.2	MKP diskretizace a maticový zápis úlohy	27
4.2	Vlastní čísla Laplaceova operátoru, slabá formulace	27
4.3	Numerické výsledky	28
4.3.1	Modální analýza na jednoduché oblasti obdélníku	28
4.3.2	Modální analýza na oblasti lidského vokálního traktu	29
4.3.3	Řešení Helmholtzovy rovnice s externím zdrojem	32
5	Numerická aproximace akustických problémů v časové oblasti	35
5.1	Diskretizace vlnové rovnice v 1D pomocí MKD	36
5.2	Diskretizace vlnové rovnice ve 2D pomocí MKD	37
5.3	MKP řešení vlnové rovnice na 2D oblasti	38

5.4	Numerické výsledky	38
5.4.1	Řešení vlnové rovnice na 1D oblasti	38
5.4.2	Řešení vlnové rovnice na 2D oblasti	41
5.4.3	Řešení vlnové rovnice na jednoduché oblasti s užitím Dirichletovy okrajové podmínky	43
5.4.4	Řešení vlnové rovnice na jednoduché oblasti s užitím Sommerfeldovy okrajové podmínky	44
5.4.5	Řešení vlnové rovnice MKP diskretizací na oblasti popsané nestrukturovanou sítí	47
6	Závěr	48

Seznam použitých symbolů, zkratek a softwaru

Zkratky

MKP	metoda konečných prvků
MKO	metoda konečných objemů
MKD	metoda konečných diferencí
OP	okrajové podmínky
PP	počáteční podmínky
ODR	obyčejná diferenciální rovnice
PDR	parciální diferenciální rovnice
CFL	Courant - Fridrichs - Lewy parametr
PML	Perfectly Matched Layer

Metoda konečných prvků

u	přesné řešení PDR
u_h	řešení diskrétní Galerkinovy úlohy
v	testovací funkce
v_h	testovací funkce diskrétní úlohy
V	Hilbertův prostor funkcí
V_h	prostor bázových funkcí
Ω	výpočtová oblast
$\bar{\Omega}$	uzávěr výpočtové oblasti
$\Gamma = \partial\Omega$	hranice výpočtové oblasti
φ_i	bázové vektory MKP (pro uzel sítě i)
α_i	reálné koeficienty MKP (pro uzel sítě i)
τ_h	triangulace oblasti
x_i	souřadnice vrcholů triangulace
K	prvek (trojúhelník) triangulace
\hat{K}	referenční trojúhelník
N_h	počet uzlů sítě
w_i	váhy numerické kvadratury
Γ	hranice výpočetní oblasti
Γ_N	hranice oblasti s Neumannovou OP
Γ_D	hranice oblasti s Dirichletovou OP
\mathbb{K}	matice tuhosti
\mathbb{M}	hmotnostní matice
\mathbb{C}	matice tlumení
\mathbf{b}	vektor pravé strany

Mechanika kontinua a akustika

p	okamžitý tlak
ρ	okamžitá hustota
v	okamžitá rychlost
c	rychlost zvuku
f	frekvence
T	perioda
ω	úhlová frekvence
λ	vlnová délka
k	vlastní číslo
v_0	střední (klidová) hodnota rychlosti
p_0	střední (klidová) hodnota tlaku
ρ_0	střední (klidová) hodnota hustoty
v'	perturbace rychlosti
p'	perturbace tlaku
ρ'	perturbace hustoty
ψ	rychlostní potenciál

Software

Gmsh	open-source			
gnuplot	open-source			
ParaView	open-source			
Inkscape	open-source			
MATLAB	MathWorks	(ČVUT licence	dostupná	z
		https://download.cvut.cz/)		

1 Úvod

Studium zvukových vln překlenuje širokou škálu úloh napříč řadou oborů. Je stěžejní pro hudební odvětví, architekturu, letectví a medicínu, je třeba k popisu oscilací mechanických a elektrických systémů, vibrací elastických těles, atmosférických a hydrodynamických jevů, setkáváme se s ním v biologii, opto-akustických přístrojích a při nedestruktivním testování.

Tato práce se zabývá způsoby využití MKP k řešení rovnic popisujících šíření akustického signálu. Jejím cílem je představit základní principy MKP, nabídnout přehled nejčastějších fyzikálních jevů doprovázejících tvorbu a modulaci zvukových vln, popsat tyto jevy vhodným matematickým zápisem a následně vytvořit a realizovat numerická schémata pro řešení získaných rovnic. V rámci práce je ověřena přesnost numerických výsledků a je pozorován vliv různých okrajových podmínek na řešení jednotlivých úloh.

Nezanedbatelnou součástí výpočtů je i rezonanční analýza a hledání vlastních módů a frekvencí. K rezonanci dochází v elektrických obvodech, oscilujících mechanických systémech, optice a v hudbě - ozvučná těla hudebních nástrojů jsou inherentně tvarována tak aby zesilovala 'krásné' tóny. Na obdobném principu spočívá i funkce lidského vokálního traktu. Při výdechu proudí hlasovým ústrojím vzduch přes hlasivky. Ty vydávají jediný tón a přesná hláska je artikulována nastavením měkkých tkání, pomocí rezonance jsou tak zvýrazněny požadované tóny.

V praxi se setkáváme také s množstvím případů, kdy se rezonanci snažíme naopak předejít a kdy její vznik ohrožuje lidské životy. Například ve stavebnictví je rezonanční analýza nepostradatelná pro bezpečnost výškových budov, chladících věží elektráren a mostů. Výpočty vlastních módů a frekvencí je nutné provádět také v kosmických aplikacích a v letectví, kde je třeba předcházet tzv. flutteru.

Práce je rozčleněna celkem do šesti kapitol: po úvodu jsou ve druhé kapitole představeny základní fyzikální principy akustiky a rovnice řídící zákonitosti stlačitelného proudění. Ve třetí kapitole je pro názornou demonstraci MKP řešena modelová úloha - Poissonova rovnice, na jednoduché 2D oblasti.

Následně se ve čtvrté kapitole zabýváme problematikou rezonance na 2D oblasti, a to dvěma různými přístupy k řešení Helmholtzovy rovnice. Prvním z nich je výpočet vlastních čísel Laplaceova operátoru - takto je realizována modální analýza a jsou stanoveny rezonanční frekvence zkoumaných oblastí. Druhým přístupem je výpočet přenosové funkce ve zvoleném bodě oblasti s implementovaným zdrojem externího buzení.

Pátá kapitola je věnována vlnové rovnici, pro kterou je v numerickém schématu třeba zavést vhodnou diskretizaci nejen ve frekvenční, ale i v časové doméně. Vlnovou rovnici řešíme nejdříve pomocí metody sítí na 1D oblasti, následně na jednoduché 2D oblasti s pravidelnou sítí. Poté je pro řešení použito i MKP schéma a oblast s nestrukturovanou sítí.

Numerické výsledky jsou uvedeny na konci každé z příslušných kapitol a v poslední kapitole je prezentováno celkové zhodnocení výsledků a závěr.

2 Matematický popis akustických problémů

Základní principy řídící dynamiku tekutin jsou zákon zachování hmotnosti, zákon zachování hybnosti a zákon zachování energie. Jde o tzv. 'bilanční rovnice', které nám pomáhají bilancovat zkoumané zachovávané veličiny v určitém kontrolním objemu, který je ohraničen kontrolní plochou. Tento objem nemusí mít nutně žádný fyzikální význam, můžeme se pohybovat např. v otevřeném systému.

Ovšem předpokládáme, že platí Gaussova věta, která uvádí, že časová změna bilancované veličiny v objemu je rovná toku této veličiny plochou, která daný objem ohraničuje a produkci uvnitř objemu, viz [13].

V mechanice kontinua jsou bilančních rovnice popsány pomocí PDR, dále tedy uvádíme pouze diferenciální zápis těchto zákonů dle [3]. Je zde také dobré poznamenat, že soustava bilančních rovnic není sama o sobě úplná a že je třeba ji doplnit o tzv. konstituční vztahy, jako je např. stavová rovnice plynu, vztah pro tenzor vazkých napětí atd, viz [15].

2.1 Rovnice popisující proudění stlačitelné tekutiny

Rovnice kontinuity: Zákon zachování hmotnosti, neboli rovnici kontinuity lze vyjádřit v diferenciálním tvaru dle [1]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (1)$$

Rovnice (1) platí pro nestacionární, stlačitelné proudění. Pro stacionární, nestlačitelný případ ($\rho = konst.$) by se vztah zjednodušil na:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (2)$$

Zákon zachování hybnosti: Jde o formu Newtonova zákona. Časová změna hybnosti tekutiny v kontrolním objemu setrvává v dynamické rovnováze se silami f_i , které na objem působí. To mohou být síly povrchové i objemové.

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}((\rho v_i)v_j) - \frac{\partial}{\partial x_i}(\sigma_{ij}) = \rho f_i, \text{ kde } i, j = (1, 2, 3). \quad (3)$$

Tenzor napětí σ_{ij} v Newtonovské tekutině je definován:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}, \quad (4)$$

kde δ_{ij} je jednotkový tenzor (Kroneckerovo delta) a τ_{ij} je tenzor vazkých napětí - zanedbávaný pro nevazké tekutiny [3].

Po dosazení z rovnice kontinuity a úpravách lze napsat Navier-Stokesovu rovnici ve tvaru:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i. \quad (5)$$

Pro nevazkou tekutinu využijeme spíše jejího zjednodušení, rovnicí Eulerovu:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i. \quad (6)$$

Často se setkáváme i se zápisem pomocí materiálové derivace:

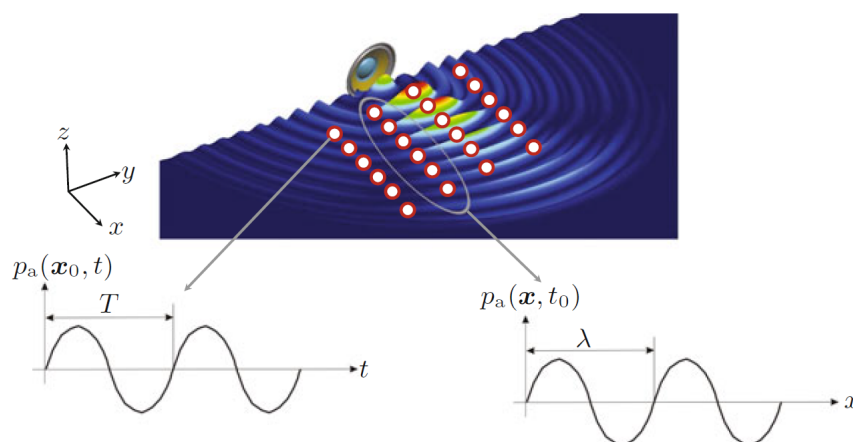
$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} + f_i. \quad (7)$$

Pozn.: Materiálovou derivaci skalárního pole φ definujeme jako : $\frac{D\varphi}{Dt} \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\varphi$.

Bilancovat můžeme v rámci mechaniky kontinua množství dalších veličin, ve spojení s problematikou proudění se také často uvádí např. zákon zachování energie. V této práci je vynechán, jelikož řešíme specifické úlohy týkající se akustiky, které považujeme za nezávislé na teplotě.

2.2 Akustické jevy popsané vlnovou rovnicí

Dále se budeme zabývat akustickým vlněním: malými kmity stlačitelné tekutiny, v našem případě vzduchu. Akustické signály se v prostředí šíří v podobě podélných vln a jsou popsány zvláštním tvarem vlnové rovnice pro tzv. perturbační tlak, viz [3].



Obrázek 1: Zvukové vlny generované reproduktorem, kde p_a je akustický tlak snímaný mikrofony v časové a prostorové doméně, převzato z [2].

Pokud uvažujeme jeden zdroj zvuku, např. reproduktor jako M. Kaltenbacher v [1] a [2], generující zvuk o dané frekvenci f a do polohy x_0 umístíme mikrofón, naměříme zvukový signál s periodou $T = \frac{1}{f}$. Dále můžeme reproduktor snímači obklopit a snímat hodnotu tlaku v daný časový okamžik t_0 . Pokud vyneseme hodnoty tlaku v závislosti na souřadnici jednotlivých snímačů, opět získáme periodický signál,

tentokrát v prostoru místo v čase, viz Obr. (1). Tato prostorová perioda je vyjádřena pomocí vlnové délky λ , pro kterou platí $\lambda = \frac{c}{f}$, kde c je rychlost zvuku a f frekvence.

Zvukové vlny se prostředím šíří dle fyzikálních zákonitostí daných třemi základními předpoklady: zkoumané medium (plyn) je v pohybu a dochází v něm ke změnám hustoty, změnám hustoty náleží odpovídající změny tlaku a vzniklý tlakový spád (nerovnoměrné rozložení tlakového pole) způsobuje další pohyb proudícího media [8].

K matematickému popisu tohoto fyzikálního procesu je třeba zavést několik proměnných veličin. Kromě výše zmíněného tlaku a hustoty je také stěžejní posunutí vzduchu, či přímo čela zvukové vlny (kterou lze považovat za rovinnou v pouze pokud se pozorovatel nachází dostatečně daleko od zdroje) a s tímto posunem spojená rychlost jednotlivých částic vzduchu a jejich zrychlení [3].

Tlak v kontinuu je funkcí hustoty a v klidovém stavu (před průchodem zvukové vlny) jsou obě tyto veličiny dané jejich rovnovážnými hodnotami p_0 a ρ_0 . Šíření zvukové vlny lze tedy popsat pomocí časových a prostorových změn v hodnotách tlaku a hustoty. Okamžité hodnoty hustoty a tlaku ρ a p lze vyjádřit jako:

$$\rho = \rho_0 + \rho'(x_j, t), \quad (8)$$

$$p = p_0 + p'(x_j, t), \quad (9)$$

kde ρ_0 a p_0 jsou hodnoty rovnovážné a perturbace ρ' a p' změny vyvolané zvukovou vlnou. V publikacích zabývajících se akustikou se lze také setkat s označením změn veličin jako ρ_a , resp. p_a , tj. akustická hustota a akustický tlak. Pro naše modely zvuku předpokládáme vzhledem k rovnovážným hodnotám změny velmi malé:

$$\rho' \ll \rho_0, \quad p' \ll p_0. \quad (10)$$

Převezmeme tvar vlnové rovnice z [3]:

$$\Delta u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (11)$$

tj.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0. \quad (12)$$

Pro rychlost zvuku c platí:

$$c^2 = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0. \quad (13)$$

Po úpravách dle [3] lze vlnovou rovnici získat ve tvaru pro perturbaci tlaku. Pro tuto práci jde o nejdůležitější tvar vlnové rovnice, někdy také označovaný jako rovnice akustická:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = 0. \quad (14)$$

Lze ukázat, že obdobu vlnové rovnice lze vyjádřit i pro složky rychlostního pole v_i či potenciál φ (platí $v_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$).

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \varphi = 0. \quad (15)$$

Rovnice (15) je vlnová rovnice pro φ . Obdobně máme i vlnovou rovnici pro v_i :

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i^2} = 0. \quad (16)$$

Šíření akustické vlny v prostředí lze zcela popsat rovnicí kontinuity, zákonem zachování hybnosti a vzájemným vztahem pro akustický tlak a hustotu získaným z definice rychlosti zvuku. Akustická rovnice (14) vede na modelovou rovnici pro následující MKP výpočty:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f \text{ v } \Omega \times (0, T), \quad (17)$$

kde hledaná skalární veličina u reprezentuje akustický (perturbační) tlak p' . Hledáme tedy řešení jako hladkou reálnou funkci na uzavřené oblasti Ω a časovém intervalu $[0, T]$ se zdroji f . Dalším krokem by bylo rovnici doplnit okrajovými a počátečními podmínkami. Tuto rovnici by také bylo možné řešit metodou separace proměnných, nebo pomocí principu superpozice, kdy můžeme zapsat řešení ve tvaru nekonečné Fourierovy řady [11].

2.3 Helmholtzova rovnice a popis jevů ve frekvenční oblasti

V předchozí sekci (2.2) byl již představen klasický tvar vlnové rovnice pro perturbaci tlaku jako vztah (14). Pro přehlednost jej zde přepíšeme ve tvaru:

$$\Delta p' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0. \quad (18)$$

Helmholtzova rovnice reprezentuje časově - nezávislou formu vlnové rovnice (18) a lze ji odvodit se dvěma základními předpoklady. Nejprve předpokládáme, že řešení vlnění je časově harmonické, tj., že má konstantní frekvenci ω a za druhé, že akustické skalární pole lze separovat (jako při Fourierově separaci proměnných pro lineární akustickou rovnici) [9]:

$$p'(x, t) = \operatorname{Re}(p(x)e^{-i\omega t}). \quad (19)$$

Řešení (19) dvakrát časově zderivujeme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p'}{\partial t} &= -i\omega p(x)e^{-i\omega t}, \\ \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} &= (-i\omega)^2 p(x)e^{-i\omega t} = -\omega^2 p(x)e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (20)$$

Budeme chtít dosadit tuto časovou derivaci do vlnové rovnice, proto ještě aplikujeme Laplaceův operátor na rovnici (19):

$$\Delta p' = \Delta p(x)e^{-i\omega t}. \quad (21)$$

Nyní můžeme dosadit za druhou derivaci (20) a vztah (21) do rovnice vlnové (18) a máme:

$$c^2 \Delta p(x) e^{-i\omega t} + \omega^2 p(x) e^{-i\omega t} = 0. \quad (22)$$

Jelikož má být rovnice splněna pro $\forall t$, můžeme ji vydělit exponenciálou $e^{i\omega t}$, zároveň platí, že $i^2 = -1$. Rychlost zvuku c je kladná konstanta, kterou můžeme také podělit:

$$\Delta p + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0 \quad (23)$$

a protože platí $k = \frac{\omega}{c}$:

$$\Delta p + k^2 p = 0. \quad (24)$$

Rovnice (24) je Helmholtzova rovnice, kde $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ je vlnové číslo, tj. počet vln vlnové délky λ , které se 'vejdou' na interval 2π .

2.4 Okrajové podmínky

Jelikož okrajové podmínky mají zásadní vliv na řešení všech zde zkoumaných úloh, představíme zde jejich přehled, s návazností na fyzikální význam.

Dirichletova okrajová podmínka: V matematické analýze nazýváme Dirichletovu okrajovou podmínku také jako podmínku prvního druhu. Při zahrnutí do ODR nebo PDR přímo udává hodnoty, které musí řešení u nabývat na hranici výpočetní oblasti $\partial\Omega$. Zapisujeme např.:

$$u(\mathbf{x}, \omega) = u_D(\mathbf{x}, \omega) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (25)$$

kde u_D je daná skalární funkce [11].

V případě akustiky udává u_D přímo hodnotu ambientního tlaku p na konci zvukové trubice nebo zkoumané oblasti. Z fyzikálního pohledu jde o situaci, kdy tlaková vlna doputuje k otevřené hranici a její hodnota rychle spadne na předepsanou ambientní hodnotu (v rámci této práce je u_D dokonce rovna 0). Díky tomu za vlnou vznikne podtlak. Tato záporná tlaková vlna se 'odráží' zpět do zvukovodu se stejnou rychlostí a amplitudou, ale s opačnou fází, než měla původní vlna [7].

Jde tedy o tzv. plně odrazivou podmínku (angl. Sound Soft boundary condition), kterou je možné předepsat např. na otevřeném konci vlnovodu. Také jde o speciální případ impedanční podmínky, u které je impedance $Z = \frac{p}{c}$ nulová (jelikož je zde nulový tlak) [19].

Neumannova okrajová podmínka: Neumannova okrajová podmínka, neboli podmínka druhého druhu, nabývá tvaru:

$$\frac{\partial u(\mathbf{x}, \omega)}{\partial \mathbf{n}} = \phi_N \quad \forall x \in \partial\Omega, \quad (26)$$

kde \mathbf{n} je vektor vnější normály v daném bodě hranice oblasti $\partial\Omega$. Hodnotu na pravé straně OP označujeme ϕ_N , raději než analogicky k předešlému případu (u_N), jelikož

se z matematické i fyzikální podstaty jedná o potenciál, spíše než přímo o danou hodnotu řešení u .

V tomto případě lze modelovou situaci popsat jako uzavřený konec vlnovodu nebo akusticky odrazivou stěnu (angl. Hard Sound boundary). Jelikož se vlna nemá kam dál šířit, dochází na stěně k nárůstu tlaku - v modelovém případě (bez ztrát a tlumení) až do dvojnásobku původní hodnoty. Odraz se šíří zpět do prostředí se shodnou rychlostí, amplitudou i fází jako původní vlna. Jde o speciální případ impedanční OP, kde se rychlost šíření vlny $v = c$ se na stěně blíží nule a impedance $Z = \frac{p}{v}$ nekonečnu [19]. Ve výpočetních prostředích jako je MATLAB nebo Wolfram je Neumannova OP implicitně zavedena na všech hranicích výpočetní oblasti, kde není specifikována jiná OP [19], [21].

Sommerfeldova bezodrazová podmínka: Výpočetní oblast je v rámci numerického modelu logicky vždy omezená. Pohlcující, nebo bezodrazové OP představují způsob jak modelovat pole, které se šíří do nekonečna tak, že zajistí pohlcení přichází vlny a zamezení zpětnému odrazu od hranic výpočetní oblasti, který je typický pro obě předchozí OP, a který s polem interferuje. Absorbující OP je tedy vlastně simulovaným pokračováním výpočetní domény a dalším případem impedanční OP, jejíž impedance se rovná akustické impedanci výpočetní domény, viz [2], [19]. Alternativou absorbujících OP je aplikace PML vrstvy - ta ovšem vyžaduje řešení další sestavy diferenciálních rovnic a v této práci se jí dále nezabýváme.

A. Sommerfeld matematicky formuloval bezodrazovou podmínku pro proudové pole pro homogenní vlnovou rovnici a pro numerické účely ji zapisujeme ve tvaru [4], [17]:

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (27)$$

kde $\mu \in (0; 1 >$ je koeficient závislý na vlnovém čísle a c je rychlost zvuku. Alternativně lze podmínku formulovat tak, že požadujeme, aby řešení úlohy u bylo nulové v nekonečnu [18]:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{\partial \Omega} \left| \frac{\partial u(\mathbf{x}, \omega)}{\partial \mathbf{n}} - iku(\mathbf{x}, \omega) \right|^2 dS = 0. \quad (28)$$

Jak je patrné v sekci Numerických výsledků, podmínku (28) lze bez omezení předepsat na krajích 1D oblasti. Ve 2D případech ovšem musíme brát v potaz fakt, že podmínka pohlcuje pouze část vlnění ve směru vnější normály výpočetní oblasti. Na OP tohoto typu tedy můžeme pohlížet jako na tím kvalitnější, čím je menší zpětný odraz z přichozích vln [19].

Pozn.: Okrajové podmínky jsou uvedeny ve tvaru využívaném ve výpočtech ve frekvenční doméně. V doméně časové se liší implementací pouze bezodrazová OP [5].

3 Numerická aproximace Poissonovy rovnice pomocí MKP

Pro názornější představu o požití metody byl nejprve v rámci přípravných projektů řešen modelový problém: stacionární Poissonova okrajová úloha. Poissonova úloha (zobecnění Laplaceovy rovnice - ta je specifická nulovou pravou stranou) je jednou ze základních modelových PDR s širokým využitím v různých odvětvích teoretické fyziky. Jde o eliptickou PDR a jejím řešením lze získat např. rozložení potenciálového pole v elektromagnetismu nebo v dynamice tekutin [11]. V této práci slouží jako základní úloha pro pochopení základních principů MKP a ověření funkčnosti a přesnosti její realizace.

Řešíme parciální diferenciální rovnici:

$$-\Delta u = f(x, y) \quad \text{pro } \forall (x, y) \in \Omega \quad (29)$$

s Dirichletovou a Neumannovou okrajovou podmínkou:

$$\begin{aligned} u &= u_D = 0 \quad \text{pro } \forall (x, y) \in \Gamma_D, \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial \mathbf{n}} &= \phi_N = 0 \quad \text{pro } \forall (x, y) \in \Gamma_N, \end{aligned} \quad (30)$$

kde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je omezená oblast s Lipschitzovsky spojitou hranicí $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ a f je daná funkce $f = f(x, y)$. Hledáme tedy funkci u , která řeší rovnici (29) na oblasti Ω a která zároveň splňuje okrajové podmínky (30).

3.1 Slabá formulace

Pro další postup je třeba úlohu přeformulovat ve slabém smyslu. Volíme testovací funkci $v \in V = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0\}$ na $\partial\Omega$, kterou přenásobíme rovnici (29) a zintegrujeme přes oblast Ω :

$$\int_{\Omega} (-\Delta u)v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega, \quad (31)$$

Na levou stranu rovnice použijeme obdobu integrace per-partes pro vícerozměrný případ, tj. první Greenovu větu, viz [10], tedy:

$$-\int_{\Omega} v \Delta u \, d\Omega = -\int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, dS + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega, \quad (32)$$

kde \mathbf{n} je jednotkový vektor vnější normály $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ k hranici oblasti $\partial\Omega$. Pro člen $\int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, dS$ platí:

$$\int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, dS = \int_{\Gamma_D} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, dS + \int_{\Gamma_N} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, dS. \quad (33)$$

Na části hranice s Dirichletovou OP Γ_D je testovací funkce v nulová, což eliminuje první ze sčítanců. Dosadíme do (32) a následně do (31):

$$-\int_{\Gamma_N} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, dS + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega, \quad (34)$$

Z definice Neumannovy OP je na Γ_N $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \phi_N$. Dostáváme výslednou rovnici:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} v \phi_N \, dS. \quad (35)$$

Pro náš případ, kdy $\phi_N = 0$ se rovnice ještě více zjednoduší. Nyní definujeme pro libovolná $u, v \in V$ formy

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega,$$

$$L(v) = \int_{\Omega} f v \, dx,$$

kde $a(u, v) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ je symetrická bilineární forma a $L(v) : V \rightarrow \mathbb{R}$ lineární forma. Slabá formulace úlohy (29), s OP (30) pak je, že hledáme řešení $u \in V$ tak aby platilo:

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V. \quad (36)$$

Abychom mohli tento postup použít, musíme zaručit jednoznačnou řešitelnost úlohy (36). Ta je splněna z Lax-Milgramovy věty, viz [4].

Nechť V je Hilbertův prostor. Chceme najít takové $u \in V$, pro které platí rovnice (36) pro $\forall v \in V$. Dle Lax-Milgramovy věty předpokládáme, že existuje právě jedno řešení okrajové úlohy [4]. Abychom mohli použít MKP numerické schéma, je třeba slabou formulaci (35) nejprve zdiskretizovat.

V prostoru V volíme podprostor V_h konečné dimenze a jeho libovolný prvek označíme $v_h \in V_h$. Potom funkci $u_h \in V_h$, pro kterou platí:

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_h \quad (37)$$

označíme jako přibližné Galerkinovo řešení úlohy (36).

Máme-li konečně-rozměrný podprostor $V_h \subset V$ s bází $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ ($\dim V_h = N$), potom funkce u_h získáme jako lineární kombinaci N bázových funkcí φ prostoru V_h [4]:

$$u_h = \sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_j. \quad (38)$$

Aproximace dosadíme do (35) a prepíšeme:

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, d\Omega = \int_{\Omega} f v_h \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} v_h \phi_N \, dS. \quad (39)$$

Jelikož v_h jsou funkce, které lze zapsat jako lineární kombinaci bázových funkcí, můžeme za něj postupně volit přímo bázové funkce φ :

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla \varphi_i \, d\Omega = \int_{\Omega} f \varphi_i \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \varphi_i \phi_N \, dS. \quad (40)$$

Do rovnice (40) dosadíme z (38) a máme:

$$\sum_{i=j}^N \alpha_j \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \, d\Omega = \int_{\Omega} f \varphi_i \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \varphi_i \phi_N \, dS. \quad (41)$$

Neznámé koeficienty α_j získáme řešením soustavy lineárních rovnic:

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j a(\varphi_i, \varphi_j) = L(\varphi_i), \quad (42)$$

nebo v maticovém zápisu:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a(\varphi_1, \varphi_1) & a(\varphi_2, \varphi_1) & \cdots & a(\varphi_N, \varphi_1) \\ a(\varphi_1, \varphi_2) & a(\varphi_2, \varphi_2) & \cdots & a(\varphi_N, \varphi_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a(\varphi_1, \varphi_N) & a(\varphi_2, \varphi_N) & \cdots & a(\varphi_N, \varphi_N) \end{pmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\alpha}} = \underbrace{\begin{pmatrix} L(\varphi_1) \\ L(\varphi_2) \\ \vdots \\ L(\varphi_N) \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}. \quad (43)$$

Matice \mathbf{K} je tzv. matice tuhosti, symetrická, pozitivně-definitní matice s prvky:

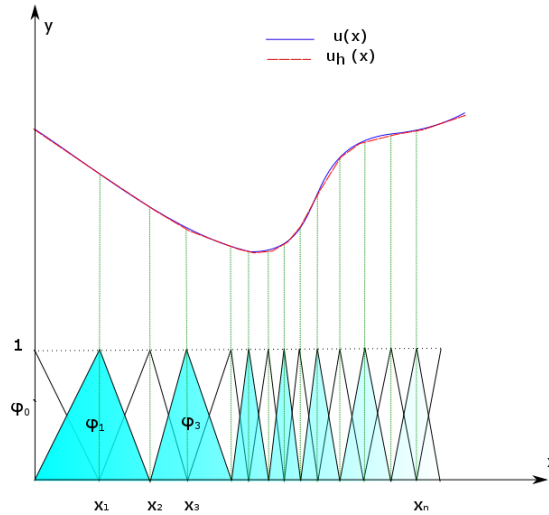
$$a_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j dx. \quad (44)$$

To, že matice tuhosti \mathbf{K} je symetrická, je důsledek symetrie bilineární formy \mathbf{a} :

$$a_{ij} = \mathbf{a}(\varphi_i, \varphi_j) = \mathbf{a}(\varphi_j, \varphi_i) = a_{ji}. \quad (45)$$

Matici \mathbf{K} označíme jako pozitivně definitní, jestliže pro nenulový vektor $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ platí $\mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} > 0$.

Na Obr.(2) je ilustrováno takovéto numerické řešení 1D problému - fyzikálně se může jednat např. o ohyb pružného nosníku nebo šíření tepla tyčí ohřívanou na jednom konci. Bázové funkce φ_i nabývají hodnoty 1 pouze ve svých příslušných uzlech x_i a ve všech ostatních uzlech jsou nulové. MKP umožňuje značnou flexibilitu ve volbě diskretizace, jak v druhu prvků, které tvoří síť na zkoumané oblasti, tak ve volbě bázových funkcí. Prvky nemusí být rozmístěny uniformě, jejich síť lze do různé míry zjemnit například v zajímavých oblastech, nebo jak je patrné z Obr. (2) tam, kde je velký gradient u .



Obrázek 2: Ilustrace aproximace řešení u (modrá čára) pomocí po částech lineární funkce u_h (čárkovaná červená čára), jako lineární kombinace bazových funkcí φ_i (černá) se zjemněním v oblasti většího gradientu u , (vytvořeno v prostředí Inkscape).

3.2 Předpoklady použití MKP

Abychom mohli úspěšně vytvořit jakýkoliv MKP model, je třeba brát v potaz nutné podmínky a principy metody jako je přípustná triangulace sítě, vhodná volba bazových funkcí a správný převod z referenčního zobrazení. Teprve poté můžeme pokračovat sestavením matic tuhosti a hmotnosti a vektoru pravé strany, se kterými budeme dále pracovat.

3.3 Volba prostoru konečných prvků a volba báze

Abychom mohli MKP aplikovat, je nejdříve třeba vhodně diskretizovat prostor $H^1(\Omega)$. Ten je nahrazen $V_h \in H^1(\Omega)$, konečně - rozměrným prostorem s bází $\{\varphi_i\}_1^N$. Řešení problému u_h pak lze zapsat jako lineární kombinaci bazových funkcí, viz rovnice (38).

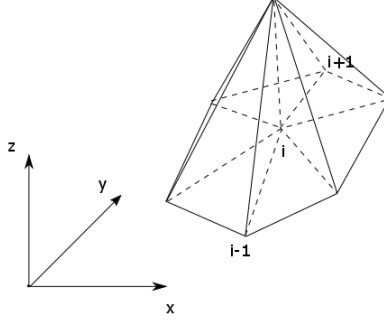
Výpočty algebraických soustav jsou výrazně jednodušší pro řídké matice, o kterých předem víme, že většina jejich prvků je nulová. Proto zvolíme bazové funkce φ_i tak, že:

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij},$$

tj.:

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \mathbf{x} = x_i \\ 0 & \text{pro } \mathbf{x} \neq x_i \end{cases}, \quad (46)$$

takže bazová funkce φ_i je nenulová pouze na trojúhelnících, které obsahují její příslušný uzel sítě x_i , pro 1D případ zobrazeno na Obr. (2), pro 2D případ potom na Obr. (3).



Obrázek 3: Bázová funkce pro uzel i ve 2D(vytvořeno v prostředí Inkscape).

3.4 Sestavení matice tuhosti a vektoru pravé strany

V následujících úlohách budeme počítat s maticí tuhosti \mathbb{K} , maticí hmotnosti \mathbb{M} a vektorem pravé strany \mathbf{b} . Nyní když máme definovanou bázi prostoru V_h , lze tyto matice definovat jako [18]:

$$\mathbb{K} \in \mathbb{R}^{n \times n} : k_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, dx, \quad (47)$$

$$\mathbb{M} \in \mathbb{R}^{n \times n} : m_{ij} = \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j \, dx \quad (48)$$

$$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n : b_i = \int_{\Omega} f \varphi_i \, dx \quad (49)$$

Bylo by možné integrály (47), (48) a (49) vypočítat tak, že bychom postupně procházeli všechny možné kombinace bázových funkcí na celé síti a z nich počítali daný integrál. To je ovšem výpočetně velice náročný a v kódu špatně realizovatelný postup. Proto se pohybujeme postupně po jednotlivých elementech K a vypočítáme vždy jejich lokální příspěvky do matic [18]. Ty lze následně zapsat a sečíst ve tvaru:

$$k_{ij} = \sum_{K \in \tau_h} \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, dx = \sum_{K \in \tau_h} k_{ij}^K, \quad (50)$$

$$m_{ij} = \sum_{K \in \tau_h} \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j \, dx = \sum_{K \in \tau_h} m_{ij}^K \quad (51)$$

$$b_i = \sum_{K \in \tau_h} \int_{\Omega} f \varphi_i \, dx = \sum_{K \in \tau_h} b_i^K, \quad (52)$$

kde k_{ij}^K jsou lokální příspěvky do matice tuhosti na elementu K , m_{ij}^K do matice hmotnosti a b_i^K do vektoru pravé strany. Integraci je ale možné provést jen na referenčním elementu \hat{K} .

Jelikož ale daný element může být na síti různě natočený, viz Obr. (4), i výpočet

gradientů bázových funkcí a samotná integrace musí probíhat na referenčním elementu \hat{K} . Využijeme proto transformaci ze vztahu (60) a transformační matici \mathbb{B}_K z (61), viz [4] a dostaneme:

$$\int_K \varphi(x) dx = \int_{\hat{K}} \hat{\varphi}(\hat{x}) |\det \mathbb{B}_K| d\hat{x}. \quad (53)$$

Stejná (zpětná) transformace jako v (63) platí i pro samotné bázové funkce:

$$\varphi(x) = \hat{\varphi}(F_K^{-1}(x)) \quad (54)$$

a pro gradienty bázových funkcí $\nabla \varphi(x, y)$ můžeme zapsat:

$$\nabla \varphi(x, y) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \hat{x}}, \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \hat{y}} \right) \mathbb{B}_K^{-1}, \quad (55)$$

tedy

$$\nabla \varphi = \nabla \hat{\varphi} \mathbb{B}_K^{-1}. \quad (56)$$

Na referenčním trojúhelníku proto zavedeme bázové funkce $\hat{\varphi}$ tak, aby jejich hodnoty v uzlech (vrcholech) příslušného \hat{K} byly stejné jako hodnoty původních bázových funkcí φ ve vrcholech K :

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_1(\hat{x}, \hat{y}) &= 1 - \hat{x} - \hat{y}, \\ \hat{\varphi}_2(\hat{x}, \hat{y}) &= \hat{x}, \\ \hat{\varphi}_3(\hat{x}, \hat{y}) &= \hat{y}. \end{aligned}$$

Tyto bázové funkce na referenčním trojúhelníku \hat{K} tvoří prostor V_h a jejich gradienty lze snadno určit jako:

$$\begin{aligned} \nabla \hat{\varphi}_1(\hat{x}, \hat{y}) &= (-1, -1), \\ \nabla \hat{\varphi}_2(\hat{x}, \hat{y}) &= (1, 0), \\ \nabla \hat{\varphi}_3(\hat{x}, \hat{y}) &= (0, 1). \end{aligned}$$

Lokální příspěvek elementu K do matice tuhosti je potom:

$$k_{ij}^K = \int_{\hat{K}} |\det \mathbb{B}_K| (\nabla \hat{\varphi}_j \mathbb{B}_K^{-1}) (\nabla \hat{\varphi}_i \mathbb{B}_K^{-1}) d\hat{x} = |K| (\nabla \hat{\varphi}_j \mathbb{B}_K^{-1}) (\nabla \hat{\varphi}_i \mathbb{B}_K^{-1}), \quad (57)$$

kde $|K| = \frac{|\det \mathbb{B}_K|}{2}$ je obsah původního trojúhelníku. Prvky matice k_{ij}^K poté stačí postupně pro všechny elementy sítě přičítat do matice tuhosti \mathbb{K} .

Postup je obdobný pro lokální příspěvky do matice hmotnosti a do pravé strany - výpočet vždy probíhá na jednotlivých referenčních trojúhelnících se stejnou volbou transformační matice \mathbb{B}_K a referenčních bázových funkcí. Pro lokální příspěvky do matice hmotnosti platí:

$$m_{ij}^K = \int_{\hat{K}} |\det \mathbb{B}_K| \hat{\varphi}_j \hat{\varphi}_i d\hat{x}, \quad (58)$$

a

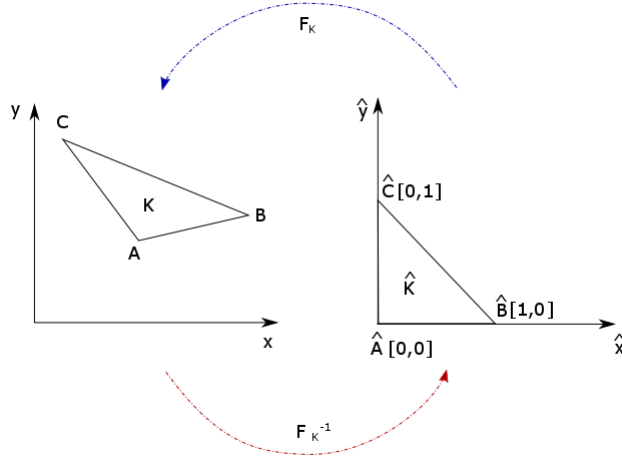
$$b_i^K = |\det \mathbb{B}_K| \int_{\hat{K}} f(F_K(\hat{x})) \hat{\varphi}_i d\hat{x} = |K| \sum_{K \in \tau_h} w_i \quad (59)$$

\mathbb{K} integraci na referenčních elementech využijeme Gaussovy numerické kvadratury.

3.5 Vybrané části praktické realizace metody

3.5.1 Referenční zobrazení

Pro výpočet soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ a další práci s maticemi (hmotnosti, tuhosti) je vhodné přetransformovat jednotlivé konečné prvky K triangulace τ_h na jejich referenční prvky \hat{K} , na kterých je snadné provést numerickou integraci. Zavedeme proto bijektivní zobrazení $F_K : \hat{K} \rightarrow K$ z původního souřadnicového systému (x, y) na (\hat{x}, \hat{y}) , viz Obr. (4) [4].



Obrázek 4: Bijektivní afinní transformace libovolného 2D prvku K triangulace τ_h na referenční trojúhelník \hat{K} , (vytvoreno v prostředí Inkscape).

Transformaci prvků lze zapsat pomocí lineárního zobrazení $F_K : K \rightarrow \hat{K}$:

$$F_K(\hat{x}) = \mathbb{B}_K \hat{x} + b_K. \quad (60)$$

Transformační matice \mathbb{B}_K má tvar:

$$\mathbb{B}_K = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}. \quad (61)$$

Pro souřadnice platí:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \mathbb{B}_K \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}. \quad (62)$$

Inverzní transformace F_K^{-1} pak má tvar:

$$F_K^{-1} : K \rightarrow \hat{K}, \quad \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \mathbb{B}_K^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \mathbb{B}_K^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad (63)$$

a inverzní matice \mathbb{B}_K^{-1} je:

$$\mathbb{B}_K^{-1} = \frac{1}{\det \mathbb{B}_K} \begin{pmatrix} y_3 - y_1 & -x_3 + x_1 \\ -y_2 + y_1 & x_2 - x_1 \end{pmatrix}. \quad (64)$$

Determinant transformační matice $\det \mathbb{B}_K = \frac{|K|}{|\hat{K}|}$ je zároveň Jakobiánem lineární transformace F_K z rovnice (60) [4].

3.5.2 Triangulace oblasti

Triangulace oblasti je sama o sobě netriviální proces, během něhož musí být dodrženy podmínky přípustné triangulace τ_h . Ta je tvořena konečným počtem prvků (trojúhelníků) K , jejichž spojením vznikne uzávěr výpočetní oblasti $\Omega_h = \bigcup_{K \in \tau_h} K$ a jejichž jediným možným průnikem je buď společný vrchol nebo celá společná strana. Trojúhelníky se tedy nesmí vzájemně 'překrývat', musí vyplňovat celou oblast a vrchol jednoho trojúhelníku musí být nutně také vrcholem trojúhelníku sousedního [4].

Jelikož v rámci MKP řešíme vždy integrální tvar dané rovnice, je třeba v numerickém schématu zavést vhodnou aproximaci integrace. Těch existuje řada a jelikož úlohy řešíme na jednotlivých elementech sítě, předpis pro tuto aproximaci závisí na tvaru použitého prvku. Konkrétní výpočet integrálu je v této práci realizován pomocí numerické kvadratury.

Výpočetní oblast Ω je v našem numerickém schématu diskretizována triangulací z prostředí Gmsh a je zastoupena množinou uzlů ('vertexů') a trojúhelníků K ('elements'). Každý element sítě v sobě uchovává informaci o uzlech ze kterých je tvořen a každý uzel o svých souřadnicích $(x_i, y_i)^T$ [2].

3.6 Numerické výsledky

V rámci přípravy byla provedena diskretizace Poissonovy úlohy (29):

$$-\Delta u = f(x, y) \quad \text{pro } \forall (x, y) \in \Omega, \quad (65)$$

pro různé funkce $f = f(x, y)$ na pravé straně rovnice, pomocí kterých lze snadno ověřit správnost metody srovnáním se známým analytickým řešením. Následně byla úloha upravena (pro lepší přehlednost), pro takové u , že:

$$\begin{aligned} u &= u_D \text{ na } \partial\Omega, \\ u_D &= \sin(\pi x)\sin(\pi y). \end{aligned} \quad (66)$$

Jelikož známe analytické řešení úlohy,

$$\Delta u_D = -2\pi^2 \sin(\pi x)\sin(\pi y), \quad (67)$$

tak označíme známé analytické řešení $u_a = u_D$. S Dirichletovou okrajovou podmínkou lze tento postup provést na libovolné oblasti Ω .

Pro různé délky kroku h na zvolené síti lze potom určit hodnotu diskretizační chyby v každém bodě sítě jako:

$$E_h = \|u_D - u_a\|. \quad (68)$$

Tato chyba by se měla s jemnější sítí zmenšovat. Dle vztahu (68) určíme chybu pro různou délku kroku h , $h/2$ a $h/4$ a můžeme pak vypočítat řád diskretizace p , viz [22].

$$\frac{E_h}{E_{h/2}} = \frac{Ch^p}{C(h/2)^p} = 2^p, \quad (69)$$

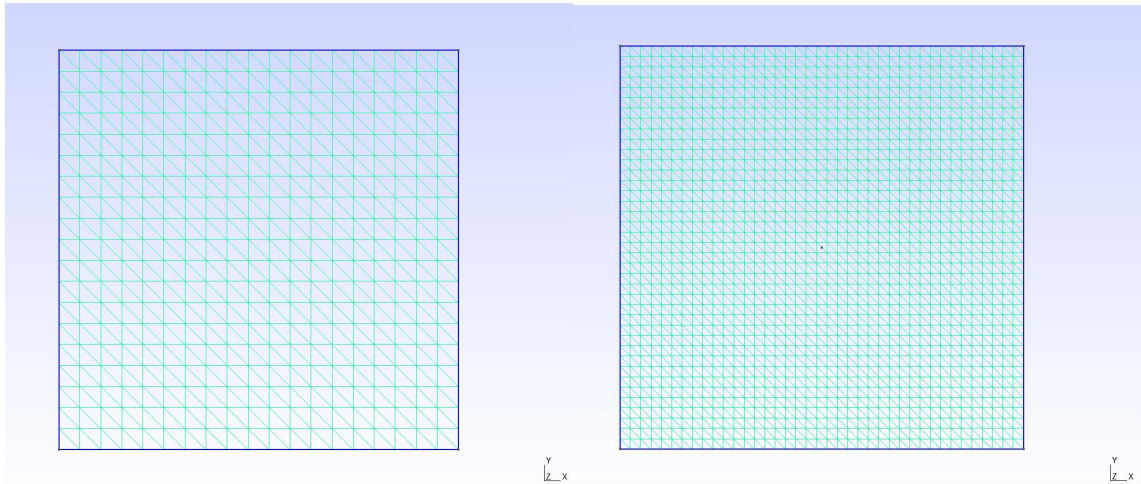
kde $C > 0$ je kladná konstanta nezávislá na kroku h . Dostáváme:

$$p = \log_2 \frac{E_h}{E_{h/2}}. \quad (70)$$

Vizualizace různě jemné sítě (vygenerované v prostředí Gmsh) je na Obr. (5). Průměrné hodnoty absolutní odchylky od analytického řešení na síti E_{avg} a z nich stanoveného řádu metody jsou uvedeny v tabulce (1).

krok	E_{avg}	Řád p metody
h	0,00083067	
h/2	0,00020817	1,9965199
h/4	0,00005205	1,9998238

Tabulka 1: Hodnoty absolutní odchylky na všech bodech sítě E_h pro danou velikost kroku h a řád p MKP.



Obrázek 5: Sítě na testovací oblasti jednotkového čtverce vygenerovaná prostředím Gmsh, s krokem h a $h/2$ s OP (30) na této síti.

Dále řešíme Poissonovu úlohu zadanou:

$$-\Delta u = 1 \text{ v } \Omega, \quad (71)$$

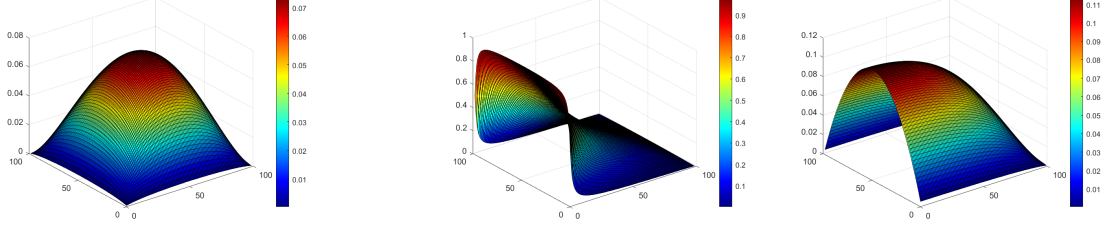
na oblasti jednotkového čtverce. Tuto jednoduchou úlohu zde využijeme pro přehledné zdůraznění vlivu okrajové podmínky na řešení. Jak bylo demonstrováno v kapitole (35), řešení vede na sestavu rovnic (43), v maticovém zápisu:

$$\mathbb{K}\alpha = b. \quad (72)$$

Řešení s Dirichletovou OP je vyobrazeno v levém a prostředním grafu na Obr. (6). Na levém grafu je řešení pro předepsanou $u_D = 0$ na všech hranicích oblasti, na prostředním $u_D = 1$ na 'levé' hranici oblasti.

Na pravém grafu v Obr. (6) je vyneseno řešení úlohy s předepsanou Neumannovou OP na levé hranici oblasti ($\phi_N=1$).

Pozn.: Grafy na (6) nevyobrazují řešení přímo na hranicích, pouze uvnitř oblasti, proto nejsou okraje jednotlivých grafů na hranicích 'dotažené' až do krajů.



Obrázek 6: Řešení Poissonovy rovnice (71) s různými OP: na obrázku vlevo je předepsána Dirichletova OP $u_D = 0$ na všech hranách, uprostřed $u_D = 1$ pro jednu z hran a na pravém $\phi_N = 1$ pro jednu z hran.

4 Numerická aproximace akustických problémů ve frekvenční oblasti

4.1 MKP diskretizace Helmholtzovy rovnice

4.1.1 Slabá formulace

Abychom mohli úlohu řešit numericky, je třeba analogicky k modelovému případu přeformulovat i Helmholtzovu rovnici (24), kterou zde pro přehlednost přepíšeme:

$$\Delta p + k^2 p = 0, \quad (73)$$

ovšem s obecnou nenulovou pravou stranou ve slabém smyslu. Přenásobíme (73) testovací funkcí $v \in V$, zintegrujeme přes danou oblast a za použití Greenovy věty máme:

$$-\int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla v \, d\Omega + \int_{\delta\Omega} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} v \, dS + \int_{\Omega} k^2 p v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega. \quad (74)$$

Uvažujeme, že hranici výpočetní oblasti $\delta\Omega$ tvoří kombinace všech tří OP zmíněných v (2.4), tj $\delta\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_S$, a druhý člen na levé straně rozepíšeme:

$$\int_{\delta\Omega} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} v \, dS = \int_{\Gamma_D} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} v \, dS + \int_{\Gamma_N} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} v \, dS + \int_{\Gamma_S} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} v \, dS. \quad (75)$$

Pro náš případ je testovací funkce na Γ_D nulová. Také $\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = \varphi_N = 0$ na Γ_N . Tedy jediný nenulový člen odpovídá Sommerfeldově bezodrazné podmínce na Γ_S :

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = ikp, \quad (76)$$

viz (28). Po dosazení dostaneme slabou formulaci:

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla v \, d\Omega - \int_{\Gamma_S} ikpv \, dS - \int_{\Omega} k^2 p v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega. \quad (77)$$

4.1.2 MKP diskretizace a maticový zápis úlohy

Dalším krokem je opět nahrazení prostoru V konečně-rozměrným prostorem básových funkcí $V_h \subset V$. Hledáme diskrétní řešení p_h rovnice (77), (které zároveň splňuje Dirichletovu OP) ve tvaru:

$$p_h(x, \omega) = \sum_j^{N_h} \alpha_j(\omega) \varphi_j(x) \quad (78)$$

a které řeší rovnici:

$$\int_{\Omega} \nabla p_h \cdot \nabla v_h \, d\Omega - \int_{\Gamma_S} ik p_h v_h \, dS - \int_{\Omega} k^2 p_h v_h \, d\Omega = \int_{\Omega} f v_h \, d\Omega. \quad (79)$$

Za testovací funkci v_h opět volíme básovou funkce φ_i , a dosadíme (78) do (79):

$$\sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j \underbrace{\int_{\Omega} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \, d\Omega}_{k_{ij}} - ik \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j \underbrace{\int_{\Gamma_S} \varphi_j \varphi_i \, dS}_{c_{ij}} - k^2 \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j \underbrace{\int_{\Omega} \varphi_j \varphi_i \, d\Omega}_{m_{ij}} = \underbrace{\int_{\Omega} f \varphi_i \, d\Omega}_{b_i}. \quad (80)$$

Kompaktněji přepíšeme maticovým zápisem:

$$\underbrace{(\mathbb{K} - ik\mathbb{C} - k^2\mathbb{M})}_{\mathbb{A}} \alpha = b, \quad (81)$$

takže máme soustavu rovnic:

$$\mathbb{A}(\omega)\alpha = \mathbf{b} \quad (82)$$

Matici \mathbb{C} zahrnujeme do výpočtu, pokud na některou hranici výpočetní oblasti aplikujeme bezodrazovou OP, historicky ji dle [17] a [18] označujeme jako matici tlumení, a platí:

$$c_{ij} = \int_{\Gamma_S} \varphi_j \varphi_i \, dS. \quad (83)$$

4.2 Vlastní čísla Laplaceova operátoru, slabá formulace

Modální analýza je v rámci této práce uvažována dle [18] po úpravě tvaru (81), ze kterého vyloučíme tlumení \mathbb{C} a externí zdroje b . Takový postup je možný i z hlediska fyziky, jelikož každý systém má tendence oscilovat na vlastní frekvenci i bez buzení [13]. Tak získáme tzv. základní rovnici modální analýzy:

$$(\mathbb{K} - k^2\mathbb{M})\alpha = 0. \quad (84)$$

Definice vlastního čísla a vlastního vektoru: Vlastní vektor lineárního operátoru \mathbb{A} je z definice nenulový vektor u , pro který existuje komplexní číslo λ tak, že platí:

$$\mathbb{A}u = \lambda u. \quad (85)$$

Dvojici (λ, u) označujeme jako vlastní pár, viz [16]. Pro výpočet vlastního páru operátoru \mathbf{A} předpokládáme čtvercovou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Upravíme rovnici (85) v maticovém zápisu:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \cdot u = 0, \quad (86)$$

kde \mathbf{E} je jednotková matice. Tato rovnice má netriviální řešení u , pokud je matice $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})$ singulární, tj:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0. \quad (87)$$

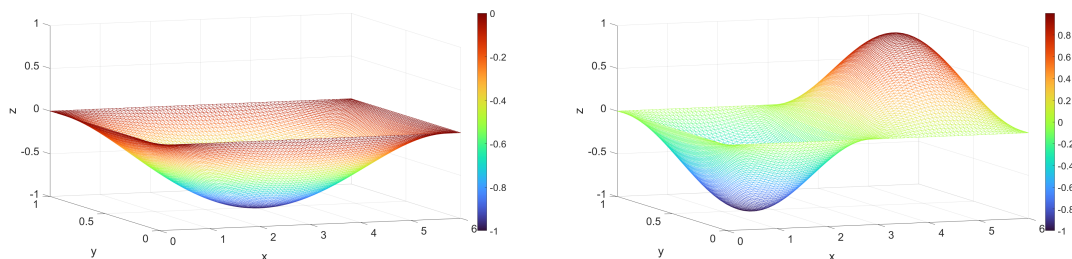
Rovnici (87) nazýváme dle [16] charakteristická. V našem případě máme charakteristickou rovnici ve tvaru (84). Praktické řešení této úlohy je v následující sekci.

4.3 Numerické výsledky

V prostředí MATLAB je možné určit vlastní čísla λ a jejich příslušné vlastní vektory příkazem *eig* nebo v *eigs*. Příkaz $[V, D] = \text{eigs}(A, p)$ generuje diagonální matici $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{p \times p}$, která má na diagonále prvních p vlastních čísel a matici $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times p}$, jejíž sloupce jsou tvořeny odpovídajícími vlastními vektory, viz [20].

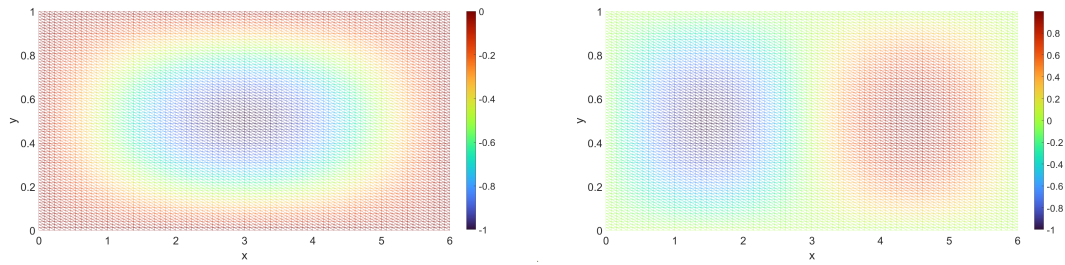
4.3.1 Modální analýza na jednoduché oblasti obdélníku

Získaná rozložení vlastních módů pro jednoduchou oblast obdélníka s Dirichletovou OP na hranicích jsou vynesena na Obr. (7) a (8). Těchto módů je nekonečně mnoho, zde jsou zobrazeny 'první' dva módy odpovídající dvěma nejnižším vlastním frekvencím $f_1 = 174 \text{ Hz}$ a $f_2 = 192 \text{ Hz}$.

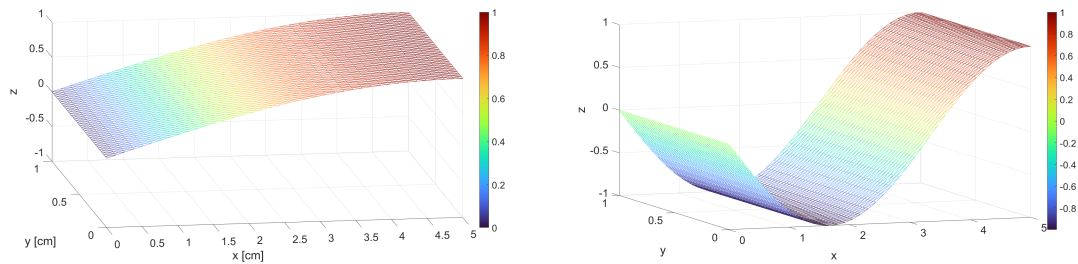


Obrázek 7: Tvar vlastních módů odpovídající první vlastní frekvenci $f_1=174 \text{ Hz}$ nalevo, druhé vlastní frekvenci $f_2=192 \text{ Hz}$ napravo. V obou případech jde o obdélníkovou oblast velikosti 1:6, s Dirichletovou OP na všech hranách.

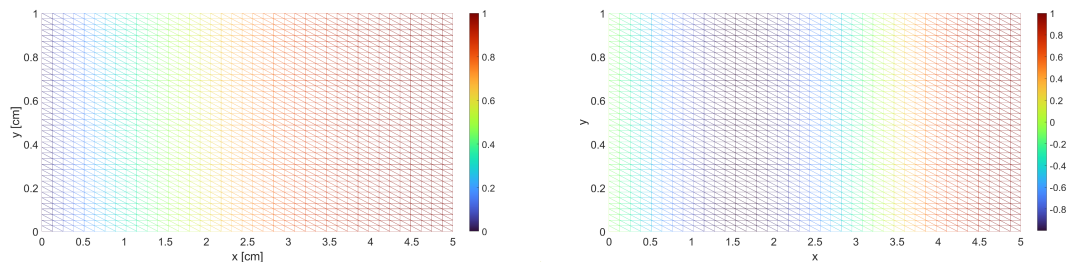
Výsledky pro obdélník s kombinací Dirichletovy a Neumannovy OP jsou na následujících Obr. (9) a (10). Dirichletova OP je předepsána na 'levé' hranici oblasti (pro $x=0$), Neumannova OP na zbylých třech hranicích. Vyobrazené módy opět odpovídají dvěma nejnižším vlastním frekvencím, numericky určeným jako $f_1 = 343 \text{ Hz}$ a $f_2 = 687 \text{ Hz}$.



Obrázek 8: Rozložení vlastních módů odpovídající první vlastní frekvenci $f_1=174$ Hz nalevo, druhé vlastní frekvenci $f_2=192$ Hz napravo. V obou případech jde o obdélníkovou oblast velikosti 1:6, s Dirichletovou OP na všech hranách.



Obrázek 9: Tvar vlastních módů na obdélníkové oblasti velikosti 1:5, odpovídající první vlastní frekvenci $f_1=343$ Hz nalevo, druhé vlastní frekvenci $f_2=687$ Hz napravo. Na oblasti je předepsána Dirichletova OP na jedné hraně (hrana vlevo), a Neumannova OP na ostatních třech hranách.

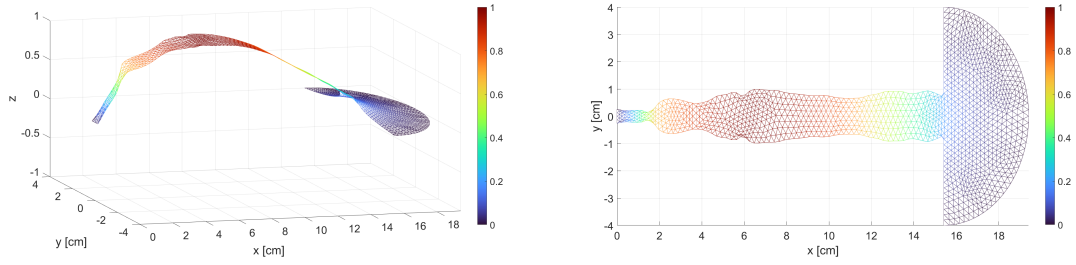


Obrázek 10: Rozložení vlastních módů na obdélníkové oblasti velikosti 1:5, odpovídající první vlastní frekvenci $f_1=343$ Hz nalevo, druhé vlastní frekvenci $f_2=687$ Hz napravo. Na oblasti je předepsána Dirichletova OP na jedné hraně (hrana vlevo), a Neumannova OP na ostatních třech hranách.

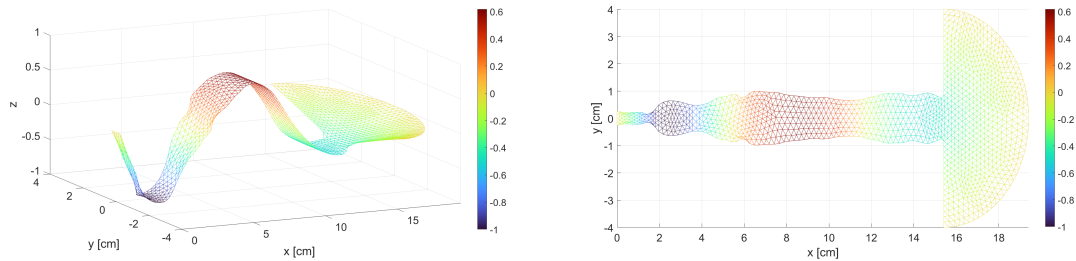
4.3.2 Modální analýza na oblasti lidského vokálního traktu

Jelikož nám MKP umožňuje realizovat výpočty i na relativně složitých oblastech, stejná modální analýza byla provedena i pro oblast vokálního traktu. Jde o konkrétní tvar lidského hlasového ústrojí odpovídající vyslovení hlásky 'ostré E', jehož přesné rozměry byly získány MRI měřením v [6]. S takto složitou oblastí je záhodno znovu zdůraznit, že vlastních frekvencí a módů je nekonečně mnoho, vybíráme jen několik ilustračních případů. Tvar vlastních módů na oblasti odpovídající první vlastní frekvenci $f_1=27$ Hz je na Obr. (11), třetí vlastní frekvenci $f_3=89$ Hz na (12) a sedmé vlastní frekvenci $f_7=172$ Hz na (13). Na vstupní stěně ($x=0$) a na hranici volného

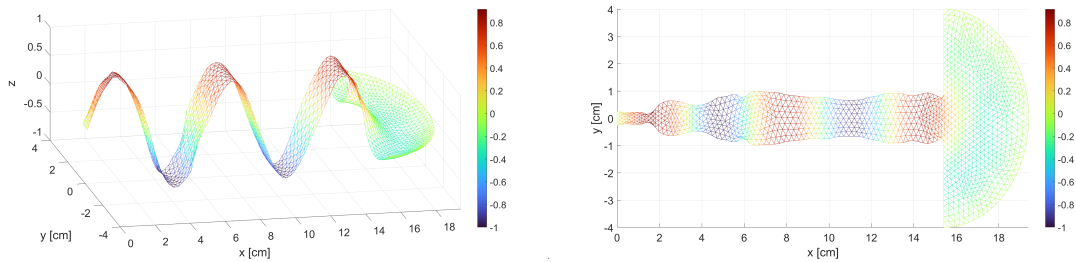
prostoru (půlkruhová výseč) je zadána Dirichletova OP, na 'pevných stěnách' traktu Neumannova OP.



Obrázek 11: Rozložení vlastního módu na oblasti vokálního traktu odpovídající první vlastní frekvenci $f_1 = 27$ Hz, s Dirichletovou OP na vstupní hraně (hrana vlevo) a výstupní hraně (půlkružnici vpravo) a Neumannovou OP na ostatních stěnách vokálního traktu.



Obrázek 12: Rozložení vlastního módu na oblasti vokálního traktu odpovídající třetí vlastní frekvenci $f_3 = 89$ Hz, s Dirichletovou OP na vstupní hraně (hrana vlevo) a výstupní hraně (půlkružnici vpravo) a Neumannovou OP na stěnách vokálního traktu.



Obrázek 13: Rozložení vlastního módu na oblasti vokálního traktu odpovídající sedmé vlastní frekvenci $f_7 = 172$ Hz, s Dirichletovou OP na vstupní hraně (hrana vlevo) a výstupní hraně (půlkružnici vpravo) a Neumannovou OP na stěnách vokálního traktu.

Numericky - síť 1		Numericky - síť 2		Analytický		Abs. Rozdíl	
ω [rad/s]	f [Hz]	ω [rad/s]	f [Hz]	ω [rad/s]	f [Hz]	Δf_1 [Hz]	Δf_2 [Hz]
1093.32	174.01	1092.65	173.90	1092.43	173.87	0.141	0.035
1138.53	181.2	1136.52	180.88	1135.85	180.78	0.425	0.106
1210.43	192.65	1206.17	191.97	1204.76	191.74	0.903	0.226
1305.04	207.7	1297.56	206.51	1295.07	206.12	1.587	0.396
1418.37	225.74	1406.58	223.86	1402.68	223.24	2.497	0.622
1546.93	246.2	1529.64	243.45	1523.91	242.54	3.665	0.911
1688	268.65	1663.78	264.80	1655.78	263.53	5.128	1.273
1839.48	292.76	1806.74	287.55	1795.94	285.83	6.929	1.718
1999.86	318.29	1956.79	311.43	1942.61	309.18	9.112	2.257
2166.11	344.75	2112.63	336.24	2094.41	333.34	11.412	2.900
2168.09	345.06	2163.48	344.33	2250.31	358.15	13.086	13.819
2191.95	348.86	2186.63	348.01	2409.51	383.49	34.627	35.472
2234.5	355.63	2224.72	354.07	2571.40	409.25	53.619	55.176
2293.12	364.96	2273.30	361.81	2735.50	435.37	70.408	73.561

Tabulka 2: Tabulka srovnání hodnot vlastních frekvencí obdélníkové oblasti získaných numerickým výpočtem na základní síti (1) a jejím zjemnění (2) s analyticky vypočtenou hodnotou.

Během výpočtů je třeba kontrolovat přesnost získaných numerických výsledků. To je možné např. jejich srovnáním se známým analytickým řešením na jednoduché oblasti. Dle [3] lze z Hamiltonova principu odvodit pohybovou rovnici pro příčné kmity membrány ve tvaru:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \Delta w, \quad (88)$$

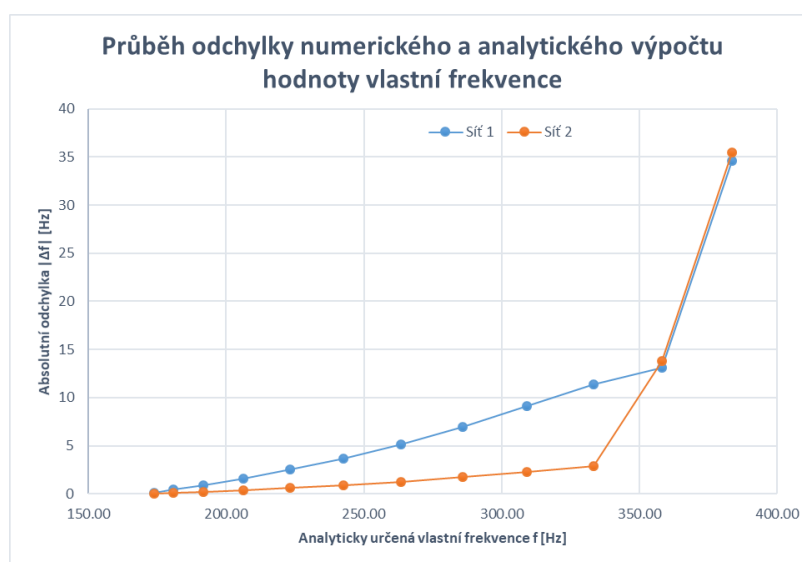
kde w je výchylka ve směru z (pro membránu napnutou v rovině xy). V případě obdélníkové membrány o rozměrech a a b , která je na svých okrajích pevně upevněna, platí okrajová podmínka $w(x, 0, t) = w(a, y, t) = w(x, b, t) = w(0, y, t) = 0$, tj. Dirichletova OP. Pro kruhovou frekvenci ω získáme jednoduchý vzorec:

$$\omega_{mn} = c\pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}, \quad (89)$$

kde m, n jsou přirozená čísla [3]. V Tabulce 2 je srovnání numerických a analytických výsledků pro naši obdélníkovou oblast.

Jak je patrné, s rostoucí frekvencí se výsledky stále výrazněji liší. Zatímco pro prvních pět vlastních frekvencí je směrodatná odchylka 1.56 Hz, pro prvních deset je již 5.87 Hz a pro patnáct dokonce 65.95 Hz. Pokud bychom pro vyšší vlastní frekvence chtěli dosáhnout větší přesnosti, museli bychom podle [5] buď zjemnit výpočetní síť, nebo zvýšit stupeň aproximačního polynomu na každém elementu. Proto byl výpočet opakován pro stejnou úlohu s dvojnásobně jemnou sítí (sít 2), zjemnění sítě bylo provedeno v prostředí gmsh.

Po zjemnění sítě je patrné zmenšení odchylky numerického a analytického řešení. Směrodatná odchylka pro prvních pět frekvencí byla vypočtena jako 0.39 Hz, pro prvních deset je již 1.47 Hz a pro patnáct 42.43 Hz. Srovnání nárůstu absolutní odchylky řešení pro původní a zjemněnou síť je na Obr. (14). Podobné hodnoty dostáváme pouze pro prvních pět frekvencí, dále je již původní síť nedostačující a odchylka numerického výpočtu narůstá. Od desáté vlastní frekvence (333 Hz - určené analyticky) dramaticky narůstá nepřesnost numerického řešení na obou sítích.



Obrázek 14: Nárůst absolutní odchylky numerického a analytického řešení pro výpočet vlastních frekvencí pro základní výpočetní síť (Sít 1) a zjemněnou síť (Sít 2).

4.3.3 Řešení Helmholtzovy rovnice s externím zdrojem

Druhým způsobem jak provést rezonanční analýzu na oblasti je zavést do rovnice nenulovou 'pravou stranu', tj. externí buzení. To je v rámci úlohy umístěno postupně do dvou různých bodů na síti vokálního traktu (bod [1, 0] a [10, 0]). Zde je vhodné poznamenat, že zdroj není přesně bodový - to by jej činilo závislým na síti. Místo toho je předepsán v ϵ -okolí bodu. Velikost okolí je třeba vhodně volit, abychom se nedostali 'mimo' síť.

Dále postupujeme tak, že ve zvoleném bodě předepisujeme konstantní frekvenci (ta je ve výpočtu zahrnuta pomocí vlastního čísla k) a s krokem 5 Hz projdeme

frekvenční rozsah [0 - 2500] Hz. Pro každou frekvenci potom řešíme (73) (ovšem s nenulovou pravou stranou a sledujeme, pro které frekvence získáme rezonanční píky v námi zvoleném snímacím bodě (prakticky v tomto bodě simulujeme mikrofon). Tento bod byl zvolen v souřadnici [17,0], v 'otevřené' oblasti před ústy. Hledáme tedy řešení rovnice:

$$\Delta u + k^2 u = b, \quad (90)$$

nebo maticovým zápisem:

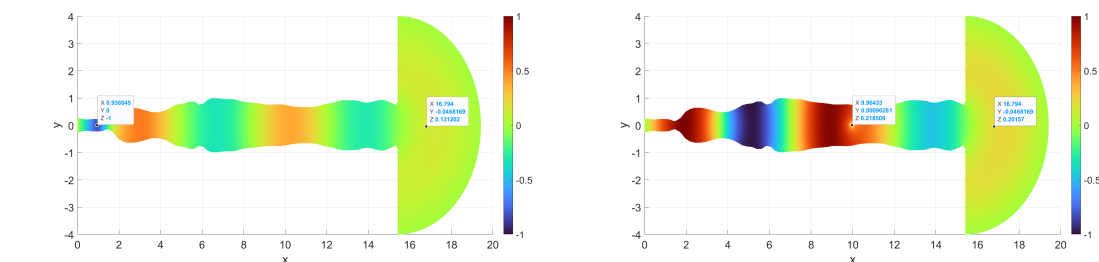
$$(\mathbb{K} - k^2 \mathbb{M}) \cdot u = b, \quad (91)$$

kde b je vektor pravé strany, \mathbb{K} matice tuhosti a \mathbb{M} matice hmotnosti, které lze sestavit postupem uvedeným v sekci (3.4).

Okrajové podmínky jsou stejné jako v sekci (4.3.2), tj. Dirichletova OP na vstupní stěně (hrana vlevo) a výstupní stěně (půlkružnici vpravo) a Neumannova OP na ostatních stěnách vokálního traktu. Rovnici (91) řešíme v prostředí MATLAB pomocí LU faktorizace: definujeme novou matici $\mathbb{A} = (\mathbb{K} - k^2 \mathbb{M})$, a soustavu rovnic:

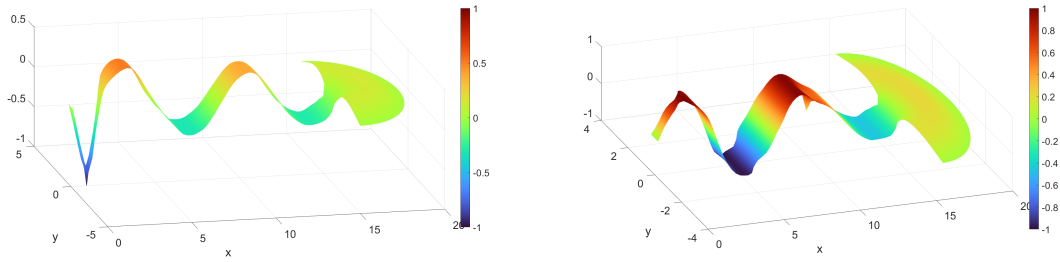
$$\mathbb{A} \cdot u = b \quad (92)$$

řešíme příkazem $u = A \setminus b$. Vizualizace takto řešené Helmholtzovy rovnice je na Obr. (15) a (16). Srovnáním takto získaných řešení Helmholtzovy rovnice s přístupem přes vlastní čísla operátoru v (4.3.2) můžeme říct, že si výsledky z těchto dvou přístupů odpovídají. Řešení úlohy v závislosti na budící frekvenci je vyneseno (v logaritmickém měřítku) na Obr. (17). Výsledky pro dvě různá umístění zdroje se liší velikostí píků, ovšem rezonanční frekvence zůstávají stejné neohledně na umístění. To je patrné z Obr. (18), kde jsou vyneseny hodnoty rezonančních frekvencí pro umístění zdroje b do bodů [1,0] a [10,0] - frekvenční píky si velmi dobře odpovídají. To je očekávaný závěr, jelikož z jejich fyzikální podstaty jsou rezonanční frekvence vlastní systému jako takovému, bez ohledu na externí zdroje.

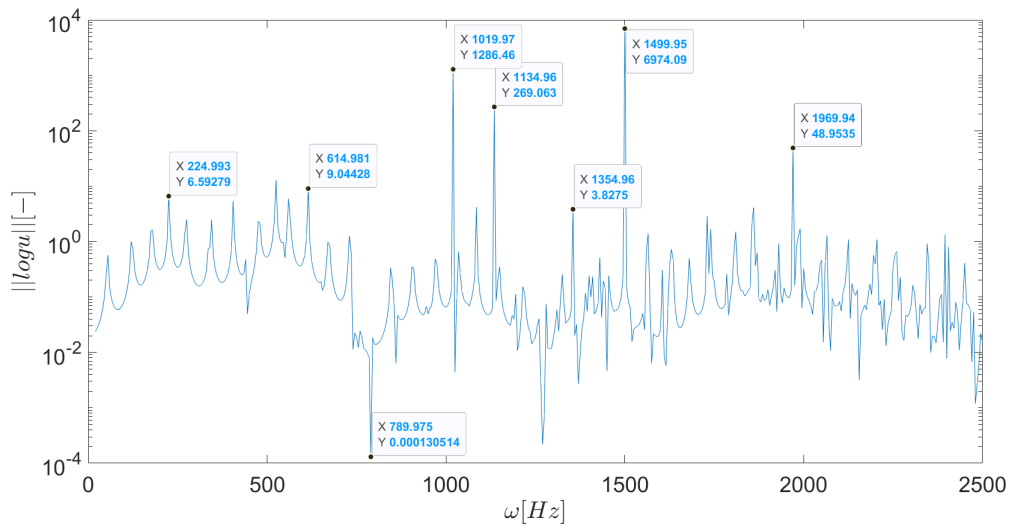


Obrázek 15: Řešení Helmholtzovy rovnice (91) na oblasti vokálního traktu odpovídající buzení v levém označeném bodě (cca [1,0], resp. [10,0]), a snímání signálu v pravém bodě (cca [17,0]) s Dirichletovou OP na vstupní hraně (hrana vlevo) a výstupní hraně (půlkružnici vpravo) a Neumannovou OP na stěnách vokálního traktu.

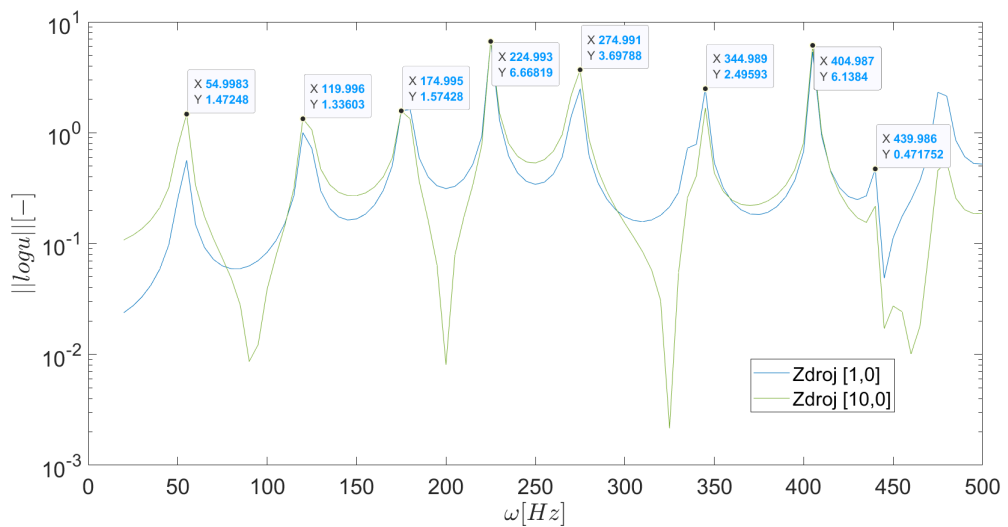
Průběhy na (18) samozřejmě nejsou zcela shodné - mohlo by jít o vliv vzájemné vzdálenosti zdroje a snímače. Snímač bude logicky lépe zachytávat signál z blíže umístěného zdroje, což do výpočtu vnáší chybu. Na Obr. (19) jsou výsledky vyneseny pro vyšší přesnost pouze ve frekvenčním rozsahu 0 - 500 Hz.



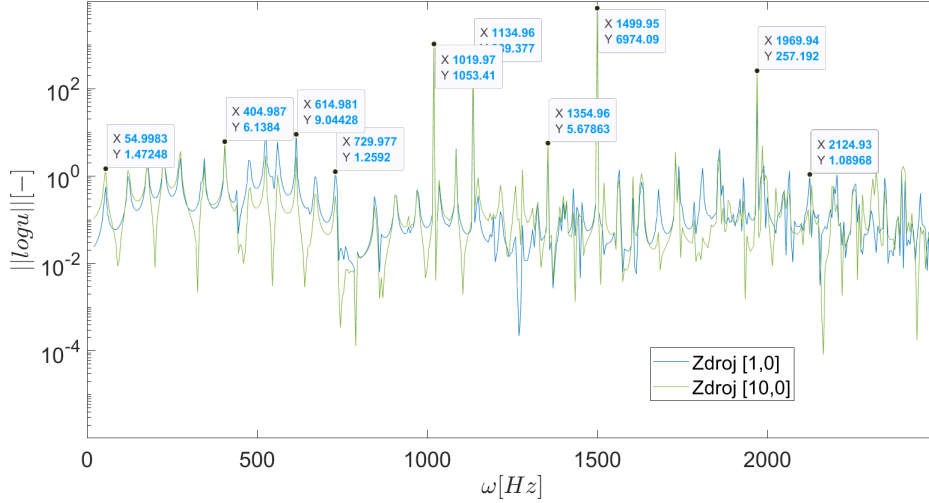
Obrázek 16: Řešení Helmholtzovy rovnice (91) na oblasti vokálního traktu odpovídající buzení v levém bodě (cca [1,0], resp. [10,0]) Dirichletovou OP na vstupní hraně (hrana vlevo) a výstupní hraně a Neumannovou OP na stěnách vokálního traktu.



Obrázek 17: Vlastní frekvence (resp. přenosová funkce) na oblasti vokálního traktu se smíšenou Dirichletovou a Neumannovou OP a externím buzením v bodě [1,0].



Obrázek 19: Srovnání přenosové funkce na oblasti vokálního traktu se smíšenou Dirichletovou a Neumannovou OP a externím buzením v bodech [1,0] (modře) a [10,0] (zeleně), přiblížení na rozsah 0-500 Hz.



Obrázek 18: Srovnání přenosové funkce na oblasti vokálního traktu se smíšenou Dirichletovou a Neumannovou OP a externím buzením v bodech [1,0] (modře) a [10,0] (zeleně).

5 Numerická aproximace akustických problémů v časové oblasti

Pro numerický výpočet je třeba problém (14) doplnit okrajovými podmínkami a diskretizovat. Obdobně jako u Poissonovy a Helmholtzovy rovnice použijeme Galerkinovu metodu. Vyjdeme-li z vlnové rovnice s obecnými zdroji f :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f, \quad (93)$$

kde c je rychlost zvuku, f skalární reálná funkce (z pohledu fyziky např. externí excitační zdroj akustické vlny) a hledáme řešení $u : [0, T] \rightarrow V$, kde $V = H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$ je Sobolevův prostor (první derivace funkcí jsou integrovatelné s kvadrátem na oblasti Ω); u zde reprezentuje perturbační tlak p' ale stejná formulace platí i pro akustický potenciál rychlosti ψ . Přidáme okrajové podmínky:

$$u(x, t) = 0 \text{ pro } x \in \partial\Omega, t \in (0, T) \quad (94)$$

a počáteční podmínky

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0 \text{ pro } x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= u_1 \text{ pro } x \in \Omega. \end{aligned} \quad (95)$$

Obdobným postupem jako v předešlém případě přenásobíme rovnici (93) testovací funkcí v a provedeme integraci per-partes (ve 2D Greenovou větou):

$$\int_{\Omega} \frac{1}{c^2} v \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} d\Omega - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u d\Omega - \int_{\Omega} v f d\Omega = 0. \quad (96)$$

5.1 Diskretizace vlnové rovnice v 1D pomocí MKD

Kromě MKP lze k diskretizaci řešeného problému použít za určitých předpokladů také metodu konečných diferencí (metodu sítí). Ta vyžaduje, aby výpočetní oblast byla popsána pomocí pravidelné sítě, tj. sítí s konstantní velikostí kroku. To využití metody značně limituje, jelikož jí nemůžeme řešit složitější geometrie, které vyžadují použití nestrukturovaných sítí, lokálních zjemnění apod. Také je s touto metodou obtížné dosáhnout vyššího stupně přesnosti [22]. Ovšem pro 1D (a případně jednoduché 2D) oblasti nabízí metoda rychlé, výpočetně nenáročné řešení dané PDR.

Řešíme úlohu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f. \quad (97)$$

Parciální derivace (v prostoru i čase) nahradíme diskretizací pro druhý řád derivace dle explicitního schématu:

$$\frac{u_i^{(n+1)} - 2u_i^{(n)} + u_i^{(n-1)}}{\Delta t^2} = c^2 \frac{u_{i+1}^{(n)} - 2u_i^{(n)} + u_{i-1}^{(n)}}{\Delta x^2} + f_i^{(n)}. \quad (98)$$

Horní indexy v rovnici (98) denominují časovou vrstvu, zatímco dolní indexy polohu (uzel sítě). Vyjádříme $u_i^{(n+1)}$:

$$u_i^{(n+1)} = 2u_i^{(n)} - u_i^{(n-1)} + [c \frac{\Delta t}{\Delta x}]^2 (u_{i+1}^{(n)} - 2u_i^{(n)} + u_{i-1}^{(n)}) + \Delta t^2 f_i^{(n)}. \quad (99)$$

Člen $[c \frac{\Delta t}{\Delta x}]$ je označován jako Courant - Fridrichs - Lewy parametr (dále ozn. CFL). Jelikož používáme explicitní schéma, je třeba brát v potaz jeho stabilitu. Tu zajišťujeme tím, že volíme CFL parametr tak, aby $\frac{\Delta t}{\Delta x} < c$, tj. aby rychlost výpočtu byla menší než rychlost propagace vlny [14].

Okrajové podmínky: Nyní je třeba do schématu přidat OP. Pro názornost volíme v 1D případě nejprve na obou koncích $x = 0$ a $x = L_x$ 'struny' odrazivou Dirichletovu OP. Poté ponecháme na levém konci $x = 0$ Dirichletovu OP a na pravém konci $x = L_x$ pohlcující Sommerfeldovu OP:

$$\text{Dirichlet: } u(x, t) = 0$$

$$\text{Sommerfeld: } (\frac{\partial u}{\partial x})_{(x,t)} = -c(\frac{\partial u}{\partial t})_{(x,t)} \quad (100)$$

Pro praktickou aplikaci Sommerfeldovy OP (100) v kódu použijeme diskretizační schéma dle [5]:

$$\begin{aligned} u_1^{(n+1)} &= u_2^{(n)} + \frac{CFL - 1}{CFL + 1} (u_2^{(n+1)} - u_1^{(n)}) \\ u_N^{(n+1)} &= u_{N-1}^{(n)} + \frac{CFL - 1}{CFL + 1} (u_{N-1}^{(n+1)} - u_N^{(n)}). \end{aligned} \quad (101)$$

5.2 Diskretizace vlnové rovnice ve 2D pomocí MKD

Ve 2D případě budeme pro metodu sítí postupovat zcela analogicky. Řešíme rovnici:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f \text{ v } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad (102)$$

kde $u = u(x, y, t)$. Opět použijeme explicitní diskretizační schéma a dosadíme za druhé derivace:

$$\frac{u_{i,j}^{(n+1)} - 2u_{i,j}^{(n)} + u_{i,j}^{(n-1)}}{\Delta t^2} = c^2 \frac{u_{i+1,j}^{(n)} - 2u_{i,j}^{(n)} + u_{i-1,j}^{(n)}}{\Delta x^2} + c^2 \frac{u_{i,j+1}^{(n)} - 2u_{i,j}^{(n)} + u_{i,j-1}^{(n)}}{\Delta y^2} + f_i^{(n)}, \quad (103)$$

kde Δx a Δy je krok sítě ve směrech x a y a Δt časový krok. Pracujeme s pravidelnou sítí, takže můžeme položit $\Delta x = \Delta y$ a získáme:

$$u_{i,j}^{(n+1)} = 2u_{i,j}^{(n)} - u_{i,j}^{(n-1)} + \left[c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right]^2 (u_{i+1,j}^{(n)} + u_{i-1,j}^{(n)} - 4u_{i,j}^{(n)} + u_{i,j+1}^{(n)} + u_{i,j-1}^{(n)}) + \Delta t^2 f_i^{(n)}. \quad (104)$$

Okrajové podmínky: Pohybujeme se na oblasti $\Omega = \langle 0, L_x \rangle \times \langle 0, L_y \rangle$, na které předepisujeme okrajové podmínky, buď Dirichletovu OP:

$$u(0, y, t) = 0 \wedge u(L_x, y, t) = 0$$

$$u(x, 0, t) = 0 \wedge u(x, L_y, t) = 0$$

nebo Sommerfeldovu OP:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{(0,y,t)} &= -c \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{(0,y,t)}, & \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{(L_x,y,t)} &= -c \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{(L_x,y,t)} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{(x,0,t)} &= -c \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{(x,0,t)}, & \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{(x,L_y,t)} &= -c \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{(x,L_y,t)}. \end{aligned} \quad (105)$$

Diskretizační schéma je obdobné jako v 1D případě:

$$\begin{aligned} u_{1,j}^{(n+1)} &= u_{2,j}^{(n)} + \frac{CFL - 1}{CFL + 1} (u_{2,j}^{(n+1)} - u_{1,j}^{(n)}) \\ u_{n_x,j}^{(n+1)} &= u_{n_x-1,j}^{(n)} + \frac{CFL - 1}{CFL + 1} (u_{n_x-1,j}^{(n+1)} - u_{n_x,j}^{(n)}) \\ u_{i,1}^{(n+1)} &= u_{i,2}^{(n)} + \frac{CFL - 1}{CFL + 1} (u_{i,2}^{(n+1)} - u_{i,1}^{(n)}) \\ u_{i,n_y}^{(n+1)} &= u_{i,n_y-1}^{(n)} + \frac{CFL - 1}{CFL + 1} (u_{i,n_y-1}^{(n+1)} - u_{i,n_y}^{(n)}) \end{aligned} \quad (106)$$

5.3 MKP řešení vlnové rovnice na 2D oblasti

Schéma MKP využívá již dříve získaných matic hmotnosti \mathbb{M} a tuhosti \mathbb{K} , které použijeme v rámci schématu pro časovou diskretizaci.

Vycházíme z rovnice:

$$\mathbb{M}u_{tt} + \mathbb{K}u = b, \quad (107)$$

kde u_{tt} je druhá parciální časová derivace řešení, kterou budeme aproximovat implicitním časovým diskretizačním schématem:

$$\mathbb{M} \frac{u^{(n+1)} - 2u^{(n)} + u^{(n-1)}}{dt^2} + c^2(\mathbb{K}u^{(n+1)} + \mathbb{K}u^{(n-1)}) = b. \quad (108)$$

Horní indexy opět vyjadřují časovou vrstvu. Potřebujeme vyjádřit $u^{(n+1)}$:

$$(\mathbb{M} + dt^2 c^2 \mathbb{K})u^{(n+1)} = 2\mathbb{M}u^{(n)} - (\mathbb{M} + dt^2 c^2 \mathbb{K})u^{(n-1)} + bdt^2. \quad (109)$$

Člen $(\mathbb{M} + dt^2 c^2 \mathbb{K})$ nahradíme novou pomocnou maticí \mathbb{A}_n a dostaneme:

$$u^{(n+1)} = 2\mathbb{A}_n^{-1}\mathbb{M}u^{(n)} - \mathbb{E}u^{(n-1)} + dt^2\mathbb{A}_n^{-1}b, \quad (110)$$

kde \mathbb{E} je jednotková matice stejné velikosti jako \mathbb{M} a \mathbb{K} . Řešení vlnové rovnice na 2D obdélníkové oblasti je v sekci numerických výsledků na Obr. (35).

Také bylo na identické úloze otestováno schéma explicitní:

$$\mathbb{M} \frac{u^{(n+1)} - 2u^{(n)} + u^{(n-1)}}{dt^2} + c^2\mathbb{K}u^{(n)} = b. \quad (111)$$

To je ovšem, přes svoji zdánlivou jednoduchost, citlivé na velikost časového kroku a výpočet je tudíž velmi náročný na výpočetní kapacitu a čas.

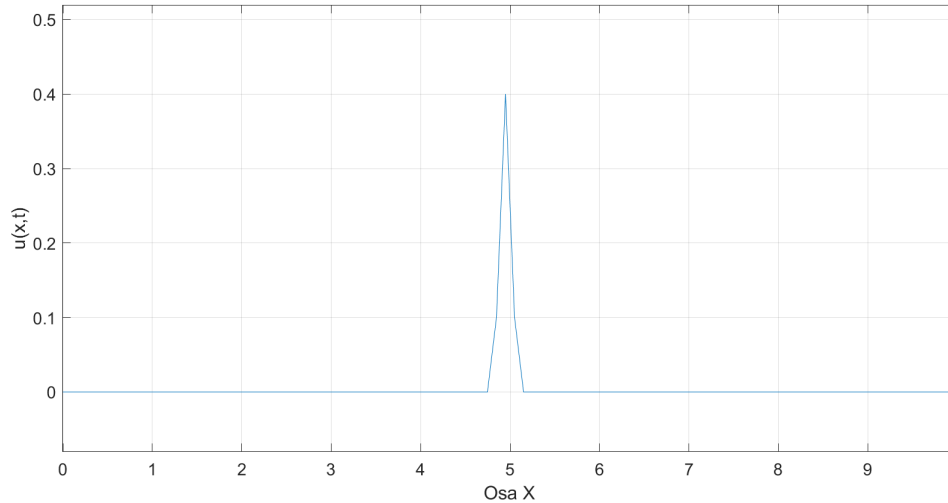
5.4 Numerické výsledky

5.4.1 Řešení vlnové rovnice na 1D oblasti

Řešíme úlohu:

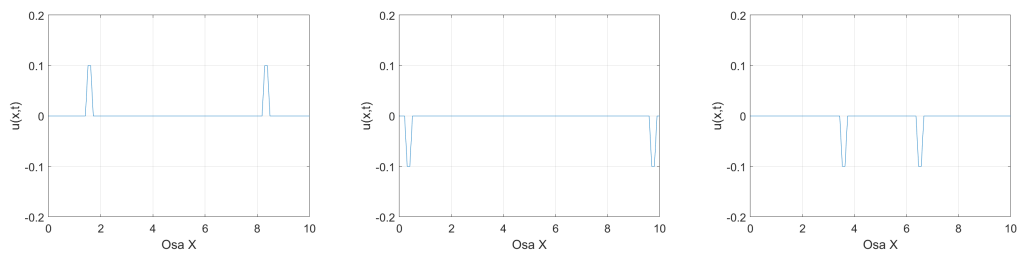
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f. \quad (112)$$

na 1D oblasti $\Omega = \langle 0, 10 \rangle$ pomocí diskretizačního schématu (98). Nejprve byl proveden test s Dirichletovou OP na obou koncích oblasti a předepsanou počáteční podmínkou v podobě peaku ve středu struny - viz Obr. (20).



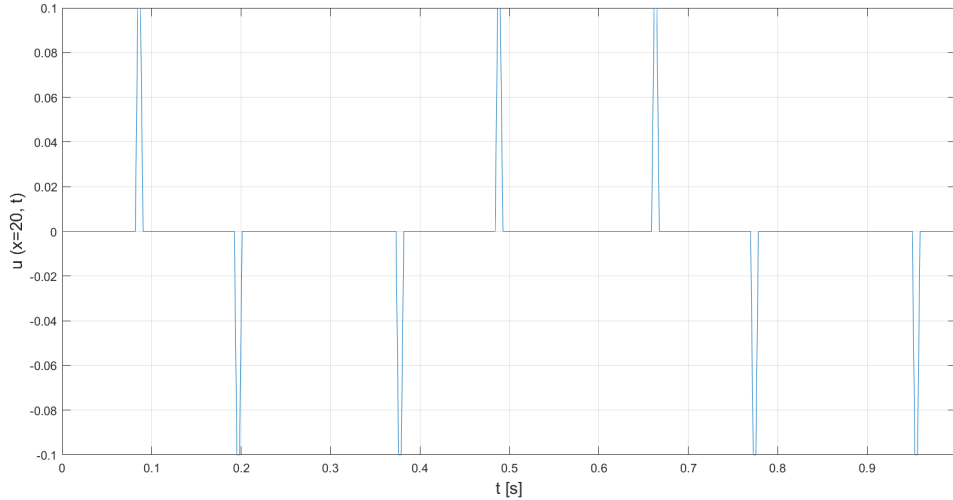
Obrázek 20: Počáteční podmínka pro první test řešení vlnové rovnice na 1D oblasti: Puls o amplitudě 0.1, 0.4 a 0.1 je umístěn do uzlů 49, 50 a 51 ze 100 - odpovídajících středu struny délky 10.

Na Obr. (21) jsou vybrány snímky z průběhu řešení úlohy v čase. Puls, který se oblastí šíří je na krajích odražen zpět s opačnou, ale stejně velikou amplitudou.



Obrázek 21: Časový průběh řešení vlnové rovnice se zadanou počáteční podmínkou (puls ve středu), Dirichletovou OP na obou koncích 1D oblasti ($u_D = 0$ pro $x=0$ a $x=10$).

Dále byl vybrán jeden bod ($x=20$), ve kterém byl zaznamenán průběh řešení v závislosti na čase. Na Obr. (22) je tento průběh vyneseno pro časový interval T délky 1 s. Je zde patrný několikanásobný průchod odraženého pulsu - odrazu opět odpovídá záporná amplituda.

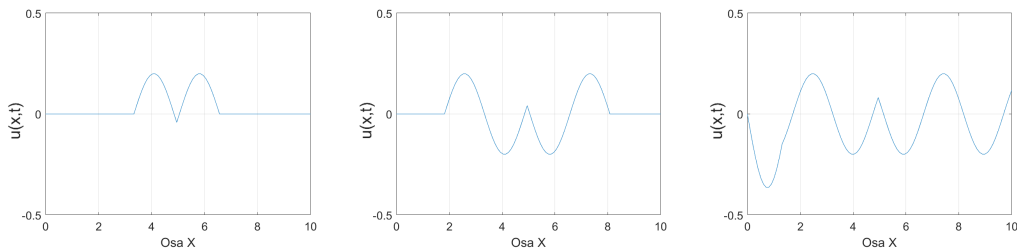


Obrázek 22: Časová závislost řešení 1D vlnové rovnice v bodě $x=20$ pro časový interval 1 s, pro zadaný počáteční puls s odrazivou Dirichletovou OP na koncích oblasti ($x=0$ a $x=10$).

Další úlohou bylo řešení rovnice (112), ovšem s odlišnými OP a PP. Pro $x=0$ ('levý konec') byla opět předepsána Dirichletova OP, ale pro $x=10$ ('pravý konec') Sommerfeldova OP dle rovnic (100). Místo počátečního pulsu byl do středu ($x=50$) předepsán časově harmonický zdroj tvaru:

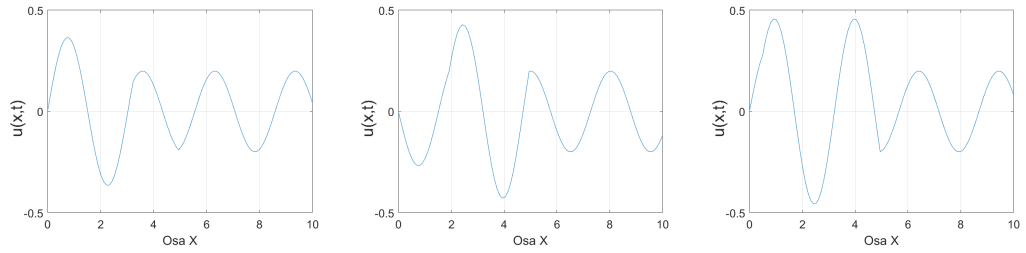
$$u(50, t) = dt^2 20 \sin(20\pi \frac{t}{T}), \quad (113)$$

kde t je čas, dt časový krok a T celkový časový interval ($T=1$ s). Volba této specifické harmonické funkce je arbitrární, jde pouze o příklad sloužící k přehledné demonstraci schématu. Průběh řešení takto definované úlohy je na Obr. (23) a (24). Je zde patrný odraz od levého konce struny ($x=0$), způsobující interferenci mezi odrazem a incidenčním vlněním. V pravé polovině grafů naopak k podobnému jevu nedochází, vlna je na pravém konci ($x=10$) bez odrazu pohlcena. Opět jako v předchozí úloze

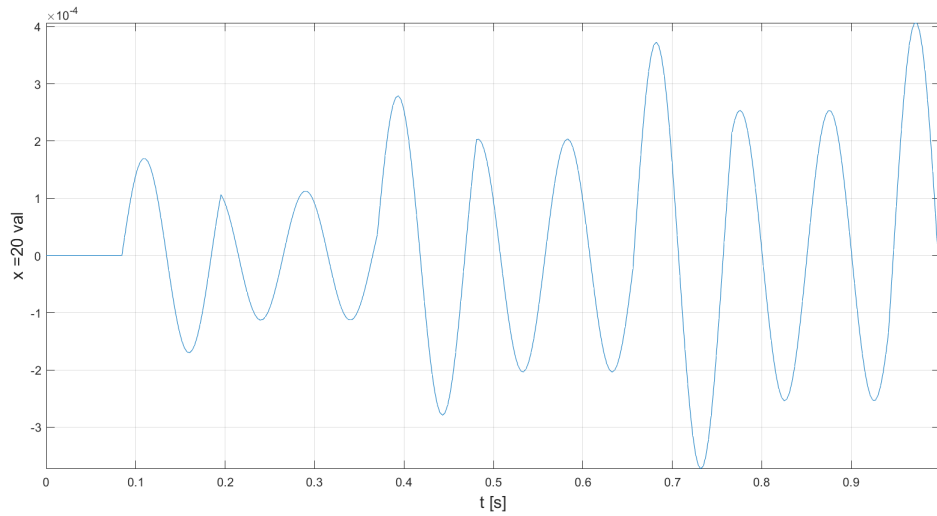


Obrázek 23: Časový průběh řešení vlnové rovnice se zadaným zdrojem buzení ve středu s Dirichletovou OP pro ($x=0$), a Sommerfeldovou OP pro ($x=10$).

je zvolen pevný bod ($x=20$), ve kterém je vynesena průběh řešení v čase v intervalu $T=1$ s. Tento průběh je vynesena na Obr. (25).



Obrázek 24: Pokračování časového průběhu řešení vlnové rovnice se zadaným zdrojem buzení ve středu s Dirichletovou OP pro $(x=0)$, a Sommerfeldovou OP pro $(x=10)$.



Obrázek 25: Časová závislost řešení 1D vlnové rovnice v bodě $x=20$ pro zadané externí buzení.

5.4.2 Řešení vlnové rovnice na 2D oblasti

Srovnání se známým analytickým řešením, obdobné jako v případě Poissonovy úlohy v kapitole (3.6), bylo provedeno i pro vlnovou rovnici v časové doméně pomocí metody sítí v prostředí MATLAB. Řešíme úlohu:

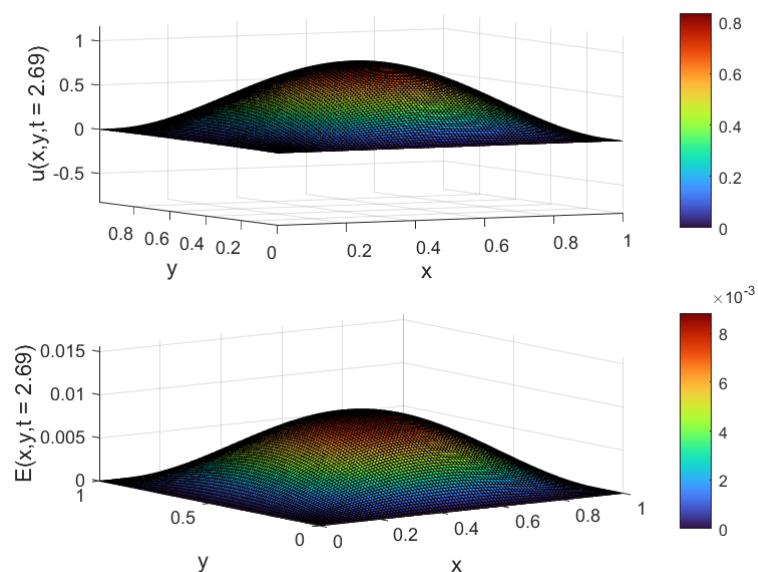
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \text{ v } \Omega = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle, \quad (114)$$

$$u_D = 0 \text{ na } \partial\Omega$$

a analytické řešení

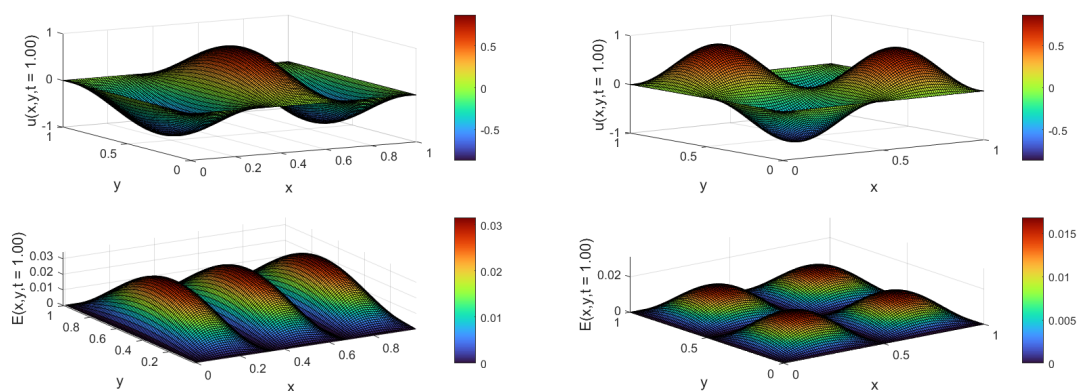
$$u_D = \sin(p\pi x) \sin(q\pi y) \text{ v } \Omega, \quad (115)$$

s námi volenými koeficienty p a q . Diskretizace úlohy byla realizována pomocí explicitního schématu popsaném v (103). Srovnání numerického řešení oproti analytickým hodnotám a absolutní odchylky jsou na Obr. (26) - v rovnici (115) voleno $p = 1$,



Obrázek 26: V horní části: numerické řešení vlnové rovnice se známým analytickým řešením na čtvercové oblasti s Dirichletovou OP na hranici. Ve spodní části: hodnota absolutní odchylky od analytického řešení. Vykresleno pro parametry $p = 1$, $q = 1$.

$q = 1$ a (27) - zde je na levém obrázku vyneseno řešení pro $p = 1$, $q = 3$ a na pravém pro $p = 2$, $q = 2$.



Obrázek 27: V horní části: numerické řešení vlnové rovnice se známým analytickým řešením na čtvercové oblasti s Dirichletovou OP na hranici. Ve spodní části: hodnota absolutní odchylky od analytického řešení. Vykresleno pro různé parametry p, g : $p = 1$, $q = 3$ vlevo, $p = 2$, $q = 2$ vpravo.

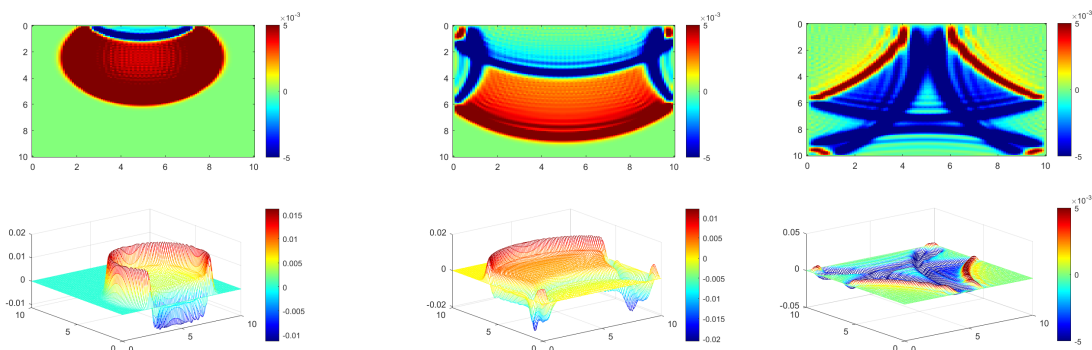
5.4.3 Řešení vlnové rovnice na jednoduché oblasti s užitím Dirichletovy okrajové podmínky

Řešíme rovnici:

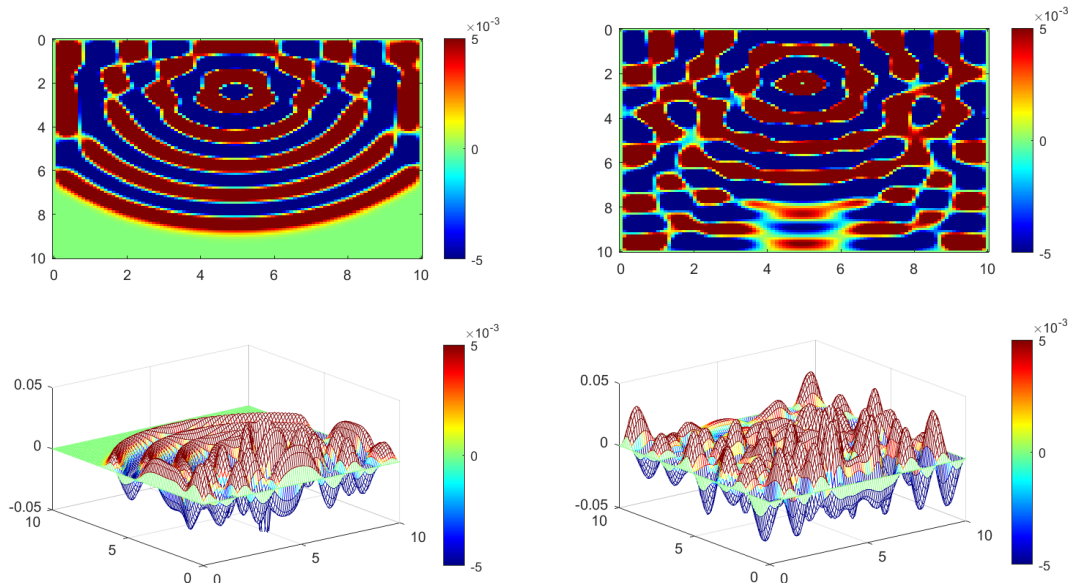
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f \text{ v } \Omega = \langle 0, 10 \rangle \times \langle 0, 10 \rangle, \quad (116)$$

kde $u = u(x, y, t)$, pro kterou je použité explicitní diskretizační schéma (103). Pro přehlednost a snazší srovnání je nejprve na Obr. (28) vynesena časový vývoj šíření jedné vlny ze zdroje v bodě $[5, 2]$ na oblasti s odrazivou Dirichletovou OP na hranici, na Obr. (29) potom stejný případ, pro vlnu harmonicky buzenou s předpisem $u = dt^2 50 \sin(30\pi \frac{t}{T})$, kde t je čas, dt je časový krok a T celkový časový interval.

Pro oba případy je patrný výrazný zpětný odraz od stěn oblasti a interference se zbytkem vlny, případně s následující vlnou. Pro harmonický zdroj interferenční obrazec přechází složitostí téměř do nečitelnosti.



Obrázek 28: Časový vývoj řešení vlnové rovnice na oblasti jednotkového čtverce. Zdroj vlny je umístěn v bodě $[5, 2]$, na hranách oblasti je Dirichletova OP.

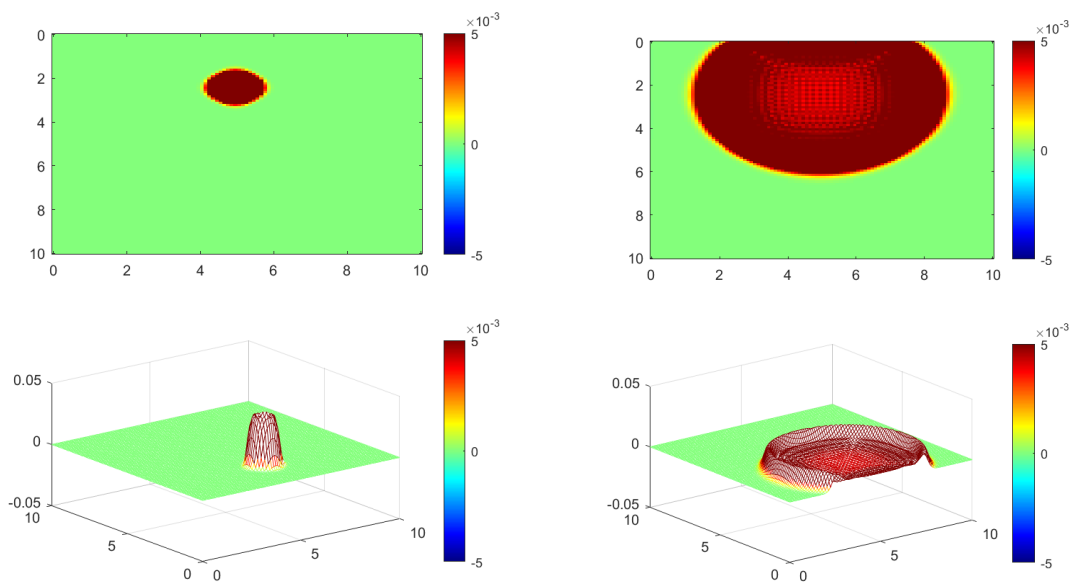


Obrázek 29: Časový vývoj řešení vlnové rovnice na oblasti jednotkového čtverce. Zdroj vlny je časově harmonický, umístěný v bodě $[5,2]$, na hranách oblasti je Dirichletova OP.

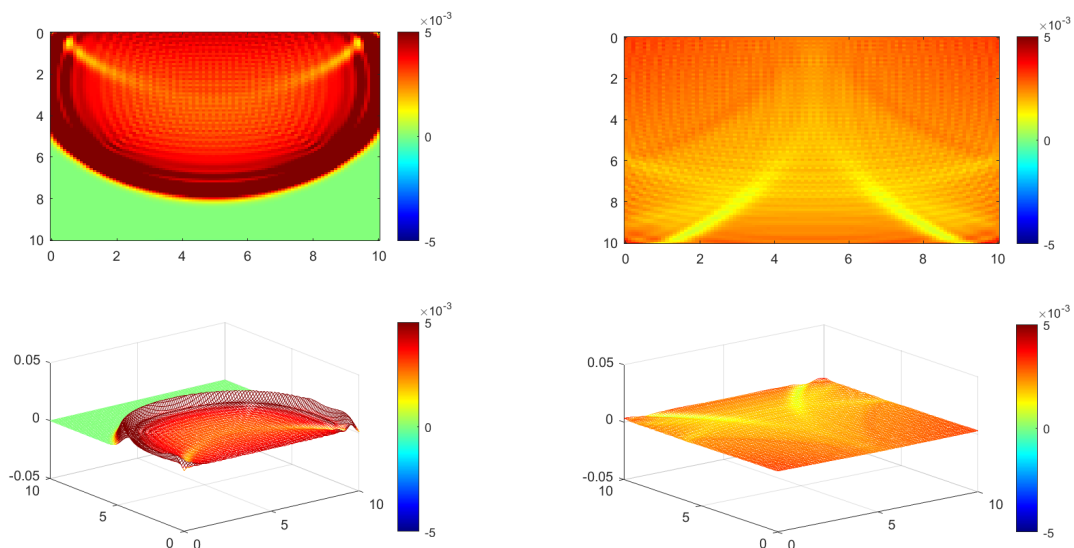
5.4.4 Řešení vlnové rovnice na jednoduché oblasti s užitím Sommerfeldovy okrajové podmínky

V dalším kroku byla řešena zcela stejná úloha jako v předešlém případě, ovšem s aplikovanou Sommerfeldovou pohlcující okrajovou podmínkou na hranicích oblasti dle schématu (105). Průběh řešení pro jednu vlnu šířící se ze zdroje je a Obr. (30) a (31).

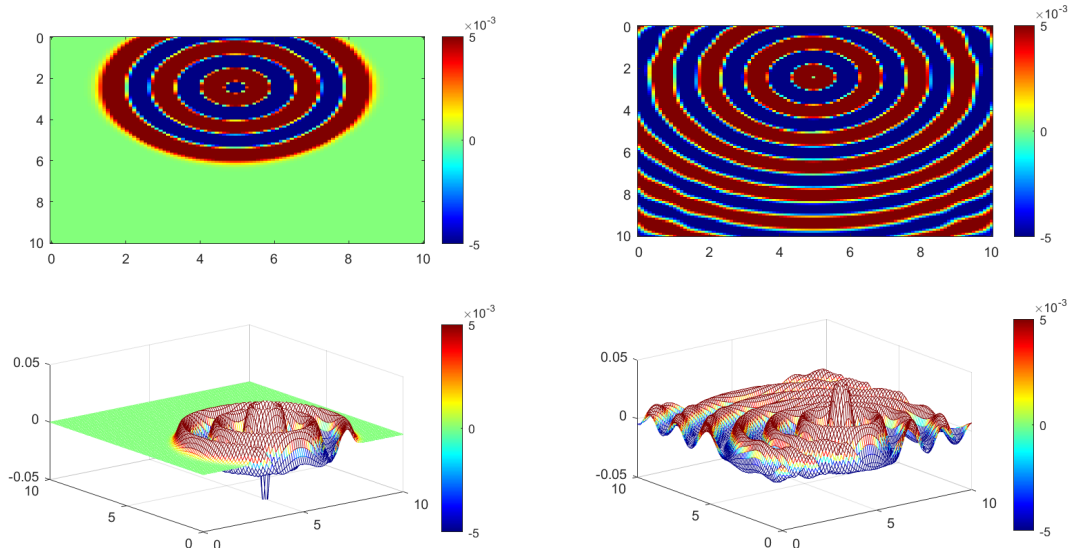
Na tomto vývoji je i přes pohlcující OP patrný malý zpětný odraz. Ten je způsoben tím, že schéma pohlcující podmínky umožňuje 'pohltnutí' pouze tu část přichodící vlny odpovídající směru vnější normály oblasti. Tento problém na 1D oblasti vůbec nevyvstává, nicméně ve vyšších dimenzích je na něj třeba pamatovat. Část vlny, která svírá s vnější normálou hranice nenulový úhel incidence je v ploše a v prostoru odražena. Tato část je ale poměrně malá (jak je patrné z měřítka), a v případě harmonického zdroje na Obr. (32) je vzniklá interference téměř neznatelná.



Obrázek 30: Časový vývoj řešení vlnové rovnice na oblasti jednotkového čtverce. Zdroj vlny je umístěn v bodě $[5,2]$, na hranách oblasti je Sommerfeldova OP.

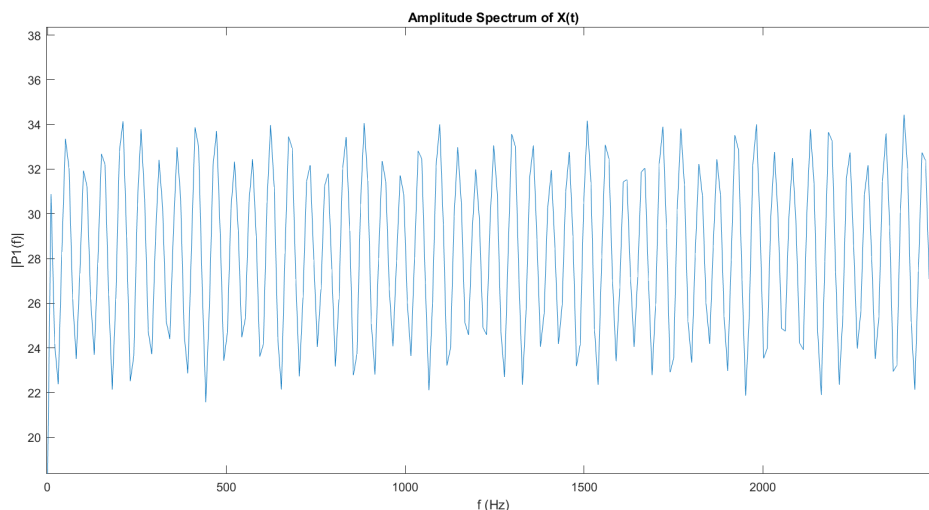


Obrázek 31: Pokračování časového vývoje řešení vlnové rovnice na oblasti jednotkového čtverce. Zdroj vlny je umístěn v bodě $[5,2]$, na hranách oblasti je Sommerfeldova OP.



Obrázek 32: Časový vývoj řešení vlnové rovnice na oblasti jednotkového čtverce. Zdroj vlny je časově harmonický, umístěný v bodě $[5,2]$, na hranách oblasti je Sommerfeldova OP. Interference se zpětným odrazem od hranic oblasti je téměř zanedbatelná.

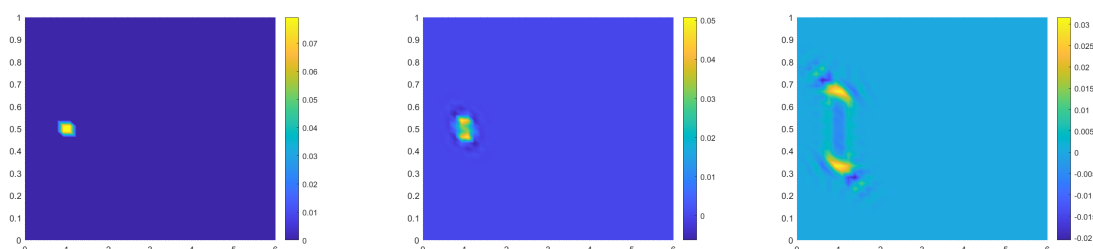
Obdobně jak je tomu pro 1D případ na Obr. (22) a (25), i na složitější 2D oblasti, jako je oblast vokálního traktu, lze také ve zvoleném bodě 'snímat' přenosovou funkci. Na Obr. (33) je vynesena přenos harmonického signálu (o frekvenci 330 Hz) na výstupu z vokálního traktu.



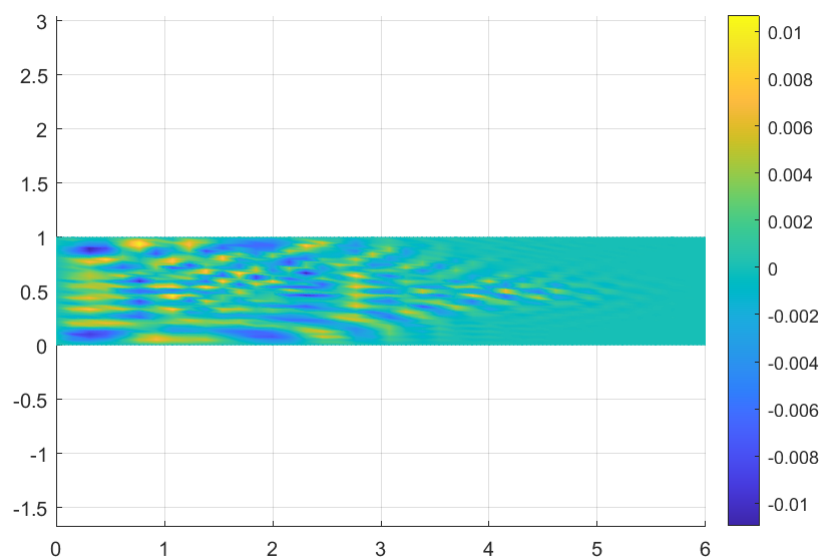
Obrázek 33: Průběh přeneseného signálu o frekvenci 330 Hz snímaném ve zvoleném bodě $[17,0]$ na výstupu z vokálního traktu.

5.4.5 Řešení vlnové rovnice MKP diskretizací na oblasti popsané nestrukturovanou sítí

Nakonec bylo realizováno řešení vlnové rovnice ve tvaru (107) na oblasti obdélníku s Dirichletovou OP, popsané pomocí nestrukturované sítě vygenerované prostředím Gmsh. Bylo použito implicitní časové diskretizační schéma definované jako (108). Průběh šíření zdrojového pulsu z vybraného bodu $A=[1, 0.5]$ je na Obr. (34). Podobně jako v MKD schématu způsobuje Dirichletova OP na hranicích oblasti odraz incidenčních vln, a na oblasti vzniká interferenční obrazec, jako je na Obr. (35). Byla také otestována možnost řešení pomocí explicitního schématu (111), ovšem to se ukázalo jako výpočetně velmi náročné z důvodu nutnosti velmi malého časového kroku. Ten je ostatně značně malý i pro implicitní schéma ($dt = 10^{-6}s$).



Obrázek 34: Časový vývoj řešení vlnové rovnice na oblasti obdélníka velikosti 1 x 6. Zdroj vlny je umístěn v bodě $[1, 0.5]$, na hranicích oblasti je Dirichletova OP.



Obrázek 35: MKP řešení vlnové rovnice na oblasti obdélníka velikosti 1 x 6 s Dirichletovou OP na hranicích po uplynutí časového intervalu $T=3E(-3)s$.

6 Závěr

V rámci práce byly řešeny různé matematické modely popisující šíření akustického signálu, a to z pohledu frekvenční analýzy a časového vývoje a byl zkoumán vliv různých okrajových podmínek.

Za účelem seznámení se s problematikou šíření akustického signálu byl nejprve zpracován teoretický základ zahrnující popis fyzikálních jevů a zákonů, se kterými se v rámci práce setkáváme, jako je tvorba a modulace lidského hlasu, vlastní frekvence a rezonance systému a přenos signálu. Následně byl odvozen matematický popis těchto jevů. Byla odvozena, a následně pro účely MKP diskretizována Helmholtzova a vlnová rovnice. Práce se také zaměřuje na zásadní vliv okrajových podmínek na řešení jednotlivých úloh.

V rámci přiblížení základních principů MKP byla metoda nejprve použita na modelovou Poissonovu úlohu, pro vlnovou rovnici bylo řešení připraveno nejprve v 1D prostoru. Poté byl vytvořen numerický model i pro složitější problémy. V průběhu práce je také zkoumána chyba výpočtů vůči známým analytickým hodnotám a z této odchylky je postupným zjemňováním sítě je určen řád metody .

K řešení Helmholtzovy rovnice ve frekvenční oblasti je přistupováno dvěma způsoby: řešení rezonance pomocí vlastních čísel operátoru a pozorováním přenosu signálu na oblasti v rámci frekvenčního spektra.

Zde je pozorována rostoucí chyba metody pro vyšší vlastní frekvence - nejjednodušším řešením tohoto problému je zjemnění sítě, ovšem za cenu výpočetního času a výkonu. V rámci dalšího studia by mohl být zajímavý bližší pohled na vliv nejen jemnosti sítě, ale i zvýšení stupně polynomu bázových funkcí.

Zesílení vybraných frekvencí je porovnáno pro různá umístění zdroje vůči snímači a i přes různé absolutní hodnoty přeneseného perturbačního tlaku je patrné, že systém rezonuje na stejných frekvencích nezávisle na umístění zdroje.

Vlnová rovnice je řešena pomocí MKD a MKP také v časové doméně. Bylo použito explicitní i implicitní časově-diskretizační schéma. Ovšem explicitní schéma, citlivé na velikost časového kroku vyžaduje pro MKP na složitějších oblastech příliš dlouhý výpočetní čas. Při řešení úlohy je patrný zásadní vliv pohlcující okrajové podmínky, pomocí které v rámci omezené výpočetní oblasti simulujeme oblast otevřenou do nekonečna. I při aplikaci pohlcující OP je na oblasti pozorovatelný malý zpětný odraz. Ten je způsoben tím, že okrajová podmínka je schopna pohltit pouze část vlny šířící se ve směru normály k hranici oblasti.

Naopak při odrazivých okrajových podmínkách vznikají na oblasti výrazné interferenční obrazce.

Reference

- [1] Kaltenbacher, M., *Aeroacoustics: Flow Induced Sound- Lecture notes for the Summer School and Workshop: Waves in Flows*. 2018. Dostupné z: shorturl.at/aenpB.
- [2] Kaltenbacher, M., *Numerical Simulation of Mechatronic Sensors and Actuators: Finite Elements for Computational Multiphysics*. 3. vydání. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg. 2015. ISBN 978-3-642-40169-5.
- [3] Brdička, M., Samek, L., Sopko, B. *Mechanika kontinua*. 3. vydání. Academia. Praha. 2005. ISBN 80-200-1344-X.
- [4] Sváček, P., Feistauer, M. *Metoda konečných prvků*. Nakladatelství ČVUT. Praha. 2006. ISBN 80-01-03522-0.
- [5] Whiteley, J., *Finite Element Methods: A Practical Guide*. Springer International. 2017. ISBN 978-3-319-49970-3.
- [6] Titze, I. R., *Principles of Voice Production* National Center for Voice and Speech. Iowa. 2000. ISBN 0-87414-122-2.
- [7] Howe, M. S., *Acoustics of Fluid-Structure Interactions*. Cambridge University Press. Boston. 1998. ISBN 0-521-63320-6.
- [8] Lighthill, M. J., Newman, M. H. A., *On sound generated aerodynamically I. General theory*. Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences, volume 211, number 1107, pages 564-587, Royal Society Publishing, 1952.
- [9] Polyanin a.D., *Helmholtz Equation*, EqWorld: The World of Mathematical Equations. Dostupné z: shorturl.at/kzFLQ.
- [10] Drábek, P., Holubová, G. *Parciální diferenciální rovnice*. Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd. Plzeň. 2011.
- [11] Kračmar, S., *Parciální diferenciální rovnice II*. Poznámky k přednáškám. Dostupné z stakr.me.cz/PDRII_p%C5%99edn%C3%A1%C5%A1ky.pdf. FS ČVUT. 2020.
- [12] Geuzaine C., Remacle J.F., *A three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities*. <https://gmsh.info/>.
- [13] Feynman, R. P., Leighton, R. B., Sands, M. *Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady*. 1. vydání. Fragment. Praha. 2000. ISBN 80-7200-405-0.
- [14] Bergmann, B., Epple, M., Ungar, R. *Transcending Tradition: Jewish Mathematicians in German Speaking Academic Culture*. anglické vydání. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg. 2012. ISBN 978-3-642-22463-8.
- [15] Nožička, J., *Dynamika plynů*. Nakladatelství ČVUT. Praha. 2005.

- [16] Horáček, J. *Vlivy akusticko-strukturálních vazeb na kmitání mechanických systémů*. Strojnický časopis, ročník 43, č. 5. 1992.
- [17] Sommerfeld a. *Partial Differential Equations in Physics*. Academic Press, New York. New York. 1949.
- [18] Ihlenburg, F., *Finite Element Analysis of Acoustic Scattering*. Springer-Verlag. New York. 1998. ISBN 0-387-98319-8.
- [19] Wolfram Language & System Documentation Center, *Acoustics in the Time Domain*, cit. [2021-12-7]. Dostupné z: shorturl.at/gvLM1.
- [20] MathWorks Help Center, *eig: Subset of eigenvalues and eigenvectors*, cit. [2021-11-15]. Dostupné z shorturl.at/hoKOX.
- [21] MathWorks Help Center, *Specify Boundary Conditions*, cit. [2021-12-7]. Dostupné z shorturl.at/adwPR.
- [22] Čermák, L., Hlavička, R., *Numerické metody*. Třetí vydání. Akademické nakladatelství CERM, s.r.o.. Brno. 2016. ISBN 978-80-214-5437-8.