Posudek oponenta bakalářské práce Tomáše Faikla
Spektrální analýza zakřivených metamateriálů

Matěj Tušek

24. srpna 2021

Předložená práce sestává z úvodu a čtyř číslovaných kapitol. Čtivě psaný úvod stručně představuje metamateriály a slouží tak jako fyzikální motivace pro zbytek práce. V první kapitole je z Maxwellových rovnic rovnic pro elektrické pole ve kvazistatické aproximaci odvozena jistá lineární diferenciální rovnice druhého řádu, která ale zjevně postrádá eliptičnost, což nás přivádí mimo důvěrně známé vody a činí tak problém matematicky zajímavějším. Cílem autora bylo levou stranu této rovnice, která není nic jiného než indefinitní laplacián, zavést jako (v podstatě) samosdružený operátor na vhodně zvoleném Hilbertově prostoru a následně se zabývat jeho spektrální analýzou. Dále první kapitola obsahuje několik základních definic z teorie neomezených operátorů. Další definice a standardní výsledky funkcionální analýzy jsou připomenuty i v rámci dalších kapitol.

Druhá kapitola připomíná výpočet vlastních hodnot a vlastních funkcí druhé derivace/Laplaceova operátoru s Dirichletovou a Neumannovou okrajovou podmínkou na úsečce/obdélníku. Třetí kapitola je věnována samosdruženosti a spektrální analýze dříve odvozeného indefinitního laplaciánu. Vzhledem k tomu, že koeficienty laplaciánu jsou po částech konstantní, lze se v této části práce silně opírat o výsledky druhé kapitoly. Je třeba vyzdvihnout, že třetí kapitola do jisté míry zobecňuje článek školitele autora (J. Behrndt, D. Krejčiřík: An indefinite Laplacian on a rectangle, Journal d'Analyse Mathématique, 134, 2018)! Na druhou stranu důkaz důležitého Tvrzení 3.2 je neúplný a obsahuje jisté nesrovnalosti-více viz otázky k obhajobě.

Ve čtvrté kapitole je studovaný model přenesen na dvourozměrné variety s konstantní křivostí, což nově znamená na sféru a pseudosféru. I zde se autorovi podaří odvodit *charakteristickou rovnici* pro vlastní čísla. Samosdruženost je dokázána pomocí rozkladu do direktní sumy, který vychází ze separace proměnných na obdélníku, spolu s vhodně zvolenými unitárními transformacemi, které jednotlivé operátory rozkladu převádí na hermitovské poruchy operátorů, jejichž samosdruženost již byla dříve odvozena. I zde zdůrazňuji, že se jedná o původní výsledky.

Bakalářská práce se mi jeví pečlivě sepsaná, s malým počtem překlepů, téměř bez formálních nedostatků a relativně velkého rozsahu. Vyjma důkazu Tvrzení 3.2 se mi předložené důkazy zdají správné. Pár drobnějších připomínek vyjmenuji níže. Tomáš Faikl se v předstihu dokázal seznámit s vybranými tématy funkcionální analýzy i diferenciálního počtu na riemannovských varietách a následně je aplikovat na model s rozhraním materiál/metamateriál. Navíc si výborně poradil s prezentací výsledků pomocí numerických metod. Bakalářskou práci Tomáše Faikla proto navrhuji hodnotit známkou **A** (výborně).

Kritické připomínky

- V Definici 1.1 musí být A hustě definovaný. V popisu $\mathrm{dom}(A^*)$ má stát $\forall \psi \in \mathrm{dom}(A)$.
- Na straně 14 dole by mělo stát, že $W_0^{1,2}$ je uzávěr v $W^{1,2}$, nikoliv L^2.
- V (3.11) a dále jsou najednou parametry a, b fixní, $a = b = 1$.
- Na obrázcích 3.4–6 je λ najednou značeno jako x, což je spolu s tím, že červené puntíky označují průsečíky a nikoliv vlastní čísla, ještě více matoucí.
- V (3.22b) vystupuje $\mathbf{n}$ ve dvou významech tak, že fakticky by platilo $\mathbf{n} = -\mathbf{n}$.
- V Tvrzení 3.2 asi chybí "klademe $\lambda_{n,0}$= $\mathbf{0}$".
- Ve Větě 3.5 chybí důležitá podmínka, že $\lambda_n \in \mathbb{R}$.
- V závěru důkazu Lemmatu 3.7 má patrně být "bázi $L^2((-b, a))$" místo "bázi $H^2((-b, a))$".
- Na obrázku 4.2 (a) není dle mého zobrazen obdélník na pseudosféře. Nicméně jedná se o převzatý obrázek a vlastní obrázek 4.5, který zobrazuje totéž, se jeví v pořádku.
- Druhá rovnost v (4.20) není rigorózní, protože P^m zobrazuje do $L^2(J_1 \times J_2)$ ale A_k^m působí na $L^2(J_1)$.
- V (4.27) občas chybí kvadráty.
- Důkaz posledního bodu Věty 4.5 není úplně přehledný.
- V závěru důkazu Lemmatu 4.10 se hledají vázané extrémy kvadratické funkce (jejíž graf je paraboloid) na **kružnici**. Argumentu s elipsou nerozumím.

Dotazy k obhajobě

1. V (3.9) a (3.10) bez komentáře využíváte, že akce A^* je stejná jako akce A. Z čeho to plyne?

2. Jaká ψ_n uvažujete v rozkladu (3.27)? Dále předpokládám, že rozklad je konvergentní na $L^2(J_1 \times J_2)$, přičemž spojitost skalárního součinu, kterou se argumetuje v (3.30), platí na $L^2(J_2)$. (Zde bych navrhoval ihned použít separaci proměnných jako ve 4. kapitole.)

3. Druhý a třetí bod Tvrzení 3.2 nejsou správně dokázány. Například v jeden okamžik se předpokládá, že $\lambda_k \to \Lambda \neq \infty$ a záhy se píše $\lambda_k \to \infty$. Navíc výsledná limita neodpovidá ani jednomu. Dále v posledním odstavci se mi argument ani jeho provedení nezdají platné. Dokázal byste důkaz opravit?

4. Jak víme, že (3.23) má nekonečně kladných i záporných řešení?

5. Pod obrázkem 3.14 je psáno, že "Řešení konverguje k 0 exponenciálně". Proč je tomu tak?

V Praze dne 24.8. 2021 Ing. Matěj Tušek, Ph.D.