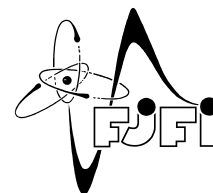




ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V
PRAZE
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská



Spektrální analýza zakřivených metamateriálů

Spectral analysis of curved metamaterials

Bakalářská práce

Autor: **Tomáš Faikl**

Vedoucí práce: **doc. Mgr. David Krejčířík, Ph.D. DSc.**

Akademický rok: 2020/2021

- Zadání práce -

- Zadání práce (zadní strana) -

Poděkování:

Chtěl bych zde poděkovat především svému školiteli doc. Mgr. Davidu Krejčířkovi, Ph.D, DSc. za trpělivost, vstřícnost a cenné rady při tvorbě této práce.

Čestné prohlášení:

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady uvedené v příloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti použití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonu (autorský zákon).

V Praze dne 28. července 2021

Tomáš Faikl

Název práce:

Spektrální analýza zakřivených metamateriálů

Autor: Tomáš Faikl

Obor: Matematická fyzika

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: doc. Mgr. David Krejčířík, Ph.D. DSc., Katedra matematiky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ČVUT v Praze

Abstrakt: Některé metamateriály mají záporný index lomu a mohou vytvářet nevšední optické efekty. Tato práce se zabývá operátory vyskytující se v operátorovém přístupu k popisu metamateriálů. Nejprve odvodíme operátory z kvazistatické aproximace Maxwellových rovnic. Dále prozkoumáme jejich vlastnosti a spektra v euklidovském prostoru. Nakonec se jimi budeme zabývat na dvourozměrné konstantně zakřivené varietě a porovnáme výsledky s euklidovským případem.

Klíčová slova: Fermiho souřadnice, indefinitní Laplacián, metamateriál, spektrální analýza, varieta

Title:

Spectral analysis of curved metamaterials

Author: Tomáš Faikl

Abstract: Negative-index metamaterials possess a negative refractive index and thus present an interesting substance for designing uncommon optical effects. This project deals with operators encountered in an operator-theoretic description of metamaterials. Firstly, the operators are derived from quasi-static approximation to Maxwell equations. Later, their properties and spectra are considered in Euclidian space. At the end, we will consider them also on two-dimensional constantly-curved manifolds and compare results to the Euclidian case.

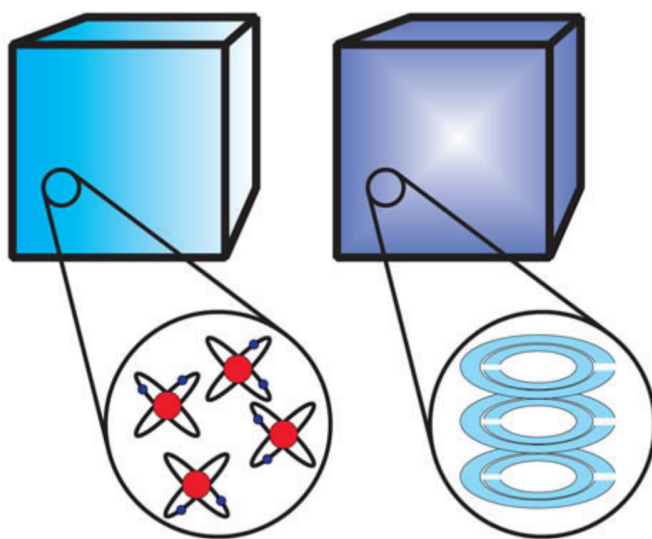
Key words: Fermi coordinates, indefinite Laplacian, manifold, metamaterial, spectral analysis

Obsah

Úvod	10
1 K matematickému modelu	13
2 Homogenní materiály v euklidovském prostoru	15
2.1 Homogenní struna	15
2.1.1 Dirichletovské okrajové podmínky	15
2.1.2 Neumannovské okrajové podmínky	16
2.2 Homogenní obdélník	16
3 Kompozitní materiály v euklidovském prostoru	18
3.1 Nehomogenní struna	18
3.1.1 Samosdružená rozšíření symetrických operátorů	19
3.1.2 Spektrum	22
3.2 Nehomogenní obdélník	26
3.2.1 Spektrum	27
3.2.2 Esenciální samosdruženost	35
4 Křivé variety	38
4.1 Laplace-Beltrami na riemannovské varietě	39
4.2 Hilbertův prostor na varietě (Ω_0, g)	39
4.3 Zavedení operátoru	40
4.4 Omezení	42
4.5 Separace proměnných	42
4.6 Unitární transformace	43
4.7 Řešení	45
4.7.1 Obecné řešení pro $K = 0$	45
4.7.2 Obecné řešení pro $K = 1$	45
4.7.3 Obecné řešení pro $K = -1$	47
4.8 Omezení na symetrický obdélník a ϵ	48
4.8.1 Křivost $K = 1$	48
4.8.2 Křivost $K = -1$	50
4.9 Esenciální samosdruženost	51
Závěr	53

Úvod

Metamateriál je uměle vyrobený materiál s pozoruhodnými vlastnostmi, které se běžně v přírodě nevyskytují. Podobně jako u běžných materiálů, které vděčí za své vlastnosti atomům, se u metamateriálů uplatňují jevy vyvstávající ze struktur v něm obsažených. Tyto struktury složené z atomů jsou často v objektu periodicky rozmístěny a jejich typickým znakem je velikost menší než vlnová délka jevu, který ovlivňují. V této práci se budeme výhradně zabývat jevy, kterým dávají vzniknout metamateriály se současně zápornou elektrickou permitivitou ϵ a magnetickou permeabilitou μ .



Obrázek 1: Konvenční materiály (nalevo) odvozují své vlastnosti z atomů. Na druhé straně, u metamateriálu (vpravo) je efektivní role atomů (vzhledem k interakci s elektromagnetickým zářením) převzata malými strukturálními podjednotkami. [13]

Takové materiály byly prvně zkoumány ruským fyzikem Viktorem Veselagem v roce 1967 na teoretické úrovni v [17]. Ukázal, že materiály se zápornými ϵ a μ mají vlastnosti nepozorované u běžných látek, například záporný index lomu. Ten je v anizotropním prostředí dán pomocí $n^2 = \epsilon\mu$.

Vyjděme z Maxwellových rovnic pro oblast bez nábojů ($c = 1$):

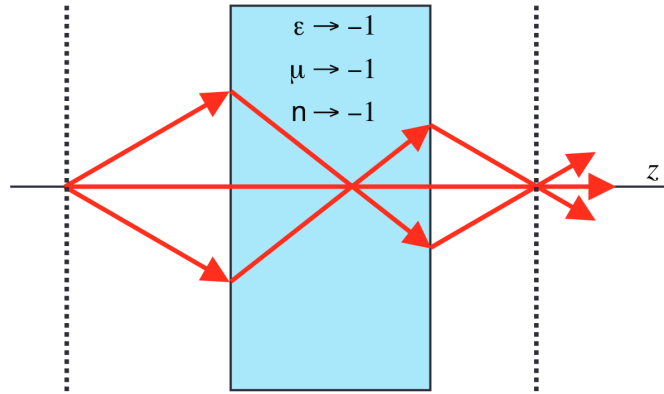
$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (0.1)$$

a pokusme se odvodit základní charakteristiky těchto metamateriálů z rovnic, kde se ϵ a μ vyskytují odděleně a jejich znaménka se navzájem nevyruší.

Dosaďme do rovnice (0.1) vztahy $\vec{B} = \mu \vec{H}$, $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$. Pro rovinnou monochromatickou vlnu jsou všechny veličiny úměrné $e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$, kde \vec{k} je vlnový vektor rovinné vlny, ω její úhlová frekvence a \vec{r} polohový vektor a vztahy se zjednoduší na

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega \mu \vec{H}, \quad \vec{k} \times \vec{H} = -\omega \epsilon \vec{E}.$$

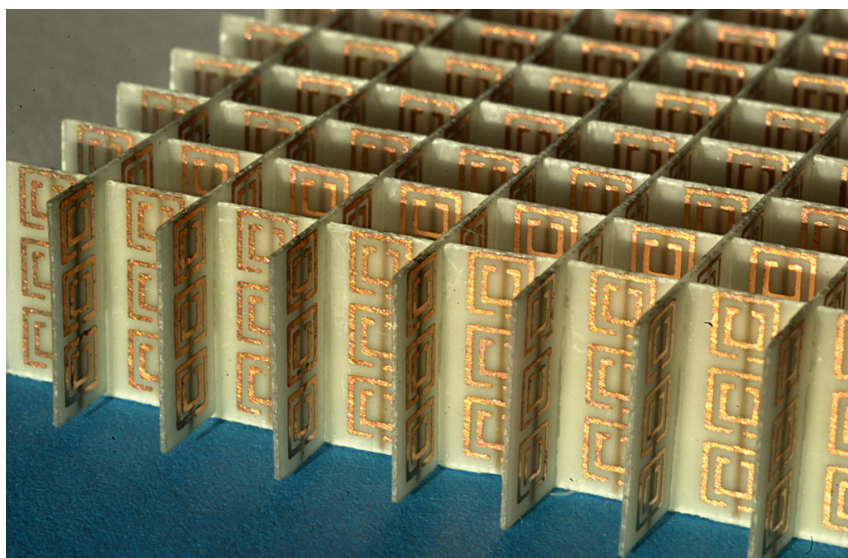
Z těchto rovnic už vidíme, že pro kladná ϵ a μ je soubor $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{H})$ pravotočivý soubor vektorů. Naopak pro záporné ϵ a μ se jedná o levotočivý soubor a odtud také pochází alternativní název „levotočivé“ pro tyto materiály. Poyntingův vektor $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ normálně míří ve směru \vec{k} , zde ale míří proti směru šíření vlny. To dává za vznik zajímavým efektům jako obrácený Dopplerův jev, obrácený kužel Čerenkovova záření, *superlensing* a metamateriálové cloakování [13].



Obrázek 2: Médium láme světlo do záporného úhlu vzhledem k povrchové normále. Po průchodu médiem jsou paprsky opět soustředěny v jednom bodu. [13]

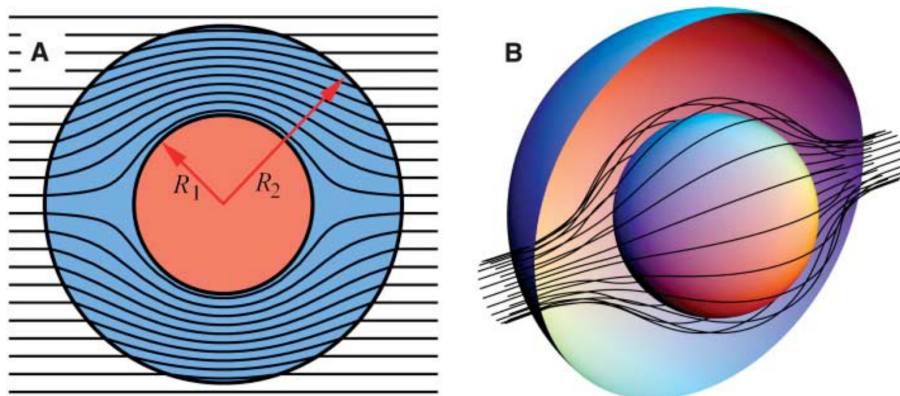
Bohužel, tyto efekty není možné dosáhnout pro všechny vlnové délky. Pokud by $\epsilon, \mu < 0$ byly konstantní, potom by i energie záření $W = \epsilon E^2 + \mu H^2$ byla záporná, což vede na spor. Vztah pro W tak musíme nahradit pro ϵ, μ závisující na vlnové délce světla pomocí $W = \frac{\partial \epsilon}{\partial \omega} E^2 + \frac{\partial \mu}{\partial \omega} H^2$, jak plyne z úpravy pro nekonstantní parametry. Přípustné jsou potom taková $\epsilon(\omega)$ a $\mu(\omega)$, pro která je energie kladná a typicky to jsou úzké oblasti spektra.

Látky se záporným ϵ byly na přelomu tisíciletí již známy delší dobu z fyziky plazmy, ale materiály se záporným ϵ i μ se podařilo navrhnout až na přelomu tisíciletí J. Pedrymu a jeho týmu v roce 1999 [14]. Klíčová struktura návrhu pro $\epsilon < 0$ byly velmi tenké a ideálně nekonečně dlouhé vodiče organizované v mřížkové struktuře vedoucí na chování podobné plazmatu. Naopak pro $\mu < 0$ byly navrženy tzv. „split ring resonators“ (SRR).



Obrázek 3: Split ring rezonátor (SRR) na desce spolu s měděnými dráty dohromady dávají zároveň $\epsilon, \mu < 0$. [13]

Od vytvoření prvního metamateriálu se toto odvětví aktivně rozvíjí. Jednou z velkých motivací výzkumu metamateriálů je právě tzv. plášť neviditelnosti, jak jsme zmínili dříve. Toho lze v principu dosáhnout několika přístupy — transformační optika [15], senzory a aktivní zdroje nebo lokalizovaná rezonance [12]. Pro přehled metod viz např. [6].



Obrázek 4: Tenzor permitivity ϵ a permeability μ materiálu mezi poloměry R_1 a R_2 je speciálně navržen tak, aby zóna pod poloměrem R_1 zůstala skryta. Při návrhu byla využito postupů transformační optiky [15].

V této práci se nebudeme zabývat přímo konstrukcí těchto zajímavých objektů, jelikož návrhů je mnoho. Často ale nejsou matematicky zkoumány, a tak se zaměříme namísto toho na matematicky korektní popis operátorů souvisejících s přechodem materiál-meta-materiál v různých geometrických situacích.

Kapitola 1

K matematickému modelu

Budeme uvažovat kvazistatickou aproximaci elektromagnetického pole a problémy pro elektrické a magnetické pole zvlášť tak nebudou propojené časovými derivacemi. Budeme dále pracovat pouze s elektrickým polem

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0. \quad (1.1)$$

Tyto rovnice představují Gaussův zákon a Faradayův zákon bez přítomnosti magnetického pole. Z diferenciální identity $\operatorname{rot} \operatorname{grad} = 0$ vidíme, že pole $\vec{E} = -\operatorname{grad} V$ je potenciální. Spolu s vztahem pro homogenní materiál $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ dostáváme pro potenciál V

$$-\operatorname{div}(\epsilon \operatorname{grad} V) = \rho. \quad (1.2)$$

Odvodili jsme tak vztah pro námi zkoumaný operátor na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= -\operatorname{div} \epsilon \operatorname{grad}, \\ \operatorname{dom} \tilde{A} &:= \{\psi \in L^2(\Omega) \mid A\psi \in L^2(\Omega), \psi|_{\partial\Omega} = 0\}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Dále ale budeme chtít definovat operátor s jiným definičním oborem, aby se nám s ním lépe pracovalo. Permittivitu ϵ budeme uvažovat skokově se měnící i se znaménkem na dvou podoblastech Ω - značící přechod mezi metamateriálem a materiálem. Oblast Ω budeme zkoumat v jednom rozměru (interval) i ve dvou rozměrech pro obdélník. Nakonec budeme uvažovat takový operátor i na riemannovských varietách. Operátory A na jednotlivých oblastech zadefinujeme v odpovídajících následujících sekcích.

Problematika stanovení definičních oborů neomezených operátorů je poměrně komplikovaná, když chceme zajistit, aby námi definovaný operátor měl určité „hezké“ vlastnosti, se kterými se dobře pracuje. Jednou z těchto užitečných vlastností je samosdruženost.

Definice 1.1. *Nechť A je operátor na Hilbertově prostoru \mathcal{H} . Potom sdružený operátor A^* je jednoznačně určen vztahem $\forall \phi \in \operatorname{dom}(A^*), \psi \in \operatorname{dom}(A) : (\phi, A\psi) = (A^*\phi, \psi)$. Definiční obor A^* je dán jako množina $\operatorname{dom}(A^*) = \{\phi \in \mathcal{H} \mid \exists \varphi \in \mathcal{H}, \forall \psi \in \mathcal{H}, (\phi, A\psi) = (\varphi, \psi), \text{ tj. } \varphi =: A^*\phi\}$.*

Definice 1.2. Operátor A na Hilbertově prostoru \mathcal{H} je symetrický, když pro všechna $\phi, \psi \in \text{dom}(A)$ platí $(\phi, A\psi)_{\mathcal{H}} = (A\phi, \psi)_{\mathcal{H}}$, kde $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$ značí skalární součin.

Definice 1.3. Operátor A je samosdružený, když je symetrický a $\text{dom}(A) = \text{dom}(A^*)$.

Pro samosdružený operátor A například platí, že spektrum je reálné. Vlastní vektory A tvoří ortonormální bázi, pokud A má prázdné tzv. esenciální spektrum. V kvantové mechanice jsou samosdružené operátory velmi důležité – představují pozorovatelné fyzikálního systému a jejich reálná vlastní čísla odpovídají měřitelným hodnotám fyzikálním pozorovatelným, které zajisté jsou reálné. Nicméně existují i formulace kvantové mechaniky bez hermitovských operátorů [11].

Mějmě Hilbertův prostor \mathcal{H} . Pro operátor A a jeho sdružení A^* na \mathcal{H} platí v případě hermitovského operátoru inkluze $A \subset A^*$ (ve smyslu inkluze definičních oborů, jejich hodnoty se na průniku shodují). Pokud bychom uvažovali symetrické rozšíření \tilde{A} operátoru A , potom platí $A \subset \tilde{A} \subset \tilde{A}^* \subset A^*$. Otázka nalezení definičního oboru tak, aby A byl samosdružený, je poměrně jemná záležitost.

Představme si případ pro konstantní $\epsilon = 1$, potom $\tilde{A} = -\Delta$ (laplacián). Pokud chceme, aby laplacián na obdélníku byl samosdružený, ukazuje se (např. [9]), že musíme volit definiční obor v termínech tzv. Sobolevových prostorů $H_0^1 = W_0^{1,2}$ [1]. Sobolevův prostor $W^{n,p}(\Omega)$ je prostor funkcí z $L^p(\Omega)$, jejichž slabé derivace (ve smyslu testovacích funkcí) do n -tého řádu jsou stále v $L^p(\Omega)$. V případě $p = 2$ můžeme značit $W^{n,2} = H^n$. Na $W^{1,2}$ můžeme zavést normu $\|\psi\|_{W^{1,2}} := \sqrt{\|\psi\|_{L^2}^2 + \|\nabla\psi\|_{L^2}^2}$. Prostor $W_0^{1,2} = H_0^1 \subset H^1$ je uzávěr $\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{1,2}}}$ v $L^2(\Omega)$.

Podobné definiční obory využijeme i pro naše operátory na omezené oblasti dále v textu. Uvažované operátory budou více exotičtější, kvůli podmínce na rozhraní dvou materiálů, kterou prozkoumáme dále v práci. Uvidíme, že definiční obor operátoru bude postrádat určitou regularitu v okolí přechodu, viz [2]. Dokonce, což není u operátorů na omezené oblasti běžné, se za určitých předpokladů objeví i neprázdné esenciální spektrum.

Kapitola 2

Homogenní materiály v euklidovském prostoru

Zabývejme se nejprve jedno a dvourozměrnými homogenními materiály bez přechodů a později přistupme k jejich analogiím s přechodem mezi materiálem a metamateriálem.

2.1 Homogenní struna

Mějme strunu $M = (0, a)$ v jednorozměrném prostoru a zkoumejme pro konstantní $\epsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ diferenciální výraz

$$-\nabla \cdot (\epsilon \nabla f) = -\epsilon f''.$$

Dodejme, že je možné strunu definovat na libovolném intervalu $[b, b+a]$, na spektrum tato transformace nemá vliv a u vlastních vektorů stačí nakonec provést substituci $x \mapsto x - b$.

2.1.1 Dirichletovské okrajové podmínky

Stanovme definiční obor operátoru $A_D : L^2(M) \rightarrow L^2(M)$ na

$$\text{dom } A_D = \{f \in H_0^1(M) \mid f'' \in L^2(M)\} \quad (2.1)$$

a hledejme vlastní čísla a vektory operátoru A_D .

Lemma 2.1. *Řešení rovnice $z'' = Kz$ může netriviálně splňovat okrajové podmínky (2.1) právě tehdy, když $K < 0$. Vyhovující řešení má tvar $z(x) = A \sin(\sqrt{-K}x)$, $\sqrt{-K} = \frac{n\pi}{a}$, $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}$ libovolná konstanta.*

Důkaz. Příímým výpočtem. Pokud $K > 0$, dostáváme $z(x) = Ae^{\sqrt{K}x} + Be^{-\sqrt{K}x}$. Z okrajových podmínek dostáváme $\sinh(\sqrt{K}a) = 0$ a $A = -B$. To vede ale na triviální řešení.

Pokud $K = 0$, dostáváme lineární funkci, která okrajové podmínky může splňovat také pouze triviálně.

Pro $K < 0$ už dostáváme řešení $z(x) = A \cos(\sqrt{-K}x) + B \sin(\sqrt{-K}x)$ z podmínek $\sin(\sqrt{-K}a) = 0$ a $A = 0$. \square

Pro dielektrikum $\epsilon > 0$ můžeme jednoduše najít řešení $A_D f = \lambda f$, jednoduchými úpravami rovnici převedeme do tvaru z Lemma 2.1 pro $K = -\frac{\lambda}{\epsilon}$ a obdržíme

$$\lambda_n = \epsilon \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2, \quad f_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \left(\frac{n\pi}{a} x \right), \quad n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}. \quad (2.2)$$

Pro metamateriál $\epsilon < 0$ postupujeme stejným způsobem. Aby ale $K < 0$, musí být také $\lambda < 0$. Dostáváme tak stejné vlastní čísla (pouze s opačným znaménkem kvůli znaménku ϵ). Příslušné vlastní vektory jsou také stejné.

Opravdu se jedná se o ortonormální bázi $L^2(M)$. K tomu stačí uvažovat následující postup. Mějme Hilbertův prostor $L^2((0, a))$ a uvažujme libovolnou funkci ψ z tohoto prostoru. Tuto funkci můžeme *liše* rozšířit na celé $(-a, a)$, toto rozšíření označíme $\tilde{\psi}$. Potom $\tilde{\psi} \in L^2((-a, a))$. Na tomto prostoru existuje [16] ortonormální úplná množina (báze) trigonometrických funkcí $\{\frac{1}{\sqrt{2a}}, s_n = \frac{1}{\sqrt{a}} \sin \frac{2\pi n x}{a}, c_n = \frac{1}{\sqrt{a}} \cos \frac{2\pi n x}{a}\}$. Při počítání Fourierových koeficientů funkce $\tilde{\psi}$ budou nenulové pouze koeficienty $(\tilde{\psi}, s_n)$, neboť v ostatních členech se vyskytuje integrál ze součinu liché ($\tilde{\psi}$) a sudé funkce přes symetrický interval. Po zúžení zpět na požadovaný interval $(0, a)$ vyplývá, že $\{\sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}\}_{n \in \mathbb{N}}$ je opravdu báze $L^2((0, a))$.

2.1.2 Neumannovské okrajové podmínky

Uvažujme nyní obdobný operátor $A_N : L^2(M) \rightarrow L^2(M)$ a definiční obor funkce splňující neumannovské okrajové podmínky. Konkrétně

$$\text{dom } A_N = \{f \in H^1(M) \mid f'' \in L^2(M), f'(0) = 0 = f'(a)\}. \quad (2.3)$$

Lemma 2.2. *Řešení rovnice $z'' = Kz$ může netriviálně splňovat neumannovské okrajové podmínky (2.3) právě tehdy, když $K < 0$. Vyhovující řešení má navíc tvar*

$$z(x) = A \cos(\sqrt{-K}x),$$

pro $\sqrt{-K} = \frac{n\pi}{a}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Pro vlastní hodnoty a vektory operátoru A_N s tímto definičním oborem z Lemma 2.2 dostáváme

$$\lambda_n = \epsilon \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2, \quad f_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \cos \left(\frac{n\pi}{a} x \right), \quad n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}. \quad (2.4)$$

2.2 Homogenní obdélník

Mějme obdélník $\Omega = (0, a) \times (0, b) \equiv J_1 \times J_2$ ve dvou rozměrech a uvažujme pouze dirichletovské podmínky

$$\text{dom } A = \{f \in H_0^1(\Omega) \mid \Delta f \in L^2(\Omega)\}. \quad (2.5)$$

Uveďme větu, která nám pomůže v separaci proměnných:

Věta 2.3. *Nechť M, N jsou intervaly v \mathbb{R} a $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty, \{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ jsou popořadě ortonormální báze v $L^2(M)$ a $L^2(N)$. Potom ON soubor $\{f_{n,m}\}_{m,n=1}^\infty$ definovaný*

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, f_{n,m}(x, y) = \phi_n(x)\varphi_m(y)$$

je ON báze $L^2(M \times N)$.

Důkaz. Jednoduše nahlédneme za pomoci Fubiniho věty, že $f_{n,m}$ jsou opravdu ortonormální

$$(f_{k,l}, f_{n,m})_{L^2(M \times N)} = (\phi_k, \phi_n)_{L^2(M)}(\varphi_l, \varphi_m)_{L^2(N)} = \delta_{kn}\delta_{lm}. \quad (2.6)$$

Důkaz úplnosti takového souboru funkcí je proveden na konci následující kapitoly s přeznačením $\phi_n = \chi_n$ a $\varphi_m = \psi_{n,m}$, viz Lemma 3.8. Poznamenejme, že věta platí i obecněji pro libovolné oblasti M, N v \mathbb{R}^d . \square

Proveďme separaci proměnných $f(x, y) = \psi(x)\chi(y)$. Pro okrajové podmínky (2.5) dostáváme

$$\psi(0) = 0 = \psi(a) \quad \text{a} \quad \chi(0) = 0 = \chi(b).$$

Pomocí Věty 2.3 opodstatníme volbu ON báze

$$f_{n,m}(x, y) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sqrt{\frac{2}{b}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right), \quad n, m \in \mathbb{N}, \quad (2.7)$$

kteřá splňuje okrajové podmínky a je bází vlastních podprostorů operátoru A . Příslušná vlastní čísla jsou

$$\lambda_{n,m} = \epsilon \left(\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \right), \quad n, m \in \mathbb{N}. \quad (2.8)$$

Celkem dostáváme pro $\epsilon > 0$ všechna vlastní čísla kladná, pro $\epsilon < 0$ jsou všechna záporná.

Poznamenejme, že nalezením vlastních vektorů tvořících bázi celého Hilbertova prostoru $L^2(\Omega)$ jsme opravdu našli všechna vlastní čísla a separací proměnných jsme se o žádné nepřipravili. To opravdu platí, neboť takto definovaný laplacián je samosdružený pro libovolnou oblast Ω v \mathbb{R}^d a všechny podprostory vlastních vektorů jsou si navzájem ortogonální. Ale jediný vektor kolmý k námi nalezenému souboru, který je současně bází, je pouze nulový vektor.

Podprostory vlastních vektorů příslušné k jedné vlastní hodnotě mohou být degenerované - např. pro $a = \frac{2}{3}b$ máme $\lambda_{2,6} = \lambda_{4,3}, \lambda_{2,9} = \lambda_{6,3}$ a další. Vyskytují se ale i degenerace vyšší než 2. Pro čtverec $a = b$ máme degenerace vyšších řádů $\lambda_{1,7} = \lambda_{5,5} = \lambda_{7,1}, \lambda_{1,8} = \lambda_{4,7} = \lambda_{7,4} = \lambda_{8,1}, \lambda_{2,9} = \lambda_{7,6} = \lambda_{6,7} = \lambda_{9,2}$ a další.

Kapitola 3

Kompozitní materiály v euklidovském prostoru

3.1 Nehomogenní struna

Zkombinujme dielektrickou a metamateriálovou strunu a zaměříme se na spektrum operátoru. Heterogenní strunu budeme uvažovat jako interval $\Omega = \Omega_+ \cup \{0\} \cup \Omega_- = (-b, a)$ pro $\Omega_+ = (0, a)$, $\Omega_- = (-b, 0)$ a pro $a, b > 0$. Dále bude permitivita struny dána skokově

$$\epsilon(x) = \begin{cases} -\epsilon_- & x \in \Omega_-, \\ \epsilon_+ & x \in \Omega_+, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

pro konstantní $\epsilon_+, \epsilon_- > 0$. Pokusíme se zajistit minimální dodatečné podmínky (oproti homogenní struně) na definiční obor příslušného operátoru. Diferenciální výraz

$$\operatorname{div} \epsilon \operatorname{grad} = (\epsilon f')' \quad (3.1)$$

totiž není kvůli obecné nediferencovatelnosti (dokonce nespojitosti) funkce ϵ dobře definovaný pro $x = 0$. Abychom stanovili definiční obor, podívejme se nyní na výrazy

$$g(x) := \epsilon(x)f'(x), \quad h(x) := g'(x). \quad (3.2)$$

Nejprve musíme být schopni (slabě) derivovat funkci f z definičního oboru. K tomu nutně potřebujeme f absolutně spojitou, tedy $f \in H^1(\Omega)$. V bodě $x = 0$ má ϵ nespojitost. Abychom ale mohli i g (slabě) derivovat, musí být g v 0 opět absolutně spojitá, což dává



Obrázek 3.1: Kompozitní struna s konstantní permitivitou na jednotlivých částech se skokem v 0.

$g \in H^1(\Omega)$. Nutná podmínka ke splnění je spojitost (jinak bychom dostali Diracovu δ distribuci), ekvivalentně existence limity f a g v 0. Po provedení jednostranných limit \lim_{0+} a \lim_{0-} dostáváme (symbolem $\stackrel{!}{=}$ značíme požadovanou podmínku spojitosti)

$$\begin{aligned} f(0+) &\stackrel{!}{=} f(0-) \\ \epsilon_+ f'(0+) = g(0+) &\stackrel{!}{=} g(0-) = -\epsilon_- f'(0-). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Na závěr, jelikož se pohybujeme v $L^2(\Omega)$ prostoru, musí být samozřejmě $h \in L^2(\Omega)$.

Zavedeme operátor A , o kterém můžeme ekvivalentně přemýšlet jako $A : H^2(\Omega_+) \oplus H^2(\Omega_-) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ s předpisem

$$A \begin{pmatrix} f_+ \\ f_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\epsilon_+ f_+'' \\ \epsilon_- f_-'' \end{pmatrix}, \quad (3.4a)$$

$$\text{dom } A = \left\{ f = \begin{pmatrix} f_+ \\ f_- \end{pmatrix} \in H^2(\Omega_+) \oplus H^2(\Omega_-) \left| \begin{array}{l} f_-(-b) = 0 = f_+(a), \\ f_+(0) = f_-(0), \\ \epsilon_+ f_+'(0) = -\epsilon_- f_-'(0) \end{array} \right. \right\}. \quad (3.4b)$$

3.1.1 Samosdružená rozšíření symetrických operátorů

V předchozí sekci jsme zavedli operátor A na struně s přechodem (3.4). Nyní ukážeme, že je symetrický a dokonce samosdružený.

Věta 3.1. *Operátor A daný v (3.4) je samosdružený.*

Důkaz. Budeme postupovat obdobně k [5]. Symetričnost rychle plyne z podmínek definičního oboru $\text{dom } A$ a úpravy platné pro $\forall \phi, \psi \in \text{dom}(A)$:

$$\begin{aligned} (\phi, A\psi) &= \epsilon_- \int_{\Omega_-} \bar{\phi} \psi'' - \epsilon_+ \int_{\Omega_+} \bar{\phi} \psi'' \\ &= -\epsilon_- \int_{\Omega_-} \bar{\phi}' \psi' + \epsilon_+ \int_{\Omega_+} \bar{\phi}' \psi' + \epsilon_- [\bar{\phi} \psi']_{-b}^{0-} - \epsilon_+ [\bar{\phi} \psi']_{0+}^a \\ &= \epsilon_- \int_{\Omega_-} \bar{\phi}'' \psi - \epsilon_+ \int_{\Omega_+} \bar{\phi}'' \psi + \epsilon_- [\bar{\phi} \psi']_{-b}^{0-} - \epsilon_+ [\bar{\phi} \psi']_{0+}^a - \epsilon_- [\bar{\phi}' \psi]_{-b}^{0-} + \epsilon_+ [\bar{\phi}' \psi]_{0+}^a \\ &= (A\phi, \psi). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Součet členů vyčíslených na hranici Ω_- a Ω_+ je z vlastnosti $\text{dom } A$ na rozhraní nulový.

Nyní bychom rádi dokázali i rovnost definičních oborů $\text{dom}(A) = \text{dom}(A^*)$ a měli tak samosdruženost A . Z definice sdruženého operátoru plyne, že A^* je rozšířením A , neboli $A \subset A^*$ ve smyslu inkluze definičních oborů. Stačí tak ukázat pouze opačnou inkluzi.

Budeme opět upravovat výraz $(\phi, A\psi)$, nyní však pro $\phi \in \text{dom}(A^*)$, $\psi \in \text{dom}(A)$. Abychom mohli zopakovat stejnou úpravu pomocí per-partes, musíme zajistit, že ϕ', ϕ'' existuje (na Ω_- i Ω_+) i pro $\phi \in \text{dom}(A^*)$. Jinými slovy, chceme zajistit, aby i všechny prvky $\text{dom}(A^*) \setminus \text{dom}(A)$ měli derivace do druhého řádu (ve slabém smyslu).

Pro tento důvod si zavedeme symetrickou restrikcí $\dot{A} : H^2(\Omega_-) \oplus H^2(\Omega_+) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$, $\forall \psi \in \text{dom}(\dot{A})$, $\dot{A} \psi = A \psi$ a

$$\begin{aligned} \text{dom } \dot{A} &= \{\psi \in H^2(\Omega_-) \oplus H^2(\Omega_+) \mid A\psi \in L^2(\Omega), \\ &0 = \psi(-b) = \psi(a) = \psi(0^+) = \psi(0^-) = \psi'(0^+) = \psi'(0^-)\}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Z úpravy výrazu $(\phi, \dot{A} \psi) = (\dot{A} \phi, \psi)$, můžeme i kompletně určit definiční obor $\text{dom}(\dot{A}^*)$ [7, Example III.5.32]:

$$\text{dom } \dot{A}^* = \{\psi \in H^2(\Omega_-) \oplus H^2(\Omega_+) \mid \psi(-b) = 0 = \psi(a)\}. \quad (3.7)$$

Poslední inkluzi $A^* \subset \dot{A}^*$ získáme také přímo z definice sdruženého operátoru a $\dot{A} \subset A$. Celkem dostáváme vztahy

$$\dot{A} \subset A \subset A^* \subset \dot{A}^*. \quad (3.8)$$

Máme odpověď na naši původní otázku – pro $\phi \in \text{dom}(A^*)$ existuje i ϕ', ϕ'' , neboť platí $\phi \in \text{dom}(A^*) \subset \text{dom}(\dot{A}^*)$ a množina $\text{dom}(\dot{A}^*)$ obsahuje funkce s derivacemi do druhého řádu (opět ve slabém smyslu).

Vraťme se k úpravě následujícího výrazu pro $\forall \phi \in \text{dom}(A^*)$, $\psi \in \text{dom}(A)$:

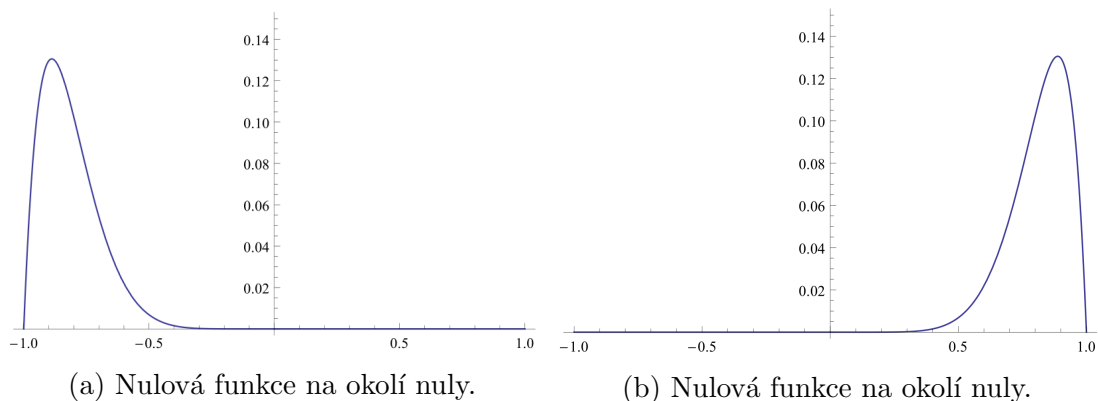
$$\begin{aligned} (\phi, A\psi) &= \epsilon_- \int_{\Omega_-} \bar{\phi}'' \psi - \epsilon_+ \int_{\Omega_+} \bar{\phi}'' \psi + \epsilon_- [\bar{\phi} \psi']_{-b}^{0^-} - \epsilon_+ [\bar{\phi} \psi']_{0^+}^a - \epsilon_- [\bar{\phi}' \psi]_{-b}^{0^-} + \epsilon_+ [\bar{\phi} \psi]_{0^+}^a \\ &\stackrel{!}{=} (\varphi, \psi) = (A^* \phi, \psi), \end{aligned} \quad (3.9)$$

tedy chceme, aby členy v závorkách byly nulové

$$\epsilon_- [\bar{\phi} \psi']_{-b}^{0^-} - \epsilon_+ [\bar{\phi} \psi']_{0^+}^a - \epsilon_- [\bar{\phi}' \psi]_{-b}^{0^-} + \epsilon_+ [\bar{\phi} \psi]_{0^+}^a \stackrel{!}{=} 0 \quad (3.10)$$

Tato rovnost má platit pro všechny $\psi \in \text{dom}(A)$. Volbou konkrétně zvolených $\psi \in \text{dom}(A)$ dostaneme nutné podmínky na $\phi \in \text{dom}(A^*)$, a tak dokážeme plně určit $\text{dom}(A^*)$. Upravujme levou stranu poslední rovnosti (využíváme $\psi \in \text{dom}(A)$):

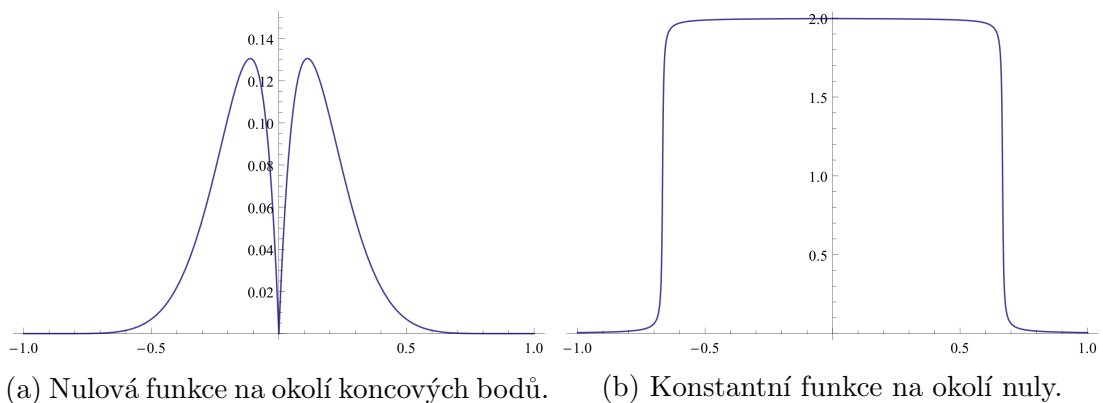
$$\begin{aligned} &\epsilon_- [\overline{\phi(0^-)} \psi'(0^-) - \overline{\phi(-1)} \psi'(-1)] - \epsilon_+ [\overline{\phi(1)} \psi'(1) - \overline{\phi(0^+)} \psi'(0^+)] - \\ &- \epsilon_- [\overline{\phi'(0^-)} \psi(0^-) - \overline{\phi'(-1)} \psi(-1)] + \epsilon_+ [\overline{\phi'(1)} \psi(1) - \overline{\phi'(0^+)} \psi(0^+)] = \\ &= -\psi(0^+) [\epsilon_- \overline{\phi'(0^-)} + \epsilon_+ \overline{\phi'(0^+)}] + \psi'(0^+) [\epsilon_+ \overline{\phi(0^-)} - \epsilon_+ \overline{\phi(0^+)}] - \\ &- \epsilon_- \overline{\phi(-1)} \psi'(-1) - \epsilon_+ \overline{\phi(1)} \psi'(1) \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$



(a) Nulová funkce na okolí nuly.

(b) Nulová funkce na okolí nuly.

Obrázek 3.2: Volby funkcí ψ .



(a) Nulová funkce na okolí koncových bodů.

(b) Konstantní funkce na okolí nuly.

Obrázek 3.3: Volby funkcí ψ .

Postupně budeme volit hladké funkce ψ z definičního oboru A tak, abychom vynulovali všechny členy v (3.11) až na jeden. Z jediného nenulového členu poté určíme podmínku na ϕ .

Nejprve vybereme funkci (Obrázek 3.2a), která má libovolnou nenulovou derivaci v -1 a dále spojitě stoupá a následně klesá, až vymizí na okolí nuly. Na intervalu $(0, 1)$ je tato funkce konstantně nulová. Pro takovou funkci se výraz (3.11) zjednoduší na $\epsilon_+ \phi(1) \psi'(1) = 0$ a tedy dostáváme

$$\phi(-1) = 0. \quad (3.12)$$

Další funkci (Obrázek 3.2b) volíme zrcadlově převrácenou podle osy y . Tak dostaneme

$$\phi(1) = 0. \quad (3.13)$$

Ve třetím a čtvrtém případě bychom chtěli dosáhnout jednotlivě $\psi'(-1) = 0 = \psi'(1)$. Proto za další funkci (Obrázek 3.3a) volíme tak, aby vymizela na okolí koncových bodů intervalu a byla nulová na rozhraní, ale s nenulovou derivací na rozhraní. Z tohoto dostaneme požadavek

$$\phi(0^+) = \phi(0^-). \quad (3.14)$$

Poslední funkci (Obrázek 3.3b) volíme opět nulovou na okolí koncových bodů a s nenulovou hodnotou funkce na rozhraní, ale s nulovou derivací v témž bodě. Potom

$$\epsilon_+ \phi'(0^+) = -\epsilon_- \phi'(0^-). \quad (3.15)$$

Tím jsme dokázali $\text{dom}(A^*) = \text{dom}(A)$ a operátor A je samosdružený. \square

3.1.2 Spektrum

Budeme hledat vlastní čísla λ a vektory f_{\pm} na odpovídajících oblastech Ω_{\pm} splňující $Af_{\pm} = \lambda f_{\pm}$ neboli

$$f_+'' = -\frac{\lambda}{\epsilon_+} f_+, \quad f_-'' = \frac{\lambda}{\epsilon_-} f_-. \quad (3.16)$$

Případ $\lambda = 0$: Uvažujme nejprve $\lambda = 0$. To nám dává $f_+'' = 0$, $f_-'' = 0$ a postupným aplikováním podmínek definičního oboru dostáváme vztahy mezi koeficienty lineární funkce. Nakonec určíme

$$\begin{aligned} f_+(x) &= A(x - a), & f_-(x) &= -A \frac{\epsilon_+}{\epsilon_-} (x + b) \\ \frac{\epsilon_+}{\epsilon_-} b &= a, & A &\in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (3.17)$$

tedy vlastní vektory pro $\lambda = 0$ existují pouze pokud platí $\frac{\epsilon_-}{\epsilon_+} b = a$ a potom odpovídající podprostor má dimenzi 1.

Nejprve poznamenejme, že následující rozdělení na kladné a záporné hodnoty λ není nezbytně nutné – diferenciální rovnice (3.16) má řešení v podobě (komplexních) exponenciál nezávisle na znaménku koeficientu na pravých stranách rovnice. Mohli bychom tedy oba případy řešit souhrnně velice podobným postupem. Rozdělení bylo provedeno pro kontrolu. Tedy po vyřešení např. případu $\lambda > 0$ můžeme získat i ostatní řešení pomocí vztahu $\tan(ix) = i \tanh(x)$, kde i je imaginární jednotka a $x \in \mathbb{R}$.

Případ $\lambda > 0$: Z rovnice pro vlastní vektory (3.16) ihned vidíme, že obecné řešení bude ve tvaru

$$\begin{aligned} f_+(x) &= A_+ \cos(\mu_+ x) + B_+ \sin(\mu_+ x) \\ f_-(x) &= A_- \cosh(\mu_- x) + B_- \sinh(\mu_- x), \end{aligned}$$

kde $\mu_+^2 = \frac{\lambda}{\epsilon_+}$ a $\mu_-^2 = \frac{\lambda}{\epsilon_-}$. Použili jsme řešení ve formě trigonometrických a hyperbolických funkcí, protože se nám tak budou lépe splňovat dodatečné podmínky.

Ze spojitosti funkcí v definičním oboru určíme ihned $A_+ = A_- := A$. Z podmínky na skok derivací určíme zase $\epsilon_+ \mu_+ B_+ = -\epsilon_- \mu_- B_-$. Z dirichletovské podmínky dostáváme

$$\begin{aligned} A \cos(\mu_+ a) + B_+ \sin(\mu_+ a) &= 0 \\ A \cosh(\mu_- b) - B_- \sinh(\mu_- b) &= 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

• **Případ** $\sin(\mu_+a) = 0$: Uvažujme nejdřív $\sin(\mu_+a) = 0$ (jako u homogenních strun):
 $\implies A = 0 \implies B_- = 0$ ($\sinh(\mu_-b) \neq 0$, protože $\lambda \neq 0$) $\implies B_+ = 0$. A dostáváme tak
triviální řešení pro f_+ i pro f_- .

• **Případ** $\cos(\mu_+a) = 0$: $\implies B_+ = 0 \implies B_- = 0 \implies A = 0$, což opět vede na
triviální řešení.

Tyto dva body jistě nemohou nastat zároveň a tak se dostáváme k poslednímu bodu.

• **Případ** $\sin(\mu_+a) \neq 0 \wedge \cos(\mu_+a) \neq 0$:

$$B_+ = -A \cotan \mu_+a \implies B_- = -\frac{\epsilon_+ \mu_+}{\epsilon_- \mu_-} \cotan \mu_+a \implies \cotanh \mu_-b = \sqrt{\frac{\epsilon_+}{\epsilon_-}} \cotan \mu_+a.$$

Z toho už jen upravíme (díky podmínce tohoto bodu) na

$$\frac{1}{\epsilon_- \mu_-} \tanh(b\mu_-) = \frac{1}{\epsilon_+ \mu_+} \tan(a\mu_+), \quad (3.19)$$

$$\sqrt{\frac{1}{\epsilon_-}} \tanh\left(b\sqrt{\frac{\lambda}{\epsilon_-}}\right) = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_+}} \tan\left(a\sqrt{\frac{\lambda}{\epsilon_+}}\right). \quad (3.20)$$

Vlastní vektory jsou ve tvaru

$$\begin{aligned} f_+(x) &= A(\cos \mu_+x - \cotan \mu_+a \sin(\mu_+x)), \\ f_-(x) &= A(\cosh \mu_-x + \sqrt{\frac{\epsilon_+}{\epsilon_-}} \cotan \mu_+a \sinh(\mu_-x)). \end{aligned}$$

Případ $\lambda < 0$: Obdobně předchozímu případu máme trigonometrické řešení na Ω_- a
hyperbolické na Ω_+

$$\begin{aligned} f_+(x) &= A_+ \cosh(\mu_+x) + B_+ \sinh(\mu_+x) \\ f_-(x) &= A_- \cos(\mu_-x) + B_- \sin(\mu_-x), \end{aligned}$$

kde $\mu_+^2 = \frac{-\lambda}{\epsilon_+}$ a $\mu_-^2 = \frac{-\lambda}{\epsilon_-}$. Stejnými úpravami docházíme k řešení pro λ ve tvaru

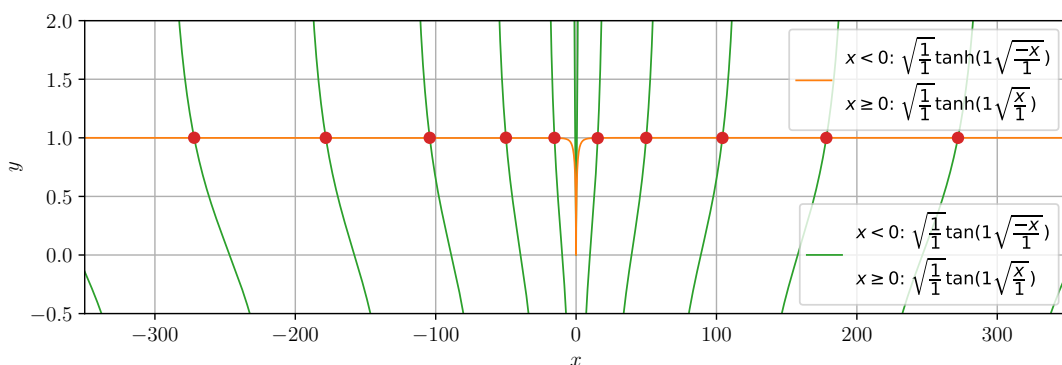
$$\sqrt{\frac{1}{\epsilon_+}} \tanh\left(a\sqrt{\frac{-\lambda}{\epsilon_+}}\right) = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_-}} \tan\left(b\sqrt{\frac{-\lambda}{\epsilon_-}}\right). \quad (3.21)$$

Vlastní vektory jsou ve tvaru

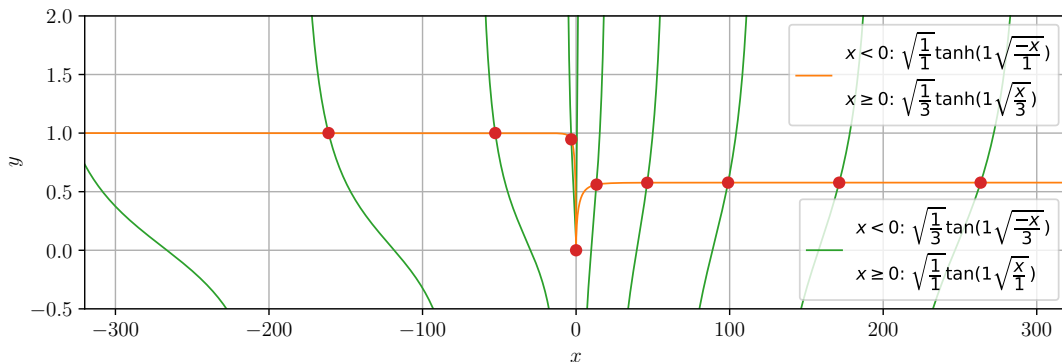
$$\begin{aligned} f_+(x) &= A(\cosh(\mu_+x) - \sqrt{\frac{\epsilon_-}{\epsilon_+}} \cotan(\mu_-b) \sinh(\mu_+x)) \\ f_-(x) &= A(\cos(\mu_-x) + \cotan(\mu_-b) \sin(\mu_-x)). \end{aligned}$$

Shrňme několik prvních řešení pro různé hodnoty a, b, ϵ_{\pm} pomocí grafů rovnic (Obrázky 3.4, 3.5, 3.6) pro vlastní čísla a samotných vlastních funkcí jim příslušících.

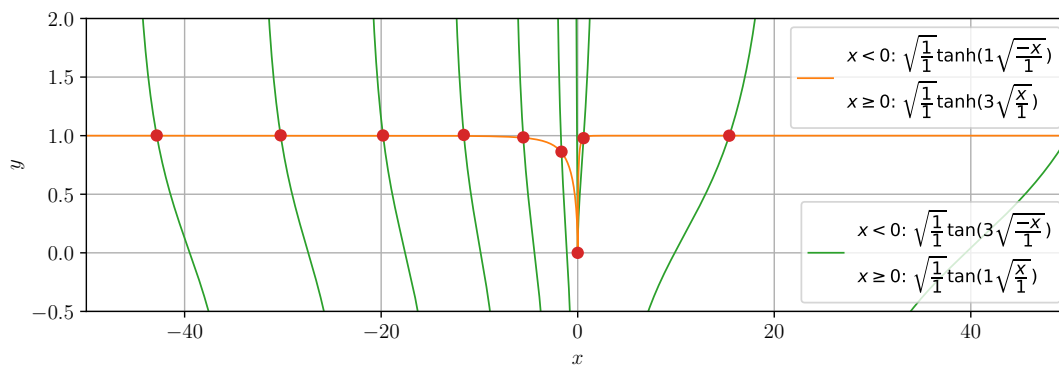
Několik vlastních funkcí $f = (f_-, f_+)$ pro stejné parametry můžeme vidět na grafech (Obrázky 3.7, 3.8, 3.9). Multiplikační konstantu A jsme volili $A = 1$, pouze v případě pro $a = b = \epsilon_+ = \epsilon_-$ jsme volili $A = -1$.



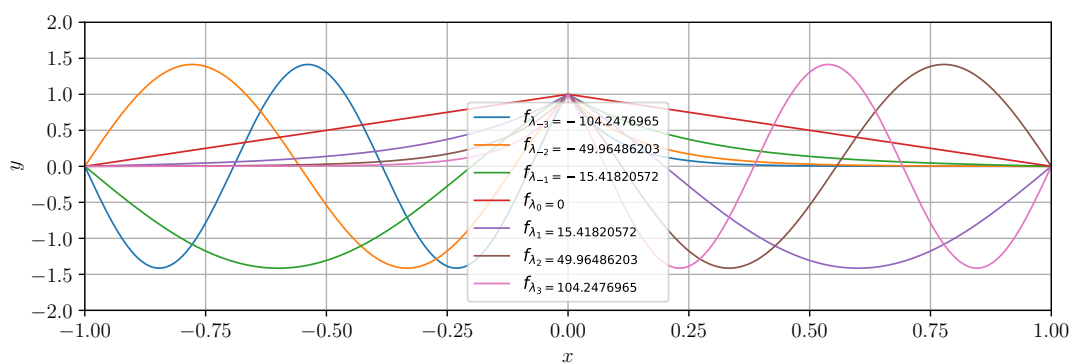
Obrázek 3.4: Řešení rovnice pro vlastní čísla, $a = b = 1, \epsilon_+ = \epsilon_- = 1$. $x = 0$ je také řešením, ačkoli není poznačené.



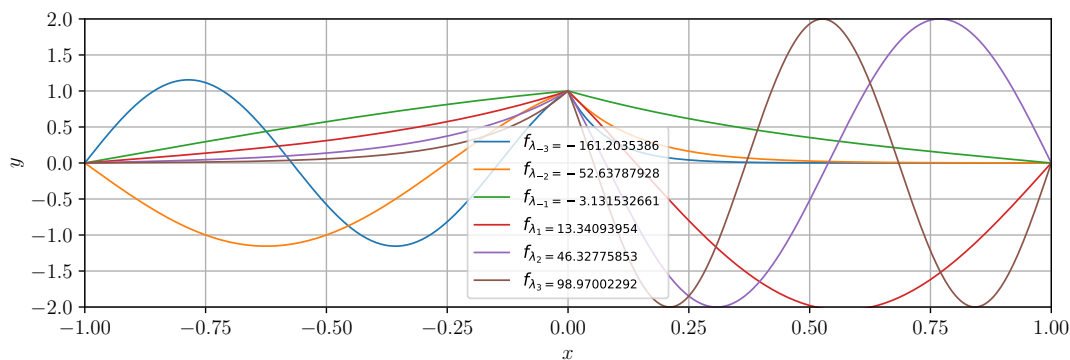
Obrázek 3.5: Řešení rovnice pro vlastní čísla, $a = b = 1, \epsilon_+ = 1, \epsilon_- = 3$. $x = 0$ je řešením této rovnice, ovšem nejedná se o vlastní číslo (vlastní vektor je triviální).



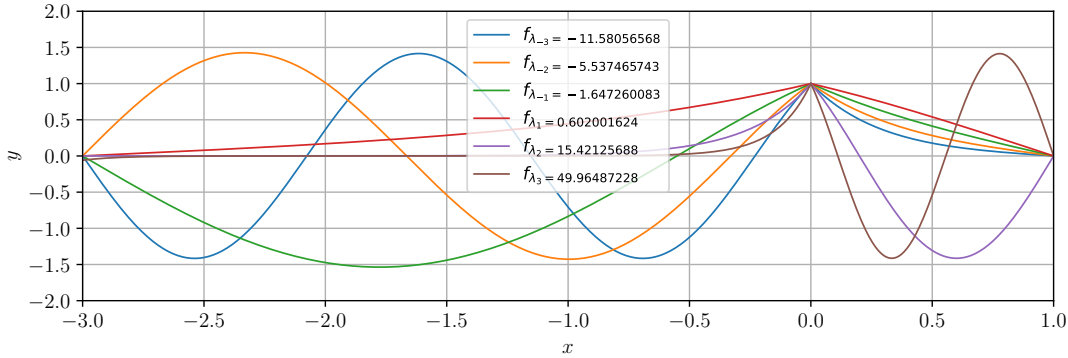
Obrázek 3.6: Řešení rovnice pro vlastní čísla, $a = 1$, $b = 3$, $\epsilon_+ = \epsilon_- = 1$. $x = 0$ opět není vlastní číslo.



Obrázek 3.7: Vlastní funkce pro nejnižších sedm vlastních čísel, $a = b = 1$, $\epsilon_+ = \epsilon_- = 1$. Pro tyto parametry existuje nenulové řešení pro $\lambda = 0$.



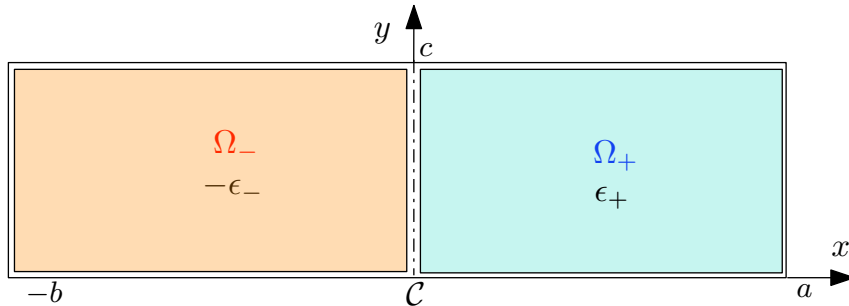
Obrázek 3.8: Vlastní funkce pro nejnižších šest vlastních čísel, $a = b = 1$, $\epsilon_+ = 1$, $\epsilon_- = 3$.



Obrázek 3.9: Vlastní funkce pro nejnižších šest vlastních čísel, $a = 1, b = 3, \epsilon_+ = \epsilon_- = 1$.

3.2 Nehomogenní obdélník

Uvažujme oblasti v dvourozměrném prostoru, $\Omega_+ = (0, a) \times (0, c), \Omega_- = (-b, 0) \times (0, c)$ pro konstantní $a, b, c > 0$. Dále definujme úsečku $\mathcal{C} = \{0\} \times (0, c)$. Poznamenejme, že heterogenní obdélník můžeme zapsat kartézským součinem heterogenní struny $(-b, a)$ a homogenní struny $(0, c)$, což nám napovídá, že budeme moci využít předchozí výsledky.



Obrázek 3.10: Obdélník s konstantními permitivitami na Ω_{\pm} , ale se skokem na \mathcal{C} .

Zkoumejme chování operátoru A na oblasti $\Omega := \Omega_- \cup \mathcal{C} \cup \Omega_+$. Pro náš operátor opět stanovíme definiční obor v rámci Sobolevových prostorů. Budeme uvažovat derivace v slabém smyslu a dostáváme tak podmínky na spojitost funkcí. Obdobně k předchozímu jedno-rozměrnému případ se ukazuje [2], že můžeme volit

$$A \begin{pmatrix} f_+ \\ f_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\epsilon_+ \Delta f_+ \\ \epsilon_- \Delta f_- \end{pmatrix}, \quad (3.22a)$$

$$\text{dom } A = \left\{ f = \begin{pmatrix} f_+ \\ f_- \end{pmatrix} \in H^2(\Omega_+) \oplus H^2(\Omega_-) \left| \begin{array}{l} f_{\pm}|_{\partial\Omega} = 0, \\ f_+|_{\mathcal{C}} = f_-|_{\mathcal{C}}, \\ \epsilon_+ \partial_n f_+|_{\mathcal{C}} = \epsilon_- \partial_n f_-|_{\mathcal{C}} \end{array} \right. \right\}, \quad (3.22b)$$

kde požadujeme, aby funkce byly kvadraticky integrabilní i s druhými derivacemi, funkce na hranici Ω byly nulové a také požadujeme spojitost funkcí na \mathcal{C} spolu s rovností normálových derivací funkcí na \mathcal{C} na odpovídajících oblastech. Vektor normály k \mathcal{C} uvažujeme směřující ven z oblasti.

Vidíme, že řešení bude na oblastech Ω_{\pm} vyhovovat homogenním obdélníkům s konstantními kladnými parametry ϵ_{\pm} , které jsme již dříve zpracovali – jediný rozdíl bude v okrajových podmínkách. Funkce na jednotlivých oblastech musíme napojit tak, aby na úsečce \mathcal{C} byly spojitě navázané a aby platila podmínka se skokem normálových derivací.

3.2.1 Spektrum

Tvrzení 3.2. *Nechť A je operátor (3.22) na obdélníkové oblasti z této kapitoly. Potom platí následující.*

1. Pro spektrum operátoru A máme

$$\sigma(A) = \sigma_{\infty} \cup \sigma_0 \quad \text{a}$$

definujeme

$$\sigma_{\infty} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=-\infty}^{\infty} \{\lambda_{n,m}\},$$

kde $\{\lambda_{n,m}\}_{m \in \mathbb{Z}}$ je pro každé pevné $n \in \mathbb{N}$ rostoucí posloupnost kořenů rovnice

$$\frac{\tan(a\sqrt{\frac{\lambda}{\epsilon_+} - (\frac{n\pi}{c})^2})}{\epsilon_+ \sqrt{\frac{\lambda}{\epsilon_+} - (\frac{n\pi}{c})^2}} = \frac{\tanh(b\sqrt{\frac{\lambda}{\epsilon_-} + (\frac{n\pi}{c})^2})}{\epsilon_- \sqrt{\frac{\lambda}{\epsilon_-} + (\frac{n\pi}{c})^2}} \quad (3.23)$$

pro $\lambda \neq \pm \epsilon_{\pm} (\frac{n\pi}{c})^2$ a připouští se i záporné výrazy pod odmocninou. Klademe $\lambda_{n,0}$, pokud je 0 řešením, jinak necháváme index 0 nedefinovaný a klademe $\lambda_{n,\pm 1}$ jako nejmenší kladné, resp. největší záporné řešení. K těmto vlastním číslům $\lambda_{n,m}$ jsou příslušné vlastní vektory ve tvaru $f_{n,m}(x, y) = \mathcal{N}_{n,m} \cdot \chi_n(y) \psi_{n,m}(x)$, kde $\chi_n(y) = \sqrt{\frac{2}{c}} \sin(\frac{n\pi}{c} y)$,

$$\psi_{n,m}(x) = \begin{cases} \sinh(\sqrt{\frac{\lambda_{n,m}}{\epsilon_-} + (\frac{n\pi}{c})^2} b) \sin(\sqrt{\frac{\lambda_{n,m}}{\epsilon_+} - (\frac{n\pi}{c})^2} (a - x)) & x > 0 \\ \sin(\sqrt{\frac{\lambda_{n,m}}{\epsilon_+} - (\frac{n\pi}{c})^2} a) \sinh(\sqrt{\frac{\lambda_{n,m}}{\epsilon_-} + (\frac{n\pi}{c})^2} (b + x)) & x < 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

a $\mathcal{N}_{n,m}$ je normovací konstanta.

Dále definujeme

$$\sigma_0 = \{\nu_+, \nu_-\},$$

kde $\nu_+ = \epsilon_+ (\frac{n\pi}{c})^2$ pro jedno takové $n \in \mathbb{N}$, které vyhovuje rovnici

$$\tanh\left(\frac{n\pi}{c} \sqrt{1 + \frac{\epsilon_-}{\epsilon_+} b}\right) = \frac{\epsilon_-}{\epsilon_+} \frac{n\pi}{c} \sqrt{1 + \frac{\epsilon_-}{\epsilon_+} a},$$

pokud existuje. Dále $\nu_- = -\epsilon_- (\frac{n\pi}{c})^2$ pro jedno takové $n \in \mathbb{N}$, které vyhovuje rovnici

$$\tanh\left(\frac{n\pi}{c} \sqrt{1 + \frac{\epsilon_+}{\epsilon_-}} b\right) = \frac{\epsilon_+}{\epsilon_-} \frac{n\pi}{c} \sqrt{1 + \frac{\epsilon_+}{\epsilon_-}} b,$$

pokud existuje. K těmto vlastním číslům ν_+ a ν_- odpovídají vlastní vektory ve tvaru $f_{\nu_{\pm}}(x, y) = \mathcal{N}_{n,m}^{\pm} \cdot \chi_n(y) \phi_{\nu_{\pm}}(x)$, kde n je z definice ν_{\pm} , χ_n je stejná jako výše,

$$\phi_{\nu_+}(x) = \begin{cases} (x-a) \sinh\left(b \frac{n\pi}{c} \sqrt{1 + \frac{\epsilon_+}{\epsilon_-}}\right) & x > 0, \\ -a \sinh\left(\frac{n\pi}{c} \sqrt{1 + \frac{\epsilon_+}{\epsilon_-}}(x+b)\right) & x < 0, \end{cases} \quad (3.25)$$

$$\phi_{\nu_-}(x) = \begin{cases} b \sinh\left(\frac{n\pi}{c} \sqrt{1 + \frac{\epsilon_-}{\epsilon_+}}(a-x)\right) & x > 0, \\ (x+b) \sinh\left(a \frac{n\pi}{c} \sqrt{1 + \frac{\epsilon_-}{\epsilon_+}}\right) & x < 0. \end{cases} \quad (3.26)$$

a $\mathcal{N}_{n,m}^{\pm}$ jsou opět normovací konstanty.

2. Body spektra se akumulují do $\pm\infty$.

3. Esenciální spektrum obsahuje 0 právě tehdy, když $\epsilon_- = \epsilon_+$. V opačném případě je prázdné.

Důkaz. Provedeme separaci proměnných na oblastech Ω_{\pm} . Dříve jsme viděli, že ve směru rovnoběžně k rozhraní můžeme volit dirichletovskou bázi $\chi_n(y) = \sqrt{\frac{2}{c}} \sin\left(\frac{n\pi}{c}y\right)$. Libovolný vektor v našem prostoru zapíšeme jako

$$\Psi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) \chi_n(y) \quad (3.27)$$

a rovnici pro vlastní čísla a funkce $(A\Psi)(x, y) = \lambda\Psi(x, y)$.

Po provedení záměny sumy a derivací obdržíme

$$\mp \epsilon_{\pm} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\psi_{n\pm}''(x) \chi_n(y) - \psi_{n\pm}\left(\frac{n\pi}{c}\right)^2 \chi_n(y) \right) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{n\pm}(x) \chi_n(y). \quad (3.28)$$

Záměnu operátoru A (derivate) a sumy můžeme použít díky následujícímu. Na rovnost

$$A\Psi(x, y) = A \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) \chi_n(y) \quad (3.29)$$

aplikujeme skalární součin $(\chi_n, \cdot)_{L^2(J_2)}$ a využijeme ortonormality $\{\chi_n\}_n$ spolu se spojitostí skalárního součinu

$$\begin{aligned}
(\chi_n, A \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m \chi_m)_{L^2(J_2)} &= \lim_{N \rightarrow \infty} (A^* \chi_n, \sum_{m=1}^N \psi_m \chi_m)_{L^2(J_2)} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^N (A^* \chi_n, \psi_m \chi_m)_{L^2(J_2)} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^N (\chi_n, A \psi_m \chi_m)_{L^2(J_2)} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^N (\chi_n, \chi_m A^m \psi_m)_{L^2(J_2)} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} A^n \psi_n = A^n \psi_n,
\end{aligned} \tag{3.30}$$

kde $A^n \psi$ značí

$$(A^n \psi)(x) := \psi''(x) - \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2 \psi(x). \tag{3.31}$$

Z těchto Fourierových koeficientů už plyne $\Psi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n(y) A^n \psi_n(x)$.

Rovnici (3.28) můžeme díky stejné úvaze zapsat ve tvaru $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
-\epsilon_+ \left(\psi_{n+}''(x) - \psi_{n+} \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2 \right) &= \lambda \psi_{n+}(x), \\
\epsilon_- \left(\psi_{n-}''(x) - \psi_{n-} \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2 \right) &= \lambda \psi_{n-}(x).
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Zbývající okrajové podmínky můžeme přepsat už pouze pro funkce $\psi_{n\pm}$:

$$\psi_{n+}(a) = 0 = \psi_{n-}(-b), \quad \psi_{n+}(0) = \psi_{n-}(0), \quad \epsilon_+ \psi_{n+}'(0) = -\epsilon_- \psi_{n-}'(0). \tag{3.33}$$

V tom už poznáváme předchozí situaci s heterogenní strunou $(-b, a)$, protože ψ_n se řídí rovnicí

$$\psi_{n\pm}'' = \left(\left(\frac{n\pi}{c}\right)^2 \mp \frac{\lambda}{\epsilon_{\pm}} \right) \psi_{n\pm} := C_n^{\pm} \psi_{n\pm}. \tag{3.34}$$

Jediný rozdíl, který musíme ohlídat, spočívá v rozdělení možných znamének koeficientu na pravé straně rovnice (3.34) a (3.16). Příným postupem ověříme, že tato možnost je také zahrnuta v jednotné rovnici pro vlastní čísla.

Protože naše funkce $\psi_{n\pm}$ vyhovují naprosto stejné rovnici, kterou jsme již vyřešili se stejnými okrajovými podmínkami, známe řešení. Jediný rozdíl oproti předchozí struně spočívá v tom, že nyní nemají koeficienty na pravých stranách diferenciální rovnice pro Ω_+ a Ω_- tak jednoduchý vztah jako u struny, tudíž se některé členy nepokráťí.

Případ $\lambda \neq \pm \epsilon_{\pm} (\frac{n\pi}{c})^2$, $n \in \mathbb{N}$: Před dosazením za μ_{\pm} do (3.19) u heterogenní struny a po přeznačení pro současnou situaci

$$\mu_n^+ := \sqrt{-C_n^+} = \sqrt{\frac{\lambda}{\epsilon_+} - (\frac{n\pi}{c})^2}, \quad \mu_n^- := \sqrt{C_n^-} = \sqrt{\frac{\lambda}{\epsilon_-} + (\frac{n\pi}{c})^2}, \quad (3.35)$$

dostáváme stejně jako u struny (využíváme jednotný zápis)

$$\frac{1}{\epsilon_+ \mu_n^+} \tan(a \mu_n^+) = \frac{1}{\epsilon_- \mu_n^-} \tanh(b \mu_n^-), \quad (3.36)$$

kam už stačí jen dosadit za μ_n^{\pm} a dostáváme (3.23) z tvrzení:

$$\frac{\tan(a \sqrt{\frac{\lambda}{\epsilon_+} - (\frac{n\pi}{c})^2})}{\epsilon_+ \sqrt{\frac{\lambda}{\epsilon_+} - (\frac{n\pi}{c})^2}} = \frac{\tanh(b \sqrt{\frac{\lambda}{\epsilon_-} + (\frac{n\pi}{c})^2})}{\epsilon_- \sqrt{\frac{\lambda}{\epsilon_-} + (\frac{n\pi}{c})^2}}. \quad (3.37)$$

Vlastní vektory potom jsou

$$\begin{aligned} \psi_{n+}(x) &= A(\cos(\mu_+ x - \cot(\mu_+ a) \sin(\mu_+ x)) \\ \psi_{n-}(x) &= A(\cosh(\mu_- x) + \coth(\mu_- b) \sinh(\mu_- x)), \end{aligned}$$

kam už jen opět dosadíme

$$\begin{aligned} \psi_{n+}(x) &= A(\cos(\sqrt{\frac{\lambda}{\epsilon_+} - (\frac{n\pi}{c})^2} x) - \cot(\sqrt{\frac{\lambda}{\epsilon_+} - (\frac{n\pi}{c})^2} a) \sin(\sqrt{\frac{\lambda}{\epsilon_+} - (\frac{n\pi}{c})^2} x)) \\ \psi_{n-}(x) &= A(\cosh(\sqrt{\frac{\lambda}{\epsilon_-} + (\frac{n\pi}{c})^2} x) + \coth(\sqrt{\frac{\lambda}{\epsilon_-} + (\frac{n\pi}{c})^2} b) \sinh(\sqrt{\frac{\lambda}{\epsilon_-} + (\frac{n\pi}{c})^2} x)). \end{aligned}$$

Po redefinici konstanty A a pomocí součtového vzorce pro \sin , respektive pro \sinh , dostaneme vlastní vektory (3.24) z tvrzení.

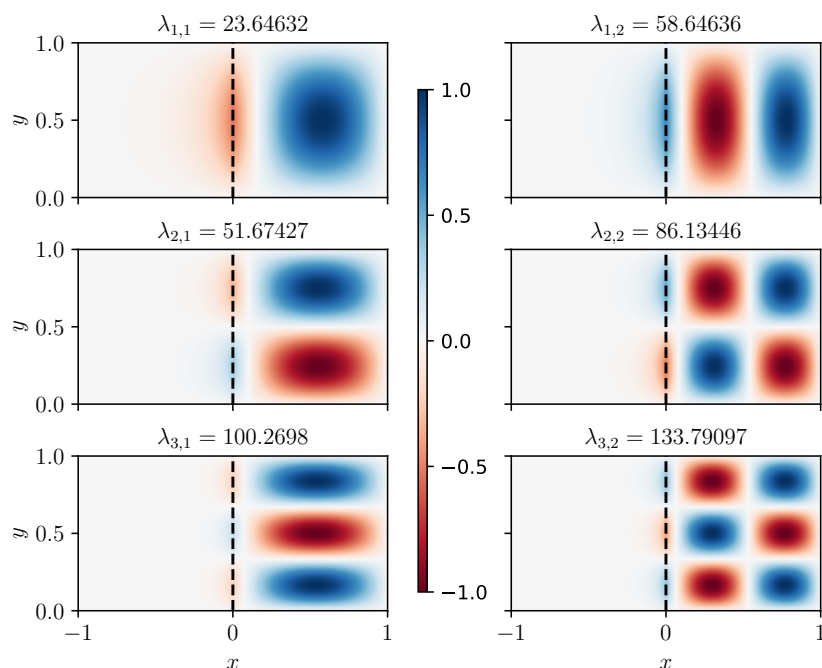
Případ $\lambda = \pm \epsilon_{\pm} (\frac{n\pi}{c})^2$: Nyní ověříme, zda vlastní hodnoty $\lambda = \pm \epsilon_{\pm} (\frac{n\pi}{c})^2$, které jsme výše vyloučili, mají netriviální vlastní vektory.

Uvědomme si, že případ $\lambda = \epsilon_+ (\frac{n\pi}{c})^2$ odpovídá $C_n^+ = 0$. Potom přímým postupem (opět aplikování okrajových podmínek) dostáváme, ale pouze za splnění podmínky

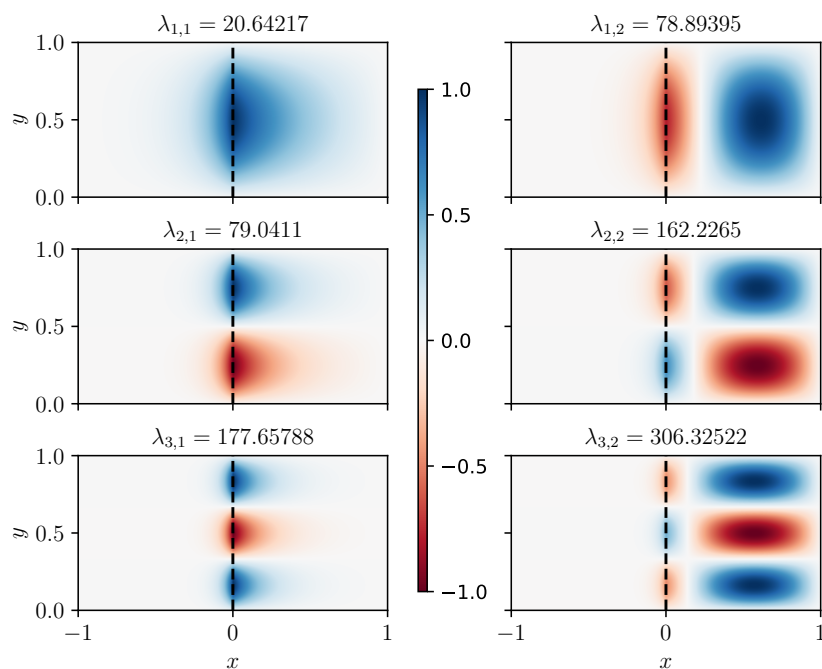
$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon_- \mu_-} \tanh \mu_- b &= \frac{1}{\epsilon_+} a, \\ \mu_- &= \sqrt{C_n^-} = \frac{n\pi}{c} \sqrt{1 + \frac{\epsilon_+}{\epsilon_-}}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

vlastní vektory ve tvaru

$$\begin{aligned} \psi_{n+}(x) &= A(x - a), \\ \psi_{n-}(x) &= -Aa(\cosh(\mu_- x) + \coth(\mu_- b) \sinh(\mu_- x)). \end{aligned}$$



Obrázek 3.11: Vlastní vektory $f_{n,m}$ z rovnice (3.24) normované v maximové normě k 1, $\epsilon_+ = \epsilon_- = a = b = c = 1$



Obrázek 3.12: Vlastní vektory $f_{n,m}$ z rovnice (3.24) normované v maximové normě k 1, $\epsilon_+ = 3, \epsilon_- = a = b = c = 1$.

Podobně pro $\lambda = -\epsilon_-(\frac{n\pi}{c})^2$ odpovídající $C_n^- = 0$ opět máme

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon_+\mu_+} \tanh \mu_+ a &= \frac{1}{\epsilon_-} b, \\ \mu_+ &= \sqrt{C_n^+} = \frac{n\pi}{c} \sqrt{1 + \frac{\epsilon_-}{\epsilon_+}}. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Při splnění této podmínky dostáváme vlastní vektory

$$\begin{aligned} \psi_{n-}(x) &= A(x + b), \\ \psi_{n+}(x) &= Ab(\cosh(\mu_+ x) - \coth(\mu_+ a) \sinh(\mu_+ x)). \end{aligned}$$

Poznamenejme, že podmínky (3.38) a (3.39) opravdu mohou být zajištěny. Například pro $a = 1, b = 2, c \approx 4.64, \epsilon_+ = \epsilon_- = 1, n = 1$ je (3.38) splněna.

Druhý a třetí bod tvrzení vyplývá z následujícího. Necht' Λ je konečný hromadný bod spektra. Potom, protože jsme na metrickém prostoru, existuje nějaká posloupnost vlastních čísel $\{\lambda_k\} \subset \sigma(L)$, která k Λ konverguje. Rovnici pro vlastní čísla si převedeme do tvaru

$$\frac{\tan(a\sqrt{\frac{\lambda_k}{\epsilon_+} - (\frac{n\pi}{c})^2})}{\tanh(b\sqrt{\frac{\lambda_k}{\epsilon_-} + (\frac{n\pi}{c})^2})} = \frac{\epsilon_+}{\epsilon_-} \sqrt{\frac{\frac{\lambda_k}{\epsilon_+} - (\frac{n\pi}{c})^2}{\frac{\lambda_k}{\epsilon_-} + (\frac{n\pi}{c})^2}}.$$

Po provedení limitního přechodu $k \rightarrow \infty$ ($\lambda_k \rightarrow \infty$) na obou stranách rovnice a provedení úprav s komplexním argumentem už vidíme nutnou podmínku

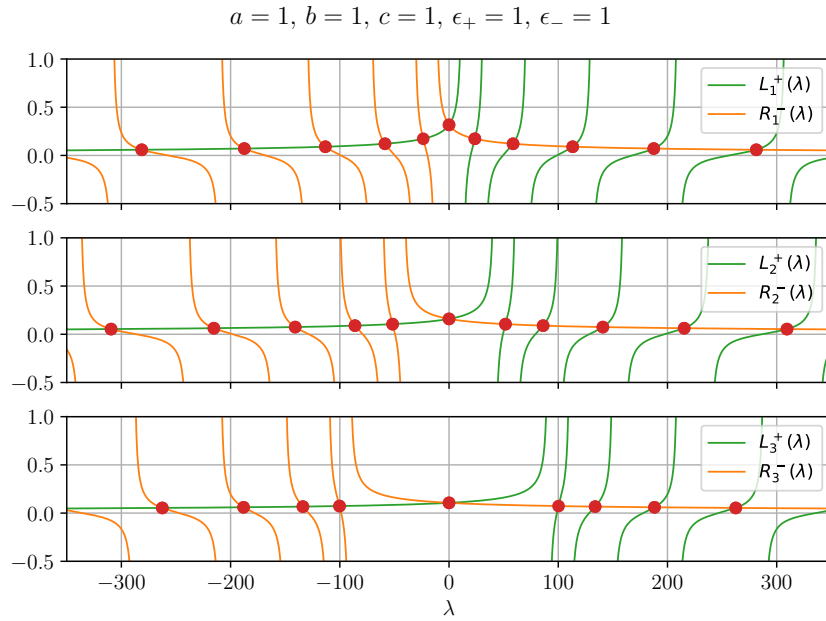
$$1 = \frac{\epsilon_+}{\epsilon_-}.$$

V opačném případě, tedy $\epsilon_+ \neq \epsilon_-$, neexistuje žádný konečný hromadný bod spektra. Z toho už plyne druhý bod tvrzení.

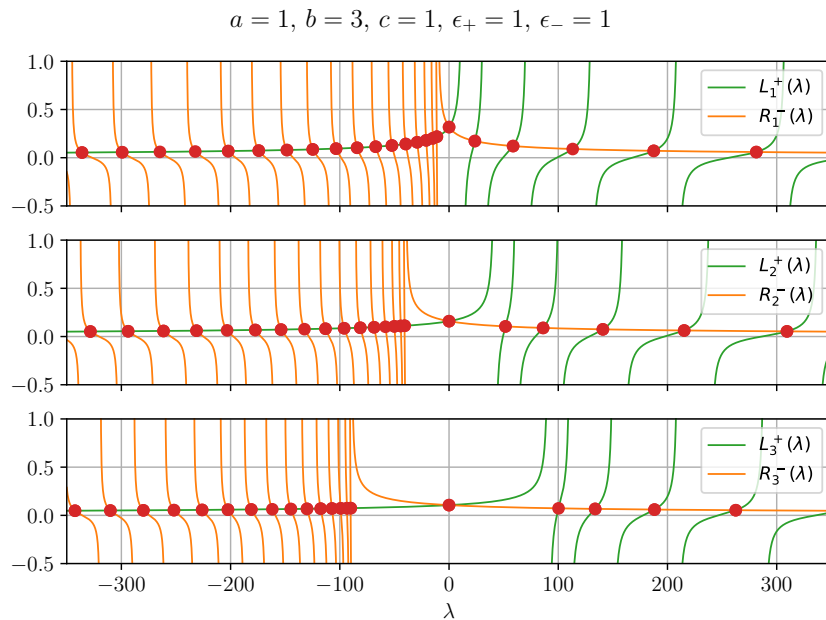
Pro parametry $\epsilon_- = \epsilon_+$ je nula v esenciálním spektru. Výraz vzniklý z rovnice pro vlastní hodnoty po provedení limitních přechodu $\lambda \rightarrow 0$ splňuje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan(a\frac{n\pi}{c})}{\epsilon_+} - \frac{\tan(b\frac{n\pi}{c})}{\epsilon_-} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\epsilon_+} - \frac{1}{\epsilon_-} \right) = 0.$$

a tudíž je 0 hromadný bod a patří do esenciálního spektra operátoru. □

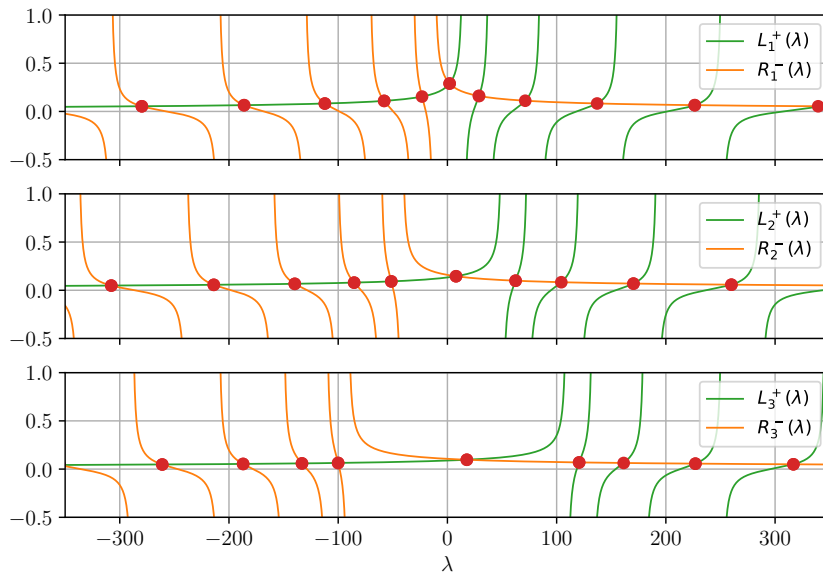


Obrázek 3.13: Řešení rovnice pro vlastní čísla, L_n^+ a R_n^- značí levou, resp. pravou stranu rovnice (3.23). $\lambda = 0$ je řešením pro všechna $n \in \mathbb{N}$.



Obrázek 3.14: Řešení rovnice pro vlastní čísla (3.23). $\lambda = 0$ je řešením pouze pro $n = 0$, ale 0 je hromadným bodem spektra. Řešení konverguje k 0 exponenciálně ($\lambda_1 = 0.036$ a $\lambda_2 = 0.00027$).

$$a = 1, b = 1, c = 1, \epsilon_+ = 1.2, \epsilon_- = 1$$



Obrázek 3.15: $\lambda = 0$ již není hromadným bodem spektra.

3.2.2 Esenciální samosdruženost

Dále bychom chtěli ukázat obdobu samosdruženosti jednorozměrného operátoru (3.4), i když jednorozměrný případ je dosti odlišný od vícerozměrných případů.

Definice 3.3. *Esenciálně samosdružený operátor A je takový symetrický operátor, jehož uzávěr \overline{A} je samosdružený.*

Poznámka 3.4. *Každý symetrický operátor A je uzavíratelný a existuje jeho nejmenší uzavřené symetrické rozšíření \overline{A} . Samosdružené rozšíření však nemusí existovat.*

Věta 3.5. *Nechť A je symetrický operátor na Hilbertově prostoru \mathcal{H} a necht' $\{\psi_n\}_{n=0}^\infty$ je úplná ortonormální množina v \mathcal{H} . Pokud pro každé n platí $\psi_n \in \text{dom}(A)$ a existuje λ_n tak, že $A\psi_n = \lambda_n\psi_n$, potom je A esenciálně samosdružený. Spektrum \overline{A} je uzávěr $\overline{\sigma(A)}^\mathbb{R}$ v \mathbb{R} .*

Důkaz. Viz [3, Lemma 1.4.1]. □

Lemma 3.6. *Operátor A je symetrický.*

Důkaz. Pro operátor $A : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ platí, $\forall \phi, \psi \in \text{dom } A$:

$$\begin{aligned}
(\phi, A\psi)_g &= - \int_{\Omega_0} \bar{\phi} [\partial_1(\epsilon \partial_1 \psi) + \partial_2(\epsilon \partial_2 \psi)] \\
&= - \int_{\Omega_+} \epsilon_+ \bar{\phi} [\partial_1^2 \psi + \partial_2^2 \psi] + \int_{\Omega_-} \epsilon_- \bar{\phi} [\partial_1^2 \psi + \partial_2^2 \psi] \\
&= -\epsilon_+ \int_0^c dx_2 \int_0^a dx_1 \bar{\phi} \partial_1(\partial_1 \psi) - \epsilon_+ \int_0^a dx_1 \int_0^c dx_2 \bar{\phi} \partial_2(\partial_2 \psi) \\
&\quad + \epsilon_- \int_0^c dx_2 \int_0^a dx_1 \bar{\phi} \partial_1(\partial_1 \psi) + \epsilon_- \int_{-b}^0 dx_1 \int_0^c dx_2 \bar{\phi} \partial_2(\partial_2 \psi) \\
&= \epsilon_+ \int_{\Omega_+} (\partial_1 \bar{\phi})(\partial_1 \psi) + (\partial_2 \bar{\phi})(\partial_2 \psi) - \epsilon_- \int_{\Omega_-} (\partial_1 \bar{\phi})(\partial_1 \psi) + (\partial_2 \bar{\phi})(\partial_2 \psi) \\
&\quad - \epsilon_+ \left(\int_0^a dx_2 [\bar{\phi} \partial_1 \psi]_{(0,\cdot)}^{(c,\cdot)} + \int_0^c dx_1 [\bar{\phi} \partial_2 \psi]_{(\cdot,0)}^{(\cdot,a)} \right) \\
&\quad + \epsilon_- \left(\int_{-b}^0 dx_2 [\bar{\phi} \partial_1 \psi]_{(0,\cdot)}^{(c,\cdot)} + \int_0^c dx_1 [\bar{\phi} \partial_2 \psi]_{(\cdot,-b)}^{(\cdot,0)} \right) \\
&= \epsilon_+ \int_{\Omega_+} (\partial_1 \bar{\phi})(\partial_1 \psi) + (\partial_2 \bar{\phi})(\partial_2 \psi) - \epsilon_- \int_{\Omega_-} (\partial_1 \bar{\phi})(\partial_1 \psi) + (\partial_2 \bar{\phi})(\partial_2 \psi) \\
&\quad + \int_0^c dx_2 (\epsilon_+ \bar{\phi}_+(0, x_2) \partial_1 \psi_+(0, x_2) + \epsilon_- \bar{\phi}_-(0, x_2) \partial_1 \psi_-(0, x_2)) + 0 \\
&= (\partial_1 \phi_+, \epsilon \partial_1 \psi_+) + (\partial_2 \phi_-, \epsilon \partial_2 \psi_-) \\
&= (\nabla \phi, \epsilon \nabla \psi) = (A\psi, \phi),
\end{aligned}$$

kde jsme využili definiční obor operátoru $\text{dom } A$ (dirichletovské okrajové podmínky a vztah mezi ψ_\pm na rozhraní). □

Lemma 3.7. *Vlastní funkce operátoru A na obdélníku (3.22) tvoří ortonormální množinu v $L^2(\Omega)$. Soubor $S_n := \{\psi_{n,m}\}_{m \in \mathbb{Z}}$ tvoří pro libovolné pevné $n \in \mathbb{N}$ bázi $L^2((-b, a))$.*

Důkaz. Tvrzení můžeme ukázat přímo, ale můžeme si ulehčit práci následujícím. Pokud by existoval samosdružený operátor \tilde{A} , který má za vlastní vektory právě vlastní vektory A , potom se nutně musí jednat o navzájem ortonormální vektory. Pokud dokonce spektrum $\sigma(\tilde{A})$ bude čistě bodové ($\sigma_{\text{ess}}(\tilde{A}) = \emptyset$), potom jsou splněny předpoklady spektrálního teorému pro samosdružené operátory [9, Thm. 3.3] a vlastní vektory \tilde{A} potom tvoří dokonce ortonormální bázi celého prostoru.

Víme, že vlastní vektory A jsou ve tvaru $f_{n,m}(x, y) = \mathcal{N}_{n,m} \chi_n(y) \psi_{n,m}(x)$, viz Tvrzení 3.2. Funkce $\chi_n(y) = \sqrt{\frac{2}{c}} \sin(\frac{n\pi}{c} y)$ jsou ortonormální v $L^2((0, c))$ a tak stačí ukázat ortonormalitu $\psi_{n,m}(x)$.

Zavedeme operátor

$$A_n \psi_n = \begin{cases} -\epsilon_+ (\psi_n'' - (\frac{n\pi}{c})^2 \psi_n(x)) & x \in (0, a), \\ \epsilon_- (\psi_n'' - (\frac{n\pi}{c})^2 \psi_n(x)) & x \in (-b, 0), \end{cases} \quad (3.40)$$

s definičním oborem daným (3.4) a budeme se snažit ukázat jeho samosdruženost pro všechna přirozená n . Budeme postupovat naprosto stejně jako v sekci o samosdruženém operátoru na půlené struně.

$\forall \psi, \phi \in \text{dom } A_n$:

$$\begin{aligned} (\psi, A_n \phi) &= \epsilon_- \int_{-b}^0 \psi_- (\phi_-'' - (\frac{n\pi}{c})^2 \phi_-) - \epsilon_+ \int_0^a \psi_+ (\phi_+'' - (\frac{n\pi}{c})^2 \phi_+) \\ &= -\epsilon_- \int_{-b}^0 \psi_-' \phi_-' - \epsilon_- (\frac{n\pi}{c})^2 \int_{-b}^0 \psi_- \phi_- + \epsilon_- [\psi_- \phi_-']_{-b}^0 \\ &+ \epsilon_+ \int_0^a \psi_+' \phi_+' + \epsilon_+ (\frac{n\pi}{c})^2 \int_0^a \psi_+ \phi_+ - \epsilon_+ [\psi_+ \phi_+]_0^a \\ &= -\epsilon_- \int_{-b}^0 \psi_-' \phi_-' - \epsilon_- (\frac{n\pi}{c})^2 \int_{-b}^0 \psi_- \phi_- + \epsilon_+ \int_0^a \psi_+' \phi_+' + \epsilon_+ (\frac{n\pi}{c})^2 \int_0^a \psi_+ \phi_+ \\ &= \epsilon_- \int_{-b}^0 \phi_- (\psi_-'' - (\frac{n\pi}{c})^2 \psi_-) - \epsilon_+ \int_0^a \phi_+ (\psi_+'' - (\frac{n\pi}{c})^2 \psi_+) \\ &= (A_n \psi, \phi), \end{aligned} \quad (3.41)$$

kde jsme provedli dvakrát integraci per-partes a hraniční podmínky se odečtou na nulu díky vlastnostem funkcí a jejich derivací v definičním oboru operátoru A_n .

Nyní potřebujeme ukázat, že definiční obor A_n je stejný jako definiční obor sdruženého operátoru A_n^* . To je opět naprosto obdobné důkazu Věty 3.1.

Komentujme, že operátor A_n má pro pevné $n \in \mathbb{N}$ prázdné esenciální spektrum, jak může být vidět ze sekce pro nehomogenní strunu pomocí lehké obměny. Tedy jeho vlastní vektory opravdu tvoří bázi $H^2((-b, a))$. \square

Lemma 3.8. *Vlastní funkce $f_{n,m}$ operátoru A na obdélníku (3.22) tvoří úplnou ortonormální množinu v $L^2(\Omega)$.*

Důkaz. Budeme postupovat obdobně jako v [7, V, Ex. 1.10]. Ukážeme implikaci $\forall w \in L^2(\Omega), \forall n, m \in \mathbb{N}, ((w, f_{n,m}) = 0 \implies w = 0)$. Jinými slovy, $w = 0$ je jediný vektor kolmý ke každému vektoru $f_{n,m}$ z ortogonálního souboru.

Mějme nějaké w , pro které platí výše uvedená rovnost $(w, f_{n,m}) = 0$. Definujeme

$$w_{n,m}(y) = \int_{-b}^a w(x, y) \psi_{n,m}(x) dx \quad (3.42)$$

a platí $w_{n,m} \in L^2((0, c))$, neboť ze Schwarzovy nerovnosti a ortonormality $\{\psi_{n,m}\}$ plyne

$$|w_{n,m}(y)|^2 \leq \int_{-b}^a |w(x, y)|^2 dx \int_{-b}^a |\psi_{n,m}(x)|^2 dx = \int_{-b}^a |w(x, y)|^2 dx \quad (3.43)$$

a zároveň

$$\int_0^c |w_{n,m}(y)|^2 dy \leq \int_{\Omega} |w(x, y)|^2 dx dy = \|w\|^2. \quad (3.44)$$

To už omezuje $\|w_{n,m}\|$, tj. $w \in L^2((0, c))$. Můžeme psát

$$0 = (w, f_{n,m}) = (w, \psi_{n,m} \chi_n) = (w_{n,m}, \chi_n), \quad (3.45)$$

z čehož, po uvážení úplnosti $\{\chi_n\}$, plyne $\forall n, m : w_{n,m} = 0$. To už z úplnosti $\{\psi_{n,m}\}_{n \in \mathbb{N}}$ (jedná se o bázi) dokazuje $w = 0$. \square

Tvrzení 3.9. *Operátor A na obdélníku (3.22) je esenciálně samosdružený.*

Důkaz. Tvrzení je důsledkem předchozích lemmat a Věty 3.5. \square

Jinými slovy, separací proměnných jsme opravdu našli všechny vlastní vektory a celé spektrum.

Kapitola 4

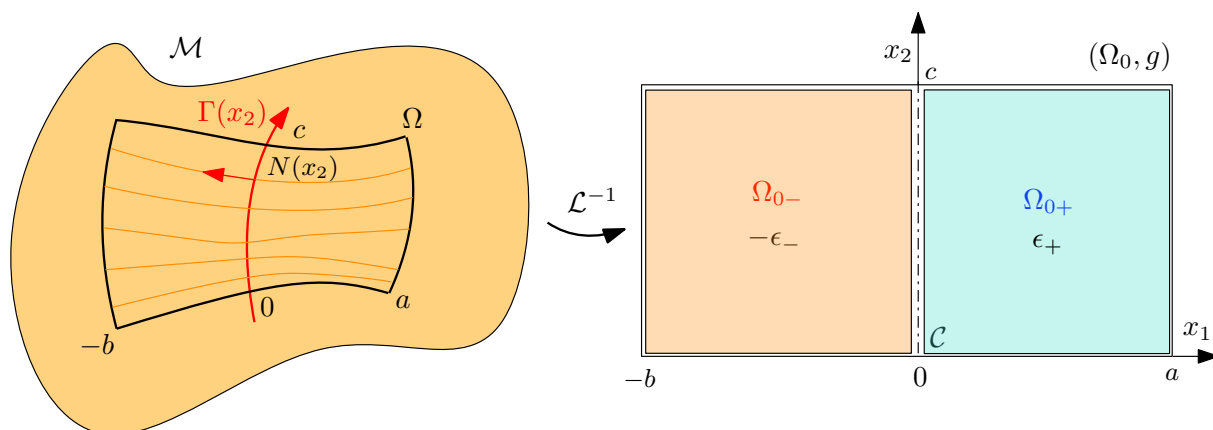
Křivé variety

Budeme volit obdélník podobně jako v předchozí kapitole

$$\Omega_0 = (-b, a) \times (0, c) \equiv J_1 \times J_2 \quad (4.1)$$

a materiálové rozhraní bude ležet na $\mathcal{C} = \{0\} \times (0, c)$. Metamateriál se tedy opět nachází v $\Omega_{0-} = (-b, 0) \times J_2$ a materiál s kladnou permitivitou na $\Omega_{0+} = (0, a) \times J_2$.

Nyní však budeme uvažovat dvourozměrnou riemannovskou varietu \mathcal{M} . O varietě budeme předpokládat, že její Gaussova křivost K je spojitá (to platí za předpokladu, že \mathcal{M} je řádu C^3 nebo že je vložena do \mathbb{R}^3). Na varietě budeme uvažovat C^2 křivku $\Gamma : J_2 \rightarrow \mathcal{M}$ parametrizovanou obloukem pomocí x_2 . Γ odpovídá rozhraní mezi materiály \mathcal{C} . Pro další podrobnosti viz [10], odkud jsme čerpali mnohé informace a výsledky této kapitoly.



Obrázek 4.1: Křivka Γ na riemannovské varietě umožňuje v každém bodě najít geodetiku, která je k Γ kolmá, což se dá využít k definici obdélníku na varietě. Tento „obdélník“ je difeomorfní s obdélníkem ve Fermiho souřadnicích x_1, x_2 (vpravo) s indukovanou metrikou.

Budeme pracovat s tubulárním okolím Ω křivky Γ . Toto okolí Ω si v případě $a = b$ můžeme představit jako množinu bodů s geodetickou vzdáleností od křivky Γ menší než

a. Definujme zobrazení $\mathcal{L} : \Omega_0 \rightarrow \mathcal{M}$ pomocí

$$\mathcal{L}(x_1, x_2) := \exp_{\Gamma(x_2)}(x_1 N(x_2)), \quad (4.2)$$

kde \exp_q je exponenciální zobrazení \mathcal{M} v $q \in \mathcal{M}$ a $N(x_2) \in T_{\Gamma(x_2)}\mathcal{M}$ je normálový vektor ke křivce Γ v x_2 ležící v tečném prostoru k varietě \mathcal{M} . Dále definujeme

$$\Omega := \mathcal{L}(\Omega_0), \quad \Omega_- := \mathcal{L}(\Omega_{0+}), \quad \Omega_+ := \mathcal{L}(\Omega_{0-}), \quad (4.3)$$

a pro další postup budeme předpokládat, že $\mathcal{L} : \Omega_0 \rightarrow \Omega$ je diffeomorfismus, abychom mohli přenášet struktury z \mathcal{M} do Ω_0 . Poznamenejme, že to znamená i mimo jiné, že se geodetiky na Ω neprotínají, potom by to nemohla být bijekce.

Difeomorfismus \mathcal{L} indukuje na Ω_0 riemannovskou metriku g a můžeme ztotožnit $\Omega \subset \mathcal{M}$ s riemannovskou varietou (Ω_0, g) .

Ve Fermiho souřadnicích (Gaussovy normální souřadnice, [4], [8]) má metrický tenzor g diagonální tvar $g = \text{diag}(1, f^2)$. Jacobiho rovnice pro neznámou funkci f (ve Fermiho souřadnicích x_i) má předpis

$$\partial_1^2 f + Kf = 0 \quad \wedge \quad \begin{cases} f(0, \cdot) = 1 \\ \partial_1 f(0, \cdot) = -\kappa, \end{cases} \quad (4.4)$$

kde K je Gaussova křivost (vyčísleno v bodě variety s lokálními souřadnicemi x_i), κ geodetická křivost křivky Γ v bodě x_2 .

4.1 Laplace-Beltrami na riemannovské varietě

V lokálních souřadnicích na varietě (Ω_0, g) máme vztahy pro diferenciální operátory grad ψ a div X

$$(\text{grad } \psi)^i = (d\psi)^i = g^{ij} \partial_j \psi, \quad (4.5)$$

$$\text{div } X = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i (\sqrt{|g|} X^i). \quad (4.6)$$

Diferenciální výraz $-\text{div}(\epsilon \text{grad } \psi)$ můžeme na varietě zapsat pomocí

$$-\text{div}(\epsilon \text{grad } \psi) = -\frac{1}{f} \partial_1 \left(\epsilon f \frac{\partial \psi}{\partial x^1} \right) - \frac{1}{f} \partial_2 \left(\epsilon \frac{1}{f} \frac{\partial \psi}{\partial x^2} \right). \quad (4.7)$$

4.2 Hilbertův prostor na varietě (Ω_0, g)

Pro zkoumání operátoru na této varietě budeme potřebovat prostor kvadraticky integrovaných funkcí $L^2(\Omega_0, |\det g|^{\frac{1}{2}} dx)$, tedy prostor všech měřitelných funkcí φ, ψ na Ω_0 pro které je norma $\|\cdot\|_g$ indukovaná skalárním součinem

$$(\varphi, \psi)_G := \int_{\Omega_0} \overline{\varphi(x)} \psi(x) |\det g|^{\frac{1}{2}} dx = \int_{\Omega_0} \overline{\varphi(x)} \psi(x) f(x) dx \quad (4.8)$$

konečná. Pro $f, f^{-1} \in L^\infty(\Omega_0, dx)$ je tato norma ekvivalentní standardní $L^2(\Omega_0, dx)$ normě. I Sobolevův prostor

$$W^{1,2}(\Omega_0, g) := \{\psi \in L^2(\Omega_0, g) \mid |\Delta_g \psi|_g^2 := \overline{\partial_i \psi} g^{ij} \partial_j \psi \in L^2(\Omega_0, g)\} \quad (4.9)$$

můžeme ztotožnit s prostorem $H^1 = W^{1,2}(\Omega_0)$. Poznamenejme, ačkoliv je tento předpoklad v dalším triviálně splněn, že pro ztotožnění $H^2 = W^{2,2}(\Omega_0)$ musíme požadovat

$$\forall x_1 \in J_1 : \quad f(x_1, \cdot), f^{-1}(x_1, \cdot) \in W^{1,\infty}(J_2). \quad (4.10)$$

4.3 Zavedení operátoru

Zavedeme opět dirichletovské okrajové podmínky. Určíme definiční obor diferenciálního výrazu a zavedeme operátor $A : L^2(\Omega_0, g) \rightarrow L^2(\Omega_0, g)$

$$A \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\epsilon_+ \Delta_g \psi_+ \\ \epsilon_- \Delta_g \psi_- \end{pmatrix} \quad (4.11a)$$

$$\text{dom } A := \left\{ \psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} \in H^2(\Omega_+, g) \oplus H^2(\Omega_-, g) \left| \begin{array}{l} \psi_\pm|_{\partial\Omega_0} = 0, \\ \psi_+(0, \cdot) = \psi_-(0, \cdot) \\ \epsilon_+ \partial_1 \psi_+(0, \cdot) = -\epsilon_- \partial_1 \psi_-(0, \cdot) \end{array} \right. \right\} \quad (4.11b)$$

kde Δ_g je Laplace-Bertrami operátor vyjádřený v lokálních souřadnicích pomocí (4.7).

Pro konstantní Gaussovu křivost můžeme Jacobiho rovnici (4.4) jednoduše vyřešit - řešení jsou ve tvaru

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \cos(\sqrt{K}x_1) - \frac{\kappa(x_2)}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}x_1) & \text{pokud } K > 0, \\ 1 - \kappa(x_2) \cdot x_1 & \text{pokud } K = 0, \\ \cosh(\sqrt{|K|x_1}) - \frac{\kappa(x_2)}{\sqrt{|K|}} \sinh(\sqrt{|K|x_1}) & \text{pokud } K < 0. \end{cases}$$

Pro zjednodušení budeme uvažovat, že K je konstantní a že křivka Γ je geodetika a tudíž $\kappa = 0$. Operátor A na varietě s konstantní křivostí K budeme odteď označovat A_K .

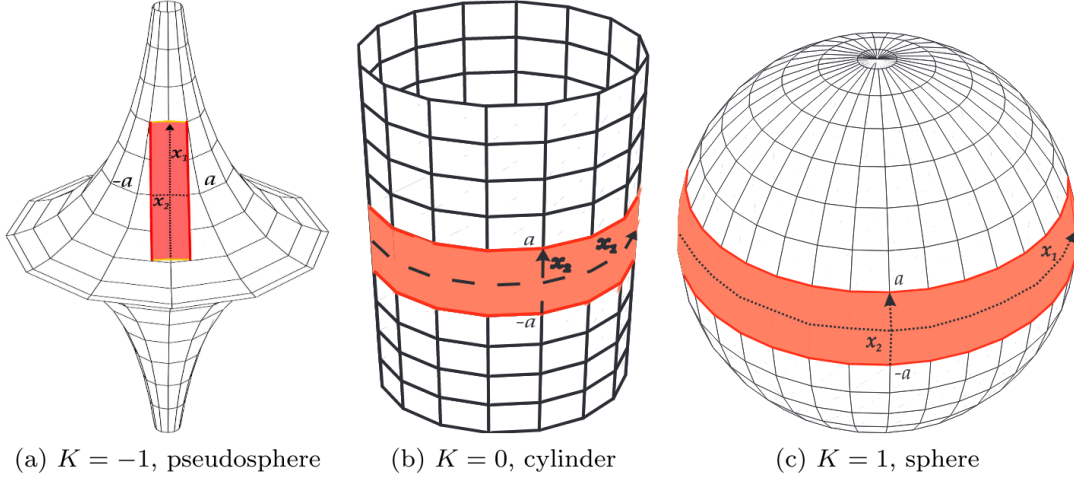
Při rozepsání diferenciálního výrazu $-\text{div}(\epsilon \text{grad } \phi)$ na jednotlivých oblastech Ω_\pm pro různé volby K jednoduše nalezneme vztahy (po nalezení $K > 0$ stačí provést substituci $K \mapsto -K$).

$$A_K = \begin{pmatrix} \epsilon_+ \\ -\epsilon_- \end{pmatrix} \cdot \begin{cases} -\frac{1}{\cos^2(\sqrt{K}x_1)} \partial_2^2 - \partial_1^2 + \sqrt{K} \tan(\sqrt{K}x_1) \partial_1 & \text{pokud } K > 0, \\ -\partial_2^2 - \partial_1^2 & \text{pokud } K = 0, \\ -\frac{1}{\cosh^2(\sqrt{K}x_1)} \partial_2^2 - \partial_1^2 - \sqrt{K} \tanh(\sqrt{K}x_1) \partial_1 & \text{pokud } K < 0, \end{cases} \quad (4.12)$$

Pro další postup se hodí zredukovat možné konstantní křivosti K na tři základní případy

$$K \in \{-1, 0, 1\}, \quad (4.13)$$

což je možné díky lemmatu 4.1.



Obrázek 4.2: Tři možné případy redukované geometrie s konstantní křivostí. [10]

Lemma 4.1. *Nechť je (Ω_0, g) varieta s Gaussovou křivostí $K \neq 0$ definovaná výše v (4.3) a A_K lineární operátor definovaný v (4.11). Potom existuje homotetická transformace $\tau : \Omega_0 \rightarrow \tilde{\Omega}_0$ oblasti $\Omega_0 = (-b, a) \times (0, c)$ na $\tilde{\Omega}_0 = |K|^{\frac{1}{2}}\Omega_0$, že*

$$A_K \psi |_{(x_1, x_2)} = \left(|K| \tilde{A}_{(\text{sgn } K)} \tilde{\psi} \right) \circ \tau |_{(x_1, x_2)}, \quad (4.14)$$

kde vlnky značí objekty na $\tilde{\Omega}_0$. Vlastní čísla operátoru na původní, respektive transformované oblasti, splňují

$$\lambda(K, a, b, c) = |K| \lambda(\text{sgn } K, \sqrt{K}a, \sqrt{K}b, \sqrt{K}c). \quad (4.15)$$

Důkaz. Předpokládejme $K > 0$, druhý případ je obdobný. Gaussovská křivost variety je invariantní vůči reparametrizaci povrchu. Jacobiho rovnici (4.4) pro křivost K přenásobíme $\frac{1}{K}$ a dostáváme

$$\frac{1}{K} \partial_1^2 f + f = 0. \quad (4.16)$$

Chceme najít vztah k operátoru na varietě s křivostí $\text{sgn } K = 1$. Vidíme, že stačí najít takovou transformaci souřadnic $(x_1, x_2) \mapsto (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$, která splňuje $\frac{1}{K} \partial_1^2 f = \tilde{\partial}_1^2 \tilde{f}$ (vlnkou označujeme výrazy v transformovaných souřadnicích).

Tedy \tilde{f} formálně řeší stejnou rovnici (i počáteční podmínky), jako kdyby byla křivost variety $\tilde{K} = 1$. Transformaci $\tilde{x}_1 = \sqrt{K}x_1, \tilde{x}_2 = h(x_2)$, kde h je zatím libovolná nenulová funkce, jednoduše nalezneme derivováním identity $f(x_1, x_2) = \tilde{f}(\tilde{x}_1(x_1, x_2), \tilde{x}_2(x_1, x_2))$.

Dále potřebujeme, aby se sám operátor A správně transformoval. Přímočaře ověříme, že lineární transformace $\tau \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{K}x_1 \\ \sqrt{K}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}$ splňuje vztah

$$\begin{aligned} A_K \psi |_{(x_1, x_2)} &= \left(-\partial_2^2 - \frac{1}{\cos^2(\sqrt{K} x_2)} \partial_1^2 + \sqrt{K} \tan(\sqrt{K} x_2) \partial_2 \right) \psi |_{(x_1, x_2)} \\ &= \left(\left(-K \tilde{\partial}_2^2 - \frac{K}{\cos(\tilde{x}_2)} \tilde{\partial}_1^2 + K \tan(\tilde{x}_2) \tilde{\partial}_2 \right) \tilde{\psi} \right) \circ \tau |_{(x_1, x_2)} \\ &= \left(K \tilde{A}_1 \tilde{\psi} \right) \circ \tau |_{(x_1, x_2)}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Z definičního oboru $(-b, a) \times (0, c)$ nových vlnkovaných souřadnic a posledního vztahu už plyne lemma. \square

4.4 Omezení

Jak bylo uvedeno dříve, omezíme se na geodetiky Γ a na konstantní křivosti $K \in \{1, 0, -1\}$. Válec a sféru s $K = 0$ a $K = 1$ můžeme vložit (embedding) do \mathbb{R}^3 globálně, pseudosféru s $K = -1$ můžeme chápat jako užitečné znázornění pouze lokálně, neboť žádný úplný povrch s konstantní zápornou křivostí nelze globálně vnořit (immersion), tedy ani vložit, do \mathbb{R}^3 .

V případě sférických souřadnic na sféře se dále musíme omezit i na $a, b \in (0, \frac{\pi}{2})$ – tedy tak, abychom si vyhnuli pólu – pásek by poté degeneroval a neměl dvě hrany, neboli zobrazení \mathcal{L} by nebylo difeomorfismus $\Omega_0 \rightarrow \Omega$.

4.5 Separace proměnných

Separací proměnných obdržíme pro libovolnou $\Psi \in L^2(\Omega_0, g)$, [10, Lemma 4.1]

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m(x_1) \phi_m(x_2) \quad \text{v } L^2(\Omega_0, g), \quad (4.18)$$

kde

$$\phi_m(x_2) = \sqrt{\frac{2}{c}} \sin\left(\frac{m\pi}{c} x_2\right), \quad \psi_m(x_1) = (\phi_m, \Psi(x_1, \cdot))_{L^2(J_2)}. \quad (4.19)$$

Po rozepsání výrazu $A_K \Psi$ pomocí tohoto rozkladu a záměně sumy a derivaci, opodstatněné stejně jako v (3.30), obdržíme

$$A_K \Psi = \sum_{m=1}^{\infty} (A_K^m \psi_m) \otimes \phi_m = \left(\bigoplus_{m=1}^{\infty} A_K^m P^m \right) \Psi, \quad (4.20)$$

kde $P^m\Psi$ je m -tý člen rozvoje funkce Ψ , neboli

$$(P^m\Psi)(x_1, x_2) := (\phi_m, \Psi_m(x_1, \cdot))_{L^2(J_2)}\phi_m(x_2) \quad (4.21)$$

a A_K^m značí působení A_K na m -tý člen rozvoje po záměně sumy a derivace

$$A_K^m := \begin{pmatrix} \epsilon_+ \\ -\epsilon_- \end{pmatrix} \cdot \begin{cases} -\partial_1^2 + \tan(x_1)\partial_1 + \frac{(m\pi)^2}{c^2 \cos^2(x_1)}, & \text{pokud } K = 1, \\ -\partial_1^2 + \left(\frac{m\pi}{c}\right)^2, & \text{pokud } K = 0, \\ -\partial_1^2 - \tanh(x_1)\partial_1 + \frac{(m\pi)^2}{c^2 \cosh^2(x_1)}, & \text{pokud } K = -1. \end{cases} \quad (4.22)$$

Operátory A_K^m působí na prostorech $L^2(J_1, d\nu_K)$ s mírou

$$d\nu_K := \begin{cases} \cos(x_1) dx_1, & \text{pokud } K = +1, \\ dx_1, & \text{pokud } K = 0, \\ \cosh(x_1) dx_1, & \text{pokud } K = -1. \end{cases} \quad (4.23)$$

a definiční obory A_K^m jsou dány

$$\text{dom } A_K^m := \left\{ \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} = \psi \in L^2(J_2) \mid \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} \text{ splňuje podmínky (4.11) na } J_2 \right\}.$$

4.6 Unitární transformace

Před řešením rovnic se na chvíli podíváme na unitární transformace operátorů na Hilbertově prostoru \mathcal{H} [16].

Definice 4.2. *Mějme Hilbertův prostor \mathcal{H} . Omezený operátor $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ nazveme unitární, pokud splňuje $UU^* = U^*U = I$, kde I je jednotkový operátor na \mathcal{H} .*

Tvrzení 4.3. *Nechť \mathcal{H} je Hilbertův prostor a $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ unitární operátor. Potom U zachovává skalární součin na \mathcal{H} , tedy*

$$\forall \phi, \psi \in \mathcal{H} : (U\phi, U\psi)_{\mathcal{H}} = (\phi, \psi)_{\mathcal{H}}. \quad (4.24)$$

Důkaz. $(U\phi, U\psi) = (UU^*\phi, \psi) = (\phi, \psi)$. □

Podobně můžeme definovat i unitární zobrazení mezi dvěma Hilbertovými prostory.

Definice 4.4. *Mějme Hilbertovy prostory \mathcal{H}_1 a \mathcal{H}_2 . Potom omezené lineární zobrazení $U : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ nazveme unitární, pokud zachovává skalární součin*

$$\forall \phi, \psi \in \mathcal{H}_1 : (U\phi, U\psi)_{\mathcal{H}_2} = (\phi, \psi)_{\mathcal{H}_1} \quad (4.25)$$

a je surjektivní.

A nyní už výsledky, které se nám budou hodit pro připodobnění spektra operátoru na varietě k případu dříve zkoumanému euklidovského obdélníku. Symboly \mathcal{H} , \mathcal{H}_1 a \mathcal{H}_2 budou označovat i nadále Hilbertovy prostory.

Věta 4.5. *Nechť operátor $A : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ je unitárně podobný operátoru $B : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2$, tedy $B = U^{-1}AU = U^*AU$, kde $U : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1$ je unitární zobrazení. Potom spektrum obou operátorů je shodné. Navíc platí, že operátor A je (esenciálně) samosdružený, právě když B je (esenciálně) samosdružený.*

Důkaz. Rovnost spekter ukážeme pomocí rezolventy $R_\lambda^A = (A - \lambda I)^{-1}$, respektive R_λ^B . Platí $\lambda \in \rho(A) \iff R_\lambda^A$ existuje jako omezený operátor, kde $\rho(A)$ značí rezolventní množinu operátoru A , $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$. Nechť $\lambda \in \rho(B)$, potom existuje R_λ^B a můžeme upravovat

$$\begin{aligned} R_\lambda^B &= (B - \lambda I)^{-1} = (U^{-1}AU - \lambda I)^{-1} = (U^{-1}(A - \lambda I)U)^{-1} \\ &= U^{-1}(A - \lambda I)^{-1}U = U^{-1}R_\lambda^AU, \end{aligned} \quad (4.26)$$

tedy rezolventy existují omezeně právě zároveň, neboť jsme prováděli ekvivalentní úpravy a

$$\begin{aligned} \|R_\lambda^B\|_{\mathcal{H}_2} &= \|U^{-1}R_\lambda^AU\|_{\mathcal{H}_2} = \sup_{\psi \in \mathcal{H}_2, \|\psi\|=1} (U^{-1}R_\lambda^AU\psi, U^{-1}R_\lambda^AU\psi)_{\mathcal{H}_2} \\ &= \sup_{\phi \in \mathcal{H}_1, \|\phi\|=1} (U^{-1}R_\lambda^AU, U^{-1}R_\lambda^AU\phi)_{\mathcal{H}_2} = \|R_\lambda^A\|_{\mathcal{H}_1}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Platí tedy $\lambda \in \rho(A) \iff \lambda \in \rho(B)$, z čehož plyne první část tvrzení. Druhou část dokážeme nejprve pro samosdružené operátory. Nechť například A je samosdružený. Potom platí $\forall \phi \in \text{dom } B^*, \psi \in \text{dom } B$:

$$\begin{aligned} (\phi, B\psi)_{\mathcal{H}_2} &= (\phi, U^*AU\psi)_{\mathcal{H}_2} = (U^*\tilde{\phi}, U^*A\tilde{\psi})_{\mathcal{H}_2} = (A\tilde{\phi}, \tilde{\psi})_{\mathcal{H}_1} = (UA\tilde{\phi}, U\tilde{\psi})_{\mathcal{H}_2} \\ &= (UAU^*\phi, \psi)_{\mathcal{H}_2} = (B\phi, \psi), \end{aligned} \quad (4.28)$$

kde $\tilde{\phi} = U\phi$ a $\tilde{\psi} = U\psi$ a využili jsme unitaritu $U^{-1} = U^*$, jak se lze jednoduše přesvědčit (U je bijekce). Zároveň nahlédneme, že $\psi \in \text{dom } B \iff U\psi \in \text{dom } A$ a obdobně i se sdruženými operátory. Pokud B je naopak samosdružené, provedeme stejnou úpravu a dostáváme opravdu ekvivalenci z tvrzení. Poslední část plyne z definice uzavřeného operátoru a podobného argumentu.

□

4.7 Řešení

4.7.1 Obecné řešení pro $K = 0$

Dle předchozího nyní řešíme rovnici pro vlastní hodnoty

$$\begin{aligned} \pm\epsilon_{\pm} \left(-\psi_{\pm}'' + \left(\frac{m\pi}{c} \right)^2 \psi_{\pm} \right) &= \lambda\psi_{\pm}, \quad \text{neboli} \\ \psi_{\pm}'' &= \left(\left(\frac{m\pi}{c} \right)^2 \mp \frac{\lambda}{\epsilon_{\pm}} \right) \psi_{\pm} \end{aligned} \quad (4.29)$$

za podmínek

$$\begin{cases} \psi_+(a) = 0 = \psi_-(-b), \\ \psi_+(0+) = \psi_-(0-), \\ \epsilon_+\psi_+(0+) = -\epsilon_-\psi_-(0-). \end{cases} \quad (4.30)$$

Tuto úlohu jsme již řešili v první části a přesně odpovídá euklidovskému heterogennímu obdélníku.

4.7.2 Obecné řešení pro $K = 1$

$$\begin{cases} \pm\epsilon_{\pm} \left(-\psi_{\pm}'' + \tan(x)\psi_{\pm}' + \frac{(m\pi)^2}{c^2 \cos^2(x)} \psi_{\pm} \right) = \lambda\psi_{\pm}, \\ \psi_+(a) = 0 = \psi_-(-b), \\ \psi_+(0+) = \psi_-(0-), \\ \epsilon_+\psi_+(0+) = -\epsilon_-\psi_-(0-). \end{cases} \quad (4.31)$$

Diferenciální rovnici můžeme převést substitucí $u = \sin(x)$, $\psi(x) = \tilde{\psi}(u)$ na známý tvar Legendreovy rovnice

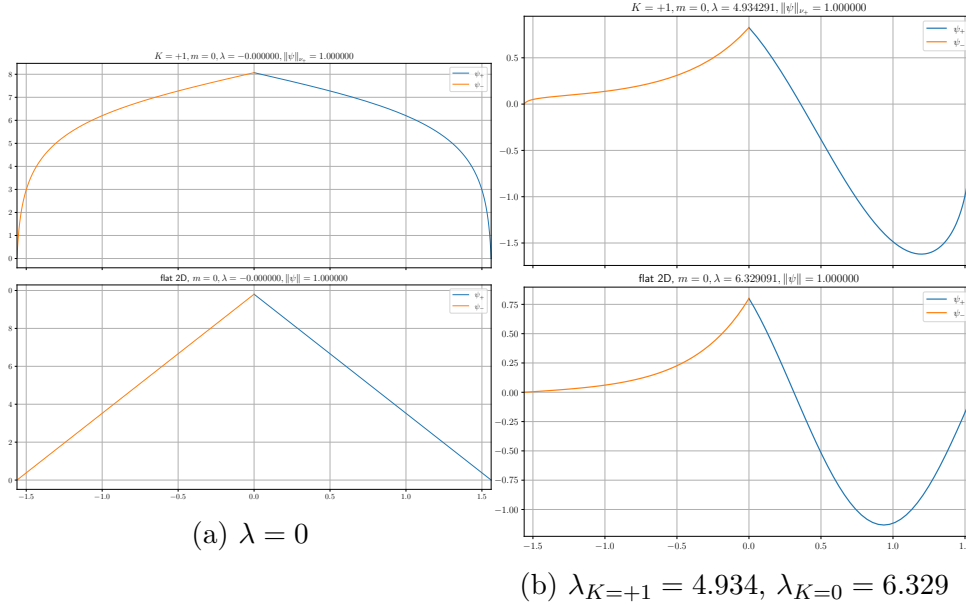
$$(1 - u^2)\tilde{\psi}_{\pm}'' - 2u\tilde{\psi}_{\pm}' - \left(\frac{\left(\frac{m\pi}{c} \right)^2}{1 - u^2} \mp \frac{\lambda}{\epsilon_{\pm}} \right) \tilde{\psi}_{\pm} = 0. \quad (4.32)$$

Řešení rovnice je ve tvaru asociovaných Legendreových funkcí $P_{\nu}^{(\mu)}$, $Q_{\nu}^{(\mu)}$:

$$\psi_{\pm}(x) = C_1^{\pm}\psi_1^{\pm}(x) + C_2^{\pm}\psi_2^{\pm}(x) = C_1^{\pm}P_{\nu_{\pm}}^{(\mu)}(\sin x) + C_2^{\pm}Q_{\nu_{\pm}}^{(\mu)}(\sin x), \quad (4.33)$$

kde

$$\mu := \frac{m\pi}{c}, \quad \nu_{\pm} := \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 \pm \frac{4\lambda}{\epsilon_{\pm}}} - 1 \right). \quad (4.34)$$



Obrázek 4.3: Vlastní funkce $\psi_{m=0}(x_2)$ pro $K = 1$ (nahore) a $K = 0$ (dole), $a = b = \frac{\pi}{2} - 0.01$, $\epsilon_+ = \epsilon_- = 1$.

Pokud by byly řešení (ψ_1^+, ψ_2^+) a (ψ_1^-, ψ_2^-) na jednotlivých částech intervalu lineárně nezávislé, potom bychom rovnici pro vlastní hodnoty dostali z podmínek (4.31) a z požadavku netriviálnosti řešení:

$$\begin{vmatrix} \psi_1^+(a) & \psi_2^+(a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_1^-(-b) & \psi_2^-(-b) \\ \psi_1^+(0) & \psi_2^+(0) & -\psi_1^-(0) & -\psi_2^-(0) \\ \epsilon_+ \psi_1^{+'}(0) & \epsilon_+ \psi_2^{+'}(0) & \epsilon_- \psi_1^{-'}(0) & \epsilon_- \psi_2^{-'}(0) \end{vmatrix} = 0, \quad (4.35)$$

ale pro určité hodnoty parametrů úlohy může nastat, že jedna z asociovaných Legendreových funkcí bude identicky nulová pro všechny hodnoty x . Uveďme za příklad $P_0^{(\mu)}(x)$, která je pro $\mu \in \mathbb{N}$ identicky rovna nule pro všechny x . V tomto případě jsou řešení na jednotlivých částech dané pouze pomocí funkce $Q_0^{(\mu)}$. Po sestrojení obdobné 2×4 matice pro podmínky ale získáváme, že řešení je nakonec triviálně nulové na celém intervalu $(-b, a)$.

Jak jsme uvedli v příkladu, podmínka (4.35) je v případě lineární závislosti funkcí $P_\nu^{(\mu)}$ a $Q_\nu^{(\mu)}$ pouze nutná a řešení se musí dále zkoumat.

Lemma 4.6. *Unitární transformace $U_{+1} : L^2(J_1, dx) \rightarrow L^2(J_1, d\nu_{+1})$*

$$(U_{+1}\psi)(x) := \cos(x)^{-\frac{1}{2}}\psi(x) \quad (4.36)$$

transformuje operátor A_{+1}^m na jednoduchý tvar

$$\begin{aligned} U_{+1}^{-1} A_{+1}^m U_{+1} &= A_{1D} + V_{+1}^m, \\ (V_{+1}^m \psi)(x) &= \frac{8m^2 - 3 - \cos 2x}{8 \cos^2 x} \begin{pmatrix} \epsilon_+ \psi_+(x) \\ -\epsilon_- \psi_-(x) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.37)$$

kde $A_{1D} = A_0^0$ je operátor euklidovské kompozitní struny (3.4) v jedné dimenzi.

Důkaz. U_{+1} je opravdu regulární a unitární, neboť $x \in (-b, a) \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, jak jsme se dříve omezili a $(U_{+1}\psi, U_{+1}\phi)_{(J_1, d\nu_{+1})} = \int_{J_1} (\cos^{-\frac{1}{2}})^2 \psi(x)\phi(x) d\nu_{+1} = \int_{J_1} \psi\phi dx = (\psi, \phi)_{(J_1, dx)}$. Dále se jedná se o přímočarý výpočet, musíme však ohlídat okrajové podmínky operátoru, zejména členy s derivací

$$(\cos^{-\frac{1}{2}} x \psi(x))' = \frac{1}{2} \sin x \cos^{-\frac{3}{2}}(x) \psi(x) + \cos^{-\frac{1}{2}}(x) \psi'(x). \quad (4.38)$$

Snadno ale zjistíme, že platí $\text{dom } A_0^0 = \text{dom } U_{+1}^{-1} A_{+1}^m U_{+1}$. □

Poznámka 4.7. *Poznamenejme, že transformaci na „plochý“ případ s potenciálem můžeme provést obecně. Mějme operátor H v $L^2(\Omega_0, g^{\frac{1}{2}})$ daný předpisem*

$$H = -g^{-\frac{1}{2}} \partial_i g^{\frac{1}{2}} g^{ij} \partial_j \quad (4.39)$$

a metrický tenzor

$$(g_{ij}) := \begin{pmatrix} f^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.40)$$

Potom transformace daná předpisem

$$(\hat{H}\psi)(x) := (g^{\frac{1}{4}} H g^{-\frac{1}{4}} \psi)(x) = -(\partial_i g^{ij} \partial_j \psi)(x) + V(x)\psi(x) \quad (4.41)$$

v $L^2(\Omega)$, kde V je plně určená metrickým tenzorem g , nám dává požadovaný tvar.

4.7.3 Obecné řešení pro $K = -1$

Obdobně k předchozímu případu dostáváme i pro $K = -1$, tedy $f(x) = \cosh(x)$, rovnice

$$\begin{cases} \pm \epsilon_{\pm} (-\psi_{\pm}'' - \tanh(x) \psi_{\pm}' + \frac{(m\pi)^2}{c^2 \cosh^2(x)} \psi_{\pm}) = \lambda \psi_{\pm}, \\ \psi_+(a) = 0 = \psi_-(-b), \\ \psi_+(0+) = \psi_-(0-), \\ \epsilon_+ \psi_+(0+) = -\epsilon_- \psi_-(0-). \end{cases} \quad (4.42)$$

Řešení soustavy mohou být opět vyjádřeny pomocí asociovaných Legendreových funkcí $P_{\nu}^{(\mu)}$, $Q_{\nu}^{(\mu)}$, nyní pouze v složitější formě než dříve:

$$\psi_{\pm}(x) = C_1^{\pm} \psi_1^{\pm}(x) + C_2^{\pm} \psi_2^{\pm}(x) = C_1^{\pm} \frac{P_{\nu_{\pm}}^{(\mu)}(\tanh x)}{\sqrt{\cosh x}} + C_2^{\pm} \frac{Q_{\nu_{\pm}}^{(\mu)}(\tanh x)}{\sqrt{\cosh x}}, \quad (4.43)$$

kde

$$\mu := -\frac{1}{2} + i \frac{m\pi}{c}, \quad \nu_{\pm} := \frac{1}{2} \sqrt{1 \mp \frac{4\lambda}{\epsilon_{\pm}}}. \quad (4.44)$$

Rovnici pro vlastní hodnoty dostaneme z podmínek a z požadavku netriviálního řešení (formálně stejné jako 4.35).

Lemma 4.8. *Unitární transformace $U_{-1} : L^2(J_1, dx) \rightarrow L^2(J_1, d\nu_{-1})$*

$$(U_{-1}\psi)(x) := \cosh(x)^{-\frac{1}{2}} \psi(x) \quad (4.45)$$

transformuje operátor A_{-1}^m na jednoduchý tvar

$$\begin{aligned} U_{-1}^{-1} A_{-1}^m U_{-1} &= A_0^0 + V_{-1}^m, \\ (V_{-1}^m \psi)(x) &= \frac{8m^2 + 3 + \cosh 2x}{8 \cosh^2 x} \begin{pmatrix} \epsilon_+ \psi_+(x) \\ -\epsilon_- \psi_-(x) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

4.8 Omezení na symetrický obdélník a ϵ

Omezme se na symetrické obdélník $a = b$, $\epsilon_+ = \epsilon_-$. V tomto případě je esenciální spektrum neprázdné pro libovolnou konstantní křivost. Pro jednoduchost předpokládejme $a = b$ a ukažme, že $0 \in \sigma_{\text{ess}}(A_K)$ pro libovolné K . Dále ukážeme, že příslušný vlastní podprostor má nekonečnou dimenzi. Pro plochý případ $K = 0$ jsme to již ukázali, dokonce platilo $0 \in \sigma_{\text{ess}}(A_0)$ právě za podmínky $\epsilon_+ = \epsilon_-$.

Zkoumejme, zda-li je 0 opět vlastní hodnota s nekonečnou násobností. Zde volíme $a = b$, neboť z analogie pro $K = 0$ právě tento symetrický případ vedl na $\lambda = 0$ s nekonečnou násobností - ověření náležitosti do esenciálního spektra bude jednodušší, neboť položíme pravou stranu rovnu nule.

4.8.1 Křivost $K = 1$

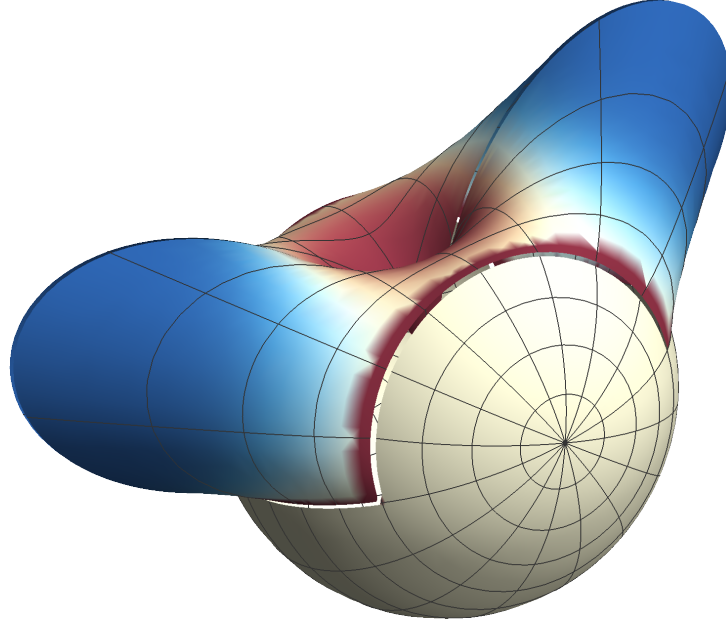
Přepsáno pro $\lambda = 0$ dostáváme

$$-\psi'' + \tan(x)\psi' + \frac{(m\pi)^2}{c^2 \cos^2(x)} \psi = 0. \quad (4.47)$$

Také vidíme (uvažujeme stále stejné okrajové i hraniční podmínky), že řešení ψ bude symetrické podle 0, neboť ψ_+ i ψ_- řeší identickou úlohu.

Dá se ukázat, že obecné řešení (4.47) je dáno pomocí

$$\psi_{\pm}(x) = c_1^{\pm} \cosh\left(\frac{m\pi}{c} \delta_{+1}(x)\right) - i c_2^{\pm} \sinh\left(\frac{m\pi}{c} \delta_{+1}(x)\right), \quad (4.48)$$



Obrázek 4.4: Vlastní funkce Ψ_m příslušná operátoru A_{+1} a vlastnímu číslu $\lambda = 0$. Zde $b = a = \frac{\pi}{4}, c = \pi, m = 3$. Bylo zvoleno $\text{Ran } \Psi_3 = [-1, 1]$, hodnota funkce $1 + \Psi_3$ je vynášena jako poloměr pro dané sférické (přímo Fermiho) souřadnice. Červená hranice je pouze vizuální pomůcka vyznačující Ω , funkce je na hranici nula.

kde $c_1^\pm, c_2^\pm \in \mathbb{C}$ jsou libovolné konstanty a

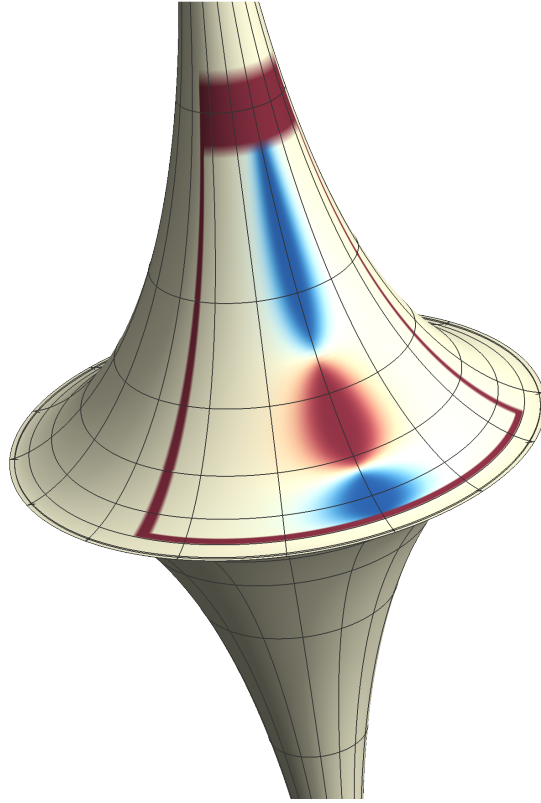
$$\delta_{+1}(x) = \log \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right) - \log \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right). \quad (4.49)$$

Abychom splnili spojitost na rozhraní, musí být $c_1^+ = c_1^-$, jak jednoduše nahlédneme.

Další výpočty jsou kvůli jejich délce v příloze, ale v myšlence jsou stejné jako v plochém případě. Na závěr opravdu dostáváme, že existuje, až na multiplikativní konstantu, jedinečné řešení naší úlohy ve tvaru

$$\begin{aligned} \psi_{m+}(x) &= c_1 \frac{1}{\sinh \left(\frac{m\pi}{c} \delta_{+1}(a) \right)} \sinh \left(\frac{m\pi}{c} (\delta_{+1}(a) - \delta_{+1}(x)) \right), \\ \psi_{m-}(x) &= c_1 \frac{1}{\sinh \left(\frac{m\pi}{c} \delta_{+1}(a) \right)} \sinh \left(\frac{m\pi}{c} (\delta_{+1}(a) + \delta_{+1}(x)) \right). \end{aligned} \quad (4.50)$$

Pro všechna $m \in \mathbb{N}$ tak máme nenulový vlastní vektor příslušející k $\lambda = 0$, které tak patří do $\sigma_{\text{ess}}(A_{+1})$.



Obrázek 4.5: Vlastní funkce Ψ_m příslušná operátoru A_{-1} a vlastnímu číslu $\lambda = 0$. Zde $b = a = 1, c = 1, m = 3$. Bylo zvoleno $\text{Ran } \Psi_3 = [-1, 1]$. Červená hranice je pouze vizuální pomůcka vyznačující Ω , funkce je na hranici nula.

4.8.2 Křivost $K = -1$

Pro $\lambda = 0$ se rovnice pro vlastní vektory změjí na vztah

$$-\psi'' - \tanh(x)\psi' + \frac{(m\pi)^2}{c^2 \cosh^2(x)}\psi = 0. \quad (4.51)$$

Postup je naprosto obdobný případu $K = 1$. Tvary řešení jsou také stejné a můžeme je uvést i ve shodném tvaru. Jediný rozdíl bude ve tvaru funkce δ :

$$\delta_{-1}(x) = \arctan\left(\tanh \frac{x}{2}\right). \quad (4.52)$$

Pro všechna $m \in \mathbb{N}$ tak opět máme nenulový vlastní vektor příslušející k $\lambda = 0$, který patří do $\sigma_{\text{ess}}(A_{-1})$.

Můžeme tak shrnout, že průměty vlastních vektorů příslušné nulové hodnotě (pokud existuje) jsou ve tvaru (4.50) a funkce δ pro různé konstantní křivosti K v tabulce 4.1.

Tabulka 4.1: Funkce δ pro různé křivosti K .

K	$\delta_K(x)$
0	x
+1	$\log(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}) - \log(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2})$
-1	$\arctan(\tanh \frac{x}{2})$

4.9 Esenciální samosdruženost

Lemma 4.9. *Operátor $A : L^2(\Omega_0, g) \rightarrow L^2(\Omega_0, g)$ je symetrický.*

Důkaz. Platí, $\forall \phi, \psi \in \text{dom } A$:

$$\begin{aligned}
(\phi, A\psi)_g &= - \int_{\Omega_0} \bar{\phi} [\partial_1(\epsilon f \partial_1 \psi) + \partial_2(\epsilon f^{-1} \partial_2 \psi)] \\
&= - \int_{\Omega_+} \epsilon_+ \bar{\phi} [\partial_1(f \partial_1 \psi) + \partial_2(f^{-1} \partial_2 \psi)] + \int_{\Omega_-} \epsilon_- \bar{\phi} [\partial_1(f \partial_1 \psi) + \partial_2(f^{-1} \partial_2 \psi)] \\
&= -\epsilon_+ \int_0^c dx_2 \int_0^a dx_1 \bar{\phi} \partial_1(f \partial_1 \psi) - \epsilon_+ \int_0^a dx_1 \int_0^c dx_2 \bar{\phi} \partial_2(f^{-1} \partial_2 \psi) \\
&= \epsilon_- \int_0^c dx_2 \int_{-b}^0 dx_1 \bar{\phi} \partial_1(f \partial_1 \psi) + \epsilon_- \int_{-b}^0 dx_1 \int_0^c dx_2 \bar{\phi} \partial_2(f^{-1} \partial_2 \psi) \\
&= \epsilon_+ \int_{\Omega_+} (\partial_1 \bar{\phi}) f (\partial_1 \psi) + (\partial_2 \bar{\phi}) f^{-1} (\partial_2 \psi) - \epsilon_- \int_{\Omega_-} (\partial_1 \bar{\phi}) f (\partial_1 \psi) + (\partial_2 \bar{\phi}) f^{-1} (\partial_2 \psi) \\
&\quad - \epsilon_+ \left(\int_0^a dx_2 [\bar{\phi} f \partial_1 \psi]_{(0, \cdot)}^{(c, \cdot)} + \int_0^c dx_1 [\bar{\phi} f \partial_2 \psi]_{(\cdot, -b)}^{(\cdot, 0)} \right) \\
&\quad + \epsilon_- \left(\int_0^a dx_2 [\bar{\phi} f \partial_1 \psi]_{(0, \cdot)}^{(c, \cdot)} + \int_0^c dx_1 [\bar{\phi} f \partial_2 \psi]_{(\cdot, -b)}^{(\cdot, 0)} \right) \\
&= \epsilon_+ \int_{\Omega_+} (\partial_1 \bar{\phi}) f (\partial_1 \psi) + (\partial_2 \bar{\phi}) f^{-1} (\partial_2 \psi) - \epsilon_- \int_{\Omega_-} (\partial_1 \bar{\phi}) f (\partial_1 \psi) + (\partial_2 \bar{\phi}) f^{-1} (\partial_2 \psi) \\
&\quad + \int_0^c dx_2 (\epsilon_+ \bar{\phi}_+(0, x_2) \partial_1 \psi_+(0, x_2) + \epsilon_- \bar{\phi}_-(0, x_2) \partial_1 \psi_-(0, x_2)) + 0 \\
&= (f^{-1} \partial_1 \phi_+, \epsilon f^{-1} \partial_1 \psi_+)_g + (\partial_2 \phi_-, \epsilon \partial_2 \psi_-)_g \\
&= (\nabla \phi, \epsilon \nabla \psi)_g = (A\psi, \phi)_g
\end{aligned}$$

kde jsme využili definiční obor operátoru A (4.11) (dirichletovské okrajové podmínky a vztah mezi ψ_{\pm} na rozhraní).

□

Lemma 4.10. *Operátor A_{+1}^m je samosdružený pro všechna $m \in \mathbb{N}$. Označme $\alpha := \max\{a, b\}$, $\eta := \max\{\epsilon_-, \epsilon_+\}$. Pro spektrum $\sigma(A_{+1}^m)$ navíc platí $\text{dist}(\sigma(A_{+1}^m), \sigma(A_{1D})) \leq \|V_{+1}^m\| \leq \eta \left| \frac{8m^2 - 3 - \cos 2\alpha}{8 \cos^2 \alpha} \right|$, kde A_{1D} je operátor euklidovské kompozitní struny (3.4) v jedné dimenzi.*

Důkaz. Operátor $A_{1D} = A_0^0$ je samosdružený, jak jsme ověřili v předchozí kapitole, a operátor $A_0^0 + V_{+1}^m$ též. To platí, protože V_{+1}^m je omezený a symetrický. Jelikož unitární transformace zachovávají spektrum, viz Věta 4.5, první bod je tím dokázán. Navíc platí i rovnost spekter $\sigma(A_0^m) = \sigma(A_0^0 + V_{+1}^m)$.

Uvažujme operátor $(V_{+1}^m\psi)(x) = v(x)\psi(x)$ jako omezenou perturbaci operátoru A_0^0 , u něhož jsme už spektrum určili. Vzdálenost spekter z tvrzení bude omezena právě normou $\|V_{+1}^m\|$, viz [7, V, Thm. 4.10]. Pro normu můžeme uvést následující odhad:

$$\begin{aligned}
\|V_{+1}^m\|^2 &= \sup_{\substack{\psi \in L^2(J_1, d\nu_{+1}), \\ \|\psi\|=1}} \|V_{+1}^m\psi\|^2 = \sup_{\substack{\psi \in L^2(J_1, d\nu_{+1}), \\ \|\psi\|=1=\|\psi\|^2}} \int_{J_1} |\epsilon\psi(x)v(x)|^2 d\nu_{+1}(x) \\
&= \sup_{\substack{\psi \in L^2(J_1, d\nu_{+1}), \\ \|\psi_+\|^2 + \|\psi_-\|^2 = 1}} \left(\int_{-b}^0 |\epsilon_-\psi_-(x)v(x)|^2 d\nu_{+1} + \int_0^a |\epsilon_+\psi_+(x)v(x)|^2 d\nu_{+1} \right) \\
&= \sup_{\substack{\psi \in L^2(J_1, d\nu_{+1}), \\ \|\psi_+\|^2 + \|\psi_-\|^2 = 1}} (\|\epsilon_+\psi_+v\|^2 + \|\epsilon_-\psi_-v\|^2) \\
&\leq \sup_{\substack{\psi \in L^2(J_1, d\nu_{+1}), \\ \|\psi_+\|^2 + \|\psi_-\|^2 = 1}} \|v\|_\infty^2 (\epsilon_+^2 \|\psi_+\|^2 + \epsilon_-^2 \|\psi_-\|^2) = \|v\|_\infty^2 \max\{\epsilon_+^2, \epsilon_-^2\} = v(\alpha)^2 \eta^2,
\end{aligned}$$

kde $\|\cdot\|_\infty$ je maximová norma na intervalu $[a, b]$ (v je spojitá na kompaktu) a na druhém řádku jsme rozložili $\|\psi\|^2 = \int_{J_1} |\psi|^2 = \int_{-b}^0 |\psi_-|^2 + \int_0^a |\psi_+|^2 = \|\psi_-\|^2 + \|\psi_+\|^2$. Úloha vede na hledání vázaných extrémů na elipse. Nejvzdálenější body elipsy od počátku jsou právě póly elipsy. Funkce v je sudá a jediný lokální extrém je v $x = 0$ a jedná se o minimum. Jednoduše zjistíme, že maxima se tak nabývá na krajích intervalu. \square

Lemma 4.11. *Operátor A_{-1}^m je samosdružený pro všechna $m \in \mathbb{N}$. Označme $\eta := \max\{\epsilon_-, \epsilon_+\}$. Navíc platí $\text{dist}(\sigma(A_{-1}^m)\sigma(A_{1D})) \leq \|V_{-1}^m\| \leq \eta(m^2 + \frac{3}{8})$, kde A_{1D} je operátor euklidovské kompozitní struny (3.4) v jedné dimenzi.*

Důkaz. Stejný jako dříve, potenciál má nyní pouze maximum v $x = 0$. \square

Tvrzení 4.12. *Operátor A_K daný (4.11)-(4.12) je esenciálně samosdružený na libovolné $\Omega \subset \mathcal{M}$ s konstantní Gaussovou křivostí K .*

Důkaz. Postup je stejný jako u důkazu Tvrzení 3.9 pro euklidovský případ. Tam jsme v důkazu zavedli pro každé $n \in \mathbb{N}$ samosdružené operátory A_n , jejichž vlastní vektory tvoří ON bázi ve směru kolmém na rozhraní, zde máme naopak samosdružené operátory A_{+1}^m, A_0^m a A_{-1}^m pro každé $m \in \mathbb{N}$. Zbytek už plyne z Lemma 4.1. \square

Závěr

V této práci jsme se zajímali o indefinitní laplacián související s přechodem klasického prostředí s kladnou permitivitou ϵ_+ a metamateriálu se zápornou permitivitou $-\epsilon_-$. Formální předpis pro operátor jsme znovu odvodili z elektrické části Maxwellových rovnic a následně jsme našli příslušný (esenciálně) samosdružený operátor, což bylo obsahem dřívější práce [5].

Operátor jsme zkoumali na omezeném intervalu v \mathbb{R} , na obdélníku $(-b, a) \times (0, c)$ v \mathbb{R}^2 s obecnými parametry $a, b, c \in \mathbb{R}$ a nakonec na obecném tubulárním okolí geodetiky Γ na dvourozměrné riemannovské varietě. Dodejme, že dříve byly zkoumány pouze „symetrické“ obdélníky $(-a, a) \times (0, c)$ v \mathbb{R}^2 (a omezená struna v \mathbb{R}).

V jedné dimenzi máme čistě diskrétní spektrum s hromadnými body $\pm\infty$. U operátoru na euklidovském obdélníku se objevuje i esenciální spektrum v 0, právě když $\epsilon_- = \epsilon_+$. Zda se jedná o vlastní číslo nekonečné násobnosti, nebo hromadný bod spektra, závisí na hodnotách a, b .

Úlohu na dvourozměrné varietě převedli do Fermiho souřadnic s indukovanou metrikou z variety. Podařilo se zajistit (esenciální) samosdruženost pomocí unitární ekvivalence s operátorem, který jsme dříve zkoumali v euklidovských případech. Dále jsme našli implicitní rovnice pro spektrum, které jsou, až na výjimky, dané podmínkou singularnosti jisté reálné 4×4 matice, kde vystupují asociované Legendreovy funkce. Nakonec se nám povedlo potvrdit přítomnost vlastního čísla 0 s nekonečnou degenerací pro případ $\epsilon_+ = \epsilon_-$, $a = b$, což bylo usnadněno pomocí explicitního vyjádření vlastních vektorů v rámci elementárních funkcí.

Podrobnější vyšetření spektra v křivém případě by bylo možné například asymptotickou analýzou rovnice pro vlastní čísla, která by ukázala, zdali se esenciální spektrum v 0 objevuje za obecnějších předpokladů $a = b$. Alternativní přístup by mohl být sestavení singularní posloupnosti funkcí lokalizovaných na rozhraní, která by měla asymptoticky podobné chování jako vlastní funkce operátoru.

Literatura

- [1] Robert A Adams and John JF Fournier. *Sobolev spaces*. Elsevier, 2003.
- [2] Jussi Behrndt and David Krejčířík. An indefinite laplacian on a rectangle. *Journal d'Analyse Mathématique*, 134(2):501–522, 2018.
- [3] E Brian Davies. *Spectral theory and differential operators*. Number 42. Cambridge University Press, 1996.
- [4] Philip Hartman. Geodesic parallel coordinates in the large. *American Journal of Mathematics*, 86(4):705–727, 1964.
- [5] Filip Hložek. Operator theoretic approach to the theory of metamaterials. *Bakalářská práce, FJFI, ČVUT v Praze*, 2014.
- [6] Filip Hložek. Metamaterials: Spectral-theoretic approach. *Diplomová práce, FJFI, ČVUT v Praze*, 2017.
- [7] Tosio Kato. *Perturbation theory for linear operators*, volume 132. Springer Science & Business Media, 2013.
- [8] David Krejčířík. Quantum strips on surfaces. *Journal of Geometry and Physics*, 45(1-2):203–217, 2003.
- [9] David Krejčířík. Geometrical aspects of spectral theory. Dostupné z: <http://nsa.fjfi.cvut.cz/david/other/gspec21.pdf>, 2021. [vid. 2021-05-25].
- [10] David Krejčířík and Petr Siegl. \mathcal{PT} -symmetric models in curved manifolds. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 43(48):485204, e010.
- [11] David Krejčířík, Petr Siegl, Miloš Tater, and Joe Viola. Pseudospectra in non-hermitian quantum mechanics. *Journal of mathematical physics*, 56(10):103513, 2015.
- [12] Graeme W Milton and Nicolae-Alexandru P Nicorovici. On the cloaking effects associated with anomalous localized resonance. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 462(2074):3027–3059, 2006.
- [13] John B Pendry. Negative refraction. *Contemporary Physics*, 45(3):191–202, 2004.

- [14] John B Pendry, Anthony J Holden, David J Robbins, and WJ Stewart. Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena. *IEEE transactions on microwave theory and techniques*, 47(11):2075–2084, 1999.
- [15] John B Pendry, David Schurig, and David R Smith. Controlling electromagnetic fields. *science*, 312(5781):1780–1782, 2006.
- [16] Marshall H Stone. *Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis*, volume 15. American Mathematical Soc., 1932.
- [17] Viktor G Veselago. Electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ . *Usp. Fiz. Nauk*, 92:517, 1967.